

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

ONDAS NA MATÉRIA NUCLEAR

David Augaitis Fogaça

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra

Tese de doutorado apresentada
ao Instituto de Física para a obtenção do
título de doutor em Ciências.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IFUSP)

Prof. Dr. Yojiro Hama (IFUSP)

Prof. Dr. Marcelo Gameiro Munhoz (IFUSP)

Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte (CBPF)

Profa. Dra. Débora Peres Menezes (UFSC)

São Paulo
2009

Agradecimentos

Ao meu pai, minha mãe e meu irmão pelo apoio e incentivo na realização deste trabalho.

Ao orientador e amigo Fernando S. Navarra.

Ao CNPq pelo apoio financeiro para execução deste trabalho.

À FAPESP e CAPES pelo apoio na participação de eventos científicos.

Aos professores do IF: Marina Nielsen, Manoel Robilotta, Celso Lima, Adilson José da Silva e Humberto França, que desempenharam um papel de destaque em minha formação e são bons amigos.

Ao professor e amigo Luiz Gonzaga na contribuição para realização deste trabalho.

Aos professores Sérgio Duarte, Takeshi Kodama, Marcelo Chiapparini, Eduardo Fraga, Sibaji Raha, Dionísio Bazeia e M. Malheiro que contribuíram com ótimas recomendações para a execução deste trabalho.

Aos professores Frenkel, Barata, Mazé, Hussein, Iberê e Yogiro que contribuíram para minha formação acadêmica.

À minha namorada Lorywa pelo incentivo e compreensão.

À minha prima e amiga Monica.

Aos amigos: Regina, Simone, Gabriel, Babi, Dunga, Ricardo, Diogo, Celso Barros, Arthur, Rômulo, Lécio, Daniela, Patrícia, Denis Carmassi, Antonio Carlos C. Pereira, Raphael, Érike, Roberto Parra, Diogo Tridapalli, Rone, Jairo, Mauro, Karin, Priscilla, Edelver.

Ao grande amigo e companheiro Max, um cachorro que pensa que é gente.

À minha Madrinha (em memória).

Abstract

Assuming that nuclear matter can be treated as a perfect fluid, we study the propagation of perturbations in the baryon density. The equation of state is derived from a relativistic mean field model, which is a variant of the non-linear Walecka model. The expansion of the Euler and continuity equations of relativistic hydrodynamics around equilibrium configurations leads to differential equations for the density perturbation. We solve them numerically for linear and spherical perturbations and follow the propagation of the initial pulses. For linear perturbations we find single soliton solutions and solutions with one or more solitons followed by “radiation”. Depending on the equation of state a strong damping may occur. We consider also the evolution of perturbations in a medium without dispersive effects. In this case we observe the formation and breaking of shock waves. We study all these equations also for matter at finite temperature. Our results may be relevant for the analysis of RHIC data. They suggest that the shock waves formed in the quark gluon plasma phase may survive and propagate in the hadronic phase. We also study the non-linear wave equation for perturbations in baryon density and energy density in quark-gluon-plasma (QGP). Under certain conditions solitons may exist in QGP.

Finally we discuss alternative methods for solving non-linear differential equations.

Resumo

Assumindo que a matéria nuclear seja um fluido perfeito, estudamos a propagação de perturbações na densidade bariônica. A equação de estado é obtida através de um modelo relativístico em campo médio, o qual é uma variante do modelo não-linear de Walecka. A expansão das equações de Euler e da continuidade na hidrodinâmica relativística em torno das configurações de equilíbrio nos levam a equações diferenciais para a perturbação na densidade. Resolvemos tais equações numericamente para perturbações lineares e esféricas mediante pulsos iniciais. Para perturbações lineares encontramos soluções solitônicas de pulsos isolados e soluções com vários solitons seguidas de “radiação”. Dependendo da equação de estado um forte amortecimento pode ocorrer. Consideramos também a evolução de perturbações em um meio sem efeitos dissipativos. Nesse caso observamos a formação e quebra de ondas de choque. Depois estudamos todo o formalismo na matéria nuclear em temperatura finita. Nossos resultados podem ser relevantes para análise de dados do RHIC. Eles sugerem que ondas de choque formadas na fase de plasma de quarks e gluons podem sobreviver e se propagar na fase hadrônica. Também estudamos a equação de onda não-linear para perturbações na densidade bariônica e densidade de energia no plasma de quarks e gluons (QGP). Sob certas condições solitons podem existir no QGP.

Finalmente discutimos métodos alternativos de soluções de equações diferenciais não-lineares.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Hidrodinâmica, ondas e solitons na matéria nuclear	1
2	Equações de Onda	8
2.1	Equação de Korteweg e de Vries (KdV)	8
2.2	Variações da equação de KdV	10
2.3	Leis de conservação da KdV	12
2.3.1	Equação da Continuidade	12
2.3.2	Grandezas conservadas da KdV linear	15
2.3.3	Grandezas conservadas da KdV cilíndrica e esférica	17
2.4	Princípio Variacional para KdV	20
3	Hidrodinâmica Relativística	25
3.1	Hidrodinâmica e física de altas energias	25
3.2	Equações de Euler e da Continuidade	26
3.3	Limite não-relativístico	29
3.4	Ondas sonoras com linearização	30
3.5	Ondas além da linearização	33
3.5.1	Expansão na densidade e na densidade de energia . . .	33
3.5.2	Coordenadas cilíndricas e esféricas	34
3.6	Hidrodinâmica relativística com fonte	38
3.6.1	Motivação	38
3.6.2	Equação de Euler relativística com fonte	39
3.6.3	Equação de quebra de onda forçada	40

4	Matéria Nuclear	42
4.1	Motivação	42
4.2	Modificação mínima na QHD	44
4.3	Equações de movimento	44
4.4	Aproximação de Campo Médio (MFT)	45
4.4.1	Por que MFT ?	45
4.4.2	Equações de movimento na MFT	46
4.4.3	\mathcal{L} na MFT	46
4.5	Aproximação de campo médio modificada ($MMFT$)	49
4.6	Densidade de energia a temperatura nula	50
4.7	QHD modificada a temperatura finita	53
4.7.1	Operadores hamiltoniano e número bariônico	53
4.7.2	Função de partição e potencial termodinâmico	58
4.7.3	Grandezas termodinâmicas	61
4.8	Densidade de energia na QHD pura sem MFT	65
4.9	Massa efetiva do núcleon	69
4.10	Parâmetros e acoplamentos	70
5	Obtenção de KdV na matéria nuclear	72
5.1	Relações para densidade de energia	72
5.1.1	I - Matéria nuclear com densidade bariônica de equilíbrio ρ_0 a temperatura nula	72
5.1.2	II - Matéria hadrônica a temperatura finita em uma densidade bariônica arbitrária	74
5.2	Equação de KdV na matéria nuclear	75
5.3	Equação de KdV na QHD pura	85
5.4	Equação de KdV alternativa	86
6	Soluções da equação de KdV	89
6.1	Introdução	89
6.2	KdV linear	89
6.2.1	Solução analítica	89
6.2.2	Dois casos de interesse	93
6.2.3	Sobre a largura dos solitons	94
6.3	Soluções numéricas da KdV linear	97
6.3.1	Temperatura nula	97
6.3.2	Temperatura finita	104

6.4	KdV cilíndrica	111
6.4.1	Solução analítica	111
6.4.2	Dois casos de interesse	113
6.5	Método da expansão em funções elípticas de Jacobi	115
6.5.1	Aplicação na KdV	117
6.5.2	Aplicação na equação de quebra de onda forçada	122
6.6	Soluções numéricas da KdV cilíndrica	128
6.6.1	Temperatura nula	128
6.6.2	Temperatura finita	133
6.7	KdV esférica	140
6.7.1	Dois casos de interesse	140
6.8	Soluções numéricas da KdV esférica	142
6.8.1	Temperatura nula	142
6.8.2	Temperatura finita	147
6.9	Comentários sobre as soluções	153
7	Propagação de ondas no plasma de quarks e gluons	156
7.1	Motivação	156
7.2	Equação de estado para o QGP	157
7.3	Equação de onda no QGP	163
7.3.1	Temperatura nula	163
7.3.2	Temperatura Finita	165
7.4	Análise numérica	170
7.4.1	Condição inicial	170
7.4.2	Temperatura nula	171
7.4.3	Temperatura finita	185
7.4.4	Considerações finais	192
8	Conclusões	193
A	Termodinâmica	196
A.1	Densidade de energia e pressão	196
A.2	Potencial termodinâmico e funções termodinâmicas	199
B	O Princípio de Mínima Ação com derivadas de ordem superior nos campos	201
B.1	Equações de Euler-Lagrange	201

B.2	Tensor Energia-Momento	202
C	Constante de difusão bariônica	206
D	Relações na QHD	209
D.1	Relações úteis em temperatura nula	209
D.2	Relações úteis em temperatura finita	215
E	Funções Elípticas de Jacobi	217

Capítulo 1

Introdução

1.1 Hidrodinâmica, ondas e solitons na matéria nuclear

Como pode ser visto na literatura [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], o uso da hidrodinâmica em sistemas que interagem fortemente vem ganhando importância continuamente tanto no estudo de núcleos estáticos [8], como também no estudo de núcleos em colisões a energias baixas [8], intermediárias [3, 9, 10] e altas [11].

Os modelos hidrodinâmicos tornaram-se mais sofisticados e receberam confirmações de dados experimentais, em particular de medidas de escoamento elíptico no RHIC [12]. As outras abordagens, tais como modelos de cascata de partons, podem oferecer descrições satisfatórias das medidas de distribuições de rapidez e de momento transversal das partículas produzidas, mas quando o sistema apresenta escoamento elíptico (v_2), a única maneira de entender os dados experimentais é através da hidrodinâmica. A medida de v_2 sugere fortemente que estamos observando “o fluido perfeito”.

Um fenômeno característico de fluidos é a formação de ondas. Ondas em um meio hadrônico podem ser produzidas em muitas situações físicas e é possível que já tenham sido observadas no RHIC. Em colisões de íons pesados relativísticos temos colisões parton - parton nas quais os partons finais atravessam o fluido que os envolve e escapam formando jatos. A passagem desses partons pode formar ondas de choque com “cones de Mach” [13, 14], os quais afetarão a distribuição de momento transversal das partículas finais observadas. Existem evidências da formação de “cones de Mach” no RHIC [15, 16].

Sob certas condições solitons (ondas solitárias) podem ser formados. Por essa razão podemos dar um passo adiante no estudo de ondas e procurar por solitons num meio hadrônico. No caso do RHIC, por exemplo, o mesmo movimento supersônico que gera ondas de choque cônicas pode também gerar solitons. Tudo depende de detalhes da equação de estado (EOS) e de aproximações usadas na descrição hidrodinâmica do movimento. Solitons podem também aparecer no núcleo de estrelas densas. Aqui perturbações na densidade bariônica podem ser produzidas, por exemplo, por interações de neutrinos com a matéria bariônica. Estas perturbações podem se propagar como pulsos localizados. Isso nos leva a estudar se e como um sistema esfericamente simétrico favorece a propagação de pulso solitônico na direção radial.

Ondas e solitons na matéria nuclear começaram a ser estudados em detalhe há mais de trinta anos [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Até onde sabemos a primeira aplicação da hidrodinâmica a colisões núcleon-núcleo a energias intermediárias foi feita por Glassgold e colaboradores [24]. Eles assumiram que a energia do projétil não era grande o suficiente para que ele “cavasse um buraco” no alvo e trataram a colisão como a propagação supersônica de uma perturbação num meio fluido infinito. Sugeriram que haveria a formação de uma onda de choque cônica com a conseqüente emissão lateral de partículas do alvo e o ângulo formado pelas partículas produzidas com a direção do feixe seria o ângulo de Mach. Mais tarde, em estudo feito por Amsden e colaboradores [25], foi mostrado que um projétil puntiforme não seria capaz de gerar uma onda de choque, mas um íon pesado leve seria capaz de fazê-lo.

Em [21] esta idéia foi levada adiante. A substituição de um projétil puntiforme e leve (tipicamente um núcleon) por um íon pesado leve implicava em uma perturbação maior do meio e isto exigia a inclusão de um termo a mais na expansão em gradientes de densidade feita inicialmente em [24]. A inclusão deste novo termo mudou substancialmente a solução encontrada para as equações de movimento, que deixou de ser uma onda e passou a ser um pulso localizado, um sólito de KdV. Mais precisamente, a equação de Euler para este movimento é dada por:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \phi \quad (1.1)$$

onde ϕ é o potencial introduzido em [24]:

$$\phi = c_1 \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + c_2 \nabla^2 \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) \quad (1.2)$$

Na expressão anterior $\rho' = \rho - \rho_0$ é a variação da densidade causada pelo íon-projétil, ρ_0 é a densidade nuclear de equilíbrio e c_1 e c_2 são constantes provenientes da teoria utilizada para descrever a matéria nuclear e sua EOS. Em [24] apenas o termo proporcional a c_1 foi considerado. Em [21] o segundo termo foi incluído.

A combinação da equação de Euler acima com a equação da continuidade da hidrodinâmica não-relativística gera a equação de KdV para ρ' com solução solitônica. Esta solução possui [21] velocidade de propagação u e largura λ dada por:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2c_2}{(u - \sqrt{c_1})\sqrt{c_1}}}$$

Vemos que os parâmetros que garantem a existência de solitons são as constantes c_1 e c_2 . Novamente, de acordo com [24], $\sqrt{c_1}$ é a velocidade do som e $\sqrt{c_2}$ é um comprimento pequeno comparado com as dimensões nucleares. Vemos também que a solução existe apenas quando a velocidade de propagação é maior do que a velocidade do som e que quando elas coincidem a largura do sólito tende a infinito.

Quando a velocidade de propagação aumenta, λ diminui e o pulso fica mais localizado. Ao mesmo tempo sua amplitude aumenta. Por outro lado, à medida em que u aumenta, o gradiente de velocidade entre o pulso e o meio (em repouso) aumenta e os efeitos da viscosidade tornam-se importantes. Quando eles são incluídos, através da substituição da equação de Euler pela equação de Navier-Stokes, a energia do pulso é dissipada e transferida para o meio. Esta perda de energia leva à desaceleração do pulso e à redução de sua amplitude.

Dada a estabilidade do sólito, se o projétil se propaga como um pulso de densidade solitônico em uma colisão central com um alvo pesado, este projétil viaja através do alvo sem nenhuma interferência apreciável e emerge na mesma direção do feixe incidente. A assinatura desse evento seria a detecção do projétil ao longo da direção do feixe incidente atrás do núcleo alvo e seria registrado um pequeno número de partículas leves. Mais ainda, os eventos seriam caracterizados por um limite superior na velocidade do projétil da ordem de duas vezes a velocidade do som, acima do qual o fenômeno de solitons desapareceria.

Existem processos dissipativos na matéria nuclear e seus efeitos sobre o pulso solitônico em núcleo finito são difíceis de prever quantitativamente. Ao final de sua trajetória no núcleo-alvo, o pulso solitônico gera fragmentação e

ejeção de partículas. Finalmente, o pulso solitônico também poderia ser refletido de volta ao alvo levando à excitação de todo o sistema e ao surgimento de um núcleo composto.

Do ponto de vista teórico, foi concluído que seria fundamental estudar os detalhes da dinâmica do sóliton na presença de mecanismos dissipativos e também incluir o movimento tridimensional. Isto foi feito no trabalho seguinte do grupo de Marburg [22], com um estudo da equação de Navier-Stokes em três dimensões no limite de não-linearidade fraca, ou seja, fazendo expansões das quantidades relevantes em torno de seus valores de equilíbrio e estudando os termos de mesma ordem no parâmetro de expansão.

Como resultado, este estudo trouxe a conclusão surpreendente de que a viscosidade não altera o movimento. Se o movimento começa com uma flutuação localizada de densidade, no limite de não-linearidade fraca, a dissipação viscosa não altera a natureza do movimento, independentemente dos valores dos coeficientes de viscosidade.

A inclusão do movimento transversal, por outro lado, traz uma mudança significativa. Repetindo o procedimento usado para a obtenção da equação de KdV no caso unidimensional, é possível chegar a uma nova equação, semelhante à de KdV mas com um termo a mais, que envolve a derivada da densidade com relação à coordenada transversal. Os autores de [22] mostraram que esta equação de KdV modificada também admite uma solução solitônica. No entanto, a natureza do movimento resultante varia com o passar do tempo. Partindo de um pulso localizado de densidade, a amplitude do pulso diminui com o tempo. O efeito do termo adicional na equação de KdV é dissipativo. Inicialmente o sóliton permanece localizado por algum tempo mas sempre se alargando e perdendo amplitude. Para tempos maiores a dissipação destrói o sóliton e ele se quebra em instabilidades ondulatórias, que se propagam na direção dianteira. Isto implica numa perda crescente de momento pelo pulso (o que resta dele) e na perda de localização.

Em resumo, a solução do problema tridimensional conduz a um movimento solitônico predominantemente unidimensional (no nosso caso, ao longo da direção do feixe) mas que é amortecido e que “vasa” para a direção transversal.

Continuando a série de trabalhos sobre este tema, o grupo de Marburg estudou em [26] o efeito do tamanho finito do alvo e, em particular, o efeito da superfície nuclear sobre a formação e propagação de solitons. O núcleo foi dividido em duas componentes: a parte central, com densidade constante, e a superfície (ou “pele”), na qual a densidade diminui linearmente com o raio.

Repetindo mais uma vez todos os procedimentos introduzidos em [21], os autores chegaram a duas equações diferenciais: a eq. de KdV já encontrada anteriormente, que continua válida para a parte central do núcleo e uma equação de KdV “forçada”, válida na superfície nuclear. A solução desta última equação também é um sóliton com a interessante propriedade de que, com o passar do tempo sua amplitude aumenta e sua largura diminui! Para valores numéricos aceitáveis das variáveis nucleares, a amplitude do sóliton cresce em até 40 % e a sua largura diminui em até 30 % durante sua passagem pela superfície nuclear. Este estudo mostrou que na busca experimental pelo sóliton nuclear o efeito de superfície não pode ser desprezado.

A física do “sóliton nuclear” foi abandonada por quase uma década até a publicação de [23]. Neste trabalho os autores reconsideraram a expansão (1.2) e tentaram calcular o parâmetro c_2 a partir de uma teoria microscópica da interação núcleon-núcleon, ingrediente fundamental de uma teoria da matéria nuclear. Eles usaram a teoria da matéria nuclear desenvolvida por Vautherin e Brink [27], que tinha como base a interação núcleon-núcleon efetiva de Skyrme. Os parâmetros desta interação foram ajustados de modo que as propriedades do estado fundamental do núcleo fossem reproduzidas. Como é conhecido, a força de Skyrme contém termos dependentes da velocidade. Estes termos geram na densidade de energia e na função potencial ϕ correspondentes um termo contendo o laplaciano da densidade cujo coeficiente é dado por:

$$c_2 = -\gamma \frac{\rho_0}{m}$$

onde γ é um número positivo que contém os parâmetros ajustados da interação de Skyrme. Na expressão acima vemos que o coeficiente c_2 é negativo. Nos trabalhos anteriores [21, 22, 26] ele tinha sido considerado positivo por hipótese, sem nenhuma justificativa. Em [23] foi mostrado que, ao repetirmos o procedimento de obtenção do sóliton, esta mudança de sinal leva também a um sóliton, um pulso de densidade, mas de sinal negativo, que deve ser interpretado como um *pulso de rarefação* ao invés do pulso de compressão conforme encontrado antes.

Passados mais dez anos depois do último artigo sobre o assunto, nós voltamos ao tema [28] por causa de duas razões: a evidência experimental proveniente do RHIC a favor do comportamento hidrodinâmico da matéria nuclear e a necessidade de melhorar o trabalho teórico publicado em [23], que está baseado numa teoria microscópica da interação núcleon-núcleon (e da matéria nuclear) que é muito antiga. Nós nos propusemos a reanalisar o

formalismo do s3liton tendo como ponto de partida uma teoria relativ3stica da mat3ria nuclear, baseada numa variante da *QHD*. Ou seja, a nossa equa33o de estado 3 obtida a partir de uma Teoria de Campo M3dio (*MFT*) [29, 30, 31] do tipo Walecka (*QHD*) [32, 33].

Ainda em [28] estudamos a forma33o e propaga33o de solitons de KdV na mat3ria nuclear fria e conclu3mos que essas ondas solit3rias podem realmente existir no meio nuclear, desde que um acoplamento derivativo entre o campo do n3cleon e do m3son vetorial seja inclu3do na lagrangiana de intera33o. Para essa classe de equa33o de estado (EOS), a qual 3 bem geral, perturba33es na densidade nuclear podem se propagar como um pulso sem dissipa33o.

Durante a an3lise de equa33es de estado mais realistas, percebemos que, muito freq3entemente a velocidade do som c_s est3 entre os valores 0.15 – 0.25. Comparados com a velocidade da luz (em unidades naturais $c = 1$) esses valores n3o s3o muito grandes, mas tamb3m n3o s3o muito pequenos. Isso sugere que mesmo para um movimento lento da mat3ria nuclear, efeitos relativ3sticos podem ser apreci3veis. Investigamos tais efeitos em [34], em [35] e em [36].

A propaga33o de pulsos de densidade pode ser relevante na astrof3sica de estrelas densas. Isso nos motivou a estender nossos resultados para a geometria esf3rica. Em [37, 38] combinamos a equa33o de Euler e da continuidade em coordenadas esf3ricas, considerando simetria angular e obtivemos uma equa33o diferencial muito semelhante 3 equa33o de KdV: a KdV esf3rica para a vari3vel radial! Tamb3m em [38] apresentamos todo o estudo j3 feito na KdV linear e radial, mas em temperatura finita buscando entender como um meio quente e denso favorece (ou n3o) a forma33o e propaga33o de s3liton. Outra novidade 3 o estudo da forma33o e quebra de ondas de choque que tamb3m apresentamos em [38]. Mesmo sem uma motiva33o fenomenol3gica clara e apenas por completeza, estudamos tamb3m no presente trabalho a KdV cil3ndrica devido a familiaridade com o formalismo matem3tico de obten33o da KdV esf3rica.

Nesta tese melhoramos e detalhamos nossos estudos publicados em [28, 34, 35, 37, 38], al3m de apresentar resultados novos. Estudamos as solu33es num3ricas, detalhamos a teoria de campo envolvida, verificamos novos m3todos de solu33o das equa33es diferenciais fazendo assim uma compara33o entre solu33o anal3tica e a num3rica. Finalmente, consideramos a hidrodin3mica de mat3ria nuclear com fonte, como feito em [39, 40, 41].

No pr3ximo cap3tulo fazemos uma revis3o dos aspectos matem3ticos da equa33o de Koreteweg-de Vries. No cap3tulo seguinte fazemos uma revis3o

da hidrodinâmica relativística e mostramos como derivar a equação de KdV (e outras semelhantes a ela) a partir da equação de Euler e da continuidade. Já no capítulo seguinte apresentamos a teoria de campo médio na matéria nuclear. Apesar deste assunto ser muito conhecido nós mostramos muitos detalhes porque estamos introduzindo um termo novo na lagrangiana.

No capítulo 5 derivamos a equação de KdV a partir da hidrodinâmica e da nossa teoria da matéria nuclear.

No capítulo 6 discutimos métodos de soluções de equações diferenciais do tipo da KdV, apresentamos soluções analíticas e numéricas das equações obtidas anteriormente.

No capítulo 7 estudamos as equações que descrevem a propagação de pulsos de densidade de energia no plasma de quarks e gluons. No capítulo 8 apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 2

Equações de Onda

2.1 Equação de Korteweg e de Vries (KdV)

A onda solitária (sóliton) foi originalmente observada pelo engenheiro naval escocês John Scott Russel (1808-1882) no “Union Canal” em Hermiston, próximo ao campus de Riccarton da Universidade Heriot-Watt, em Edimburgo.

Russel observou uma barcaça sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do canal, quando de repente a embarcação parou. A massa de água que esta arrastava continuou sua propagação com uma velocidade constante durante um tempo percorrendo uma certa distância. Em suas próprias palavras descrevendo a observação de tal fenômeno:

“Eu acho que devo introduzir melhor o fenômeno descrevendo as circunstâncias de quando eu tive meu primeiro contato com tal onda. Eu estava observando o movimento de um barco sendo puxado rapidamente ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco parou repentinamente. Então, a massa de água do canal que estava em movimento acumulou-se ao redor da proa do barco num estado de violenta agitação, e em seguida deixou-o para trás e rolou com uma grande velocidade, assumindo a forma de uma larga elevação solitária, um monte d’água redondo, calmo e bem definido, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudar sua forma ou diminuir sua velocidade. Eu segui tal elevação d’água a cavalo, e alcancei-a ainda rolando a uma taxa de 8 ou 9 milhas por hora, preservando sua forma original de 30 pés de longitude e 1 pé e meio de altura. Sua altura diminuiu gradualmente, e após a perseguição de uma ou

duas milhas eu a perdi nos ventos do canal. Foi no mês de agosto de 1834 que ocorreu meu primeiro encontro casual com aquele belo fenômeno singular que eu denominei de “onda de translação”...

O interesse de Russel por esta onda que não se deformara por uma razoável distância não se esgotou neste dia. Ele executou uma série de experimentos que o levou a produzir estas ondas “em série” acumulando água em uma extremidade de um canal raso separada por um anteparo e, subitamente, retirando-o.

Estudos mais precisos foram feitos por Lord Rayleigh e Boussinesq, porém a formulação matemática definitiva do problema só ocorreu no ano de 1895 com o trabalho de Korteweg e de Vries [42] apresentando a equação de onda chamada de equação de KdV. Esta equação descreve a propagação de uma onda longa (amplitude muito menor que seu comprimento) e é obtida através de uma expansão perturbativa das equações da hidrodinâmica [43].

Uma maneira geral de escrever a equação de KdV em notação moderna é:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha f \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1)$$

com os coeficientes $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. A solução analítica tipo sóliton para a equação de KdV é

$$f(x, t) = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{c}{4\beta}} (x - ct) \right]$$

onde c é a velocidade de propagação do sóliton. A expressão acima descreve um pulso que se propaga mantendo sua forma intacta, sem sofrer dissipação ou deformação, preservando sua estrutura com largura λ definida por

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\beta}{c}}$$

e amplitude dada por $3c/\alpha$, ou seja, proporcional à sua velocidade de propagação c .

Além de descrever ondas solitárias em superfícies de canais, a equação de KdV é utilizada para descrever uma série de fenômenos [44], como por exemplo, ondas acústicas em redes anarmônicas, ondas iônicas em plasmas, ondas magneto-hidrodinâmicas em plasmas, fônons excitados termicamente (a baixas temperaturas) em cristais não-lineares, etc.

A equação de KdV apresentada até aqui pode também ser chamada de KdV3 conforme a literatura, pois o termo de maior ordem na derivada espacial é 3 ou simplesmente pelo nome que adotaremos: “KdV linear”. O procedimento para obtê-la será visto adiante em detalhes.

2.2 Variações da equação de KdV

Existem algumas variantes da equação de KdV que trataremos nesse trabalho: KdV esférica, KdV cilíndrica, KdV forçada e a equação de “onda de choque”.

As equações de KdV esféricas e cilíndricas com suas soluções exatas ou aproximadas, são normalmente encontradas no estudo de ondas não-lineares em plasmas [45, 46, 47].

No contexto do presente trabalho a palavra “sóliton” é um abuso de linguagem (utilizado principalmente por razões históricas), uma vez que a mudança de geometria exigindo ora simetria esférica, ora simetria cilíndrica acrescenta um novo termo na equação de KdV usual. Mais especificamente estamos nos referindo ao último termo na equação escrita abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial r} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \delta \frac{u}{t} = 0 \quad (2.2)$$

contendo os seguintes casos:

$$\delta \equiv \begin{cases} 0 & \text{KdV linear} \\ \frac{1}{2} & \text{KdV cilíndrica} \\ 1 & \text{KdV esférica} \end{cases}$$

Nos últimos anos, soluções exatas de equações diferenciais com derivadas parciais foram investigadas. Alguns métodos para obtê-las são: método do balanço homogêneo [48], método da expansão da tangente hiperbólica [49], método da função tentativa [50], método da tangente hiperbólica [51], método da transformação não-linear [52], método da transformação do espalhamento inverso [53], método da transformação de Bäcklund [54], método bilinear de Hirota [55], método da equação de Riccati generalizada [56], método da função elíptica de Weierstrass [57], método da função theta [58], método do seno-cosseno [59] e o método da expansão da função elíptica de Jacobi [60, 61]. Um outro método propondo soluções via “aproximações adiabáticas”

para ondas acústicas em plasmas descritas pela KdV cilíndrica e esférica é o “Método da Partícula” [46].

A investigação numérica da equação (2.2) foi feita em [62, 63] tomando como condição inicial a solução analítica já conhecida (tipo $sech^2$) da KdV linear, ou seja, a solução de (2.2) sem o termo $\delta \frac{u}{t}$.

No caso da KdV cilíndrica (quando $\delta = \frac{1}{2}$ em (2.2)), encontrada primeiramente em [64, 65, 66, 67, 68]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial r} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{u}{2t} = 0 \quad (2.3)$$

temos uma solução analítica exata pois a equação acima é integrável. Usando as transformações [64, 65]:

$$r = \frac{z}{\tau} \quad t = -\frac{1}{2\tau^2} \quad (2.4)$$

e

$$u(r, t) = \frac{r}{2\alpha t} - \frac{w(z, \tau)}{2t} \quad (2.5)$$

na equação diferencial acima, ela se transforma em :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \alpha w \frac{\partial w}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0$$

que conforme já vimos tem solução analítica tipo sóliton. Vemos assim que a solução exata de (2.3) é um sóliton modificado:

$$u(r, t) = \frac{r}{2\alpha t} + \frac{3k}{2\alpha t} sech^2 \left[\sqrt{\frac{k}{8\beta t}} (r + k) \right]$$

com k sendo uma constante relacionada com a velocidade de propagação dessa onda.

No caso da KdV esférica (dada pela escolha $\delta = 1$ em (2.2)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial r} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{u}{t} = 0 \quad (2.6)$$

não há um conjunto de mudança de variáveis como (2.4) e (2.5) que a transforme numa KdV linear. Quando tentamos uma generalização do tipo

$$r = \frac{z}{\tau} 2\delta \quad t = -\frac{\delta}{\tau^2}$$

e

$$u(r, t) = \delta \frac{r}{\alpha t} - \delta \frac{w(z, \tau)}{t}$$

vemos que apenas a escolha $\delta = 1/2$ é consistente. Então tal conjunto de transformações só é válido para a KdV cilíndrica.

A solução exata de (2.6) de acordo com [69] é dada por:

$$u(r, t) = \frac{r}{\alpha t \ln(t)} + \frac{c}{t \ln(t)}$$

sendo c uma constante qualquer. Notamos que tal solução não é solitônica!

Agora apresentamos a equação de “onda de choque”:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{u}{t} = 0 \quad (2.7)$$

que é a equação (2.2) sem o termo de terceira derivada espacial.

Podemos ter equações de onda de choque linear, cilíndrica e esférica.

Além de diferentes geometrias, podemos ainda ter um agente externo (fonte) que influencia na formação da onda de choque:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{u}{t} = F(t) \quad (2.8)$$

onde $F(t)$ é o termo “forçado” dado por uma função dependente do tempo. Novamente α é constante. Aqui $F(t)$ representa a fonte de perturbação do sistema hidrodinâmico em estudo. Agora temos a geometria e a fonte competindo na perturbação da onda e/ou formação do choque.

Equações do tipo (2.8) foram obtidas em [39, 40] e, mais recentemente, em [41], onde o termo de fonte é a densidade de força externa atuando num quark que se move com velocidade constante num plasma de Yang-Mills a uma temperatura finita.

2.3 Leis de conservação da KdV

2.3.1 Equação da Continuidade

As equações diferenciais que surgem na hidrodinâmica expressam a conservação de alguma grandeza. Na hidrodinâmica não-relativística, por exemplo, a equação da continuidade exprime a conservação da massa. Nesta

seção vamos fazer uma revisão das grandezas conservadas na equação de KdV. Uma parte deste estudo pode ser encontrada no livro texto [70], mas outra parte só pode ser encontrada em artigos como [71], [72] e [73].

Vamos reescrever as equações (2.1), (2.3) e (2.6) em uma notação compacta. Tal notação engloba as três geometrias de KdV e com ela as três equações mencionadas podem ser obtidas de:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial X} + \beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2t} \phi = 0 \quad (2.9)$$

onde:

$$\eta = \begin{cases} 0 \Rightarrow X \equiv x & \text{caso linear ou cartesiano} \\ 1 \Rightarrow X \equiv r & \text{caso radial cilíndrico} \\ 2 \Rightarrow X \equiv r & \text{caso radial esférico} \end{cases} \quad (2.10)$$

Para estudarmos grandezas conservadas em (2.9) no caso linear ($\eta = 0$) é interessante lembrarmos de um caso clássico de conservação na dinâmica dos gases. Sendo $\rho(x, t)$ a densidade de matéria de um determinado gás e $u(x, t)$ sua componente da velocidade na direção x temos a equação de conservação da massa dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (2.11)$$

Agora vamos considerar que $\rho u \rightarrow$ constante quando $|x| \rightarrow \infty$ e se ρ e $\partial(\rho u)/\partial x$ são integráveis em $x \in (-\infty, +\infty)$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dx \right) = -(\rho u) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

e conseqüentemente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dx = \text{constante} \quad (2.12)$$

A equação (2.12) representa a conservação da “massa total” do sistema. Essa simples idéia de conservação pode ser generalizada por intermédio de uma equação na forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (2.13)$$

onde geralmente T (*densidade*) e W (*fluxo*) não contém derivadas no tempo. A equação (2.13) é também chamada de *lei de conservação* e conforme já

mencionamos: $W \rightarrow$ constante quando $|x| \rightarrow \infty$ e (2.13) pode ser integrada resultando em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} T dx \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T dx = \text{constante} \quad (2.14)$$

onde interpretamos a integral de T sobre todo x como uma constante de movimento.

Para o caso radial cilíndrico:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rW) = 0 \quad (2.15)$$

temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{+\infty} T r dr \right) + \int_0^{+\infty} \frac{\partial W}{\partial r} r dr + \int_0^{+\infty} W dr = 0$$

e então

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{+\infty} T r dr \right) + W r \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} W dr + \int_0^{+\infty} W dr = 0$$

e como $W \rightarrow$ zero quando $r \rightarrow \infty$ ficamos com:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{+\infty} T r dr \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} T r dr = \text{constante} \quad (2.16)$$

Para o caso radial esférico:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 W) = 0 \quad (2.17)$$

temos de forma semelhante:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{+\infty} T r^2 dr \right) + \int_0^{+\infty} \frac{\partial W}{\partial r} r^2 dr + 2 \int_0^{+\infty} W r dr = 0$$

ou ainda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{+\infty} T r^2 dr \right) + W r^2 \Big|_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} W r dr + 2 \int_0^{+\infty} W r dr = 0$$

e como também $W \rightarrow$ zero quando $r \rightarrow \infty$ obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{+\infty} T r^2 dr \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} T r^2 dr = \text{constante} \quad (2.18)$$

Podemos reunir os três casos (2.13), (2.15) e (2.17) em uma única equação de conservação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{X^\eta} \frac{\partial}{\partial X} (X^\eta W) = 0 \quad (2.19)$$

com

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} T X^\eta dX \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T X^\eta dX = \text{constante} \quad (2.20)$$

contendo (2.14), (2.16) e (2.18). É importante lembrarmos da sutileza com relação ao fluxo W :

$W \rightarrow \text{zero}$ quando $|X| \rightarrow \infty$ sendo que no caso linear

$$-\infty < (X \equiv x) < \infty$$

e nos casos radiais temos

$$0 \leq (X \equiv r) < \infty$$

2.3.2 Grandezas conservadas da KdV linear

Iniciaremos nosso estudo conforme em [70] com a KdV linear ($\eta = 0$):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (2.21)$$

que pode ser reescrita na forma (2.13) como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\alpha}{2} \phi^2 + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (2.22)$$

e para o caso em que $\phi \rightarrow 0$ (bem como suas derivadas espaciais) quando $|x| \rightarrow \infty$ temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi dx \right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\alpha}{2} \phi^2 + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} dx = - \left\{ \frac{\alpha}{2} \phi^2 + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

e assim:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi dx \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi dx = M \quad (2.23)$$

com M sendo uma constante identificada com a massa conservada do sistema descrito pela KdV [70].

Para encontrarmos outra grandeza conservada basta multiplicarmos a equação de KdV (2.21) por ϕ :

$$\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \phi \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\alpha}{3} \phi^3 + \beta \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0 \quad (2.24)$$

que está na forma do tipo (2.13). Temos de (2.24):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi^2}{2} dx \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi^2}{2} dx = \text{constante} \quad (2.25)$$

que é identificada como o “momento” de um sistema descrito pela KdV [70].

Podemos encontrar uma terceira grandeza conservada fazendo:

$$-\frac{\alpha}{2} \phi^2 \times (2.21) + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} (2.21) = 0$$

resultando em

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha}{2} \phi^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\alpha^2}{2} \phi^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\alpha \beta}{2} \phi^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \\ & + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \alpha \beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 + \alpha \beta \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0 \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{\alpha}{6} \phi^3 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\alpha^2}{8} \phi^4 - \frac{\alpha \beta}{2} \phi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha \beta \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \beta^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 \right\} = 0 \quad (2.26) \end{aligned}$$

que também é do tipo (2.13) resultando na grandeza conservada:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\alpha}{6} \phi^3 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx = E \quad (2.27)$$

onde E é uma constante que identificaremos como a “energia” do sistema descrito pela KdV [70].

As três grandezas conservadas apresentadas não esgotam as possibilidades das leis de conservação da KdV. Miura, Gardner e Kruskal [71] em 1968 encontraram mais oito leis de conservação independentes, e na seqüência de tais estudos mostraram que a KdV possui um número infinito de leis de conservação e que essa característica é compartilhada por um grande número de equações diferenciais: as que recebem o título de sistemas integráveis. Porém em nosso trabalho atentaremos apenas a essas três grandezas conservadas.

Em nossos estudos de KdV na matéria nuclear encontraremos uma equação de KdV (2.21) com o acréscimo do termo

$$c_s \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_s \frac{\partial \phi}{\partial x} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (2.28)$$

que possui as seguintes leis de conservação semelhantes à (2.22), (2.24) e (2.26):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ c_s \phi + \frac{\alpha}{2} \phi^2 + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c_s}{2} \phi^2 + \frac{\alpha}{3} \phi^3 + \beta \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0 \quad (2.30)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{\alpha}{6} \phi^3 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\alpha c_s}{6} \phi^3 + \frac{\beta c_s}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{8} \phi^4 - \frac{\alpha \beta}{2} \phi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + \alpha \beta \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \beta^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

e também nos levam às constantes dadas por (2.23), (2.25) e (2.27).

2.3.3 Grandezas conservadas da KdV cilíndrica e esférica

Para as equações de KdV cilíndrica e esférica, dadas respectivamente por $\eta = 1$ e $\eta = 2$ em (2.9):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial X} + \beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2t} \phi = 0 \quad (2.32)$$

o estudo foi desenvolvido por Khater, Moussa e Abdul-Aziz em [72, 73] baseado no teorema de Noether e duas leis de conservação foram encontradas.

A primeira lei de conservação é obtida reescrevendo (2.32) na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} [t^{\eta/2} \phi] + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ t^{\eta/2} \left[\frac{\alpha}{2} \phi^2 + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right] \right\} = 0 \quad (2.33)$$

e a segunda lei de conservação é dada por $\phi \times$ (2.32):

$$\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi^2 \frac{\partial \phi}{\partial X} + \beta \phi \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2t} \phi^2 = 0$$

que é reescrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(t^\eta \frac{\phi^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ t^\eta \left[\frac{\alpha}{3} \phi^3 + \beta \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (2.34)$$

Vamos agora aplicar o método de identificação de leis de conservação para nossa KdV com o novo termo

$$c_s \frac{\partial \phi}{\partial X}$$

em (2.32), ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_s \frac{\partial \phi}{\partial X} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial X} + \beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2t} \phi = 0 \quad (2.35)$$

Esta equação possui duas leis de conservação. Uma delas é análoga à (2.33):

$$\frac{\partial}{\partial t} [t^{\eta/2} \phi] + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ t^{\eta/2} \left[\frac{\alpha}{2} \phi^2 + c_s \phi + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right] \right\} = 0 \quad (2.36)$$

e a outra análoga à (2.34) por intermédio de $\phi \times$ (2.35):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(t^\eta \frac{\phi^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ t^\eta \left[\frac{\alpha}{3} \phi^3 + c_s \frac{\phi^2}{2} + \beta \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (2.37)$$

Uma observação importante é que não temos para (2.35) uma equação do tipo (2.26) que está relacionada com a conservação da energia para o caso cilíndrico e esférico [72, 73].

Podemos reescrever (2.33) e (2.36) na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (t^{\eta/2} T) + \frac{\partial}{\partial X} (t^{\eta/2} W) = 0$$

e então

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\eta}{2t}T = 0 \quad (2.38)$$

e também (2.34) e (2.37) como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^\eta T) + \frac{\partial}{\partial X}(t^\eta W) = 0$$

ou seja:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\eta}{t}T = 0 \quad (2.39)$$

para estudarmos como (2.38) e (2.39) se assemelham com (2.19):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{X^\eta} \frac{\partial}{\partial X}(X^\eta W) = 0$$

ou melhor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\eta}{X}W = 0 \quad (2.40)$$

Comparando (2.38) com (2.40) concluímos que

$$W = T \frac{X}{2t} \quad (2.41)$$

e analogamente para (2.39) com (2.40) obtemos

$$W = T \frac{X}{t} \quad (2.42)$$

e observamos que W e X estão coerentes em termos dimensionais na relação densidade e fluxo no contexto da equação de continuidade, ou seja, (2.33), (2.34), (2.36) e (2.37) são consistentes com (2.40) e apresentam as grandezas conservadas conforme (2.20):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\eta/2} \phi X^\eta dX \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\eta/2} \phi X^\eta dX = \text{constante} \quad (2.43)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^\eta \frac{\phi^2}{2} X^\eta dX \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^\eta \frac{\phi^2}{2} X^\eta dX = \text{constante} \quad (2.44)$$

2.4 Princípio Variacional para KdV

Para completar nossa discussão sobre grandezas conservadas vamos desenvolver um formalismo lagrangiano para a KdV e suas variantes. No formalismo lagrangiano grandezas conservadas surgem da invariância da lagrangiana sob certas transformações. Vamos agora apresentar o formalismo variacional para sistemas de variáveis independentes (conforme [75]) e o estendê-lo para sistemas que também contém dependência nas derivadas de ordem superior dessas variáveis independentes.

Esta seção tem o objetivo de preparar a generalização deste formalismo para teoria de campos que será apresentada em detalhes no Apêndice B e utilizada no capítulo 4 (conforme [38]).

A lagrangiana para a KdV linear ($\eta = 0$ em (2.9)):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

de acordo com [70, 74] é dada por:

$$L = -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\alpha}{6} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^3 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 \quad (2.45)$$

onde ψ é um campo auxiliar para obtenção da KdV que satisfaz a definição:

$$\phi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.46)$$

Podemos reescrever (2.45) em outra notação:

$$L = -\frac{1}{2} \psi_t \psi_x - \frac{\alpha}{6} (\psi_x)^3 + \frac{\beta}{2} (\psi_{xx})^2 \quad (2.47)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_t &\equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \psi_{xx} &\equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

e assim por diante. A lagrangiana acima é função do campo ψ , e de suas derivadas, isto é, $L = L(\psi_x, \psi_t, \psi_{xx})$. De maneira mais geral poderíamos ter outros termos com derivada de segunda ordem e então:

$$L = L(\psi, \psi_x, \psi_t, \psi_{xx}, \psi_{tt}, \psi_{xt})$$

A ação S para o caso mais completo é dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} L(\psi, \psi_x, \psi_t, \psi_{xx}, \psi_{tt}, \psi_{xt}) dx dt \quad (2.48)$$

e pelo cálculo de sua variação $\delta S = 0$ podemos obter as equações de Euler-Lagrange para o campo ψ cuja variação é dada por:

$$\psi(x, t) \rightarrow \psi(x, t) + \delta\psi(x, t)$$

As variações de suas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned} \psi_x(x, t) &\rightarrow \psi_x(x, t) + \delta\psi_x(x, t) \\ \psi_{xx}(x, t) &\rightarrow \psi_{xx}(x, t) + \delta\psi_{xx}(x, t) \\ \psi_t(x, t) &\rightarrow \psi_t(x, t) + \delta\psi_t(x, t) \\ \psi_{tt}(x, t) &\rightarrow \psi_{tt}(x, t) + \delta\psi_{tt}(x, t) \\ \psi_{xt}(x, t) &\rightarrow \psi_{xt}(x, t) + \delta\psi_{xt}(x, t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Em (2.48) $\delta\psi(x, t)$ e suas variações $\delta\psi_x(x, t)$, $\delta\psi_{xx}(x, t)$,... são nulas nos extremos que definem a região onde a ação é minimizada: t_1 e t_2 para t e x_1 e x_2 para a coordenada x . O valor estacionário da ação deve satisfazer a condição:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \delta L(\psi, \psi_x, \psi_t, \psi_{xx}, \psi_{tt}, \psi_{xt}) dx dt = 0 \quad (2.50)$$

que, com o uso de (2.49) se transforma em

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial L}{\partial \psi_x} \delta\psi_x + \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \delta\psi_{xx} + \frac{\partial L}{\partial \psi_t} \delta\psi_t + \right. \\ \left. + \frac{\partial L}{\partial \psi_{tt}} \delta\psi_{tt} + \frac{\partial L}{\partial \psi_{xt}} \delta\psi_{xt} \right\} dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Integrando por partes a equação acima encontramos:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial \psi_x} \delta\psi_x dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_x} \delta\psi \right]_{x_1}^{x_2} dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_x} \right) \delta\psi dx dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial \psi_x} \delta\psi_x dx dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_x} \right) \delta\psi dx dt \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial \psi_t} \delta \psi_t dx dt &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_t} \delta \psi \right] \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_t} \right) \delta \psi dt dx \\
\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial \psi_t} \delta \psi_t dx dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_t} \right) \delta \psi dx dt \quad (2.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \delta \psi_{xx} dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \delta \psi_x \right] \Big|_{x_1}^{x_2} dt + \\
- \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right) \delta \psi_x dx dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right) \delta \psi \right] \Big|_{x_1}^{x_2} dt + \\
+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right) \delta \psi dx dt &
\end{aligned}$$

e finalmente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \delta \psi_{xx} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right) \delta \psi dx dt \quad (2.54)$$

Analogamente, o quinto termo de (2.51) pode ser reescrito como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial \psi_{tt}} \delta \psi_{tt} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{tt}} \right) \delta \psi dx dt \quad (2.55)$$

e o sexto termo como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial \psi_{xt}} \delta \psi_{xt} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xt}} \right) \delta \psi dx dt \quad (2.56)$$

Podemos então reescrever (2.51) usando (2.52) à (2.56):

$$\begin{aligned}
\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_t} \right) + \right. \\
\left. + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{tt}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xt}} \right) \right\} \delta \psi dx dt = 0 \quad (2.57)
\end{aligned}$$

de onde encontramos a equação de Euler-Lagrange [73]:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{tt}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{xt}} \right) = 0 \quad (2.58)$$

Inserindo (2.47) em (2.58) temos:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{2}\psi_t - \frac{\alpha}{2}(\psi_x)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{2}\psi_x \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\beta\psi_{xx}) = 0$$

que se transforma em

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial t} + \alpha\psi_x \frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3\psi_x}{\partial x^3} = 0$$

Lembrando de $\phi \equiv \psi_x$ (conforme (2.46)) temos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \alpha\phi \frac{\partial\phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} = 0 \quad (2.59)$$

Vemos que de fato (2.47) é a lagrangiana para a KdV linear!

Em [73] uma extensão do formalismo lagrangiano foi feita para (2.9) e podemos aplicá-la à uma variante da equação (2.9) que possui o termo extra proporcional a c_s conforme já mencionamos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + c_s \frac{\partial\phi}{\partial X} + \alpha\phi \frac{\partial\phi}{\partial X} + \beta \frac{\partial^3\phi}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2t}\phi = 0 \quad (2.60)$$

e sendo assim escrevemos a lagrangiana para (2.60) conforme:

$$L = t^\eta \left[-\frac{1}{2}\psi_t\psi_X - \frac{c_s}{2}(\psi_X)^2 - \frac{\alpha}{6}(\psi_X)^3 + \frac{\beta}{2}(\psi_{XX})^2 + \frac{\eta}{4t}\psi\psi_X \right] \quad (2.61)$$

onde X e η são dados por (2.10). As definições das derivadas são as mesmas já adotadas em (2.47) e o campo ψ é o mesmo definido em (2.46) mas com a generalização

$$\phi \equiv \frac{\partial\psi}{\partial X} = \psi_X$$

Utilizando (2.61) em (2.58) temos:

$$\begin{aligned} t^\eta \frac{\eta}{4t}\psi_X - t^\eta \frac{\partial}{\partial X} \left[-\frac{1}{2}\psi_t - c_s\psi_X - \frac{\alpha}{2}(\psi_X)^2 + \frac{\eta}{4t}\psi \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[t^\eta \left(-\frac{1}{2}\psi_X \right) \right] + \\ + t^\eta \frac{\partial^2}{\partial X^2}(\beta\psi_{XX}) = 0 \\ t^\eta \frac{\eta}{4t}(\psi_X) - t^\eta \frac{\eta}{4t}(\psi_X) + \frac{t^\eta}{2}(\psi_{tX}) + t^\eta c_s(\psi_{XX}) + t^\eta \alpha(\psi_X)(\psi_{XX}) + \end{aligned}$$

$$+\frac{\eta}{2t}t^\eta(\psi_X) + \frac{t^\eta}{2}(\psi_{Xt}) + t^\eta\beta\psi_{XXXX} = 0$$

que dividida por t^η e usando a definição de ψ_X leva a:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + c_s\frac{\partial\phi}{\partial X} + \alpha\phi\frac{\partial\phi}{\partial X} + \beta\frac{\partial^3\phi}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2t}\phi = 0$$

que é a própria (2.60)!

A invariância da lagrangiana (2.47) sob translações em ϕ , x e t junto com a aplicação do teorema de Noether reproduz as três leis de conservação para “massa”, “momento” e “energia” já encontradas na última seção [70]. O mesmo pode ser dito de (2.61), porém a “energia” não é conservada conforme pode ser constatado em [73].

Uma extensão do formalismo lagrangiano para o hamiltoniano não é tão trivial, uma vez que requer o uso da derivada *variacional* ou derivada de *Fréchet* [70].

Capítulo 3

Hidrodinâmica Relativística

3.1 Hidrodinâmica e física de altas energias

O uso da hidrodinâmica relativística no contexto de física de altas energias teve início com os estudos de Landau [76] bem antes da descoberta da QCD. Colisões a altas energias produzem muitos hadrons de diferentes tipos se propagando em todas as direções. Esperamos que um tratamento coletivo seja adequado para tratar esse sistema complexo.

Recentemente, por causa das experiências feitas no RHIC, o interesse em hidrodinâmica aumentou muito. Nas primeiras publicações do RHIC [12] já citadas, muitos fenômenos foram observados e sugeriram que a matéria produzida nessas colisões se comportava coletivamente como um fluido. Em 2005, pesquisadores do RHIC afirmaram ter observado o “fluido perfeito” com a viscosidade mais baixa possível.

A hidrodinâmica relativística é simples no sentido de que a dinâmica do sistema está contida nas propriedades termodinâmicas, isto é, na equação de estado (EOS). Podemos justificar a necessidade do uso da hidrodinâmica relativística não apenas pela alta velocidade do fluido macroscópico (quando comparada com a velocidade da luz), mas também em situações onde esta velocidade não é alta mas o movimento microscópico das partículas do fluido apresenta velocidades elevadas.

3.2 Equações de Euler e da Continuidade

Para obtermos as equações de movimento relativísticas precisamos estabelecer a forma do tensor energia-momento ($T^{\alpha\beta}$) para um fluido em movimento. Este tensor é uma grandeza simétrica ($T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$) cujas componentes possuem toda a informação da densidade de energia e da densidade de momento do sistema.

O fluxo de momento através de um elemento df_j da superfície de um corpo é exatamente a força atuando neste elemento. Então:

$$T^{ij} df_j$$

é a i -ésima componente da força atuando no elemento de superfície. Considerando o referencial próprio do sistema, é válida a lei de Pascal:

$$T^{ij} df_j = p df_i$$

onde $T_{ij} = pg_{ij}$ com p sendo a pressão. As componentes das densidades de momento T^{0i} são nulas no referencial próprio e a componente $T^{00} = T_{00}$ é a densidade de energia própria do fluido, que será denotada por ε . O tensor energia-momento é então dado por:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

É possível encontrarmos uma expressão para $T^{\alpha\beta}$ em qualquer referencial. Para isso temos que introduzir a 4-velocidade do elemento de fluido:

$$u^\mu = \left(\gamma, \frac{\gamma \vec{v}}{c} \right) \quad (3.2)$$

onde γ é o fator de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.3)$$

Com esta definição é fácil ver que:

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 - \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} = 1 \quad (3.4)$$

Para uso futuro observamos que:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \gamma = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \vec{\nabla} v \quad (3.6)$$

Como $u^\mu u_\mu = 1$ é uma constante a derivada deste produto deve ser nula:

$$\partial_\nu (u^\mu u_\mu) = 0$$

Como consequência:

$$(\partial_\nu u^\mu) u_\mu + u^\mu (\partial_\nu u_\mu) = 0$$

e

$$2u^\mu (\partial_\nu u_\mu) = 0$$

e portanto:

$$u^\mu (\partial_\nu u_\mu) = 0 \quad (3.7)$$

A equação (3.7) que será usada adiante pode também ser obtida mais explicitamente com o uso de (3.4), (3.5) e (3.6).

No referencial de repouso temos $u^0 = 1$ e $u^i = 0$. Num referencial no qual o elemento de fluido está em movimento, a generalização de (3.1) é dada por [77]:

$$T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

onde:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

As componentes do tensor de energia momento são dadas por:

$$T^{00} = \frac{\varepsilon + pv^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)} \quad (3.9)$$

$$T^{ik} = \frac{(\varepsilon + p)v^i v^k}{c^2(1 - v^2/c^2)} + p\delta_{ik} \quad (3.10)$$

e

$$T^{0i} = \frac{(\varepsilon + p)v^i}{c(1 - v^2/c^2)} \quad (3.11)$$

As equações de movimento são obtidas a partir da expressão de conservação da energia e do momento:

$$\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0 \quad (3.12)$$

Projetando (3.12) na direção perpendicular a u^μ :

$$\partial_\nu T_\mu{}^\nu - u_\mu u^\nu \partial_\alpha T_\nu{}^\alpha = 0 \quad (3.13)$$

encontramos:

$$\partial_\nu [(\varepsilon + p)u_\mu u^\nu - pg_\mu{}^\nu] - u_\mu u^\nu \partial_\alpha [(\varepsilon + p)u_\nu u^\alpha - pg_\nu{}^\alpha] = 0$$

que, com o auxílio de (3.4) e (3.7) resulta em:

$$(\varepsilon + p)u^\nu (\partial_\nu u_\mu) = \partial_\mu p - u_\mu u^\nu \partial_\nu p \quad (3.14)$$

Escrevemos agora as componentes temporal ($\mu = 0$) e espaciais da expressão (3.14):

$$(\varepsilon + p)\frac{\gamma}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\right]\gamma = \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma^2}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\right]p \quad (3.15)$$

$$-(\varepsilon + p)\frac{\gamma}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\right](\gamma\vec{v}) = \vec{\nabla}p + \frac{\gamma^2\vec{v}}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\right]p \quad (3.16)$$

Isolando $[\gamma(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})p]/c^2$ em (3.15), substituindo em (3.16) e usando $c = 1$ (unidades naturais), encontramos:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{(\varepsilon + p)\gamma^2}\left(\vec{\nabla}p + \vec{v}\frac{\partial p}{\partial t}\right) \quad (3.17)$$

que é a versão relativística da equação de Euler [77, 78].

