

ПРОБЛЕМЫ
КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ
ПОЛЯ

ДУБНА-88

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

JINR - Д2-87-798

**Труды
VIII Международного Совещания
по проблемам
квантовой теории поля**

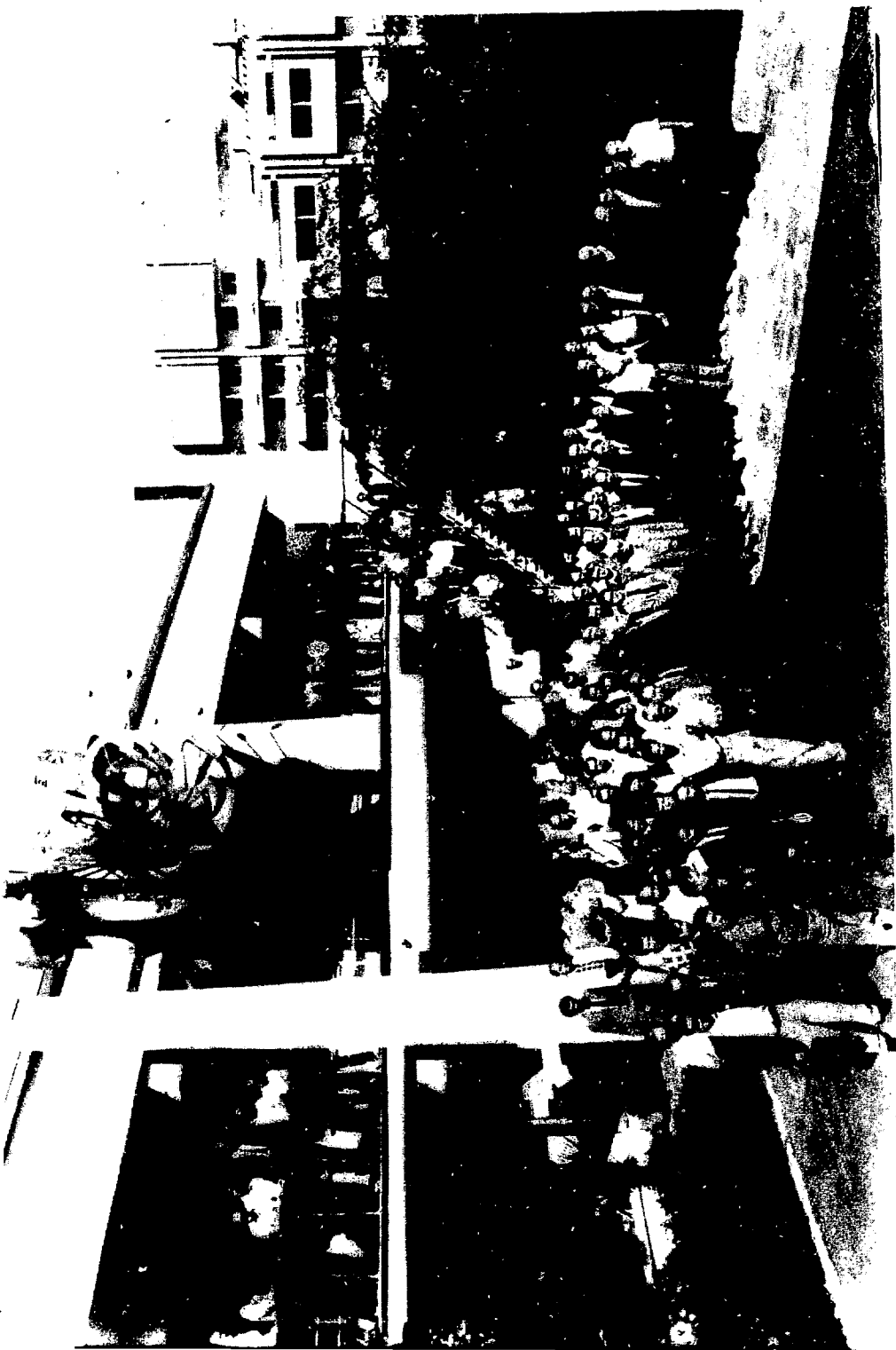
Алушта, 1987

□

**Proceedings
of the VIII International Conference
on the Problems
of Quantum Field Theory**

Alushta, 1987

Дубна 1987



СОСТАВ ОРГКОМИТЕТА

БОГОЛЮБОВ Николай Николаевич - председатель
БОГОЛЮБОВ Павел Николаевич - заместитель председателя
ДОРОХОВ Александр Евгеньевич - ученый секретарь
ВОЛКОВ Михаил Константинович - член Оргкомитета
КАПУСЦИК Эдвард - " -
КЛЮЕВ Евгений Николаевич - " -
МЕЩЕРЯКОВ Владимир Алексеевич - " -
СМОНДЫРЕВ Михаил Константинович - " -
ИСАЕВА Надежда Сергеевна - секретарь

с 11 по 16 октября 1987 года в г. Алуште состоялось УШ Международное совещание по проблемам квантовой теории поля.

На совещании обсуждались следующие вопросы теоретической и математической физики:

- математические проблемы квантовой теории поля и статистики;
- калибровочные теории и КХД;
- кварковые модели и феноменология элементарных частиц;
- теории объединения, суперсимметрии, суперструны;
- нейтринная физика, теория многих тел, гравитация.

В работе совещания приняли участие около 120 специалистов из 11 стран. Было заслушано и обсуждено 67 докладов, 16 из которых носили обзорный характер. В Трудах совещания публикуются обзорные доклады и некоторые приглашенные сообщения. Полный список докладов и сообщений, представленных на совещании, и список участников приводятся в конце книги. Надеемся, что предлагаемый сборник с достаточной полнотой отразит характер совещания.

Оргкомитет

О Г Л А В Л Е Н И Е

Вступительное слово академика Н.Н.Боголюбова

6

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И СТАТИСТИКИ

А.Н.Лезнов О двумеризации четырехмерной системы уравнений автодуальности Янга-Миллса	8
В.К.Мельников О динамике двумерных солитонов	11
S.R.de Groot On the Transport Coefficients of Mixtures Containing Neutrinos	27
В.В.Курышкин, Э.Э.Энтральго Нестандартные алгебры операторов рождения и уничтожения в релятивистской теории квантованных полей	35
Г.П.Джорджадзе, А.Н.Квинихидзе, Г.А.Чечелашвили Представление S-матрицы в формализме функционального интегрирования	42
В.А.Смирнов, К.Г.Четыркин Асимптотические разложения, метод склеивания и P^* -операция	48
Н.А.Черников Псевдотензор энергии-импульса как функционал фоновой связности	54
В.И.Юкалов Теория возмущений по сглаженному потенциалу для сильновзаимодействующих статистических систем	62

II. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ И КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

А.В.Радюшкин Пертурбативная квантовая хромодинамика	75
M.D.Scadron Additivity of Quark Masses in Gauge Theories	84
V.Elias, T.G.Steele Field Theoretic Consistency of QCD Operator Product Expansion Contributions from Chiral Non-Invariant Condensates	90
А.Т.Филиппов Калибровочные симметрии в теориях релятивистских частиц и суперструн	100
I.Ya.Aref'eva String Field Theory	117
Р.М.Ибадов, В.Г.Кадышевский Новая точка зрения на вспомогательные поля в суперсимметричных моделях	141
N.Ilieva Minimal Quantization of Two-Dimensional Models with Chiral Anomalies	146

Л.Л.Енковский, Б.В.Струминский КХД и дифракция	160
С.И.Азаков Кварк-глюонная плазма при конечной плотности барионов и в пределе больших N_c	165

III. КВАРКОВЫЕ МОДЕЛИ И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

П.Н.Боголюбов, А.Е.Дорохов, Н.И.Кочелев Структура вакуума КХД в модели кварковых мешков	174
М.К.Волков, А.Н.Иванов, Н.И.Троицкая Каоны в кварковой модели сверхпроводящего типа	190
Г.В.Ефимов, М.А.Иванов Конфайнмент и кварковая структура адронов	211
M.D.Scadron Dynamical Origin of the Cabibbo Angle and Kaon $\Delta I = 1/2$ Rule	225
В.О.Галкин, Р.Н.Фаустов Массы и ширины радиационных распадов мезонов в релятивистской кварковой модели	231
А.Н.Сисаян, А.Н.Квинихидзе, А.М.Хведелидзе Глубоконеупругое рассеяние в формализме с волновыми функциями покоящихся составных систем	239
Н.С.Шавахина Ареальные объекты в физике взаимодействия релятивистских частиц	246
Э.Д.Каграманов, Р.М.Мир-Касимов, Ш.М.Нагиев Модель линейного осциллятора в релятивистском configura- ционном представлении	256
А.Б.Говорков Поколения лептонов и кварков и алгебра лостоктонионов	262

IV. ТЕОРИИ ОБЪЕДИНЕНИЯ, СУПЕРСИММЕТРИИ, СУПЕРСТРУНЫ

А.С.Гальперин, Е.А.Иванов, В.И.Огневский, Е.С.Сокачев Гармоническое суперпространство. Результаты и перспективы	267
А.А.Славнов Спонтанное нарушение суперсимметрии	283
М.Л.Чавлейшвили Низкоэнергетические теоремы в суперсимметрии	292
E.Ch.Christova, N.P.Nedelcheva Possible Tests for Lightest Supersymmetric Particle in Polarized e^+e^- -Collisions	301
S.M.Bilenky, B.M.Pontecorvo Neutrinos Today in the Universe and in the Laboratory	310

Уважаемые гости, дорогие друзья!

Разрешите мне открыть УШ Международное совещание по проблемам квантовой теории поля, которое традиционно организуется в Алуште Объединенным институтом ядерных исследований.

Я очень рад приветствовать всех участников совещания, прибывших в Алушту из многих стран мира. В частности, я приветствую профессоров Гюрсея и Скадрона из Соединенных Штатов Америки, профессора Феррару из ЦЕРНа, Бруно Максимовича Понтекорво, Федора Ивановича Федорова, Михаила Григорьевича Мещерякова, Дмитрия Васильевича Ширкова, Якова Абрамовича Смородинского. Их присутствие свидетельствует о высоком научном ранге нашего совещания и о его авторитете среди ученых. Этот авторитет завоеван предыдущими совещаниями, и позвольте мне выразить уверенность в том, что и нынешнее совещание пройдет не менее успешно. Уверенность эта обусловлена не только количеством и квалификацией участников, но прежде всего программой, которую нам придется реализовать. Как можно убедиться, программа совещания охватывает многие наиболее актуальные и важные проблемы квантовой физики, прежде всего квантовой теории поля. Мы будем обсуждать и самые трудные математические проблемы, и самые интересные физические применения квантовой теории поля. Большое внимание уделим проблемам квантовой теории калибровочных полей и, в частности, квантовой хромодинамики.

Многие доклады будут касаться кварковых моделей и феноменологии элементарных частиц, теории объединения, суперсимметрии, суперструн, теории гравитации и теории многих тел.

Этот беглый перечень вопросов показывает огромное богатство современных методов квантовой теории поля, теории, которая преодолела в своей истории много серьезных трудностей и фундаментального, и вычислительного характера, теории исключительно жизнеспособной и привлекающей внимание все новых и новых поколений физиков-теоретиков.

Алуштинские совещания по проблемам квантовой теории поля сыграли и впредь будут играть важную роль в развитии квантовой теории поля. Здесь ученые представляют свои результаты, подвергают их научной критике. Все это позволило совершенствоваться многим идеям, впервые увидевшим свет на совещаниях в Алушге.

Труды совещания в Алуште постоянно цитируются в научной литературе, и это значит, что мы достигли значительных результатов. Кроме печатных материалов, не менее важной является та живая научная атмосфера, в которой всегда проходили наши совещания в Алуште и которая несомненно будет присутствовать и на этот раз.

Позвольте мне от имени Оргкомитета совещания пожелать всем участникам успешной работы, хорошего самочувствия, накопления новых идей, которые вернутся к нам на следующем совещании в виде новых интересных научных направлений.

Позвольте также от вашего имени поблагодарить всех сотрудников нашего гостеприимного Дома отдыха, которые всегда обеспечивали нам прекрасные условия для работы и отдыха.

Спасибо за внимание.

Н. Н. Боголюбов

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ АВТОДУАЛЬНОСТИ ИНГА-МАЛЛСА

А.Н. Лезнов

Институт физики высоких энергий, Серпухов

Показано, что широкий класс решений системы автодуальных уравнений, зависящих от набора произвольных функций трех независимых аргументов, может быть получен из решения двумерной задачи, связанной с задачей главного кирального поля в пространстве бесконечной размерности.

I. Система уравнений задачи главного кирального поля в пространстве n измерений с независимыми аргументами x_i ($1 \leq i \leq n$) есть система $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений

$$(x_i - x_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \quad (I)$$

на функцию f , принимающую значения в некоторой алгебре; x_i - набор n числовых параметров $1/i$.

Континуальный аналог при переходе к бесконечному пространству возникает из (I) заменой обычных производных на функциональные и выглядит следующим образом:

$$(x - x') \frac{\delta^2 f}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(x')} = \left[\frac{\delta f}{\delta \varphi(x)}, \frac{\delta f}{\delta \varphi(x')} \right]. \quad (II)$$

Функциональная производная $\frac{\delta f}{\delta \varphi(x)}$ при фиксированном значении независимого аргумента $\varphi(x) = g$ превращается в обычную функцию двух независимых аргументов x и g , для которой мы примем обозначение

$$\frac{\delta f}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi(x)=g} = F(x, g).$$

Уравнение для F возникает из (2) с учетом очевидного равенства

$$\int \frac{\delta^2 f}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(x')} \Big|_{\varphi=g} dx' = \frac{\partial}{\partial g} \frac{\delta f}{\delta \varphi(x)} \Big|_{\varphi=g} = \frac{\partial F}{\partial g},$$

которое вытекает из разложения f в функциональный ряд по φ

$f = c + \int K(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda + \int K(\lambda, \lambda') \varphi(\lambda) \varphi(\lambda') d\lambda d\lambda' + \dots$ и непос-
редственной проверки приведенного выше равенства. На этом пути для
 F получаем уравнение

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial g} = \left[F(\lambda) \int \frac{d\lambda' F(\lambda')}{\lambda - \lambda'} \right]. \quad (3)$$

Отметим, что приведенная выше процедура отождествления функции вклю-
чения взаимодействия с константой связи в аксиоматическом подходе
Н.Н.Логолобова в квантовой теории поля использовалась в диссертации
Д.А. Киржница для составления уравнений теории, где константа
взаимодействия выступала в роли активной динамической переменной.