A equação de conservação do número de partículas [77, 78] se dá através do uso de u^α , ou seja, é uma equação cuja componente temporal expressa a densidade do número de partículas e as três componentes espaciais formam o vetor fluxo de partículas:

$$\partial_\alpha n^\alpha = 0$$

com $n^\alpha = nu^\alpha$, onde n é a densidade de partículas no referencial próprio. A equação da continuidade para a densidade bariônica (ρ_B) é dada por:

$$\partial_\nu j_B{}^\nu = 0 \quad (3.18)$$

onde $j_B^\nu = \rho_B u^\nu$. Podemos reescrever (3.18) como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_B \gamma) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_B \gamma \vec{v}) = 0 \quad (3.19)$$

que, com o uso de (3.5) e (3.6), resulta na generalização relativística da equação da continuidade em unidades naturais ($c = 1$):

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \gamma^2 v \rho_B \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v \right) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_B \vec{v}) = 0 \quad (3.20)$$

3.3 Limite não-relativístico

O limite não-relativístico da equação da continuidade é obtido fazendo-se $v^2 \ll 1$ ($\gamma \cong 1$). Neste limite (3.19) e conseqüentemente (3.20) se transformam em:

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_B \vec{v}) = 0 \quad (3.21)$$

Em (3.17), além de usarmos $\gamma \cong 1$ é necessário lembrar que a energia está relacionada com a massa do elemento de fluido M e com o momento P e em unidades naturais é dada por:

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{\sqrt{M^2 + P^2}}{V}$$

No limite não-relativístico $M \gg P$ e portanto

$$\varepsilon \cong \frac{\sqrt{M^2}}{V} = \frac{M}{V}$$

A densidade de matéria é dada por $\frac{M}{V} = \rho$ e assim temos:

$$\varepsilon \cong \rho \quad (3.22)$$

A pressão é definida como a força por unidade de área de elemento de fluido A . A força é dada pela derivada temporal do momento P :

$$p = \frac{\text{força}}{A} = \frac{1}{A} \frac{dP}{dt}$$

então

$$\vec{\nabla} p + \vec{v} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{A} \vec{\nabla} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{A} \vec{v} \frac{d^2 P}{dt^2}$$

Como v é pequena, temos que:

$$|\vec{v}|\frac{d^2P}{dt^2} \ll \left| \vec{\nabla}\frac{dP}{dt} \right|$$

e então

$$\vec{\nabla}p + \vec{v}\frac{\partial p}{\partial t} \cong \frac{1}{A}\vec{\nabla}\frac{dP}{dt}$$

e finalmente chegamos a:

$$\vec{\nabla}p + \vec{v}\frac{\partial p}{\partial t} \cong \vec{\nabla}p \quad (3.23)$$

Com base nas aproximações acima e usando (3.22) concluímos que $\varepsilon + p$ assume a forma:

$$\varepsilon + p \cong \rho + \frac{1}{A}\frac{dP}{dt}$$

e, como $\rho \gg \frac{dP}{dt}$ (pois $M \gg P$), obtemos:

$$\varepsilon + p \cong \rho \quad (3.24)$$

Substituindo então $\gamma \cong 1$, (3.23) e (3.24) em (3.17) chegamos à versão não-relativística da equação de Euler:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\left(\frac{1}{M\rho_B}\right)\vec{\nabla}p \quad (3.25)$$

onde usamos a matéria nuclear dada por $\rho = M\rho_B$, ρ_B é a densidade bariônica e M é a massa do núcleon.

3.4 Ondas sonoras com linearização

Num fluido som é definido como uma perturbação longitudinal na densidade, que se propaga em tal fluido. As densidades de energia e pressão são escritas como:

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(x, y, z, t) \quad (3.26)$$

e

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \delta p(x, y, z, t) \quad (3.27)$$

respectivamente. ε_0 e p_0 correspondem ao fluido uniforme e $\delta\varepsilon$ e δp correspondem a perturbações nesse meio. De acordo com [1], para se estudar a

evolução dessa perturbação, uma linearização é feita nas equações de conservação de energia e momento onde apenas termos de primeira ordem em $\delta\varepsilon$, δP e \vec{v} são mantidos nos cálculos. Todos os cálculos são feitos com $c = 1$. A linearização proposta em [1] consiste em desprezar termos proporcionais a:

$$v^2, v\delta\varepsilon, v\delta P, \vec{v} \cdot \vec{\nabla}v, (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \quad (3.28)$$

e potências maiores de todos estes produtos ou combinações deles. Conseqüentemente temos também

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \sim 1$$

Da expressão (3.12) temos:

$$u^\mu \partial_\nu [(\varepsilon + p)u^\nu] + (\varepsilon + p)u^\nu \partial_\nu u^\mu - \partial_\nu (pg^{\nu\mu}) = 0 \quad (3.29)$$

A componente $\mu = 0$ de (3.29) é dada por:

$$\gamma \partial_0 [(\varepsilon + p)\gamma] + \gamma \partial_i [(\varepsilon + p)u^i] + (\varepsilon + p)u^0 \partial_0 \gamma + (\varepsilon + p)u^i \partial_i \gamma - \partial_0 p = 0 \quad (3.30)$$

com as aproximações (3.28) a equação acima se transforma em

$$\partial_0(\varepsilon + p) + \partial_i [(\varepsilon + p)v^i] - \partial_0 p = 0$$

e finalmente, em:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\varepsilon + p)\vec{v}] = 0 \quad (3.31)$$

Considerando agora $\mu = j$ em (3.29) temos:

$$u^j \partial_\nu [(\varepsilon + p)u^\nu] + (\varepsilon + p)u^\nu \partial_\nu u^j - \partial^j p = 0$$

ou ainda:

$$u^j \partial_0 [(\varepsilon + p)u^0] + u^j \partial_i [(\varepsilon + p)u^i] + (\varepsilon + p)u^0 \partial_0 u^j + (\varepsilon + p)u^i \partial_i u^j - \partial^j p = 0$$

Com o uso de (3.28) chegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\varepsilon + p)\vec{v}] + \vec{\nabla} p = 0 \quad (3.32)$$

Substituindo então as expansões (3.26) e (3.27) nas expressões (3.31) e (3.32) encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon_0 + \delta\varepsilon] + \vec{\nabla} \cdot [(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon + p_0 + \delta p)\vec{v}] = 0 \quad (3.33)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon + p_0 + \delta p)\vec{v}] + \vec{\nabla}[p_0 + \delta p] = 0 \quad (3.34)$$

que usando a linearização (3.28) leva a:

$$\frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial t} + (\varepsilon_0 + p_0)\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.35)$$

e

$$(\varepsilon_0 + p_0)\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\delta p) = 0 \quad (3.36)$$

A equação (3.35) expressa a conservação de energia na linearização. Já a expressão (3.36) equivale à 2ª Lei de Newton: o produto da inércia do fluido pela sua aceleração é igual a força resultante.

Definindo a velocidade do som c_s como

$$c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)^{1/2} \quad (3.37)$$

temos que

$$\delta p = c_s^2 \delta\varepsilon \quad (3.38)$$

Substituindo então (3.38) em (3.36) encontramos:

$$(\varepsilon_0 + p_0)\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + c_s^2\vec{\nabla}(\delta\varepsilon) = 0 \quad (3.39)$$

Integrando com relação ao tempo e considerando a constante de integração nula, obtemos a expressão para a velocidade:

$$\vec{v} = -c_s^2 \int \frac{\vec{\nabla}(\delta\varepsilon)}{(\varepsilon_0 + p_0)} dt \quad (3.40)$$

que substituída em (3.35):

$$\frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial t} - c_s^2\vec{\nabla} \cdot \int \vec{\nabla}(\delta\varepsilon) dt = 0$$

que derivada com relação ao tempo, encontramos finalmente:

$$\frac{\partial^2(\delta\varepsilon)}{\partial t^2} - c_s^2\vec{\nabla}^2(\delta\varepsilon) = 0 \quad (3.41)$$

A expressão (3.41) é a equação de uma onda para a perturbação $\delta\varepsilon$ que se propaga com velocidade c_s .

3.5 Ondas além da linearização

3.5.1 Expansão na densidade e na densidade de energia

Apresentamos nesta seção um procedimento analítico para obtenção de equações de onda a partir das equações da hidrodinâmica, que vai além da linearização. Este procedimento já foi utilizado em [21, 23]. Vamos agora considerar termos do tipo (3.28) mas vamos desprezar termos que são proporcionais a potências mais altas no parâmetro de expansão, que será definido a seguir. Mais especificamente, executamos as operações seguintes:

1º) Introduzimos as variáveis adimensionais de densidade de matéria ρ e velocidade v :

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} , \quad \hat{v} = \frac{v}{c_s} \quad (3.42)$$

nas equações (3.17) e (3.20). A grandeza ρ_0 é a densidade de equilíbrio do fluido.

2º) Reescrevemos as equações (3.17) e (3.20), em função de $\hat{\rho}$ e \hat{v} , em “stretched coordinates” ξ e τ que são dadas por [81]:

$$\xi = \sigma^{1/2} \frac{(x - c_s t)}{R} , \quad \tau = \sigma^{3/2} \frac{c_s t}{R} \quad (3.43)$$

onde R é uma escala de distância (por exemplo o tamanho do meio em estudo) e σ ($0 < \sigma < 1$) é um parâmetro pequeno de expansão.

3º) Expandimos (3.42) em torno de seus valores de equilíbrio ($\rho = \rho_0$ e $v = 0$):

$$\hat{\rho} = 1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots \quad (3.44)$$

$$\hat{v} = \sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots \quad (3.45)$$

e escrevemos as equações (3.17) e (3.20) como somas de potências do parâmetro de expansão σ :

$$\sigma \left(\dots \right) + \sigma^2 \left(\dots \right) + \sigma^3 \left(\dots \right) + \dots = 0 \quad (3.46)$$

Neste trabalho Vamos até a ordem σ^2 . Os conteúdos dos parênteses são iguados a zero e fornecem um conjunto de equações que, além de gerar vínculos sobre certas variáveis, quando combinadas entre si fornecem equações de onda mais complexas do que (3.41). Entre elas podemos obter a equação de KdV. Observamos que equação de KdV só é obtida quando há termos

contendo laplacianos na densidade. A equação de KdV sem o termo de terceira derivada é chamada de “equação de quebra de onda”:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + A\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = 0 \quad (3.47)$$

para a perturbação ρ_1 na densidade. A é uma constante não nula qualquer.

Podemos repetir os passos mencionados acima e fazer uma expansão na densidade de energia. Para fluidos relativísticos e para sistemas onde a energia está armazenada principalmente nos campos, a densidade de energia é mais relevante do que a densidade de matéria ou densidade bariônica. Como no caso anterior, fazemos as seguintes operações:

1º) Introduzimos as variáveis adimensionais a partir de ε e v :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad , \quad \hat{v} = \frac{v}{c_s} \quad (3.48)$$

onde ε_0 é a densidade de energia de equilíbrio do fluido e c_s é a velocidade do som.

2º) Reescrevemos as equações (3.17) e (3.20) em função de $\hat{\varepsilon}$ e \hat{v} e no espaço $(\xi - \tau)$ [81]:

$$\xi = \sigma^{1/2} \frac{(x - c_s t)}{R} \quad , \quad \tau = \sigma^{3/2} \frac{c_s t}{R} \quad (3.49)$$

3º) Expandimos (3.48):

$$\hat{\varepsilon} = 1 + \sigma \varepsilon_1 + \sigma^2 \varepsilon_2 + \dots = 1 + \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \dots \quad (3.50)$$

$$\hat{v} = \sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots = \hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \dots \quad (3.51)$$

e as equações (3.17) e (3.20) são escritas na forma

$$\sigma \left(\dots \right) + \sigma^2 \left(\dots \right) + \sigma^3 \left(\dots \right) + \dots = 0 \quad (3.52)$$

3.5.2 Coordenadas cilíndricas e esféricas

Como vamos considerar os casos linear, cilíndrico e esférico é útil lembrar algumas definições. Em coordenadas esféricas para um campo escalar

$$\psi = \psi(r, \theta, \phi)$$

e um campo vetorial

$$\vec{V} = \vec{V}(V_r(r, \theta, \phi), V_\theta(r, \theta, \phi), V_\phi(r, \theta, \phi))$$

definimos as operações matemáticas gradiente e divergente como:

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\text{sen}(\theta)}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2\text{sen}(\theta)} \left\{ \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta}[\text{sen}(\theta) V_\theta] + r \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right\}$$

Analogamente, em coordenadas cilíndricas, para um campo escalar

$$\Psi = \Psi(r, \phi, z)$$

e um campo vetorial

$$\vec{W} = \vec{W}(W_r(r, \phi, z), W_\phi(r, \phi, z), W_z(r, \phi, z))$$

temos:

$$\vec{\nabla}\Psi = \hat{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \hat{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r W_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

As definições acima serão utilizadas para reescrever em coordenadas cilíndricas e esféricas as versões relativísticas das equações de Euler e da Continuidade dadas por (3.17) e (3.20) respectivamente:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{(\varepsilon + p)\gamma^2} \left(\vec{\nabla} p + \vec{v} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \gamma^2 v \rho_B \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v \right) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_B \vec{v}) = 0 \quad (3.54)$$

Por causa da simetria dos problemas a serem estudados, vamos considerar apenas a componente radial destas equações. Utilizando as operações de gradiente e divergente na direção radial podemos reescrever (3.53) e (3.54) numa forma que engloba as duas situações unidimensionais:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{(v^2 - 1)}{(\varepsilon + p)} \left(\frac{\partial p}{\partial X} + v \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (3.55)$$

$$(1 - v^2) \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \rho_B \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial \rho_B}{\partial X} + \eta \frac{\rho_B v}{X} \right) + v \rho_B \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} \right) = 0 \quad (3.56)$$

pois temos $\vec{v} = v \hat{X}$, com \hat{X} um versor na direção da coordenada X , relacionada com η por

$$\eta = \begin{cases} 0 \Rightarrow X \equiv x & \text{caso linear} \\ 1 \Rightarrow X \equiv r & \text{caso radial cilíndrico} \\ 2 \Rightarrow X \equiv r & \text{caso radial esférico} \end{cases} \quad (3.57)$$

Notamos que a única diferença, além da troca de x por r (nas equações (3.55) e (3.56)) entre a coordenada cartesiana e a coordenada radial, é a presença do termo

$$\frac{\rho_B v}{r}$$

no caso cilíndrico e

$$\frac{2\rho_B v}{r}$$

no caso esférico, ambos na equação da continuidade (3.56). Os dois casos estão contidos na forma compacta

$$\eta \frac{\rho_B v}{X}$$

de (3.56) quando $\eta = 1$ e $\eta = 2$ respectivamente. Se quisermos escrever as equações da hidrodinâmica em termos de ε , podemos usar (3.37) na forma $p = c_s^2 \varepsilon$ em (3.55) e assim encontramos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{(v^2 - 1)c_s^2}{(1 + c_s^2)\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) \quad (3.58)$$

Analogamente, substituindo $p = c_s^2 \varepsilon$ na relação de Gibbs (A.17) encontramos:

$$\rho_B = \frac{(1 + c_s^2)\varepsilon - Ts}{\mu_B} \quad (3.59)$$

que inserida em (3.56) leva a:

$$(1 - v^2) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(1 + c_s^2)\varepsilon - Ts}{\mu_B} \right] + \left[\frac{(1 + c_s^2)\varepsilon - Ts}{\mu_B} \right] \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{(1 + c_s^2)\varepsilon - Ts}{\mu_B} \right] + \eta \frac{v}{X} \left[\frac{(1 + c_s^2)\varepsilon - Ts}{\mu_B} \right] \right\} +$$

$$+v \left[\frac{(1+c_s^2)\varepsilon - Ts}{\mu_B} \right] \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} \right) = 0 \quad (3.60)$$

Durante a execução das três etapas com (3.58) e (3.60), obtemos um resultado que é um termo independente de σ , ou seja, é proporcional a σ^0 e aparece em (3.52):

$$\sigma^0 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Ts}{\mu_B} \right) \right] + \sigma(\dots) + \sigma^2(\dots) + \sigma^3(\dots) + \dots = 0$$

e então:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Ts}{\mu_B} \right) = 0 \quad (3.61)$$

que significa que $\frac{Ts}{\mu_B}$ é constante em relação a ξ e se lembrarmos de (3.43) temos

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Ts}{\mu_B} \right) = \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Ts}{\mu_B} \right) = 0$$

De (3.43) temos:

$$X = \frac{R\xi\sigma + R\tau}{\sigma^{3/2}}$$

e conseqüentemente

$$\frac{1}{X} = \frac{\sigma^{3/2}}{(R\xi\sigma + R\tau)}$$

Como $\sigma < 1$ é razoável supor que:

$$R\xi\sigma < R\tau \quad (3.62)$$

e portanto:

$$\frac{1}{X} \cong \frac{\sigma^{3/2}}{R\tau} \quad (3.63)$$

A aproximação (3.62) implica que, no espaço $(X - t)$ existe um “horizonte” definido por:

$$X < 2c_s t \quad (3.64)$$

dentro do qual são válidas as equações diferenciais aqui obtidas. Finalmente, usando a aproximação (3.63) na solução do sistema dos termos proporcionais a σ e σ^2 , pois desprezaremos os termos $\sigma^3, \sigma^4, \dots$ conforme já mencionamos, encontramos no espaço $(X - t)$:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial X} + c_s \left[\left(\frac{3}{2} - c_s^2 \right) \frac{1}{(1+c_s^2)} - \frac{1}{2} \right] \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial X} + \frac{\eta}{2t} \hat{\varepsilon}_1 = 0 \quad (3.65)$$

Esta equação é do tipo (3.47) com o termo dependente da geometria (proporcional a η) e um novo termo dado por

$$c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial X}$$

É curioso que em (3.65) temos a equação para $\hat{\varepsilon}_1$. Essa nova função é $\hat{\varepsilon}_1 \equiv \sigma \varepsilon_1$. Este termo está em (3.50):

$$\hat{\varepsilon} = 1 + \sigma \varepsilon_1 + \sigma^2 \varepsilon_2 + \dots = 1 + \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \dots \quad (3.66)$$

Comparando (3.26):

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(x, y, z, t)$$

com (3.66) escrita na forma $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_1 + \varepsilon_0 \sigma^2 \varepsilon_2 + \dots$ verificamos que

$$\varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_1 = \delta\varepsilon(x, y, z, t)$$

ou seja, é o mesmo tipo de perturbação na densidade de energia discutido na seção 3.4, mas que agora, quando termos não-lineares são considerados, obedece a uma equação diferencial diferente.

3.6 Hidrodinâmica relativística com fonte

3.6.1 Motivação

As equações da hidrodinâmica descrevem o movimento de um fluido, durante o qual a energia é conservada. Em algumas situações a energia pode entrar ou sair do fluido e este ganho ou perda aparece na equação de Euler na forma de um termo de inhomogeneidade. Por exemplo, nas colisões de íons pesados estudadas no RHIC, o fenômeno de “jet-quenching” indica que podemos estudar experimentalmente a passagem de um parton rápido por um meio em equilíbrio térmico com a conseqüente deposição apreciável de energia neste meio. Assim, ao estudarmos a evolução do meio, temos que levar em conta o fato de que, durante esta evolução, a energia aumenta, sendo “injetada” no fluido pelo parton. As equações que governam este movimento “forçado” são [39, 40, 41]:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = J^\nu \quad (3.67)$$

onde J^ν representa o termo de fonte descrevendo o “parton perturbador” que atravessa rapidamente o meio e também interage com ele. O termo inhomogêneo em (3.67) é dado por [41]:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^\nu = f^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{v}t) \sqrt{1 - v^2} \quad (3.68)$$

onde v é a velocidade constante do quark que atravessa o meio dado por um plasma de Yang-Mills a uma temperatura finita.

3.6.2 Equação de Euler relativística com fonte

A versão relativística da equação de Euler com um termo de fonte é:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = f^\nu \quad (3.69)$$

vamos reescrevê-la na forma $\partial_\mu T^{\mu\nu} - f^\nu = 0$ e projetá-la na direção perpendicular a u^μ :

$$\partial_\nu T_\mu^\nu - f_\mu - u_\mu u^\nu \partial_\alpha T_\nu^\alpha + u_\mu u^\nu f_\nu = 0 \quad (3.70)$$

Podemos verificar que (3.70) é a projeção perpendicular pois, quando a multiplicamos por u^μ temos:

$$u^\mu \partial_\nu T_\mu^\nu - u^\mu f_\mu - u^\mu u_\mu u^\nu \partial_\alpha T_\nu^\alpha + u^\mu u_\mu u^\nu f_\nu = 0$$

Usando (3.4) na equação acima temos:

$$u^\mu \partial_\nu T_\mu^\nu - u^\mu f_\mu - u^\nu \partial_\alpha T_\nu^\alpha + u^\nu f_\nu = 0$$

Combinando (3.70) e (3.8) obtemos:

$$\partial_\nu [(\varepsilon + p)u_\mu u^\nu - pg_\mu^\nu] - f_\mu - u_\mu u^\nu \partial_\alpha [(\varepsilon + p)u_\nu u^\alpha - pg_\nu^\alpha] + u_\mu u^\nu f_\nu = 0$$

ou:

$$\begin{aligned} u_\mu \partial_\nu [(\varepsilon + p)u^\nu] + (\varepsilon + p)u^\nu (\partial_\nu u_\mu) - \partial_\mu p - f_\mu - u_\mu u^\nu \{ \partial_\alpha [(\varepsilon + p)u^\alpha] \} u_\nu + \\ - u_\mu u^\nu [\partial_\alpha u_\nu] (\varepsilon + p)u^\alpha + u_\mu u^\nu \partial_\nu p + u_\mu u^\nu f_\nu = 0 \end{aligned}$$

Usando (3.4) e (3.7) chegamos a

$$(\varepsilon + p)u^\nu (\partial_\nu u_\mu) = \partial_\mu p - u_\mu u^\nu \partial_\nu p + f_\mu - u_\mu u^\nu f_\nu \quad (3.71)$$

Notamos que quando não há fonte ($f^\mu = (0, \vec{0})$) a equação acima se reduz a (3.14). Quando $\mu = 0$ temos:

$$(\varepsilon + p)\gamma \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\gamma \right] = \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma^2 \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})p \right] + f_0 - \gamma^2(f_0 - \vec{v} \cdot \vec{f}) \quad (3.72)$$

e quando $\mu = j$ temos:

$$-(\varepsilon + p)\gamma \left[\frac{\partial(\gamma v^j)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\gamma v^j) \right] = \partial_j p - \gamma^2 v^j \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})p \right] - f^j + \gamma^2 v^j (f_0 - \vec{v} \cdot \vec{f}) \quad (3.73)$$

Isolando

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})p$$

em (3.72) e substituindo em (3.73) encontramos a versão relativística da equação de Euler com fonte:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{(\varepsilon + p)\gamma^2} \left(\vec{\nabla} p + \vec{v} \frac{\partial p}{\partial t} + f_0 \vec{v} - \vec{f} \right) \quad (3.74)$$

Sem fonte esta equação se reduz a (3.17).

3.6.3 Equação de quebra de onda forçada

Nossa fonte (inspirada por (3.68)) é dada por:

$$f^\mu = (f^0, \vec{f}) = (f^0, \vec{V} f^0) \quad (3.75)$$

com

$$f^0 = \frac{\sigma^{5/2}}{R} \beta \delta \left(\frac{\sigma^{1/2}}{R} (x - Vt) \right) \quad (3.76)$$

com \vec{V} sendo a velocidade do parton perturbador na direção cartesiana x e β uma constante ajustando a intensidade da força do fluido que atua neste parton. O argumento

$$\frac{\sigma^{1/2}}{R} (x - Vt)$$

da delta de Dirac em (3.76) define nossas variáveis tipo “stretched”:

$$\xi = \sigma^{1/2} \frac{(x - Vt)}{R}, \quad \tau = \sigma^{3/2} \frac{Vt}{R} \quad (3.77)$$

Aplicando agora nossa expansão que envolve usar (3.48), (3.50), (3.51), (3.52) e (3.77) na combinação de (3.74) e (3.20) obtemos:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau} + \left[\left(\frac{3c_s^2}{2V^2} - c_s^2 \right) \frac{1}{(1 + c_s^2)} - \frac{1}{2} \right] \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \xi} = \frac{V\beta}{2c_s^2 \varepsilon_0} \delta(\xi) \quad (3.78)$$

No caso em que $V = c_s$ e $\beta = 0$ (sem fonte) recuperamos (3.65) no espaço $\xi - \tau$ com $X = x$. A equação (3.78) acima é a equação de quebra de onda inhomônea ou forçada.

Capítulo 4

Matéria Nuclear

4.1 Motivação

Vimos que a equação de KdV dada por (2.1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha f \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$$

contém um termo de terceira derivada espacial. Vamos mostrar que a KdV pode ser obtida através da combinação da equação de Euler com a equação da continuidade na hidrodinâmica relativística. Na equação de Euler, que é dada por

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{(\varepsilon + p)\gamma^2} \left(\vec{\nabla} p + \vec{v} \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

notamos que há um gradiente de pressão. Esta está relacionada com a densidade de energia ε através da equação de estado (EOS) $p = c_s^2 \varepsilon$, onde c_s é a velocidade do som na matéria nuclear. Este gradiente é reescrito na forma:

$$\vec{\nabla} p = c_s^2 \vec{\nabla} \varepsilon$$

Das equações acima podemos concluir que um termo de terceira derivada espacial aparecerá se tivermos a seguinte forma para a densidade de energia:

$$\varepsilon \propto \dots + \dots \vec{\nabla}^2 \rho_B + \dots$$

pois assim teremos:

$$\vec{\nabla} p \propto \vec{\nabla} (\dots + \dots \vec{\nabla}^2 \rho_B + \dots) \propto \dots + \dots \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) \dots + \dots$$

Vamos mostrar como obter $\vec{\nabla}p \propto \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^2\rho_B)$ na matéria nuclear, partindo da teoria relativística mais simples que é a “Quantum Hadrodynamics”, ou *QHD* [33]. Isto pode ser feito de duas maneiras:

1) *Conservando a teoria original e mudando o esquema de aproximações usadas para tratá-la* ou **2)** *modificando a teoria original com a inclusão de novos termos na lagrangiana.*

Vamos iniciar este capítulo descrevendo a alternativa **2)** e mais tarde, de forma resumida a alternativa **1)**.

A *QHD* não possui derivadas de ordem superior nos campos fermiônicos e na sua utilização envolvendo a aproximação mais simples de campo médio (*MFT*), onde as derivadas dos campos mesônicos são desprezadas, não prevê a formação e propagação de solitons. No entanto, solitons podem surgir se modificarmos a densidade de lagrangiana, \mathcal{L}_{QHD} , com a adição de um termo que dê origem ao laplaciano da densidade bariônica na densidade de energia. Vamos mostrar que, com a adição do novo termo, basta prosseguir no formalismo e naturalmente obteremos a KdV em uma dimensão:

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \alpha\rho_1\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3\rho_1}{\partial x^3} = 0$$

onde ρ_1 é uma pequena perturbação na densidade bariônica em relação à densidade de equilíbrio do sistema. O termo adicionado a \mathcal{L}_{QHD} sobreviverá no novo esquema de aproximação *MFT* e desempenha o papel de pequena correção ao termo usual já existente que envolve o acoplamento entre o campo fermiônico e o campo vetorial:

$$g_V\bar{\psi}V_\mu\gamma^\mu\psi$$

Desta maneira construímos uma *QHD* modificada, *MQHD*, com as virtudes da *QHD* usual e que comporta solitons. A *MQHD* é a maneira **2)** mencionada acima.

Tal modificação será apresentada na seção seguinte e por isso detalhamos vários cálculos neste capítulo pois queremos evidenciar sua contribuição na *QHD* e observar sua “propagação” pelas expressões.

4.2 Modificação mínima na QHD

Vamos acrescentar à lagrangiana da QHD [33] um novo termo que chamaremos de “*termo-d*”:

$$termo-d \equiv d \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \psi \quad (4.1)$$

que passará a ser:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{QHD} + termo-d = & \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi)] \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_S^2 \phi^2) + \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_V^2 V_\mu V^\mu - \frac{b}{3} \phi^3 - \frac{c}{4} \phi^4 + d \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (4.2)$$

O parâmetro d é livre e atuará como um “marcador”, pois para $d = 0$ temos a QHD usual e quando $d = 1$ o acoplamento é o padrão dado por g_V . Outros valores de d implicarão em correções em g_V .

Podemos fazer uma estimativa da ordem de grandeza de (4.1) da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\partial}{m_V} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{p}{m_V} \right)^2 \sim \frac{k_F^2}{m_V^2} \sim 0.12 \quad (4.3)$$

onde o momento de Fermi é $k_F \simeq 0.28$ GeV e $m_V \simeq 0.8$ GeV. Vemos que (4.1) é apenas uma pequena correção a $g_V \bar{\psi} V_\mu \gamma^\mu \psi$ conforme mencionamos!

A forma escolhida para a interação dada por (4.1) não é regida por nenhum argumento de simetria e não tem outra justificativa mais profunda. O acoplamento derivativo (4.1) é apenas um possível termo de interação usado como protótipo para explorar os efeitos de ordens mais altas nas derivadas dos campos.

4.3 Equações de movimento

Como (4.2) possui derivadas de ordem mais alta, as equações de Euler-Lagrange são dadas por (B.4):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_i)} + \partial^\mu \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \partial^\lambda \eta_i)} \right] = 0 \quad (4.4)$$

cuja dedução está no apêndice. Os campos η_i são dados por $\eta_i = \psi, \phi, V^\mu$. Usando (4.4) com (4.2) para o campo ψ encontramos:

$$\left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi) + d \frac{g_V}{m_V^2} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \right] \psi = 0 \quad (4.5)$$

Analogamente para o campo ϕ encontramos:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_S^2)\phi = g_S \bar{\psi} \psi - b\phi^2 - c\phi^3 \quad (4.6)$$

Lembrando a definição de $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$$

podemos reescrever o termo: $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ em (4.2) como:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu$$

e assim (4.2) se transforma em:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_S^2 \phi^2) + \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu + \\ & -\frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu + \frac{1}{2}m_V^2 V_\mu V^\mu - \frac{b}{3}\phi^3 - \frac{c}{4}\phi^4 + d\frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\partial_\nu \partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu \psi \quad (4.7) \end{aligned}$$

Usando (4.4) e (4.7) para o campo V^μ encontramos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_V^2 V^\nu = g_V \bar{\psi} \gamma^\nu \psi - d\frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) \quad (4.8)$$

4.4 Aproximação de Campo Médio (*MFT*)

4.4.1 Por que *MFT*?

No contexto de modelos da matéria nuclear infinita a aproximação de campo médio usual, conforme [33], é baseada em dois argumentos fortes:

a) as fontes bariônicas são intensas e seus acoplamentos com os campos mesônicos são fortes. Logo o número de ocupação dos estados mesônicos é grande e podemos assumir que os campos mesônicos são clássicos.

b) a matéria nuclear infinita é estática, homogênea e isotrópica. Logo podemos desprezar todas as derivadas dos campos mesônicos.

Sendo assim, podemos fazer as substituições

$$V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0 \quad (4.9)$$

e

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0 \quad (4.10)$$

em \mathcal{L} e nas equações de movimento. Após estas substituições desprezamos todas as derivadas espaciais e temporais de V_0 e ϕ_0 .

4.4.2 Equações de movimento na *MFT*

Fazendo as substituições de (4.9) e (4.10) nas equações de movimento (4.5) e (4.6) encontramos:

$$\left[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0 - (M - g_S \phi_0) \right] \psi = 0 \quad (4.11)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_S^2) \phi_0 = g_S \bar{\psi} \psi - b\phi_0^2 - c\phi_0^3 \quad (4.12)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.8):

$$\partial_\mu (\partial^\mu \delta^{\nu 0} V_0 - \partial^\nu \delta^{\mu 0} V_0) + m_V^2 \delta^{\nu 0} V_0 = g_V \bar{\psi} \gamma^\nu \psi - d \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi)$$

ou seja:

$$\partial_0 \partial^0 \delta^{\nu 0} V_0 - \vec{\nabla}^2 (\delta^{\nu 0} V_0) - \partial_0 \partial^\nu V_0 + m_V^2 \delta^{\nu 0} V_0 = g_V \bar{\psi} \gamma^\nu \psi - d \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi)$$

que multiplicada por $\delta^{\nu 0}$ se transforma em:

$$-\vec{\nabla}^2 V_0 + m_V^2 V_0 = g_V \bar{\psi} \gamma^0 \psi - d \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^0 \psi) \quad (4.13)$$

Finalmente, se desprezarmos todas as derivadas espaciais e temporais de V_0 e ϕ_0 nas equações de movimento (4.11), (4.12) e (4.13) obteremos:

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0 - (M - g_S \phi_0)] \psi = 0 \quad (4.14)$$

$$m_S^2 \phi_0 = g_S \bar{\psi} \psi - b\phi_0^2 - c\phi_0^3 \quad (4.15)$$

e

$$m_V^2 V_0 = g_V \bar{\psi} \gamma^0 \psi - d \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^0 \psi) \quad (4.16)$$

4.4.3 \mathcal{L} na *MFT*

Para cálculo da densidade de energia ε na *MFT* com dependência no laplaciano da densidade bariônica faz-se necessário reescrever (4.1) de tal forma que o *termo-d* contenha derivadas em $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, uma vez que a densidade bariônica é dada por $\rho_B = \bar{\psi} \gamma^0 \psi$.

Outra razão para reescrevermos (4.1) no cálculo de ε é que na *MFT* nós desprezamos todas as derivadas espaciais e temporais de V_0 e ϕ_0 e conseqüentemente a derivada

$$d\frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\partial_\nu\partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu\psi \longrightarrow (MFT) \longrightarrow d\frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\partial_\nu\partial^\nu V_0)\gamma^0\psi$$

será desprezada e então não veremos nenhum efeito do acoplamento derivativo no cálculo de ε . A contribuição do *termo-d* em (4.16) isoladamente não é suficiente para o aparecimento de laplacianos em ρ_B conforme veremos adiante. O acoplamento (4.1) está numa forma ideal para ser somado na \mathcal{L}_{QHD} para cálculo das equações de movimento e interpretação física, porém deve ser manipulado para fornecer as variações desejadas em ρ_B e isso é feito conforme a seguir.

A ação S da teoria (usando por exemplo a forma mais detalhada, que é (4.7)) é dada por:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \{ \mathcal{L}_{QHD} + \textit{termo-d} \} = \\ &= \int d^4x \mathcal{L}_{QHD} + \int d^4x \left\{ d\frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\partial_\nu\partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu\psi \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

A integral contendo o termo de acoplamento derivativo pode ser feita mediante integração por partes:

$$\int d^4x \left\{ d\frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\partial_\nu\partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu\psi \right\} = - \int d^4x \left\{ d\frac{g_V}{m_V^2}[\partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]\partial^\nu V_\mu \right\}$$

ou

$$\int d^4x \left\{ d\frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\partial_\nu\partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu\psi \right\} = -d\frac{g_V}{m_V^2} \int d^4x \left\{ [\partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]\partial^\nu V_\mu \right\} \quad (4.18)$$

onde o termo de superfície é nulo, ou seja:

$$\left[(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial^\nu V_\mu \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Fazendo novamente a integração por partes em (4.18) obtemos

$$\int d^4x \left\{ d\frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\partial_\nu\partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu\psi \right\} = d\frac{g_V}{m_V^2} \int d^4x \left\{ [\partial^\nu\partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]V_\mu \right\} \quad (4.19)$$

onde novamente o termo de superfície é nulo, ou seja:

$$-\left\{[\partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]V_\mu\right\}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Substituindo (4.19) em (4.17):

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}_{QHD} + d \frac{g_V}{m_V^2} \int d^4x \left\{[\partial^\nu \partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]V_\mu\right\}$$

resultando numa forma alternativa de \mathcal{L} (que antes era dada por (4.7)):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QHD} + d \frac{g_V}{m_V^2} [\partial^\nu \partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]V_\mu$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_S^2 \phi^2) + \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu + \\ & - \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu + \frac{1}{2}m_V^2 V_\mu V^\mu - \frac{b}{3}\phi^3 - \frac{c}{4}\phi^4 + d \frac{g_V}{m_V^2} [\partial^\nu \partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]V_\mu \quad (4.20) \end{aligned}$$

Agora substituiremos (4.9) e (4.10) em (4.20):

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0, \quad \phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0)$$

e encontraremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\psi}[(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0) - (M - g_S \phi_0)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - m_S^2 \phi_0^2) + \\ & + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} V_0)^2 + \frac{1}{2}m_V^2 V_0^2 - \frac{b}{3}\phi_0^3 - \frac{c}{4}\phi_0^4 + d \frac{g_V}{m_V^2} [\partial^\nu \partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^0\psi)]V_0 \quad (4.21) \end{aligned}$$

e por último basta desprezarmos todas as derivadas espaciais e temporais de V_0 e ϕ_0 em (4.21) obtendo assim a versão final de \mathcal{L} na *MFT*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* = & \bar{\psi}[(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0) - (M - g_S \phi_0)]\psi - \frac{1}{2}m_S^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2}m_V^2 V_0^2 + \\ & - \frac{b}{3}\phi_0^3 - \frac{c}{4}\phi_0^4 + d \frac{g_V}{m_V^2} [\partial^\nu \partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^0\psi)]V_0 \quad (4.22) \end{aligned}$$

4.5 Aproximação de campo médio modificada (MMFT)

No que se segue, vamos introduzir uma esquema de aproximações que é uma alternativa à teoria de campo médio usual. Continuamos a supor que os campos mesônicos sejam clássicos, mas vamos introduzir inhomogeneidades pequenas espaciais e temporais. Estas últimas, no entanto serão desprezadas com base no argumento seguinte. A propagação do número de bárions na matéria nuclear foi estudada em [79] com o auxílio da equação de difusão:

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 \rho_B \quad (4.23)$$

A constante de difusão D foi numericamente calculada como uma função da densidade e da temperatura, sendo $D \simeq 0.35 \text{ fm}$ para densidades comparáveis com a densidade nuclear de equilíbrio e temperaturas da ordem de 80 MeV. O valor exato de D em $T = 0$ é desconhecido, mas sua dependência com a temperatura e densidade é bem estável e uma extrapolação para $T = 0$ resulta em valores ainda menores do que 0.35 fm. Esse número é pequeno quando comparado a qualquer escala de tamanho nuclear e pode ser interpretado como um indicador do não desaparecimento muito rápido de gradientes espaciais na matéria nuclear. Um gráfico dos valores de D e uma breve discussão está no Apêndice C.

Além de desprezar a primeira derivada temporal de ρ_B , se usarmos (4.23) duas vezes na segunda derivada temporal de ρ_B :

$$\left(\frac{\partial^2 \rho_B}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(D \vec{\nabla}^2 \rho_B \right) = D \vec{\nabla}^2 \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial t} \right) = D^2 [\vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla}^2 \rho_B)] \quad (4.24)$$

podemos também desprezá-la pois além de $D^2 \ll 1$ consideramos também $\vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla}^2 \rho_B) < (\vec{\nabla}^2 \rho_B)$.

Conforme já mencionamos, a densidade bariônica é dada por $\rho_B = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi$ e conseqüentemente quaisquer derivadas temporais envolvendo combinações de $[\partial_0 (\bar{\psi} \gamma^0)]$ e $(\partial_0 \psi)$ também serão desprezadas. Como as inhomogeneidades espaciais tratadas aqui são pequenas, podemos dizer que $\vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla}^2 \rho_B) < (\vec{\nabla}^2 \rho_B)$. Por outro lado, observando (4.16), vemos um termo proporcional a m_V^{-4} para o campo V_0 :

$$-d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B)$$

que, desprezando a segunda derivada temporal, se transforma em:

$$-d\frac{g_V}{m_V^4}\partial_\mu\partial^\mu(\rho_B) = d\frac{g_V}{m_V^4}\vec{\nabla}^2(\rho_B)$$

Este é o termo dominante na nossa correção da teoria de campo médio e portanto os únicos termos novos a serem considerados serão aqueles proporcionais a

$$\frac{\vec{\nabla}^2(\rho_B)}{m_V^4}$$

Quaisquer termos proporcionais a m_V^{-n} com $n > 4$ e proporcionais a $[\vec{\nabla}^2(\rho_B)]^m$ com $m > 1$ ou até mesmo proporcionais a combinações destes serão desprezados.

Em resumo a *MMFT* apresentada aqui consiste em:

$$1^\circ) \text{ Desprezar as derivadas temporais de } \rho_B, \text{ pois } D^2 \ll 1. \quad (4.25)$$

$$2^\circ) \text{ Desprezar termos com } [\partial_0(\bar{\psi}\gamma^0)] \text{ ou } (\partial_0\psi). \quad (4.26)$$

$$3^\circ) \text{ Desprezar termos proporcionais a } m_V^{-n} \text{ com } n > 4 \text{ e proporcionais a } [\vec{\nabla}^2(\rho_B)]^m \text{ com } m > 1 \text{ e suas combinações} \quad (4.27)$$

4.6 Densidade de energia a temperatura nula

Vamos calcular agora a densidade de energia ε a $T = 0 \text{ MeV}$. Para tal cálculo utilizaremos o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ com (4.22), (4.14), (4.15) e (4.16). Como (4.22) possui derivadas de ordem mais alta, utilizaremos (B.16) que é o tensor energia-momento para \mathcal{L} com derivadas de ordem superior:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}(\partial_\nu\eta_i) - g^u{}_\nu\mathcal{L} + \partial^\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}(\partial_\nu\eta_i)\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}(\partial^\mu\partial_\nu\eta_i) \quad (4.28)$$

que está deduzido no apêndice B. A densidade de energia pode ser escrita na *MFT* da seguinte forma:

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle = -g_{00}\mathcal{L}^* + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial(\partial_0\psi)}\partial_0\psi + \left[\partial_0\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\psi)}\right](\partial_0\psi) \quad (4.29)$$

onde \mathcal{L}^* é (4.22) na *MFT*, então:

$$\varepsilon = -\bar{\psi}[(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0) - (M - g_S\phi_0)]\psi + \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 +$$

$$-d\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi + d\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial_0(\bar{\psi}\gamma^0)](\partial_0\psi) \quad (4.30)$$

Reescrevendo os termos

$$-\bar{\psi}[(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0) - (M - g_S\phi_0)]\psi + i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi$$

de (4.30) e com uso da equação de movimento (4.14) temos:

$$\begin{aligned} &-\bar{\psi}[(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0) - (M - g_S\phi_0)]\psi + i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi = \\ &-i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + g_V(\bar{\psi}\gamma_0\psi)V_0 + \bar{\psi}(M - g_S\phi_0)\psi \end{aligned}$$

e então (4.30) assume a forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon = &\frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 - d\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] - i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \\ &+ g_V(\bar{\psi}\gamma_0\psi)V_0 + \bar{\psi}(M - g_S\phi_0)\psi + d\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial_0(\bar{\psi}\gamma^0)](\partial_0\psi) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Lembramos que a densidade bariônica é dada por

$$\rho_B = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \quad (4.32)$$

e a massa efetiva do núcleon é definida por

$$M^* = M - g_S\phi_0 \quad (4.33)$$

e também que, conforme (D.10) do apêndice D, temos:

$$\begin{aligned} &-i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \bar{\psi}M^*\psi = \\ &= \psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \gamma_0M^*)\psi \longrightarrow \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Utilizando então (4.32), (4.33) e (4.34) em (4.31) encontramos

$$\begin{aligned} \varepsilon = &\frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 + g_V\rho_B V_0 + \\ &+ \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} - d\frac{g_V}{m_V^2}V_0(\partial^\lambda\partial_\lambda\rho_B) + \\ &+ d\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial_0(\bar{\psi}\gamma^0)](\partial_0\psi) \end{aligned} \quad (4.35)$$

O campo ϕ_0 é dado por (4.33):

$$\phi_0 = \frac{(M - M^*)}{g_S} \quad (4.36)$$

e o campo V_0 é dado por sua equação de movimento (4.16) com uso de (4.32):

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \quad (4.37)$$

Inserindo (4.36) e (4.37) em (4.35) encontramos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 - \frac{m_V^2}{2} \left[\frac{g_V}{m_V^2} \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right]^2 + \\ &\quad + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \\ &+ g_V \rho_B \left[\frac{g_V}{m_V^2} \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right] + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \\ &\quad - d \frac{g_V}{m_V^2} \left[\frac{g_V}{m_V^2} \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right] (\partial^\lambda \partial_\lambda \rho_B) + \\ &\quad + d \frac{g_V}{m_V^2} \left[\frac{g_V}{m_V^2} \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right] [\partial_0 (\bar{\psi} \gamma^0)] (\partial_0 \psi) = \\ &= \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 - \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) - d^2 \frac{g_V^2}{2m_V^6} \left[\partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right]^2 \\ &\quad + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \\ &+ \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho_B^2 - d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \\ &\quad - d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) + d^2 \frac{g_V^2}{m_V^6} \left[\partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right]^2 \\ &\quad + d \frac{g_V}{m_V^2} \left[\frac{g_V}{m_V^2} \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right] [\partial_0 (\bar{\psi} \gamma^0)] (\partial_0 \psi) = \end{aligned}$$

ou melhor:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \\
& + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} - d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \left(\frac{\partial^2 \rho_B}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \rho_B \right) \\
& + d^2 \frac{g_V^2}{2m_V^6} \left(\frac{\partial^2 \rho_B}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \rho_B \right)^2 \\
& + d \frac{g_V}{m_V^2} \left[\frac{g_V}{m_V^2} \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right] [\partial_0 (\bar{\psi} \gamma^0)] (\partial_0 \psi) \quad (4.38)
\end{aligned}$$

A expressão final de ε obtida com as aproximações (4.25), (4.26) e (4.27) na equação acima:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \\
& + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \vec{\nabla}^2 \rho_B \quad (4.39)
\end{aligned}$$

4.7 QHD modificada a temperatura finita

4.7.1 Operadores hamiltoniano e número bariônico

Vamos agora utilizar a lagrangiana e as equações de movimento na *MFT* dadas por (4.22), (4.14), (4.15) e (4.16) em unidades naturais com $k_B = 1$.

Para descrever um sistema a temperatura finita é necessário conhecermos sua função de partição (conforme (A.27)), o que nos leva ao cálculo do operador hamiltoniano \hat{H} e do operador número bariônico \hat{B} , com μ_B sendo o potencial barioquímico.

O operador número bariônico \hat{B} está relacionado com o operador

$$\hat{\mathcal{B}} = \int d^3 x \bar{\psi} \gamma^0 \psi$$

pois as medidas das grandezas são tomadas com relação ao vácuo, logo o número de barions observado é definido pela subtração do valor esperado de $\hat{\mathcal{B}}$ no vácuo:

$$\hat{B} = \hat{\mathcal{B}} - \langle 0 | \hat{\mathcal{B}} | 0 \rangle_{V_0 = \phi_0 = 0} \quad (4.40)$$

Utilizamos (D.29) para cálculo de $\hat{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{B}} &= \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \\ &= \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}', \lambda'} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ (A^{\dagger'} \mathcal{U}^{\dagger'} A \mathcal{U}) e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}} e^{i[E^+(\vec{k}') - E^+(\vec{k})]t} \right. \\ &\quad \left. + (B' \mathcal{V}^{\dagger'} B^\dagger \mathcal{V}) e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}} e^{i[E^-(\vec{k}') - E^-(\vec{k})]t} \right\}\end{aligned}$$

Usando agora (D.32), (D.33) e o ordenamento normal dado por (D.34) encontramos

$$\hat{\mathcal{B}} = \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} (A^\dagger A + B B^\dagger) = \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} (A^\dagger A - B^\dagger B + 1) \quad (4.41)$$

Substituindo (4.41) em (4.40) temos a versão definitiva para o operador número bariônico:

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \hat{\mathcal{B}} - \langle 0 | \hat{\mathcal{B}} | 0 \rangle_{V_0 = \phi_0 = 0} = \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} (A^\dagger A - B^\dagger B + 1) + \\ &\quad - \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle 0 | \sum_{\vec{k}, \lambda} (A^\dagger A - B^\dagger B + 1) | 0 \rangle =\end{aligned}$$

onde usamos a notação compacta $\langle 0 | (\dots) | 0 \rangle \equiv \langle 0 | (\dots) | 0 \rangle_{V_0 = \phi_0 = 0}$. Na equação acima observamos que:

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} (A^\dagger A - B^\dagger B) + \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} 1 - \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle 0 | A^\dagger A | 0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle 0 | B^\dagger B | 0 \rangle - \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle 0 | 1 | 0 \rangle\end{aligned}$$

e finalmente:

$$\hat{B} = \sum_{\vec{k}, \lambda} (A^\dagger A - B^\dagger B) \quad (4.42)$$

O operador hamiltoniano \hat{H} está relacionado com o operador

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3x \hat{T}_{00}$$

que, com (4.28), (4.22) e (4.14) assume a forma:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} &= \int d^3x \left\{ -g_{00}\mathcal{L}^* + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial(\partial_0\psi)}\partial_0\psi + \left[\partial_0 \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\psi)} \right] (\partial_0\psi) \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 \right\} + \\
&+ \int d^3x \left\{ -d\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi + d\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial_0(\bar{\psi}\gamma^0)](\partial_0\psi) \right\}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Usando (4.26) em (4.43) obtemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 + \right. \\
&\quad \left. -d\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] \right\} + \int d^3x \left\{ i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \right\}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Utilizando (D.29) no termo $\int d^3x \left\{ i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \right\}$ de (4.44) encontramos:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} &= -V \left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 \right) + V \left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 \right) + \\
&\quad -Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] \\
&+ \int d^3x \frac{i}{V} \sum_{\vec{k}',\lambda'} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ (A^\dagger{}' \mathcal{U}^\dagger{}' A \mathcal{U}) e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} e^{i[E^+(\vec{k}')-E^+(\vec{k})]t} (-iE^+(\vec{k})) \right. \\
&\quad \left. + (B' \mathcal{V}^\dagger{}' B^\dagger \mathcal{V}) e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} e^{i[E^-(\vec{k}')-E^-(\vec{k})]t} (-iE^-(\vec{k})) \right\}
\end{aligned}$$

e usando (D.32) e (D.33) chegamos a:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} &= -V \left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 \right) + V \left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 \right) + \\
&-Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{k},\lambda} (E^+(\vec{k})A^\dagger A + E^-(\vec{k})BB^\dagger)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Usando (D.40) e (D.41) para as energias E^+ e E^- temos:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = & -V\left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2\right) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) + \\ & -Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + \frac{1}{V}\int d^3x \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ [g_VV_0 + (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}]A^\dagger A + \right. \\ & \left. + [g_VV_0 - (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}]BB^\dagger \right\}\end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = & -V\left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2\right) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) + \\ & -Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + \\ & + \frac{1}{V}\int d^3x \sum_{\vec{k},\lambda} g_VV_0(A^\dagger A + BB^\dagger) + \frac{1}{V}\int d^3x \sum_{\vec{k},\lambda} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}(A^\dagger A - BB^\dagger)\end{aligned}$$

Identificando (4.41) e usando as relações de anticomutação (D.34) no último termo, encontramos

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = & -V\left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2\right) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) + \\ & -Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + g_VV_0\hat{\mathcal{B}} + \\ & + \frac{1}{V}\int d^3x \sum_{\vec{k},\lambda} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}(A^\dagger A + B^\dagger B) - \frac{1}{V}\int d^3x \sum_{\vec{k},\lambda} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}\end{aligned}\quad (4.46)$$

O operador hamiltoniano é então calculado por

$$\hat{H} = \hat{\mathcal{H}} - \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle_{V_0=\phi_0=0}\quad (4.47)$$

e com o uso de (4.46) chegamos a:

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \hat{\mathcal{H}} - \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle_{V_0=\phi_0=0} = \\ & -V\left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2\right) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + g_VV_0(\hat{\mathcal{B}} - \langle 0|\hat{\mathcal{B}}|0\rangle_{V_0=\phi_0=0}) + \\
& +\frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}(A^\dagger A + B^\dagger B) - \frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} + \\
& -\langle 0|\left\{ -V\left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2\right) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) + \right. \\
& \quad \left. -Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + \right. \\
& \left. +\frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}(A^\dagger A + B^\dagger B) - \frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}\right\}|0\rangle
\end{aligned}$$

onde temos que prestar atenção no termo $g_VV_0(\hat{\mathcal{B}} - \langle 0|\hat{\mathcal{B}}|0\rangle_{V_0=\phi_0=0})$. Lembrando que $\langle 0|(\dots)|0\rangle \equiv \langle 0|(\dots)|0\rangle_{V_0=\phi_0=0}$ e usando (4.40) encontramos a expressão final de \hat{H} :

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= -V\left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2\right) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) + \\
& \quad -Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + g_VV_0\hat{\mathcal{B}} + \\
& \quad +\frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}(A^\dagger A + B^\dagger B) - \frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} + \\
& -\langle 0|\frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}(A^\dagger A + B^\dagger B)|0\rangle + \langle 0|\frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}|0\rangle
\end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= -V\left(\frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2\right) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) + \\
& -Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + g_VV_0\hat{\mathcal{B}} + \frac{1}{V}\int d^3x\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}(A^\dagger A + B^\dagger B)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

4.7.2 Função de partição e potencial termodinâmico

Com a função de partição Z dada por (A.27) podemos calcular o potencial termodinâmico total Ω dado por (A.29) que pode ser reescrito como [80]:

$$\Omega(T, V, \mu_B) = -T \ln \left\{ \text{Tr} \left[e^{-\frac{(\hat{H} - \mu_B \hat{B})}{T}} \right] \right\} \quad (4.49)$$

O potencial termodinâmico total também pode ser escrito como:

$$\Omega(T, V, \mu_B) = \sum_k \Omega_k \quad (4.50)$$

onde Ω_k é o potencial termodinâmico do k -ésimo estado. Usando o operador (4.48) em (4.49) podemos escrever Ω_k como:

$$\begin{aligned} \Omega_k = -T \ln \left\{ \text{Tr} \left\{ \exp \left[\frac{V}{T} \left(\frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 \right) - \frac{V}{T} \left(\frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{V}{T} d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{T} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} (A^\dagger A + B^\dagger B) + \frac{(\mu_B - g_V V_0)}{T} \hat{B} \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

que, com o uso de (4.42) se transforma em:

$$\begin{aligned} \Omega_k = -T \ln \left\{ \text{Tr} \left\{ \exp \left[\frac{V}{T} \left(\frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 \right) - \frac{V}{T} \left(\frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{V}{T} d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{T} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} (A^\dagger A + B^\dagger B) + \frac{1}{T} (\mu_B - g_V V_0) (A^\dagger A - B^\dagger B) \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \Omega_k = -T \ln \left\{ \text{Tr} \left\{ \exp \left[\frac{V}{T} \left(\frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 \right) - \frac{V}{T} \left(\frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{V}{T} d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)] + \alpha A^\dagger A + \beta B^\dagger B \right] \right\} \right\} \quad (4.51) \end{aligned}$$

onde

$$\alpha \equiv \frac{-(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} + (\mu_B - g_V V_0)}{T} \quad (4.52)$$

e

$$\beta \equiv \frac{-(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} - (\mu_B - g_V V_0)}{T} \quad (4.53)$$

Pelo Princípio de Pauli os números de ocupação em cada estado assumem apenas valores 0 e 1. Assim uma maneira mais completa de escrever (4.51) é:

$$\begin{aligned} \Omega_k = & -T \ln \sum_{N=0}^1 \left\{ \text{Tr} \left\{ \exp \left[N \frac{V}{T} \left(\frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 \right) - N \frac{V}{T} \left(\frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + N \frac{V}{T} d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)] \right] \right\} \right\} + \\ & -T \sum_{N=0}^1 \ln \langle N | e^{N(\alpha A^\dagger A)} | N \rangle - T \sum_{N=0}^1 \ln \langle N | e^{N(\beta B^\dagger B)} | N \rangle \end{aligned}$$

Escrevendo as somas explicitamente temos:

$$\begin{aligned} \Omega_k = & \frac{V}{2} (m_S^2 \phi_0^2 - m_V^2 V_0^2) + V \left(\frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \right) \\ & - V d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)] + \\ & -T \ln [\langle 0|1|0 \rangle + \langle 1|e^{(\alpha A^\dagger A)}|1 \rangle] - T \ln [\langle 0|1|0 \rangle + \langle 1|e^{(\beta B^\dagger B)}|1 \rangle] \quad (4.54) \end{aligned}$$

Lembramos que:

$$\langle 0|1|0 \rangle = 1$$

e

$$\langle 1|e^{(\alpha A^\dagger A)}|1 \rangle = \langle 1|(1 + \alpha A^\dagger A + \frac{\alpha^2}{2} A^\dagger A A^\dagger A + \dots)|1 \rangle = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \dots = e^\alpha$$

pois $\langle 1|(A^\dagger A)^j|1 \rangle = 1$, onde j é o número de vezes que $A^\dagger A$ atua nos estados. De maneira análoga:

$$\langle 1|e^{(\beta B^\dagger B)}|1 \rangle = e^\beta$$

Substituindo as expressões acima em (4.54) temos:

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \frac{V}{2}(m_S^2\phi_0^2 - m_V^2V_0^2) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) \\ &- Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] - T\ln[1 + e^\alpha] - T\ln[1 + e^\beta] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ainda reescreveremos as constantes α e β como em [80]:

$$\alpha \equiv \frac{-(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} + (\mu_B - g_V V_0)}{T} \equiv -\frac{(h - \nu)}{T} \quad (4.56)$$

e

$$\beta \equiv \frac{-(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} - (\mu_B - g_V V_0)}{T} \equiv -\frac{(h + \nu)}{T} \quad (4.57)$$

onde h é a energia dada por

$$h \equiv (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (4.58)$$

e ν o potencial barioquímico efetivo definido por

$$\nu \equiv (\mu_B - g_V V_0) \quad (4.59)$$

A versão final do k -ésimo potencial termodinâmico é dada pela substituição de (4.56) e (4.57) em (4.55):

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \frac{V}{2}(m_S^2\phi_0^2 - m_V^2V_0^2) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) \\ &- Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] - T\ln[1 + e^{-(h-\nu)/T}] - T\ln[1 + e^{-(h+\nu)/T}] \end{aligned} \quad (4.60)$$

O potencial termodinâmico total é dado pela soma nos k -ésimos estados fermiônicos, como definido em (4.50):

$$\begin{aligned} \Omega(T, V, \mu_B) &= \frac{V}{2}(m_S^2\phi_0^2 - m_V^2V_0^2) + V\left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4\right) \\ &- Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)] - T \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ \ln[1 + e^{-(h-\nu)/T}] + \ln[1 + e^{-(h+\nu)/T}] \right\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Esta expressão é muito semelhante ao potencial termodinâmico encontrado em [80]. A diferença é que (4.61) contém o termo *termo-d*:

$$-Vd\frac{g_V}{m_V^2}V_0[\partial^\lambda\partial_\lambda(\bar{\psi}\gamma^0\psi)]$$

4.7.3 Grandezas termodinâmicas

Agora estamos preparados para o cálculo da densidade bariônica, densidade de entropia, densidade de energia e pressão na QHD modificada, pois estas grandezas dependem de Ω dado por (4.61).

Para tanto necessitamos conhecer algumas relações. Primeiro identificaremos em nossos cálculos os números de ocupação de partículas e antipartículas dados respectivamente por:

$$n_{\vec{k}} = n_{\vec{k}}(T, \nu) \equiv \frac{1}{1 + e^{(h-\nu)/T}} \quad (4.62)$$

$$\bar{n}_{\vec{k}} = \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu) \equiv \frac{1}{1 + e^{(h+\nu)/T}} \quad (4.63)$$

e suas relações:

$$1 + e^{-(h-\nu)/T} = (1 - n_{\vec{k}})^{-1} \quad (4.64)$$

$$1 + e^{-(h+\nu)/T} = (1 - \bar{n}_{\vec{k}})^{-1} \quad (4.65)$$

$$e^{(h-\nu)/T} = \frac{(1 - n_{\vec{k}})}{n_{\vec{k}}} \quad (4.66)$$

e

$$e^{(h+\nu)/T} = \frac{(1 - \bar{n}_{\vec{k}})}{\bar{n}_{\vec{k}}} \quad (4.67)$$

Utilizando (A.32) temos:

$$\begin{aligned} \rho_B &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_B} \right)_{T,V} = -\frac{1}{V} (-T) \sum_{\vec{k}, \lambda} \left[\frac{e^{-(h-\nu)/T}}{(1 + e^{-(h-\nu)/T})} \right] \frac{1}{T} + \\ &\quad -\frac{1}{V} (-T) \sum_{\vec{k}, \lambda} \left[\frac{e^{-(h+\nu)/T}}{(1 + e^{-(h+\nu)/T})} \right] \left(-\frac{1}{T} \right) = \\ &= \frac{1}{V} \left\{ \sum_{\vec{k}, \lambda} \left[\frac{1}{(1 + e^{(h-\nu)/T})} \right] - \sum_{\vec{k}, \lambda} \left[\frac{1}{(1 + e^{(h+\nu)/T})} \right] \right\} \end{aligned}$$

que com o uso de (D.42), (4.62) e (4.63) assume a forma:

$$\rho_B = \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_{\vec{k}}(T, \nu) - \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu)] \quad (4.68)$$

A densidade de entropia é calculada a partir de (A.33):

$$\begin{aligned}
s &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu_B} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ \ln \left[1 + e^{-(h-\nu)/T} \right] + \ln \left[1 + e^{-(h+\nu)/T} \right] \right\} + \\
&\frac{1}{V} T \left\{ \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{e^{-(h-\nu)/T}}{(1 + e^{-(h-\nu)/T})} \left[\frac{(h-\nu)}{T^2} \right] + \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{e^{-(h+\nu)/T}}{(1 + e^{-(h+\nu)/T})} \left[\frac{(h+\nu)}{T^2} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ \ln \left[1 + e^{-(h-\nu)/T} \right] + \ln \left[1 + e^{-(h+\nu)/T} \right] + \right. \\
&\quad \left. + n_{\vec{k}} \ln \left[e^{(h-\nu)/T} \right] + \bar{n}_{\vec{k}} \ln \left[e^{(h+\nu)/T} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Usando (4.64) à (4.67) encontramos:

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ \ln \left[(1 - n_{\vec{k}})^{-1} \right] + \ln \left[(1 - \bar{n}_{\vec{k}})^{-1} \right] + \right. \\
&\quad \left. + n_{\vec{k}} \ln \left[\frac{(1 - n_{\vec{k}})}{n_{\vec{k}}} \right] + \bar{n}_{\vec{k}} \ln \left[\frac{(1 - \bar{n}_{\vec{k}})}{\bar{n}_{\vec{k}}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes e usando (D.42) obtemos:

$$\begin{aligned}
s &= -\frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ n_{\vec{k}}(T, \nu) \ln \left[n_{\vec{k}}(T, \nu) \right] + \left[1 - n_{\vec{k}}(T, \nu) \right] \ln \left[1 - n_{\vec{k}}(T, \nu) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu) \ln \left[\bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu) \right] + \left[1 - \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu) \right] \ln \left[1 - \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu) \right] \right\} \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Antes de calcularmos a pressão e a densidade de energia é importante calcularmos o valor do campo V_0 usando a equação de movimento (4.16):

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \langle \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle \rangle - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu \left[\langle \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle \rangle \right] \quad (4.70)$$

que para cálculo de $\langle \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle \rangle$ faz-se necessário lembramos de (A.32):

$$\rho_B \equiv \frac{\langle \langle \hat{B} \rangle \rangle}{V}$$

onde $\langle\langle\hat{B}\rangle\rangle$ significa a média do operador \hat{B} no *ensemble* e quando comparamos (4.68) com (4.42) podemos identificar o número de ocupação com a média no *ensemble* dos operadores:

$$n_{\vec{k}} = \langle\langle A_{\vec{k},\lambda}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} \rangle\rangle \quad (4.71)$$

e

$$\bar{n}_{\vec{k}} = \langle\langle B_{-\vec{k},\lambda}^\dagger B_{-\vec{k},\lambda} \rangle\rangle \quad (4.72)$$

Então $\langle\langle\bar{\psi}\gamma^0\psi\rangle\rangle$ é calculado com o auxílio de (D.29) à (D.34):

$$\langle\langle\bar{\psi}\gamma^0\psi\rangle\rangle = \langle\langle\psi^\dagger\psi\rangle\rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left[\langle\langle A_{\vec{k},\lambda}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} \rangle\rangle - \langle\langle B_{-\vec{k},\lambda}^\dagger B_{-\vec{k},\lambda} \rangle\rangle \right]$$

que com o uso de (D.42), (4.71) e (4.72) nos leva a:

$$\langle\langle\bar{\psi}\gamma^0\psi\rangle\rangle = \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_{\vec{k}}(T, \nu) - \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu)]$$

Comparando a expressão acima com (4.68) podemos concluir que:

$$\langle\langle\bar{\psi}\gamma^0\psi\rangle\rangle = \rho_B \quad (4.73)$$

Temos assim o valor do campo V_0 em temperatura finita dado por (4.73) e (4.70):

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \quad (4.74)$$

que é semelhante ao valor obtido a temperatura nula dado por (4.37).

Para calcularmos a pressão utilizamos (A.34)

$$p = -\frac{\Omega(T, V, \mu_B)}{V}$$

com (4.61):

$$p = -\frac{1}{2}(m_S^2\phi_0^2 - m_V^2V_0^2) - \left(\frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 \right) + d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi}\gamma^0\psi)] + \frac{T}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \ln[1+e^{-(h-\nu)/T}] + \ln[1+e^{-(h+\nu)/T}] \right\} \quad (4.75)$$

Fazendo as aproximações (4.25), (4.26), (4.27), e usando as relações (4.36), (4.64), (4.65) e (4.74) em (4.75) temos:

$$p = \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 - \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 - b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} - c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} +$$

$$-d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \vec{\nabla}^2 \rho_B - T \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\ln(1 - n_{\vec{k}}) + \ln(1 - \bar{n}_{\vec{k}}) \right] \quad (4.76)$$

que é exatamente igual à pressão encontrada em [80] mas com o *termo-d*. Para cálculo da densidade de energia utilizamos (A.35):

$$\varepsilon = \frac{\Omega(T, V, \mu_B)}{V} + Ts + \mu_B \rho_B$$

que, com o uso de (4.59), (4.61), (4.68) e (4.69), assume a forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (m_S^2 \phi_0^2 - m_V^2 V_0^2) + \left(\frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \right)$$

$$-d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)] - \frac{T}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ \ln[1 + e^{-(h-\nu)/T}] + \ln[1 + e^{-(h+\nu)/T}] \right\} +$$

$$-T \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ n_{\vec{k}} \ln[n_{\vec{k}}] + [1 - n_{\vec{k}}] \ln[1 - n_{\vec{k}}] + \right.$$

$$\left. + \bar{n}_{\vec{k}} \ln[\bar{n}_{\vec{k}}] + [1 - \bar{n}_{\vec{k}}] \ln[1 - \bar{n}_{\vec{k}}] \right\} + \nu \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}] +$$

$$+ g_V V_0 \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}]$$

Na equação acima vamos substituir (4.64), (4.65) e (D.42) obtendo:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (m_S^2 \phi_0^2 - m_V^2 V_0^2) + \left(\frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \right)$$

$$-d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)] + T \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \ln[1 - n_{\vec{k}}] + \ln[1 - \bar{n}_{\vec{k}}] \right\} +$$

$$-T \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ n_{\vec{k}} \ln[n_{\vec{k}}] + [1 - n_{\vec{k}}] \ln[1 - n_{\vec{k}}] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{n}_{\vec{k}} \ln [\bar{n}_{\vec{k}}] + [1 - \bar{n}_{\vec{k}}] \ln [1 - \bar{n}_{\vec{k}}] \Big\} + \nu \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}] + \\
& + g_V V_0 \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}]
\end{aligned}$$

Vamos agora reescrever os termos com os logaritmos na última expressão. Então usamos (4.66) e (4.67):

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & \frac{1}{2}(m_S^2 \phi_0^2 - m_V^2 V_0^2) + \left(\frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \right) \\
& - d \frac{g_V}{m_V^2} V_0 [\partial^\lambda \partial_\lambda (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)] + T \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \frac{h}{T} (n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}) + \frac{g_V V_0}{T} (n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}) \right\}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Identificando novamente (4.68) e usando (4.36), (4.74) e as aproximações (4.25), (4.26) e (4.27) em (4.77) encontramos a expressão final para a densidade de energia em temperatura finita:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \\
& + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \vec{\nabla}^2 \rho_B + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k h [n_{\vec{k}}(T, \nu) + \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu)]
\end{aligned} \tag{4.78}$$

que é igual à calculada em [80] mas com o *termo-d*. Vale notar que se somarmos a densidade de energia e a pressão usando (4.78) e (4.76) verificamos que os *termo-d* se anulam e a relação de Gibbs dada por (A.17):

$$\varepsilon + p = \mu_B \rho_B + T s$$

é satisfeita, ou seja, nossos cálculos são consistentes com a termodinâmica.

4.8 Densidade de energia na *QHD* pura sem *MFT*

Como foi dito na introdução deste capítulo há duas maneiras de incluir termos com derivadas de ordem superior na *QHD*. A primeira é modificar a lagrangiana introduzindo o *termo-d* e modificar também a aproximação de campo médio. Esta estratégia foi apresentada nas seções anteriores. Agora

vamos descrever a segunda maneira de obter termos com laplacianos na QHD . Ela consiste em:

- ★ NÃO desprezar todas as derivadas dos campos mesônicos e
- ★ NÃO adicionar nenhum termo- d .

Vamos apenas incluir pequenas inomogeneidades nos campos da QHD usual.

De forma análoga ao já feito neste capítulo, porém sem desprezar derivadas espaciais e temporais para V_0 e ϕ_0 , encontramos ao invés de (4.22) a lagrangiana usual da QHD com termos não-lineares:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* = & \bar{\psi}[(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0) - (M - g_S\phi_0)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - m_S^2\phi_0^2) + \\ & + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}V_0)^2 + \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{b}{3}\phi_0^3 - \frac{c}{4}\phi_0^4 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Desta lagrangiana são derivadas as equações de movimento:

$$-\vec{\nabla}^2V_0 + m_V^2V_0 = g_V\bar{\psi}\gamma^0\psi \quad (4.80)$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_S^2)\phi_0 = g_S\bar{\psi}\psi - b\phi_0^2 - c\phi_0^3 \quad (4.81)$$

e

$$\left[i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0 - (M - g_S\phi_0) \right] \psi = 0 \quad (4.82)$$

Utilizando (B.16) para o cálculo do tensor energia-momento e usando (4.79), chegamos a:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}(\partial_0\phi_0)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi_0)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}V_0)^2 + \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \\ & + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 + i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \end{aligned} \quad (4.83)$$

Multiplicando (4.82) por $\bar{\psi}$ pela esquerda, podemos usar a relação resultante para reescrever o termo $i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi$ em (4.83) como:

$$i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi = -i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi + g_V\rho_B V_0 + \bar{\psi}M^*\psi \quad (4.84)$$

onde ρ_B é a já conhecida densidade bariônica dada por $\rho_B = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi$ e a massa efetiva do núcleon é definida por $M^* = M - g_S\phi_0$. Dessa última relação, podemos substituir o campo escalar por $\phi_0 = (M -$

M^*/g_S , como já fizemos. O termo $-i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \bar{\psi}M^*\psi$ em (4.84) pode ser reescrito como [33]:

$$-i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \bar{\psi}M^*\psi = \psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \gamma_0M^*)\psi \longrightarrow \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (4.85)$$

e então (4.84) torna-se:

$$i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi = g_V\rho_B V_0 + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (4.86)$$

Substituindo então (4.86) em (4.83) encontramos:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}(\partial_0\phi_0)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi_0)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}V_0)^2 + \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \\ & + \frac{c}{4}\phi_0^4 + g_V\rho_B V_0 + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Integrando por partes o termo contendo gradiente ao quadrado de V_0 , a densidade de energia pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}(\partial_0\phi_0)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi_0)^2 + \frac{1}{2}(V_0\vec{\nabla}^2V_0) + \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \\ & + \frac{c}{4}\phi_0^4 + g_V\rho_B V_0 + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Multiplicando agora (4.80) por $-V_0/2$ podemos usá-la para reescrever o termo com $\frac{1}{2}(V_0\vec{\nabla}^2V_0)$ e assim chegamos a:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}(\partial_0\phi_0)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi_0)^2 + \frac{1}{2}g_V\rho_B V_0 + \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 + \\ & + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Na expressão acima não há nenhuma aproximação além de (4.9) e (4.10). Ela contém as inomogeneidades nos campos V_0 e ϕ_0 dadas por suas derivadas. Estes campos são clássicos mas dependem do espaço e do tempo.

A equação de movimento (4.80) pode ser reescrita como:

$$-\vec{\nabla}^2V_0 + m_V^2V_0 = g_V\rho_B \quad (4.90)$$

Com base em (4.3) é razoável supor que $\frac{\vec{\nabla}^2 V_0}{m_V^2} \ll V_0$. Desprezando o laplaciano na equação acima podemos obter uma estimativa de ordem zero para V_0 :

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B \quad (4.91)$$

Uma estimativa melhor de V_0 é então obtida tomando o laplaciano de (4.91) e inserindo-o no laplaciano que aparece em (4.90). A equação resultante é então resolvida para V_0 nos levando a:

$$m_V^2 V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \vec{\nabla}^2 \rho_B + g_V \rho_B$$

e conseqüentemente a:

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V}{m_V^4} \vec{\nabla}^2 \rho_B \quad (4.92)$$

Inserindo agora (4.92) em (4.89) e escrevendo ϕ_0 em termos de M^* nós encontramos a seguinte expressão para ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(M - M^*)}{g_S} \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \vec{\nabla} \left[\frac{(M - M^*)}{g_S} \right] \right\}^2 + \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 + \\ & + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \vec{\nabla}^2 \rho_B + \\ & + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (k^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned} \quad (4.93)$$

A expressão acima depende apenas de M^* , de suas derivadas espaciais e temporais, de ρ_B e seu laplaciano. M^* é determinada pela condição $\partial\varepsilon/\partial M^* = 0$.

Estamos tratando as variáveis ρ_B , $\vec{\nabla}^2 \rho_B$, M^* , $\vec{\nabla} M^*$ e $\partial M^*/\partial t$ como independentes. Assim qualquer derivada de uma em relação às outras será zero. Entretanto, se resolvêssemos exatamente a teoria de campos (4.2) e pudéssemos determinar $\Psi(\vec{r}, t)$, as combinações dos campos bariônicos $\rho_B = \Psi^\dagger(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$ e $\vec{\nabla}^2 \rho_B = \vec{\nabla}^2 [\Psi^\dagger(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)]$ estariam também correlacionadas, pois os campos e suas derivadas estão acoplados pelas equações de movimento. O mesmo argumento se aplica ao campo escalar ϕ , que também satisfaz uma equação de movimento que contém campos acoplados com suas

derivadas. Porém, uma solução exata da teoria não pode ser obtida analiticamente. Assim sendo, por simplicidade e por falta de solução numérica do problema, vamos assumir que as variáveis mencionadas sejam independentes.

À temperatura finita, todos os cálculos são análogos aos já feitos neste capítulo e usando as mesmas aproximações já feitas nesta seção no caso de temperatura nula, chegamos em:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(M - M^*)}{g_S} \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \vec{\nabla} \left[\frac{(M - M^*)}{g_S} \right] \right\}^2 + \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 + \\ & b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \vec{\nabla}^2 \rho_B + \\ & + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \, h_+ [n_{\vec{k}}(T, \nu) + \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu)] \end{aligned} \quad (4.94)$$

4.9 Massa efetiva do núcleon

A massa efetiva do núcleon (M^*) em temperatura nula é obtida pela minimização de ε com respeito a M^* :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial M^*} = 0$$

Usando (4.39) encontramos:

$$\begin{aligned} M^* = & M - \frac{g_S^2}{m_S^2} \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}} \\ & + \frac{g_S^2}{m_S^2} \left[\frac{b}{g_S^3} (M - M^*)^2 + \frac{c}{g_S^4} (M - M^*)^3 \right] \end{aligned} \quad (4.95)$$

A integração nos momentos pode ser feita resultando em [33]:

$$\begin{aligned} M^* = & M - \frac{g_S^2}{m_S^2} \frac{\gamma_s M^*}{4\pi^2} \left\{ k_F (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} - M^* \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}}{M^*} \right] \right\} + \\ & + \frac{g_S^2}{m_S^2} \left[\frac{b}{g_S^3} (M - M^*)^2 + \frac{c}{g_S^4} (M - M^*)^3 \right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

À temperatura finita é necessário minimizar o potencial termodinâmico:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \phi_0} = 0$$

Usando (4.61) encontramos [80]:

$$M^* = M - \frac{g_S^2}{m_S^2} \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{h} \left[n_{\vec{k}}(T, \nu) + \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu) \right] + \frac{g_S^2}{m_S^2} \left[\frac{b}{g_S^3} (M - M^*)^2 + \frac{c}{g_S^4} (M - M^*)^3 \right] \quad (4.97)$$

Vemos que a introdução do (*termo-d*) (4.1) não modificou as expressões para M^* . As equações (4.96) e (4.97) são exatamente as mesmas que em [33, 80]. O mesmo ocorre se usarmos as expressões (4.93) e (4.94) para cálculo de M^* , pois as variáveis ρ_B , $\vec{\nabla}^2 \rho_B$, M^* , $\vec{\nabla} M^*$ e $\partial M^* / \partial t$ são independentes.

4.10 Parâmetros e acoplamentos

Apesar do modelo original de Walecka [33] reproduzir bem a curva de saturação nuclear, ele não é capaz de reproduzir algumas propriedades nucleares como a incompressibilidade nuclear K e a energia de superfície. Obter um valor de K coerente com o medido experimentalmente é tão importante para estudo da matéria nuclear quanto para a física do sóliton nuclear, pois, conforme (D.27), ela está diretamente relacionado com a velocidade do som c_s na matéria nuclear. Para fazer uma análise numérica mais realista destas grandezas é necessário usar o modelo não-linear, que é uma versão da *QHD* na qual são adicionados termos de auto-interação do campo escalar dados pela seguinte lagrangiana de interação:

$$\mathcal{L}_{NL} = -\frac{b}{3}\phi^3 - \frac{c}{4}\phi^4$$

e conforme observamos em (4.2) já iniciamos nosso estudo com tais termos.

Como (4.2) é usada para cálculo da densidade de energia e outras grandezas relevantes, durante nosso procedimento de obtenção de equações de onda do tipo KdV e suas variantes, observamos que os acoplamentos e constantes desta teoria definem os coeficientes das equações e conseqüentemente as propriedades das soluções solitônicas.

Os parâmetros b e c são determinados fazendo o ajuste das propriedades da matéria nuclear obtidas com este modelo aos valores bem estabelecidos na

literatura [29, 30, 31]. Na Tabela I apresentamos os valores para as massas e constantes de acoplamento em temperatura nula.

	GM a $T = 0$	
$K(\text{MeV})$	285	calculado
$M(\text{MeV})$	938	fixado
$m_S(\text{MeV})$	511,198	fixado
$m_V(\text{MeV})$	783,0	fixado
g_S	8,175	fixado
g_V	9,182	fixado
M^*/M	0,77	calculado
$\rho_0(\text{fm}^{-3})$	0,145	calculado
$b(\text{fm}^{-1})$	10,75	fixado
c	31,98	fixado
c_s	0,184	calculado

Tabela I: Grandezas relevantes com valores de massas e acoplamentos extraídos do conjunto de parâmetros GM [29, 30, 31].

Para $T > 0$ alguns desses parâmetros mudam, mas os valores das massas e dos acoplamentos g_S , g_V , b e c permanecem os mesmos.

Lembramos que apesar da densidade de energia possuir termos proporcionais a $\nabla^2 \rho_B$, suas propriedades de saturação são as mesmas da QHD na aproximação de campo médio.

Em nossos cálculos usamos as unidades naturais $\hbar = c = 1$ e portanto $197,4 \text{MeV} \cong \text{fm}^{-1}$. Os valores da tabela já foram utilizados no contexto de solitons na matéria nuclear em [38].

Capítulo 5

Obtenção de KdV na matéria nuclear

5.1 Relações para densidade de energia

Neste capítulo utilizaremos a “expansão além da linearização” como em [21, 23] para a obtenção da equação de KdV.

Vamos começar definindo dois sistemas físicos nos quais vamos procurar estas ondas não-lineares. O primeiro é o núcleo frio. Como de costume, começamos ignorando os efeitos das bordas e tratamos da matéria nuclear infinita. O segundo é a matéria nuclear quente e densa que pode ser produzida nas etapas finais de uma colisão núcleo-núcleo a altas energias.

5.1.1 I - Matéria nuclear com densidade bariônica de equilíbrio ρ_0 a temperatura nula

Este sistema satisfaz a seguinte condição de saturação:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_B} \left(\frac{\varepsilon}{\rho_B} - M \right)_{\rho_B = \rho_0} = 0 \quad (5.1)$$

A condição (5.1) justifica a expansão em série de Taylor (até o termo de segunda ordem) em torno de ρ_0 da energia por núcleon $E = \varepsilon/\rho_B$:

$$E(\rho_B) = E(\rho_0) + \left(\frac{\partial E}{\partial \rho_B} \right)_{\rho_B = \rho_0} (\rho_B - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0} (\rho_B - \rho_0)^2$$

Esta condição implica em:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_B} \left(\frac{\varepsilon}{\rho_B} - M \right)_{\rho_B = \rho_0} = \frac{\partial}{\partial \rho_B} (E - M)_{\rho_B = \rho_0} = \left(\frac{\partial E}{\partial \rho_B} \right)_{\rho_B = \rho_0} = 0$$

e portanto:

$$E(\rho_B) = E(\rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0} (\rho_B - \rho_0)^2 \quad (5.2)$$

A expressão (5.2) pode ser calculada a partir da densidade de energia na *QHD* modificada em temperatura nula, dada por (4.39):

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \\ & + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (k^2 + M^{*2})^{1/2} + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \vec{\nabla}^2 \rho_B \end{aligned} \quad (5.3)$$

que nos leva a:

$$\begin{aligned} E(\rho_0) = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_0 + \frac{m_S^2}{2g_S^2 \rho_0} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3 \rho_0} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4 \rho_0} + \\ & + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3 \rho_0} \int_0^{k_F} d^3 k (k^2 + M^{*2})^{1/2} + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \vec{\nabla}^2 \rho_B \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde consideramos ρ_B e $\vec{\nabla}^2 \rho_B$ variáveis independentes. A condição de saturação dada por (5.1) está relacionada a um mínimo na energia de ligação [33] e assim temos que:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0} > 0$$

e de maneira coerente podemos usar (D.28), uma vez que a incompressibilidade K é positiva. Substituindo então (5.4) e (D.28) em (5.2) encontramos:

$$\begin{aligned} E(\rho_B) = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_0 + \frac{m_S^2}{2g_S^2 \rho_0} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3 \rho_0} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4 \rho_0} + \\ & + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3 \rho_0} \int_0^{k_F} d^3 k (k^2 + M^{*2})^{1/2} + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \vec{\nabla}^2 \rho_B + \frac{M c_s^2}{2\rho_0^2} (\rho_B - \rho_0)^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Substituindo agora (5.5) em (A.26) temos:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} = \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_0 + \frac{m_S^2}{2g_S^2 \rho_0} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3 \rho_0} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4 \rho_0} +$$

$$+ \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3 \rho_0} \int_0^{k_F} d^3k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \vec{\nabla}^2 \rho_B + \frac{M c_s^2}{2\rho_0^2} (3\rho_B^2 - 4\rho_B \rho_0 + \rho_0^2) \quad (5.6)$$

Podemos ainda usar (5.6) nas relações (A.23) e (A.24) a serem utilizadas na hidrodinâmica relativística:

$$\vec{\nabla} p = \rho_B \vec{\nabla} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] = d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) + \frac{M c_s^2}{2\rho_0^2} (6\rho_B^2 \vec{\nabla} \rho_B - 4\rho_0 \rho_B \vec{\nabla} \rho_B) \quad (5.7)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_B \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] = d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) + \frac{M c_s^2}{2\rho_0^2} \left(6\rho_B^2 \frac{\partial \rho_B}{\partial t} - 4\rho_0 \rho_B \frac{\partial \rho_B}{\partial t} \right) \quad (5.8)$$

5.1.2 II - Matéria hadrônica a temperatura finita em uma densidade bariônica arbitrária

Este sistema é descrito pela *QHD* modificada em temperatura finita dada por (4.78):

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \\ & + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \vec{\nabla}^2 \rho_B + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k h [n_{\vec{k}}(T, \nu) + \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu)] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Como não há nenhuma condição de saturação, os cálculos de (A.23) e (A.24) são diretos:

$$\vec{\nabla} p = \rho_B \vec{\nabla} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] = \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho_B \vec{\nabla} \rho_B + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) \quad (5.10)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_B \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] = \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho_B \frac{\partial \rho_B}{\partial t} + d \frac{g_V^2}{m_V^4} \rho_B \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) \quad (5.11)$$

5.2 Equação de KdV na matéria nuclear

O procedimento de obtenção da equação de KdV envolve a combinação da versão relativística da equação de Euler (3.55):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{(v^2 - 1)}{(\varepsilon + p)} \left(\frac{\partial p}{\partial X} + v \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (5.12)$$

com a versão relativística da equação da continuidade (3.56):

$$(1 - v^2) \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \rho_B \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial \rho_B}{\partial X} + \eta \frac{\rho_B v}{X} \right) + v \rho_B \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} \right) = 0 \quad (5.13)$$

ambas no caso unidimensional: $\vec{v} = v \hat{X}$, sendo \hat{X} um versor na direção da coordenada X , relacionada com η através de:

$$\eta = \begin{cases} 0 \Rightarrow X \equiv x & \text{caso linear ou cartesiano} \\ 1 \Rightarrow X \equiv r & \text{caso radial cilíndrico} \\ 2 \Rightarrow X \equiv r & \text{caso radial esférico} \end{cases} \quad (5.14)$$

Porém, (5.12) contém os termos

$$\frac{\partial p}{\partial X} \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial t}$$

que necessitam de (5.7), (5.8), (5.10) e (5.11) escritos em uma dimensão resumindo todos as situações dadas por (5.14). Para tal, basta escrevermos o gradiente e o laplaciano de ρ_B nos casos unidimensionais descritos por (5.14) nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \rho_B &\rightarrow \frac{\partial \rho_B}{\partial x} && \text{caso linear} (\eta = 0) \\ \vec{\nabla} \rho_B &\rightarrow \frac{\partial \rho_B}{\partial r} && \text{caso radial cilíndrico e esférico} (\eta = 1, 2) \\ \vec{\nabla}^2 \rho_B &\rightarrow \frac{\partial^2 \rho_B}{\partial x^2} && \text{caso linear} (\eta = 0) \\ \vec{\nabla}^2 \rho_B &\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_B}{\partial r} + \frac{\partial^2 \rho_B}{\partial r^2} && \text{caso radial cilíndrico} (\eta = 1) \\ \vec{\nabla}^2 \rho_B &\rightarrow \frac{2}{r} \frac{\partial \rho_B}{\partial r} + \frac{\partial^2 \rho_B}{\partial r^2} && \text{caso radial esférico} (\eta = 2) \end{aligned}$$

que resumidamente são escritos como:

$$\vec{\nabla}\rho_B = \frac{\partial\rho_B}{\partial X} \quad (5.15)$$

$$\vec{\nabla}^2\rho_B = \frac{\eta}{X}\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \frac{\partial^2\rho_B}{\partial X^2} \quad (5.16)$$

Substituindo então (5.15) e (5.16) em (5.7) e em (5.8) (na situação *I*):

$$\frac{\partial p}{\partial X} = d\frac{g_V^2}{m_V^4}\rho_B\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\eta}{X}\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \frac{\partial^2\rho_B}{\partial X^2}\right) + \frac{Mc_s^2}{2\rho_0^2}\left(6\rho_B^2\frac{\partial\rho_B}{\partial X} - 4\rho_0\rho_B\frac{\partial\rho_B}{\partial X}\right) \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = d\frac{g_V^2}{m_V^4}\rho_B\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta}{X}\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \frac{\partial^2\rho_B}{\partial X^2}\right) + \frac{Mc_s^2}{2\rho_0^2}\left(6\rho_B^2\frac{\partial\rho_B}{\partial t} - 4\rho_0\rho_B\frac{\partial\rho_B}{\partial t}\right) \quad (5.18)$$

e substituindo também (5.15) e (5.16) em (5.10) e em (5.11) (na situação *II*):

$$\frac{\partial p}{\partial X} = \frac{g_V^2}{m_V^2}\rho_B\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + d\frac{g_V^2}{m_V^4}\rho_B\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\eta}{X}\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \frac{\partial^2\rho_B}{\partial X^2}\right) \quad (5.19)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{g_V^2}{m_V^2}\rho_B\frac{\partial\rho_B}{\partial t} + d\frac{g_V^2}{m_V^4}\rho_B\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta}{X}\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \frac{\partial^2\rho_B}{\partial X^2}\right) \quad (5.20)$$

Notamos que podemos distinguir as situações *I*) e *II*) essencialmente pela escolha de temperatura nula ou temperatura finita respectivamente. Sendo assim podemos reescrever (5.17) e (5.19) na forma:

$$\frac{\partial p}{\partial X} = \phi\rho_B\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \Phi\rho_B^2\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \omega\rho_B\left(-\frac{\eta}{X^2}\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \frac{\eta}{X}\frac{\partial^2\rho_B}{\partial X^2} + \frac{\partial^3\rho_B}{\partial X^3}\right) \quad (5.21)$$

e reescrever também (5.18) e (5.20) como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \phi\rho_B\frac{\partial\rho_B}{\partial t} + \Phi\rho_B^2\frac{\partial\rho_B}{\partial t} + \omega\rho_B\left[-\frac{\eta}{X^2}v\frac{\partial\rho_B}{\partial X} + \frac{\eta}{X}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\rho_B}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\rho_B}{\partial X^2}\right)\right] \quad (5.22)$$

onde

$$\Phi \equiv \begin{cases} \frac{3Mc_s^2}{\rho_0^2} & T = 0 \\ 0 & T \neq 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\phi \equiv \begin{cases} -\frac{2Mc_s^2}{\rho_0} & T = 0 \\ \frac{g_V^2}{m_V^2} & T \neq 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\omega \equiv d \frac{gV^2}{mV^4} \quad T = 0 \text{ e } T \neq 0 \quad (5.25)$$

Finalmente podemos escrever a equação de Euler numa forma que contém todas as situações dadas por (5.14) em temperatura nula e finita, através da substituição de (5.21), (5.22) e da relação de Gibbs (A.17) em (5.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{(v^2 - 1)\rho_B}{(\mu_B \rho_B + Ts)} \left\{ \phi \frac{\partial \rho_B}{\partial X} + \Phi \rho_B \frac{\partial \rho_B}{\partial X} + \omega \left(-\frac{\eta}{X^2} \frac{\partial \rho_B}{\partial X} + \frac{\eta}{X} \frac{\partial^2 \rho_B}{\partial X^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^3 \rho_B}{\partial X^3} \right) + \phi v \frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \Phi v \rho_B \frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \omega \left[-\frac{\eta}{X^2} v^2 \frac{\partial \rho_B}{\partial X} + \frac{\eta}{X} v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial X} \right) + v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \rho_B}{\partial X^2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

ou melhor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{(v^2 - 1)\rho_B}{(\mu_B \rho_B + Ts)} \left\{ (\Phi \rho_B + \phi) \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial X} + v \frac{\partial \rho_B}{\partial t} \right) + \omega \left[\frac{\partial^3 \rho_B}{\partial X^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \rho_B}{\partial X^2} \right) \right] - \omega \frac{\eta}{X^2} \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial X} + v^2 \frac{\partial \rho_B}{\partial X} \right) + \omega \frac{\eta}{X} \left(\frac{\partial^2 \rho_B}{\partial X^2} + v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial X} \right) \right) \right\} \quad (5.26) \end{aligned}$$

Agora podemos iniciar o procedimento mencionado no capítulo anterior, que chamamos de “expansão além da linearização” para obtenção da equação de KdV.

A primeira etapa consiste na mudança das variáveis de densidade bariônica ρ_B e da velocidade v para variáveis adimensionais:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho_B}{\rho_0}, \quad \hat{v} = \frac{v}{c_s} \quad (5.27)$$

Substituindo então (5.27) em (5.26) temos:

$$\begin{aligned} c_s \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + c_s^2 \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial X} = \frac{(c_s^2 \hat{v}^2 - 1)\rho_0 \hat{\rho}}{(\mu_B \rho_0 \hat{\rho} + Ts)} \left\{ (\Phi \rho_0 \hat{\rho} + \phi) \rho_0 \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial X} + c_s \hat{v} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right) + \omega \rho_0 \left[\frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial X^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + c_s \hat{v} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial X^2} \right) \right] - \omega \rho_0 \frac{\eta}{X^2} \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial X} + c_s^2 \hat{v}^2 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial X} \right) + \omega \rho_0 \frac{\eta}{X} \left(\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial X^2} + c_s \hat{v} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial X} \right) \right) \right\} \quad (5.28) \end{aligned}$$

e também (5.27) em (5.13):

$$(1 - c_s^2 \hat{v}^2) \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + c_s \hat{\rho} \frac{\partial \hat{v}}{\partial X} + c_s \hat{v} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial X} + \eta c_s \frac{\hat{\rho} \hat{v}}{X} \right) + c_s^2 \hat{v} \hat{\rho} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + c_s \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial X} \right) = 0 \quad (5.29)$$

A segunda etapa é a passagem para o espaço $(\xi - \tau)$ como em [21, 23, 81]:

$$\xi = \sigma^{1/2} \frac{(X - c_s t)}{R}, \quad \tau = \sigma^{3/2} \frac{c_s t}{R} \quad (5.30)$$

que geram os operadores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\sigma}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^3}{\partial X^3} = \frac{\sigma^{3/2}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \quad e \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -\frac{c_s \sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{c_s \sigma^{3/2}}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (5.31)$$

e também os termos:

$$\frac{1}{X} = \frac{\sigma^{3/2}}{(R\xi\sigma + R\tau)} \quad e \quad \frac{1}{X^2} = \frac{\sigma^3}{(R\xi\sigma + R\tau)^2} \quad (5.32)$$

Vamos considerar apenas o caso em que:

$$\tau > \xi\sigma \quad \text{que significa} \quad 2c_s t > X \quad (5.33)$$

que, em (5.32), implica em:

$$\frac{1}{X} = \frac{\sigma^{3/2}}{R\tau} \quad e \quad \frac{1}{X^2} = \frac{\sigma^3}{(R\tau)^2} \quad (5.34)$$

Usando (5.30), (5.31) e (5.34) em (5.28) temos:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{c_s^2 \sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{c_s^2 \sigma^{3/2}}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + c_s^2 \hat{v} \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right) (\mu_B \rho_0 \hat{\rho} + Ts) = \\ &= (c_s^2 \hat{v}^2 - 1) \rho_0 \hat{\rho} \left\{ (\Phi \rho_0 \hat{\rho} + \phi) \rho_0 \left(\frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} - \frac{c_s^2 \sigma^{1/2} \hat{v}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \frac{c_s^2 \sigma^{3/2} \hat{v}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \tau} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega \rho_0 \left[\frac{\sigma^{3/2}}{R^3} \frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial \xi^3} + \left(-\frac{c_s^2 \sigma^{1/2}}{R} \hat{v} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{c_s^2 \sigma^{3/2}}{R} \hat{v} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\sigma}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial \xi^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \omega \rho_0 \frac{\eta \sigma^3}{(R\tau)^2} \left(\frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + c_s^2 \hat{v}^2 \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega \rho_0 \frac{\eta \sigma^{3/2}}{R\tau} \left[\frac{\sigma}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial \xi^2} + c_s \hat{v} \left(-\frac{c_s \sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{c_s \sigma^{3/2}}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} \right) \right] \right\} \quad (5.35) \end{aligned}$$

que multiplicada por

$$\frac{R}{c_s^2 \sigma^{1/2}}$$

assume a forma:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \sigma \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right) (\mu_B \rho_0 \hat{\rho} + Ts) = \\ & = (c_s^2 \hat{v}^2 - 1) \rho_0 \hat{\rho} \left\{ (\Phi \rho_0 \hat{\rho} + \phi) \rho_0 \left(\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} - \hat{v} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \sigma \hat{v} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \tau} \right) + \right. \\ & \quad + \omega \rho_0 \left[\frac{\sigma}{c_s^2 R^2} \frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial \xi^3} + \left(-\hat{v} \frac{\partial}{\partial \xi} + \sigma \hat{v} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\sigma}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial \xi^2} \right] \\ & \quad - \omega \rho_0 \frac{\eta \sigma^3}{(R\tau)^2} \left(\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \hat{v}^2 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} \right) + \\ & \quad \left. + \omega \rho_0 \frac{\eta \sigma^{3/2}}{R\tau} \left[\frac{\sigma^{1/2}}{c_s^2 R} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial \xi^2} + \left(-\hat{v} \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{v} \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Agora, usando também (5.30), (5.31) e (5.34) em (5.29) encontramos:

$$\begin{aligned} & (1 - c_s^2 \hat{v}^2) \left(-\frac{c_s \sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \frac{c_s \sigma^{3/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \tau} + c_s \hat{\rho} \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + c_s \hat{v} \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \eta c_s \frac{\hat{\rho} \hat{v} \sigma^{3/2}}{R\tau} \right) + \\ & \quad + c_s^2 \hat{v} \hat{\rho} \left(-\frac{c_s \sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{c_s \sigma^{3/2}}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + c_s \hat{v} \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

que multiplicada por

$$\frac{R}{c_s \sigma^{1/2}}$$

assume a forma:

$$\begin{aligned} & (1 - c_s^2 \hat{v}^2) \left(-\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \sigma \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \tau} + \hat{\rho} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \eta \frac{\hat{\rho} \hat{v} \sigma}{\tau} \right) + \\ & \quad + c_s^2 \hat{v} \hat{\rho} \left(-\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \sigma \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Na terceira e última etapa, expandimos (5.27) em torno de seus valores de equilíbrio (ou referência):

$$\hat{\rho} = 1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots \quad (5.39)$$

$$\hat{v} = \sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots \quad (5.40)$$

Então usando (5.39) e (5.40) em (5.36):

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial}{\partial \xi}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \sigma \frac{\partial}{\partial \tau}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \right. \\ & \quad \left. + (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \right] \times \\ & \quad \times [\mu_B \rho_0 (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + Ts] = \\ & = [c_s^2 (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots)^2 - 1] \rho_0 (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \times \\ & \times \left\{ [\Phi \rho_0 (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \phi] \rho_0 \left[\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sigma (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tau} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \right] + \right. \\ & + \omega \rho_0 \left[\frac{\sigma}{c_s^2 R^2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \left[-(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sigma (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \frac{\sigma}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \right] + \\ & \quad - \omega \rho_0 \frac{\eta \sigma^3}{(R\tau)^2} \left[\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \right. \\ & \quad \left. + (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \right] + \\ & \quad + \omega \rho_0 \frac{\eta \sigma^{3/2}}{R\tau} \left[\frac{\sigma^{1/2}}{c_s^2 R} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \right. \\ & \quad \left. + \left[-(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \left(\frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \right] \left. \right\} \quad (5.41) \end{aligned}$$

Desprezando os termos proporcionais a σ^n para $n \geq 3$, temos:

$$\left(-\sigma \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \sigma^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \sigma^2 \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \sigma^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right) (\mu_B \rho_0 + \mu_B \rho_0 \sigma \rho_1 + Ts) =$$

$$= (-\rho_0 - \rho_0 \sigma \rho_1) \left\{ [\Phi \rho_0 (1 + \sigma \rho_1) + \phi] \rho_0 \left(\frac{\sigma}{c_s^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2}{c_s^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \sigma^2 v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + \omega \rho_0 \frac{\sigma^2}{c_s^2 R^2} \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} \right\}$$

ou ainda:

$$-\sigma \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \sigma^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \sigma^2 \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \sigma^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\mu_B \rho_0}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \sigma^2 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \\ + \frac{(\Phi \rho_0 + \phi)}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \rho_0^2 \left(\frac{\sigma}{c_s^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2}{c_s^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \sigma^2 v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \right) + \frac{(\Phi \rho_0 + \phi)}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \frac{\rho_0^2}{c_s^2} \sigma^2 \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \\ + \frac{\Phi \rho_0^3}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2} \frac{\rho_0^2}{c_s^2} \sigma^2 \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\omega \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2 R^2} \sigma^2 \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = 0$$

que reunindo os termos de ordem σ :

$$\sigma \left\{ -\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{(\Phi \rho_0 + \phi)}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \frac{\rho_0^2}{c_s^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \right\} + \sigma^2 \left\{ -\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \right. \\ - \frac{\mu_B \rho_0}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{(\Phi \rho_0 + \phi)}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \frac{\rho_0^2}{c_s^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \frac{(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s)} v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \\ + \frac{(\Phi \rho_0 + \phi)}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \frac{\rho_0^2}{c_s^2} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\Phi \rho_0^3}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \\ \left. + \frac{\omega \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2 R^2} \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} \right\} = 0 \quad (5.42)$$

que é a equação de Euler no esquema de “expansão além da linearização”. Para chegarmos em uma forma semelhante para a equação da continuidade substituímos (5.39) e (5.40) em (5.38):

$$[1 - c_s^2 (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots)]^2 \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \right. \\ + \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \\ \left. + (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \right]$$

$$\begin{aligned}
& +\eta \frac{(1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots)(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots)\sigma}{\tau} \Big] + \\
& +c_s^2(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots)(1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots) \left[-\frac{\partial}{\partial\xi}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \right. \\
& \left. +\sigma \frac{\partial}{\partial\tau}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial\xi}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \right] = 0 \quad (5.43)
\end{aligned}$$

Novamente desprezando os termos proporcionais a σ^n para $n \geq 3$ obtemos:

$$\begin{aligned}
& -\sigma \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} - \sigma^2 \frac{\partial\rho_2}{\partial\xi} + \sigma^2 \frac{\partial\rho_1}{\partial\tau} + \sigma \frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \sigma^2 \frac{\partial v_2}{\partial\xi} + \sigma^2 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \sigma^2 v_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} + \sigma^2 \eta \frac{v_1}{\tau} + \\
& +c_s^2(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2)(1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2) \left(-\sigma \frac{\partial v_1}{\partial\xi} - \sigma^2 \frac{\partial v_2}{\partial\xi} + \sigma^2 \frac{\partial v_1}{\partial\tau} + \sigma^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial\xi} \right) = 0
\end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
& -\sigma \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} - \sigma^2 \frac{\partial\rho_2}{\partial\xi} + \sigma^2 \frac{\partial\rho_1}{\partial\tau} + \sigma \frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \sigma^2 \frac{\partial v_2}{\partial\xi} + \sigma^2 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \\
& +\sigma^2 v_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} + \sigma^2 \eta \frac{v_1}{\tau} - \sigma^2 c_s^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial\xi} = 0
\end{aligned}$$

Agrupando os termos em potências de σ encontramos:

$$\sigma \left\{ -\frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial\xi} \right\} + \sigma^2 \left\{ -\frac{\partial\rho_2}{\partial\xi} + \frac{\partial\rho_1}{\partial\tau} + \frac{\partial v_2}{\partial\xi} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial\xi} + v_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} + \eta \frac{v_1}{\tau} - c_s^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial\xi} \right\} = 0 \quad (5.44)$$

Agora temos um sistema de duas equações dadas por (5.42) e (5.44) que estão na forma:

$$\sigma \left\{ \dots \right\} + \sigma^2 \left\{ \dots \right\} = 0$$

e como σ é um parâmetro de expansão pequeno, resolvemos o sistema igualando cada chave a zero:

$$\left\{ \dots \right\} = 0$$

em (5.42) e em (5.44). Dos termos proporcionais a σ em (5.42) e em (5.44) temos:

$$-\frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \frac{(\Phi\rho_0 + \phi)}{(\mu_B\rho_0 + Ts)} \frac{\rho_0^2}{c_s^2} \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} = 0 \quad (5.45)$$

e

$$-\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0 \quad (5.46)$$

respectivamente. De (5.46) temos:

$$v_1 = \rho_1 \quad (5.47)$$

que substituída em (5.45) nos leva ao vínculo

$$\frac{(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2} = 1 \quad (5.48)$$

Analogamente, dos termos proporcionais a σ^2 em (5.42) e em (5.44) temos:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \\ & -\frac{\mu_B \rho_0}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \frac{(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s)} v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \\ & + \frac{(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\Phi \rho_0^3}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \\ & + \frac{\omega \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2 R^2} \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

e

$$-\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \eta \frac{v_1}{\tau} - c_s^2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0 \quad (5.50)$$

respectivamente. Substituindo (5.47) em (5.50) encontramos:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + (2 - c_s^2) \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\rho_1}{\tau} \quad (5.51)$$

Agora, substituindo (5.47) e (5.48) em (5.49):

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{\mu_B \rho_0}{(\mu_B \rho_0 + T s)} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - c_s^2 \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \\ & + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left[1 - \frac{\phi \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2} \right] \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\omega \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + T s) c_s^2 R^2} \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = 0 \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2}{\partial \xi} = & -\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} - (2 - c_s^2) \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\mu_B \rho_0}{(\mu_B \rho_0 + Ts)} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \\ & - \left[1 - \frac{\phi \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + Ts) c_s^2} \right] \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{\omega \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + Ts) c_s^2 R^2} \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Substituindo (5.52) em (5.51):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + (2 - c_s^2) \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\rho_1}{\tau} = & -\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} - (2 - c_s^2) \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \\ & + \frac{\mu_B \rho_0}{(\mu_B \rho_0 + Ts)} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \left[1 - \frac{\phi \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + Ts) c_s^2} \right] \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{\omega \rho_0^2}{(\mu_B \rho_0 + Ts) c_s^2 R^2} \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left[\frac{\omega \rho_0^2}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2 R^2} \right] \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} + \frac{\eta \rho_1}{2 \tau} = 0 \quad (5.53)$$

que é a equação do tipo KdV (vide (2.9)) na matéria nuclear para $\rho_1(\xi, \tau)$. É interessante passarmos (5.53) do espaço $(\xi - \tau)$ para o espaço $(X - t)$ que envolve as geometrias dadas por (5.14). Para tanto, utilizaremos (5.30), (5.31) e (5.34) resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{R}{\sigma^{1/2}} \frac{\partial}{\partial X} \quad , \quad \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} = \frac{R^3}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial^3}{\partial X^3} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{R}{\sigma^{3/2} c_s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{R}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial}{\partial X} \\ \text{e} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{R}{\sigma^{3/2} c_s t} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Substituindo então (5.54) em (5.53):

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sigma^{3/2} c_s} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{R}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial \rho_1}{\partial X} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \rho_1 \frac{R}{\sigma^{1/2}} \frac{\partial \rho_1}{\partial X} + \\ + \left[\frac{\omega \rho_0^2}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2 R^2} \right] \frac{R^3}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2} \frac{R}{\sigma^{3/2} c_s} \frac{\rho_1}{t} = 0 \end{aligned}$$

que multiplicada por

$$\frac{\sigma^{5/2} c_s}{R}$$

assume a forma:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \sigma c_s \frac{\partial \rho_1}{\partial X} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \sigma^2 c_s \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial X} + \\ + \left[\frac{\omega \rho_0^2}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2 R^2} \right] R^2 \sigma c_s \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2} \sigma \frac{\rho_1}{t} = 0 \end{aligned}$$

ou de maneira mais simples, utilizando (5.25) que é o mesmo para $T = 0$ e $T \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial X} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial X} + \\ + d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{2m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\hat{\rho}_1}{t} = 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde usamos

$$\hat{\rho}_1 \equiv \sigma \rho_1 \quad (5.56)$$

A equação (5.55) é do tipo (2.2) mas com o acréscimo do termo

$$c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial X}$$

que, conforme veremos adiante, contribui para o caráter supersônico do pulso solitônico quando $d > 0$ e subsônico quando $d < 0$.

5.3 Equação de KdV na QHD pura

Na obtenção da equação de KdV em temperatura nula as expressões (5.7) e (5.8) nos dizem que a quantidade relevante é $\partial \varepsilon / \partial \rho_B$ que está envolvida no cálculo do gradiente e derivada temporal da pressão. Então usando (4.93), a hipótese da independência das variáveis do capítulo anterior e a expansão (5.2), encontramos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} p = \rho_B \vec{\nabla} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] = \\ = \frac{g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) + \frac{M c_s^2}{2\rho_0^2} (6\rho_B^2 \vec{\nabla} \rho_B - 4\rho_0 \rho_B \vec{\nabla} \rho_B) \end{aligned} \quad (5.57)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \rho_B \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] = \\ &= \frac{g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) + \frac{M c_s^2}{2\rho_0^2} \left(6\rho_B^2 \frac{\partial \rho_B}{\partial t} - 4\rho_0 \rho_B \frac{\partial \rho_B}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Já para temperatura finita, usamos (4.94) e nesse caso de maneira direta notamos de (5.10) e (5.11) que

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} = \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V^2}{2m_V^4} \vec{\nabla}^2 \rho_B \quad (5.59)$$

e conseqüentemente:

$$\vec{\nabla} p = \rho_B \vec{\nabla} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] = \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho_B \vec{\nabla} \rho_B + \frac{g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) \quad (5.60)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_B \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] = \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho_B \frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \frac{g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 \rho_B) \quad (5.61)$$

Refazendo todos os cálculos usando (5.57) e (5.58) para temperatura nula encontramos a equação de KdV:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + (3 - c_s^2) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left(\frac{g_V^2 \rho_0}{4M m_V^4 c_s} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (5.62)$$

e de forma semelhante, usando (5.60) e (5.61) encontramos para temperatura finita a seguinte equação de KdV:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left(\frac{c_s}{4m_V^2} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (5.63)$$

Com as equações (5.62) e (5.63) concluímos que a *QHD* com ligeira modificação no tratamento da *MFT* comporta solitons sem que se mude sua lagrangiana com o *termo-d*.

5.4 Equação de KdV alternativa

Lembramos as duas maneiras estabelecidas no capítulo 4 para aparecimento da equação de KdV na matéria nuclear:

1) conservando a teoria original e mudando o esquema de aproximações usadas para tratá-la;

2) modificando a teoria original com a inclusão de novos termos na lagrangiana;

Encontramos equações de KdV com o coeficiente do termo de terceira derivada com *termo-d* dadas por (5.55) e sem o *termo-d* dadas por (5.62) e (5.63).

Apresentamos agora de maneira qualitativa as equações de KdV em temperatura nula e finita conforme em nosso trabalho mais recente [38], numa forma que combina 1) e 2) resumida por: *Modificar a teoria original com a inclusão do termo-d e mudar o esquema das aproximações conforme na última seção.*

O que observamos neste novo esquema de cálculo “híbrido” para a densidade de energia é a troca de d por $d + 1/2$, ou seja:

$$d \longleftrightarrow \left(d + \frac{1}{2} \right) \quad (5.64)$$

Essa mudança se “propaga” em todos os resultados se refizermos todos os cálculos deste capítulo para obtenção da KdV no que diz respeito ao esquema com uso do *termo-d*, ou seja, encontraremos as mesmas expressões, porém com o fator $d + 1/2$ no lugar de d . Então basta usarmos (5.64) nas equações de KdV que contém *termo-d*.

O termo “*KdV alternativa*” no nome desta seção é uma maneira de apresentar (5.64) que inclui inhomogeneidades nos campos vetoriais e também o *termo-d*. Tais inhomogeneidades agora presentes na estimativa de V_0 nos fornece (4.92) modificada na forma

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V}{m_V^4} \vec{\nabla}^2 \rho_B - d \frac{g_V}{m_V^6} \vec{\nabla}^2 \left[\partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \right] - d \frac{g_V}{m_V^4} \partial_\mu \partial^\mu (\rho_B) \quad (5.65)$$

ao invés de (4.37) gerando (5.64) nos resultados finais.

Resumindo tais resultados de [38] encontramos:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + (3 - c_s^2) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left(d + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{g_V^2 \rho_0}{2M m_V^4 c_s} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (5.66)$$

e

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left(d + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{c_s}{2m_V^2} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (5.67)$$

Observamos em (5.66) e em (5.67) que com a escolha $d = -\frac{1}{2}$ temos as equações de quebra de onda para perturbações em ρ_B . Se $d + \frac{1}{2} > 0$ encontramos a KdV usual com solução solitônica supersônica e se $d + \frac{1}{2} < 0$ encontramos a KdV com ondas de rarefação subsônica como solução. Para $d = 0$ temos as equações de KdV (5.62) e (5.63). A escolha de d ajusta a situação desejada e envolve as outras situações.

Capítulo 6

Soluções da equação de KdV

6.1 Introdução

Já mencionamos no Capítulo 2 qualitativamente as condições e os métodos em busca de soluções da equação de KdV e suas variantes. Neste capítulo apresentaremos as soluções exatas detalhadas para alguns casos e também as soluções aproximadas e condições iniciais para estudo numérico das equações diferenciais que encontramos.

6.2 KdV linear

6.2.1 Solução analítica

A equação (5.55) com $\eta \equiv 0$ de acordo com (5.14) é a equação de KdV linear modificada no espaço $x - t$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \\ + d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{2m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Esta equação possui uma solução particular tipo sóliton, ou seja, um pulso bem definido se propagando sem alterar sua forma e velocidade de propagação. Apresentaremos agora a solução detalhada neste caso.

Tal solução é obtida pela imposição de:

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1(\chi)$$

com

$$\chi = x - ut$$

onde u é a velocidade de propagação do sóliton. Verificamos que:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} = -u \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} = \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \quad (6.3)$$

e

$$\frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = \frac{d^3 \hat{\rho}_1}{d\chi^3} \quad (6.4)$$

substituindo (6.2), (6.3) e (6.4) em (6.1) encontramos:

$$\begin{aligned} -u \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} + c_s \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \hat{\rho}_1 \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} + \\ + d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{2m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \frac{d^3 \hat{\rho}_1}{d\chi^3} = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

que integrada em relação a χ fornece:

$$\begin{aligned} (c_s - u) \frac{\hat{\rho}_1^2}{2} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \frac{\hat{\rho}_1^3}{6} + \\ + d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{2m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \frac{d^2 \hat{\rho}_1}{d\chi^2} + C = 0 \end{aligned}$$

onde C é uma constante de integração. Integrando a última equação em relação a $\hat{\rho}_1$ obtemos:

$$\begin{aligned} (c_s - u) \frac{\hat{\rho}_1^2}{2} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \frac{\hat{\rho}_1^3}{6} + \\ + d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{2m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \int \frac{d^2 \hat{\rho}_1}{d\chi^2} d\hat{\rho}_1 + \end{aligned}$$

$$+C\hat{\rho}_1 + D = 0 \quad (6.6)$$

com D sendo outra constante de integração. O termo

$$\int \frac{d^2\hat{\rho}_1}{d\chi^2} d\hat{\rho}_1$$

pode ser reescrito como:

$$\int \frac{d^2\hat{\rho}_1}{d\chi^2} d\hat{\rho}_1 = \int \frac{d^2\hat{\rho}_1}{d\chi^2} \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} d\chi = \frac{1}{2} \int \frac{d}{d\chi} \left(\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \right)^2 d\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \right)^2 + E$$

com E sendo outra constante de integração. A equação (6.6) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} (c_s - u) \frac{\hat{\rho}_1^2}{2} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \frac{\hat{\rho}_1^3}{6} + \\ + d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{4m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \left(\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \right)^2 + \\ + C\hat{\rho}_1 + D + F = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde a constante F é dada por

$$F \equiv E \times d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{4m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right]$$

Impondo as condições solitônicas para $\hat{\rho}_1(x, t)$ em (6.7):

$$\hat{\rho}_1 \rightarrow 0 \quad ,$$

$$\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \rightarrow 0$$

e

$$\frac{d^2\hat{\rho}_1}{d\chi^2} \rightarrow 0$$

quando $|\chi| \rightarrow \infty$, encontramos $D + F = 0$ e escolhemos $C = 0$, uma vez que o sóliton é uma solução particular da equação de KdV. Com estas escolhas (6.7) se transforma em:

$$d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{4m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \left(\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \right)^2 =$$

$$= (u - c_s) \frac{\hat{\rho}_1^2}{2} - \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \frac{\hat{\rho}_1^3}{6}$$

ou seja:

$$\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} = \pm \hat{\rho}_1 \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2 \hat{\rho}_1} \quad (6.8)$$

onde usamos por facilidade de notação:

$$\alpha_1 \equiv \frac{2m_V^4(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2 (u - c_s)}{dg_V^2 \rho_0^2 c_s} \quad (6.9)$$

e

$$\alpha_2 \equiv \frac{2m_V^4(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2}{3dg_V^2 \rho_0^2} \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \quad (6.10)$$

Reescrevendo a equação diferencial (6.8) temos:

$$\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} = \pm \hat{\rho}_1 \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2 \hat{\rho}_1} \implies \pm \int \frac{d\hat{\rho}_1}{\hat{\rho}_1 \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2 \hat{\rho}_1}} = \int d\chi \quad (6.11)$$

Impondo a solução solitônica

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1(\theta) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \operatorname{sech}^2(\theta) \quad (6.12)$$

temos

$$d\hat{\rho}_1 = -\frac{2\alpha_1 \operatorname{senh}(\theta)}{\alpha_2 \cosh^3(\theta)} d\theta = -\frac{2\alpha_1 \tanh(\theta) \operatorname{sech}^2(\theta)}{\alpha_2} d\theta \quad (6.13)$$

Substituindo então (6.12) e (6.13) em (6.11) temos:

$$\mp 2 \int \frac{\tanh(\theta) \operatorname{sech}^2(\theta)}{\operatorname{sech}^2(\theta) \sqrt{\alpha_1 [1 - \operatorname{sech}^2(\theta)]}} d\theta = \int d\chi$$

Usando a relação $1 - \operatorname{sech}^2(\theta) = \tanh^2(\theta)$ obtemos:

$$\mp \frac{2}{\sqrt{\alpha_1}} \int d\theta = \int d\chi \implies \theta = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2} (\chi - \chi_0) + \theta_0$$

Escolhendo o sinal positivo e as constantes $\chi_0 = \theta_0 = 0$ e lembrando que $\chi = x - ut$ temos:

$$\theta = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2} (x - ut) \quad (6.14)$$

que substituída em (6.12) nos dá a solução solitônica de (6.1):

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{\alpha_1}}{2} (x - ut) \right] \quad (6.15)$$

De (6.9) notamos que a velocidade u é supersônica por causa do fator $(u - c_s) > 0$ no caso $d > 0$ e subsônica no caso $d < 0$ pois assim $(u - c_s) < 0$. O fator $(u - c_s)$ surge por causa do termo

$$c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x}$$

em (6.1) contribuindo nos termos:

$$-u \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} + c_s \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi}$$

de (6.5), após a imposição de que a solução deve ser uma onda com velocidade de propagação u .