2. Система автодуальных уравнений на параметры элемента неко-
торой группы G , рассматриваемые как функции четырех независимых
аргументов $y, \bar{y}, z, \bar{z}$, имеет вид ^{2/}:

$$(G_{\bar{y}} G^{-1})_y + (G_{\bar{z}} G^{-1})_z = 0$$

и может быть частично разрешена введением элемента f , принимаю-
щего значения в соответствующей алгебре $G_{\bar{y}} G^{-1} = f_z, G_{\bar{z}} G^{-1} = -f_y$
и удовлетворяющего уравнению

$$f_{z\bar{z}} + f_{y\bar{y}} + [f_y f_z] = 0. \quad (4)$$

Будем решать (4) итерациями, вводя параметр малости g перед квад-
ратичным членом в (4). В нулевом приближении имеем

$$f_{z\bar{z}}^0 + f_{y\bar{y}}^0 = 0. \quad (5)$$

В качестве f^0 примем $f^0 = \int F^0(\lambda) d\lambda \equiv \int F^0(y, \lambda, z, \bar{y}, \lambda)$,
очевидным образом удовлетворяющее (5) с произвольной операторнознач-
ной функцией F^0 своих аргументов. Члены первого приближения удов-
летворяют уравнению

$$f_{y\bar{y}}^1 + f_{z\bar{z}}^1 + [f_y^0 f_z^0] = 0, \quad (6)$$

для решения которого рассмотрим

$$F^1(\lambda) = \left[F^0(\lambda) \int \frac{d\lambda' F^0(\lambda')}{\lambda - \lambda'} \right];$$

из определения F^0 вытекает $F_{\bar{z}}^0 = \lambda F_y^0, F_y^0 = -\lambda F_{\bar{z}}^0$, откуда
следует

$$F_2' = \lambda F_y' - [F^0, \int \bar{F}_2^0(u) du], \quad F_y' = -\lambda F_2' + [F^0, \int \bar{F}_2^0(u) du]$$

$$F_{22}'' + F_{yy}'' + [F_y^0 \int \bar{F}_2^0(u) du] + [\int \bar{F}_2^0(u) du, F_2^0(u)] = 0.$$

Взяв интеграл по λ от последнего равенства, убеждаемся, что

$$f' = \frac{1}{2\lambda} \int \bar{F}^0(u) du$$

удовлетворяет (6). Продолжая процесс редукции, получаем, что

$$f'' = \frac{1}{(\lambda+1)!} \int \bar{F}^0(u) du \quad (7)$$

$$F^0(u) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} C_{\alpha-1}^{\alpha} [F^{\alpha}(u) \int \frac{\bar{F}^{n-1-\alpha}(u') du'}{\lambda - \lambda'}]$$

удовлетворяет системе уравнений для членов n приближения

$$f_{22}'' + f_{yy}'' + \sum_{\alpha=0}^{n-1} [f_y'' f_2^{n-1-\alpha}] = 0.$$

Домножая (7) на g^{n-1} и вводя в рассмотрение функцию $\bar{F}(g, \lambda)$ $F(g, \lambda) \equiv \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{g^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}} F^{\alpha}(u)$, убеждаемся, что F удовлетворяет уравнению (3) предыдущего раздела. Таким образом, любое решение (3) с начальным условием $F|_{g=0} = F^0(y + i\bar{z}, z - i\bar{y}, \lambda)$ приводит к решению системы автодуальных уравнений Инта - Виллса (4) по формуле

$$f = \frac{1}{g} \int dg' \int du' F(u, g'), \quad (8)$$

являющейся непосредственным следствием определения f из (7).

3. Основной результат настоящей работы содержится в формулах (3), (8), сводящих решение задачи четырехмерных уравнений автодуальности (1) к решению системы уравнений (3) в двумерном пространстве с заданными начальными условиями. Уравнение (3) было получено в работе [3] при ином выборе константы взаимодействия, чем это сделано в настоящей работе (это, по-видимому, свидетельствует о фундаментальном характере системы (3)), конкретная связь между решениями системы (1) с задачей главного кирального поля в бесконечномерном пространстве установлена в [4].

Основной вопрос о свойствах алгебры внутренней симметрии уравнения (4), следствием которого являются результаты настоящей работы, остался, однако, без ответа и требует дальнейшего изучения, равно как и вопрос о перечислении взаимодействий, отличных от (4), в четырехмерном пространстве, которые могут быть двумеризованы.

Литература

1. А.Н. Лезнов, В.Н. Манько, С.Н. Чумаков. Труды МИАН № 159 М., 1986.
2. H.K. Frasad. Physica 1 D (1980) p. 167-191.
3. А.Н. Лезнов, М.А. Мухтаров. Препринт ИФЭ 86-191, Серпухов, 1986.
4. А.Н. Лезнов. Препринт ИВЭ, ОТФ 86-189, Серпухов, 1986.

О ДИНАМИКЕ ДВУМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

В.К. Мельников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Динамика двумерных солитонов существенно богаче динамики одномерных солитонов. Для этого есть несколько причин. В то время как одномерные солитоны определяются одним, вообще говоря, комплексным параметром, двумерные солитоны в случае общего положения определяются двумя комплексными параметрами. При этом парное взаимодействие двумерных солитонов носит упругий характер, если только оба параметра одного из взаимодействующих солитонов отличаются от соответствующих параметров другого солитона. Если же хотя бы один из параметров одного солитона совпадает с аналогичным параметром другого солитона, то взаимодействие этой пары солитонов теряет упругий характер. В этой ситуации двусолитонное решение может описывать далеко не тривиальные процессы, например, гашение волн, отражение волн, распад и слияние волн, излучение и поглощение волн и т.д. Более того, в некоторых случаях двусолитонное решение вообще не является уединенной волной. Далее, динамика двумерных солитонов существенно зависит от конкретного вида уравнений и сильно меняется даже при простейших преобразованиях одних лишь независимых переменных.

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial x} |\varphi|^2 = 0, \quad i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = u\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (1)$$

описывающую (при определенных условиях) взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу $1/4$. Здесь u - амплитуда длинной волны,

φ - комплексная огибающая пакета коротких волн, параметр κ удовлетворяет условию $\kappa^2 = 1$. С помощью замены $x \rightarrow -x, y \rightarrow t, t \rightarrow y$ система (1) приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2 = 0, \quad i \frac{\partial \psi}{\partial y} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Наконец, полагая

$$w(x, y, t) = u(x, y, t-y), \quad \eta(x, y, t) = \varphi(x, y, t-y).$$

легко находим, что в силу (I) функции $w(x, y, t)$ и $\eta(x, y, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2\kappa \frac{\partial}{\partial x} |\eta|^2, \quad i \frac{\partial \eta}{\partial t} = w\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Эта система с точностью до обозначений совпадает с приведенной в работе^[2] системой (7.9I). Как известно^[3,4], система (I) допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния. Отсюда следует, что к системам (2) и (3) также применим этот метод. При этом оказывается, что динамика солитонов этих систем имеет существенные различия, на которые будет указано ниже.

§ I. Двухсолитонное решение системы (I)

Система (I) обладает односолитонным решением вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\sigma y+2vt)+\delta]}, \quad (4)$$

$$\varphi = c \frac{\exp[i\nu x + i\tau y - i(\mu^2 - \nu^2)t]}{ch[\mu(x+2\sigma y+2vt)+\delta]},$$

где вещественные параметры μ, ν, σ и комплексная величина c удовлетворяет единственному условию

$$\kappa |c|^2 + 2(\nu - \sigma)\mu^2 = 0, \quad (5)$$

а величины δ, τ и $\arg c$ принимают произвольные вещественные значения. Параметры δ и $\arg c$ характеризуют положение солитона (4) в пространстве - времени и с помощью замены $x \rightarrow x + x_0$, $t \rightarrow t + t_0$ могут быть изменены на произвольные, например, равные нулю, если $\mu^2 + \nu^2 > 0$. Таким образом, солитон (4) полностью определяется (с точностью до положения в пространстве - времени) четырьмя вещественными параметрами μ, ν, σ, τ . Образует с их помощью две комплексные величины

$$\omega = \mu + i\nu, \quad \rho^2 = \tau + 2i\mu\sigma + \bar{\omega}^2, \quad (6)$$

где черта, как и всюду в дальнейшем, означает комплексное сопряжение. Как будет видно из последующего, качественный характер взаимодействия солитонов (4) полностью определяется параметрами (6).

Мы продемонстрируем это утверждение на простейшем примере двухсолитонного решения. С этой целью возьмем функции D и ϕ вида

$$D = 1 + \alpha_1 \exp[2\mu_1(x + 2\sigma_1 y + 2\nu_1 t)] + \alpha_2 \exp[2\mu_2(x + 2\sigma_2 y + 2\nu_2 t)] + \\ + 2\beta_0 \exp[\mu_1(x + 2\sigma_1 y + 2\nu_1 t) + \mu_2(x + 2\sigma_2 y + 2\nu_2 t)] \cos \theta + \\ + \gamma_0 \exp[2\mu_1(x + 2\sigma_1 y + 2\nu_1 t) + 2\mu_2(x + 2\sigma_2 y + 2\nu_2 t)],$$

$$\Phi = 2a_1 \{ 1 + \beta_2 \exp[2\mu_2(x + 2\sigma_2 y + 2\nu_2 t)] \} \exp[\mu_1(x + 2\sigma_1 y + 2\nu_1 t) + i\nu_1 x + i\tau_1 y - i(\mu_1^2 - \nu_1^2)t] + \quad (7)$$

$$+ 2a_2 \{ 1 + \beta_1 \exp[2\mu_1(x + 2\sigma_1 y + 2\nu_1 t)] \} \exp[\mu_2(x + 2\sigma_2 y + 2\nu_2 t) + i\nu_2 x + i\tau_2 y - i(\mu_2^2 - \nu_2^2)t],$$

где

$$\omega_1 = \mu_1 + i\nu_1, \quad \omega_2 = \mu_2 + i\nu_2,$$

$$\rho_1^2 = \tau_1 + 2i\mu_1\sigma_1 + \bar{\omega}_1^2, \quad \rho_2^2 = \tau_2 + 2i\mu_2\sigma_2 + \bar{\omega}_2^2,$$

$$\alpha_1 = \frac{\kappa |a_1|^2}{2(\sigma_1 - \nu_1)\mu_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\kappa |a_2|^2}{2(\sigma_2 - \nu_2)\mu_2^2}, \quad (8)$$

$$\beta_0^2 = \frac{|\omega_1 + \bar{\omega}_1| |\omega_2 + \bar{\omega}_2| |\rho_1^2 - \bar{\rho}_1^2| |\rho_2^2 - \bar{\rho}_2^2|}{|\omega_1 + \bar{\omega}_2|^2 |\rho_1^2 - \bar{\rho}_1^2|^2} |\alpha_1 \alpha_2|,$$

$$\gamma_0 = \alpha_1 \alpha_2 \left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \bar{\omega}_2} \right|^2 \left| \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 - \bar{\rho}_1^2} \right|^2,$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \frac{\omega_2 - \bar{\omega}_1}{\omega_2 + \bar{\omega}_1} \frac{\bar{\rho}_2^2 - \bar{\rho}_1^2}{\bar{\rho}_2^2 - \rho_1^2}, \quad \beta_2 = \alpha_2 \frac{\omega_1 - \bar{\omega}_2}{\omega_1 + \bar{\omega}_2} \frac{\bar{\rho}_1^2 - \bar{\rho}_2^2}{\bar{\rho}_1^2 - \rho_2^2},$$

$$\theta = (\nu_1 - \nu_2)x + (\tau_1 - \tau_2)y - (\mu_1^2 - \nu_1^2 - \mu_2^2 + \nu_2^2)t + \theta_0.$$

На основании результатов работы⁴ функции

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D, \quad \varphi = \frac{\Phi}{D} \quad (9)$$

удовлетворяют системе (I), т.е. являются её решением. Нетрудно убедиться, что если выполнены условия

$$(\sigma_1 - \nu_1)\kappa > 0, \quad (\sigma_2 - \nu_2)\kappa > 0, \quad (10)$$

$$|\omega_1 + \bar{\omega}_1| |\omega_2 + \bar{\omega}_2| |\rho_1^2 - \bar{\rho}_1^2| |\rho_2^2 - \bar{\rho}_2^2| \leq |\omega_1 + \bar{\omega}_2|^2 |\rho_1^2 - \bar{\rho}_1^2|^2, \quad (\text{II})$$

то имеем $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $0 \leq \beta_0^2 \leq \alpha_1 \alpha_2$, $\gamma_0 \geq 0$, и, следовательно, при любых вещественных значениях x, y, t справедливо неравенство $D \geq 1$. Это значит, что определенные посредством (7)–(9) функции u и φ не имеют особенностей при любых вещественных значениях координат x, y, t .

Выясним теперь, каково поведение этого решения. С учетом результатов работы [5] легко получаем, что в типичном случае, т.е. при $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \neq 0$ и $\sigma_1 \neq \sigma_2$, рассматриваемое нами решение описывает взаимодействие двух солитонов вида (4), распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Нелинейный характер взаимодействия приводит к сильному возмущению обоих солитонов в области взаимодействия. Однако при удалении от области взаимодействия вдоль гребня любого из солитонов искажение этого солитона стремится к нулю и на бесконечности остаются только фазовые сдвиги.

В том случае, когда $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$, но $\nu_1 \neq \nu_2$, интересующее нас решение описывает взаимодействие двух солитонов вида (4), распространяющихся на плоскости x, y вдоль одной и той же прямой. Их взаимодействие приводит к существенному искажению каждого из солитонов в течение некоторого ограниченного промежутка времени. Однако при $t \rightarrow \pm \infty$ возмущение обоих солитонов стремится к нулю. Асимптотический вид каждого из взаимодействующих солитонов при $t \rightarrow \infty$ отличается от имевшего место при $t \rightarrow -\infty$ только фазовым сдвигом.

Наконец, при $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\nu_1 = \nu_2$ наше решение описывает одну уединенную волну, получающуюся из двух слившихся солитонов вида (4). Эта волна движется как одно целое. Однако её форма периодически меняется.

Таким образом, при $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \neq 0$ определенное посредством (7)–(II) двусолитонное решение системы (I) описывает три типа упругого взаимодействия двух солитонов вида (4).

Поведение рассматриваемого нами решения меняется радикально, если $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0$. В этом случае при $\sigma_1 \neq \sigma_2$ наше решение описывает процесс гашения одного солитона вида (4) другим солитоном этого же вида. Действительно, возьмем произвольные вещественные ν и σ . Далее, зафиксировав произвольное t , устремимся на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $x + 2\sigma y + 2\nu t = \text{const}$. Нетрудно убедиться, что если σ не является корнем уравнения

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)[(\mu_1 - \mu_2)\sigma - (\mu_1\sigma_1 - \mu_2\sigma_2)] = 0, \quad (\text{I2})$$

то наше решение имеет нулевую асимптотику при удалении в бесконечность вдоль вышеупомянутой прямой.