6.2.2 Dois casos de interesse

I) *Matéria nuclear a $T = 0$, com densidade bariônica de equilíbrio ρ_0 e saturação.*

Nesta situação temos do vínculo dado por (5.48): $\mu_B = M$.

A equação (5.55) e sua solução exata (6.15) usando (5.23) e (5.24) são dadas por:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + (3 - c_s^2) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + d \left(\frac{g_V^2 \rho_0}{2M m_V^4 c_s} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (6.16)$$

e

$$\hat{\rho}_1(x, t) = \frac{3(u - c_s)}{c_s(3 - c_s^2)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(u - c_s) c_s M}{2d\rho_0}} (x - ut) \right] \quad (6.17)$$

respectivamente.

Se todo o estudo fosse feito na hidrodinâmica não-relativística, ou seja, se partíssemos das equações (3.21) e (3.25), encontraríamos

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + 3c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + d \left(\frac{g_V^2 \rho_0}{2M m_V^4 c_s} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (6.18)$$

e sua solução dada por

$$\hat{\rho}_1(x, t) = \frac{(u - c_s)}{c_s} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(u - c_s)c_s M}{2d\rho_0}} (x - ut) \right] \quad (6.19)$$

conforme em [34, 35, 37]. Tomando o limite não-relativístico dado por $c_s^2 \rightarrow 0$ e conseqüentemente $(3 - c_s^2) \cong 3$ em (6.16) e em (6.17), elas se reduzem às equações (6.18) e (6.19).

II) Matéria hadrônica em $T \neq 0$ descrita em uma densidade bariônica arbitrária.

O vínculo dado por (5.48) resulta em

$$\frac{g_V^2 \rho_0}{m_V^2 c_s^2} = \left(\mu_B + \frac{T s}{\rho_0} \right) \quad (6.20)$$

Novamente, a equação (5.55) e sua solução exata (6.15) são dadas por:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + d \left(\frac{c_s}{2m_V^2} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (6.21)$$

e

$$\hat{\rho}_1(x, t) = \frac{3(u - c_s)}{c_s} \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right)^{-1} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{(u - c_s)m_V^2}{2dc_s}} (x - ut) \right] \quad (6.22)$$

onde usamos (5.23) e (5.24).

6.2.3 Sobre a largura dos solitons

Em colisões próton-núcleo com a eventual formação de um sóliton, a largura λ do sóliton é um parâmetro crucial, se ela for da ordem do raio nuclear R_N , ou seja, $\lambda \cong R_N$, a energia do projétil será absorvida pelo núcleo como um todo e o efeito de transparência não ocorre. Se $\lambda \ll R_N$, há uma grande localização do pulso de energia e o efeito pode ocorrer.

Observando o sóliton (6.17) da KdV linear em temperatura nula ($T = 0$) vemos que sua largura é dada por:

$$\lambda_{(T=0)} = \frac{g_V}{m_V^2} \sqrt{\frac{2d\rho_0}{(u - c_s)c_s M}} \quad (6.23)$$

Já para o sóliton (6.22) em $T \neq 0$ encontramos a largura:

$$\lambda_{(T \neq 0)} = \sqrt{\frac{2dc_s}{(u - c_s)m_V^2}} \quad (6.24)$$

Nas duas situações λ é inversamente proporcional a velocidade do pulso u , na raiz quadrada. Como o pulso é produzido por um projétil podemos aproximar u pela velocidade do projétil, que é bem conhecida se soubermos sua energia E e seu momento p . Temos então:

$$u \cong \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + M^2}}$$

Por outro lado, observando os solitons (6.17) e (6.22) junto com a expansão (5.39):

$$\frac{\rho_B}{\rho_0} = \hat{\rho} = 1 + \hat{\rho}_1 + \dots$$

vemos que a perturbação $\hat{\rho}_1$ deve ser menor do que 1 para que tal expansão faça sentido. Uma vez que

$$0 < \operatorname{sech}^2[\dots] \leq 1$$

é necessário que o fator presente nas amplitudes dos solitons

$$\frac{u - c_s}{c_s} \quad \text{satisfaça} \quad \frac{u - c_s}{c_s} \leq 1$$

e então temos $u \leq u_{max} = 2c_s$. Sendo assim temos um valor máximo para o momento do feixe incidente dado por

$$p_{max} = \frac{2c_s M}{\sqrt{1 - 4c_s^2}} \quad (6.25)$$

Utilizando os valores da Tabela I no capítulo de matéria nuclear em temperatura nula encontramos:

$$p_{max} \cong 371 \text{ MeV} \quad \text{e} \quad u_{max} \cong 0,37 \quad (6.26)$$

onde u_{max} é um valor máximo para a velocidade do pulso solitônico mediante p_{max} para $d > 0$.

Notamos que para $d > 0$ temos a situação solitônica supersônica com $u > c_s$ e para $d < 0$ a rarefação subsônica com $u < c_s$, uma vez que d

determina o sinal do coeficiente do termo de terceira derivada da equação de KdV. Este raciocínio vem da análise do sinal de d em (6.17), (6.22), (6.23) e (6.24).

Vale ressaltar que no caso de temperatura finita nas expressões (6.22) e (6.24) sabemos que

$$\left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0}\right)^{-1} > 0$$

Na Tabela II apresentamos os valores da largura λ calculados com (6.23) para momentos do feixe incidente correspondentes a velocidades entre c_s e $2c_s$ para situação de sóliton supersônico com $d = 1$.

p (MeV)	u	$\lambda_{(T=0)}$
200	0,208	2,146
210	0,218	1,810
220	0,228	1,596
230	0,238	1,444
240	0,248	1,329
250	0,257	1,239
260	0,267	1,166
270	0,276	1,104
280	0,286	1,052
290	0,295	1,000
300	0,304	0,967
310	0,314	0,933
320	0,323	0,901
330	0,332	0,874
340	0,340	0,849
350	0,349	0,826
360	0,358	0,805
370	0,367	0,786

Tabela II: Cálculo das larguras dos solitons em fm .

6.3 Soluções numéricas da KdV linear

6.3.1 Temperatura nula

a) Escolhemos $u = 0,3$ que de acordo com a Tabela II nos dá uma largura do sóliton $\lambda_{(T=0)} \cong 1 fm$, no caso em que $d = 1$. Usando (6.17) como condição inicial de (6.16) e resolvendo-a numericamente encontramos as curvas mostradas na Figura 6.1 .

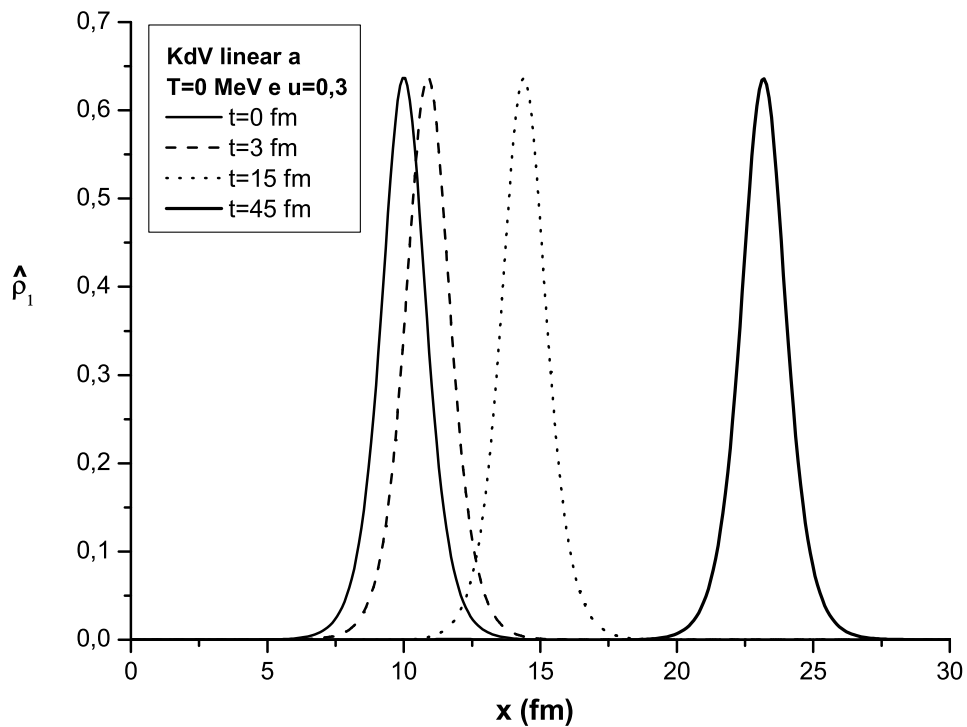


Figura 6.1: Solução exata como condição inicial.

Ou seja, a solução exata é de fato um pulso solitário estável se propagando sem dissipação ou dispersão.

b) Podemos multiplicar a condição inicial por um fator qualquer. Quando “erramos” na condição inicial, como por exemplo, ao multiplicar (6.17) por 10, encontramos as curvas apresentadas na Figura 6.2 .

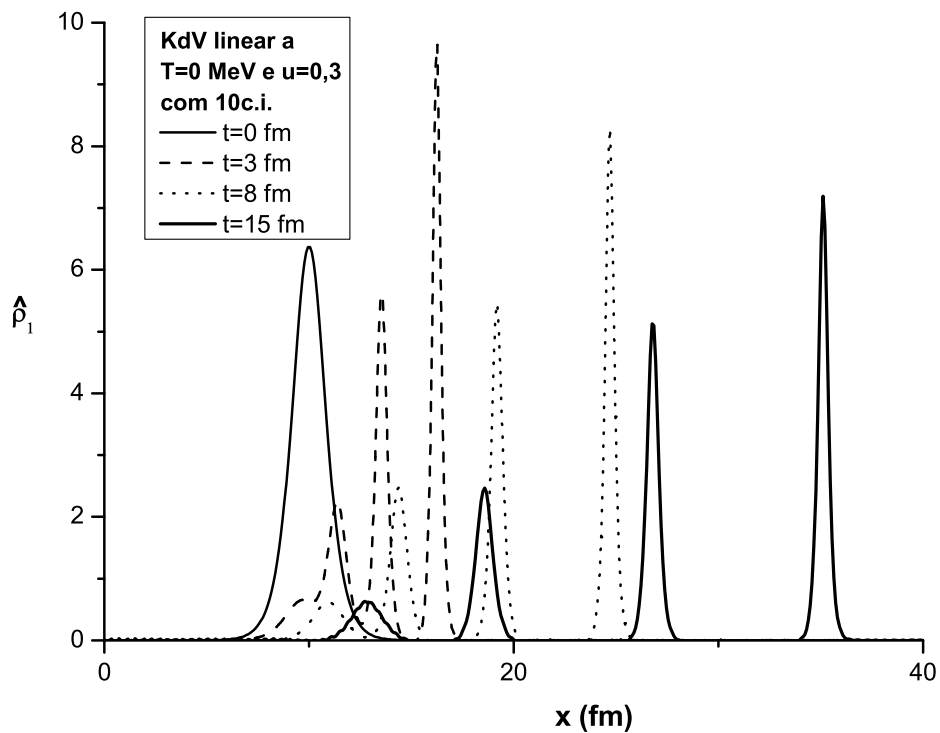


Figura 6.2: Sóliton exato multiplicado por 10.

Observamos a decomposição do pulso inicial em uma seqüência de pulsos, onde o maior sóliton vai à frente .

c) Repetimos agora o exercício mostrado na figura 6.2, porém multiplicando a condição inicial (6.17) por 15 e encontramos:

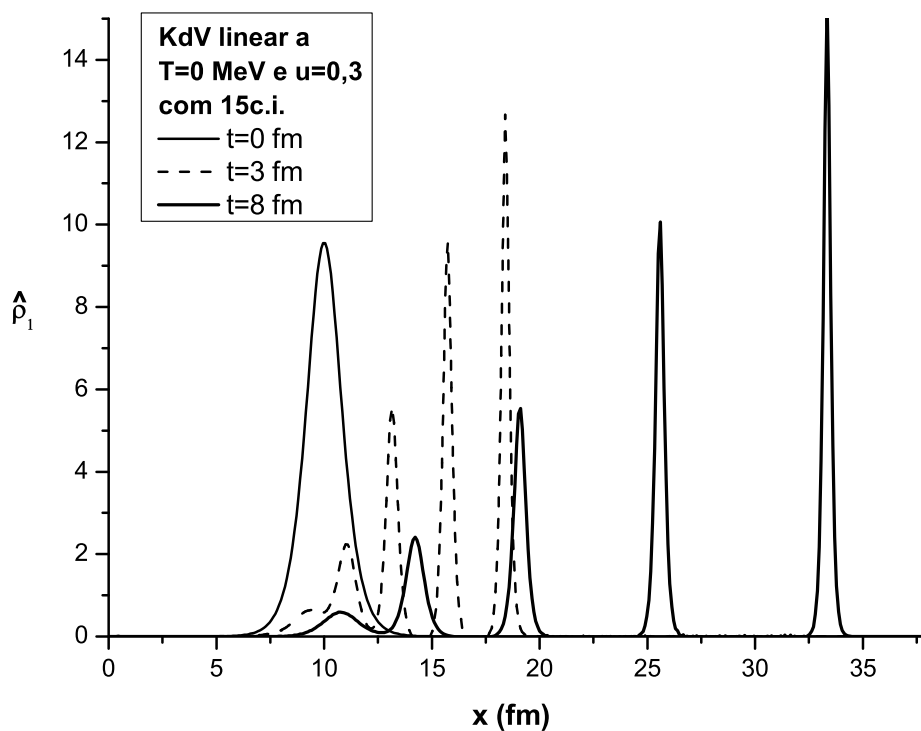


Figura 6.3: Sóliton exato multiplicado por 15.

Agora observamos mais pulsos e estes são formados antes em relação à Figura 6.2 . Das duas últimas figuras notamos que pulsos de maior amplitude se propagam mais rapidamente.

d) Como ilustração de uma situação de pulso de rarefação, vamos usar (6.17) como condição inicial de (6.16) mas com $d = -1$, então:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + (3 - c_s^2) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} - \left(\frac{g_V^2 \rho_0}{2M m_V^4 c_s} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (6.27)$$

com sua solução exata:

$$\hat{\rho}_1(x, t) = \frac{3(u - c_s)}{c_s(3 - c_s^2)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(c_s - u) c_s M}{2\rho_0}} (x - ut) \right] < 0 \quad (6.28)$$

Resolvendo (6.27) numericamente com a condição inicial (6.28) escolhendo $\lambda_{(T=0)} \cong 1,16 \text{ fm}$, encontramos as curvas da Figura 6.4 .

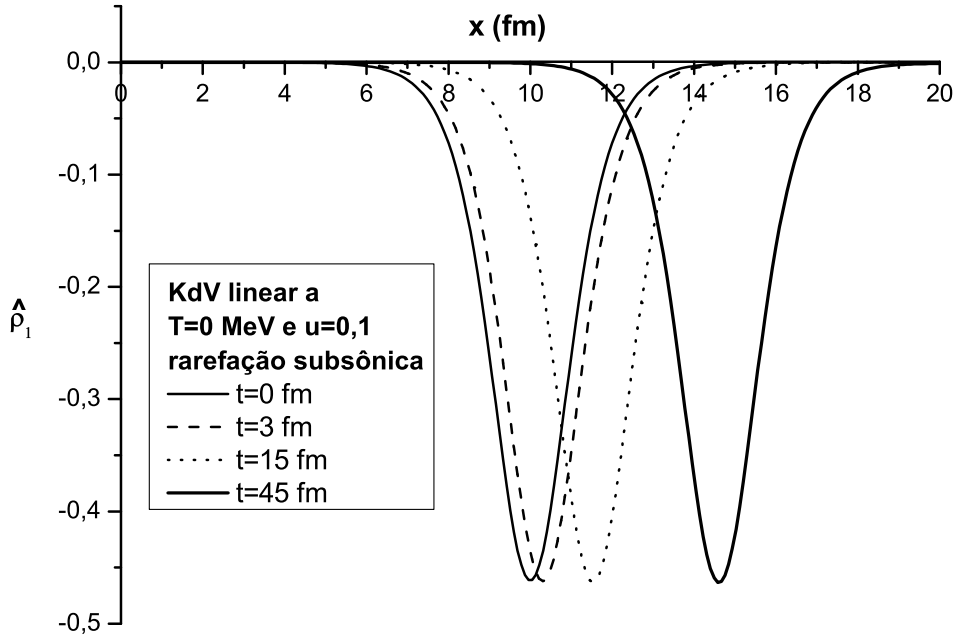


Figura 6.4: Pulso de rarefação como condição inicial.

Neste gráfico observamos o mesmo tipo de fenômeno mencionado em [23]. Nesta situação $u < c_s$ e portanto a rarefação é subsonica. Isso é uma consequência do coeficiente do termo de terceira derivada espacial ser negativo.

e) Fazendo $d = 0$ eliminamos o termo de terceira derivada em (6.16) e encontramos a chamada equação de quebra de onda. Impondo como condição inicial (6.17) (com $d = 1$) temos as curvas encontradas na Figura 6.5 .

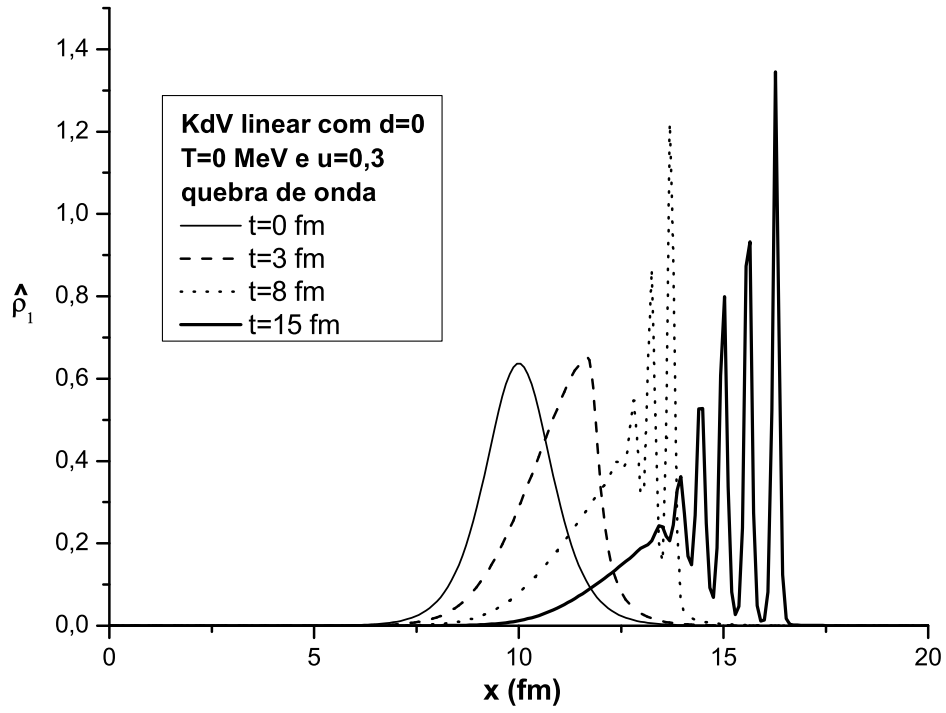


Figura 6.5: Quebra de onda com sóliton inicial.

Observamos a formação do choque seguida da dispersão da onda.

f) Novamente com $d = 0$, analogamente ao apresentado na Figura 6.5, mas escolhendo a velocidade de propagação $u = 0,2$ ($u \cong c_s$) encontramos:

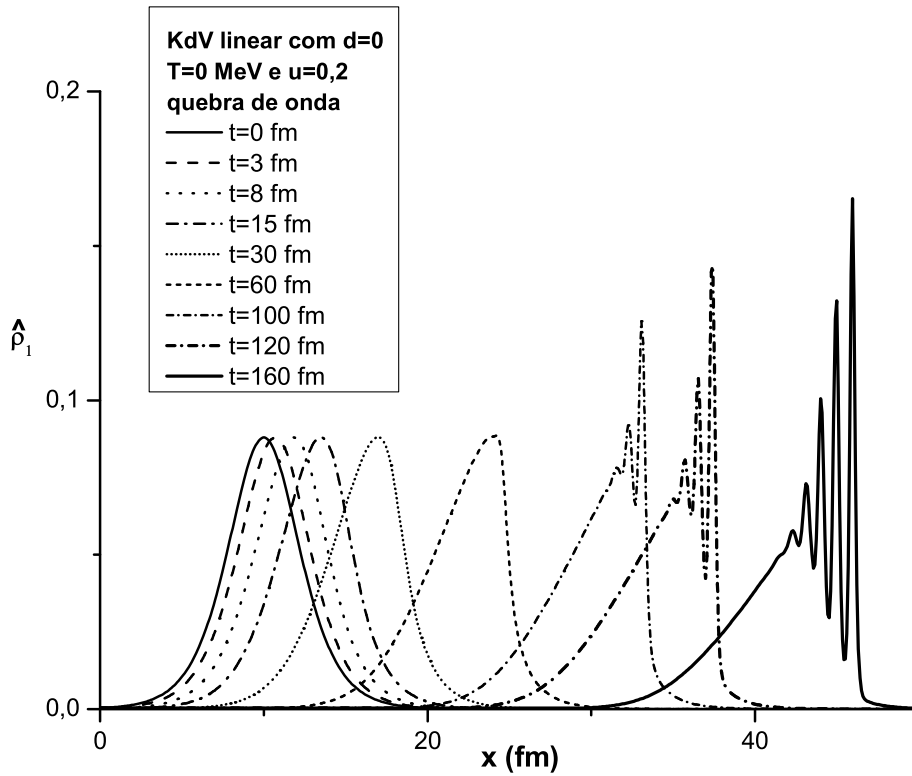


Figura 6.6: Quebra de onda com sóliton inicial.

O interessante nesta figura é que para a situação $u \cong c_s$ ($c_s \cong 0,184$) observamos que o pulso inicial necessita de mais tempo para quebrar e dispersar, o choque ocorre mais tarde, e o perfil inicial é preservado durante um intervalo de tempo maior.

g) Ainda com $u = 0,2$ e $d = 0$, analogamente ao apresentado na Figura 6.6, mas multiplicando a condição solitônica inicial por 10 temos os gráficos apresentados na Figura 6.7 .

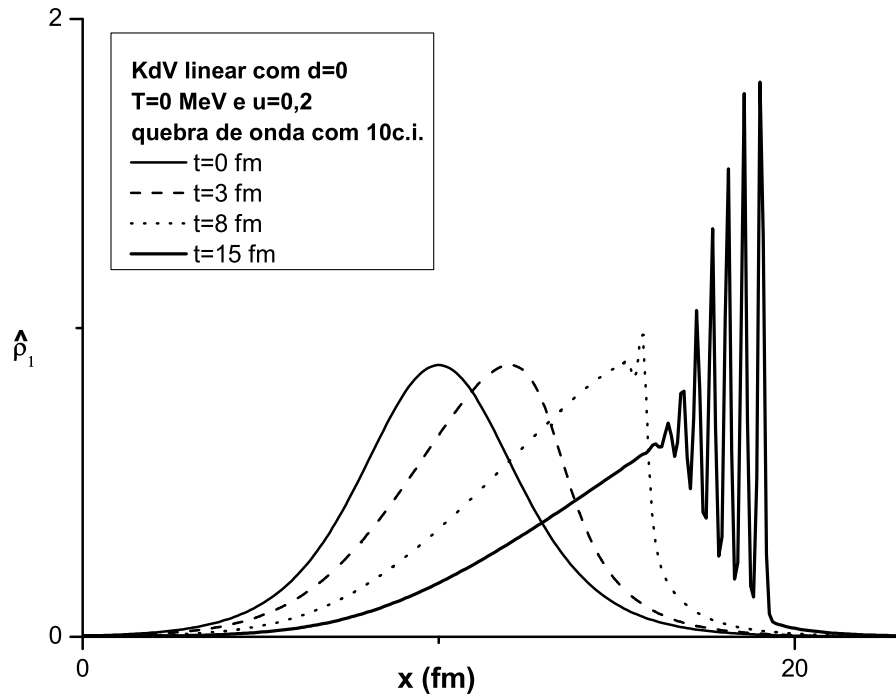


Figura 6.7: Quebra de onda com soliton inicial multiplicado por 10.

Apesar de $u \cong c_s$, quando multiplicamos o soliton inicial por um fator 10, antecipamos a formação do choque e a dispersão da onda.

h) Novamente com $u = 0,2$ e $d = 0$, analogamente ao apresentado na figura 6.7, mas multiplicando a condição solitônica inicial por 30 temos os gráficos apresentados na Figura 6.8 .

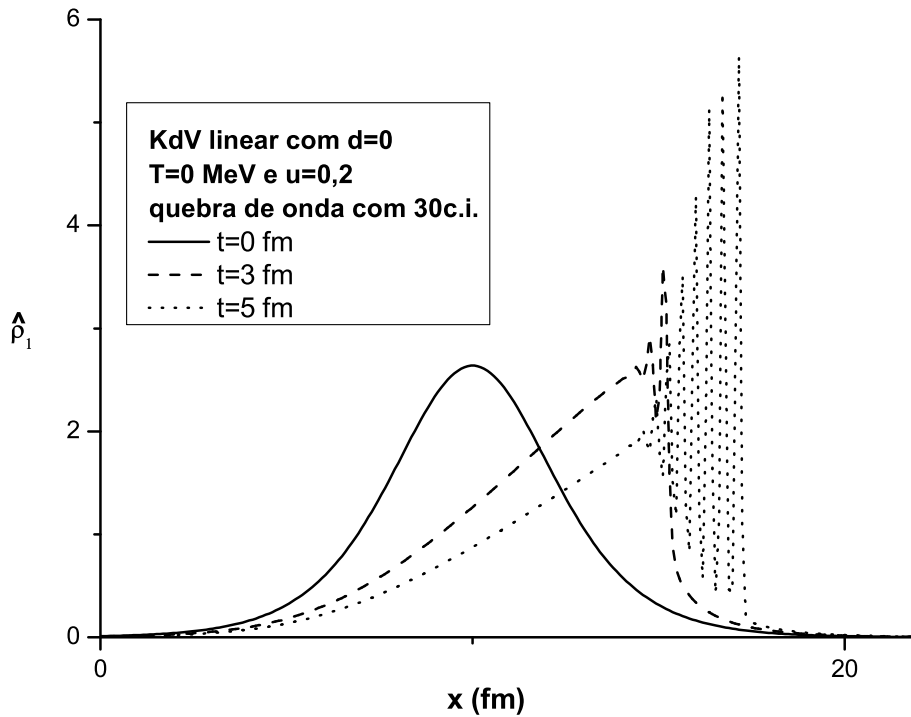


Figura 6.8: Quebra de onda com sóliton inicial multiplicado por 10.

Quando multiplicamos o sóliton inicial (6.17) (com $d = 1$) por um fator 30 antecipamos a formação do choque e a dispersão da onda em relação à figura anterior onde o fator multiplicativo era 10.

6.3.2 Temperatura finita

Para estudarmos os efeitos de temperatura finita na propagação dos solitons e compará-los com a situação de temperatura nula, utilizamos a equação

diferencial (6.21) com o potencial bariquímico efetivo fixo $\nu = 900 \text{ MeV}$ mas com a condição inicial (6.17) (com $d = 1$) utilizando os parâmetros de temperatura nula. A densidade de referência ρ_0 é calculada a partir de (6.20). Sendo assim, variar a temperatura significa variar os coeficientes da equação diferencial, mantendo os parâmetros fixos da condição inicial.

a) Escolhendo a temperatura de 30 MeV encontramos os resultados apresentados na Figura 6.9 .

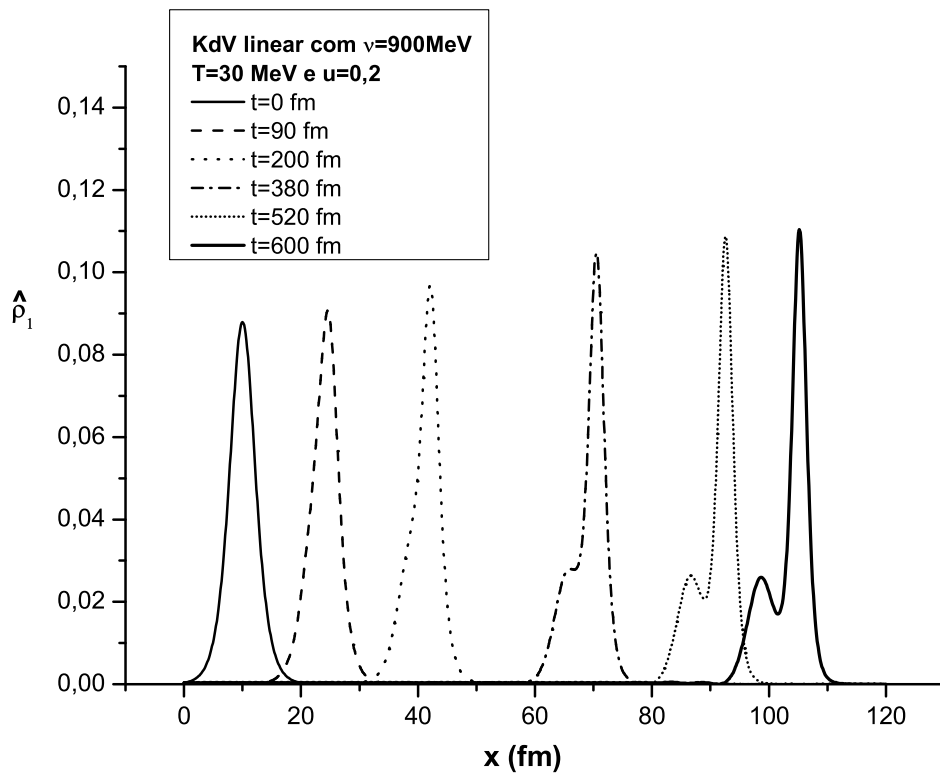


Figura 6.9: Propagação de um sóliton a $T = 30 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,0173 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,149$.

Observamos que o sóliton inicial preserva seu perfil inicial durante um intervalo de tempo aproximadamente 200 fm . Depois observamos o surgi-

mento de outro s3liton, conforme o esperado: para condi33o inicial qualquer temos solitons e radia33o.

b) Analogamente, para temperatura de 80 MeV encontramos os resultados apresentados na Figura 6.10 .

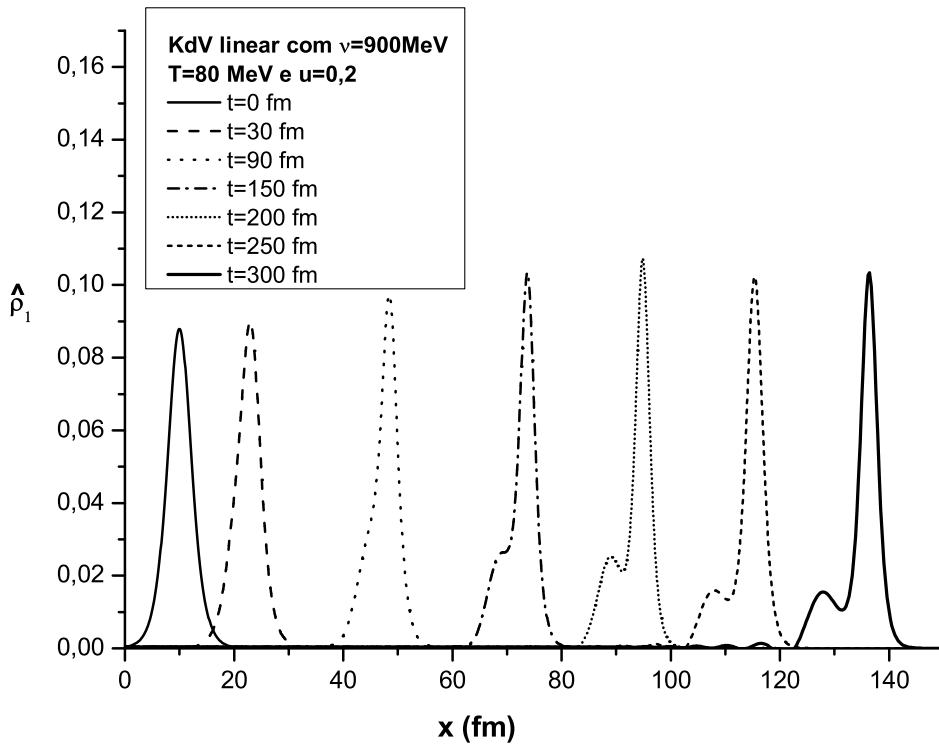


Figura 6.10: Propaga33o de um s3liton a $T = 80 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,2 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,4$.

Observamos que o fen3meno de surgimento do outro pulso e da radia33o ocorre antes. O pulso inicial se propaga mais r3pido e vai mais longe do que o pulso da figura anterior.

c) Para a temperatura de 120 MeV encontramos os resultados apresentados na Figura 6.11 .

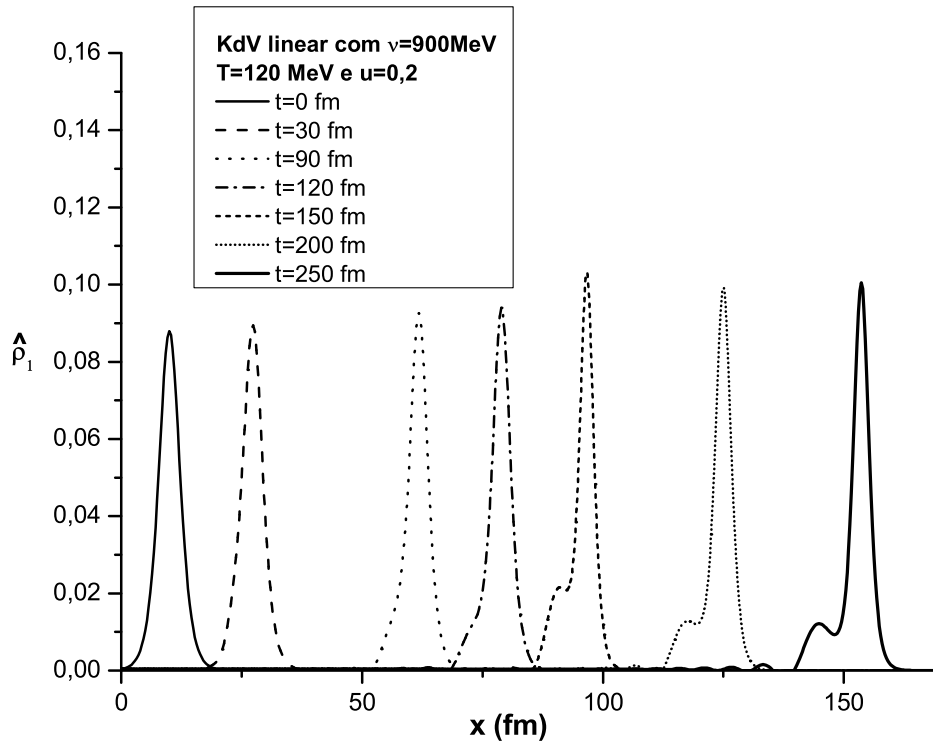


Figura 6.11: Propagação de um sóliton a $T = 120 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,54 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,55$.

Observamos também que o fenômeno de surgimento do outro pulso e da radiação ocorre antes. O pulso inicial se propaga mais rápido e vai mais longe do que os pulsos das duas figuras anteriores.

d) Para o estudo do efeito da temperatura sobre a quebra de onda, basta fazermos $d = 0$ e iniciarmos o estudo em temperatura de 30 MeV :

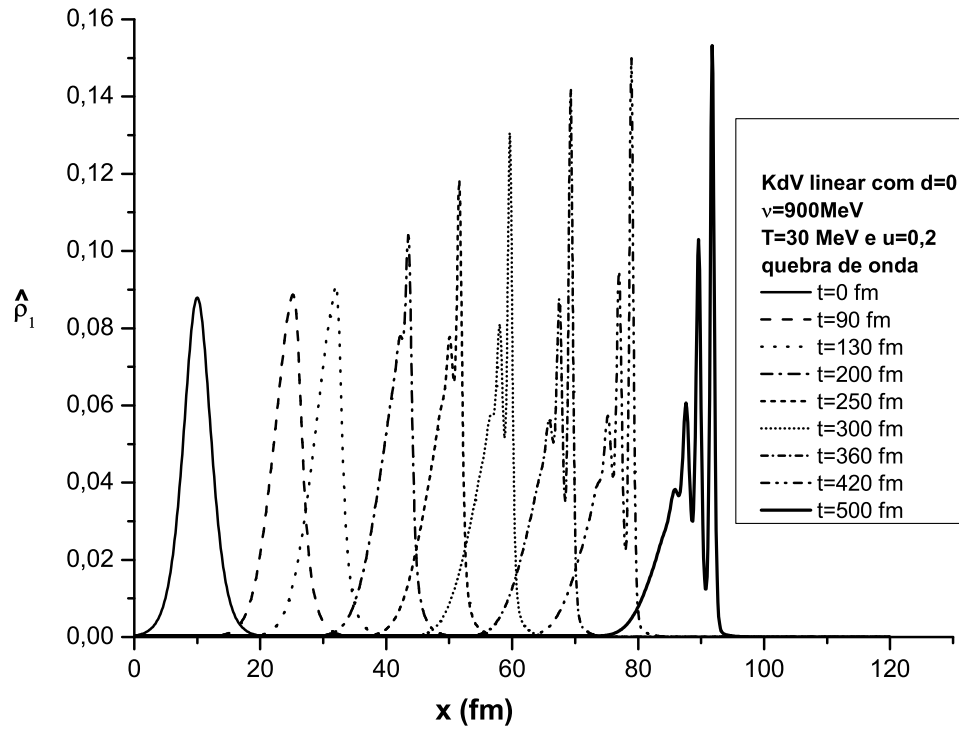


Figura 6.12: Quebra de onda a $T = 30 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,0173 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,149$.

Notamos que a quebra de onda e sua conseqüente dispersão ocorrem mais adiante no espaço em comparação com o observado na Figura 6.6 . O aumento da temperatura torna o pulso mais rápido e os fenômenos de quebra e dispersão ocorrem depois.

e) Aumentando a temperatura para $T = 80 \text{ MeV}$ encontramos as curvas da Figura 6.13 .

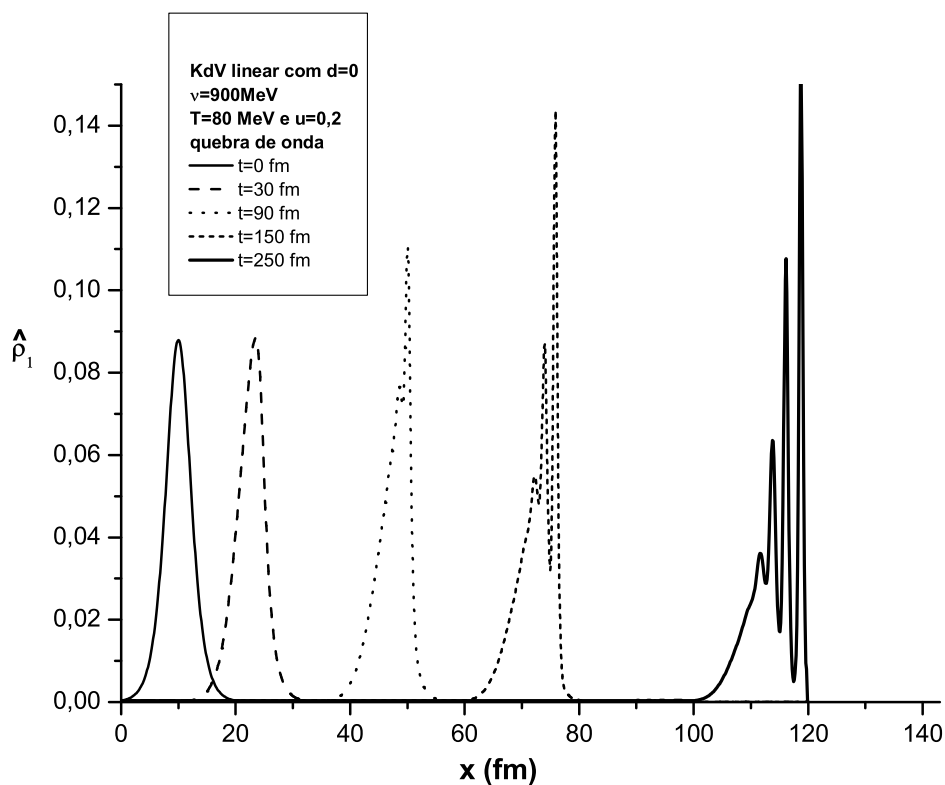


Figura 6.13: Quebra de onda a $T = 80 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,2 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,4$.

Notamos que o pulso vai mais longe e a quebra de onda e a consequente dispersão ocorrem mais adiante em relação à figura anterior.

f) Finalizando o estudo do efeito da temperatura sobre a quebra de onda, mostramos na Figura 6.14 a evolução de um pulso num meio a $T = 120 \text{ MeV}$.

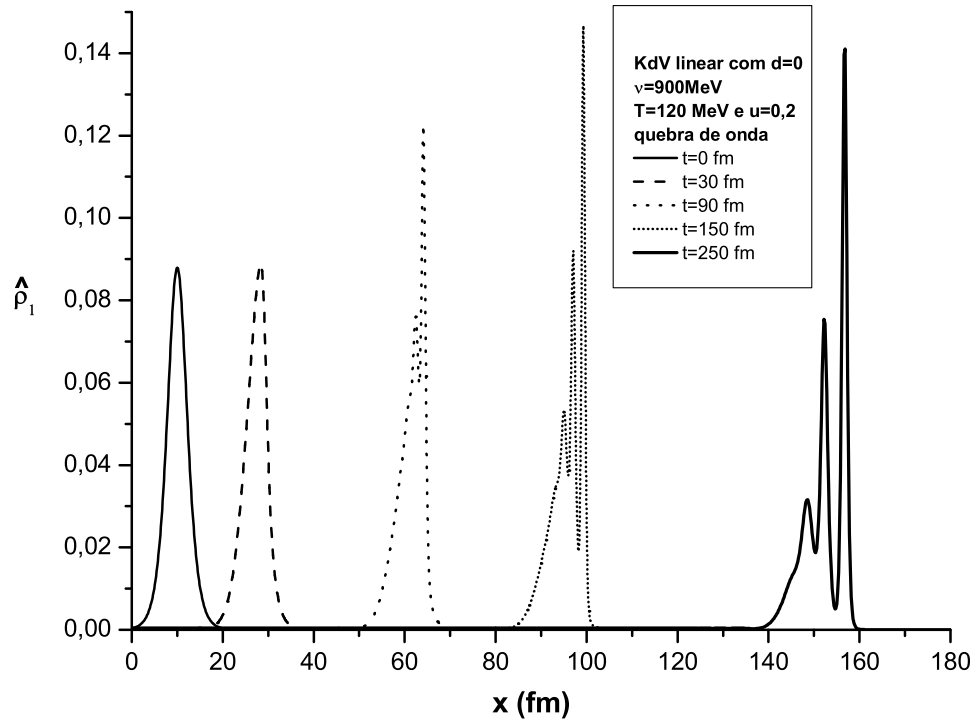


Figura 6.14: Quebra de onda a $T = 120 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,54 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,55$.

O pulso vai mais longe ainda e a dispersão ocorre um pouco mais adiante em relação às duas últimas figuras.

6.4 KdV cilíndrica

6.4.1 Solução analítica

Mencionamos no Capítulo 2 que a KdV cilíndrica possui solução exata conforme mostrado em [64, 65, 66, 67, 68]. Fazendo $\eta \equiv 1$ (de acordo com (5.14)) em (5.53) temos a equação de KdV cilíndrica:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left[\frac{\omega \rho_0^2}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2 R^2} \right] \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\tau} = 0 \quad (6.29)$$

Ela é do tipo (2.3) e por conveniência vamos reescrevê-la como:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \alpha \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\tau} = 0 \quad (6.30)$$

onde

$$\alpha \equiv \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \quad (6.31)$$

$$\beta \equiv d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{2m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \quad (6.32)$$

A equação (6.30) possui solução analítica exata pois torna-se integrável mediante as transformações [64, 65]:

$$\xi = \frac{z}{\zeta} \quad \tau = -\frac{1}{2\zeta^2} \quad (6.33)$$

e

$$\rho_1(\xi, \tau) = \frac{\xi}{2\alpha\tau} - \frac{w(z, \zeta)}{2\tau} \quad (6.34)$$

Das equações acima segue que:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \zeta \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} = \zeta^3 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \quad e$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \zeta^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \zeta^2 z \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.35)$$

e também:

$$\rho_1 = -\frac{z\zeta}{\alpha} + w\zeta^2 \quad (6.36)$$

Substituindo então (6.35) e (6.36) em (6.30):

$$\begin{aligned} & \left(\zeta^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \zeta^2 z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-\frac{z\zeta}{\alpha} + w\zeta^2 \right) + \\ & + \alpha \left(-\frac{z\zeta}{\alpha} + w\zeta^2 \right) \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{z\zeta}{\alpha} + w\zeta^2 \right) + \beta \zeta^3 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(-\frac{z\zeta}{\alpha} + w\zeta^2 \right) + \\ & - \zeta^2 \left(-\frac{z\zeta}{\alpha} + w\zeta^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

encontramos

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \alpha w \frac{\partial w}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0 \quad (6.37)$$

que conforme já vimos possui solução solitônica:

$$w(z, \zeta) = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{c}{4\beta}} (z - c\zeta) \right] \quad (6.38)$$

onde c é a velocidade de propagação do sóliton no espaço ($z - \zeta$).

Para retornarmos com a solução ao espaço ($\xi - \tau$) basta substituímos (6.33) e (6.38) em (6.34) para encontrar:

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi, \tau) &= \frac{\xi}{2\alpha\tau} - \frac{3c}{2\alpha\tau} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{c}{4\beta}} (\xi\zeta - c\zeta) \right] = \\ &= \frac{\xi}{2\alpha\tau} - \frac{3c}{2\tau\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{c\zeta^2}{4\beta}} (\xi - c) \right] = \frac{\xi}{2\alpha\tau} - \frac{3c}{2\alpha\tau} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{-c}{8\beta\tau}} (\xi - c) \right] \end{aligned} \quad (6.39)$$

Como c é uma constante arbitrária escolhida para ser a velocidade de propagação de (6.38), podemos escolhê-la como

$$c = -k \quad (6.40)$$

com k sendo uma constante positiva. Então temos (6.39) reescrita na forma:

$$\rho_1(\xi, \tau) = \frac{\xi}{2\alpha\tau} + \frac{3k}{2\alpha\tau} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{k}{8\beta\tau}} (\xi + k) \right] \quad (6.41)$$

que é a solução exata de (6.29).

Entretanto, para conseguirmos a solução analítica da KdV cilíndrica (6.29) no espaço $(r - t)$ temos que fazer $\eta = 1$ em (5.55), obtendo assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + \\ + d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{2m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial r^3} + \frac{1}{2} \frac{\hat{\rho}_1}{t} = 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

que é uma equação muito difícil de integrar utilizando transformações semelhantes a (6.33) e (6.34) por causa do termo de primeira derivada espacial proporcional a c_s . Vamos então encontrar sua solução exata usando (5.30) com $\eta = 1$ em (6.41), obtendo:

$$\hat{\rho}_1(r, t) = \frac{(r - c_s t)}{2\alpha c_s t} + \frac{3kR}{2\alpha \sigma^{1/2} c_s t} \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{kR}{8\beta \sigma^{3/2} c_s t}} \left[\frac{\sigma^{1/2}}{R} (r - c_s t) + k \right] \right\} \quad (6.43)$$

que é uma expressão dependente de algumas constantes: R , k e σ . É interessante encontrarmos algum vínculo entre elas ou com algum parâmetro. Substituindo (6.43) em (6.42) para verificarmos a validade da solução, obtemos a relação

$$R^2 c_s = 1 f m^2 \quad (6.44)$$

que deve ser satisfeita. Isso nos define, por exemplo:

$$0,1 \leq c_s \leq 0,9$$

resultando em

$$3,16 \text{ fm} \geq R \geq 1,05 \text{ fm}$$

Vale lembrar que $\hat{\rho}_1 \equiv \sigma \rho_1$ e α e β são dados por (6.31) e (6.32) respectivamente. As constantes σ e k são adimensionais e devem ser escolhidas apropriadamente.

6.4.2 Dois casos de interesse

I) Matéria nuclear a $T = 0$, com densidade bariônica de equilíbrio ρ_0 e saturação.

Lembramos que o vínculo dado por (5.48) resulta em $\mu_B = M$.

A equação (6.42) e sua solução exata (6.43) (com (5.23) e (5.24)) são dadas por:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + (3 - c_s^2) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + d \left(\frac{g_V^2 \rho_0}{2M m_V^4 c_s} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial r^3} + \frac{1}{2} \frac{\hat{\rho}_1}{t} = 0 \quad (6.45)$$

e

$$\hat{\rho}_1(r, t) = \frac{(r - c_s t)}{2(3 - c_s^2) c_s t} + \frac{3kR}{2(3 - c_s^2) \sigma^{1/2} c_s t} \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{kR M m_V^4 c_s}{4d g_V^2 \rho_0 \sigma^{3/2} c_s t}} \left[\frac{\sigma^{1/2}}{R} (r - c_s t) + k \right] \right\} \quad (6.46)$$

respectivamente. Podemos estudar também como condição inicial para (6.45) com $t_0 \neq 0$:

$$\hat{\rho}_1(r, t_0) = \frac{3(u - c_s)}{c_s(3 - c_s^2)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(u - c_s) c_s M}{2d \rho_0}} (r - ut_0) \right] \quad (6.47)$$

II) Matéria hadrônica em $T \neq 0$ descrita em uma densidade bariônica arbitrária.

Agora lembramos que o vínculo dado por (5.48) resulta em

$$\frac{g_V^2 \rho_0}{m_V^2 c_s^2} = \left(\mu_B + \frac{T s}{\rho_0} \right) \quad (6.48)$$

A equação (6.42) e sua solução exata (6.43) (com (5.23) e (5.24)) são dadas por:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + d \left(\frac{c_s}{2m_V^2} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial r^3} + \frac{1}{2} \frac{\hat{\rho}_1}{t} = 0 \quad (6.49)$$

e

$$\hat{\rho}_1(r, t) = \frac{(r - c_s t)}{2c_s t} \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right)^{-1} + \frac{3kR}{2\sigma^{1/2} c_s t} \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right)^{-1} \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{kR m_V^2}{4d \sigma^{3/2} c_s^2 t}} \left[\frac{\sigma^{1/2}}{R} (r - c_s t) + k \right] \right\} \quad (6.50)$$

respectivamente.

Podemos estudar também como condição inicial para (6.49) com $t_0 \neq 0$:

$$\hat{\rho}_1(r, t_0) = \frac{3(u - c_s)}{c_s} \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right)^{-1} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{(u - c_s)m_V^2}{2dc_s}} (r - ut_0) \right] \quad (6.51)$$

Apesar da KdV cilíndrica ter solução exata ela depende de σ que é um parâmetro de expansão. Isso traz uma ambiguidade à esta solução. Desejamos soluções e/ou condições iniciais mais simples para efeitos de comparação de comportamentos com a temperatura e em geometrias diferentes.

Sendo assim, utilizaremos o pulso solitônico da KdV linear (6.47) como condição em temperatura nula e finita, e vamos estudar soluções numéricas de (6.45).

6.5 Método da expansão em funções elípticas de Jacobi

Apresentamos o método de expansão em funções elípticas de Jacobi (JEF) para solução das equações de KdV linear, cilíndrica e esférica em certas condições. Tais equações de KdV são dadas em uma notação compacta por (2.2):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha v \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \delta \frac{v}{y} = 0 \quad (6.52)$$

onde na própria seção 2.2 deste trabalho mencionamos alguns métodos utilizados na literatura para estudo de suas soluções.

O método de Expansão em JEF consiste em escrever um ansatz para a equação diferencial (6.52) em termos das JEF: sn , cn , dn , etc e depois estudar em quais condições elas se transformam em sech^2 , ou melhor dizendo, em quais condições elas se tornam soluções solitônicas. As JEF estão melhor apresentadas e definidas no Apêndice E deste trabalho, mas ao longo deste capítulo apresentaremos algumas de suas propriedades mais relevantes.

Em [82] Zuntao Fu e colaboradores aplicaram o método de expansão em JEF na obtenção da solução da equação de KdV

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

via ansatz dado por série de sn^ϑ com $\vartheta = k(x - ct)$. A solução encontrada

foi:

$$v(x.t) = c + 4(1 - 2m^2)\beta k^2 + 12m^2\beta k^2 cn^2\vartheta$$

que com a escolha da constante $c = 4\beta k^2$ e o parâmetro livre $m = 1$ (que implica $cn\vartheta \rightarrow \text{sech}\vartheta$) leva à já conhecida solução solitônica:

$$v(x.t) = 3c \times \text{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{c}{4\beta}}(x - ct) \right]$$

Ainda em [82] o método de expansão em JEF foi aplicado em mais quatro casos: a) *Equação de Boussinesq*:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} = 0$$

b) *Equação de KdV modificada*:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

c) *Equação não-linear de Klein-Gordon*:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha v - \beta v^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha v - \beta v^3 = 0$$

d) *Variantes da equação de Boussinesq acopladas*:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

onde em todos os casos α , β e c_0 são constantes não nulas.

Esse estudo mostrou que o método de expansão em JEF contém as soluções solitônicas e nos casos *b* e *c* contém as soluções do tipo ondas de choque.

Em [83] foram exploradas outras possibilidades pelos ansatz dados em séries de $cn\vartheta$, $dn\vartheta$ e $cs\vartheta$ levando a outras soluções solitônicas e outras ondas de choque. Em resumo, dada a “espécie” de JEF escolhida como ansatz,

obtém-se uma onda solitônica específica ou onda de choque como solução para a equação de onda específica em estudo.

Aproximadamente três anos após [83] o método foi utilizado em [84] no estudo de soluções da equação de KdV com coeficientes variáveis:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t)u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

e também na solução da KdV forçada:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + av \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = F(t)$$

O interessante em [84] é que a equação de KdV com coeficientes variáveis pode ser transformada em uma KdV cilíndrica e sendo assim, o método foi aplicado à equação de KdV cilíndrica e generalizado para (6.52), que é exatamente o que desejamos em nosso trabalho: soluções para a KdV cilíndrica e esférica dadas por (5.55).

6.5.1 Aplicação na KdV

Seguiremos os procedimentos de [84] aplicados à (5.55):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial X} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial X} + \\ + d \left[\frac{g_V^2 \rho_0^2 c_s}{2m_V^4 (\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial X^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\hat{\rho}_1}{t} = 0 \end{aligned}$$

Usando

$$\delta \equiv \frac{\eta}{2}$$

e também (6.31) e (6.32) a equação acima assume a forma

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial X} + \alpha c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial X} + \beta \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial X^3} + \delta \frac{\hat{\rho}_1}{t} = 0 \quad (6.53)$$

com notação semelhante à (6.52). Nosso objetivo é considerar a equação não-linear N com coeficientes variáveis mais geral possível:

$$N\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, \dots\right) = 0 \quad (6.54)$$

e buscar soluções do tipo:

$$u = u(\vartheta), \quad \vartheta = f(t)X + g(t) \quad (6.55)$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções do tempo a serem determinadas.

Então o ansatz para (6.54) é dado por

$$u(\vartheta) = \sum_{j=0}^n a_j(t) sn^j \vartheta \quad (6.56)$$

e quando $m \rightarrow 1 \Rightarrow sn\vartheta \rightarrow \tanh\vartheta$ e (6.56) se transforma em

$$u(\vartheta) = \sum_{j=0}^n a_j(t) \tanh^j \vartheta \quad (6.57)$$

Sabendo também $m \rightarrow 1 \Rightarrow cn\vartheta \rightarrow \operatorname{sech}\vartheta$ e usando as devidas manipulações conseguimos reescrever as soluções em ondas solitônicas correspondentes.

A partir de (6.56) temos que:

$$\frac{du}{d\vartheta} = \sum_{j=0}^n ja_j(t) sn^{j-1} \vartheta \, cn\vartheta \, dn\vartheta \quad (6.58)$$

e as relações

$$cn^2\vartheta = 1 - sn^2\vartheta \quad (6.59)$$

$$dn^2\vartheta = 1 - msn^2\vartheta \quad (6.60)$$

com módulo m ($0 < m < 1$) juntamente com as derivadas

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} sn\vartheta &= cn\vartheta \, dn\vartheta, & \frac{d}{d\vartheta} cn\vartheta &= -sn\vartheta \, dn\vartheta, \\ \frac{d}{d\vartheta} dn\vartheta &= -msn\vartheta \, cn\vartheta \end{aligned} \quad (6.61)$$

Notamos que

$$O(u(\vartheta)) = n \quad (6.62)$$

$$O\left(\frac{d^P u}{d\vartheta^P}\right) = n + P, \quad P = 1, 2, 3, \dots \quad (6.63)$$

e

$$O\left(u^q \frac{d^P u}{d\vartheta^P}\right) = (q+1)n + P, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad P = 1, 2, 3, \dots \quad (6.64)$$

e poderemos escolher n adequadamente para (6.56) igualando a ordem do termo não-linear com a ordem do termo de derivada mais alta.

Para resolvermos (6.53) fazemos

$$u = t^\delta \hat{\rho}_1 \quad (6.65)$$

e assim reescrevemos (6.53) como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_s \frac{\partial u}{\partial X} + \alpha c_s t^{-\delta} u \frac{\partial u}{\partial X} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} = 0 \quad (6.66)$$

Com o uso de

$$y = t^{-\delta/2} X \quad (6.67)$$

transforma (6.66) em

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_s t^{-\delta/2} \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha c_s t^{-3\delta/2} u \frac{\partial u}{\partial y} + \beta t^{-3\delta/2} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \quad (6.68)$$

que é uma equação de KdV com coeficientes variáveis, ou seja, (6.53) está reescrita como (6.68) e por facilidade de cálculo é ainda escrita na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_s(t) \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha(t) u \frac{\partial u}{\partial y} + \beta(t) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \quad (6.69)$$

onde

$$c_s(t) \equiv c_s t^{-\delta/2} \quad (6.70)$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha c_s t^{-3\delta/2} \quad (6.71)$$

e

$$\beta(t) \equiv \beta t^{-3\delta/2} \quad (6.72)$$

Substituindo então (6.55) e (6.56) em (6.69) encontramos:

$$u = a_0(t) + a_1(t) sn\vartheta + a_2(t) sn^2\vartheta \quad (6.73)$$

pois igualando a ordem do termo não-linear com a do termo de terceira derivada: $2n + 1 = n + 3$ temos $n = 2$ em (6.56) com $\vartheta = f(t)y + g(t)$.

As derivadas são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_0' + a_1' sn\vartheta + a_2' sn^2\vartheta + (a_1 + 2a_2 sn\vartheta)(f'y + g')cn\vartheta \operatorname{dn}\vartheta \quad (6.74)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(a_1 + 2a_2 \operatorname{sn}\vartheta) \operatorname{cn}\vartheta \operatorname{dn}\vartheta \quad (6.75)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial y} = f \left[a_0 a_1 + (a_1^2 + 2a_0 a_2) \operatorname{sn}\vartheta + 3a_1 a_2 \operatorname{sn}^2\vartheta + 2a_2^2 \operatorname{sn}^3\vartheta \right] \operatorname{cn}\vartheta \operatorname{dn}\vartheta \quad (6.76)$$

e

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = f^3 \left[-(1+m)a_1 - 8(1+m)a_2 \operatorname{sn}\vartheta + 6ma_1 \operatorname{sn}^2\vartheta + 24ma_2 \operatorname{sn}^3\vartheta \right] \operatorname{cn}\vartheta \operatorname{dn}\vartheta \quad (6.77)$$

onde a notação “ ’ ” denota a derivada com relação ao tempo.

Substituindo então (6.74) à (6.77) em (6.69) encontramos:

$$\begin{aligned} & a_0' + a_1' \operatorname{sn}\vartheta + a_2' \operatorname{sn}^2\vartheta + a_1 \left[f'y + g' + \alpha(t)fa_0 - (1+m)\beta(t)f^3 + \right. \\ & \left. + c_s(t)f \right] \operatorname{cn}\vartheta \operatorname{dn}\vartheta + \left[2a_2(f'y + g') + \alpha(t)f(a_1^2 + 2a_0a_2) - 8(1+m)\beta(t)f^3a_2 + \right. \\ & \left. + 2a_2c_s(t)f \right] \operatorname{sn}\vartheta \operatorname{cn}\vartheta \operatorname{dn}\vartheta + 3a_1f \left[\alpha(t)a_2 + 2m\beta(t)f^2 \right] \operatorname{sn}^2\vartheta \operatorname{cn}\vartheta \operatorname{dn}\vartheta + \\ & \left. + 2a_2f \left[\alpha(t)a_2 + 12m\beta(t)f^2 \right] \operatorname{sn}^3\vartheta \operatorname{cn}\vartheta \operatorname{dn}\vartheta = 0 \quad (6.78) \end{aligned}$$

ou seja:

$$a_0' = a_1' = a_2' = 0 \quad (6.79)$$

$$a_1 \left[f'y + g' + \alpha(t)fa_0 - (1+m)\beta(t)f^3 + c_s(t)f \right] = 0 \quad (6.80)$$

$$2a_2(f'y + g') + \alpha(t)f(a_1^2 + 2a_0a_2) - 8(1+m)\beta(t)f^3a_2 + 2a_2c_s(t)f = 0 \quad (6.81)$$

$$3a_1f \left[\alpha(t)a_2 + 2m\beta(t)f^2 \right] = 0 \quad (6.82)$$

$$2a_2f \left[\alpha(t)a_2 + 12m\beta(t)f^2 \right] = 0 \quad (6.83)$$

De (6.79) concluímos que os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 são constantes com relação ao tempo. De (6.80) e (6.82) temos que

$$a_1 = 0 \quad (6.84)$$

Já de (6.83) encontramos

$$a_2 = -12m \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} f^2 \quad (6.85)$$

Utilizando o fato de que a_0 é constante em relação ao tempo e substituindo (6.84) e (6.85) em (6.81) encontramos:

$$f(t) = k \rightarrow \text{constante} \quad (6.86)$$

e também:

$$a_0 = -\frac{g'}{\alpha(t)k} + 4(1+m)\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}k^2 - \frac{c_s(t)}{\alpha(t)}$$

com

$$-\frac{g'}{\alpha(t)k} - \frac{c_s(t)}{\alpha(t)} = c \rightarrow \text{constante} \quad (6.87)$$

resultando em

$$a_0 = c + 4(1+m)\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}k^2$$

Usando (6.71) e (6.72) temos:

$$\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \frac{\beta}{\alpha c_s} = \text{constante} \quad (6.88)$$

e assim encontramos:

$$a_0 = c + 4(1+m)\frac{\beta}{\alpha c_s}k^2 \quad (6.89)$$

e também:

$$a_2 = -12m\frac{\beta}{\alpha c_s}k^2 \quad (6.90)$$

Usando (6.70), (6.71) e (6.86) em (6.87) obtemos:

$$g(t) = -\frac{2c_s \alpha c k}{(2-3\delta)}t^{1-3\delta/2} - \frac{2c_s k}{(2-\delta)}t^{1-\delta/2} \quad (6.91)$$

Usando $\vartheta = f(t)y + g(t)$ e (6.86) na substituição de (6.84), (6.89), (6.90) e (6.91) em (6.73) temos:

$$u(y, t) = c + 4(1+m)\frac{\beta}{\alpha c_s}k^2 + \\ -12m\frac{\beta}{\alpha c_s}k^2 sn^2 \left[ky - \frac{2c_s \alpha c k}{(2-3\delta)}t^{1-3\delta/2} - \frac{2c_s k}{(2-\delta)}t^{1-\delta/2} \right] \quad (6.92)$$

que é a solução de (6.69).

Usando na expressão (6.92) a relação (6.59) e a condição $m \rightarrow 1 \Rightarrow cn\vartheta \rightarrow sech\vartheta$ encontramos a solução solitônica para (6.69):

$$u(y, t) = c - \frac{4\beta k^2}{\alpha c_s} + \frac{12\beta k^2}{\alpha c_s} sech^2 \left[ky - \frac{2c_s \alpha c k}{(2-3\delta)} t^{1-3\delta/2} - \frac{2c_s k}{(2-\delta)} t^{1-\delta/2} \right] \quad (6.93)$$

A solução de (6.53) que é o que desejamos, é dada pelo uso de (6.65) e (6.67) em (6.93):

$$\hat{\rho}_1(X, t) = \frac{1}{t^\delta} \left\{ c - \frac{4\beta k^2}{\alpha c_s} + \frac{12\beta k^2}{\alpha c_s} sech^2 \left[k t^{-\delta/2} X - \frac{2c_s \alpha c k}{(2-3\delta)} t^{1-3\delta/2} - \frac{2c_s k}{(2-\delta)} t^{1-\delta/2} \right] \right\} \quad (6.94)$$

de onde observamos que para a situação da KdV linear ($\delta = 0$) com a escolha das constantes:

$$c = \frac{4\beta k^2}{\alpha c_s} \quad (6.95)$$

e

$$k^2 = \frac{(u - c_s)}{4\beta} \quad (6.96)$$

obtemos uma versão de (6.94) igual a (6.17) e (6.22) nas situações de temperatura nula e temperatura finita respectivamente!

Uma observação importante é que na verificação de (6.94) como solução de (6.53), ou seja, substituindo (6.94) em (6.53) notamos que apenas no caso $\delta = 0$ ocorre uma situação de solução exata, sendo que nos casos cilíndrico e esférico onde $\delta \neq 0$, (6.94) só é válida como solução para a condição $X = 0$ (equivalente a $r = 0$), o que nos leva à conclusão de que o método de expansão em JEF leva à solução exata da KdV linear.

6.5.2 Aplicação na equação de quebra de onda forçada

a) Solução da KdV forçada

Antes da seção anterior mencionamos que o método de expansão em JEF é utilizado também na solução da KdV forçada:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + av \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = F(t) \quad (6.97)$$

e de acordo com [84] é necessária apenas uma única mudança de variável:

$$v = u + \Gamma(t) \quad (6.98)$$

onde

$$\Gamma(t) = \int_0^t F(t') dt' \quad (6.99)$$

e sendo assim, (6.98) aplicada em (6.97) resulta em:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a[\Gamma(t) + u] \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (6.100)$$

Pelos mesmos argumentos da seção anterior, a solução de (6.100) é dada por (6.56). Igualando a ordem do termo não-linear com a do termo de terceira derivada: $2n + 1 = n + 3$ temos $n = 2$ e sendo assim:

$$u = a_0(t) + a_1(t)sn\vartheta + a_2(t)sn^2\vartheta \quad (6.101)$$

com $\vartheta = f(t)x + g(t)$.

Substituindo então (6.101) em (6.100) encontramos:

$$\begin{aligned} a_0' + a_1'sn\vartheta + a_2'sn^2\vartheta + a_1[f'x + g' + \alpha fa_0 + \alpha f\Gamma - (1+m)\beta f^3]cn\vartheta \, dn\vartheta + \\ + [2a_2(f'x + g') + \alpha f(a_1^2 + 2a_0a_2) + 2\alpha f\Gamma a_2 + \\ - 8(1+m)\beta f^3 a_2]sn\vartheta \, cn\vartheta \, dn\vartheta + 3a_1f[\alpha a_2 + 2m\beta f^2]sn^2\vartheta \, cn\vartheta \, dn\vartheta + \\ + 2a_2f[\alpha a_2 + 12m\beta f^2]sn^3\vartheta \, cn\vartheta \, dn\vartheta = 0 \end{aligned} \quad (6.102)$$

ou melhor:

$$a_0' = a_1' = a_2' = 0 \quad (6.103)$$

$$a_1[f'x + g' + \alpha fa_0 + \alpha f\Gamma - (1+m)\beta f^3] = 0 \quad (6.104)$$

$$2a_2(f'x + g') + \alpha f(a_1^2 + 2a_0a_2) + 2\alpha f\Gamma a_2 - 8(1+m)\beta f^3 a_2 = 0 \quad (6.105)$$

$$3a_1f[\alpha a_2 + 2m\beta f^2] = 0 \quad (6.106)$$

$$2a_2f[\alpha a_2 + 12m\beta f^2] = 0 \quad (6.107)$$

que de (6.104) e de (6.106) resulta em:

$$a_1 = 0 \quad (6.108)$$

Já de (6.107) encontramos

$$a_2 = -12m\frac{\beta}{\alpha}f^2 \quad (6.109)$$

Como a_0 é constante em relação ao tempo, substituindo (6.108) e (6.90) em (6.105) encontramos:

$$f(t) = k \rightarrow \text{constante} \quad (6.110)$$

e também:

$$a_0 = -\frac{g'}{\alpha k} - \Gamma + 4(1+m)\frac{\beta}{\alpha}k^2$$

e então

$$-\frac{g'}{\alpha k} - \Gamma = \frac{c}{\alpha} \quad (6.111)$$

com c sendo uma constante. Prosseguindo nos cálculos:

$$a_0 = \frac{c}{\alpha} + 4(1+m)\frac{\beta}{\alpha}k^2 \quad (6.112)$$

e

$$a_2 = -12m\frac{\beta}{\alpha}k^2 \quad (6.113)$$

Usando também (6.110) em (6.111) obtemos:

$$g(t) = -ctk - \alpha k \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau \quad (6.114)$$

Substituindo então (6.99), (6.101), (6.108), (6.110), (6.112) e (6.113) em (6.98) encontramos a solução exata de (6.97):

$$v(x, t) = \frac{c}{\alpha} + 4(1+m)\frac{\beta}{\alpha}k^2 - 12m\frac{\beta}{\alpha}k^2 sn^2\vartheta + \int_0^t F(t') dt'$$

ou melhor, usando $sn^2\vartheta = 1 - cn^2\vartheta$, temos:

$$v(x, t) = \frac{c}{\alpha} + 4(1+m)\frac{\beta}{\alpha}k^2 - 12m\frac{\beta}{\alpha}k^2 + 12m\frac{\beta}{\alpha}k^2 cn^2\vartheta + \int_0^t F(t') dt' \quad (6.115)$$

com sua correspondente solitônica ($m \rightarrow 1 \Rightarrow cn\vartheta \rightarrow \text{sech}\vartheta$):

$$v(x, t) = \frac{c}{\alpha} - 4\frac{\beta}{\alpha}k^2 + 12\frac{\beta}{\alpha}k^2 \text{sech}^2\vartheta + \int_0^t F(t') dt' \quad (6.116)$$

Usando também (6.110) e (6.114) em $\vartheta = f(t)x + g(t)$ encontramos:

$$\vartheta = k \left[x - ct - \alpha \int_0^t \int_0^{t'} F(\psi) d\psi dt' \right] \quad (6.117)$$

b) Estudo da equação de quebra de onda forçada

Na situação $\beta = 0$ em (6.97) encontramos

$$\frac{\partial v}{\partial t} + av \frac{\partial v}{\partial x} = F(t)$$

que é uma equação semelhante a (3.78):

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau} + \left[\left(\frac{3c_s^2}{2V^2} - c_s^2 \right) \frac{1}{(1+c_s^2)} - \frac{1}{2} \right] \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \xi} = \frac{V\beta}{2c_s^2 \varepsilon_0} \delta(\xi) \quad (6.118)$$

conforme apresentada no capítulo 3 (seção 3.6.3) proveniente do estudo da hidrodinâmica com fonte via expressões (3.74), (3.75) e (3.76).

Mas (6.118) está no espaço $\xi - \tau$ que para retornar ao espaço $x - t$ basta utilizar os operadores provenientes de (3.77):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{R}{\sigma^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{R}{V\sigma^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{R}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial}{\partial x}$$

e sendo assim encontramos (6.118) na forma:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + V \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \left[\left(\frac{3c_s^2}{2V^2} - c_s^2 \right) \frac{1}{(1+c_s^2)} - \frac{1}{2} \right] V \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = \frac{V^2 \beta \sigma^{5/2}}{2c_s^2 \varepsilon_0 R} \delta \left(\frac{\sigma^{1/2}}{R} (x - Vt) \right) \quad (6.119)$$

onde

$$\hat{\varepsilon}_1 \equiv \sigma \varepsilon_1 \quad (6.120)$$

Ainda por facilidade de notação reescreveremos (6.121) como:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + V \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \alpha V \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = \gamma \delta \left(\frac{\sigma^{1/2}}{R} (x - Vt) \right) \quad (6.121)$$

com os coeficientes rotulados de

$$\left[\left(\frac{3c_s^2}{2V^2} - c_s^2 \right) \frac{1}{(1+c_s^2)} - \frac{1}{2} \right] \equiv \alpha \quad (6.122)$$

e

$$\frac{V^2 \beta \sigma^{5/2}}{2c_s^2 \varepsilon_0 R} \equiv \gamma \quad (6.123)$$

Uma maneira de tratar (6.121) apenas com termo de perturbação no tempo conforme $b = 0$ em (6.97), é considerarmos no argumento da Delta de Dirac a aproximação $x \ll Vt$, então:

$$\frac{\sigma^{1/2}}{R}(x - Vt) \cong -\frac{\sigma^{1/2}}{R}Vt \quad (6.124)$$

e assim:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + V \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \alpha V \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = \gamma \delta\left(\frac{\sigma^{1/2}}{R}Vt\right) \equiv F(t) \quad (6.125)$$

Entretanto, se buscarmos uma solução exata para (6.125) encontraremos apenas uma solução constante combinada com o termo forçado, pois igualando a ordem do termo não-linear com a do termo de primeira derivada (que é a derivada espacial de ordem mais alta), encontramos $2n + 1 = n + 1 \Rightarrow n = 0$ e sendo assim:

$$\hat{\varepsilon}_1 = a_0 + \int_0^\infty \delta\left(\frac{\sigma^{1/2}}{R}(Vt')\right) dt'$$

o que não é muito interessante pois queremos estudar (6.125) quanto a comportamentos ondulatórios, ou melhor dizendo, com uma condição inicial solitônica. Para tanto basta resolvermos (6.125) com o acréscimo do termo de terceira derivada, que é uma KdV perturbada conforme (6.97):

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + V \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \alpha V \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \hat{\varepsilon}_1}{\partial x^3} = \gamma \delta\left(\frac{\sigma^{1/2}}{R}Vt\right) \equiv F(t) \quad (6.126)$$

e tal solução exata de (6.126) será a condição inicial para (6.125) com o parâmetro livre β .

A diferença essencial comparando a forma de (6.126) com (6.97) é o termo

$$V \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x}$$

que nos leva a uma solução analítica exata:

$$\hat{\varepsilon}_1(x, t) = \frac{c}{\alpha} - 4 \frac{\beta}{\alpha} k^2 + 12 \frac{\beta}{\alpha} k^2 \operatorname{sech}^2 \vartheta + \int_0^t F(t') dt' \quad (6.127)$$

com $\vartheta = f(t)x + g(t)$, ou seja:

$$\vartheta = k \left[x - ct - Vt - \alpha \int_0^t \int_0^{t'} F(\psi) d\psi dt' \right] \quad (6.128)$$

semelhante a (6.116) com argumento (6.117).

Como

$$\gamma\delta\left(\frac{\sigma^{1/2}}{R}Vt\right) \equiv F(t)$$

temos

$$F(t) = \int_0^t \gamma\delta\left(\frac{\sigma^{1/2}}{R}Vt'\right) dt'$$

e então

$$F(t) = \int_0^t \int_0^{t'} \gamma\delta\left(\frac{\sigma^{1/2}}{R}V\psi\right) d\psi dt'$$

logo:

$$\int_0^t \int_0^{t'} F(\psi) d\psi dt' = \int_0^t \int_0^{t'} \gamma\delta\left(\frac{\sigma^{1/2}}{R}V\psi\right) d\psi dt'$$

em (6.128).

Apresentamos nesta seção uma parte do cenário de cultura de soluções de equações de ondas, mas concluímos que JEF reproduz o que já sabíamos da solução da KdV linear e não resolve a KdV cilíndrica e esférica. JEF nos dá a solução exata da KdV forçada, onde o termo forçado depende explicitamente do tempo.

Porém, em (6.126) temos uma aproximação para usarmos (6.128) que despreza o caráter de propagação $x-Vt$ e sendo assim perdemos a informação sobre propagação do parton perturbador no fluido. Outra possibilidade é estudar um sóliton inicial para (6.126), mas temos dois parâmetros livres: σ e R que são arbitrários e torna o estudo fenomenológico complicado. Deixamos assim o estudo da quebra de onda forçada para outra oportunidade.

6.6 Soluções numéricas da KdV cilíndrica

6.6.1 Temperatura nula

a) Iniciaremos nosso estudo em temperatura nula usando como condição inicial o sóliton (6.47) com $d = 1$ para a equação (6.45). Os resultados correspondentes estão na Figura 6.15 .

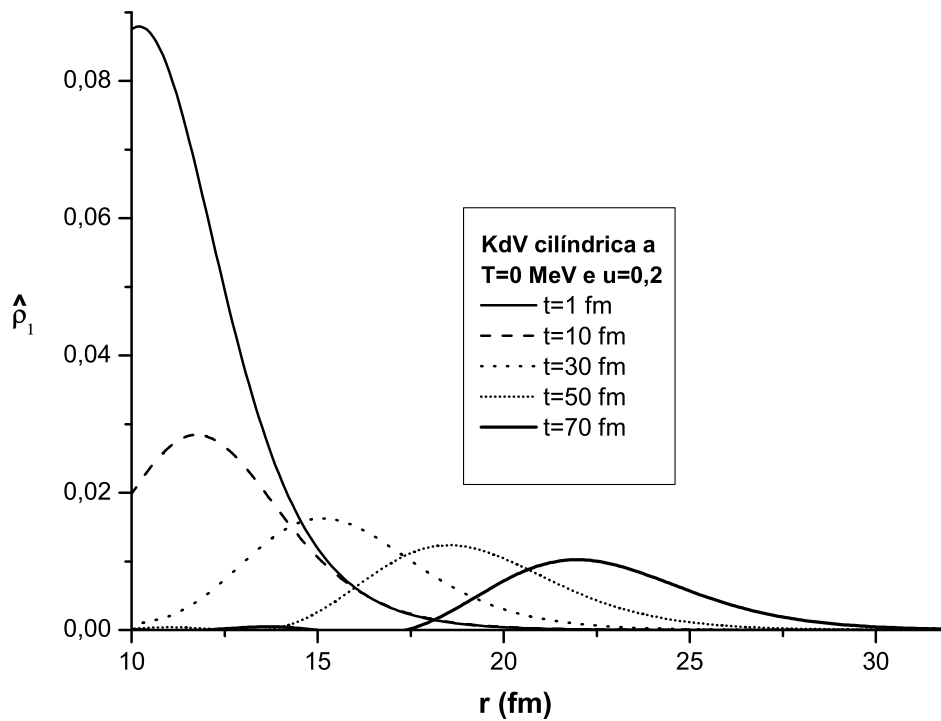


Figura 6.15: KdV cilíndrica a temperatura nula.

Dado um sóliton como condição inicial, observamos seu amortecimento dado pelo termo $\hat{\rho}_1/2t$ em contraste com a KdV linear.

b) Ainda em temperatura nula, mas usando como condição inicial o sóliton (6.47) com $d = 1$ multiplicado por um fator 10, encontramos as curvas da Figura 6.16 .

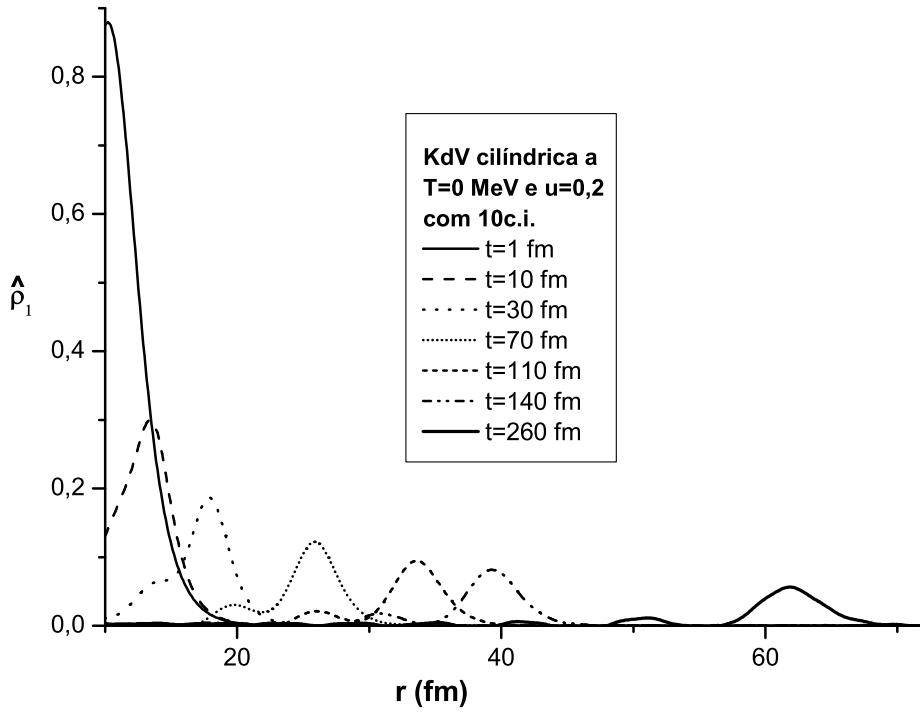


Figura 6.16: KdV cilíndrica a temperatura nula com sóliton inicial multiplicado por 10.

Observamos que apesar do amortecimento é possível ver o efeito de multiplicação por um fator 10 na condição inicial: sólitons seguidos de radiação.

c) Usaremos como condição inicial o sóiton (6.47) com $d = 1$ multiplicado por um fator 30, encontramos as curvas da Figura 6.17 .

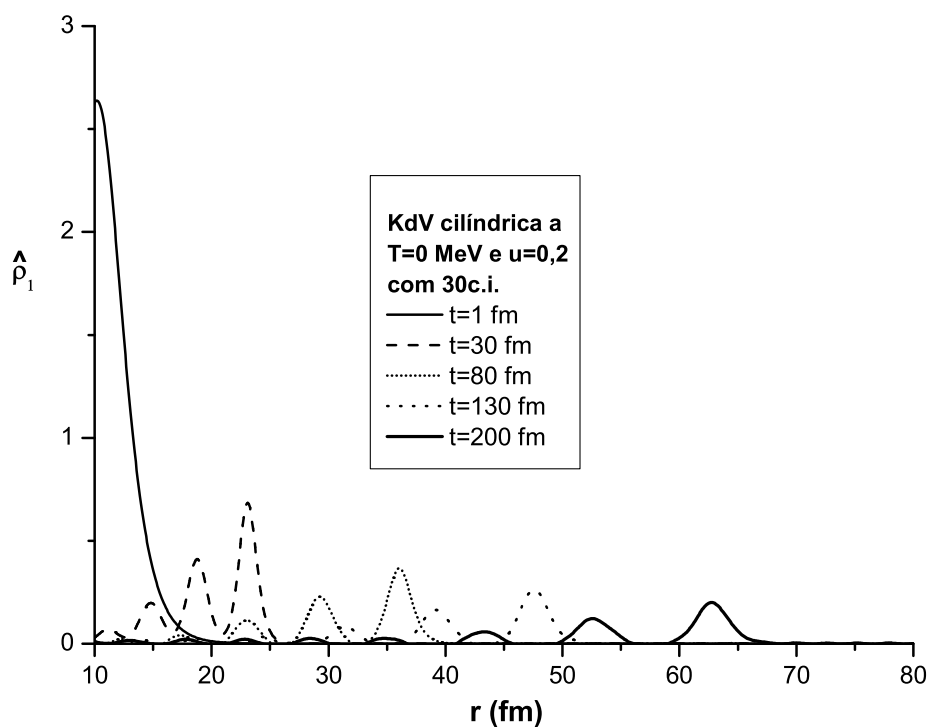


Figura 6.17: KdV cilíndrica a temperatura nula com sóiton inicial multiplicado por 30.

O comportamento é muito parecido com o da figura anterior, mas agora observamos mais radiação.

d) Para estudo de equação de quebra de onda cilíndrica fazemos $d = 0$ em (6.45) e como condição inicial usamos (6.47) com $d = 1$. Os resultados estão na Figura 6.18 .

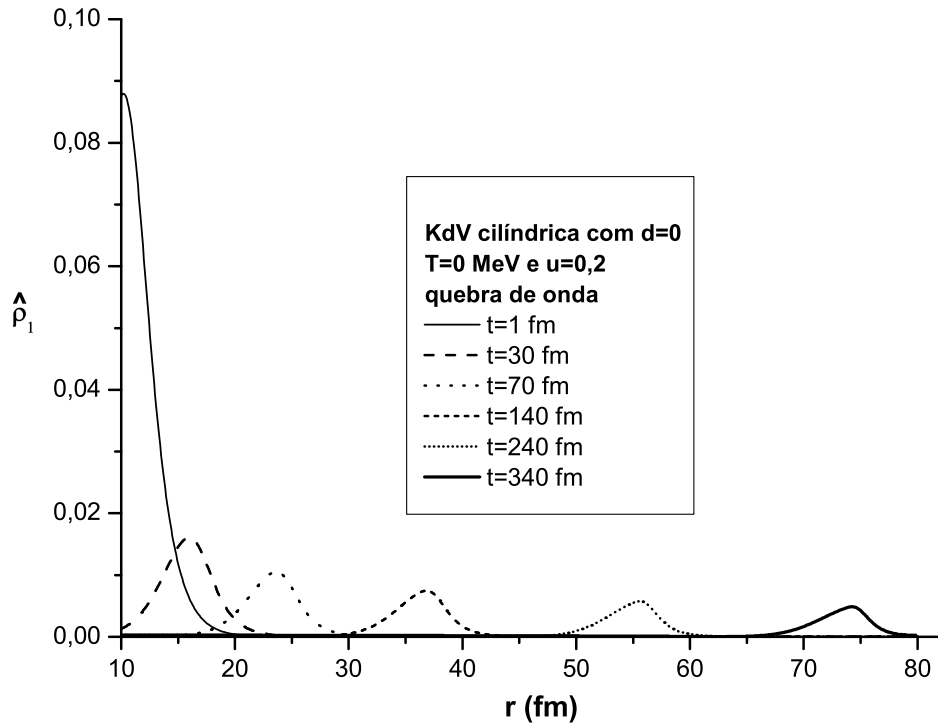


Figura 6.18: Quebra de onda cilíndrica com sóliton inicial.

Observamos que o sóliton inicial é amortecido e à medida em que isso ocorre notamos a formação do choque, ou seja, uma espécie de deformação do sóliton formando uma “parede”. Tal onda será quebrada e dispersada mais adiante mas tal efeito não é observado aqui devido ao amortecimento. Podemos dizer que nesta situação o pulso percorre grande distância.

e) Resolvendo a equação de quebra de onda cilíndrica com a condição inicial (6.47) com $d = 1$ multiplicada por 10 encontramos os resultados da Figura 6.19 .

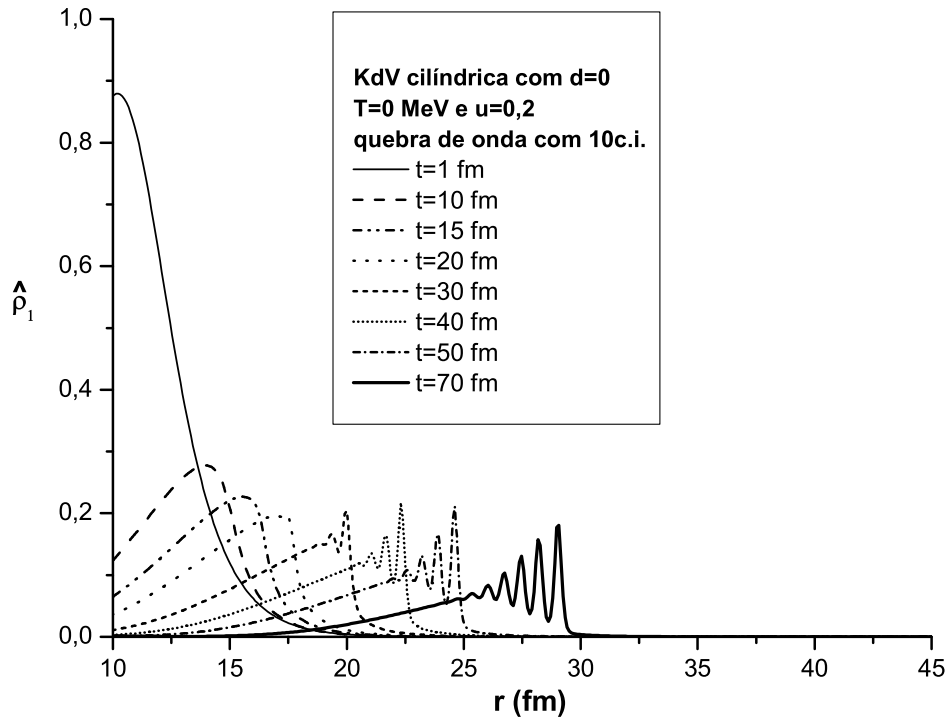


Figura 6.19: Quebra de onda cilíndrica com sóliton inicial multiplicado por 10.

Observamos simultaneamente o amortecimento do sóliton inicial com a quebra e a dispersão da onda. Aumentando a amplitude da condição inicial por um fator multiplicativo 10 antecipamos o efeito de quebra seguida de dispersão que não era visto na figura anterior.

f) Finalmente, resolvemos a equação de quebra de onda cilíndrica com a condição inicial (6.47) com $d = 1$ multiplicada por 30 encontramos os resultados da Figura 6.20 .

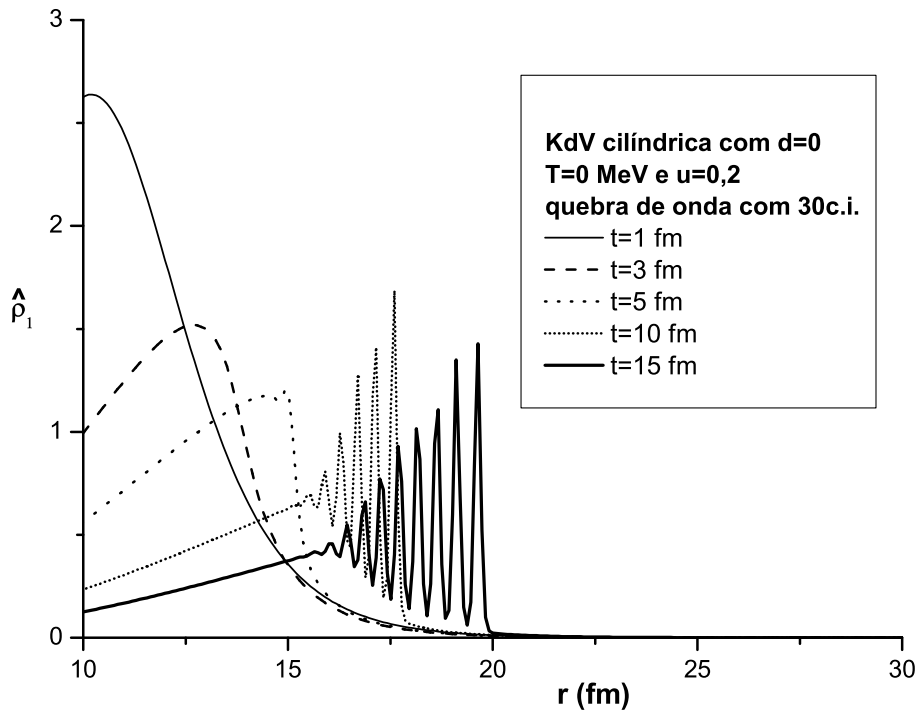


Figura 6.20: Quebra de onda cilíndrica com sóliton inicial multiplicado por 30.

Observamos o mesmo comportamento já visto na Figura 6.19. Agora há maior antecipação da quebra seguida de dispersão.

6.6.2 Temperatura finita

Seguindo o mesmo raciocínio ao já feito para a KdV linear, estudamos a equação diferencial (6.49) com o potencial bariquímico efetivo fixo $\nu = 900$

MeV e com a condição inicial (6.51) (com $d = 1$) utilizando os parâmetros de temperatura nula. Novamente a densidade de referência é calculada a partir de (6.48).

a) Para a temperatura de $30 MeV$ encontramos os resultados da Figura 6.21 .

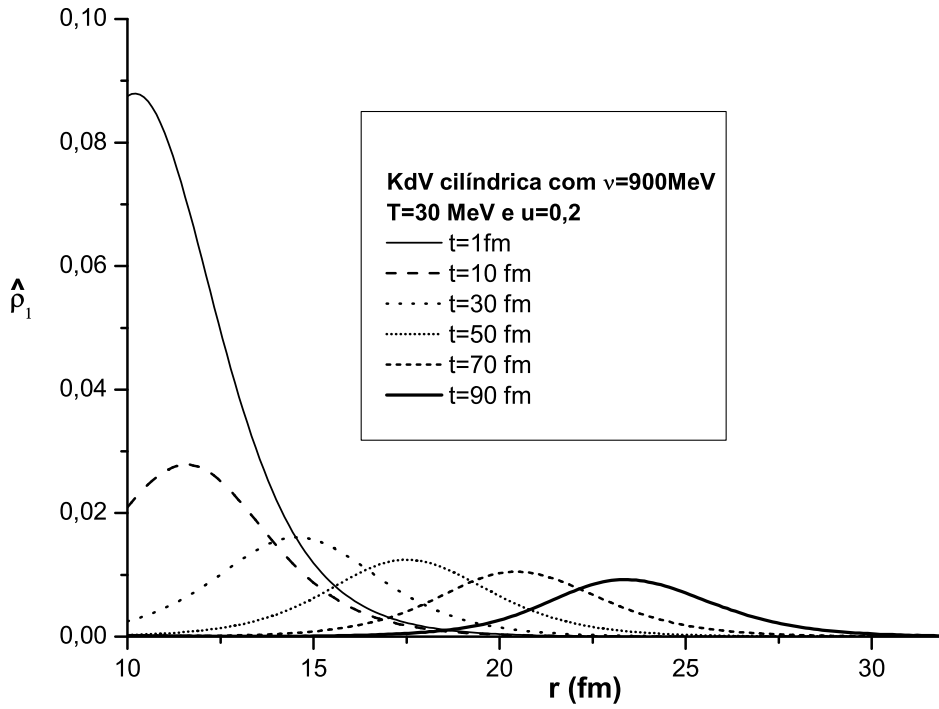


Figura 6.21: KdV cilíndrica a $T = 30 MeV$, com $\rho_0 = 0,0173 fm^{-3}$ e $c_s = 0,149$.

Em relação à figura 6.15 que é em temperatura zero, notamos que para $T = 30MeV$ o sóliton inicial vai menos longe, porém com efeito de amortecimento.

b) Para a temperatura de 80 MeV encontramos os resultados da Figura 6.22 .

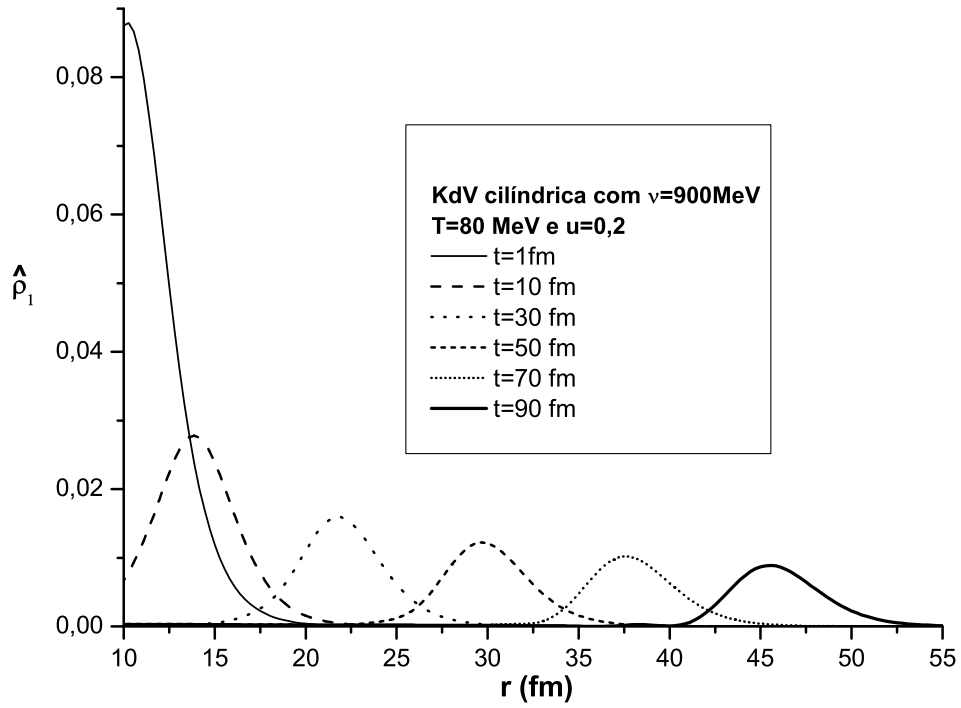


Figura 6.22: KdV cilíndrica a $T = 80 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,2 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,4$.

Em relação à figura anterior a $T = 30 \text{ MeV}$ observamos que o pulso é mais rápido apesar do amortecimento.

c) Já para a temperatura de 120 MeV encontramos os resultados da Figura 6.23 .

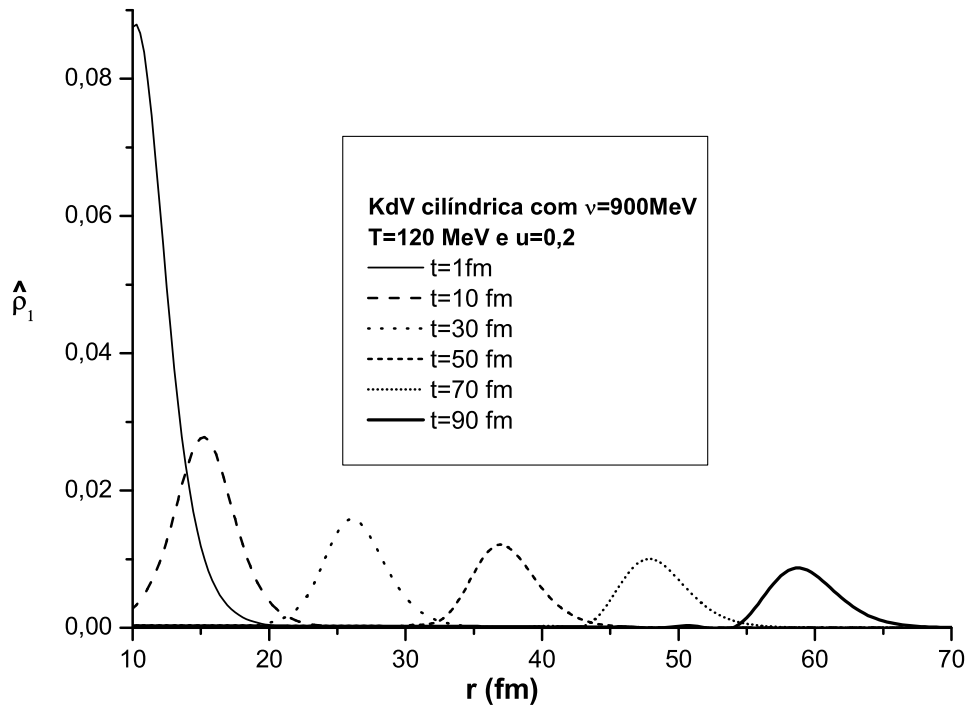


Figura 6.23: KdV cilíndrica a $T = 120 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,54 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,55$.

À medida que a temperatura aumenta, o amortecimento ocorre mas o pulso vai mais rápido.

d) Para estudo de efeito de temperatura na equação de quebra de onda cilíndrica fazemos $d = 0$ em (6.45) e como condição inicial usamos (6.47) com $d = 1$. Os resultados são as curvas na Figura 6.24 .

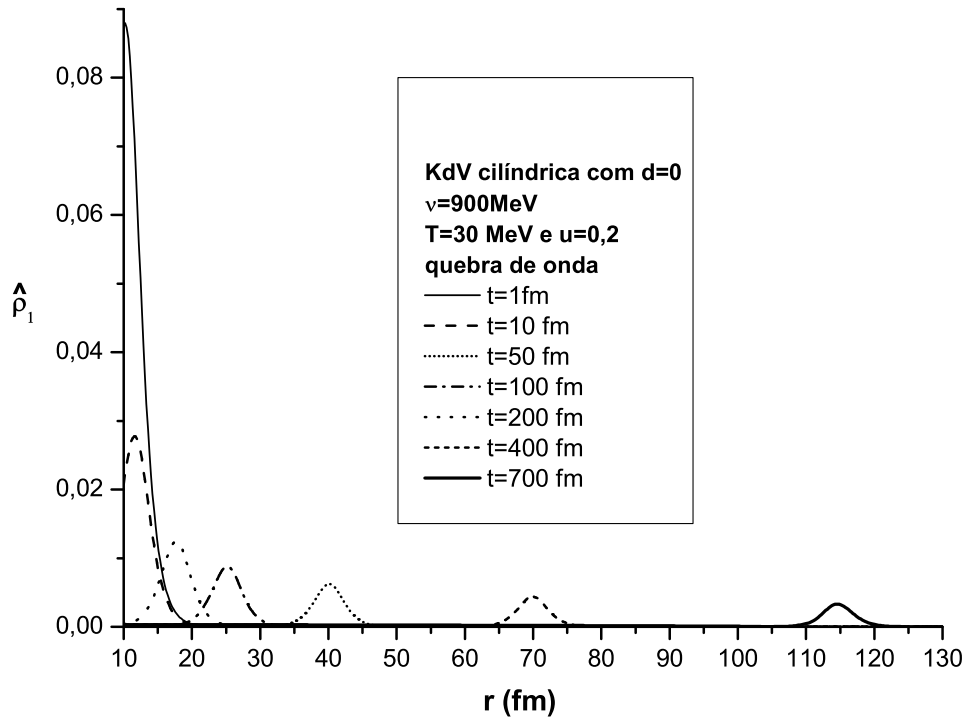


Figura 6.24: Quebra de onda cilíndrica a $T = 30 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,0173 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,149$

O que ocorre nesta figura é semelhante ao que ocorre na figura 6.18 a temperatura nula. Tal onda será quebrada e dispersada mais adiante mas tal efeito não é observado devido amortecimento. O pulso é ligeiramente mais rápido do que em temperatura nula.

e) Equação de quebra de onda cilíndrica a $T = 80 \text{ MeV}$. Os resultados são as curvas na Figura 6.25 .

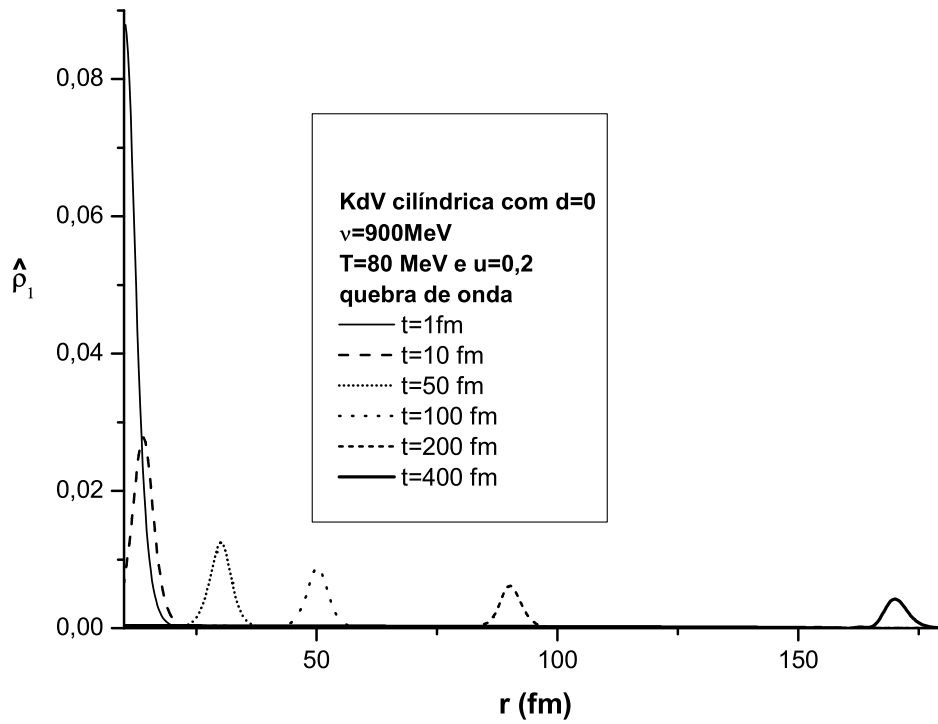


Figura 6.25: Quebra de onda cilíndrica a a $T = 80 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,2 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,4$.

Observamos o pulso mais rápido do que na temperatura nula e em $T = 30 \text{ MeV}$. Também notamos o amortecimento do sóliton inicial, mas não podemos ver a quebra da onda e sua conseqüente dispersão.

f) Equação de quebra de onda cilíndrica a $T = 120 \text{ MeV}$. Os resultados são as curvas na Figura 6.26 .

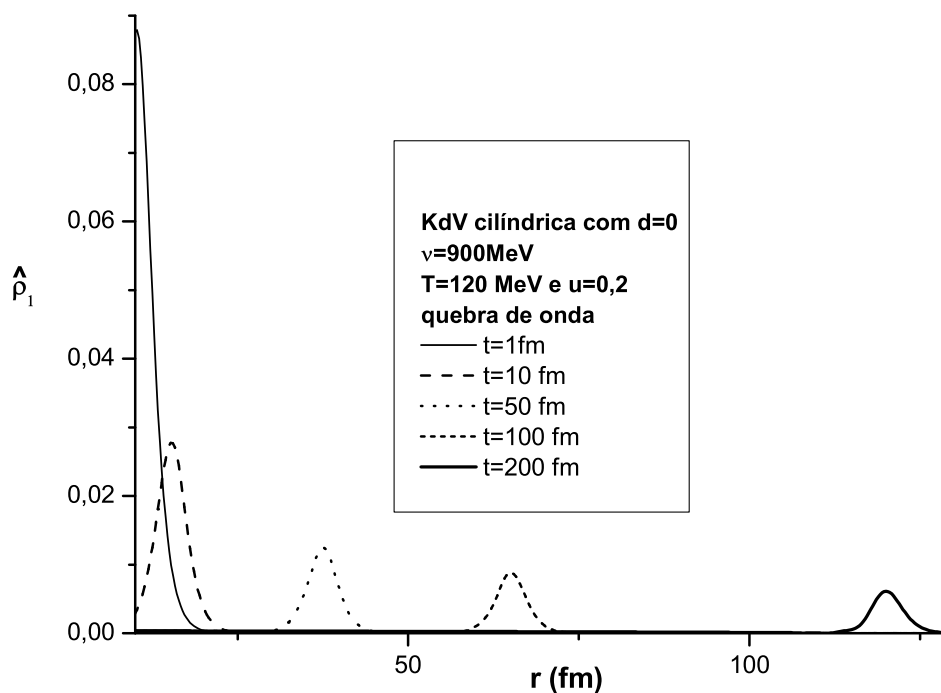


Figura 6.26: Quebra de onda cilíndrica a 120 MeV , com $\rho_0 = 0,54 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,55$.

O pulso é mais rápido que nas situações de temperatura menor mas não vemos a quebra seguida de dispersão. A melhor maneira de visualizarmos quebra e dispersão é através das variantes da condição inicial dada por fatores multiplicativos na amplitude da mesma conforme figuras 6.19 e 6.20.

6.7 KdV esférica

A KdV esférica é obtida fazendo $\eta \equiv 2$ (de acordo com (5.14)) em (5.53):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \left[\frac{5}{2} - c_s^2 - \frac{(\mu_B \rho_0 c_s^2 + \phi \rho_0^2)}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2} \right] \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left[\frac{\omega \rho_0^2}{2(\Phi \rho_0 + \phi) \rho_0^2 R^2} \right] \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} + \frac{\rho_1}{\tau} = 0 \quad (6.129)$$

e novamente por conveniência vamos reescrevê-la como:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \alpha \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} + \frac{\rho_1}{\tau} = 0 \quad (6.130)$$

com α e β dados por (6.31) e (6.32).

6.7.1 Dois casos de interesse

Analogamente ao já feito para a KdV cilíndrica, temos:

I) *Matéria nuclear a $T = 0$, com densidade bariônica de equilíbrio ρ_0 e saturação.*

Lembramos que o vínculo dado por (5.48) resulta em $\mu_B = M$. A KdV esférica é dada por:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + (3 - c_s^2) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + d \left(\frac{g_V^2 \rho_0}{2M m_V^4 c_s} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial r^3} + \frac{\hat{\rho}_1}{t} = 0 \quad (6.131)$$

e uma condição inicial com $t_0 \neq 0$:

$$\hat{\rho}_1(r, t_0) = \frac{3(u - c_s)}{c_s(3 - c_s^2)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(u - c_s) c_s M}{2d \rho_0}} (r - ut_0) \right] \quad (6.132)$$

II) *Matéria hadrônica em $T \neq 0$ descrita em uma densidade bariônica arbitrária.*

Agora lembramos que o vínculo dado por (5.48) resulta em

$$\frac{g_V^2 \rho_0}{m_V^2 c_s^2} = \left(\mu_B + \frac{T s}{\rho_0} \right) \quad (6.133)$$

Nesse caso temos:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right) c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial r} + d \left(\frac{c_s}{2m_V^2} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial r^3} + \frac{\hat{\rho}_1}{t} = 0 \quad (6.134)$$

e como condição inicial para (6.134) com $t_0 \neq 0$:

$$\hat{\rho}_1(r, t_0) = \frac{3(u - c_s)}{c_s} \left(2 - c_s^2 - \frac{\mu_B c_s^2 m_V^2}{2g_V^2 \rho_0} \right)^{-1} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{(u - c_s) m_V^2}{2dc_s}} (r - ut_0) \right] \quad (6.135)$$

6.8 Soluções numéricas da KdV esférica

6.8.1 Temperatura nula

a) Iniciaremos nosso estudo em temperatura nula usando como condição inicial o sóliton (6.132) com $d = 1$ para a equação (6.131). Os resultados são as curvas na Figura 6.27 .

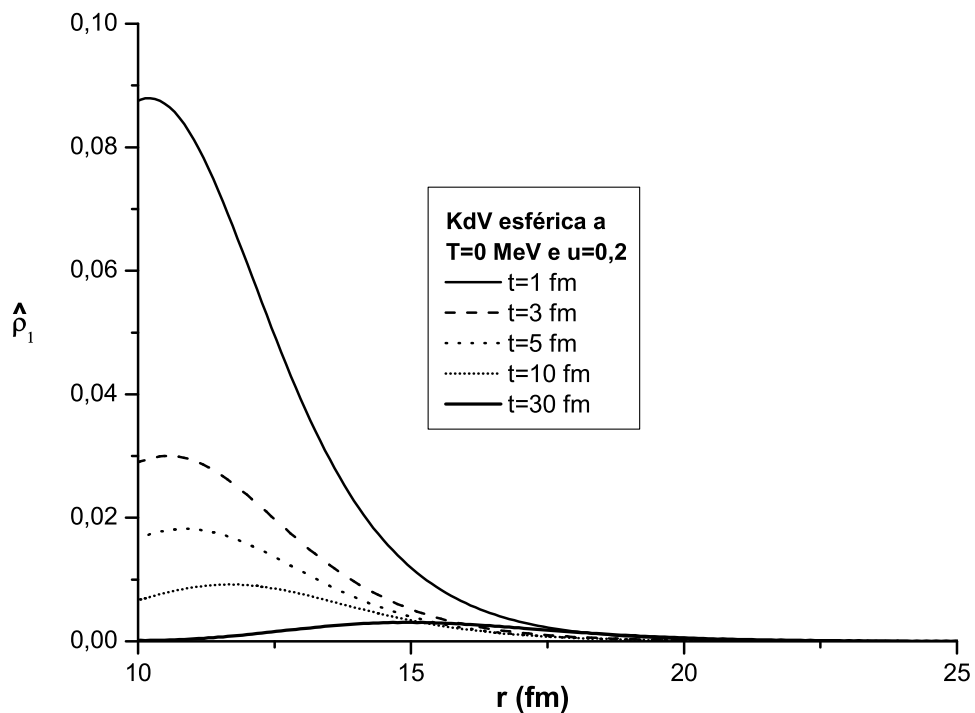


Figura 6.27: KdV esférica a temperatura nula.

O sóliton inicial é amortecimento por causa do termo $\hat{\rho}_1/t$ em contraste com a KdV linear. É interessante que agora o amortecimento $\hat{\rho}_1/t$ é maior do que no caso cilíndrico: $\hat{\rho}_1/2t$.

b) Ainda em temperatura nula, mas usando como condição inicial o sóliton (6.132) com $d = 1$ multiplicado por um fator 10 encontramos os gráficos da Figura 6.28 .