Выясним теперь, что произойдет, если σ является корнем уравнения (12). Легко видеть, что при удалении в бесконечность вдоль прямой $x + 2\sigma_1 y + 2v_1 t = \text{const.}$ мы обнаружим у нашего решения нулевую асимптотику, если $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu_2 > 0$ и $y \rightarrow \infty$, а при $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu_2 < 0$ и $y \rightarrow -\infty$ наше решение обладает асимптотикой

$$u \sim \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x + 2\sigma_1 y + 2v_1 t) + \delta_1]}, \quad (13)$$

$$\varphi \sim c_1 \frac{\exp[i v_1 x + i \tau_1 y - i(\mu_1^2 - v_1^2)t]}{ch[\mu_1(x + 2\sigma_1 y + 2v_1 t) + \delta_1]},$$

где $\delta_1 = \frac{1}{2} \ln \alpha_1$, $c_1 = a_1 \exp(-\delta_1)$. Наоборот, если $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu_2 < 0$, то при $y \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика (13), а при $y \rightarrow -\infty$ имеет место нулевая асимптотика. Аналогичным образом, устремляясь в бесконечность вдоль прямой $x + 2\sigma_2 y + 2v_2 t = \text{const.}$, мы видим, что при $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu_1 > 0$ и $y \rightarrow \infty$ наше решение имеет нулевую асимптотику, а при $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu_1 < 0$ и $y \rightarrow -\infty$ выполняется асимптотика

$$u \sim \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x + 2\sigma_2 y + 2v_2 t) + \delta_2]}, \quad (14)$$

$$\varphi \sim c_2 \frac{\exp[i v_2 x + i \tau_2 y - i(\mu_2^2 - v_2^2)t]}{ch[\mu_2(x + 2\sigma_2 y + 2v_2 t) + \delta_2]},$$

где $\delta_2 = \frac{1}{2} \ln \alpha_2$, $c_2 = a_2 \exp(-\delta_2)$. Наоборот, если $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu_1 < 0$, то при $y \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика (14), а при $y \rightarrow -\infty$ справедлива нулевая асимптотика. Таким образом, при $\mu_1 = \mu_2$ формулы (13) и (14) исчерпывают все нетривиальные асимптотики нашего решения. Однако при $\mu_1 \neq \mu_2$ существует ещё одно направление, вдоль которого интересующее нас решение имеет нетривиальную асимптотику. Действительно, пусть

$$v_0 = \frac{\mu_1 v_1 - \mu_2 v_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \sigma_0 = \frac{\mu_1 \sigma_1 - \mu_2 \sigma_2}{\mu_1 - \mu_2}. \quad (15)$$

Тогда, устремляясь на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $x+2\sigma_0 y+2\nu_0 t = \text{const.}$, мы видим, что при $(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_1 - \sigma_2) > 0$ и $y \rightarrow \infty$ рассматриваемое нами решение имеет нулевую асимптотику, а при $(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_1 - \sigma_2) < 0$ и $y \rightarrow -\infty$ оно обладает асимптотикой

$$u \sim 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D_0, \quad \varphi \sim 0, \quad (I6)$$

где

$$D_0 = \alpha_1 \exp[2\mu_1(x+2\sigma_0 y+2\nu_0 t)] + \alpha_2 \exp[2\mu_2(x+2\sigma_0 y+2\nu_0 t)] + 2\beta_0 \exp[(\mu_1 + \mu_2)(x+2\sigma_0 y+2\nu_0 t)] \cos \theta. \quad (I7)$$

Наоборот, если $(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_1 - \sigma_2) < 0$, то при $y \rightarrow -\infty$ выполняется нулевая асимптотика, а при $y \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика (I6), (I7). Это значит, что при $\mu_1 \neq \mu_2$ гашение одного солитона вида (4) другим солитонном этого же вида сопровождается образованием дополнительной волны, имеющей иную структуру. Заметим, что в силу неравенства $\mu_1 \neq \mu_2$ в рассматриваемой ситуации должно выполняться условие $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, эквивалентное равенствам

$$\tau_1 + \mu_1^2 - \nu_1^2 = \tau_2 + \mu_2^2 - \nu_2^2, \quad (\sigma_1 - \nu_1)\mu_1 = (\sigma_2 - \nu_2)\mu_2.$$

Отсюда согласно (8) и (I5) следует, что

$$\nu_0 = \sigma_0, \quad \theta = (\nu_1 - \nu_2)x - (\mu_1^2 - \nu_1^2 - \mu_2^2 + \nu_2^2)(y+t) + \theta_0, \quad (I8)$$

т.е. определенная посредством (I7) функция D_0 зависит только от x и $y+t$. Далее, легко видеть, что определенная посредством (I6) и (I7) дополнительная волна обладает модуляцией по форме. Условием этого в силу (I5) и (I8) является отличие от нуля определителя матрицы

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \frac{\mu_1 \nu_1 - \mu_2 \nu_2}{\mu_1 - \mu_2} \\ \nu_1 - \nu_2 & -\mu_1^2 + \nu_1^2 + \mu_2^2 - \nu_2^2 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\det M = - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} [(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\nu_1 - \nu_2)^2],$$

и, следовательно, при $\mu_1 \neq \mu_2$ и $\mu_1 \mu_2 > 0$ имеем $\det M \neq 0$. Необходимо также отметить, что нетривиальные асимптотики (I3) и (I4) всегда расположены по разные стороны от некоторой прямой, параллельной оси x , а направление, в котором выполняется асимптотика (I6), (I7), лежит вне угла, образуемого направлениями, вдоль которых выполняются асимптотики (I3) и (I4), образуя с каждым из них угол меньше π .

Совершенно иной характер имеет наше решение, если $(\omega_1 - \omega_2) \times (\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0$, $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$, а $v_1 \neq v_2$. Положим $\bar{b} = \bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Тогда нетрудно убедиться, что при $(v_2 - v_1)\mu_2 > 0$ и $t \rightarrow -\infty$ в нашем решении содержится бегущая волна вида

$$u = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x + 2\bar{b}y + 2v_1t) + \delta_1]}, \quad (19)$$

$$\varphi = c_1 \frac{\exp[i v_1 x + i \tau_1 y - i(\mu_1^2 - v_1^2)t]}{ch[\mu_1(x + 2\bar{b}y + 2v_1t) + \delta_1]},$$

где $\delta_1 = \frac{1}{2} \ln \alpha_1$, $c_1 = a_1 \exp(-\delta_1)$. Наоборот, если $(v_2 - v_1)\mu_2 < 0$, то эта волна появится при $t \rightarrow \infty$. Далее, при $(v_1 - v_2)\mu_1 > 0$ и $t \rightarrow -\infty$ в нашем решении имеется бегущая волна вида

$$u = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x + 2\bar{b}y + 2v_2t) + \delta_2]}, \quad (20)$$

$$\varphi = c_2 \frac{\exp[i v_2 x + i \tau_2 y - i(\mu_2^2 - v_2^2)t]}{ch[\mu_2(x + 2\bar{b}y + 2v_2t) + \delta_2]},$$

где $\delta_2 = \frac{1}{2} \ln \alpha_2$, $c_2 = a_2 \exp(-\delta_2)$. В случае $(v_1 - v_2)\mu_1 < 0$ эта волна обнаруживается при $t \rightarrow \infty$. Наконец, в рассматриваемой сейчас ситуации из равенства $\rho_1^2 = \rho_2^2$ следует, что $(\bar{b} - v_2)\mu_1 = (\bar{b} - v_1)\mu_2$. Отсюда в силу $v_1 \neq v_2$ получаем неравенство $\mu_1 \neq \mu_2$. На этой основе получаем, что интересующее нас решение содержит ещё одну дополнительную уединенную волну вида

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D_0, \quad \varphi = 0, \quad (21)$$

где D_0 определено с помощью равенства (I7). При этом согласно (I5) имеем $v_0 = \bar{b}_0 = \bar{b}_1 = \bar{b}_2 = \bar{b}$. В том случае, когда

$(\mu_1 - \mu_2)(v_1 - v_2) > 0$, волна (2I) появляется при $t \rightarrow -\infty$. Наоборот, если $(\mu_1 - \mu_2)(v_1 - v_2) < 0$, то волна (2I) возникает при $t \rightarrow \infty$. Элементарный анализ показывает, что в этой ситуации наше решение описывает либо распад солитона вида (4) на солитон того же вида и дополнительную уединенную волну (2I), либо слияние солитона вида (4) и дополнительной уединенной волны (2I), в результате чего снова образуется солитон вида (4), но с другими значениями параметров μ, v, τ и c . Именно согласно (5) имеем

$$\kappa |c_1|^2 + 2(v_1 - b)\mu_1^2 = 0, \quad \kappa |c_2|^2 + 2(v_2 - b)\mu_2^2 = 0.$$

Отсюда с учётом равенства $(v_1 - b)\mu_1 = (v_2 - b)\mu_2$ следует, что

$$\frac{|c_1|^2}{\mu_1} = \frac{|c_2|^2}{\mu_2}, \quad \left(\frac{|c_1|^2}{\mu_1^2} - \frac{|c_2|^2}{\mu_2^2} \right) \kappa + 2(v_1 - v_2) = 0.$$

§ 2. Двусолитонное решение системы (2)

Нетрудно видеть, что система (2) обладает односолитонным решением вида

$$\sigma = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x - 2vy - 2bt) - \delta]}, \quad (22)$$

$$\psi = c \frac{\exp[-ivx - i(\mu^2 - v^2)y + i\tau t]}{ch[\mu(x - 2vy - 2bt) - \delta]}.$$

где вещественные параметры μ, v, b и комплексная величина c по-прежнему удовлетворяют соотношению (5). Очевидно, что односолитонное решение (22) получается из односолитонного решения (4) с помощью замены $x \rightarrow -x, y \rightarrow t, t \rightarrow y$. Совершим теперь эту же замену в функциях D и ψ вида (7). В результате получим новые функции D и ψ вида

$$D = 1 + d_1 \exp[2\mu_1(-x + 2v_1y + 2b_1t)] +$$

$$+ d_2 \exp[2\mu_2(-x + 2v_2y + 2b_2t)] +$$

$$+ 2\rho_0 \exp[\mu_1(-x + 2v_1y + 2b_1t) + \mu_2(-x + 2v_2y + 2b_2t)] \cos \theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_0 \exp[2\mu_1(-x+2v_1y+2\sigma_1t) + 2\mu_2(-x+2v_2y+2\sigma_2t)], \\
\psi = & 2a_1 \{1 + \beta_2 \exp[2\mu_2(-x+2v_2y+2\sigma_2t)]\} \exp[\mu_1(-x+2v_1y+ \\
& + 2\sigma_1t) - i v_1 x - i(\mu_1^2 - v_1^2)y + i\tau_1 t] + \\
& + 2a_2 \{1 + \beta_1 \exp[2\mu_1(-x+2v_1y+2\sigma_1t)]\} \exp[\mu_2(-x+2v_2y+ \\
& + 2\sigma_2t) - i v_2 x - i(\mu_2^2 - v_2^2)y + i\tau_2 t], \quad (23)
\end{aligned}$$

где

$$\theta = -(\nu_1 - \nu_2)x - (\mu_1^2 - \nu_1^2 - \mu_2^2 + \nu_2^2)y + (\tau_1 - \tau_2)t + \theta_0, \quad (24)$$

а все входящие сюда параметры определены посредством равенств (8). Согласно (9) функции

$$v = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D, \quad \psi = \frac{\psi}{D} \quad (25)$$

являются решением системы (2). Очевидно, что при выполнении условий (10) и (11) это решение не имеет особенностей при любых вещественных значениях x, y, t .

Нетрудно убедиться, что в случае $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \neq 0$ полученное таким образом решение системы (2) описывает упругое взаимодействие двух солитонов вида (22). При этом в отличие от рассмотренного ранее случая солитоны распространяются под углом друг к другу, если $v_1 \neq v_2$, а при $v_1 = v_2$ оба солитона распространяются вдоль одной и той же прямой. В остальном же наблюдаемая здесь картина совпадает с рассмотренной ранее картиной упругого взаимодействия двух солитонов системы (1). Далее, в случае, когда $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0$, а $v_1 \neq v_2$, рассматриваемое сейчас решение описывает процесс гашения одного солитона вида (22) другим солитоном этого же вида. Качественно этот процесс в системе (2) протекает по тому же самому сценарию, что и в системе (1). Наконец, при $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0$, $v_1 = v_2$, а $\sigma_1 \neq \sigma_2$ интересное нас решение описывает взаимодействие одного солитона вида (22) в другой солитон этого же вида. В аналогичной ситуации в системе (1) этот процесс происходит либо путем распада солитона вида (4) на солитон того же вида и дополнитель-

ную уединенную волну, либо путем слияния солитона (4) с дополнительной уединенной волной, в результате чего образовывался солитон вида (4) с другими значениями существенных параметров. В рассматриваемой сейчас системе (2) такой вариант эволюции одного солитона вида (22) в другой солитон этого же вида также возможен. Однако в рассматриваемом сейчас случае возможны и другие варианты этого процесса. Так, например, положим $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \mu + i\nu$. Тогда согласно (8) и (23) выражения для функций D и Ψ принимают вид

$$D = 1 + \alpha_1 \exp[2\mu(-x + 2\nu y + 2\sigma_1 t)] + \alpha_2 \exp[2\mu(-x + 2\nu y + 2\sigma_2 t)] + 2\beta_0 \exp[2\mu(-x + 2\nu y) + 2\mu(\sigma_1 + \sigma_2)t] \cos \theta, \quad (26)$$

$$\Psi = 2\alpha_1 \exp[\mu(-x + 2\nu y + 2\sigma_1 t) - i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y + i\tau_1 t] + 2\alpha_2 \exp[\mu(-x + 2\nu y + 2\sigma_2 t) - i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y + i\tau_2 t],$$

где в силу (24) имеем

$$\theta = (\tau_1 - \tau_2)t + \theta_0. \quad (27)$$

Нетрудно видеть, что при $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu > 0$ и $t \rightarrow -\infty$ получаемое с помощью (25)–(27) решение системы (2) имеет асимптотику

$$\begin{aligned} v &\sim \frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2[\mu(x - 2\nu y - 2\sigma_1 t) - \delta_1]}, \\ \psi &\sim c_1 \frac{\exp[-i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y + i\tau_1 t]}{\operatorname{ch}[\mu(x - 2\nu y - 2\sigma_1 t) - \delta_1]}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\delta_1 = \frac{1}{2} \ln \alpha_1$, $c_1 = \alpha_1 \exp(-\delta_1)$, а при $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu > 0$ и $t \rightarrow \infty$ это решение имеет асимптотику

$$\begin{aligned} v &\sim \frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2[\mu(x - 2\nu y - 2\sigma_2 t) - \delta_2]}, \\ \psi &\sim c_2 \frac{\exp[-i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y + i\tau_2 t]}{\operatorname{ch}[\mu(x - 2\nu y - 2\sigma_2 t) - \delta_2]}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\delta_2 = \frac{1}{2} \ln \alpha_2$, $c_2 = \alpha_2 \exp(-\delta_2)$. Наоборот, если $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu > 0$, то при $t \rightarrow -\infty$ интересующее нас решение имеет асимптотику (29), а при $t \rightarrow \infty$ оно имеет асимптотику (28).