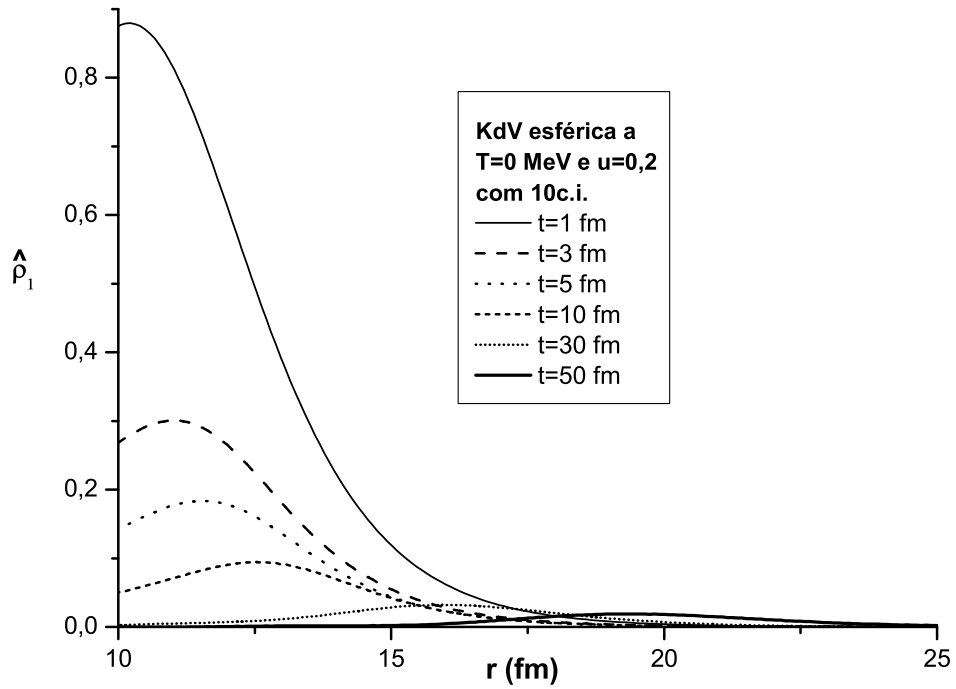


Figura 6.28: KdV esférica a temperatura nula com sóliton inicial multiplicado por 10.

Apesar do pulso ser um pouco mais rápido, o amortecimento ocorre para um pulso inicial com amplitude elevada.

c) Usaremos como condição inicial agora o sóliton (6.132) com $d = 1$ multiplicado por um fator 30 encontramos os gráficos da Figura 6.29 .

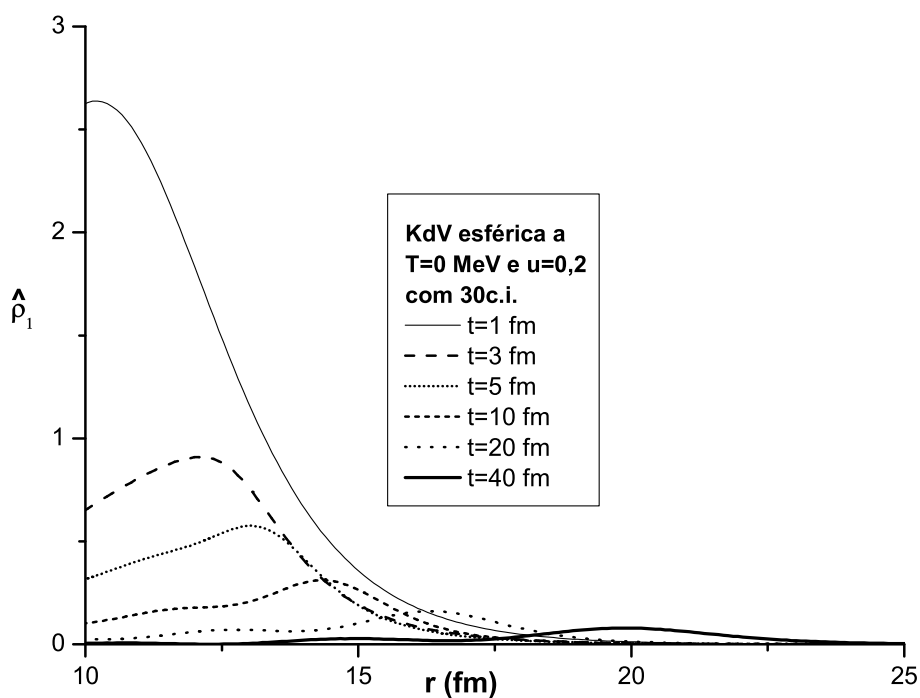


Figura 6.29: KdV esférica a temperatura nula com sóliton inicial multiplicado por 30.

Com relação às duas últimas figuras o pulso vai mais rápido e o amortecimento é forte em contraste à KdV cilíndrica a temperatura nula. Na KdV esférica não observamos a radiação.

e) Equação de quebra de onda esférica com a condição inicial (6.132) com $d = 1$ multiplicada por 10. Os resultados são os gráficos da Figura 6.31 .

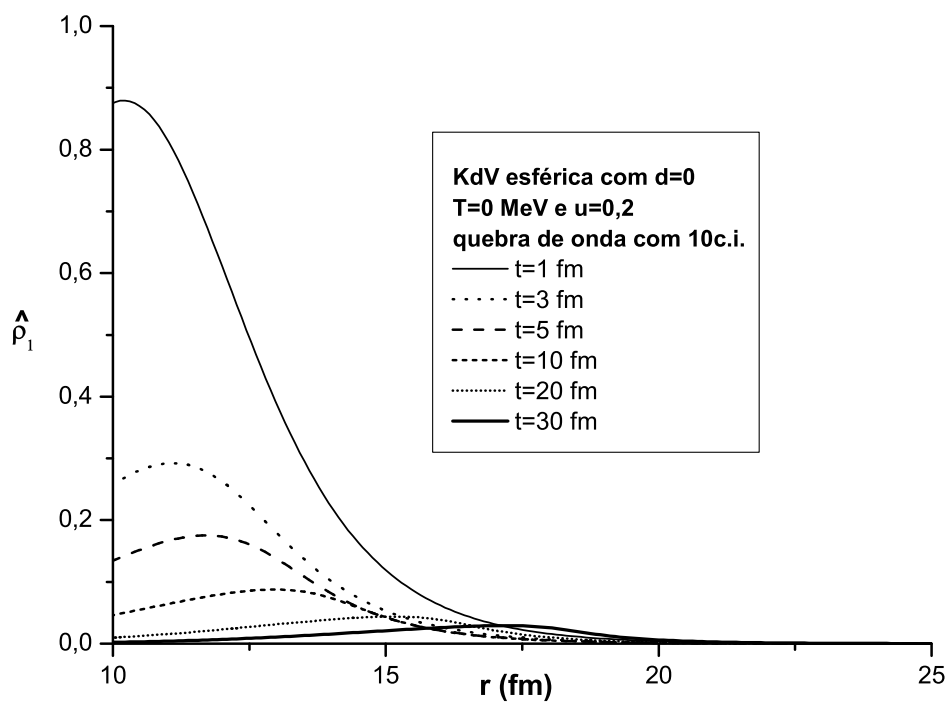


Figura 6.31: Quebra de onda esférica com sóliton inicial multiplicado por 10.

Apesar de multiplicarmos o sóliton inicial por 10 aumentando sua amplitude, notamos que o mesmo é um pouco mais rápido mas ainda não observamos a quebra seguida de dispersão.

f) Equação de quebra de onda esférica com a condição inicial (6.132) com $d = 1$ multiplicada por 30. Os resultados são os gráficos da Figura 6.32 .

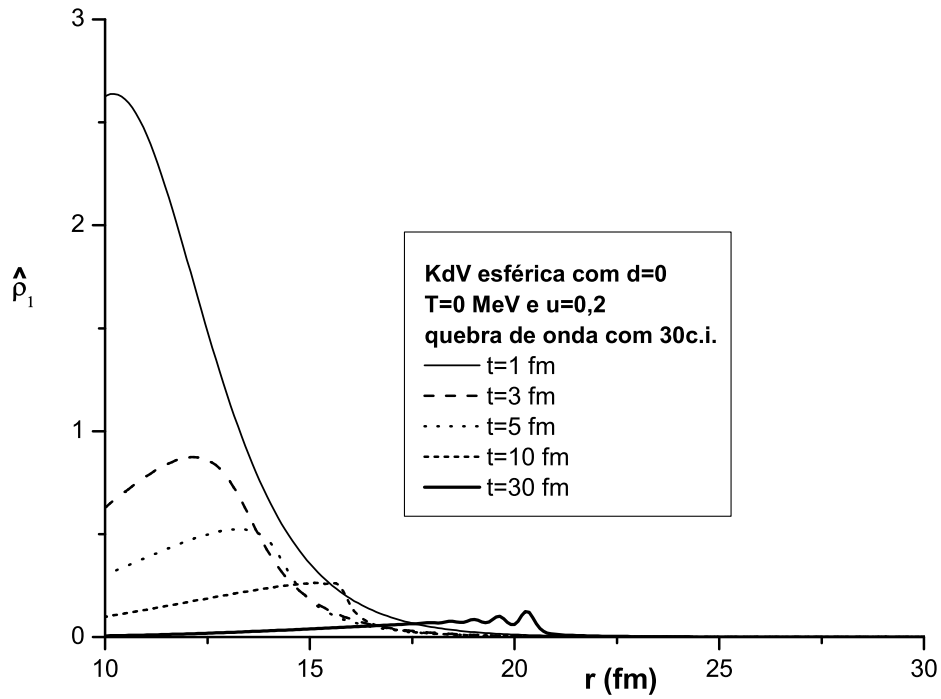


Figura 6.32: Quebra de onda esférica com sóliton inicial multiplicado por 30.

A multiplicação por um fator 30 na amplitude do sóliton inicial possibilita a formação do choque, sendo que agora o pulso é mais rápido em relação à figura anterior e notamos sua quebra e dispersão, apesar do forte amortecimento.

6.8.2 Temperatura finita

Seguindo o mesmo raciocínio “tradicional” ao já feito para a KdV linear e cilíndrica, estudamos a equação diferencial (6.134) com o potencial bari-

oquímico efetivo fixo $\nu = 900 \text{ MeV}$ e com a condição inicial (6.135) (com $d = 1$) utilizando os parâmetros em temperatura nula. Novamente a densidade de referência é calculada a partir de (6.133).

a) Para a temperatura de 30 MeV encontramos os gráficos apresentados na figura 6.33 .

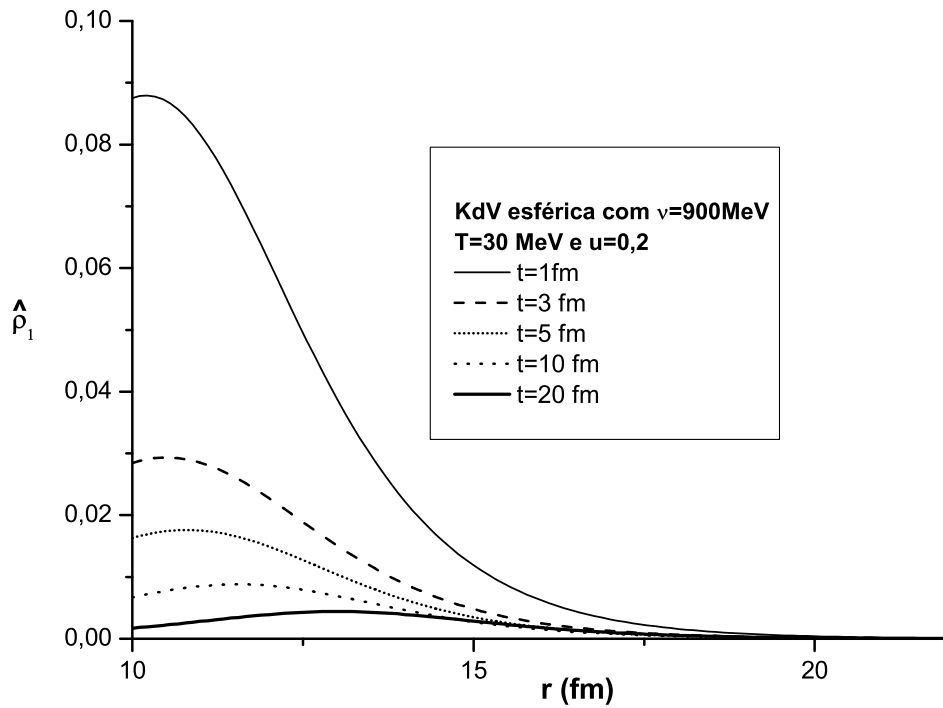


Figura 6.33: KdV esférica a $T = 30 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,0173 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,149$.

Em relação à situação de temperatura nula dada pela Figura 6.27 o pulso vai mais rápido e é amortecido.

b) Para a temperatura de 80 MeV encontramos os gráficos apresentados na figura 6.34 .

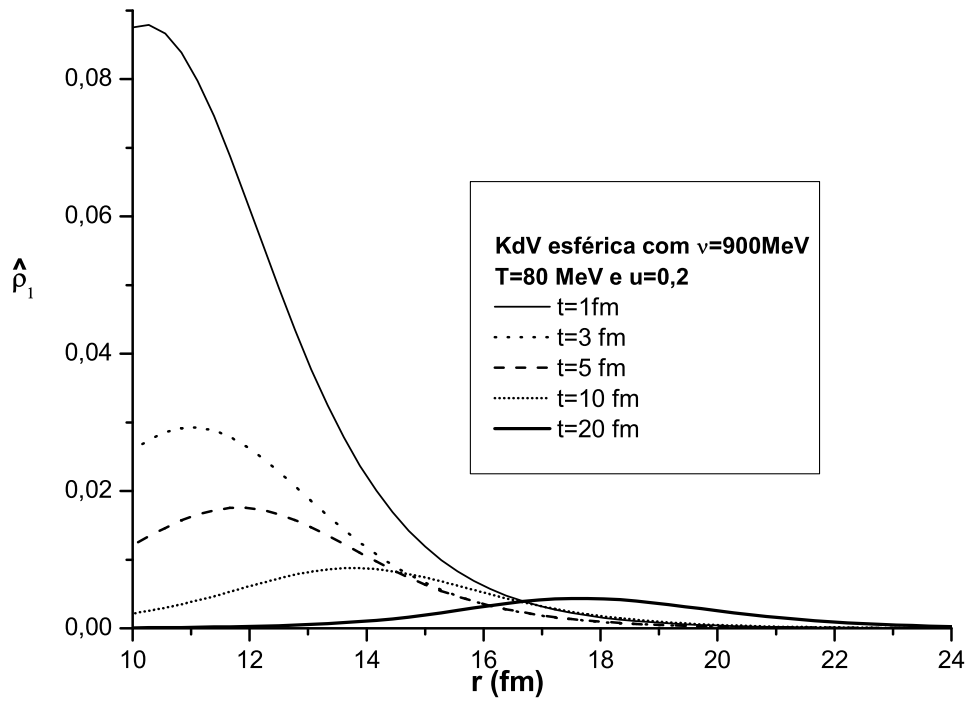


Figura 6.34: KdV esférica a $T = 80 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,2 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,4$.

Idem ao comentário da figura anterior.

c) Já para a temperatura de 120 MeV encontramos os gráficos apresentados na figura 6.35 .

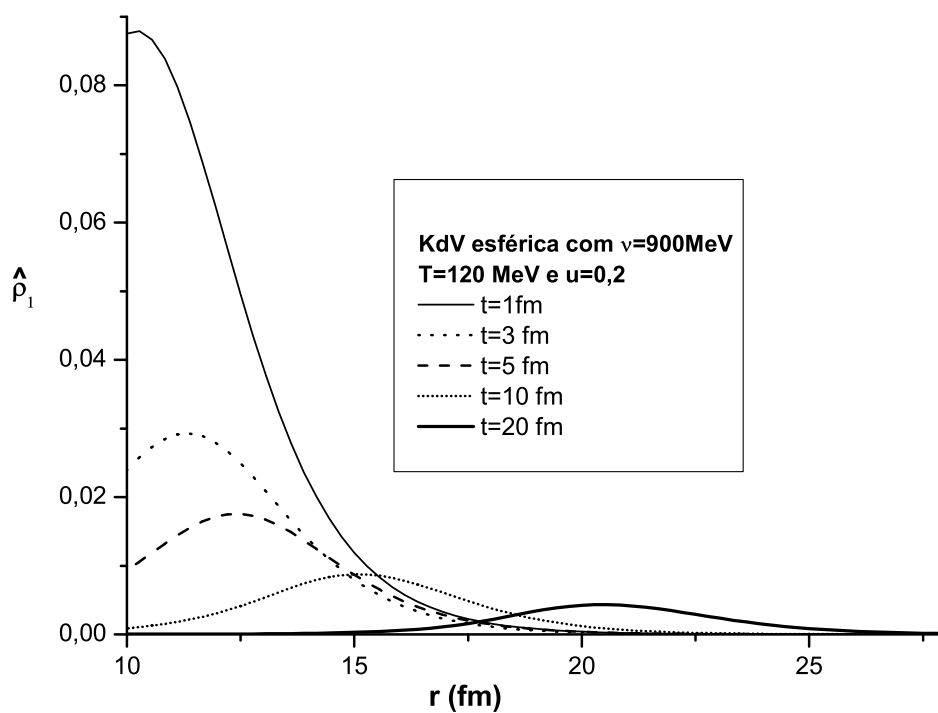


Figura 6.35: KdV esférica a $T = 120 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,54 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,55$.

Idem ao comentário da figura anterior, concluímos que aumentando a temperatura o pulso vai mais rápido sofrendo amortecimento.

d) Para estudo de efeito de temperatura na equação de quebra de onda esférica fazemos $d = 0$ em (6.134) e como condição inicial usamos (6.135) com $d = 1$, análogo ao feito para os casos linear e cilíndrico.

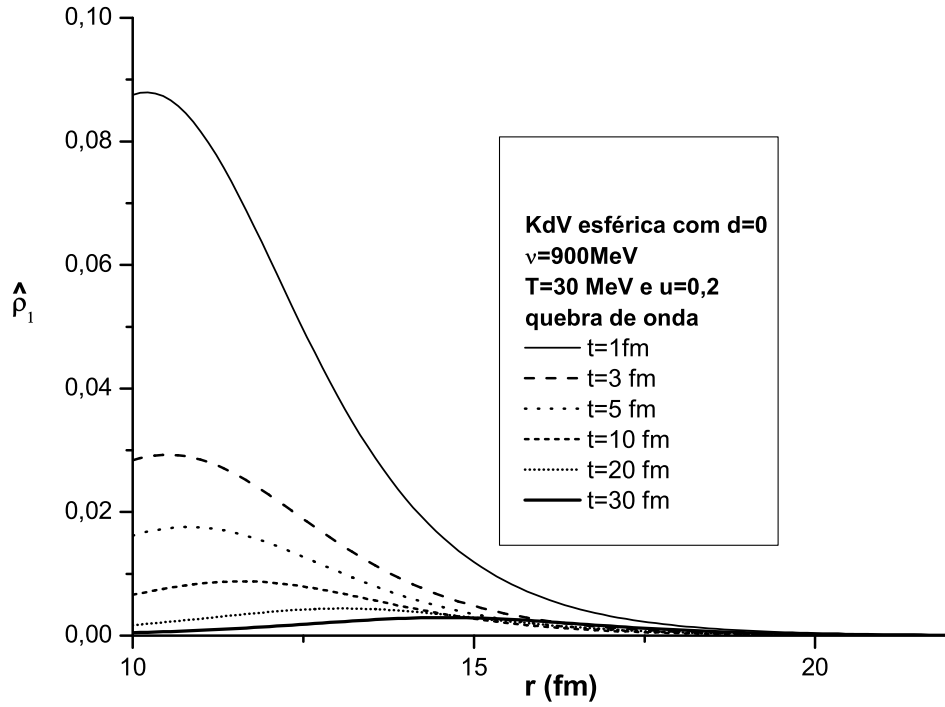


Figura 6.36: Quebra de onda esférica a $T = 30 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,0173 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,149$

Em relação à figura 6.30 a temperatura nula notamos que o pulso é ligeiramente mais rápido, apesar do amortecimento que não possibilita observarmos o efeito de quebra da onda.

e) Equação de quebra de onda esférica a temperatura de 80 MeV . Os gráficos são apresentados na figura 6.37 .

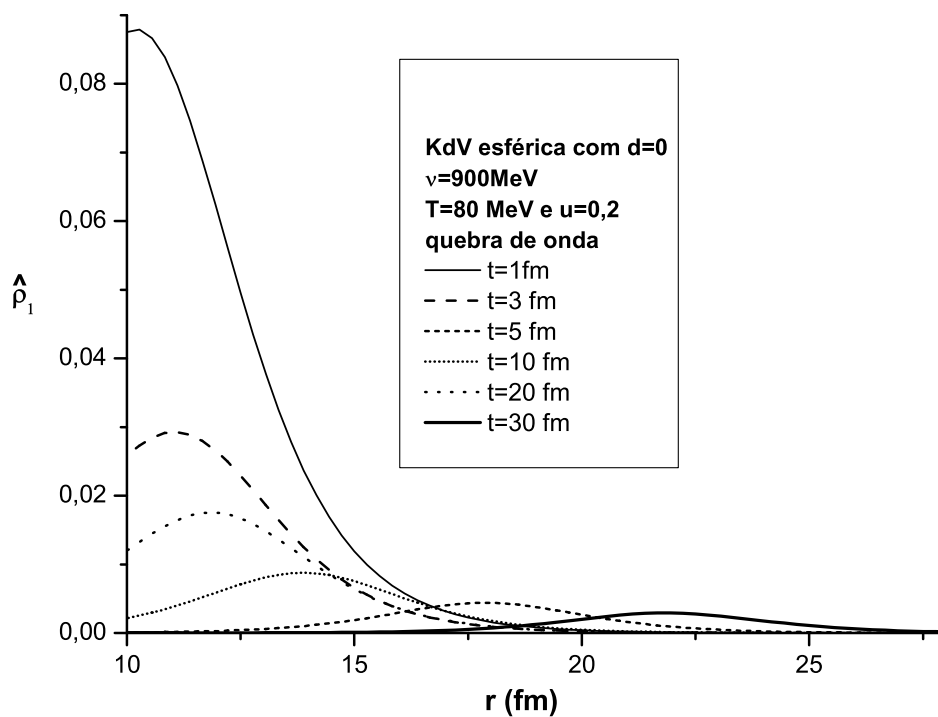


Figura 6.37: Quebra de onda esférica a a $T = 80 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,2 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,4$.

Pulso mais rápido e seguido de amortecimento em relação às temperaturas menores.

f) Equação de quebra de onda esférica a temperatura de 120 MeV .

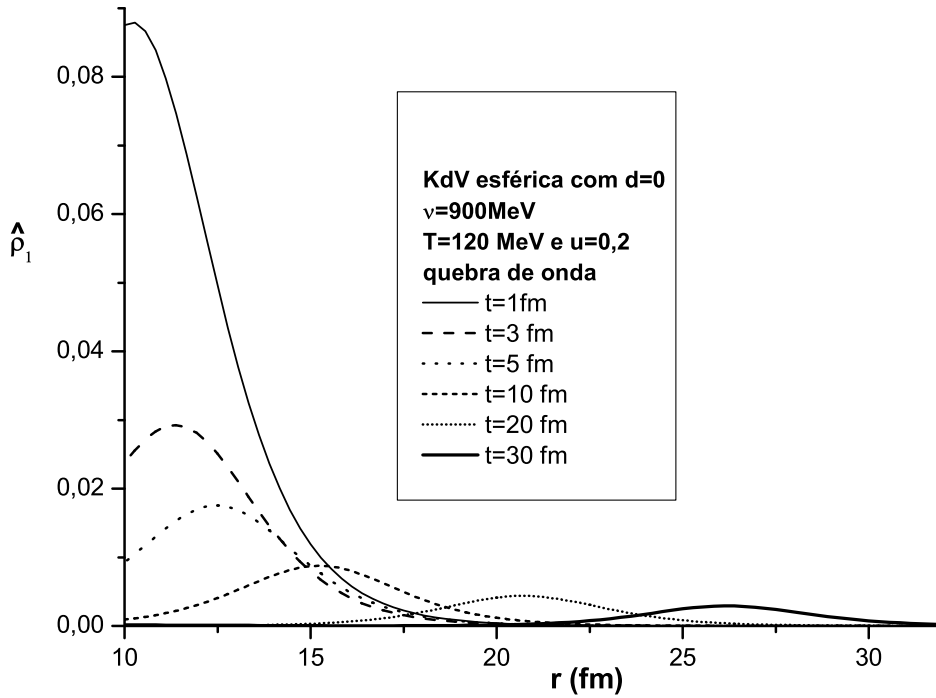


Figura 6.38: Quebra de onda esférica a $T = 120 \text{ MeV}$, com $\rho_0 = 0,54 \text{ fm}^{-3}$ e $c_s = 0,55$.

O pulso é mais rápido à medida que a temperatura aumenta e o amortecimento não permite a observação da quebra seguida de dispersão.

6.9 Comentários sobre as soluções

Na Figura 6.1 observamos o esperado da equação de KdV: pulso preservado se propagando. Nas Figuras 6.2 e 6.3 observamos a sensibilidade da KdV com relação às condições iniciais ligeiramente diferentes de sua solução analítica

exata. Observamos então que quando “erramos” na codição inicial temos o pulso inicial seguido de outros, ou seja, temos sóliton mais radiação. Na Figura 6.4 ilustramos um caso de rarefação ao invés de compressão e notamos o comportamento subsônico ($u < c_s$) da solução, essencialmente é a Figura 6.1 com $\hat{\rho}_1 < 0$.

Da Figura 6.5 à 6.8 temos o estudo da equação de quebra de onda linear em temperatura nula com um sóliton como condição inicial. Notamos que à medida que a velocidade de propagação u do pulso é próxima da velocidade do som c_s , tal pulso é preservado e a quebra do mesmo ocorre após este percorrer uma distância maior. A antecipação da quebra é observada quando a condição inicial é ligeiramente perturbada por fator multiplicativo em sua amplitude: quanto maior a amplitude, antes ocorre a quebra.

Em todas as situações de temperatura finita, apenas os coeficientes das equações diferenciais variam com a temperatura, a condição inicial é a mesma que em temperatura nula para compararmos como a evolução da temperatura contribui nos solitons em todos os casos.

Da Figura 6.9 à 6.11 notamos que com o aumento da temperatura o pulso se propaga mais rápido, vai mais longe e ondas (radiação) surgem. Analogamente, para as Figuras 6.12 à 6.14 a quebra de onda seguida da dispersão ocorre após o pulso ir mais longe à medida que a temperatura aumenta.

Na Figura 6.15 em temperatura nula, observamos o amortecimento do sóliton inicial devido ao efeito da geometria cilíndrica. Já nas Figuras 6.16 e 6.17 observamos a sensibilidade ao fator multiplicativo na amplitude da condição inicial usada em 6.15: observamos sóliton seguido de radiação com amortecimento. A quebra de onda cilíndrica em temperatura nula não é observada, nem sua dispersão conforme em 6.18 devido ao amortecimento. Tal quebra seguida de dispersão só é vista nas Figuras 6.19 e 6.20 quando aumentamos a amplitude do pulso inicial. Com o aumento da temperatura a KdV cilíndrica amortece o pulso, mas o comportamento é semelhante ao da KdV linear: a condição solitônica inicial vai mais longe. Isso está nas Figuras 6.21 à 6.23. A quebra da onda seguida de sua dispersão na geometria cilíndrica com o aumento da temperatura também não é observada pois o amortecimento prevalece sobre o efeito de quebra e dispersão conforme temos nas Figuras 6.24 à 6.26.

Na Figura 6.27 iniciamos o estudo de propagação de sóliton na KdV esférica e observamos que o amortecimento esférico $\hat{\rho}_1/t$ é maior do que no caso cilíndrico, dado por $\hat{\rho}_1/2t$. Já nas Figuras 6.28 e 6.29 com amplitude e

pulso mais rápido, não observamos o surgimento da radiação. Nas Figuras 6.30 e 6.31 não observamos a quebra seguida de dispersão. Isso só é observado de fato em 6.32, quando multiplicamos a condição inicial por 30, ainda com forte amortecimento. Das Figuras 6.33 à 6.35 vemos que para KdV esférica o pulso anda mais rápido à medida que a temperatura se eleva, apesar do amortecimento.

Ainda em temperatura finita, mas para a equação de quebra de onda, o pulso é mais rápido à medida em que a temperatura aumenta e o amortecimento não permite a observação da quebra seguida de dispersão conforme Figuras 6.36 à 6.38.

Todo o estudo analítico e numérico neste capítulo nos dá fundamentos para observar os comportamentos de pulsos em outros cenários. No próximo capítulo apresentamos uma nova situação física envolvendo propagação de perturbações e usamos todo conhecimento até aqui obtido nas equações que regem tais perturbações.

Capítulo 7

Propagação de ondas no plasma de quarks e gluons

7.1 Motivação

Nos capítulos 1 e 3 mencionamos que em colisões de íons pesados relativísticos a passagem de partons energéticos pelo plasma pode formar ondas de choque e “cones de Mach” [13, 14]. Já existem evidências experimentais de que esse fenômeno ocorre no RHIC [15, 16]. Os estudos teóricos da propagação de perturbações apresentados em [39, 40, 41] fazem usos de certas aproximações.

Como exemplo de um esquema destas aproximações temos a chamada “linearização” descrita em [1] que diz que para se estudar a evolução de uma perturbação, basta considerarmos apenas os termos de primeira ordem em $\delta\varepsilon$ (perturbação na densidade de energia), δP (perturbação na pressão) e \vec{v} (campo de velocidade do fluido) nos cálculos envolvendo as equações de conservação de energia e momento, ou seja, desprezando combinações que envolvem gradientes de velocidade com derivadas temporais de velocidade, gradientes de pressão com velocidade, termos proporcionais a potências quadráticas ou maiores dessas grandezas, etc. Isso nos leva à equação de onda (3.41) obtida em [1]:

$$\frac{\partial^2(\delta\varepsilon)}{\partial t^2} - c_s^2 \vec{\nabla}^2(\delta\varepsilon) = 0$$

para a perturbação $\delta\varepsilon$ que se propaga com velocidade c_s .

Também mencionamos que indo “além da linearização” conforme em [21, 23] que implica considerarmos todas as derivadas temporais e espaciais de

qualquer ordem e também todas as potências de $\delta\varepsilon$, δP e \vec{v} nos cálculos, com as expansões nas perturbações de velocidade, densidade bariônica ou densidade de energia temos uma equação de onda mais complexa. De fato utilizando esse formalismo mais geral que considera efeitos perturbativos de ordem mais alta encontramos uma equação unidimensional do tipo (3.65):

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + c_s \left[\left(\frac{3}{2} - c_s^2 \right) \frac{1}{(1 + c_s^2)} - \frac{1}{2} \right] \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = 0$$

chamada de equação de quebra de onda para a perturbação na densidade de energia $\hat{\varepsilon}_1(x, t)$ com c_s a velocidade do som no fluido.

Nosso esquema de expansão “além da linearização” nos levou à equação de quebra de onda e à equação de KdV na matéria nuclear. Neste capítulo vamos aplicar o nosso esquema de expansão ao plasma de quarks e glúons (QGP), encontrando a equação de quebra de onda e observando em quais circunstâncias tal quebra ocorre. Agora a propagação de onda é mais complexa.

Todos os cálculos na obtenção da equação de onda são analíticos e não é necessário desprezar nenhum termo nas equações de movimento da hidrodinâmica relativística. Também não desprezamos potências maiores, gradientes e derivadas temporais das grandezas termodinâmicas do fluido.

7.2 Equação de estado para o QGP

Conforme em [33, 80] para a fase bárion-méson temos em *MFT* a densidade bariônica, a densidade de energia e a pressão dadas respectivamente por:

$$\rho_B = \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_{\vec{k}}(T, \nu) - \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu)] \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 + b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} + c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} + \\ & + \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k h [n_{\vec{k}}(T, \nu) + \bar{n}_{\vec{k}}(T, \nu)] \end{aligned} \quad (7.2)$$

e

$$p = \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 - \frac{m_S^2}{2g_S^2} (M - M^*)^2 - b \frac{(M - M^*)^3}{3g_S^3} - c \frac{(M - M^*)^4}{4g_S^4} +$$

$$-T \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\ln(1 - n_{\vec{k}}) + \ln(1 - \bar{n}_{\vec{k}}) \right] \quad (7.3)$$

onde $\gamma_s = 4$. De acordo com (D.12) em $T = 0$, temos:

$$\rho_B = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \quad (7.4)$$

ou seja, em $T = 0$ k_F denota o nível bariônico de mais alta ocupação.

Para o plasma de quarks e gluons (QGP) vamos considerar apenas os quarks u e d :

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Cada quark possui três estados de carga de cor e não possui massa. Também temos oito gluons sem massa e as interações no QGP serão desprezadas.

Para modelarmos a propriedade de confinamento introduzimos uma constante, que é uma energia positiva por unidade de volume no vácuo:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{E}{V} \right)_{vac} \quad (7.6)$$

interpretada como a energia necessária para criar uma bolha ou sacola no vácuo, na qual os quarks e gluons não interagentes estão confinados.

A densidade bariônica, densidade de energia e pressão no QGP são semelhantes às expressões (7.1), (7.2), (7.3), mas os quarks possuem número bariônico $1/3$ e o potencial químico dos gluons é zero. Assim, ficamos com:

$$\rho_B = \frac{1}{3} \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}} \right] \quad (7.7)$$

onde

$$n_{\vec{k}} \equiv n_{\vec{k}}(T) = \frac{1}{1 + e^{(k - \frac{1}{3}\mu)/k_B T}} \quad (7.8)$$

e

$$\bar{n}_{\vec{k}} \equiv \bar{n}_{\vec{k}}(T) = \frac{1}{1 + e^{(k + \frac{1}{3}\mu)/k_B T}} \quad (7.9)$$

com μ sendo o potencial barioquímico. Na densidade de energia, a contribuição dos gluons é dada por:

$$\varepsilon = \mathcal{B} + \frac{\gamma_G}{(2\pi)^3} \int d^3k \, k \, (e^{k/k_B T} - 1)^{-1} + \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int d^3k \, k \, [n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}] \quad (7.10)$$

onde, no primeiro termo usamos o fato de que para bosons temos:

$$\langle N \rangle = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{TV} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/T} - 1}$$

Antes de escrevermos a expressão da pressão podemos resolver parcialmente de forma analítica a integral nos momentos em (7.3) adaptada para os quarks com $\gamma_s \rightarrow \gamma_Q$:

$$I_p \equiv -k_B T \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int d^3 k \left[\ln(1 - n_{\vec{k}}) + \ln(1 - \bar{n}_{\vec{k}}) \right]$$

Usando a simetria esférica do problema temos:

$$I_p \equiv -k_B T 4\pi \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \left[\ln(1 - n_{\vec{k}}) + \ln(1 - \bar{n}_{\vec{k}}) \right]$$

As integrações em k são feitas por partes:

$$\int_0^{\infty} dk k^2 \ln(1 - n_{\vec{k}}) = \frac{k^3}{3} \ln(1 - n_{\vec{k}}) \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} dk k^3 \frac{1}{(1 - n_{\vec{k}})} \left(- \frac{dn_{\vec{k}}}{dk} \right)$$

Usando o resultado

$$\frac{dn_{\vec{k}}}{dk} = - \left(\frac{1}{k_B T} \right) \frac{e^{(k + \frac{1}{3}\mu)/k_B T}}{[1 + e^{(k + \frac{1}{3}\mu)/k_B T}]^2}$$

e o fato de que o termo de superfície vai a zero em $k = 0$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\ln(1 - n_{\vec{k}}) \right] \rightarrow \ln(1) = 0$$

encontramos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dk k^2 \ln(1 - n_{\vec{k}}) &= - \frac{1}{3k_B T} \int_0^{\infty} dk k^3 \frac{e^{(k + \frac{1}{3}\mu)/k_B T}}{(1 - n_{\vec{k}})[1 + e^{(k + \frac{1}{3}\mu)/k_B T}]^2} = \\ &= - \frac{1}{3k_B T} \int_0^{\infty} dk k^3 n_{\vec{k}} \end{aligned}$$

e da mesma forma:

$$\int_0^{\infty} dk k^2 \ln(1 - \bar{n}_{\vec{k}}) = - \frac{1}{3k_B T} \int_0^{\infty} dk k^3 \bar{n}_{\vec{k}}$$

de tal maneira que I_p fica:

$$I_p \equiv \frac{k_B T 4\pi}{3k_B T} \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^3 [n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}] = \frac{\gamma_Q}{3(2\pi)^3} \int d^3k k [n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}]$$

e conseqüentemente a expressão para a pressão é:

$$p = -\mathcal{B} + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\gamma_G}{(2\pi)^3} \int d^3k k (e^{k/k_B T} - 1)^{-1} + \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int d^3k k [n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}] \right\} \quad (7.11)$$

Os fatores de degenerescência são dados por

$$\gamma_G = 2(\text{polarizações}) \times 8(\text{cores}) = 16 \quad \text{para gluons} \quad (7.12)$$

e

$$\gamma_Q = 2(\text{spins}) \times 2(\text{sabores}) \times 3(\text{cores}) = 12 \quad \text{para quarks} \quad (7.13)$$

Ainda podemos fazer a integral sobre os gluons (que chamaremos de I_{gluons}) presente em (7.10) e (7.11):

$$I_{gluons} \equiv \int_0^\infty dk k^3 (e^{k/k_B T} - 1)^{-1}$$

A primeira etapa é reescrever I_{gluons} como:

$$\begin{aligned} I_{gluons} &\equiv \int_0^\infty dk k^3 (e^{k/k_B T} - 1)^{-1} = \\ &= \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + \mu_G^2} (e^{\sqrt{k^2 + \mu_G^2}/k_B T} - 1)^{-1} \end{aligned} \quad (7.14)$$

e ao final dos cálculos estudarmos o limite para gluons em que $\mu_G \rightarrow 0$. Fazendo as mudanças de variáveis

$$z = \frac{\mu_G}{k_B T} \quad (7.15)$$

e

$$x = \frac{k}{\mu_G} \quad (7.16)$$

em (7.14) temos:

$$I_{gluons} = (k_B T)^4 z^4 \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}{(e^{z\sqrt{x^2 + 1}} - 1)} dx =$$

$$= (k_B T)^4 z^4 \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{x^2 + 1} (e^{-z\sqrt{x^2+1}})}{(1 - e^{-z\sqrt{x^2+1}})} dx$$

Usando a expansão:

$$(1 - e^{-z\sqrt{x^2+1}})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz\sqrt{x^2+1}}$$

encontramos:

$$I_{gluons} = (k_B T)^4 z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty x^2 (\sqrt{x^2 + 1}) e^{-(n+1)z\sqrt{x^2+1}} dx$$

que pode ser reescrita como:

$$I_{gluons} = (k_B T)^4 z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + 1})} e^{-(n+1)z\sqrt{x^2+1}} dx$$

Usando $x = \sinh(y)$ a equação acima assume a forma:

$$I_{gluons} = (k_B T)^4 z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty \sinh^2(y) e^{-(n+1)z \cosh(y)} dy \quad (7.17)$$

Lembrando a forma da função de Bessel modificada:

$$K_\nu(w) = \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - 1/2)!} \left(\frac{w}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \sinh^{2\nu}(y) e^{-w \cosh(y)} dy \quad (7.18)$$

podemos reescrever (7.17) como:

$$I_{gluons} = (k_B T)^4 z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{2(1 - 1/2)! K_1[(n+1)z]}{\pi^{1/2}(n+1)z} \right\}$$

Usando $(1 - 1/2)! = \pi^{1/2}/2$ escrevemos a última expressão como:

$$I_{gluons} = (k_B T)^4 z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{K_1[(n+1)z]}{(n+1)z} \right\} \quad (7.19)$$

e mediante as relações de recorrência para as funções de Bessel:

$$K_{\nu-1}(w) - K_{\nu+1}(w) = -\frac{2\nu}{w} K_\nu(w) \quad (7.20)$$

e

$$K_{\nu-1}(w) + K_{\nu+1}(w) = -2K'_\nu(w) \quad (7.21)$$

conseguimos escrever (7.19) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_{gluons} &= (k_B T)^4 z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{K_1[(n+1)z]}{(n+1)z} \right\} = \\ &= (k_B T)^4 z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{K_2[(n+1)z]}{z} \right\} = \\ &= (k_B T)^4 z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left\{ 3K_2[(n+1)z] + (n+1)z K_1[(n+1)z] \right\} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Vamos tomar o limite $\mu_G \rightarrow 0$ na equação acima, o que equivale a fazer $z \rightarrow 0$. Precisamos assim da forma assintótica (para pequenos argumentos) das funções de Bessel modificadas:

$$\lim_{w \rightarrow 0} [K_\nu(w)] = \frac{(\nu-1)! 2^{\nu-1}}{w^\nu} \quad (7.23)$$

e então (7.22) tem seu limite calculado como

$$I_{gluons} = (k_B T)^4 \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2}{(n+1)^2} \left\{ 3K_2[(n+1)z] + (n+1)z K_1[(n+1)z] \right\}$$

que, com o uso de (7.23) se transforma em:

$$I_{gluons} = (k_B T)^4 \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{6}{(n+1)^4} + \frac{z^2}{(n+1)^2} \right\} = (k_B T)^4 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4}$$

Finalmente encontramos:

$$I_{gluons} = (K_B T)^4 6 \zeta(4) = (k_B T)^4 6 \frac{\pi^4}{90} = (k_B T)^4 \frac{\pi^4}{15} \quad (7.24)$$

Agora podemos escrever as formas finais de (7.7), (7.10) e (7.11) usando (7.12), (7.13) e (7.24). Os resultados são:

$$\rho_B = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 [n_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{k}}] \quad (7.25)$$

e

$$3(p + \mathcal{B}) = \varepsilon - \mathcal{B} = \frac{8\pi^2}{15} (k_B T)^4 + \frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^3 [n_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}}] \quad (7.26)$$

que nos fornece a equação de estado do QGP em todas as densidades bariônicas e temperaturas

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{4}{3}\mathcal{B} \quad (7.27)$$

7.3 Equação de onda no QGP

7.3.1 Temperatura nula

No interior de uma estrela a temperatura é nula e a densidade bariônica é apreciável. Vamos estudar o comportamento de uma perturbação na densidade bariônica supondo que no interior desta estrela exista uma fase de plasma de quarks e gluons. Para obtermos uma equação de propagação dessa perturbação podemos combinar as versões relativísticas da equação de Euler e da conservação da densidade bariônica.

Nesta situação de temperatura nula ($T = 0$) a função de distribuição de quarks torna-se a função degrau com $\mu = 3k_F$ e então temos (7.26) na forma:

$$3(p + \mathcal{B}) = \varepsilon - \mathcal{B} = \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{k^4}{4} \Big|_0^{k_F} \right)$$

e assim

$$3(p + \mathcal{B}) = \varepsilon - \mathcal{B} = \frac{3}{2\pi^2} k_F^4 \quad (7.28)$$

Usando (7.4) encontramos:

$$3(p + \mathcal{B}) = \varepsilon - \mathcal{B} = \left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{4/3}$$

e assim

$$\varepsilon(\rho_B) = \left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{4/3} + \mathcal{B} \quad (7.29)$$

Substituindo (7.29) em (7.27) encontramos:

$$p(\rho_B) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{4/3} - \mathcal{B} \quad (7.30)$$

de tal forma que podemos escrever a soma da densidade de energia e pressão como:

$$\varepsilon + p = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{4/3} \quad (7.31)$$

De (7.27) temos que:

$$\vec{\nabla} p = \frac{1}{3} \vec{\nabla} \varepsilon \quad \text{e também} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (7.32)$$

e com uso de (7.29) temos:

$$\vec{\nabla} p = \frac{4}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{1/3} \vec{\nabla} \rho_B \quad (7.33)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{4}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{1/3} \frac{\partial \rho_B}{\partial t} \quad (7.34)$$

Sustituindo (7.31), (7.33) e (7.34) em (3.17):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{(\varepsilon + p)\gamma^2} \left(\vec{\nabla} p + \vec{v} \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= (v^2 - 1) \left[\frac{4}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{4/3} \right]^{-1} \times \\ &\times \left[\frac{4}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{1/3} \vec{\nabla} \rho_B + \vec{v} \frac{4}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} \pi^{2/3} \rho_B^{1/3} \frac{\partial \rho_B}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\rho_B \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \frac{(v^2 - 1)}{3} \left[\vec{\nabla} \rho_B + \vec{v} \frac{\partial \rho_B}{\partial t} \right] \quad (7.35)$$

que é a versão relativística da equação de Euler para o QGP a $T = 0$.

Já a equação da continuidade é dada por (3.20):

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \gamma^2 v \rho_B \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v \right) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_B \vec{v}) = 0 \quad (7.36)$$

Vamos considerar (7.35) e (7.36) em uma dimensão e fazer as expansões (5.39) e (5.40) desprezando os termos proporcionais a σ^n para $n \geq 3$. Novamente, como no capítulo 5, (7.35) e (7.36) podem ser escritas como séries do tipo:

$$\sigma \left\{ \dots \right\} + \sigma^2 \left\{ \dots \right\} = 0$$

Como σ é um parâmetro de expansão pequeno, resolvemos o sistema fazendo:

$$\left\{ \dots \right\} = 0$$

e dos termos proporcionais a σ temos os resultados: $c_s^2 = 1/3$ e $\rho_1 = v_1$, que usados nos termos proporcionais a σ^2 no espaço $\xi - \tau$ resulta em:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \frac{2}{3} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = 0 \quad (7.37)$$

Escrevendo (7.37) no espaço $x - t$ encontramos:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \frac{2}{3} c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} = 0 \quad (7.38)$$

lembrando que $\hat{\rho}_1 \equiv \sigma \rho_1$ é a pequena perturbação na densidade bariônica.

A equação (7.38) é a equação de quebra de onda que a perturbação na densidade bariônica $\hat{\rho}_1$ (em temperatura nula no QGP) deve satisfazer.

7.3.2 Temperatura Finita

O desenvolvimento que se segue tem como perspectiva a aplicação ao estudo da propagação de perturbações num gás de quarks e gluons desconfiados. Acreditamos que um sistema deste tipo seja formado em colisões de ions pesados, na região central de rapidez. Nesta região, observamos experimentalmente que $\rho_B = 0$. Vamos estudar a propagação de perturbações na densidade de energia ε .

Como $\rho_B = 0$, o potencial bariquímico é zero ($\mu = 0$) e assim as funções de distribuição (7.8) e (7.9) são iguais:

$$n_{\vec{k}} = \bar{n}_{\vec{k}} = \frac{1}{1 + e^{k/k_B T}}$$

e então (7.26) assume a forma

$$3(p + \mathcal{B}) = \varepsilon - \mathcal{B} = \frac{8\pi^2}{15} (k_B T)^4 + \frac{12}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{[1 + e^{k/k_B T}]} \quad (7.39)$$

A integral sobre o momento dos quarks (I_{quarks}):

$$I_{quarks} = \int_0^\infty dk \frac{k^3}{[1 + e^{k/k_B T}]} \quad (7.40)$$

em (7.39) pode ser calculada analiticamente usando o fato de que $\mu = 0$:

$$I_{quarks} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty dk \frac{k^2 \sqrt{k^2 + \mu^2}}{[1 + e^{\sqrt{k^2 + \mu^2}/k_B T}]} \quad (7.41)$$

Usando $z = \mu/k_B T$, $x = k/\mu$ e a expansão $(1 - e^{-z\sqrt{x^2+1}})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)z\sqrt{x^2+1}}$ podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} I_{quarks} &= (k_B T)^4 \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} dx x^2 \sqrt{1+x^2} e^{-(n+1)z\sqrt{1+x^2}} \right\} = \\ &= (k_B T)^4 \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} e^{-(n+1)z\sqrt{1+x^2}} \right\} \end{aligned} \quad (7.42)$$

Fazendo a transformação de variáveis $x = \sinh(y)$ e usando (7.18), (7.20) e (7.21) temos:

$$\begin{aligned} I_{quarks} &= \\ &= (k_B T)^4 \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \left\{ 3K_2[(n+1)z] + (n+1)z K_1[(n+1)z] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Usando agora a forma assintótica de K_ν dada por (7.23), encontramos:

$$\begin{aligned} I_{quarks} &= (k_B T)^4 \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \left[\frac{6}{(n+1)^2 z^2} + 1 \right] \right\} = \\ &= (k_B T)^4 6 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(n+1)^4} \right] = (k_B T)^4 \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{15} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Finalmente, substituindo (7.44) em (7.39) encontramos:

$$3(p + \mathcal{B}) = \varepsilon - \mathcal{B} = \frac{37}{30} \pi^2 T^4 \quad (7.45)$$

em unidades naturais, onde $k_B = 1$.

A equação de onda que descreve uma perturbação em ε é o resultado da combinação da versão relativística da equação de Euler dada por (3.17) com a equação de conservação da densidade de entropia s .

Esta última equação é obtida a partir de (3.12):

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

que, projetada na direção de u^ν e com o auxílio de (3.4) e (3.7) se reduz a:

$$(\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \varepsilon = 0$$

Usando (A.17) e (A.19) quando $\rho_B = 0$ ($d\rho_B = 0$) encontramos:

$$Ts(\partial_\mu u^\mu) + Tu^\mu(\partial_\mu s) = 0$$

ou seja:

$$\partial_\nu(su^\nu) = 0 \quad (7.46)$$

que, com o uso de (3.5) e (3.6) se transforma em:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \gamma^2 v s \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v \right) + \vec{\nabla} \cdot (s\vec{v}) = 0 \quad (7.47)$$

em unidades naturais ($c = 1$).

De (A.33) e (A.34) temos

$$s = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (7.48)$$

que, com o uso de (7.45), leva a:

$$s = \frac{\partial}{\partial T} \left(-\mathcal{B} + \frac{37}{90} \pi^2 T^4 \right) = 4 \frac{37}{90} \pi^2 T^3 \quad (7.49)$$

O parâmetro \mathcal{B} , a “constante da sacola” (“bag constant”) pode ser obtido fenomenologicamente, através da análise da espectroscopia hadrônica, ou de cálculos na rede. No que se segue vamos, por conveniência, trocar \mathcal{B} por outro parâmetro T_c , a temperatura crítica de transição de fase quark-hádron. T_c é obtida a partir de (7.45) lembrando que na transição de fase temos $p = 0$. Quando $p = 0$, (7.45) se reduz a:

$$\mathcal{B} = \frac{37}{90} \pi^2 (T_c)^4 \quad (7.50)$$

Reescrevendo (7.45) como:

$$T = \left[\frac{30}{37\pi^2} (\varepsilon - \mathcal{B}) \right]^{1/4} \quad (7.51)$$

e inserindo a equação acima em (7.49) encontramos

$$s = s(\varepsilon) = 4 \frac{37}{90} \pi^2 \left[\frac{30}{37\pi^2} (\varepsilon - \mathcal{B}) \right]^{3/4}$$

Numa notação mais compacta:

$$s(\varepsilon) = A(\varepsilon - \mathcal{B})^{3/4} \quad (7.52)$$

onde

$$A \equiv 4 \frac{37}{90} \pi^2 \left[\frac{30}{37\pi^2} \right]^{3/4} \quad (7.53)$$

Substituindo então (7.52) em (7.47) no caso unidimensional encontramos:

$$(1 - v^2) \left[\frac{3}{4(\varepsilon - \mathcal{B})} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{3v}{4(\varepsilon - \mathcal{B})} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + v \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.54)$$

Notamos que a constante A foi simplificada e o termo $(\varepsilon - \mathcal{B})$ pode ainda com o auxílio de (7.45) ser reescrito como:

$$(1 - v^2) \left[\left(\frac{90}{148\pi^2 T^4} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{90v}{148\pi^2 T^4} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + v \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.55)$$

Esta é a equação da continuidade para s com dependência na temperatura. De (7.45) temos que

$$\varepsilon + p = \frac{148}{90} \pi^2 T^4 \quad (7.56)$$

Substituindo então (7.32) e (7.56) em (3.17) em uma dimensão encontramos:

$$\frac{148}{30} \pi^2 T^4 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = (v^2 - 1) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) \quad (7.57)$$

que é a equação de Euler dependente da temperatura.

Vamos agora reescrever (7.55) e (7.57) nas variáveis adimensionais

$$\hat{v} = \frac{v}{c_s} \quad (7.58)$$

e

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (7.59)$$

com c_s a velocidade do som ($c_s^2 = 1/3$) e ε_0 a densidade de energia de referência. Em seguida essas equações são passadas para o espaço $\xi - \tau$, com o uso de (5.30), (5.31) e expandidas através de

$$\hat{v} = \sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots \quad (7.60)$$

e

$$\hat{\varepsilon} = 1 + \sigma\varepsilon_1 + \sigma^2\varepsilon_2 + \dots \quad (7.61)$$

Como antes, vamos desprezar os termos proporcionais a σ^n para $n \geq 3$. Como no capítulo 5 e na situação do QGP a temperatura nula encontramos:

$$\sigma \left\{ \dots \right\} + \sigma^2 \left\{ \dots \right\} = 0$$

para (7.55) e (7.57) após todos estes cálculos mencionados. De novo resolvemos o sistema fazendo:

$$\left\{ \dots \right\} = 0$$

e dos termos proporcionais a σ obtemos:

$$v_1 = \frac{90\varepsilon_0}{148\pi^2 T^4} \varepsilon_1 \quad (7.62)$$

Esta igualdade é substituída nos termos proporcionais a σ^2 . Igualando a zero os coeficientes dos termos proporcionais a σ^2 chegamos a uma equação diferencial que no espaço $x - t$ é:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \left(\frac{90\varepsilon_0}{148\pi^2 T^4} \right) \frac{2}{3} c_s \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = 0 \quad (7.63)$$

onde $\hat{\varepsilon}_1 \equiv \sigma\varepsilon_1$ é a pequena perturbação na densidade de energia. Substituindo (7.50) em (7.45) encontramos:

$$\varepsilon = \frac{37}{30} \pi^2 \left(T^4 + \frac{T_c^4}{3} \right)$$

Definimos a densidade de energia de referência ε_0 como sendo aquela correspondente à temperatura de referência T_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{37}{30} \pi^2 \left(T_0^4 + \frac{T_c^4}{3} \right) \quad (7.64)$$

Sobre ε_0 ocorre a perturbação $\hat{\varepsilon}_1$. Substituindo então (7.64) em (7.63) temos:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T_0} \right)^4 \right] \frac{c_s}{2} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = 0 \quad (7.65)$$

Quando $T_0 = T_c$ (7.65) se reduz a:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \frac{2}{3} c_s \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = 0 \quad (7.66)$$

7.4 Análise numérica

7.4.1 Condição inicial

As equações de onda para estudo numérico são dadas por (7.38) em temperatura nula e (7.65) em temperatura finita e ambas são do tipo

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_s \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha f \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (7.67)$$

com

$$\alpha = \frac{2}{3}c_s \quad \text{e} \quad f = \hat{\rho}_1 \quad \text{para temperatura nula}$$

e

$$\alpha = \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T_0} \right)^4 \right] \frac{c_s}{2} \quad \text{e} \quad f = \hat{\varepsilon}_1 \quad \text{para} \quad T_0 \neq 0 \text{ MeV}$$

onde T_0 é a temperatura finita que escolhemos para estudo do comportamento da onda com a temperatura. Ela define também a densidade de referência ε_0 sobre a qual ocorre a perturbação $\hat{\varepsilon}_1$.

A equação (7.67) é a equação de quebra de onda conforme já vimos ao longo deste trabalho. Como condição inicial para o estudo de possível formação de choque e conseqüente quebra da onda utilizamos o sóliton:

$$f(x, t_0) = A \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{\lambda} (x - ut_0) \right] \quad (7.68)$$

com A sendo sua amplitude, λ sua largura, u sua velocidade e t_0 o instante inicial. Este perfil representa o pulso inicial e é proveniente de nosso estudo da KdV, dada por (7.67) suplementada com um termo contendo a terceira derivada espacial de f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_s \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha f \frac{\partial f}{\partial x} + D \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \quad (7.69)$$

Sua solução analítica exata já vista ao longo deste trabalho é:

$$f(x, t) = \frac{3(u - c_s)}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{(u - c_s)}{4D}} (x - ut) \right] \quad (7.70)$$

com

$$\text{amplitude} = \frac{3(u - c_s)}{\alpha}$$

e

$$\text{largura} = \sqrt{\frac{4D}{(u - c_s)}}$$

de onde notamos as características do sóliton:

$$\text{amplitude} \sim \text{velocidade}$$

e

$$\text{largura} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{velocidade}}}$$

Queremos que nosso pulso inicial seja localizado, isto é, tenha uma largura compacta em relação às dimensões nucleares, então escolhemos:

$$D = \frac{l(u - c_s)}{4} \quad (7.71)$$

de maneira que para termos $\lambda = 1 \text{ fm}$ fazemos o parâmetro arbitrário $l = 1$. Como l é um fator de alteração da largura, podemos também estudar o que ocorre quando temos $\lambda < 1 \text{ fm}$. Já a amplitude será sempre menor do que 1 pois seja ela uma perturbação $\hat{\rho}_1$ na densidade bariônica dada por:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho_B}{\rho_0} = 1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots = 1 + \hat{\rho}_1 + \dots$$

ou uma perturbação ε_1 na densidade de energia dada por:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \sigma\varepsilon_1 + \sigma^2\varepsilon_2 + \dots = 1 + \hat{\varepsilon}_1 + \dots$$

Devemos manter coerência com estas expansões usadas na dedução de nossas equações de onda e também considerar que a amplitude também contribui para a localização do pulso com relação às dimensões nucleares.

Podemos manter fixa a largura do sóliton e iremos variar de forma independente sua amplitude. Outra possibilidade é mantermos fixa a amplitude do sóliton inicial e diminuir sua largura através de l . Mais detalhes a seguir.