Таким образом, в рассматриваемой сейчас ситуации наше решение описывает эволюцию солитона (28) в солитон (29), если $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu > 0$, а если $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu > 0$, то имеет место эволюция солитона (29) в солитон (28). Существенно отметить, что в данном случае эволюция одного солитона в другой солитон не сопровождается испусканием или поглощением какой-нибудь дополнительной уединенной волны, как это было обнаружено при рассмотрении двусолитонного решения системы (I). При этом в силу (5) справедливы равенства

$$\kappa |c_1|^2 = 2(\sigma_1 - \nu)\mu^2, \quad \kappa |c_2|^2 = 2(\sigma_2 - \nu)\mu^2, \quad (30)$$

из которых следует, что приращение $|c_2|^2 - |c_1|^2$ квадрата амплитуды Ψ -волны связано с разностью $\sigma_2 - \sigma_1$ фазовых скоростей Ψ -волны соотношением

$$(|c_2|^2 - |c_1|^2)\kappa = 2(\sigma_2 - \sigma_1)\mu^2.$$

Из равенств (30) следует, что

$$\sigma_1 = \frac{\kappa |c_1|^2}{2\mu^2} + \nu, \quad \sigma_2 = \frac{\kappa |c_2|^2}{2\mu^2} + \nu. \quad (31)$$

Пусть ζ_1 и ζ_2 равны соответственно наибольшей и наименьшей из величин $\frac{1}{2}\kappa |c_1|^2\mu^{-2}$ и $\frac{1}{2}\kappa |c_2|^2\mu^{-2}$. Из равенств (31) следует, что если параметр ν лежит вне интервала $(-\zeta_1, -\zeta_2)$, то справедливо неравенство $\sigma_1 \sigma_2 > 0$. В противном случае, т.е. при $\nu \in (-\zeta_1, -\zeta_2)$ имеет место неравенство $\sigma_1 \sigma_2 < 0$. Отсюда следует, что в случае $\nu \in (-\zeta_1, -\zeta_2)$ солитоны (28) и (29) движутся в одном и том же направлении. Наоборот, если $\nu \in (-\zeta_1, -\zeta_2)$, то солитоны (28) и (29) движутся в прямо противоположных направлениях, т.е. рассматриваемое нами решение в этом случае описывает отражение солитона. Решения такого типа впервые были обнаружены в работе ^{16/} при рассмотрении другой системы уравнений.

Существует еще одно явление, отличающее систему (2) от системы (I). Суть его состоит в следующем. Пусть снова $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \mu + i\nu$. Пусть, далее, $\sigma_2 = \nu$, $\sigma_1 = 0$. Тогда согласно (8) и (26) выражения для функций D и Ψ принимают вид

$$D = 1 + \alpha_1 \exp[2\mu(-x + 2\nu y + 2\sigma_1 t)] + \alpha_2 \exp[2\mu(-x + 2\nu y + 2\sigma_2 t)],$$

$$\Psi = 2\alpha_1 \exp[\mu(-x + 2\nu y + 2\sigma_1 t) - i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y + i\tau_1 t],$$

где $\alpha_2 > 0$ — произвольно. Выясним, какой процесс описывает рассматриваемое нами решение при таком выборе функций D и Ψ . Нетрудно видеть, что при $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu > 0$ и $t \rightarrow -\infty$ в нашем решении при-

существует уединенная волна вида

$$v = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-2vy-2\sigma_1 t) - \delta_1]},$$

$$\psi = c_1 \frac{\exp[-i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y + i\tau_1 t]}{ch[\mu(x-2vy-2\sigma_1 t) - \delta_1]}, \quad (32)$$

где $\delta_1 = \frac{1}{2} \ln \alpha_1$, $c_1 = a_1 \exp(-\delta_1)$. При $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu < 0$ эта волна появится при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, при $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu > 0$ и $t \rightarrow -\infty$ в нашем решении содержится вторая уединенная волна вида

$$v = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-2vy-2\sigma_2 t) - \delta_2]}, \quad \psi = 0, \quad (33)$$

где $\delta_2 = \frac{1}{2} \ln \alpha_2$. При $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu < 0$ эта волна возникает при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, если $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu > 0$, то при $t \rightarrow -\infty$ наше решение имеет асимптотику (32), а при $t \rightarrow \infty$ оно имеет асимптотику (33). Наоборот, если $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu > 0$, то при $t \rightarrow -\infty$ это решение имеет асимптотику (33), а при $t \rightarrow \infty$ оно имеет асимптотику (32). Это значит, что при $(\sigma_2 - \sigma_1)\mu > 0$ рассматриваемое нами решение описывает эволюцию солитона (32) в солитон (33), а при $(\sigma_1 - \sigma_2)\mu > 0$ это решение описывает эволюцию солитона (33) в солитон (32). Мы видим, что эволюция солитона (32) в солитон (33) сопровождается исчезновением (поглощением) ψ -волны. Наоборот, эволюция солитона (33) в солитон (32) сопровождается появлением (излучением) ψ -волны. Впервые это явление было обнаружено нами ранее в другой системе уравнений [7].

Из формул (32), (33) следует, что излучение или поглощение ψ -волны сопровождается изменением фазовой скорости v -волны. При этом между амплитудой $|c_1|$ ψ -волны и разностью $\sigma_1 - \sigma_2$ фазовых скоростей v -волны выполняется соотношение

$$n|c_1|^2 = 2(\sigma_1 - \sigma_2)\mu^2,$$

непосредственно вытекающее из (5) в силу равенства $\sigma_2 = v = v_1$. Заметим, что возможны случаи как с $\sigma_1 \sigma_2 > 0$, так и с $\sigma_1 \sigma_2 < 0$, т.е. процесс излучения и поглощения ψ -волны могут сопровождаться изменением направления движения солитона на прямо противоположное.

Подчеркнем ещё раз, что из двусолитонного решения системы (I) получить решение, описывающее процесс излучения или поглощения ψ -волны, невозможно.

§ 3. Двусолитонное решение системы (3)

Нетрудно видеть, что односолитонное решение системы (3) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\sigma y+2vt)+\delta]}, \\ \eta &= c \frac{\exp[i\nu x + i\tau y - i(\mu^2 - \nu^2)t]}{ch[\mu(x+2\sigma y+2vt)+\delta]}, \end{aligned} \quad (34)$$

где вещественные параметры μ, σ и комплексная величина c удовлетворяют единственному условию

$$\mu|c|^2 = 2\mu^2\sigma. \quad (35)$$

Очевидно, что это решение может быть получено из односолитонного решения (4) системы (I) с помощью замены координаты t на $t-y$ и параметров σ, τ соответственно на $\sigma+\nu, \tau-\mu^2+\nu^2$. Ясно, что соотношение (35) получается из условия (5) в результате замены параметра σ на $\sigma+\nu$. Проведем теперь указанную выше процедуру с функциями D и ϕ , определенными посредством (7) и (8). В результате получим новые функции Δ и E , совпадающие по виду с функциями D и ϕ соответственно. Однако содержащиеся в выражениях для этих функций параметры $\beta_1^2, \beta_2^2, \alpha_1$ и α_2 должны быть теперь определены не с помощью равенств (8), а посредством равенств

$$\beta_1^2 = \tau_1 + 2i\mu_1\sigma_1, \beta_2^2 = \tau_2 + 2i\mu_2\sigma_2, \alpha_1 = \frac{\mu_1 a_1^2}{2\mu_1^2 \sigma_1}, \alpha_2 = \frac{\mu_2 a_2^2}{2\mu_2^2 \sigma_2}. \quad (36)$$

Возьмем, далее, функции ω и η вида

$$\omega = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Delta, \quad \eta = \frac{E}{\Delta}. \quad (37)$$

В силу (9) определенные таким образом функции ω и η являются решением системы (3), причем неравенства $\mu\bar{\sigma}_1 > 0, \mu\bar{\sigma}_2 > 0$ вместе с условием (II) гарантируют отсутствие особенностей у этого решения при любых вещественных значениях x, y, t .

В том случае, когда выполняется условие $(\omega_1 - \omega_2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) \neq 0$, полученное таким образом решение описывает упругое взаимодействие двух

солитонов вида (34). При этом имеют место те же три типа поведения решения, которые уже встречались ранее при рассмотрении двусолитонных решений систем (1) и (2).

Далее, в случае, когда $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0$, но $b_1 \neq b_2$, рассматриваемое сейчас решение описывает процесс гашения одного солитона вида (34) другим солитоном этого же вида. И снова картина этого явления в системе (3) повторяет то, что мы уже имели раньше в системах (1) и (2).

Рассмотрим, наконец, случай, когда выполняются условия $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0$, $b_1 = b_2$, а $v_1 \neq v_2$. Эта ситуация возможна только при $\rho_1^2 = \rho_2^2$, т.е. в силу (36) должно быть $\tau_1 = \tau_2$, $\mu_1 = \mu_2$. Положим $\mu = \mu_1 = \mu_2$, $b = b_1 = b_2$, $\tau = \tau_1 = \tau_2$. Тогда выражения для функций Δ и E принимают вид

$$\Delta = 1 + d_1 \exp[2\mu(x + 2by + 2v_1t)] + d_2 \exp[2\mu(x + 2by + 2v_2t)] + 2\beta_0 \exp[2\mu(x + 2by + 2v_0t)] \cos \theta, \quad (38)$$

$$E = 2a_1 \exp[\mu(x + 2by + 2v_1t) + iv_1x + i\tau y - i(\mu^2 - v_1^2)t] + 2a_2 \exp[\mu(x + 2by + 2v_2t) + iv_2x + i\tau y - i(\mu^2 - v_2^2)t],$$

где

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad \theta = (v_1 - v_2)x + (v_1^2 - v_2^2)t + \theta_0. \quad (39)$$

Посмотрим теперь, каково поведение определенного посредством (37)–(39) решения системы (3). С помощью несложных вычислений находим, что

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \eta = \eta_1,$$

где

$$\omega_1 = \frac{4}{\Delta^2} \left\{ 2\mu^2(\Delta - 1) - (v_1 - v_2)\beta_0 [4\mu \sin \theta + (v_1 - v_2) \cos \theta] \times \right. \\ \left. \times \exp[2\mu(x + 2by + 2v_0t)] \right\},$$

$$\omega_2 = \frac{4(v_1 - v_2)^2 \beta_0}{\Delta^2} \left\{ 2\beta_0 + d_1 \exp[2\mu(v_1 - v_2)t] \cos \theta + \right. \\ \left. + d_2 \exp[2\mu(v_2 - v_1)t] \cos \theta \right\} \exp[4\mu(x + 2by + 2v_0t)]. \quad (40)$$

Положим $z = x + 2by$. Нетрудно видеть, что при $z \rightarrow \pm \infty$ имеем $\omega_1 \rightarrow 0$, $\eta_1 \rightarrow 0$. Таким образом, пара функций ω_1 , η_1

определяет уединенную волну, содержащуюся в нашем решении. Рассмотрим более детально структуру этой уединенной волны. Легко убедиться, что при $(v_2 - v_1)\mu > 0$ и $t \rightarrow -\infty$ справедлива асимптотика

$$\omega_1 \sim \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x + 2\sigma y + 2v_1 t) + \delta_1]}, \quad (41)$$

$$\eta_1 \sim c_1 \frac{\exp[i v_1 x + i \tau y - i(\mu^2 - v_1^2)t]}{ch[\mu(x + 2\sigma y + 2v_1 t) + \delta_1]},$$

где $\delta_1 = \frac{1}{2} \ln \alpha_1$, $c_1 = \alpha_1 \exp(-\delta_1)$, а при $t \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$\omega_1 \sim \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x + 2\sigma y + 2v_2 t) + \delta_2]}, \quad (42)$$

$$\eta_1 \sim c_2 \frac{\exp[i v_2 x + i \tau y - i(\mu^2 - v_2^2)t]}{ch[\mu(x + 2\sigma y + 2v_2 t) + \delta_2]},$$

где $\delta_2 = \frac{1}{2} \ln \alpha_2$, $c_2 = \alpha_2 \exp(-\delta_2)$. Наоборот, если $(v_2 - v_1)\mu < 0$, то при $t \rightarrow -\infty$ выполняется асимптотика (42), а при $t \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика (41). Таким образом, пара функций ω_1, η_1 описывает эволюцию солитона (41) в солитон (42), если $(v_2 - v_1)\mu > 0$, а если $(v_1 - v_2)\mu > 0$, то происходит эволюция солитона (42) в солитон (41). При этом согласно (35) имеем $|c_1| = |c_2|$, а параметры v_1, v_2 могут принимать произвольные вещественные значения.

Выясним теперь, какой вклад в наше решение вносит величина ω_2 . Нетрудно видеть, что если $\mu > 0$, то при $Z = x + 2\sigma y \rightarrow -\infty$ имеем $\omega_2 \rightarrow 0$. Однако при $Z \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$\frac{\omega_2}{4(v_1 - v_2)^2 \beta_0} \sim \frac{2\beta_0 + \alpha_1 \exp[2\mu(v_1 - v_2)t] \cos \theta + \alpha_2 \exp[2\mu(v_2 - v_1)t] \cos \theta}{\{\alpha_1 \exp[2\mu(v_1 - v_2)t] + \alpha_2 \exp[2\mu(v_2 - v_1)t] + 2\beta_0 \cos \theta\}^2},$$

показывая, что при $Z \rightarrow \infty$ величина ω_2 не стремится к нулю. В случае $\mu < 0$ имеем $\omega_2 \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow \infty$, а при $Z \rightarrow -\infty$ справедлива указанная выше ненулевая асимптотика. С другой стороны, нетрудно убедиться, что $\omega_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm \infty$. Это значит, что эволюция одного солитона вида (34) в другой солитон того же вида сопровождается в системе (3) появлением добавочной волны ω_2 вида (40), не являющейся уединенной волной.

В заключение уместно отметить, что впервые гашение солитонов в системе (I) было обнаружено в работе^{8/}.

1. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ P2-87-494, Дубна: ОИЯИ, 1987.
2. Солитоны. Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983.
3. Mel'nikov V.K.-Lett. Math.Phys., 1983, v.7, No 2, p. 129-136.
4. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ P2-86-724, Дубна : ОИЯИ, 1986.
5. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ P2-86-819, Дубна: ОИЯИ, 1986.
6. Calogero F., Degasperis A.-Lett. Nuovo Cimento, 1976, v.16, No 14, p. 425-433.
7. Mel'nikov V.K.-Phys. Lett., 1986, v. A118, No 1, p. 22-24.
8. Мельников В.К. Изв. вузов - Радиофизика, 1987, т. 30, № 7, с. 922-924.

S.R. de Groot

Institute of Theoretical Physics, University of Amsterdam,
Valckeniersstraat 65, 1018 XE Amsterdam, the Netherlands

1. General survey

Systems containing neutrinos play an increasing role in physics and particularly in astrophysics. An example of the latter is the study of the lepton period which lasted from 10^{-4} to 10 seconds after the big bang. Another case is formed by the properties of neutrinos in collapsing stellar cores.