7.4.2 Temperatura nula

A equação de onda é dada por (7.38):

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \frac{2}{3} c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} = 0 \quad (7.72)$$

e sua condição inicial do tipo (7.70) considerando (7.71) com $l = 1$ ($\lambda = 1 \text{ fm}$) é:

$$\hat{\rho}_1(x, t_0) = \frac{9(u - c_s)}{2c_s} \operatorname{sech}^2(x - ut_0) \quad (7.73)$$

onde escolhemos o tempo inicial $t_0 = 0 \text{ fm}$, usamos $c_s^2 = 1/3$, (7.71) e $\alpha = \frac{2}{3}c_s$.

Já no caso de variação da largura, temos (7.70) considerando (7.71) com $l \neq 1$ e obtemos

$$\text{largura} = \sqrt{l}$$

então:

$$\hat{\rho}_1(x, t_0) = \frac{9(u - c_s)}{2c_s} \operatorname{sech}^2\left[\frac{(x - ut_0)}{\sqrt{l}}\right] \quad (7.74)$$

Qualquer alteração da amplitude se dá por um fator multiplicativo em (7.73) ou (7.74).

A seguir apresentamos as soluções numéricas em alguns casos de interesse.

a) Usando (7.73) como condição inicial de (7.72) temos as curvas conforme Figura 7.1 .

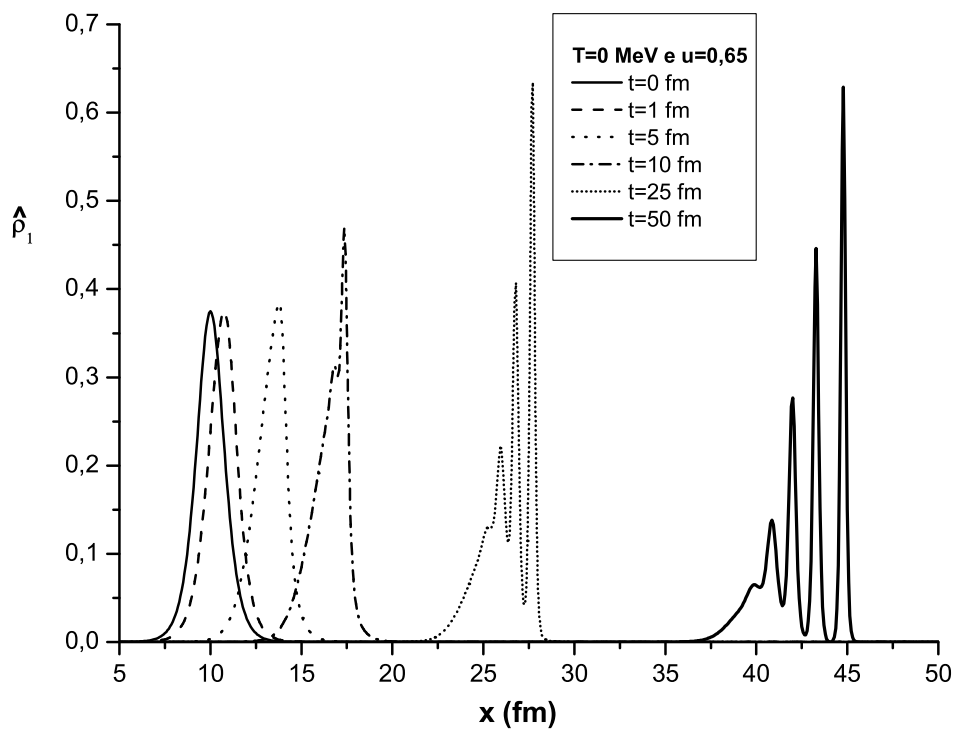


Figura 7.1: Pulso com $u > c_s$.

Em torno de $t = 10$ fm já observamos a quebra da onda e conseqüentemente sua dispersão.

b) Usando (7.73) multiplicada por 10 como condição inicial de (7.72) obtemos agora as curvas conforme Figura 7.2 .

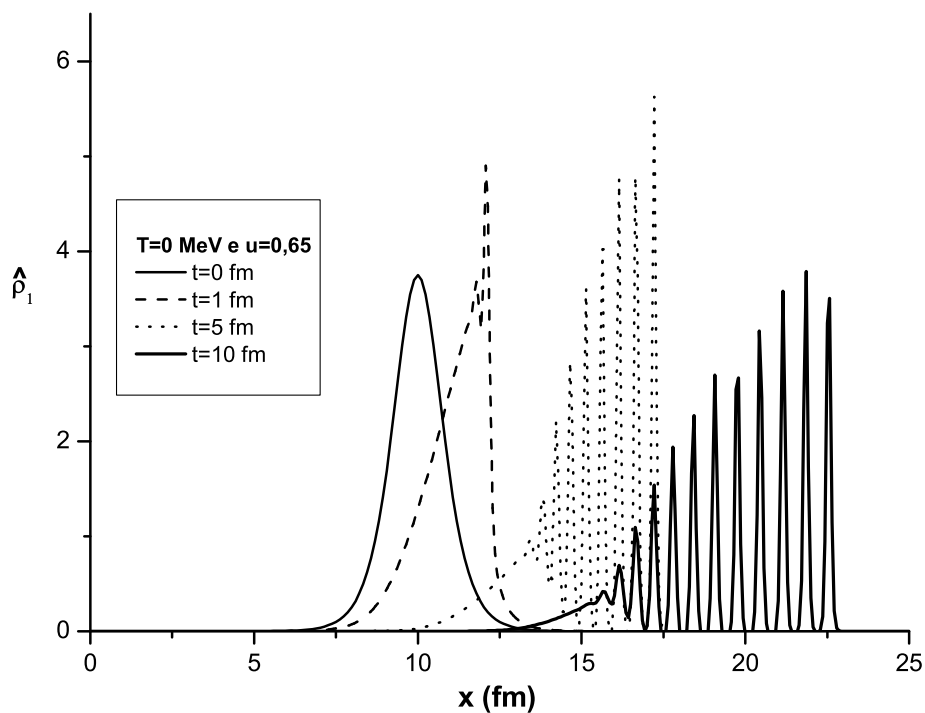


Figura 7.2: Estudo do efeito de quebra e dispersão com amplitude maior.

Em torno de $t = 1$ fm já observamos a quebra da onda e sua dispersão, que ocorre bem antes do que no caso mostrado na Figura 7.1 .

c) Usando novamente (7.73) como condição inicial de (7.72) mas agora mudando o parâmetro u temos a Figura 7.3 .

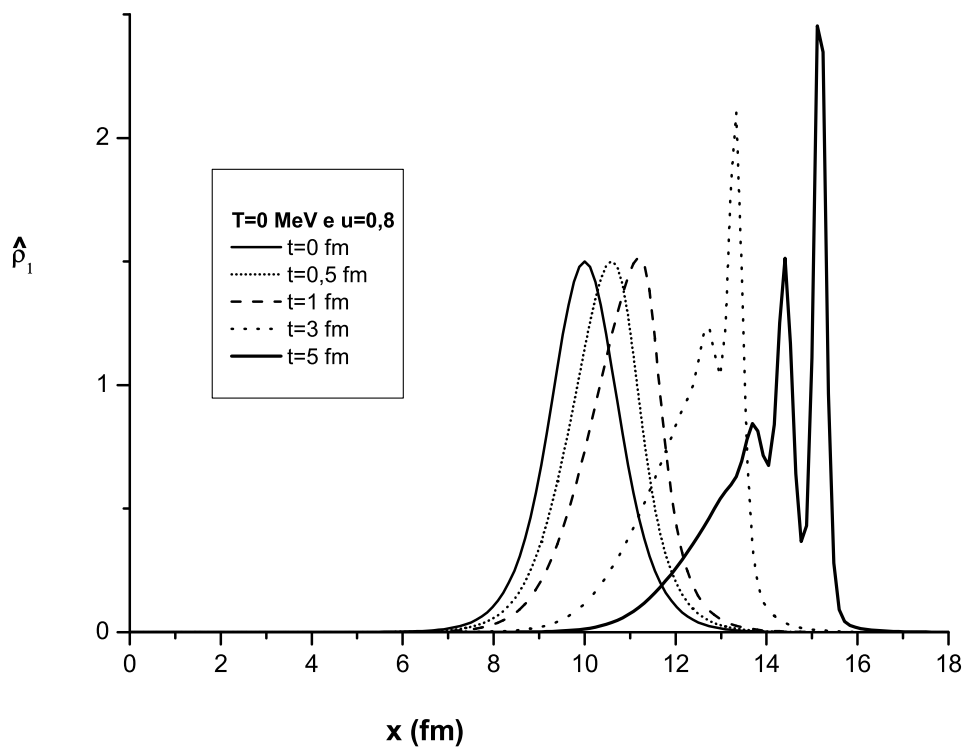


Figura 7.3: Mudança do valor de u .

A quebra da onda ocorre antes com relação às Figuras 7.1 e 7.2 pois agora $u = 0,8 > 0,65 > c_s$. Mudar u implica em mudar a amplitude do pulso inicial.

d) Usando (7.73) como condição inicial de (7.72), mas agora com $u = 0,601$, ou seja, u bem próximo de c_s encontramos as curvas apresentadas na Figura 7.4 abaixo.

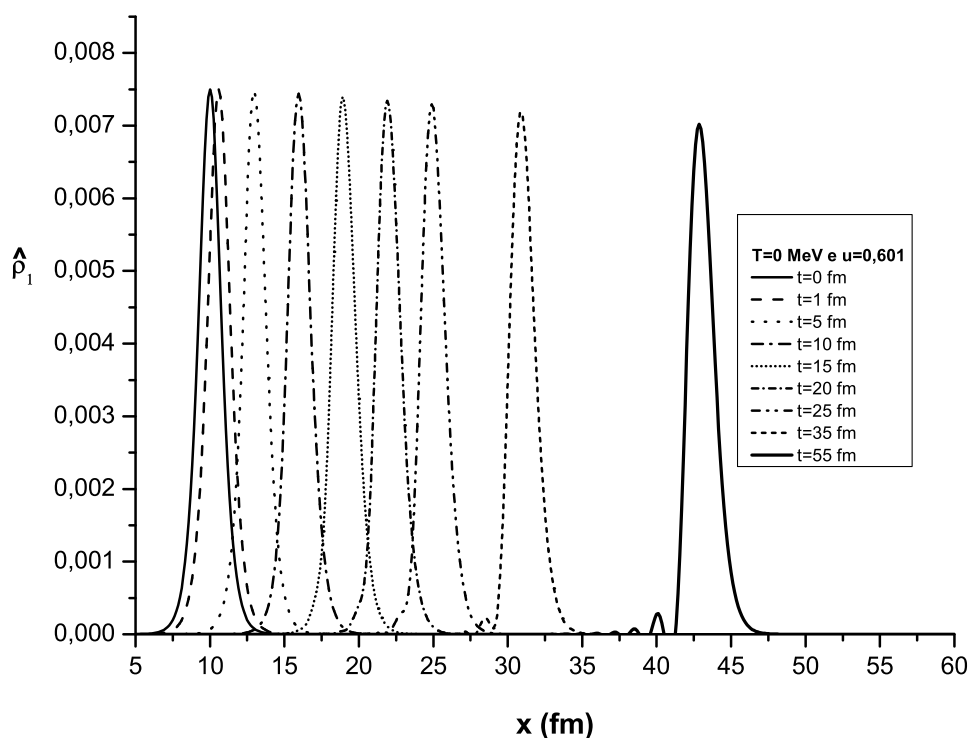


Figura 7.4: Pulso inicial com parâmetro $u - c_s$ pequeno.

Na figura acima, o pulso é mais estável e sua quebra seguida de dispersão ocorre mais tarde em relação aos outros casos. Próximo de $t = 25$ fm já é possível notar a formação da frente de onda (choque) e depois a quebra seguida de dispersão em torno de $t = 35$ fm. Quanto mais próximo u for de c_s o pulso inicial “sobrevive” mais tempo preservando seu perfil inicial pois apesar de estarmos com sua largura inicial fixa em 1 fm, $u - c_s$ pequeno resulta em uma amplitude pequena, favorecendo a localização do pulso e a preservação de dessa forma.

e) Usando (7.73) multiplicada por 10 como condição inicial de (7.72), encontramos as curvas apresentas na Figura 7.5 abaixo.

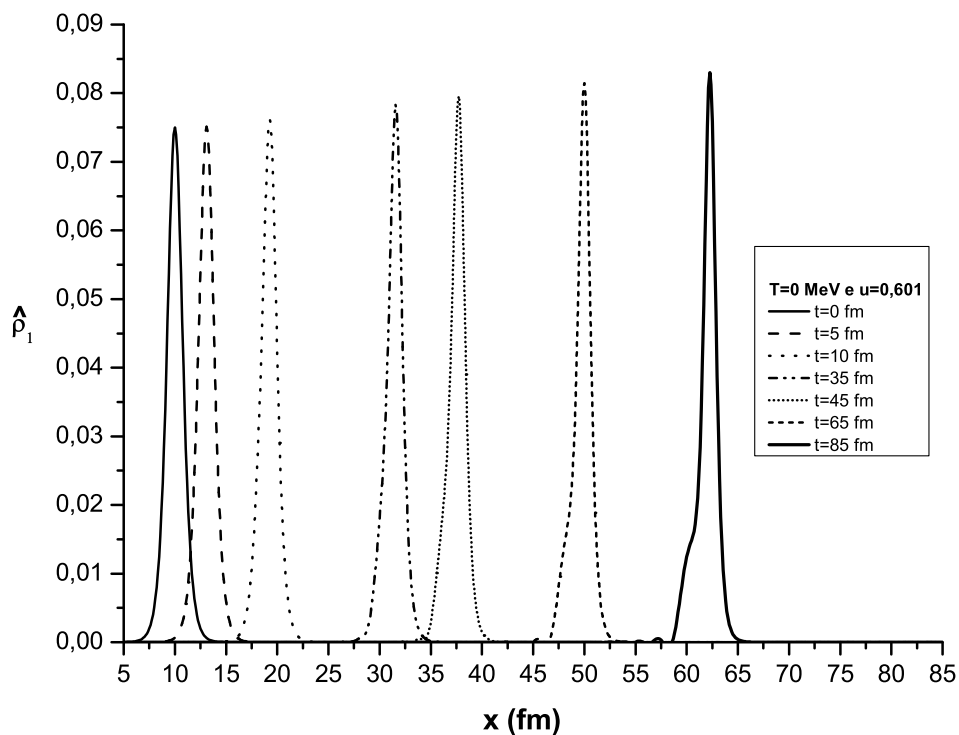


Figura 7.5: Novamente parâmetro $u - c_s$ pequeno.

Com o aumento da amplitude por um fator 10 observamos que o pulso se propaga por aproximadamente 40 fm com sua forma intacta. Neste caso o efeito de preservação do pulso é melhor observado. Em $t = 65$ fm já estamos observando a quebra e dispersão.

f) Usando (7.73) mas agora multiplicada por 20 como condição inicial de (7.72), encontramos as curvas apresentadas na Figura 7.6 abaixo.

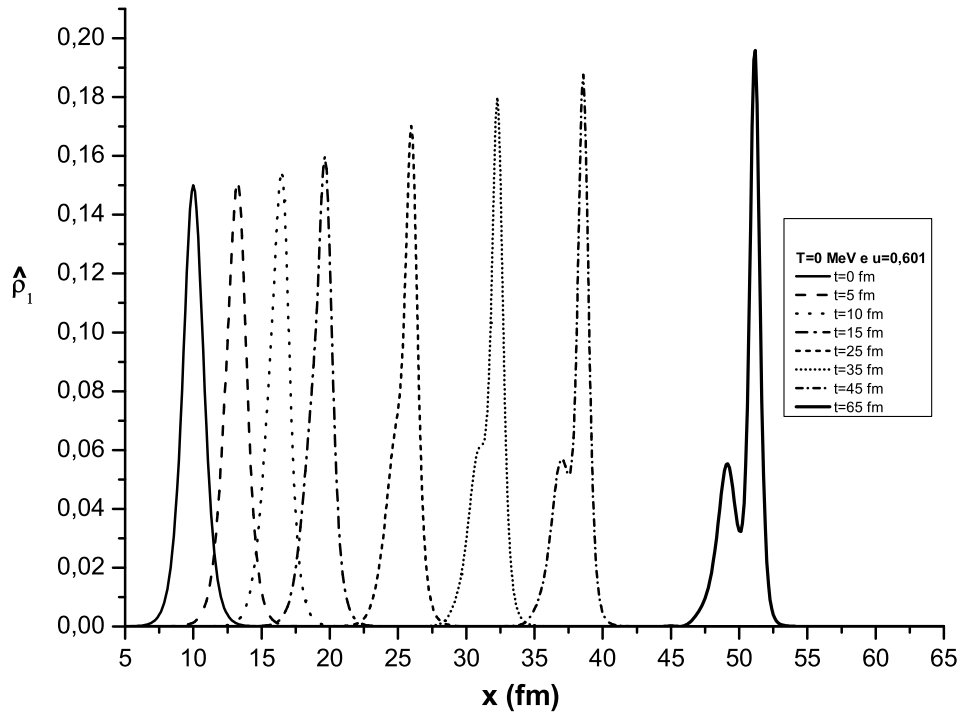


Figura 7.6: Amplitude maior com parâmetro $u - c_s$ pequeno.

Com o aumento da amplitude por um fator 20 (o dobro da Figura 7.5) observamos que o pulso se propaga por aproximadamente 15 fm com sua forma intacta. Com relação à Figura 7.5 antecipamos o efeito de quebra e dispersão.

Dados os coeficientes fixos da equação (7.72) podemos dizer que pela escolha de parâmetros na condição inicial definida por (7.73), temos a figura 7.5 simulando melhor o efeito solitônico, pois o pulso percorre uma grande trajetória.

g) Usamos agora (7.74) como a condição inicial de (7.72), com $l = 0,25$ para termos uma largura de $0,5 \text{ fm}$, ou seja, metade do que utilizamos até a Figura anterior. Sendo assim, encontramos as curvas apresentadas na Figura 7.7 abaixo.

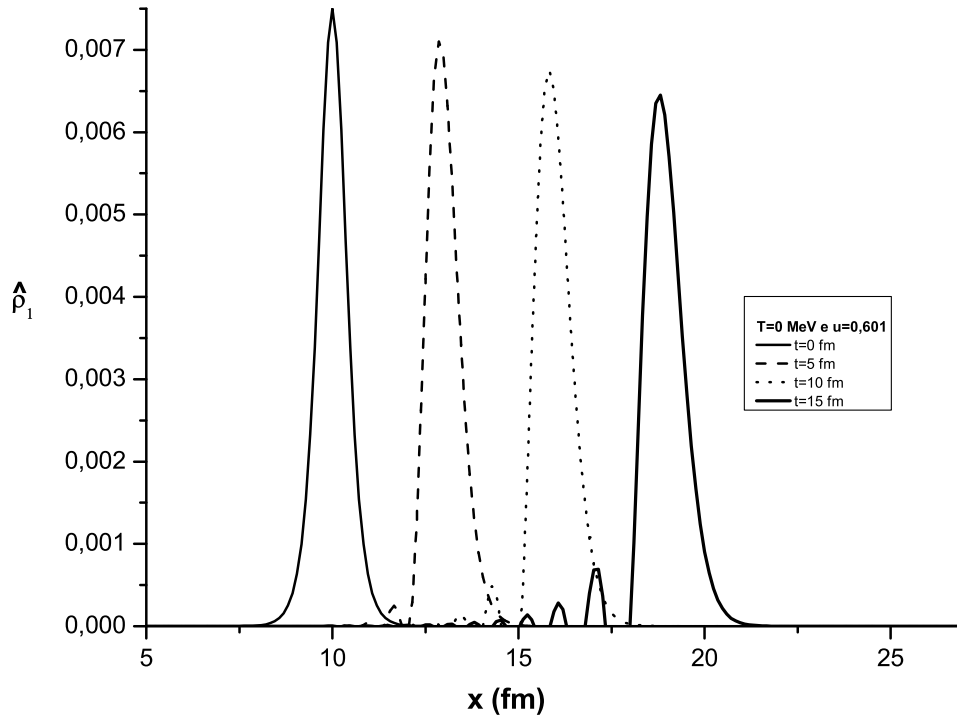


Figura 7.7: Solução largura reduzida.

Comparando a Figura 7.7 com a Figura 7.4 observamos que a quebra seguida de dispersão ocorre antes, temos o efeito solitônico simulado apenas por aproximadamente 10 fm , que é a distância percorrida pelo pulso sem deformação apreciável.

h) Usamos agora (7.74) multiplicada por 10 como condição inicial de (7.72), com $l = 0,25$ ($\lambda = 0,5 \text{ fm}$). Sendo assim, encontramos as curvas apresentas na Figura 7.8 abaixo.

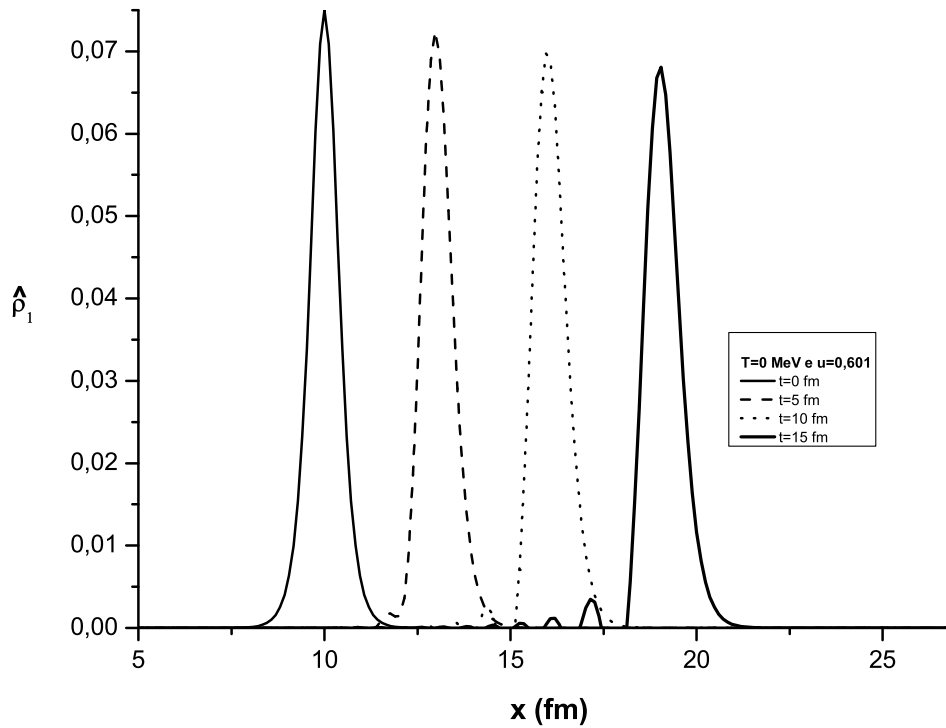


Figura 7.8: Solução para largura reduzida e amplitude inicial maior.

Com relação à Figura 7.5 observamos que a quebra seguida de dispersão ocorre antes, temos o efeito solitônico agora simulado aproximadamente por 10 fm , que é o percorrido pelo pulso sem deformação apreciável. Mas com relação à figura anterior notamos que a quebra e dispersão já é menos intensa, ou seja, quando diminuimos a largura é necessário alterar a amplitude do pulso inicial para que ele se propague por mais tempo sem se deformar.

i) Usando novamente (7.74) agora multiplicada por 30 como condição inicial de (7.72), ainda com $l = 0,25$ ($\lambda = 0,5 \text{ fm}$). Sendo assim, encontramos as curvas apresentas na Figura 7.9 abaixo.

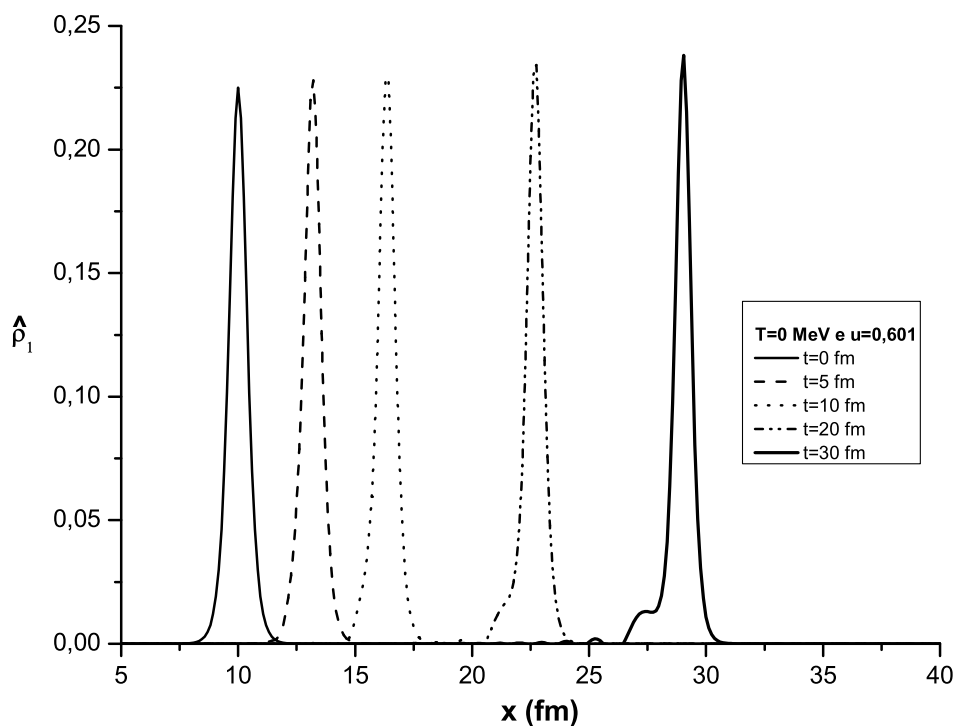


Figura 7.9: Solução com largura reduzida e amplitude inicial aumentada em relação às figuras anteriores.

Com relação à Figura anterior notamos que a quebra e dispersão é menos intensa. Multiplicando a amplitude inicial por 30 temos um pulso se propagando por mais tempo do que nas figuras anteriores.

j) Usando novamente (7.74) agora multiplicada por 35 como condição inicial de (7.72), ainda com $l = 0,25$ ($\lambda = 0,5 \text{ fm}$). Sendo assim, encontramos as curvas apresentas na Figura 7.10 abaixo.

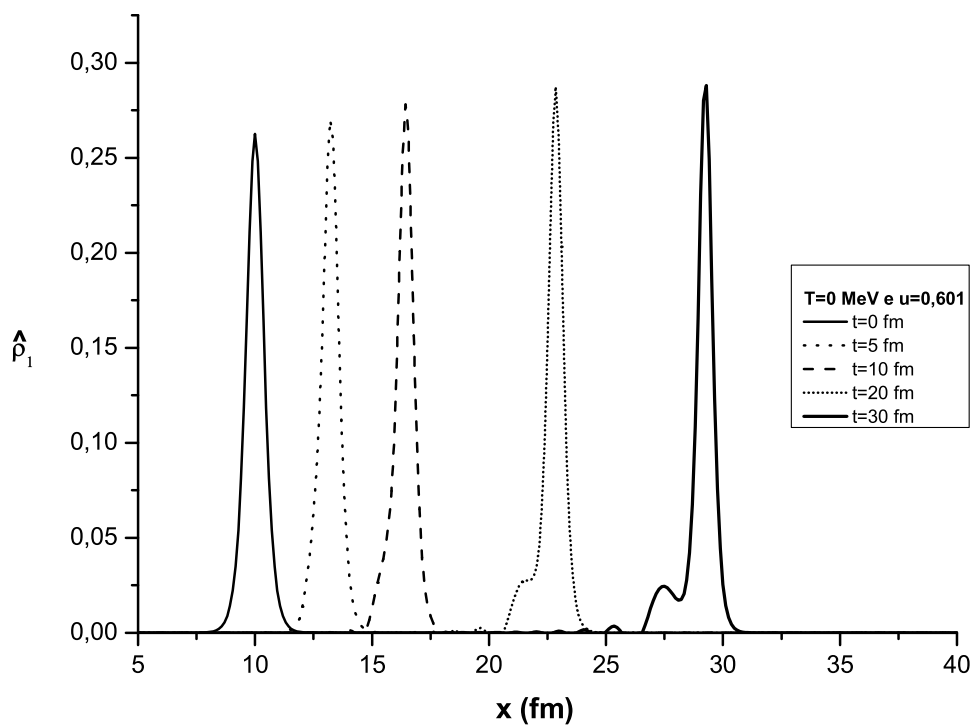


Figura 7.10: O mesmo que nas figuras anteriores, mas para um pulso inicial com amplitude maior.

Com relação à Figura anterior, notamos que a mudança é muito pequena.

k) Usamos agora (7.74) multiplicada por 35 como condição inicial de (7.72), mas com $l = 0,16$ ($\lambda = 0,4 \text{ fm}$). Encontramos as curvas apresentadas na Figura 7.11.

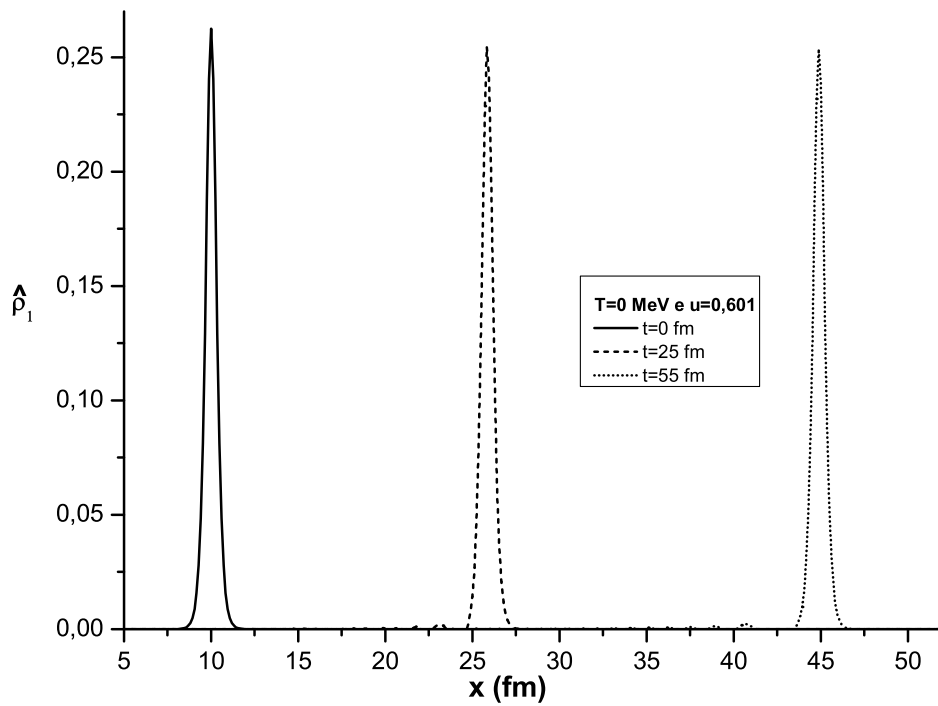


Figura 7.11: O mesmo que a figura anterior para uma largura menor do pulso inicial.

Nesta figura observamos que a quebra praticamente não ocorre!

l) A Figura 7.12 é uma continuação da Figura 7.11 com os mesmos parâmetros mas para distâncias bem maiores.

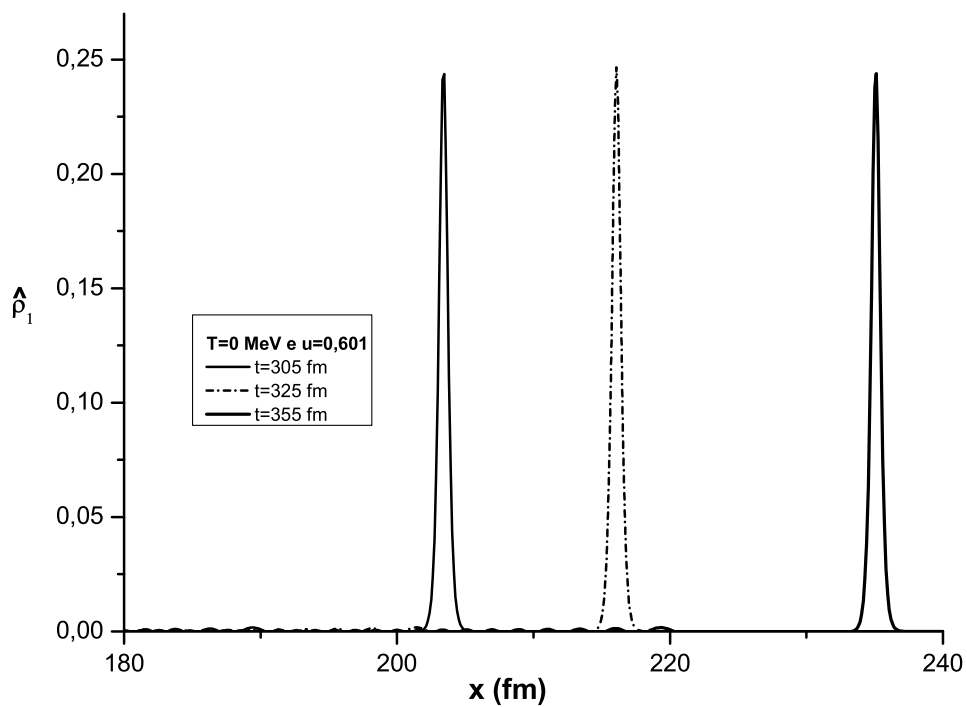


Figura 7.12: Continuação da Figura 7.11.

Notamos que em $t = 355$ fm estamos praticamente reproduzindo o pulso inicial. A quebra nesse caso é desprezível. Esta é uma situação na qual o pulso simula um sóliton.

7.4.3 Temperatura finita

A equação de onda é dada por (7.65):

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T_0} \right)^4 \right] \frac{c_s}{2} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = 0 \quad (7.75)$$

e sua condição inicial do tipo (7.70) é:

$$\hat{\varepsilon}_1(x, t_0) = \frac{6(u - c_s)}{c_s} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T_0} \right)^4 \right]^{-1} \text{sech}^2(x - ut_0) \quad (7.76)$$

onde novamente escolhemos o tempo inicial $t_0 = 0 \text{ fm}$, $c_s^2 = 1/3$, (7.71) e agora

$$\alpha = \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T_0} \right)^4 \right] \frac{c_s}{2}$$

Como já mencionamos, quando $T_0 = T_c$ temos (7.66):

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \frac{2}{3} c_s \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = 0 \quad (7.77)$$

que é igual a (7.38) bastando trocar $\hat{\rho}_1$ por $\hat{\varepsilon}_1$. Então numericamente nesta situação temos as mesmas Figuras 7.1 a 7.6 com a troca de $\hat{\rho}_1$ por $\hat{\varepsilon}_1$.

No limite em que $T_0 \gg T_c$ temos (7.75) na forma:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} + \frac{c_s}{2} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\partial \hat{\varepsilon}_1}{\partial x} = 0 \quad (7.78)$$

e (7.76) na forma:

$$\hat{\varepsilon}_1(x, t_0) = \frac{6(u - c_s)}{c_s} \text{sech}^2(x - ut_0) \quad (7.79)$$

respectivamente.

Vamos agora iniciar o estudo para $T_0 > T_c$ considerando $\mathcal{B}^{1/4} = 170 \text{ MeV}$ como na referência [87] e que através de (7.50) nos dá $T_c \cong 120 \text{ MeV}$.

Analogamente ao estudo de temperatura nula, podemos usar também uma largura do sóliton inicial diferente de 1 fm por uma variante de (7.79) de acordo com o parâmetro l de escolha de largura, então:

$$\hat{\varepsilon}_1(x, t_0) = \frac{6(u - c_s)}{c_s} \text{sech}^2 \left[\frac{(x - ut_0)}{\sqrt{l}} \right] \quad (7.80)$$

Seguem estudos para algumas escolhas de T_0 .

a) Usando (7.76) como condição inicial de (7.75) com $u = 0,65$ e $T_0 = 150 \text{ MeV}$ temos as curvas conforme Figura 7.13 a seguir.

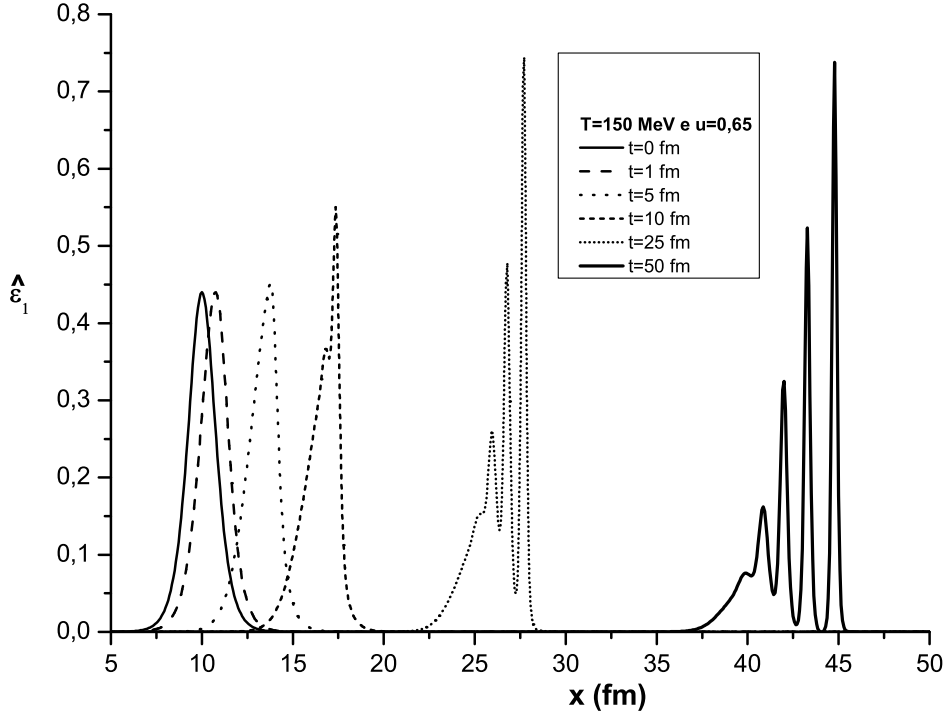


Figura 7.13: Solução de (7.75) com os parâmetros indicados na tabela e condição inicial (7.76).

Com relação à figura 7.1 não notamos diferença quanto ao tempo de ocorrência da quebra de onda, pois, numericamente, o coeficiente

$$\left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T_0} \right)^4 \right] \frac{c_s}{2} \cong 0,34$$

com $T_0 = 150 \text{ MeV}$ da equação diferencial (7.75) é ligeiramente diferente de $\frac{2}{3}c_s \cong 0,4$ que é o coeficiente de (7.72). A diferença está no contexto físico. Agora a perturbação $\hat{\varepsilon}_1$ é na densidade de energia e não $\hat{\rho}_1$ na densidade bariônica.

b) Usando (7.76) como condição inicial de (7.75) com $u = 0,65$ mas agora $T_0 = 300 \text{ MeV}$ temos as curvas da Figura 7.14 .

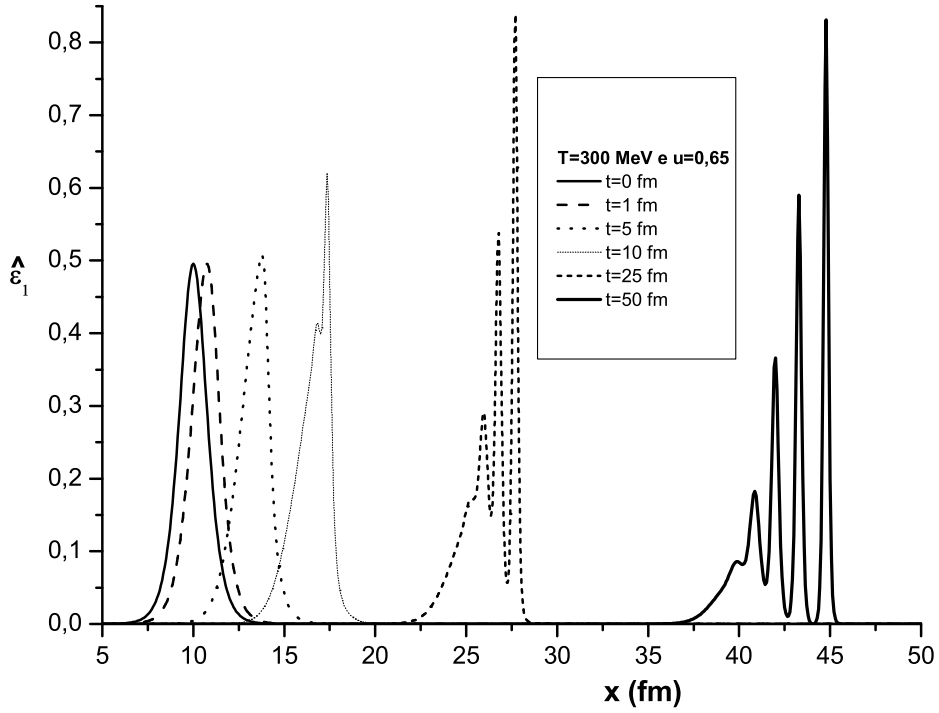


Figura 7.14: O mesmo que a Figura 7.13 para $T_0 = 300 \text{ MeV}$.

Ocorre o mesmo que na Figura 7.13 mas com a amplitude inicial maior e o coeficiente dado agora por $\left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T_0}\right)^4\right] \frac{c_s}{2} \cong 0,3$ para $T_0 = 300 \text{ MeV}$. Já estamos na situação (7.78) com (7.79) onde para $u = 0,65$ a amplitude inicial do soliton é 0,5 .

c) Usando (7.76) como condição inicial de (7.75) com $u = 0,601$ com $T_0 = 300 \text{ MeV}$ temos as curvas conforme Figura 7.15 .

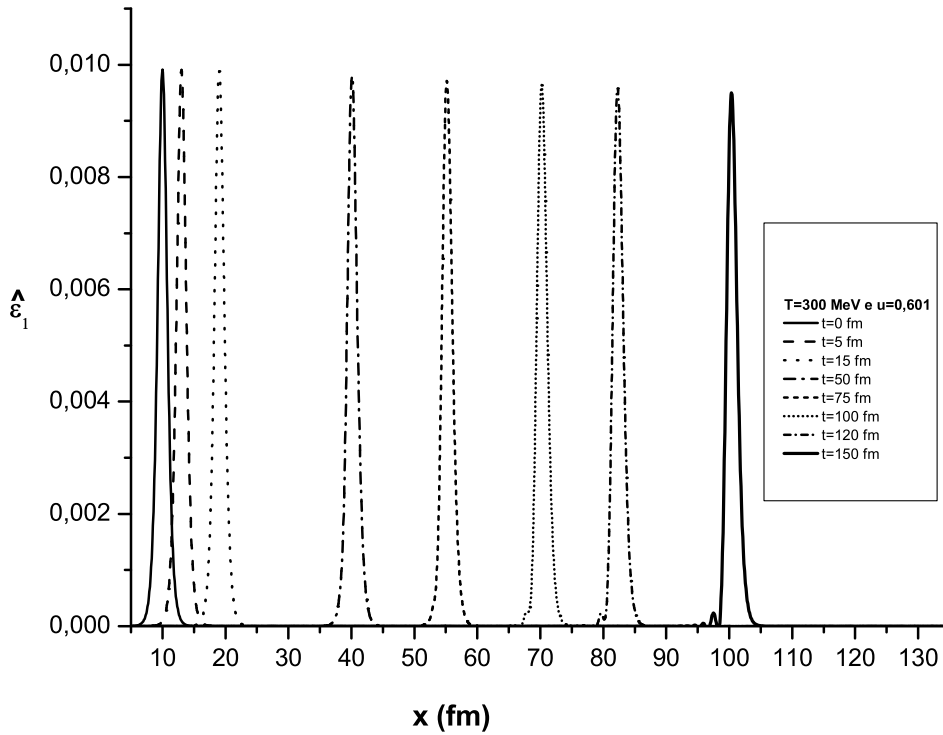


Figura 7.15: O mesmo que a figura anterior, mas com $u - c_s$ menor.

Assim como no caso de temperatura nula na Figura 7.4, quando $u \cong c_s$ temos o pulso inicial preservado por mais tempo com a quebra e dispersão do mesmo ocorrendo mais tarde. Lembrando que estamos na situação (7.78) com (7.79) com um efeito solitônico simulado por aproximadamente 60 fm .

d) Usando (7.76) multiplicada por 10 como condição inicial de (7.75) com $u = 0,601$ com $T_0 = 300 \text{ MeV}$ temos a Figura 7.16 .

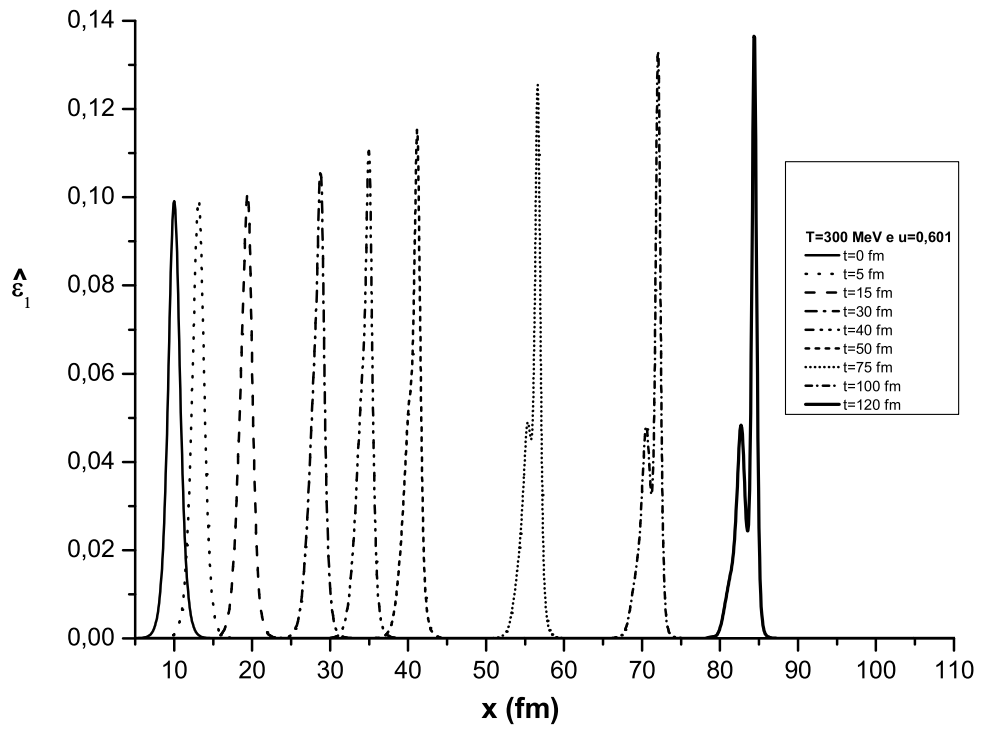


Figura 7.16: O mesmo que a figura anterior mas com a amplitude inicial multiplicada por 10.

Continuando com $u \cong c_s$ temos o pulso inicial com amplitude maior e forma inicial preservada percorrendo aproximadamente 30 fm com a quebra e dispersão da onda ocorrendo antecipadamente com relação à figura 7.15.

e) Usando (7.80) multiplicada por 55 como condição inicial de (7.75) com $u = 0,601$, $T_0 = 300 \text{ MeV}$ e $l = 0,16$ para uma largura de $0,4 \text{ fm}$ temos a Figura 7.17 .

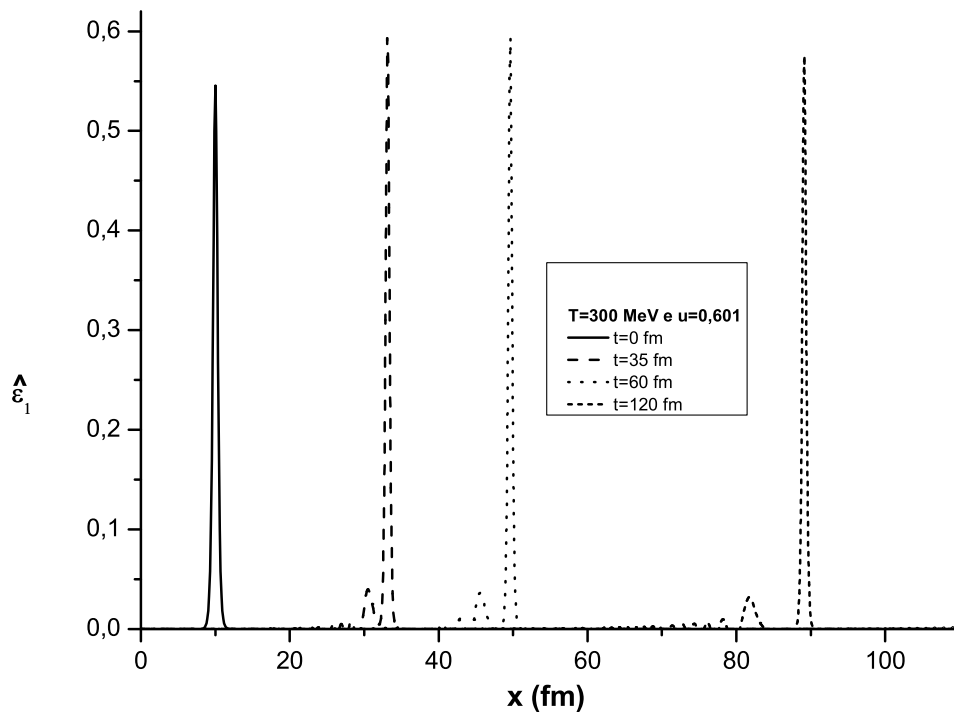


Figura 7.17: O mesmo que nas figuras anteriores mas diminuindo a largura do pulso inicial.

Esta Figura é análoga à Figura 7.11, onde a quebra é pouco apreciável e na próxima figura temos a continuação desta situação.

f) Continuando a Figura anterior, que é (7.80) multiplicada por 55 como condição inicial de (7.75) com $u = 0,601$, $T_0 = 300 \text{ MeV}$ e $l = 0,16$ ($\lambda = 0,4 \text{ fm}$) temos a Figura 7.18 .

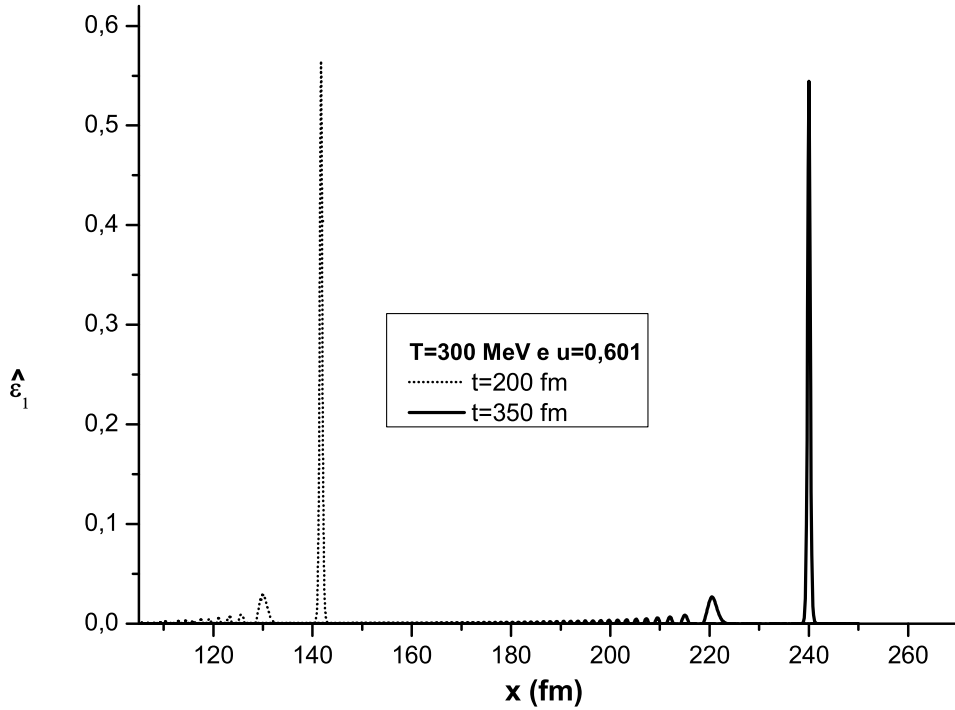


Figura 7.18: Continuação da anterior.

Analogamente ao ocorrido na Figura 7.12, agora observamos que para $t = 350 \text{ fm}$ temos praticamente a condição inicial reproduzida da Figura anterior, apesar da quebra ter ocorrido e uma pequena dispersão ainda existir.

7.4.4 Considerações finais

Utilizamos cálculos exatos de equação de estado para o QGP a fim de estudar efeitos de perturbação em temperatura nula e finita. As equações de onda obtidas foram estudadas numericamente através de um pulso solitônico como condição inicial. Tal pulso inicial foi justificado com base na nossa experiência com a equação de KdV já apresentada neste trabalho.

Neste contexto concluímos que a quebra de onda sempre ocorre em temperatura nula ou finita, pois tal perturbação (na densidade de energia ou densidade bariônica) é quebrada e dispersada pela equação diferencial que define sua evolução. Entretanto, o sóliton inicial demora para quebrar e dispersar com relação às dimensões nucleares, pois de acordo com os gráficos observamos que a propagação do pulso pode atingir $40 fm$ em temperatura nula e $60 fm$ em temperatura finita. Podemos considerar que temos um pulso sobrevivente, ou sóliton, sem termos a equação de KdV, ou seja, estamos simulando a propagação de sóliton com a equação de quebra de onda. O importante também para o efeito de sóliton ser observado neste contexto é seu tamanho compacto em relação ao meio, ou melhor dizendo, sua pequena amplitude e largura igual a $1 fm$.

Conforme já mencionamos, o parâmetro $u = 0,601$, relacionado com a velocidade de propagação do pulso ser próximo à velocidade do som $c_s = 0,6$ no plasma favorece a preservação do efeito solitônico do pulso contribuindo na propagação e amplitude.

Além de tudo isso, constatamos também que reduzindo a largura inicial do sóliton e elevando sua amplitude inicial, apesar da quebra ocorrer, esta não é muito apreciável e na dispersão há um pulso que se propaga praticamente reproduzindo o inicial, ou seja, é uma simulação solitônica também, onde podemos considerar o pulso percorrendo uma grande distância, além de $200 fm$, tanto no caso de temperatura nula, como em temperatura finita. A largura inicial nos dois casos é $\lambda = 0,4 fm$.

Capítulo 8

Conclusões

Das equações da hidrodinâmica relativística, mais especificamente da versão relativística da equação de Euler e da versão relativística da equação da continuidade para a densidade bariônica, usando uma equação de estado proveniente do modelo não-linear de Walecka (QHD), encontramos uma equação de KdV para perturbações na densidade bariônica. Tal equação de KdV foi obtida através de um tratamento ligeiramente diferente ao feito em campo médio (MFT) onde agora consideramos variações nos campos mesônicos permitindo então que inomogeneidades na matéria nuclear sejam consideradas. Na MFT tradicional modificamos a lagrangiana da QHD sem comprometer suas virtudes e também obtivemos uma equação de KdV para perturbações na densidade bariônica. Entretanto, quando essa modificação não é feita, a QHD em MFT pura fornece a equação de quebra de onda. Tal fato é possível pois nosso protótipo de modificação na QHD possui um parâmetro livre que ajusta a relevância desta pequena correção que leva ao aparecimento de solitons.

Também concluímos que usando a modificação na lagrangiana da QHD e o novo tratamento para os campos mesônicos na MFT , ou seja, através de duas abordagens, encontramos uma equação de KdV ou quebra de onda.

Das equações de onda citadas acima, seus coeficientes são determinados pela dinâmica de troca de mesons e sendo assim, as propriedades do pulso descrito por tais equações dependem dos parâmetros microscópicos da QHD . Um fato importante é que os pulsos descritos por essas equações são pulsos de compressão de natureza supersônica ou pulsos de rarefação de natureza subsônica, em virtude do fato do novo termo na lagrangiana ter o parâmetro livre que pode ser positivo (compressão) ou negativo (rarefação).

Todo conteúdo mencionado até o momento é uma sofisticação do já feito na década de 80 no estudo do sóliton nuclear, mas nossa contribuição é original em modificar a lagrangiana da QHD e ir além da MFT , tendo como motivação a busca por ondas supersônicas e outros fenômenos ondulatórios alicerçados em observações como “cones de Mach” conforme mencionamos na introdução deste trabalho. Mostramos também como estas equações e suas soluções solitônicas se comportam com a temperatura e constatamos que os efeitos do pulso ir mais longe e a quebra seguida de dispersão ocorrer antecipadamente devido ao aumento da temperatura são resultados de um tratamento minucioso da QHD com e sem modificação em sua lagrangiana, o que nos levou a apresentar os cálculos etapa por etapa para vermos como as grandezas termodinâmicas se alteravam e conseqüentemente como alteravam os coeficientes das equações de onda obtidas.

No contexto matemático da hidrodinâmica relativística, QHD e do formalismo de obtenção das equações de onda e suas soluções, avançamos no estudo de sistemas com simetria angular e obtivemos as mesmas equações de onda na direção radial em coordenadas cilíndricas e esféricas. Observamos que nessas geometrias há um termo de amortecimento e uma análise numérica foi feita não apenas para testarmos as soluções analíticas, mas estudar os efeitos de amortecimento e a sensibilidade quanto às condições iniciais. Nas figuras que apresentamos isso pode ser visto tanto quantitativamente quanto qualitativamente onde observamos que pulsos de maior amplitude são mais ligeiros e tal efeito também é observado com o aumento da temperatura. Conforme dissemos, “desligando” o termo de modificação na lagrangiana observamos que para um sóliton inicial temos a formação da onda de choque, sua quebra e conseqüente dispersão. Tanto a quebra como a propagação da onda depende da largura e amplitude do pulso inicial e da temperatura do meio.

Estudamos vários métodos de solução de equações diferenciais e os adaptamos para nosso problema. Como não havia em livros texto, procuramos (e encontramos na literatura) extensões do formalismo lagrangiano para derivadas de ordem mais alta. Pudemos assim fazer a generalização do formalismo para o tratamento da QHD modificada.

A menos do caso com geometria cilíndrica, todos os outros casos já foram publicados em [34, 35, 37, 38].

Em nossa busca por soluções de equações de onda não-lineares, desenvolvemos uma solução analítica para a KdV forçada. Isso nos motivou também a estudar hidrodinâmica com fonte e aplicar nosso formalismo. En-

contramos uma equação de quebra de onda forçada. Entretanto, dado excesso de parâmetros arbitrários em tal equação, pretendemos estudar melhor este tema num futuro próximo.

A “expansão além da linearização” usada neste trabalho parece melhor do que a tradicional linearização da hidrodinâmica aplicada a íons relativísticos. Consideramos todas as variações de todos os termos presentes nas equações da hidrodinâmica relativística de forma a considerar inomogeneidades de modelos covariantes, como, por exemplo, a *QHD*. Nossa equação de onda é mais complexa, prevê pulsos solitários (solitons) ou formação de ondas de choque seguida de quebra e dispersão.

Nosso resultado original mais recente vem do estudo de equações de onda com a EOS do QGP. Buscamos soluções com solitons ou quebra de onda em temperatura nula para perturbações na densidade bariônica e perturbações na densidade de energia em temperatura finita. As equações no *QGP* foram estudadas numericamente e encontramos um “sóliton” sem a equação de KdV.

No geral podemos concluir que nossos pulsos se propagam por grandes distâncias quando comparáveis com as dimensões nucleares mas se propagam por curtas distâncias quando comparadas com dimensões estelares.

Como observação final, estamos cientes dos problemas que o laplaciano da densidade bariônica pode trazer, ou melhor, derivadas de ordem superior podem levar a uma violação de causalidade conforme na equação de Navier-Stokes, embora não tenhamos visto nada de errado em nossos cálculos para obtenção da KdV.

Apêndice A

Termodinâmica

A.1 Densidade de energia e pressão

A entropia de um sistema é função das variáveis [89]:

$$S = S(E, V, N_1, N_2, \dots, N_m) \quad (\text{A.1})$$

onde E é a energia do sistema, V é o volume do sistema e N_i , com $i = 1, 2, 3, \dots, m$ é o número de partículas do tipo i . Considerando agora um sistema com $N_B \equiv$ número de barions, temos então a expressão para entropia (A.1) na forma:

$$S = S(E, V, N_B) \quad (\text{A.2})$$

e conseqüentemente a variação de entropia é dada por:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N_B} dE + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E, N_B} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N_B} \right)_{V, E} dN_B \quad (\text{A.3})$$

Da relação fundamental da termodinâmica com $dN_B = 0$ temos:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dE + pdV}{T} \quad (\text{A.4})$$

Comparando os coeficientes de dE e dV entre as expressões (A.3) e (A.4) temos:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N_B} = \frac{1}{T} \quad (\text{A.5})$$

e

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E, N_B} = \frac{p}{T} \quad (\text{A.6})$$

Introduzindo uma nova grandeza, chamando-a de potencial barioquímico:

$$\mu_B \equiv -T \left(\frac{\partial S}{\partial N_B}\right)_{V, E} \quad (\text{A.7})$$

que juntamente com (A.5) e (A.6) substituídas em (A.4) resulta na expressão:

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu_B}{T}dN_B \quad (\text{A.8})$$

que é a generalização da relação fundamental (A.4) para a situação em que o número de partículas (no caso o número de barions) pode variar, porém no nosso caso vale lembrar que $dN_B = 0$, mas (A.7) continua válida, bem como as expressões a seguir. Da expressão (A.8) temos:

$$dE = TdS - pdV + \mu_B dN_B \quad (\text{A.9})$$

que escrita em termos da energia livre de Gibbs:

$$dG \equiv d(E - TS + pV) = -SdT + Vdp + \mu_B dN_B \quad (\text{A.10})$$

de onde temos agora:

$$\mu_B = \left(\frac{\partial G}{\partial N_B}\right)_{p, T} \quad (\text{A.11})$$

e como só estamos considerando neste estudo apenas um tipo de partícula (barions) temos:

$$G = G(T, p, N_B) \quad (\text{A.12})$$

como quantidade extensiva. Logo:

$$G(T, p, N_B) = N_B g(T, p) \quad (\text{A.13})$$

com $g(T, p)$ uma função que não depende de N_B e assim:

$$\mu_B = \left(\frac{\partial G}{\partial N_B}\right)_{p, T} = g(T, p) \quad (\text{A.14})$$

ou seja: o potencial químico por bárion é igual à energia livre de Gibbs por bárion:

$$G = \mu_B N_B \quad (\text{A.15})$$

Então podemos dizer que

$$G \equiv E - TS + pV = \mu_B N_B \quad (\text{A.16})$$

que dividindo por V temos:

$$\varepsilon + p = \mu_B \rho_B + Ts \quad (\text{A.17})$$

onde ε é a densidade volumétrica de energia, ρ_B é a densidade bariônica (números de barions por volume) e s é a densidade volumétrica de entropia.

De (A.17) temos:

$$d\varepsilon + dp = \rho_B d\mu_B + \mu_B d\rho_B + dTs + Tds$$

que em um sistema isentrópico ($dS = 0$ e s variando) continuamos com:

$$d\varepsilon + dp = \rho_B d\mu_B + \mu_B d\rho_B + sdT + Tds \quad (\text{A.18})$$

Substituindo então a primeira lei da Termodinâmica:

$$d\varepsilon = Tds + \mu_B d\rho_B \quad (\text{A.19})$$

em (A.18) obtemos:

$$dp = \rho_B d\mu_B + sdT \quad (\text{A.20})$$

Também de (A.19) temos:

$$\mu_B = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \quad (\text{A.21})$$

que inserida em (A.20) e considerando $T = 0$ ou $T = \text{constante}$ ($dT = 0$):

$$dp = \rho_B d \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] \quad (\text{A.22})$$

resultando em

$$\vec{\nabla} p = \rho_B \vec{\nabla} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] \quad (\text{A.23})$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_B \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \right)_s \right] \quad (\text{A.24})$$

Da energia por núcleon (E) dada por:

$$E = \frac{\varepsilon}{\rho_B} \quad (\text{A.25})$$

pode-se usar também:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} = E + \rho_B \frac{\partial E}{\partial \rho_B} \quad (\text{A.26})$$

As relações (A.23) à (A.26) são utilizadas na hidrodinâmica relativística, mais especificamente nas versões relativísticas da Equação de Euler e da continuidade.

A.2 Potencial termodinâmico e funções termodinâmicas

As funções termodinâmicas tais como a densidade de energia ε , densidade bariônica ρ_B , densidade de entropia s e pressão p em uma teoria em particular, requerem o conhecimento do potencial termodinâmico $\Omega(T, V, \mu_B)$ para seus cálculos explícitos.

Tais funções serão relacionadas com as médias dos operadores quânticos no *ensemble* [80, 89]. Isso pode ser feito através da função de partição Z dada por:

$$Z \equiv Tr \left\{ \exp \left[\frac{-(\hat{H} - \mu_B \hat{B})}{T} \right] \right\} \equiv \exp[-\Omega(T, V, \mu_B)/T] \quad (\text{A.27})$$

onde \hat{H} é o operador hamiltoniano, \hat{B} é operador número bariônico e μ_B o potencial barioquímico.

Então a média no *ensemble* de um operador \hat{A} é dada por

$$A \equiv \langle \langle \hat{A} \rangle \rangle = Z^{-1} Tr \left[\hat{A} e^{\frac{-(\hat{H} - \mu_B \hat{B})}{T}} \right] \quad (\text{A.28})$$

De (A.27) temos que

$$\Omega(T, V, \mu_B) = -T \ln(Z) \quad (\text{A.29})$$

e é dado pela transformação de Legendre:

$$\Omega(T, V, \mu_B) = -pV = E - TS - \mu_B N_B \quad (\text{A.30})$$

de forma que

$$d\Omega = dE - TdS - SdT - \mu_B dN_B - N_B d\mu_B$$

que usando (A.9) resulta em

$$d\Omega(T, V, \mu_B) = -SdT - pdV - N_B d\mu_B \quad (\text{A.31})$$

De (A.28), (A.30) e (A.31) temos

$$\rho_B \equiv \frac{\langle\langle \hat{B} \rangle\rangle}{V} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_B} \right)_{T, V} \quad (\text{A.32})$$

$$s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu_B} \quad (\text{A.33})$$

$$p = -\frac{\Omega(T, V, \mu_B)}{V} \quad (\text{A.34})$$

$$\varepsilon = \frac{\Omega(T, V, \mu_B)}{V} + Ts + \mu_B \rho_B \quad (\text{A.35})$$

Apêndice B

O Princípio de Mínima Ação com derivadas de ordem superior nos campos

Apresentamos a obtenção das equações de Euler-Lagrange e do tensor Energia-Momento para teorias com derivadas de ordem superior nos campos. Tais estudos são alicerçados em [90].

B.1 Equações de Euler-Lagrange

Considerando a ação S :

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\eta_i, \partial_{\mu}\eta_i, \partial^{\lambda}\partial_{\lambda}\eta_i) \quad (\text{B.1})$$

e calculando sua variação δS podemos obter as equações de Euler-Lagrange para os campos η_i cujas variações são dadas por $\eta_i(x) \rightarrow \eta_i(x) + \delta\eta_i(x)$.

Em (B.1), Ω é uma região arbitrária do espaço-tempo. $\delta\eta_i(x)$ é nulo em Γ , onde $\Gamma = \Gamma(\Omega)$ é a superfície de contorno de Ω .

Buscando por um valor estacionário da ação:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \delta\mathcal{L}(\eta_i, \partial_{\mu}\eta_i, \partial^{\lambda}\partial_{\lambda}\eta_i) = 0 \quad (\text{B.2})$$

encontramos

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i} \delta\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\eta_i)} \delta(\partial_{\mu}\eta_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}\eta_i)} \delta(\partial_{\mu}\partial^{\mu}\eta_i) \right\} = 0$$

A expressão acima pode ser reescrita utilizando $\partial_\mu(\delta\eta_i)$ e $\partial_\mu\partial^\mu(\delta\eta_i)$:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\delta\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\partial_\mu(\delta\eta_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\partial^\lambda\eta_i)}\partial_\mu\partial^\mu(\delta\eta_i) \right\} = 0$$

Integrando por partes os dois últimos termos da última expressão e assumindo que os termos de superfície são nulos, encontramos:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)} + \partial^\mu\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\partial^\lambda\eta_i)}\right] \right\} \delta\eta_i = 0 \quad (\text{B.3})$$

que nos fornece as equações de Euler-Lagrange para η_i quando $\mathcal{L}(\eta_i, \partial_\mu\eta_i, \partial_\lambda\partial^\lambda\eta_i)$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)} + \partial^\mu\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\partial^\lambda\eta_i)}\right] = 0 \quad (\text{B.4})$$

B.2 Tensor Energia-Momento

Iniciamos nossos cálculos com a ação S :

$$S = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\eta_i, \partial_\mu\eta_i, \partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i, x^\mu)$$

A variação na ação entre dois pontos do espaço-tempo x'^μ e x^μ é dada por:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x' \mathcal{L}(\eta'_i, \partial_\mu\eta'_i, \partial^\lambda\partial_\lambda\eta'_i, x'^\mu) - \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\eta_i, \partial_\mu\eta_i, \partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i, x^\mu) \quad (\text{B.5})$$

A translação $x \rightarrow x'$ pode ser implementada por:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \Rightarrow \partial_\mu x'^\mu = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)$$

e $d^4x' = J(x'/x)d^4x = [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]d^4x$, onde $J(x'/x)$ é o Jacobiano da transformação $x \rightarrow x'$ dado por:

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu) \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a expressão para d^4x' em (B.5) obtemos:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x (\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu\delta x^\mu) \quad (\text{B.7})$$

Usando:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\delta\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\delta(\partial_\mu\eta_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\delta(\partial^\mu\partial_\mu\eta_i) + (\partial_\mu\mathcal{L})\delta x^\mu$$

encontramos:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{\Omega} d^4x & \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\delta\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\delta(\partial_\mu\eta_i) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\delta(\partial^\mu\partial_\mu\eta_i) + (\partial_\mu\mathcal{L})\delta x^\mu + \mathcal{L}\partial_\mu\delta x^\mu \right] \end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\delta\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\delta(\partial_\mu\eta_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\delta(\partial^\mu\partial_\mu\eta_i) + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu) \right] \quad (\text{B.8})$$

Os segundo e terceiro termos na integral da última expressão podem ser reescritos usando a divergência total, então assumem a forma:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\delta(\partial_\mu\eta_i) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\partial_\mu(\delta\eta_i) = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\delta\eta_i \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)} \right] \delta\eta_i \quad (\text{B.9})$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\delta(\partial^\mu\partial_\mu\eta_i) = \\ & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\partial^\mu\partial_\mu(\delta\eta_i) = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\partial^\mu(\delta\eta_i) \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] \partial^\mu(\delta\eta_i) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Inserindo (B.9) e (B.10) em (B.8) e rearranjando os termos, encontramos:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{\Omega} d^4x & \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\delta\eta_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)} \right] \delta\eta_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] \partial^\mu(\delta\eta_i) \right\} + \\ & + \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)} \right] \delta\eta_i + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] \partial^\mu(\delta\eta_i) + (\mathcal{L}\delta x^\mu) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A segunda integral em (B.11) pode ser reescrita usando 4-dimensional generalização do teorema de Gauss e assume a forma:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\delta\eta_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)} \right] \delta\eta_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] \partial^\mu(\delta\eta_i) \right\} +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\delta\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\partial^\mu(\delta\eta_i) + \mathcal{L}\delta x^\mu \right\} d\sigma_\mu \quad (\text{B.12})$$

Agora, na última integral da equação anterior somaremos o seguinte “zero”:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}(\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}(\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu + \\ & + \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] (\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu - \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] (\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu = 0 \end{aligned}$$

e (B.12) torna-se:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\delta\eta_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)} \right] \delta\eta_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] \partial^\mu(\delta\eta_i) \right\} + \\ & + \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}\delta\eta_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\partial^\mu(\delta\eta_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}(\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}(\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu + \right. \\ & \left. + \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] (\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu - \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] (\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu + \mathcal{L}\delta x^\mu \right\} d\sigma_\mu \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

a qual, após um rearranjo de termos:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\delta\eta_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)} \right] \delta\eta_i - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] \partial^\mu(\delta\eta_i) \right\} + \\ & + \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}[\delta\eta_i + (\partial_\nu\delta\eta_i)\delta x^\nu] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)}\partial^\mu(\delta\eta_i) + \right. \\ & \quad \left. + \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] (\partial_\nu\eta_i)\delta x^\nu + \right. \\ & \left. - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}(\partial_\nu\eta_i) - g^u{}_\nu\mathcal{L} + \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] (\partial_\nu\eta_i) \right] \delta x^\nu \right\} d\sigma_\mu \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

Do último termo de (B.14) obtemos o tensor Energia-Momento:

$$T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta_i)}(\partial_\nu\eta_i) - g^u{}_\nu\mathcal{L} + \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] (\partial_\nu\eta_i) \quad (\text{B.15})$$

O último termo da última equação pode ser reescrito com o auxílio da identidade

$$\partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} \right] (\partial_\nu\eta_i) = \partial^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} (\partial_\nu\eta_i) \right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda\partial_\lambda\eta_i)} (\partial^\mu\partial_\nu\eta_i)$$

e então (B.15) torna-se finalmente:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta_i)}(\partial_\nu \eta_i) - g^u{}_\nu \mathcal{L} + \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda \partial_\lambda \eta_i)}(\partial_\nu \eta_i) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\lambda \partial_\lambda \eta_i)}(\partial^\mu \partial_\nu \eta_i) \quad (\text{B.16})$$

que é a expressão final para o tensor Energia-Momento.

Notamos também que a primeira integral em (B.14) nos leva às equações de Euler-Lagrange quando o termo de superfície vai a zero.

Apêndice C

Constante de difusão bariônica

A constante de difusão bariônica D para a matéria hadrônica densa e quente foi estudada em [79] por intermédio de um gerador de eventos chamado URASiMA (*Ultra-Relativistic AA collision Simulator based on Multiple Scattering Algorithm*).

Os *ensembles* estatísticos com temperatura e potencial químico fixos são gerados a partir da imposição da conservação da densidade de energia e da densidade bariônica. Tais *ensembles* alcançam o equilíbrio térmico onde é investigada a dependência com a temperatura e com o potencial químico da constante D .

Apresentaremos aqui uma breve descrição da teoria envolvida no cálculo de tal constante e alguns de seus valores dependentes da temperatura.

O primeiro Teorema de dissipação-flutuação [91] nos diz que a constante de difusão D é dada pela seguinte correlação:

$$D = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t+t') \rangle dt'. \quad (\text{C.1})$$

onde a média $\langle \dots \rangle$ é dada por

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle = & \frac{1}{\text{número de } \textit{ensembles}} \sum_{\textit{ensembles}} \times \\ & \times \frac{1}{\text{número de partículas}} \sum_{\textit{partículas}} \dots \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Se a correlação decresce exponencialmente, isto é:

$$\langle \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t + t') \rangle \propto \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \quad (\text{C.3})$$

com τ sendo o tempo de relaxamento, a constante de difusão pode ser reescrita em uma forma mais simples:

$$D = \frac{1}{3} \langle \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) \rangle \tau \quad (\text{C.4})$$

A equação de difusão é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \vec{x}) = D \nabla^2 f(t, \vec{x}) \quad (\text{C.5})$$

e a constante de difusão D tem dimensão de $[L^2/T]$.

Devido natureza relativística do sistema, usaremos $\vec{\beta}(t) = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}}{E}$ ao invés de \vec{v} em (C.1) e D é obtida por

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \vec{\beta}(t) \cdot \vec{\beta}(t + t') \rangle dt' c^2 = \frac{1}{3} \langle \vec{\beta}(t) \cdot \vec{\beta}(t) \rangle c^2 \tau \\ \Rightarrow D &= \frac{1}{3} \left\langle \left(\frac{\vec{p}(t)}{E(t)} \right) \cdot \left(\frac{\vec{p}(t)}{E(t)} \right) \right\rangle c^2 \tau \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

com c sendo a velocidade da luz.

A figura C.1 mostra a função de correlação em função do tempo e indica que o amortecimento exponencial (C.3) é uma boa aproximação.

Já a figura C.2 mostra os resultados para a constante de difusão via (C.6) em função da temperatura.

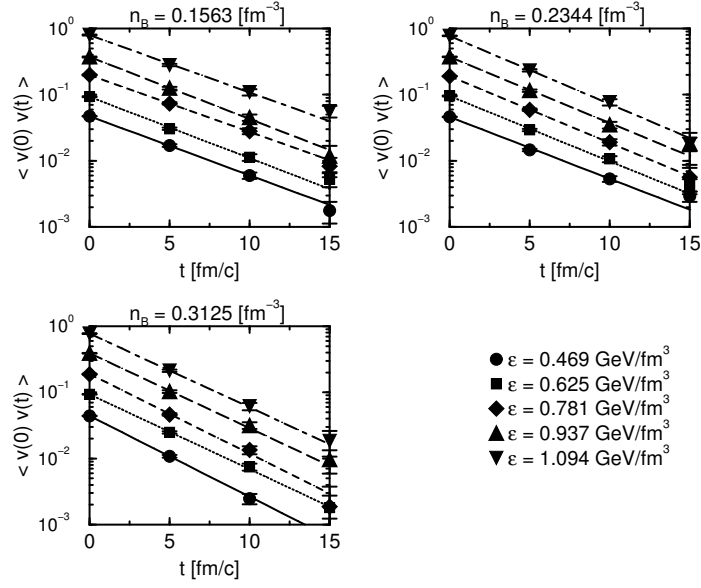


Figura C.1: As linhas correspondem a resultados fitados pela função exponencial.

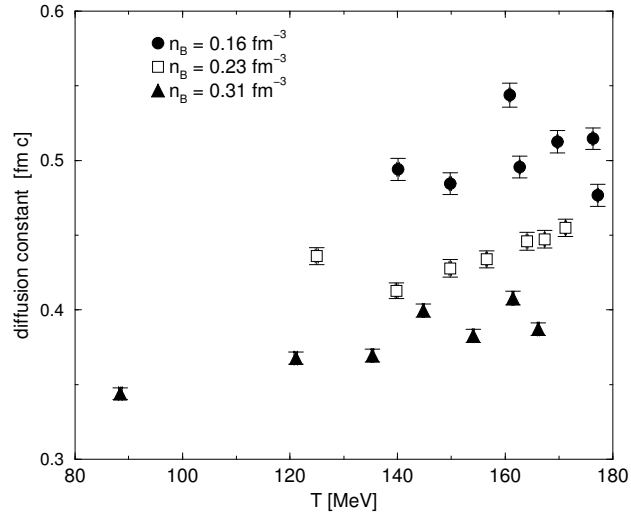


Figura C.2: Constante de difusão bariônica na matéria hadrônica densa.

Apêndice D

Relações na QHD

D.1 Relações úteis em temperatura nula

É interessante estudarmos primeiro em temperatura nula como o termo $\bar{\psi}(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi$ da expressão (4.14) possui dependência com ρ_B [33, 80].

Então:

$$\psi = \phi(\vec{k}, \lambda)e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iEt} \quad (\text{D.1})$$

com λ sendo o índice de spin.

Substituindo então (D.1) em (4.14):

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0 - (M - g_S \phi_0)]\phi(\vec{k}, \lambda)e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iEt} = 0$$

(lembrando da definição $M^* = M - g_S \phi_0$)

$$\implies [i\gamma_0 \partial^0 + i\gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \nabla - g_V \gamma_0 V_0 - M^*]\phi(\vec{k}, \lambda)e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iEt} = 0$$

$$\implies [\gamma_0 E - \gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{k} - g_V \gamma_0 V_0 - M^*]\phi(\vec{k}, \lambda) = 0$$

que multiplicada por $-\gamma_0$ e usando a notação $\beta \equiv \gamma_0$ fica na forma:

$$[-E + \vec{\alpha} \cdot \vec{k} + g_V V_0 + \beta M^*]\phi(\vec{k}, \lambda) = 0$$

fornecendo por sua vez:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*]\phi(\vec{k}, \lambda) = [E - g_V V_0]\phi(\vec{k}, \lambda) \quad (\text{D.2})$$

Quadrando a expressão acima:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k})^2 + (\beta M^*)^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \beta M^* + \beta M^* \vec{\alpha} \cdot \vec{k} = [E - g_V V_0]^2 \quad (\text{D.3})$$

Mas devido a

$$\{\beta, \alpha^i\} = 0$$

os termos

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{k} \beta M^* + \beta M^* \vec{\alpha} \cdot \vec{k}$$

de (D.3) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \beta M^* + \beta M^* \vec{\alpha} \cdot \vec{k} &= M^*(\alpha^1 k^1 \beta + \alpha^2 k^2 \beta + \alpha^3 k^3 \beta + \beta \alpha^1 k^1 + \beta \alpha^2 k^2 + \beta \alpha^3 k^3) = \\ &= M^*(k^1 \alpha^1 \beta + k^2 \alpha^2 \beta + k^3 \alpha^3 \beta + \beta \alpha^1 k^1 + \beta \alpha^2 k^2 + \beta \alpha^3 k^3) = \\ &= M^*(k^1 \{\beta, \alpha^1\} + k^2 \{\beta, \alpha^2\} + k^3 \{\beta, \alpha^3\}) = 0 \end{aligned}$$

então (D.3) pode ser reescrita como:

$$(\vec{k}^2 + M^{*2}) = [E - g_V V_0]^2 \quad (D.4)$$

uma vez que foi utilizado também

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = I$$

De (D.4) tem-se:

$$\pm(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} = E^{(\pm)} - g_V V_0$$

que considerando apenas as energias positivas:

$$E^{(+)} = (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} + g_V V_0 \quad (D.5)$$

Substituindo (D.5) em (D.2):

$$\begin{aligned} [\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*] \phi(\vec{k}, \lambda) &= [E^{(+)} - g_V V_0] \phi(\vec{k}, \lambda) \\ \implies [\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*] \phi(\vec{k}, \lambda) &= (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \phi(\vec{k}, \lambda) \end{aligned} \quad (D.6)$$

Sendo

$$\phi(\vec{k}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} A_{\vec{k}, \lambda} U(\vec{k}, \lambda)$$

em (D.1) tem-se que:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} A_{\vec{k}, \lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iEt} \quad (D.7)$$

fornecendo, utilizando (D.6):

$$\psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\vec{k}', \lambda'} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} A_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger A_{\vec{k}, \lambda} U^\dagger(\vec{k}', \lambda') U(\vec{k}, \lambda)$$

mas $\psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi$ deve ser aplicado no estado com n nucleons:

$$\langle n | \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi | n \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \langle n | A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger A_{\vec{k}, \lambda} | n \rangle \quad (\text{D.8})$$

onde foi utilizada a relação:

$$U^\dagger(\vec{k}', \lambda') U(\vec{k}, \lambda) = \delta_{\vec{k}' \vec{k}} \delta_{\lambda \lambda'}$$

De (D.8):

$$\langle n | A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger A_{\vec{k}, \lambda} | n \rangle = \langle n | A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger | n-1 \rangle = \langle n | n \rangle = 1$$

de tal maneira que (D.8) assume a forma:

$$\langle n | \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi | n \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (\text{D.9})$$

Utilizando:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \longrightarrow \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

em (D.9) acima e multiplicando pelo fator de degenerescência spin-isospin γ_s , tem-se portanto:

$$\psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi \longrightarrow \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (\text{D.10})$$

Finalmente, a relação entre k_F e ρ_B é calculada por:

$$\rho_B \equiv \langle n | \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) | n \rangle \quad (\text{D.11})$$

Então, utilizando (D.7) na (D.11) acima:

$$\rho_B \equiv \langle n | \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) | n \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle n | n \rangle$$

fornecendo:

$$\rho_B = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle n | n \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} 1$$

que novamente utilizando

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \longrightarrow \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

e multiplicando por γ_s obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho_B &= \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \\ \implies \rho_B &= \frac{\gamma_s}{6\pi^2} k_F^3 \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

O estado fundamental da matéria nuclear é obtido preenchendo os níveis até k_F com $\{p \uparrow, p \downarrow, n \uparrow, n \downarrow\}$; o fator de degenerescência para a matéria nuclear é então $\gamma_s = 4$ e para a matéria neutra $\gamma_s = 2$.

A incompressibilidade da matéria nuclear de acordo com o modelo de Walecka é [33]:

$$K = \left(k_F^2 \frac{\partial^2 E}{\partial k_F^2} \right)_{eq} \quad (\text{D.13})$$

com $E = \varepsilon/\rho_B$ sendo a energia do núcleon. Notamos também que $K > 0$.

A relação do momento de Fermi com a densidade bariônica foi encontrada pela expressão (D.12) que fornece o operador:

$$\frac{\partial}{\partial k_F} = \frac{\partial \rho_B}{\partial k_F} \frac{\partial}{\partial \rho_B} = \frac{3\gamma_s k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial}{\partial \rho_B} \quad (\text{D.14})$$

e conseqüentemente:

$$\frac{\partial^2}{\partial k_F^2} = \frac{6\gamma_s k_F}{6\pi^2} \frac{\partial}{\partial \rho_B} + \frac{3\gamma_s k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial k_F \partial \rho_B} \quad (\text{D.15})$$

Mas o último termo da expressão acima pode ser escrito como:

$$\frac{3\gamma_s k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial k_F \partial \rho_B} = \frac{3\gamma_s k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial}{\partial k_F} \frac{\partial}{\partial \rho_B}$$

que utilizando (D.14) fica na forma:

$$\frac{3\gamma_s k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial k_F \partial \rho_B} = \left(\frac{3\gamma_s k_F^2}{6\pi^2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_B^2} \quad (\text{D.16})$$

Substituindo então (D.16) em (D.15):

$$\frac{\partial^2}{\partial k_F^2} = \frac{\gamma_s k_F}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \rho_B} + \left(\frac{\gamma_s k_F^2}{2\pi^2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_B^2} \quad (\text{D.17})$$

Aplicando (D.17) na energia por núcleon E:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k_F^2} = \frac{\gamma_s k_F}{\pi^2} \frac{\partial E}{\partial \rho_B} + \left(\frac{\gamma_s k_F^2}{2\pi^2} \right)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2}$$

que na situação de equilíbrio fornece:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_F^2} \right)_{eq} = \left(\frac{\gamma_s k_F^2}{2\pi^2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{eq} \quad (\text{D.18})$$

uma vez que da saturação:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \rho_B} \right)_{eq} = 0$$

De (D.12):

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2 \rho_B}{\gamma_s} \right)^{1/3}$$

que substituída em (D.13) juntamente com (D.18):

$$K = \left(9\rho_B^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{eq} = 9\rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B=\rho_0} \quad (\text{D.19})$$

A relação entre a incompressibilidade (K) e a velocidade do som c_s ¹ provém da relação de Gibbs:

$$p + \varepsilon = Ts + \mu_B \rho_B \quad (\text{D.20})$$

que em $T = 0$ e considerando a matéria nuclear no equilíbrio $p = 0$, temos a expressão acima na forma:

$$\varepsilon = \mu_B \rho_B$$

¹Agradecemos ao prof. M. Malheiro por nos ter apresentado este cálculo.

forneendo então:

$$\frac{\varepsilon}{\rho_B} = \mu_B \quad (\text{D.21})$$

e

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\mu_B} \quad (\text{D.22})$$

Da curva de saturação temos:

$$\frac{\varepsilon}{\rho_B} - M \cong -16 \text{MeV}$$

que utilizando (D.21) nos fornece:

$$\mu_B = M - 16$$

ou aproximadamente:

$$\mu_B \cong M \quad (\text{D.23})$$

A definição da velocidade do som (c_s) é dada pela EOS:

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \quad (\text{D.24})$$

que pode ser reescrita como:

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial \varepsilon}$$

Utilizando (D.22) na expressão acima:

$$c_s^2 = \frac{1}{\mu_B} \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \quad (\text{D.25})$$

Como a incompressibilidade (K) é calculada a partir de [33, 80]:

$$K = 9 \frac{\partial p}{\partial \rho_B}$$

temos:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho_B} = \frac{K}{9} \quad (\text{D.26})$$

que substituindo (D.26) e (D.23) em (D.25) encontramos:

$$c_s^2 = \frac{1}{M} \frac{K}{9} \quad (\text{D.27})$$

Finalmente, substituindo (D.27) em (D.19) obtemos:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0} = \frac{M c_s^2}{\rho_0^2} \quad (\text{D.28})$$

D.2 Relações úteis em temperatura finita

Na temperatura finita escreveremos uma forma para o campo ψ levando em conta a existência das antipartículas que aparecem no mar de Fermi devido apenas pela excitação térmica.

À medida que um sistema tem sua temperatura elevada surgem antipartículas com massa comparável a $k_B T$ do sistema, então analogamente a (D.1) temos:

$$\psi = \phi_a(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE^+(\vec{k})t} + \phi_b(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE^-(-\vec{k})t} \quad (\text{D.29})$$

novamente com λ sendo o índice de spin e também:

$$\phi_a(\vec{k}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} A_{\vec{k}, \lambda} \mathcal{U}(\vec{k}, \lambda) \quad (\text{D.30})$$

$$\phi_b(\vec{k}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} B_{-\vec{k}, \lambda}^\dagger \mathcal{V}(\vec{k}, \lambda) \quad (\text{D.31})$$

com os spinores satisfazendo:

$$\mathcal{U}^\dagger(\vec{k}', \lambda') \mathcal{U}(\vec{k}, \lambda) = \mathcal{V}^\dagger(\vec{k}', \lambda') \mathcal{V}(\vec{k}, \lambda) = \delta_{\vec{k}'\vec{k}} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\text{D.32})$$

e os operadores satisfazendo:

$$\{A, B\} = \{A^\dagger, B^\dagger\} = 0 \quad (\text{D.33})$$

e

$$\{B, B^\dagger\} = \{A, A^\dagger\} = 1 \quad (\text{D.34})$$

Substituindo (D.29) na equação de movimento (4.14):

$$\begin{aligned} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0 - (M - g_S \phi_0)] & \left[\phi_a(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE^+(\vec{k})t} + \right. \\ & \left. + \phi_b(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE^-(-\vec{k})t} \right] = 0 \end{aligned}$$

obtemos:

$$[\gamma_0 E^+(\vec{k}) - \gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{k} - g_V \gamma_0 V_0 - M^*] \phi_a(\vec{k}, \lambda) = 0$$

e

$$[\gamma_0 E^-(-\vec{k}) + \gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{k} - g_V \gamma_0 V_0 - M^*] \phi_b(\vec{k}, \lambda) = 0$$

que multiplicadas por $-\gamma_0$ e usando a notação $\beta \equiv \gamma_0$ obtemos:

$$[E^+(\vec{k}) - g_V V_0] \phi_a(\vec{k}, \lambda) = [\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*] \phi_a(\vec{k}, \lambda) \quad (\text{D.35})$$

e

$$[E^-(-\vec{k}) - g_V V_0] \phi_b(\vec{k}, \lambda) = [-\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*] \phi_b(\vec{k}, \lambda) \quad (\text{D.36})$$

Após usarmos $\{\beta, \alpha^i\} = 0$ e $(\alpha^i)^2 = \beta^2 = I$ conforme na última seção notamos que:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*]^2 = [-\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*]^2 = (\vec{k}^2 + M^{*2}) \quad (\text{D.37})$$

e quando quadramos (D.35) encontramos:

$$[E^+(\vec{k}) - g_V V_0]^2 = (\vec{k}^2 + M^{*2}) \quad (\text{D.38})$$

e para (D.36):

$$[E^-(-\vec{k}) - g_V V_0]^2 = (\vec{k}^2 + M^{*2}) \quad (\text{D.39})$$

Em termos de escolha de sinal para as energias, temos para as partículas:

$$E^+(\vec{k}) = g_V V_0 + (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (\text{D.40})$$

e para as antipartículas do mar de Fermi:

$$E^-(-\vec{k}) = g_V V_0 - (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (\text{D.41})$$

A passagem de somatória para integral é semelhante à usada na última seção para temperatura nula, porém a integral não é feita de 0 a k_F , então:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \longrightarrow \frac{\gamma_s}{(2\pi)^3} \int d^3 k \quad (\text{D.42})$$

Apêndice E

Funções Elípticas de Jacobi

O método de Expansão em funções elípticas de Jacobi (JEF) foi utilizado no capítulo 6 para obtenção da solução da equação de KdV. Entretanto tais funções foram apenas enunciadas juntamente com suas propriedades e aplicadas com uma condição onde se degeneram em funções solitônicas.

Nesta seção apresentaremos em detalhes as JEF e suas propriedades seguindo os estudos em [92, 93].

Vamos começar pela equação da elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

e sua excentricidade:

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \epsilon^2 \quad \text{ou} \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

lembrando que para $\epsilon = 0$ temos o círculo. Normalizando as duas expressões pela escolha de $b = 1$ temos:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + y^2 = 1 \tag{E.1}$$

e

$$\epsilon \equiv k = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}$$

que é o módulo da função elíptica correspondente. Então $0 \leq k \leq 1$.

O próximo e mais importante passo nesse estudo é definir o argumento u das funções elípticas. No caso de funções trigonométricas o argumento seria o ângulo θ , mas u é um pouco mais sofisticado:

$$u \equiv \int_P^Q r d\theta \quad (\text{E.2})$$

O segmento de extremidades P e Q no contorno da elipse define u de uma maneira geral de tal forma que não é um ângulo, comprimento de arco ou alguma grandeza relacionada com área. Tal segmento pode ser visto conforme a figura a seguir.

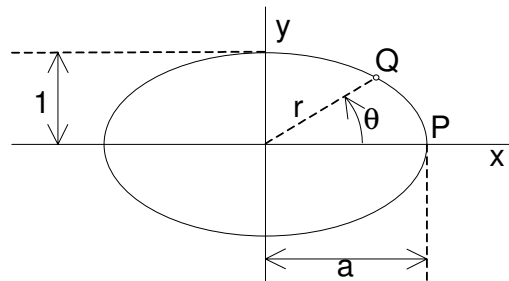


Figura E.1: Elipse com suas medidas especificadas.

Entretanto u se torna um ângulo θ ou um comprimento de arco no limite $a \rightarrow 1$ ou $k \rightarrow 0$ quando a elipse se torna um círculo.

Com argumento e módulo da elipse definidos, as funções elípticas são definidas como razões da mesma maneira que na trigonometria usual. São elas:

$$sn(u, k) = y \quad (\text{E.3})$$

$$cn(u, k) = x/a \quad (\text{E.4})$$

$$dn(u, k) = r/a \quad (\text{E.5})$$

As funções (E.3) e (E.4) generalizam o *seno* e o *coseno*. Já (E.5) surge devido r não ser constante na elipse. Quando $k \rightarrow 0$ temos $a = 1$, e assim (E.3), (E.4) e (E.5) tendem a y , x e 1 respectivamente desde que $r \rightarrow 1$ também. Isso conecta a elipse com as funções $sen\theta$, $cos\theta$ e 1.

Normalmente na literatura por questão de facilidade de escrita o módulo k é omitido, então $sn(u) = sn(u, k)$ e assim por diante. Também encontramos o *módulo complementar* a k , dado por

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

que em notação moderna conforme usamos no capítulo 6 é escrito como $m = k^2$, então:

$$sn(u|m) \equiv sn(u, k) \quad \text{onde} \quad m = k^2$$

Existem ainda mais nove funções elípticas de Jacobi, definidas por:

$$\begin{array}{lll} ns\ u = \frac{1}{sn\ u} & nc\ u = \frac{1}{cn\ u} & nd\ u = \frac{1}{dn\ u} \\ sc\ u = \frac{sn\ u}{cn\ u} & dc\ u = \frac{dn\ u}{cn\ u} & cs\ u = \frac{cn\ u}{sn\ u} \\ ds\ u = \frac{dn\ u}{sn\ u} & sd\ u = \frac{sn\ u}{dn\ u} & cd\ u = \frac{cn\ u}{dn\ u} \end{array}$$

totalizando assim doze “espécies”.

De (E.1) temos:

$$cn^2u + sn^2u = 1 \tag{E.6}$$

que generaliza $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

De $x^2 + y^2 = r^2$, (E.3), (E.4), (E.5), (E.6) e $m = 1 - 1/a^2$ temos

$$dn^2u + m\ sn^2u = 1 \tag{E.7}$$

De

$$\theta = \text{arc\ tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

temos

$$d\theta = \frac{1}{r^2}(x\,dy - y\,dx)$$

Mas

$$du = r\,d\theta = \frac{1}{r}(x\,dy - y\,dx)$$

e de (E.1):

$$\frac{x\,dx}{a^2} + y\,dy = 0$$

de onde concluímos que

$$dy = -\frac{x}{a^2y}dx$$

ou

$$dx = -\frac{a^2y}{x}dy$$

e assim temos a variação correspondente du :

$$du = \frac{1}{r} \left(-\frac{x^2}{a^2y} - y \right) dx$$

ou

$$du = \frac{1}{r} \left(x + \frac{a^2y^2}{x} \right) dy$$

Outra variação importante é de $x^2 + y^2 = r^2$:

$$dr = \frac{xdx + ydy}{r}$$

As derivadas são dadas por:

$$\frac{d}{du} sn u = \frac{dy}{du} = \frac{dy}{\frac{1}{r} \left(x + \frac{a^2y^2}{x} \right) dy} = cn u \quad dn u \quad (E.8)$$

(e analogamente:)

$$\frac{d}{du} cn u = -sn u \quad dn u \quad (E.9)$$

$$\frac{d}{du} dn u = -m sn u \quad cn u \quad (E.10)$$

conforme utilizamos no capítulo 6.

Também no capítulo 6 mencionamos que

$$m \rightarrow 1 \Rightarrow cn u \rightarrow sech u$$

e nesse texto

$$m \rightarrow 0 \Rightarrow cn u \rightarrow cos u$$

Tais situações podem ser verificadas graficamente nas próximas páginas mediante variação do parâmetro m .

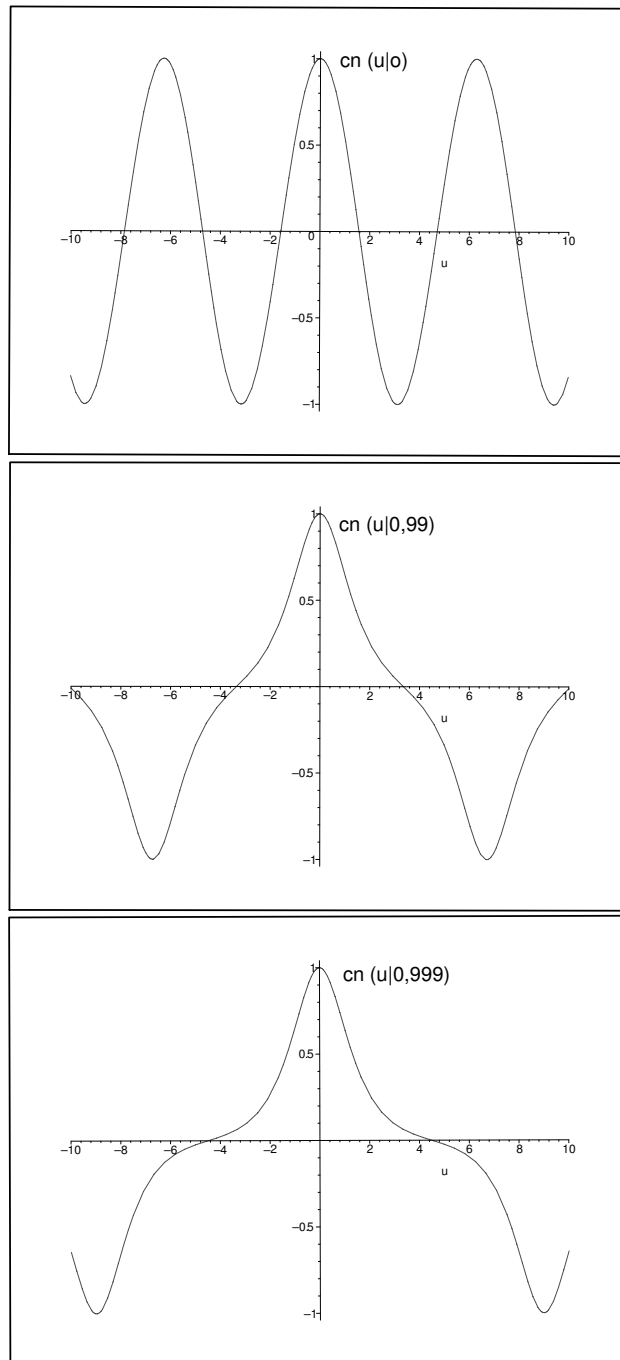


Figura E.2: Parâmetro $m = 0$, $m = 0,99$ e $m = 0,999$ respectivamente. Notamos que $cn(u|0) = \cos(u)$.

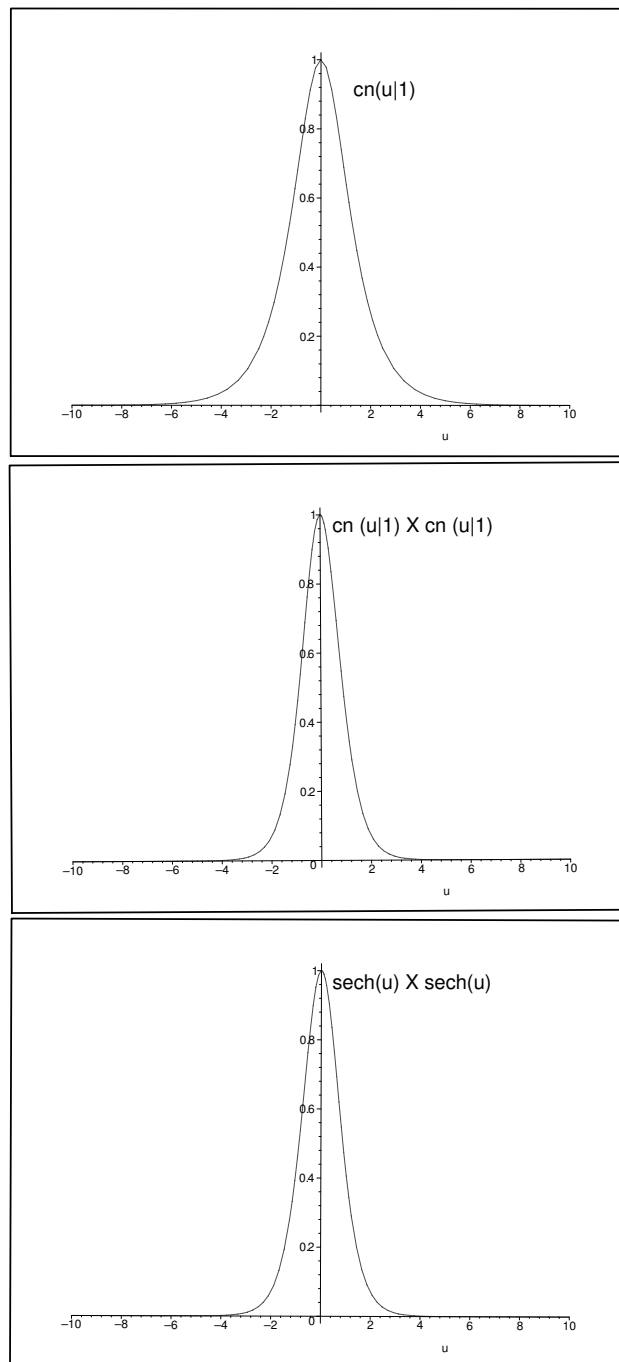


Figura E.3: Parâmetro $m = 1$: $cn(u|1) = sech(u)$. Notamos também $cn^2(u|1) = sech^2(u)$.

Referências Bibliográficas

- [1] J.Y. Ollitrault, *Eur. J. Phys.* **29**, 275 (2008); arXiv:0708.2433 [nucl-th].
- [2] U. Heinz, *J. Phys.* **G31**, S717 (2005); for a recent review see P.F. Kolb, U. Heinz, in “Quark Gluon Plasma 3”, Editors: R.C. Hwa and X.-N. Wang, World Scientific, Singapore, (2003) p. 634; nucl-th/0305084.
- [3] R.B. Clare and D. Strottman, *Phys. Rept.* **141**, 177 (1986).
- [4] Y. Hama, T. Kodama and O. Socolowski Jr., *Braz. J. Phys.* **35**, 24 (2005);
- [5] P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. Huovinen, K. J. Eskola and K. Tuominen, *Nucl. Phys.* **A696**, 197 (2001).
- [6] U. W. Heinz, H. Song and A. K. Chaudhuri, *Phys. Rev.* **C73**, 034904 (2006).
- [7] K. Paech, H. Stoecker and A. Dumitru, *Phys. Rev.* **C68**, 044907 (2003).
- [8] M. A. Preston, “Physics of the nucleus”, Addison-Wesley, 1981.
- [9] J. R. Nix, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **2**, 237 (1979).
- [10] H. Stöcker et al., *Prog. Part. Nucl. Phys.* **4**, 133 (1980).
- [11] U. Heinz, nucl-th/0412094; para uma revisão recente veja P.F. Kolb, U. Heinz, “Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions”, in “Quark Gluon Plasma 3”, Editors: R.C. Hwa and X.-N. Wang, World Scientific, Singapore, (2003) p. 634; nucl-th/0305084.

- [12] K. H. Ackermann *et al.* [STAR Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **86**, 402 (2001); P. Huovinen, P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. V. Ruuskanen and S. A. Voloshin, *Phys. Lett.* **B503**, 58 (2001); S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **91**, 182301 (2003).
- [13] L. M. Satarov, H. Stoecker and I. N. Mishustin, *Phys. Lett.* **B627**, 64 (2005); T. Renk and J. Ruppert, *Phys. Rev.* **C73**, 011901 (2006); T. Renk and J. Ruppert, *Phys. Lett.* **B646**, 19 (2007); B. Betz, P. Rau and H. Stoecker, *Int. J. Mod. Phys.* **E16**, 3082 (2008).
- [14] H. Stoecker, B. Betz and P. Rau, *PoS C POD2006*, 029 (2006); [arXiv:nucl-th/0703054].
- [15] S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **97**, 052301 (2006).
- [16] J. Adams *et al.*, STAR Collab. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 152301 (2005).
- [17] H. G. Baumgardt *et al.*, *Z. Phys.* **A273**, 359 (1975).
- [18] M. Sobel, P. Siemens, J. Bondorff and H. Bethe, *Nucl. Phys.* **A251**, 502 (1975).
- [19] V.A. Khodel, N.N. Kurilkin, and I.N. Mishustin, *Phys. Lett.* **B90**, 37 (1980).
- [20] I. Easson, *Nucl. Phys.* **A363**, 69 (1981).
- [21] G.N. Fowler, S. Raha, N. Stelte and R.M. Weiner, *Phys. Lett.* **B115**, 286 (1982); S. Raha and R.M. Weiner, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 407 (1983); E.F. Hefter, S. Raha and R.M. Weiner, *Phys. Rev.* **C32**, 2201 (1985).
- [22] S. Raha, K. Wehrberger and R.M. Weiner, *Nucl. Phys.* **A433**, 427 (1984).
- [23] A.Y. Abul-Magd, I. El-Taher and F.M. Khaliel, *Phys. Rev.* **C45**, 448 (1992).
- [24] A.E. Glassgold, W. Heckrotte and K.M. Watson, *Ann. Phys. (N.Y.)* **6**, 1 (1959) e referências ali citadas.

- [25] A.A. Amsden, G.F. Bertsch, F.H. Harlow and J.R. Nix, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 905 (1975).
- [26] E.F. Hefter, S. Raha and R.M. Weiner, *Phys. Rev.* **C32**, 2201 (1985).
- [27] D. Vautherin and D. Brink, *Phys. Rev.* **C5**, 626 (1972).
- [28] D.A. Fogaça and F.S. Navarra, *Phys. Lett.* **B639**, 629 (2006).
- [29] N.K. Glendenning, *Astrophys. J.* **293**, 470 (1985).
- [30] N.K. Glendenning and S.A. Moszkowski, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2414 (1991).
- [31] A.L. Espindola and D.P. Menezes, *Phys. Rev.* **C65**, 045803 (2002); A.M.S. Santos and D.P. Menezes, *Braz. J. Phys.* **34**, 833 (2004).
- [32] R.J. Furnstahl, *Lect. Notes Phys.* **641**, 1 (2004); B.D. Serot, *Int. J. Mod. Phys.* **A19S1**, 107 (2004) e referências ali citadas.
- [33] B.D. Serot and J.D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics* **16**, 1 (1986).
- [34] D.A. Fogaça and F.S. Navarra, *Phys. Lett.* **B645**, 408 (2007).
- [35] D.A. Fogaça and F.S. Navarra, *Nucl. Phys.* **A790**, 619c (2007).
- [36] D.A. Fogaça, *Braz. J. Phys.* **vol. 37**, no. 1, 92 (2007).
- [37] D.A. Fogaça and F.S. Navarra, *Int. J. Mod. Phys.* **E16**, 3019 (2007).
- [38] D.A. Fogaça, L. G. Ferreira Filho and F.S. Navarra, *Nucl. Phys.* **A819**, 150 (2009).
- [39] Casalderrey-Solana, J., Shuryak, E.V., Teaney, D., (2005) hep-ph/0411315 e (2006) hep-ph/0602183.
- [40] R.B. Neufeld, B. Müller, J. Ruppert, (2008) hep-ph/08022254.
- [41] P.M. Chesler, L.G. Yaffe, (2007) hep-th/07060368 e (2007) hep-th/07120050.
- [42] D. J. Korteweg and G. De Vries, “*On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves.*”, *Phil. Mag.*, 39:442-443, 1895.

- [43] Morikazu Toda, “*Nonlinear waves and solitons.*”, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
- [44] Alwyn C. Scott, F. Y. F. Chu and David W. McLaughlin, *Proceedings of the IEEE* **61**, 1443 (1973).
- [45] J.-K. Xue, *Phys. Lett.* **A322**, 225 (2004).
- [46] Lü Ke-Pu, Dou Fu-Quan et al., *Chinese Physics* **14**, 33 (2005).
- [47] L.K. Pu, D. Fu-Quan, S. Jian-An, D. Wen-Shan, S. Yu-Ren, *Chinese Phys.* **14**, 33 (2005); *Chinese Phys. Lett.* **18**, 1088 (2001).
- [48] M. L. Wang, *Phys. Lett.* **A199**, 169 (1995).
- [49] L. Yang, J., K. Yang, *Phys. Lett.* **A278**, 167 (2001).
- [50] N. A. Kudryashov, *Phys. Lett.* **A147**, 287 (1990).
- [51] W. Malfliet, *Am. J. Phys.* **60**, 650 (1992).
- [52] M. Inc, *Soochow J. Math.* **30**, 91 (2004).
- [53] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, “Soliton: Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering”, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [54] R. M. Miura, “Bäcklund Transformation”, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [55] R. Hirota, J. Satsuma, *Phys. Lett.* **A85**, 407 (1981).
- [56] Z. Yan, H. Q. Zhang, *Phys. Lett.* **A285**, 355 (2001).
- [57] A. V. Porubov, *Phys. Lett.* **A221**, 391 (1996).
- [58] K. W. Chow, *J. Math. Phys.* **36**, 4125 (1995).
- [59] Z. Yan, H. Q. Zhang, *Phys. Lett.* **A252**, 291 (1999).
- [60] M. Inc, D. J. Evans, *Intern. J. Computer Math.* **81**, 191 (2004).
- [61] E. G. Fan, *J. Phys.* **A35**, 6853 (2002).
- [62] S. Maxon and J. Viecelli, *Phys. Fluids* **17**, 1614 (1974).

- [63] S. Maxon and J. Viecelli, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 4 (1974).
- [64] F. Calogero and A. Degasperis, *Lett. Nuovo Cimento* **23**, 150 (1978).
- [65] R.S. Johnson, *Phys. Lett.* **A72**, 197 (1979).
- [66] N.C. Freeman, *Adv. Appl. Mech.* **20**, 1 (1980).
- [67] R.S. Johnson, *J. Fluid Mech.* **97**, 701 (1980).
- [68] J.M. Miles, *J. Fluid Mech.* **84**, 181 (1978).
- [69] Biswajit Sahu, Rajkumar Rouychoudhury, *Physics of Plasmas* **10**, 4162 (2003).
- [70] P. G. Drazin and R. S. Johnson, “Solitons: An Introduction”, Cambridge University Press, 1989.
- [71] R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.* **9**, 1204 (1968).
- [72] A. H. Khater, M. H. M. Moussa, and S. F. Abdul-Aziz, *Chaos, Solitons and Fractals* **14**, 1389 (2002).
- [73] A. H. Khater, M. H. M. Moussa, and S. F. Abdul-Aziz, *Chaos, Solitons and Fractals* **15**, 1 (2003).
- [74] F. Cooper, C. Lucheroni, H. Shepard, P. Sodano, (1992) hep-ph/9210226.
- [75] G. B. Arfken and H. J. Weber, “Mathematical Methods for Physicists”, Academic Press, 1995.
- [76] Landau, L.D., *Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz.* **17**, 51 (1953).
- [77] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, New York: Wiley, 1972.
- [78] L. Landau and E. Lifchitz, “Fluid Mechanics”, Pergamon Press, Oxford, (1987).
- [79] N. Sasaki, O. Miyamura, S. Muroya, C. Nonaka, *Europhys. Lett.* **54**, 38 (2001); *Phys. Rev.* **C62**, 011901 (2000).

- [80] R. J. Furnstahl, B. D. Serot, *Phys. Rev.* **C41**, 262 (1990).
- [81] R. C. Davidson, “Methods in Nonlinear Plasma Theory”, Academic Press, New York an London, 1972, páginas 20 e 21.
- [82] Shikuo Liu, Zuntao Fu, Shida Liu and Qiang Zhao, *Phys. Lett.* **A289**, 69 (2001).
- [83] Zuntao Fu, Shikuo Liu, Shida Liu and Qiang Zhao, *Phys. Lett.* **A290**, 72 (2001).
- [84] Zuntao Fu, Shida Liu, Shikuo Liu and Qiang Zhao, *Applied Mathematics and Mechanics* **25**, 73 (2004).
- [85] A. H. Khater, M. M. Hassan and R. S. Temsah, *Journal of the Physical Society of Japan* **74**, 1431 (2005).
- [86] A. L. Fetter and J. D. Walecka, “Quantum Theory of Many-Particle Systems”, New York: McGraw-Hill, 1971.
- [87] Jianfa Gu, Hua Guo, Xiguo Li, Yuxin Liu, and Furong Xu, *Phys. Rev.* **C73**, 055803 (2006).
- [88] R.J. Furnstahl, B.D. Serot and H.B. Tang, *Nucl. Phys.* **A615**, 441 (1997).
- [89] R. Reif, “Fundamentals os statistical and thermal physics”, New York: McGraw-Hill, 1965.
- [90] N.D. Minh, “The principle of least action for fields containing higher order derivatives”, arXiv:0807.4431 [hep-th] e referências ali citadas.
- [91] R.Kubo, “Reports on Progress in Physics” **29**, 255 (1966).
- [92] F. Bowman, “Introduction to Elliptic Functions with Applications”, Universities, London, 1959.
- [93] V. Prasolov, Y. Solovyev, “Elliptic Functions and Elliptic Integrals”, 1997.