In this review article the transport properties of a number of neutrino systems are discussed, mainly as obtained by the Amsterdam school¹⁾. The ultimate basis of the theory is the relativistic transport equation for the distribution function of the system²⁾. This equation contains the interaction strengths of the particles. It is linearized by taking into account only terms of zeroth and first order in the mean free path divided by a macroscopic length. In this way one finds ultimately linear laws for the thermodynamic flows of energy, momentum and matter arising from "thermodynamic forces" such as the gradients of the temperature, the pressure, the composition and the velocity. These fluxes and forces are linearly connected by means of transport coefficients such as the heat conductivity, the diffusion quantities and the viscosities. The latter coefficients depend on the interactions of the particles through electro-weak and strong forces and may be obtained as functions of the (microscopic) interaction constants and the (macroscopic) thermodynamic state variables. The transport properties will be given for some systems containing neutrinos.

2. The linear laws for binary mixtures

The irreversible behaviour of binary mixtures is described by four linear laws: one scalar, two vectorial and one tensorial.

The scalar law reads as follows:

$$\Pi = - \eta_{\nu} \nabla^{\mu} U_{\mu} \quad (1)$$

with the thermodynamic flow $\Pi(x)$, which is the trace of the viscous pressure tensor $\Pi^{\mu\nu}(x)$. It is a function of the time-space coordinate vector

$x := (x_0, \vec{x}) := (ct, x_1, x_2, x_3)$, with c the speed of light. The thermodynamic force is (minus) the four-divergence of the hydrodynamic four-velocity $U^\mu(x)$. The index μ has four values: time-like 0 and space-like 1, 2 and 3. The metric employed is $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Finally in (1) we have the transport coefficient η_v called the volume (or bulk) viscosity³⁾.

The vectorial laws have the form

$$\bar{T}_q^\mu = \lambda(\nabla^\mu T - c^{-2} T D U^\mu) + D_T^1 n T x_1 (\nabla^\mu \mu_1)_{p,T}, \quad (2)$$

$$I_1^\mu = D_T n x_1 (1 - x_1) (\nabla^\mu T - c^{-2} T D U^\mu) + D_d n x_1 (k_B T)^{-1} (\nabla^\mu \mu_1)_{p,T}. \quad (3)$$

The first thermodynamic flux is the reduced heat flow

$$\bar{T}_q^\mu = I_q^\mu - (h_1 - h_2) I_1^\mu \quad (4)$$

with I_q^μ the heat flow and h_1 and h_2 the partial specific enthalpies of the two components in zeroth order. In the case of massless particles the latter are both equal to $4k_B T$ (with Boltzmann's constant k_B) so that the last term of (4) then vanishes. I_k^μ with $k = 1, 2$ are the diffusion flows of component k . Since their sum vanishes only one independent diffusion flow exists. Here I_1^μ is employed. The first thermodynamic force in (2) is the temperature gradient and a relativistic term due to the time derivative D of the hydrodynamic velocity. The transport coefficient λ is the heat conductivity. The second thermodynamic force contains the gradient of the chemical potential μ_1 of species 1. This last term of (2) is called the diffusion thermo-effect or the relativistic Dufour effect. It contains the density n and the fraction x_1 of component 1. The transport coefficient D_T^1 is called the Dufour coefficient. The law (3) for the diffusion flow I_1^μ contains as a first contribution the influence of a temperature gradient (and the acceleration); it is called the thermal diffusion (or Soret) effect. Its transport quantity D_T is the thermal diffusion coefficient. The equality of D_T and D_T^1 follows from microscopic time reversal invariance. In non-relativistic theory this property is called the Onsager-Casimir relation. Its generalization to relativistic theory has been proved⁴⁾. The second term at the right-hand side of (3) is the diffusion flow caused by a chemical potential gradient. Its transport property is the diffusion coefficient D_d .

The tensorial law describing the system considered has the form

$$\bar{\Pi}^{\mu\nu} = 2\eta \bar{\nabla}^\mu U^\nu \quad (5)$$

Here the thermodynamic flow is the traceless (index nought) part of the viscous pressure tensor: the thermodynamic force $2 \bar{\nabla}^\mu U^\nu$ is a symmetrized tensor as indicated by the bar and with trace zero as indicated by the index nought. The transport coefficient η is the ordinary (or shear) viscosity.

3. Massless neutrino-antineutrino mixtures

The first example of a neutrino mixture constitutes the simplest system of particles and anti-particles, viz. the mixture of (massless) neutrinos and anti-neutrinos^{1,5)}. The volume viscosity disappears in the limit of vanishing particle mass, so there is no law (1). For the weak interaction the Lagrangian

$$L(x) = -(G/4/2)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi(x) \quad (6)$$

is employed. Here G is the weak interaction constant ($1.435 \times 10^{-49} \text{ g cm}^5 \text{ s}^{-2}$), $\psi(x)$ the neutrino spinor field, $\bar{\psi}(x)$ its adjoint and γ^μ and γ_5 Dirac matrices. Its form has been obtained from the unified electro-weak interaction theory of Weinberg, Salam, 't Hooft and Veltman⁶⁾ in the case of energies low compared to the heavy boson masses which transmit the forces. This case presents itself in the situations dealt with in this article. The form (6) has been derived by Siskens and van Weert⁷⁾ from the general theory. The linear laws may be written down, deleting for convenience the acceleration term, using the particle proportion x_1 of the neutrinos and $x_2 = 1 - x_1$ for the anti-neutrinos and the fact that for massless particles h_1 and h_2 are both equal to $4k_B T$ so that the reduced heat flow (4) is equal to the ordinary heat flow I_q^μ . So the vectorial linear laws now look as follows:

$$I_q^\mu = \lambda \nabla^\mu T + D_T^\mu n k_B T^2 \nabla^\mu x_1, \quad (7)$$

$$I_1^\mu = D_T n x_1 (1 - x_1) \nabla^\mu T + D_d n \nabla^\mu x_1. \quad (8)$$

The tensorial linear law has still the form (6). The transport coefficients turn out to be¹⁾ in first order:

$$\lambda^{(1)} = \frac{3}{80} \pi \frac{97 + 112 x_1 x_2}{97 + 12 x_1 x_2} \frac{\hbar^4 c^5}{k_B T^2 G^2}, \quad (9)$$

$$D_T^{(1)} = D_T^{\mu(1)} = \frac{3}{80} \pi \frac{24(x_1 - x_2)}{97 + 12 x_1 x_2} \frac{\hbar^4 c^5}{n k_B^2 T^2 G^2}, \quad (10)$$

$$D_d^{(1)} = \frac{3}{112} \pi \frac{\hbar^4 c^5}{n(k_B T)^2 G^2}, \quad (11)$$

$$\eta^{(1)} = \frac{3}{184} \pi \frac{119 x_1^2 + 184 x_1 x_2}{119 + 52 x_1 x_2} \frac{\hbar^4 c^3}{k_B T G^2}. \quad (12)$$

The formulae show the dependence upon the state variables T , n and x_1 , and upon the constants of nature $\hbar$, c and G . During the lepton era the temperature dropped from 10^{12} K to 10^{10} K . So let us consider the temperature 10^{11} K .

With this value and $x_1 = 3/4$ and $n = 10^{35} \text{ cm}^{-3}$ one obtains the exact results¹⁾

$$\lambda = 8.0 \times 10^{35} \frac{\text{g cm}}{\text{s}^3 \text{K}} \quad , \quad D_T = D'_T = 4.2 \times 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{sK}} \quad , \quad (13)$$

$$D_d = 1.3 \times 10^{16} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \quad , \quad \eta = 1.1 \times 10^{25} \frac{\text{g}}{\text{cm s}} \quad . \quad (14)$$

These "celestial" values are much higher than their "terrestrial" counterparts. This disparity is due to the fact that the former contain the small interaction constant G^2 in the denominator which makes them large - in spite of the high temperature - as compared to the latter governed by the much larger electromagnetic interaction.

4. On the possibility of a neutrino mass

It was found by various physicists: Lyubimov et al.⁸⁾, Reines et al.⁹⁾, Boris et al.¹⁰⁾ Vuilleumier¹¹⁾ and the Moriond workshop¹²⁾ mainly from beta-type experiments that neutrinos may possess a small mass of about 10-30 eV (most likely larger than 7 eV).

This existence might also explain the so-called "missing mass" in the universe¹³⁾.

5. Massive neutrino - anti-neutrino mixtures

If neutrinos have mass hardly anything changes for the vectorial and tensorial phenomena because the mass m proposed is so small (~ 10 eV). However, the scalar law now plays a role: the volume viscosity is no longer vanishing. In the theory^{14,15)} the high temperature limit with $z := mc^2/k_B T \ll 1$ is found and also the low temperature limit ($z \gg 1$). The latter is

$$\eta_v = \frac{k_B T}{c\sigma(T)} \frac{5^2}{2^8 \pi^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{z^{7/2}} \frac{1}{1 - x_1 x_2} \quad , \quad (15)$$

with the cross-section

$$\sigma(T) := \left(\frac{G k_B T}{2 \pi \hbar^2 c^2} \right)^2 \quad . \quad (16)$$

The values for intermediate temperatures were found by interpolation.

6. Massless neutrino-electron mixtures

The Lagrangian for neutrino-electron mixtures is of the form^{6,7)}

$$\begin{aligned} L(x) = & -(G/4/2) \bar{\nu}(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu(x) \bar{\nu}(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(x) \\ & -(G/2/2) \bar{\nu}(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu(x) \nu(x) \bar{e}(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e(x) \end{aligned} \quad (17)$$

with $e(x)$ the electron field and a constant

$$C := 4 \sin^2 \theta_w . \quad (18)$$

The angle θ_w is called the Weinberg angle. It has a value such that $\sin^2 \theta_w$ is equal to 0.25. The results¹⁾ for the transport coefficients are (in first order)

$$\lambda^{(1)} = \frac{42}{\pi} \frac{ck_B}{\sigma(T)} \frac{x_\nu}{4480 x_\nu + [1880(1+C) + 567 C^2] x_e} , \quad (19)$$

$$D_T^{(1)} = D_T^{*(1)} = - \frac{18}{\pi} \frac{c}{n\sigma(T)} \frac{1}{4480 x_\nu + [1880(1+C) + 567 C^2] x_e} , \quad (20)$$

$$D_d^{(1)} = \frac{3}{2\pi} \frac{c}{n\sigma(T)} \frac{1}{168(1+C) + 649 C^2} , \quad (21)$$

$$\eta^{(1)} = \frac{30}{\pi} \frac{k_B T}{c\sigma(T)} \frac{x_\nu}{7360 x_\nu + [2120(1+C) + 649 C^2] x_e} , \quad (22)$$

$$\eta_\nu^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \frac{k_B T}{c\sigma(T)} z_e^4 \frac{x_\nu x_e}{432(1+C) + 126 C^2} . \quad (23)$$

Here x_ν and x_e are the neutrino and electron fractions, n the density, $\sigma(T)$ the cross-section (15) and $z := m_e c^2 / k_B T$ with m_e the electron mass. The dependency on x_ν shows that $\lambda^{(1)}$ and $\eta^{(1)}$ strongly increase with the neutrino fraction. The coefficient $D_d^{(1)}$ is independent of x_ν , while $D_T^{(1)} = D_T^{*(1)}$ is only weakly dependent upon it. As for $\eta_\nu^{(1)}$ it initially increases with x_ν , but it becomes vanishingly small if one approaches the pure neutrino case. The values of the transport coefficients $\lambda^{(1)}$, $D_d^{(1)}$ and $\eta^{(1)}$ are of the order of magnitude of their counterparts for a neutrino - anti-neutrino system and thus much greater than the corresponding quantities for terrestrial gas mixtures. The coefficient

$D_T^{(1)} = D_T^{*(1)}$ is for $x_\nu = \frac{1}{3}$ also of the same order of magnitude as that of the $\nu\nu$ -system. Its value is somewhat higher than for terrestrial gas mixtures. It is negative, which means that the neutrinos are driven to the regions of higher temperatures.

7. Massive neutrino - anti-neutrino mixtures

For the mixture of massive neutrinos and electrons^{14,15)} again the vectorial and tensorial laws are hardly different from those of the system with massless neutrinos. However, the volume viscosity is influenced. It will be given for three cases ($z := mc^2/k_B T$), namely (a) $z_\nu \ll 1$, $z_e \ll 1$; (b) $z_\nu \ll 1$, $z_e \gg 1$; and (c) $z_\nu \gg 1$, $z_e \gg 1$. The results are, for (a):

$$\eta_\nu = \frac{k_B T}{c\sigma(T)} \frac{x_\nu x_e^2 z_e^4}{\pi [180 x_\nu + 109 x_e (1 + C + 0.30 C^2)]} . \quad (24)$$

(The cross-section $\sigma(T)$ has been given in (15).) Since the neutrino mass does not

occur here, this mass has no influence on the volume viscosity. For case (b) the result is

$$\eta_v = \frac{k_B T}{c\sigma(T)} \frac{5x_v x_e z_e}{(1+x_v)^2 \pi^2 \frac{7}{3} (1 + \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}C^2)} \quad (25)$$

In case (c) one finds:

$$\eta_v = \frac{k_B T}{c\sigma(T)} \frac{5^2 x_v x_e z_e}{2^{15/2} \pi^{1/2} (1 + \frac{1}{2}C + \frac{1}{6}C^2)} \quad (26)$$

The results for other values of z_v and z_e are found by interpolation between the results given for the cases (a), (b) and (c).

8. Mixtures of neutrinos and nuclei

Since in neutrino-nucleus mixtures the mass of the neutrinos has a negligible effect, in this section only massless neutrinos are considered.

Neutrino-nucleus scattering proceeds¹⁾ through the weak neutral current. At low energies ($\ll 100$ MeV) the scattering is coherent - in the sense that the nucleus acts as a single particle - with a cross-section proportional to the square of the nucleon number A . For this reason this process is the dominant neutrino scattering process in pre-supernovae where $A \approx 50$. The typical energies involved here (~ 10 MeV) are quite low compared to the nuclear masses, so that - in contrast to the electrons, as studied before - the nuclei are in the non-relativistic régime. This fact enables one to obtain analytical expressions for the transport coefficients of a representative νA -mixture.

As a neutrino-nucleus interaction, following Freedman¹⁾, an effective Lagrangian density of the form

$$L(x) = -(G/\sqrt{2}) \bar{\nu}(x) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu(x) J_\mu(x) \quad (27)$$

is adopted for the neutrino-nucleus scattering process. Restricting the discussion to spin-zero nuclei with $Z = N = \frac{1}{2}A$, the baryon current J_μ is given by

$$\langle p' | J^\mu | p \rangle = [2(2\pi\hbar)]^{-1} a_0 A(p^\mu + p'^\mu) \quad (28)$$

where p^μ and p'^μ are the initial and final four-momenta, and a_0 is equal to $\sin^2 \theta_W$ (with θ_W the Weinberg angle) which has the value 0.25.

From this starting point Siskens and van den Horn found the first order transport coefficients¹⁾:

$$\eta_v^{(1)} = \frac{k_B T}{c\sigma(T)} z \frac{x_v x_A}{960 \pi a_0 A^2 (1+x_v)^2} \quad (29)$$

$$D_d^{(1)} = \frac{c}{n\sigma(T)} \frac{1}{320 \pi a_0^2 A^2}, \quad (30)$$

$$D_T^{(1)} = D_T'^{(1)} = -\frac{c}{nT\sigma(T)} \frac{3}{560 \pi x_A a_0^2 A^2}, \quad (31)$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{ck_B}{\sigma(T)} \frac{x_\nu}{140 \pi x_A a_0^2 A^2}, \quad (32)$$

$$\eta^{(1)} = \frac{k_B T}{c\sigma(T)} \frac{x_\nu}{336 \pi x_A a_0^2 A^2}. \quad (33)$$

In these expressions $\sigma(T)$ is the cross-section (16), x_ν and x_A the neutrino and nucleus fractions, n the density and $z := mc^2/k_B T$ with m the nuclear mass. The thermal diffusion coefficient is negative, implying that a temperature gradient will drive the neutrinos towards the regions of higher temperature.

For the case of arbitrary degenerate neutrinos a theory was developed by van den Horn and van Weert^{16,17}). This treatment is valid for the dense cores of pre-supernovae, in which the neutrinos become indeed degenerate. The nucleons remain non-degenerate, in fact also non-relativistic. The results are the following transport coefficients, which are exact to first order in the small parameter $k_B T/mc^2 \sim 10^{-4}$ (where m is the nuclear mass):

$$\lambda = \frac{\hbar c^2 k_B^2 T}{2 \pi a_0^2 A^2 G^2 n_A} \left[F_2 - \frac{h_\nu F_1}{k_B T} + \frac{1}{2} \left(\frac{h_\nu}{k_B T} \right)^2 F_0 \right], \quad (34)$$

$$D_d = \frac{\pi \hbar^4 c^5}{4 a_0^2 A^2 G^2 (k_B T)^2 n} \frac{F_0}{F_3}, \quad (35)$$

$$D_T = D_T' = -\frac{\pi \hbar^4 c^5}{4 a_0^2 A^2 G^2 k_B^2 T n_A} \frac{(h_\nu/k_B T) F_0 - F_1}{F_3}, \quad (36)$$

$$\eta = \frac{\hbar(k_B T)}{15 \pi a_0^2 A^2 G^2 n_A} F_2. \quad (37)$$

Here n_A and n are the number density of the nuclei and the total particle density, respectively; a_0 is here the quantity $-\sin^2 \theta_W$ with the value -0.25 (θ_W is called the Weinberg angle); $G = 1.44 \times 10^{-49}$ erg cm³ is the weak coupling constant; h_ν is the partial neutrino enthalpy. Furthermore one has the Fermi integrals $F_s = F_s(\mu_\nu/k_B T)$, defined as

$$F_0(y) := dF_1(y)/dy, \quad (38)$$

$$F_s(y) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{\exp(x-y) + 1} \quad (s > 0). \quad (39)$$

The expressions (33) - (36) are valid for arbitrary neutrino degeneracy, i.e. any value of $\mu_\nu/k_B T$. Since the Fermi integrals (38) - (39) are increasing functions of their argument, and increase more rapidly with higher s , the expressions (34)-(37) show that, for given temperature and matter density, the qualitative effect of

degeneracy is to inhibit the neutrino diffusion and to enhance their thermal conduction and viscosity. For great degeneracy diffusion vanishes, while viscosity becomes independent of the temperature; the heat conductivity becomes independent of the neutrino chemical potential after attaining a maximum in the régime of intermediate degeneracy.

References

- 1) S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen and Ch.G. van Weert, Relativistic kinetic theory, Principles and applications (North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980).
- 2) A. Lichnerowicz and R. Marrot, C.R.Acad.sci., Paris 210(1940)759.
- 3) W. Israel, J.Math.Phys. 4(1963)1163;
D.C. Kelly, report of Miami University, Oxford, Ohio, 1963.
- 4) S.R. de Groot, Ch.G. van Weert, W.Th. Hermens and W.A. van Leeuwen, Physica 40(1969)581.
- 5) S.R. de Groot, Proc.Kon.Ned.Akad.Wet. B84(1984)27,41.
- 6) S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 19(1967)1264, 27(1971)1688;
A. Salam, Elementary particle theory, N. Svartholm, ed. (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968);
G. 't Hooft, Nucl.Phys. B33(1971)173, B35(1971)167;
G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl.Phys. B44(1972)189, B50(1972)318.
- 7) Th.J. Siskens and Ch.G. van Weert, Physica 89A(1977)163.
- 8) V.A. Lyubimov, E.G. Novikov, V.Z. Nozik, E.F. Tret'yakov, V.S. Kozik and N.F. Myasoedov, Phys.Lett. B94(1980)266, Sov.Phys. JETP 54(1981)616.
- 9) F. Reines, H.W. Sobel and E. Pasierb, Phys.Rev.Lett. 45(1980)1307.
- 10) S. Bortis, A. Golutvin, L. Laptin, V. Lyubimov, V. Nagovizin, E. Novikov, V. Nozik, V. Soloshenko, I. Tikhomirov and E. Tret'yakov, Proc. Int. Europhys. Conf. on high energy physics, Brighton, 1983, Rutherford Appleton Laboratory, Chilton, Didcot.
- 11) J.-L. Vuilleumier, Rep.Progr.Phys. 49(1986)1293.
- 12) Moriond workshop on massive neutrinos in astrophysics and in particle physics, 15-21 January 1984, J.Tran Thanh Van, ed. (Editions, Frontières, Dreux).
- 13) C. Castagnoli and P. Galeotti, Nuovo Cim. 8C(1985)450.
- 14) Ch.J. Calkoen and S.R. de Groot, Physica 111A(1982)531.
- 15) S.R. de Groot and Ch.J. Calkoen, Proc.Kon.Ned.Akad.Wet. B87(1984)131.
- 16) L.J. van den Horn and Ch.G. van Weert, Phys.Lett. A83(1981)88.
- 17) L.J. van den Horn and Ch.G. van Weert, Phys.Lett. B101(1981)447.

НЕСТАНДАРТНЫЕ АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

В.В.Курышкин, Э.Э.Энтральго

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Оператор поля $\mathcal{U}_S$ в квантовой теории системы свободных полей в общем случае может быть записан [1,2] в виде суммы $\mathcal{U}_S = \mathcal{U}_S^+ + \mathcal{U}_S^-$,

$$\mathcal{U}_{S_j}^{\pm}(x) = \sum_{\vec{\gamma}_S} \int d\vec{k} e^{\pm i\kappa_S x} \mathcal{U}_{S_j}^{\vec{\gamma}_S, \pm}(\vec{k}) \mathcal{A}_{\vec{\gamma}_S}^{\pm}(\vec{k}). \quad (1)$$

Здесь $\vec{\gamma}_S$ - индекс компоненты поля S , $x = (x^0, \vec{x})$ - координата пространства-времени, $\kappa_S x = \kappa_S^0 x^0 - \vec{\kappa}_S \vec{x}$, $\kappa_S^0 = \sqrt{\vec{\kappa}_S^2 + m_S^2}$, m_S - масса поля S , $\mathcal{A}_{\vec{\gamma}_S}^+(\vec{k})$ - оператор рождения, $\mathcal{A}_{\vec{\gamma}_S}^-(\vec{k})$ - оператор уничтожения кванта поля $(S\vec{\gamma}_S, \vec{k})$, имеющего энергия-импульс $\kappa_S = (\kappa_S^0, \vec{\kappa}_S)$ и совокупность дискретных характеристик (электрический заряд, спин и т.п.), определяемых индексами $S\vec{\gamma}_S$.

В записи (1) операторы поля операторы рождения и уничтожения взаимно сопряжены, так что $(\mathcal{A}_{\vec{\gamma}_S}^{\pm}(\vec{k}))^{\dagger} = \mathcal{A}_{\vec{\gamma}_S}^{\mp}(\vec{k})$, а числовые функции $\mathcal{U}^{\pm}(\vec{k})$ есть (в зависимости от индексов) либо тождественные нули, либо линейно независимые решения уравнений поля S в импульсном представлении, нормированные таким образом, чтобы оператор энергия-импульса всей системы свободных полей записывался в виде

$$P^n = \sum_S \sum_{\vec{\gamma}_S} \int d\vec{k} \cdot \kappa_S^n \cdot \mathcal{N}_{S\vec{\gamma}_S}(\vec{k}). \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{N}_{S\vec{\gamma}_S}(\vec{k})$ - оператор числа квантов $(S\vec{\gamma}_S, \vec{k})$, выражающийся через операторы рождения и уничтожения как

$$\mathcal{N}_A(\vec{k}) = f_A \mathcal{A}_A^+(\vec{k}) \mathcal{A}_A^-(\vec{k}) + p_A \mathcal{A}_A^-(\vec{k}) \mathcal{A}_A^+(\vec{k}) + c_A(\vec{k}), \quad (3)$$

где $A = S\vec{\gamma}_S$ - собирательный индекс операторов рождения и уничтожения, $(f_A, p_A) \in ((1/2, 1/2), (0, 1), (1, 0))$ в случае тензорных полей и $(f_A, p_A) \in ((1/2, -1/2), (0, -1), (1, 0))$ в случае спинорных полей, $c_A(\vec{k})$ - числовые величины, выбираемые таким образом, чтобы выполнялись условия "физичности" состояния "вакуума" Φ_0 :

$$\mathcal{N}_A(\vec{x})\Phi_0 = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{Q}_A^-(\vec{x})\Phi_0 = 0, \quad \Phi_0^*\Phi_0 = 1. \quad (4)$$

Условия совместности [1] трансформационных свойств операторов поля и векторов состояния при преобразованиях трансляции,

$$i\partial_n \mathcal{U}_{S_{d_s}}^\pm(x) = [\mathcal{U}_{S_{d_s}}^\pm(x), P_n]_- , \quad (5)$$

после подстановки в них выражений (1) и (2) устанавливает указанный выше физический смысл операторов $\mathcal{Q}^\pm$ и приводит к необходимой и достаточной для выполнения (5) системе тождественных соотношений:

$$\sum_{\mu_z} [\mathcal{N}_{\mu_z}(\vec{x}), \mathcal{Q}_{S_{d_s}}^\pm(\vec{p})]_- = \pm \delta_{\vec{x}\vec{z}} \delta(\vec{x}-\vec{p}) \mathcal{Q}_{S_{d_s}}^\pm(\vec{x}). \quad (6)$$

В современной квантовой теории поля фактически постулируется, что операторы (1) принадлежат стандартной алгебре A_{CT} , в которой операторы рождения и уничтожения, являющиеся образующими алгебры, подчинены системе тождественных соотношений:

$$\mathcal{Q}_A^-(\vec{x})\mathcal{Q}_B^+(\vec{p}) + \tau_{AB} \mathcal{Q}_B^+(\vec{p})\mathcal{Q}_A^-(\vec{x}) = \delta_{AB} \delta(\vec{x}-\vec{p}), \quad (7a)$$

$$\mathcal{Q}_A^-(\vec{x})\mathcal{Q}_B^-(\vec{p}) + \tau_{AB} \mathcal{Q}_B^-(\vec{p})\mathcal{Q}_A^-(\vec{x}) = 0, \quad (7b)$$

где $\tau_{AB} = 1$, если индексы A и B относятся к спинорным полям, и $\tau_{AB} = -1$ в противном случае. Так как $\mathcal{Q}_A^-\mathcal{P}_A\tau_{AA} = 1$, то соотношения (7) находятся в согласии с условиями (4) и системой тождеств (6), где $\mathcal{N}_A(\vec{x})$ задан выражением (3). При этом $\mathcal{C}_A(\vec{x}) = -\mathcal{P}_A\delta(\vec{x})$, что эквивалентно записи оператора $\mathcal{P}''$ в форме нормального произведения, $\mathcal{N}_A(\vec{x}) = \mathcal{Q}_A^+(\vec{x})\mathcal{Q}_A^-(\vec{x})$, что обеспечивает неотрицательность оператора энергии $\mathcal{P}^0$.

Следует отметить, что соотношения (7) для фиксированного поля могут быть выведены [1,2] из соотношений (3) и (6), если предварительно постулировать, что либо коммутаторы, либо антикоммутаторы операторов (1) являются числовыми функциями и одновременно потребовать положительности энергии поля (частный случай доказательства известной теоремы Паули). Однако и в этом случае требуются дополнительные постулаты, например, антикоммутация одного спинорного поля с другим при коммутации их с любым тензорным полем.

Еще в 1950 г. было замечено [3], что задача (3), (6) может иметь решения, отличающиеся от соотношений (7), что должно приводить к появлению некоторых нестандартных алгебр A_n , не совпадающих с A_{CT} .

Первые примеры алгебр A_n , известные в настоящее время как алгебры пара-операторов A_p , были построены в 50-х годах [4,5]. Одна-

ко детальное изучение алгебр пара-операторов показало, что пара-поле всегда сводится к системе полей на аномальной алгебре A_A и в конечном итоге к системе полей с простейшей внутренней симметрией на A_{et} (подробнее см. [4-10]). Этот вывод привел к существенному снижению интереса к алгебрам пара-операторов.

Еще ряд возможностей построения нестандартных алгебр был продемонстрирован в работах [11, 12], где, в частности, были введены так называемые обобщенные билинейные тождественные соотношения для операторов рождения и уничтожения. В общем случае такого рода тождественные соотношения имеют вид

$$a_A^-(z) a_B^+(\bar{p}) + \sum_{c,d} \alpha_{AB}^{cd}(\kappa, \rho) a_d^+(\bar{p}) a_c^-(z) = \beta_{AB}(\kappa, \rho), \quad (8a)$$

$$a_A^-(z) a_B^-(\bar{p}) + \sum_{c,d} \gamma_{AB}^{cd}(\kappa, \rho) a_d^-(\bar{p}) a_c^-(z) = \lambda_{AB}(\kappa, \rho). \quad (8b)$$

Допустимые коэффициенты функции α , β , γ и λ в соотношениях (8) зависят от конкретной системы свободных полей и определяются следующим образом.

1. Действуя соотношениями (8b) на состояние "вакуума" с учетом условий его "физичности" (4), получим

$$\lambda_{AB}(\kappa, \rho) = 0. \quad (9)$$

2. Проведя замену переменных $A, \bar{z} \leftrightarrow B, \bar{p}$ в соотношениях (8) и взяв сопряжение к (8a) после сравнения полученных соотношений с исходными, имеем условия математической непротиворечивости:

$$\alpha_{AB}^{*cd}(\kappa, \rho) = \alpha_{BA}^{dc}(\rho, \kappa), \quad \beta_{AB}^{*}(\kappa, \rho) = \beta_{BA}(\rho, \kappa), \quad (10a)$$

$$\sum_{c,d} \gamma_{AB}^{cd}(\kappa, \rho) \cdot \gamma_{dc}^{EF}(\rho, \kappa) = \delta_A^E \delta_B^F. \quad (10b)$$

3. Приводя с помощью (8a) оператор (3) к нормальной форме и требуя неотрицательности оператора энергии P^0 (2) с одновременным выполнением условий (4), находим:

$$\alpha_{AA}^{cd}(\kappa, \kappa) = \tau_{AA} \delta_A^c \delta_A^d, \quad c_A(z) = -\beta_A \beta_{AA}(\kappa, \kappa). \quad (11)$$

4. Считая равенства (9)-(11) выполненными и вычисляя коммутаторы операторов чисел квантов (3) с операторами рождения и уничтожения, после подстановки их в требуемые тождества (6) с необходимостью полу-

чаем:

$$\beta_{AB}(\kappa, \rho) = \delta_{AB} \delta(\vec{r} - \vec{\rho}), \quad (I2a)$$

$$\sum_{\vec{s}} \left(\sum_C \alpha_{s\vec{s}A}^{BC}(\kappa, \rho) \cdot \delta_{C s\vec{s}}^{DE}(\rho, \kappa) - \delta_A^D \delta_{s\vec{s}}^B \delta_{s\vec{s}}^E \right) = 0. \quad (I2b)$$

5. Умножая равенства (I2б) на $\delta_{E\vec{s}}^{FD}(\kappa, \rho)$ и суммируя полученное по индексам E и D , с учетом (I0б) находим:

$$\sum_{\vec{s}} \left(\delta_{s\vec{s}}^D \alpha_{s\vec{s}A}^{BC}(\kappa, \rho) - \delta_{s\vec{s}}^B \delta_{s\vec{s}A}^{*DC}(\kappa, \rho) \right) = 0. \quad (I3)$$

Отсюда, после раскрытия индексов D и B , с необходимостью следует переобозначение:

$$\alpha_{s\vec{s}A}^{z\mu_z C} = \delta_s^z N_{\vec{s}A}^{\mu_z C}, \quad \delta_{s\vec{s}A}^{z\mu_z C} = \delta_s^z N_{\mu_z A}^{*z\vec{s}C}. \quad (I4)$$

6. Подставляя первое выражение из (I4) в первое соотношение из (I0a), имеем

$$\delta_s^{z'} N_{\vec{s} s'\vec{s}'}^{\mu_z z'\mu_z'} = \delta_{s'}^{z'} N_{\vec{s}' s\vec{s}'}^{\mu_z' z'\mu_z}. \quad (I5)$$

Отсюда следует переобозначение для величины N (аналогично переходу от (I3) к (I4)), после чего, возвращаясь к (I4), окончательно для коэффициентных функций α и δ находим

$$\alpha_{s\vec{s} s'\vec{s}'}^{s'\mu_z' z'\mu_z'} = \delta_s^{s'} \delta_{s'}^{z'} M_{\vec{s} \vec{s}'}^{\mu_z' \mu_z}, \quad \delta_{s\vec{s} s'\vec{s}'}^{s'\mu_z' z'\mu_z'} = \delta_s^{s'} \delta_{s'}^{z'} M_{\vec{s}' \vec{s}}^{\mu_z' \mu_z}. \quad (I6)$$

7. Подставляя теперь выражения (I6) в соотношения (II), (I0a) и (I0б), приходим к необходимым свойствам величины M :

$$M_{\vec{s} \vec{s}'}^{\mu_z \mu_z'}(\kappa, \kappa) = I_{ss'} \delta_{\vec{s} \vec{s}'}^{\mu_z \mu_z'}, \quad (I7a)$$

$$M_{\vec{s} \vec{s}'}^{\mu_z \mu_z'}(\kappa, \rho) = M_{\mu_z \mu_z'}^{\mu_z' \mu_z}(\rho, \kappa), \quad (I7б)$$

$$\sum_{\vec{s}'' \vec{s}'''} M_{\vec{s} \vec{s}''}^{\mu_z \mu_z''}(\kappa, \rho) \cdot M_{\vec{s}'' \vec{s}'''}^{\mu_z'' \mu_z'''}(\rho, \kappa) = \delta_{\vec{s} \vec{s}'''}^{\mu_z \mu_z'''} \quad (I7в)$$

Наконец, суммируя все вышеизложенное, из (8) имеем тождественные соотношения для операторов рождения и уничтожения квантов поля, допус-

тимые для системы свободных полей:

$$A_{S_2}^-(\vec{x}) A_{\mu_2}^+(\vec{p}) + \sum_{\nu_1, \mu_1} M_{\nu_1 \mu_1}^{\nu_2 \mu_2}(\kappa, \rho) A_{\mu_1}^+(\vec{p}) A_{S_1}^-(\vec{x}) = \delta_{S_2} \delta_{\nu_1 \mu_1} \delta(\vec{x} - \vec{p}), \quad (18a)$$

$$A_{S_2}^-(\vec{x}) A_{\mu_2}^-(\vec{p}) + \sum_{\nu_1, \mu_1} M_{\nu_1 \mu_1}^{\nu_2 \mu_2}(\kappa, \rho) A_{\mu_1}^-(\vec{p}) A_{S_1}^-(\vec{x}) = 0. \quad (18b)$$

Здесь M есть удовлетворяющая системе алгебраических равенств (17) матрица, размерность которой при фиксированных S_2 и μ_2 есть $n_2 \times n_2$ (n_2 — число различных квантов поля S при $\kappa_2 = \text{const.}$), а элементы есть функции от импульсно-энергетических переменных операторов $A^\pm$.

Сразу же отметим, что тривиальным решением системы (17) является матрица (единичная с точностью до знака)

$$M_{\nu_1 \mu_1}^{\nu_2 \mu_2}(\kappa, \rho) = \tau_{S_2} \delta_{\nu_1}^{\nu_2} \delta_{\mu_1}^{\mu_2} \quad (19)$$

(определение τ_{S_2} дано в примечании к соотношениям (7)), сводящая соотношения (18) к тождественным соотношениям (7) стандартной алгебры операторов рождения и уничтожения.

Рассмотрим теперь некоторые следствия нестандартных алгебр, определяемых тождественными соотношениями (18) при нетривиальных матрицах M , удовлетворяющих системе равенств (17).

Приводя операторы $A_A^-(\vec{x}) A_A^+(\vec{x})$ и $N_A(\vec{x})$ (3) к нормальной форме, с помощью соотношений (18) в силу свойств (17a) матрицы M имеем

$$A_A^-(\vec{x}) A_A^+(\vec{x}) + \tau_{AA} A_A^+(\vec{x}) A_A^-(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}), \quad (20a)$$

$$[N_A(\vec{x}), A_A^+(\vec{x})]_- = \pm \delta(\vec{x} - \vec{x}) A_A^+(\vec{x}), \quad (20b)$$

$$N_A(\vec{x}) = A_A^+(\vec{x}) A_A^-(\vec{x}), \quad \text{если} \quad C_A(\vec{x}) = -\tau_{AA} \delta(\vec{x} - \vec{x}). \quad (20b)$$

Равенство (20b) для C_A вытекает из соотношений (11), (12a) и совпадает с аналогичным выражением при стандартной алгебре, означая фактически запись оператора $P^n(2)$ в форме нормального произведения с учетом тождественных соотношений (18).

Согласно соотношениям (20) подалгебра $A_n(r)$ с образующими $A_A^+(\vec{x})$ и $A_A^-(\vec{x})$ фиксированных переменных $(A, \vec{x})$ совпадает с $A_{cr}(r)$. В силу соотношений (20) условия (4) "физичности" состояния "вакуума" оказываются выполненными, оператор энергии $P^0(2)$ неотрицателен, а операторы $A_{S_2}^+(\vec{x})$ и $A_{S_2}^-(\vec{x})$ на самом деле являются операторами рождения

и уничтожения кванта энергии-импульса $\kappa_s = (\sqrt{\vec{\kappa}^2 + m_s^2}, \vec{\kappa})$. Кроме того, соотношения (20) показывают, что тождественные кванты тензорных полей ($\varepsilon_{\lambda\lambda} = -1$) являются бозонами, а тождественные кванты спинорных полей ($\varepsilon_{\lambda\lambda} = +1$) — фермионами, т.е. доказательства дополнительной теоремы о связи спина со статистикой при рассматриваемых нестандартных алгебрах не требуется.

Вычисляя коммутаторы операторов чисел квантов ($s_{\vec{\kappa}}, \vec{\kappa}$) с операторами рождения и уничтожения квантов ($\varepsilon_{\mu_k}, \vec{p}$), в силу свойств (17б) матрицы M , в частности, получим

$$[N_{s, \vec{\kappa}}(\vec{\kappa}), a_{\vec{\mu}_k}^+(\vec{p})]_- = \delta_{s, \vec{\mu}_k} \delta_{\vec{\kappa}, \vec{p}} a_{s, \vec{\mu}_k}^+(\vec{\kappa}) + \\ + \sum_{\substack{\nu_1, \mu_1', \nu_1'' \\ \mu_1''}} \left(\sum_{\substack{\mu_2, \mu_2'' \\ \mu_2''}} M_{\substack{\mu_2, \mu_2'' \\ \mu_2, \mu_2''}}^{\substack{\nu_1, \mu_1' \\ \nu_1, \mu_1'}}(\kappa, \rho) \cdot M_{\substack{\mu_2, \mu_2'' \\ \mu_2, \mu_2''}}^{\substack{\nu_1, \mu_1' \\ \nu_1, \mu_1'}}(\kappa, \rho) - \delta_{\vec{\kappa}}^{\nu_1} \delta_{\vec{\mu}_k}^{\mu_1'} \delta_{\vec{\mu}_k}^{\mu_1''} \right) a_{\substack{\mu_2, \mu_2'' \\ \mu_2, \mu_2''}}^+(\vec{\kappa}) a_{\substack{\mu_2, \mu_2'' \\ \mu_2, \mu_2''}}^+(\vec{\kappa}) a_{\substack{\mu_2, \mu_2'' \\ \mu_2, \mu_2''}}^-(\vec{\kappa}). \quad (21)$$

Суммируя равенство (21) (и сопряженное к нему равенство) по $\vec{\mu}_k$, в силу свойств (17в) матрицы M приходим к тождествам (6), обеспечивающим выполнение условий совместности (5) и еще раз подтверждающим физический смысл операторов $a^\pm$.

Применение алгебр A_H с тождественными соотношениями (18) в конкретных полевых моделях связано с двумя трудностями, появившимися в основном в результате того, что при таких алгебрах в общем случае ни коммутаторы, ни антикоммутаторы операторов поля (1) не являются числовыми функциями.

Первое затруднение возникает при проведении конкретных вычислений, в которых нельзя использовать привычные для A_{et} математические приемы типа теоремы Вика, диаграмм Фейнмана и т.п. Однако такие трудности являются чисто техническими и устраняются простым увеличением времени на проведение необходимых выкладок (в рассматриваемой алгебре пока приходится использовать ту же технику вычислений, что применялась в A_{et} в 40-х годах).

Второе затруднение возникает в связи с тем, что построенный на $\mathcal{U}_s \in A_H$ с помощью принципа соответствия самосопряженный скалярный оператор взаимодействия полей $\mathcal{L}(x)$ в общем случае не обладает свойством локальной коммутативности, т.е.

$$[\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(x')]_- \neq 0, \quad x \sim x'. \quad (22)$$

Это трудность принципиального характера, но и она может быть устранена путем отказа от релятивистски-нековариантных при (22) понятий хронологических $\mathcal{T}$ -произведений в пользу релятивистски-ковариантных при (22) хронологических $\mathcal{Z}$ -произведений, введенных в [13]. Мат-

рица рассеяния, построенная с помощью $\mathcal{L}$ -произведений лагранжианов взаимодействия, оказывается унитарной, ковариантной и причинной (но не микропричинной) даже в случае взаимодействия (22) (см. [13-14]).

В заключение отметим, что обсуждение ряда эффектов применения нестандартных алгебр с частными случаями соотношений [18], полученных в основном в работах [12, 15, 16], изложено в докладе [10].

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
2. Бьеркен Д.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. "Мир", М., 1978.
3. Wigner E.-Phys.Rev., 71, 711, 1950..
4. Green H.S.-Phys.Rev., 90, 270, 1953.
5. Волков Д.В.-ЖЭТФ, 36, 1560, 1959.
6. Gorkov A.B.-Int.J.Theor.Phys., 7, 49, 1973.
7. Говорков А.Б.-ЭЧАЯ, 8, 1056, 1977.
8. Klein O.-J.Phys.Rad., 9, 1, 1938.
9. Стритер Р., Вайтман А. РСТ, спин, статистика и все такое. "Наука", М., 1966.
10. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. 3-й Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИИИ, Дубна, Д17-84-850, 1984, с. 431.
11. Kuryshkin V.V.-Ann.Fond.L.de Broglie, 5, III, 1960.
12. Грачев Д.Д., Дубков С.Л., Курышкин В.В. Проблемы статистической физики и теории поля. УДН, М., 1982, с. 157.
13. Дубков С.Л., Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. Проблемы квантовой теории поля. ОИИИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с. 352.
14. Курышкин В.В., Севастьянов Л.А. Проблемы статистической физики и теории поля. УДН, М., 1987, с. 71.
15. Грачев Д.Д.-Известия вузов. Физика. № 12, 56, 1981.
16. Grachov D.D., Kundu A.-Ind.J.Pure and Appl.Phys., 20, 393, 1982.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ S -МАТРИЦЫ В ФОРМАЛИЗМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Г.П.Джорджадзе, А.Н.Квинишидзе, Г.А.Чечелашвили

Математический институт им. А.М.Размадзе АН ГССР, Тбилиси

Метод функционального интегрирования позволяет компактно записать выражения для оператора эволюции и производящих функционалов функций Грина, а S -матрицу затем можно получить применением стандартных редукционных формул к функциям Грина^{/1/}.

Существует и непосредственное представление S -матрицы через функциональный интеграл (см., например^{/2/}), где интеграл строится в голоморфном представлении и только после этого производится переход к интегрированию по полям, т.е. к конфигурационному представлению.

В данной работе на основе функционального интеграла в конфигурационном пространстве получено выражение S -матрицы в голоморфном представлении, отличающееся от упомянутого. Кроме того, полученное выражение позволяет вычислить S -матрицу, если известно поведение двухвременных функций Грина на временных бесконечностях.

Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением одномерного квантово-механического ангармонического осциллятора. Все формулы, полученные в этой модели, легко обобщаются на теорию поля, хотя для существования S -матрицы здесь необходимо введение обрезашего фактора взаимодействия.

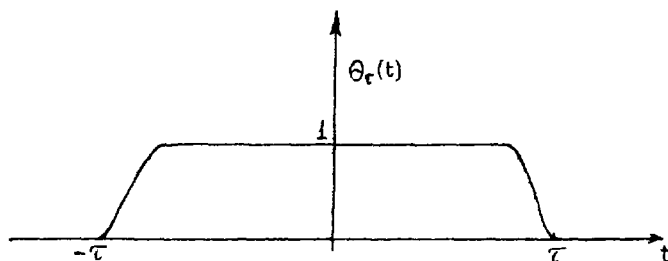
Рассмотрим гамильтониан

$$H = H_0 + \Gamma(x)\theta_\tau(t), \quad (1a)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2), \quad (1б)$$

а $\theta_\tau(t)$ - обрезаший фактор, обращающийся в нуль вне интервала $-\tau \leq t \leq \tau$.



Для построения S -матрицы

$$S = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow +\infty \\ t_2 \rightarrow -\infty}} e^{iH_0 t_1} T \left(e^{-i \int_{t_2}^{t_1} H(t) dt} \right) e^{-iH_0 t_2} \quad (2)$$

наиболее удобным является голоморфное представление^{/1,2/}, так как оно легко связывается с нормальным символом, и, кроме того, действие оператора $\exp(-iH_0 t)$ на базисный вектор этого представления имеет простой вид

$$e^{-iH_0 t} |z\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} |z\rangle e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

Тогда из (2) и (3) получаем

$$\langle z_1 | S | z_2 \rangle = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow +\infty \\ t_2 \rightarrow -\infty}} e^{\frac{i\omega}{2}(t_1 - t_2)} \langle z_1(t_1) | U | z_2(t_2) \rangle, \quad (4)$$

где $z_{\pm}(t_{\pm}) = z_{\pm} e^{\exp(-i\omega t_{\pm})}$, а U -оператор эволюции, для которого существует представление через функциональный интеграл в конфигурационном пространстве

$$\langle x_1 | U | x_2 \rangle = \int_{x(t_2)=x_2}^{x(t_1)=x_1} D x(t) e^{iA[x(t)]}, \quad (5a)$$

действие A согласно (1) имеет вид

$$A[x(t)] = \int_{t_2}^{t_1} dt \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \Gamma(x) \theta_\tau(t) \right). \quad (5b)$$

Используя известные формулы перехода от конфигурационного представления к голоморфному

$$\langle z | x \rangle = e^{-\frac{1}{2} z^2 + z^* x \sqrt{\frac{\omega}{2}}} \varphi_0(x), \quad \text{где} \quad \varphi_0(x) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega x^2}{2}},$$

получаем

$$\langle Z_+ | S | Z_0 \rangle = \lim_{\substack{t_+ \rightarrow +\infty \\ t_- \rightarrow -\infty}} S(t_+, t_-), \quad (6a)$$

где

$$S(t_+, t_-) = e^{-\frac{i}{2}(Z_+^*(t_+) + Z_-^*(t_-))} \cdot e^{\frac{i}{2}\omega(t_+ - t_-)} \times \quad (6b)$$

$$\times \int D_v[x] e^{iA[x(t)] + Z_+^*(t_+)x_+ \sqrt{2\omega} + Z_-(t_-)x_- \sqrt{2\omega}},$$

а $D_v[x] = D\alpha(t) d\alpha_+ d\alpha_- \varphi_+(x_+) \varphi_-(x_-)$.

Рассмотрим выражение

$$S(t_+, t''; t_-, t') = e^{-\frac{i}{2}(Z_+^*(t'') + Z_-^*(t'))} e^{\frac{i}{2}\omega(t_+ - t_-)} \times \quad (7)$$

$$\times \int D_v[x] e^{iA[x(t)] + Z_+^*(t'')x'' \sqrt{2\omega} + Z_-(t')x'(t') \sqrt{2\omega}}.$$

Ввиду непрерывности гриновских функций

$$\int D_v[x] e^{iA[x(t)]} x''(t'') x'(t'),$$

а также функций $Z_+(t'')$ и $Z_-(t')$, имеет место равенство

$$\lim_{\substack{t'' \rightarrow t_+ \\ t' \rightarrow t_-}} S(t_+, t''; t_-, t') = S(t_+, t_+; t_-, t_-) = S(t_+, t_-). \quad (8)$$

Тогда из (6), (7) и (8) следует

$$\langle Z_+ | S | Z_0 \rangle = \lim_{\substack{t_+ \rightarrow +\infty \\ t_- \rightarrow -\infty}} \lim_{\substack{t'' \rightarrow t_+ \\ t' \rightarrow t_-}} S(t_+, t''; t_-, t'). \quad (9)$$

Исследуем зависимость функции $S(t_+, t''; t_-, t')$ от своих аргументов вне области взаимодействия $\{\tau\}$:

$$t_+ \leq t' < -\tau, \quad \tau < t'' \leq t_-. \quad (10)$$

В этой области, согласно (2), (6) и (8), $S(t_+, t''; t_-, t_-)$ не зависит от t_+ и t_- . С другой стороны, расфиксация переменных в (7) проведена таким образом, что и $S(t_+, t''; t_-, t')$ от t_+ и t_- не зависит при произвольных t'' и t' . Это является следствием того, что

$$S(t_+, t''; t_-, t') = e^{-\frac{i}{2}(Z_+^*(t'') + Z_-^*(t'))} \langle 0 | e^{iH_0 t_+} \tilde{U}_I e^{-iH_0 t_-} | 0 \rangle,$$

где $|0\rangle$ - стандартный вакуум, $\tilde{U}_{J_2}$ - оператор эволюции, заданный гамильтонианом

$$\tilde{H} = H + \alpha J_2(t), \quad (IIa)$$

а

$$J_2(t) = -i\sqrt{2\omega} [Z_+^*(t)\delta(t-t') + Z_-(t)\delta(t-t')]. \quad (IIb)$$

Таким образом, $S(t_0, t_0'; t_0, t')$ в области (IO) не зависит и от t'' и t' , и в (9) можно t_0 , t_0' , t' , t'' устремлять к бесконечностям независимо друг от друга, а также переставить пределы. В результате имеем

$$\begin{aligned} \langle Z_+ | S | Z_+ \rangle &= \lim_{\substack{t'' \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} e^{-\frac{i}{2}(Z_+^{*2}(t'') + Z_+^2(t'))} \\ &\times \lim_{\substack{t_0 \rightarrow +\infty \\ t_0' \rightarrow -\infty}} e^{\frac{i}{2}\omega(t_0 - t_0')} \int D_+[x] e^{iA[x(t)] + i \int_{t_0'}^{t_0} J_2(t) x(t) dt}, \end{aligned} \quad (I2)$$

что и выражает S -матрицу в голоморфном представлении через функциональный интеграл в конфигурационном пространстве.

Далее, если провести замену переменной интегрирования в функциональном интеграле (I2):

$$\alpha(t) = y(t) + \alpha_0(t),$$

где

$$\alpha_0(t) = -\int G_c(t, t_1) J_2(t_1) dt_1 \xrightarrow[t' \rightarrow -\infty]{t'' \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [Z_+^* e^{i\omega t} + Z_+ e^{-i\omega t}] \quad (I3)$$

(так как $G_c(t, t_1) = \frac{1}{2i\omega} e^{-i\omega|t-t_1|}$), после простых выкладок получаем известное выражение^{/2/} для нормального символа S -матрицы:

$$S_N(Z_+^*, Z_0) = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow +\infty \\ t_0' \rightarrow -\infty}} e^{\frac{i}{2}\omega(t_0 - t_0')} \int D_+[y] e^{i \int \left[\frac{1}{2}(\dot{y}^2(t) - \omega^2 y^2(t)) - \Gamma(y(t) + \alpha_0(t)) \right] dt}.$$

Как известно, коэффициенты разложения ядра оператора в голоморфном представлении по степеням Z_+ и Z_+^* дают представление этого оператора в пространстве Фока. Используя разложение

$$e^{-\frac{1}{2}Z^2 + Z\alpha\sqrt{2\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\alpha\sqrt{\omega}) \frac{Z^n}{\sqrt{n!}},$$

из (I2) получаем

$$\langle n | S | m \rangle = \lim_{\substack{t'' \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \frac{e^{i n t'' - i m t'}}{\sqrt{2^{n+m} n! m!}} \lim_{\substack{t_0 \rightarrow +\infty \\ t_0' \rightarrow -\infty}} e^{\frac{i}{2}\omega(t_0 - t_0')} \int D_+[y] e^{iA[x(t)]} H_n(\alpha(t'')\sqrt{\omega}) H_m(\alpha(t')\sqrt{\omega}). \quad (I4)$$

Согласно (I4), для вычисления S -матрицы достаточно знать асимптотическое поведение двумерных функций Грина.

С другой стороны, очевидно, что (I2) можно представить в виде

$$\langle Z_0 | S | Z_n \rangle = \lim_{\substack{t' \rightarrow \infty \\ t'' \rightarrow -\infty}} e^{-\frac{i}{2}(Z_0^{\dagger}(t'') + Z_n^{\dagger}(t'))} e^{iZ(J_s)} \quad (I5)$$

где $Z(J)$ — производящий функционал связанных функций Грина:

$$Z_J = \sum \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n G^n(t_1, \dots, t_n) J(t_1) \dots J(t_n).$$

Если учесть, что двухточечная полная функция Грина (и только она) содержит свободную причинную часть

$$G(t_1, t_2) = G_c(t_1, t_2) + G^r(t_1, t_2), \quad (G_c(t_1, t_2) = \frac{1}{2i\omega} e^{-i\omega|t_1 - t_2|}),$$

то после ее выделения и подстановки явного вида $J_s(t)$ (см. (II6)) получаем

$$\langle Z_0 | S | Z_n \rangle = e^{iZ_0} \lim_{\substack{t' \rightarrow \infty \\ t'' \rightarrow -\infty}} e^{iZ^r(J_s)} \quad (I6)$$

где $Z^r(J)$ — оставшийся производящий функционал связанных функций Грина после выделения свободной части.

Множитель e^{iZ_0} в (I6) исчезает при переходе к нормальному символу. Тогда, подставляя (II6) и учитывая симметрию функций Грина $G_n(t_1, \dots, t_n)$ относительно перестановки аргументов, окончательно получаем

$$S_n(Z_0^{\dagger}, Z_n) = \lim_{\substack{t' \rightarrow \infty \\ t'' \rightarrow -\infty}} \exp[i \sum_{m=1}^{\infty} (-i\sqrt{\omega})^m \frac{t_0^{\dagger m}}{m!} \frac{Z_n^n}{n!} e^{i\omega(m t' - n t'')} G_{m+n}(t_0^{\dagger}, \dots, t_0^{\dagger}, t_1, \dots, t_n)]. \quad (I7)$$

Как видно из (I7), для получения связанной части S -матрицы, с n входящими и m выходящими линиями, достаточно взять $(m+n)$ -точечную двухвременную функцию Грина и умножив на соответствующие экспоненты перейти к пределам $t' \rightarrow \infty$, $t'' \rightarrow -\infty$.

Отметим также, что формулу (I6) можно представить в следующем виде:

$$S_n(Z_0^{\dagger}, Z_n) = \lim_{\substack{t' \rightarrow \infty \\ t'' \rightarrow -\infty}} e^{iJ_s(t) \frac{\delta}{\delta J(t)}} e^{iZ^r(J)} \Big|_{J=0},$$

который, после замены $J_2(t) = - \int G_c^{-1}(t,t') L(t') dt'$ (см. (I3)), допускает предельный переход, и в результате получаем традиционные редуционные формулы

$$S_n(z_i^*, z_i) = e^{\int x_0(t) G_c^{-1}(t,t') \frac{\delta}{\delta J(t)} e^{i Z^r(J)} \Big|_{J=0} .$$

В заключение отметим, что формула (I2) может быть использована для квазиклассического вычисления S -матрицы методом стационарной фазы.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. Москва: Наука, 1976, с.479.
Иппиксон К., Эюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. т.2. Москва: Мир, 1984, с.400.
2. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в теорию калибровочных полей. Москва: Наука, 1978, с.238.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, МЕТОД СКЛЕИВАНИЯ И P^* -ОПЕРАЦИЯ

В.А.Смирнов

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

К.Г.Четыркин

Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

Изложено обобщение метода склеивания для исследования асимптотического поведения при стремлении некоторых внешних импульсов и (или) масс к бесконечности. Используемый подход позволяет просто вводить явные операторные асимптотические разложения различного вида для S -матрицы, составных полей и их произведений.

Начиная с пионерской работы Вайнберга^{/1/} асимптотическое поведение фейнмановских амплитуд (ФА) при больших импульсах изучалось разными методами (см., например, работы^{/2-8/}). Как правило, исследовался режим при стремлении всех импульсов к бесконечности, а импульсы предполагались неисклчительными. Типичным результатом является асимптотическое разложение $F_{\Gamma}(Q/\lambda) \sim \sum_{k,l} C_{k,l} \lambda^k \ln^l \lambda$ ФА, сопоставленной данному графу Γ , при неисклчительных евклидовых импульсах $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$. Коэффициенты $C_{k,l}$ выражались довольно громоздко либо через суммы "секторных" параметрических интегралов^{/6/}, либо, например, через интегралы меллиновского типа^{/5,7,8/}.

Что касается режима больших масс, то он рассматривался отдельно и изучался в связи с теоремой об отделении тяжелых полей^{/9/}: см., например, главу 8 монографии Коллинза^{/10/} и цитированную там литературу. Оказывается, для анализа асимптотического поведения в различных физических ситуациях необходимо рассматривать самые разные объединения асимптотические режимы больших импульсов и масс, причем импульсы могут быть и исклчительными.

Наиболее существенные результаты были до настоящего времени получены для разложения произведения операторов на малых расстояниях (разложения Вильсона), которому соответствует режим одного большого импульса. Первые такое разложение было явно выведено Циммерманом^{/11/} в скалярной массивной φ^4 -теории в рамках БПЖ-перенормировки^{/12/} в случае произведения двух полей. Метод Циммермана основан на введении предвычитающего оператора, который как бы заранее устранил ультра-

фиолетовые (УФ) расходимости, возникающие при стремлении координат перемножаемых полей друг к другу.

Аникин и Завьялов обобщили метод Циммермана с помощью контрчленной техники /13/, позволяющей производить комбинаторные выкладки с рядами теории возмущений в целом. В частности, они вывели разложение Вильсона для произведения составных полей /14, 15/

$$(J_1(x+\xi_1) J_2(x+\xi_2)) \stackrel{\xi \rightarrow 0}{\cong} \sum_{\{1\lambda\}: \{1\lambda\} \leq a} c_{\{1\lambda\}} \langle R e^3 j_1(\xi_1) j_2(\xi_2) \tilde{j}^{\{1\lambda\}}(0) \rangle^{\xi \rightarrow 0, prop} J_{\{1\lambda\}}^a(x) + Q^a. \quad (1)$$

Здесь $J_{1,2} = R e^3 j_{1,2}$, $J_{\{1\lambda\}}^a = R^a e^3 j_{\{1\lambda\}}^a(x)$ — составные поля, определяемые своими in-образами $j_{1,2}$ и $j_{\{1\lambda\}}(x) = \varphi^{(1)}(x) \dots \varphi^{(\lambda)}(x)$, которые представляют собой произведения свободных полей и их производных в одной точке;

$\lambda = i \int \mathcal{L}_{int}(x) dx$, $c_{\{1\lambda\}} = (-i)^{\sum \lambda_j} / \ell! \prod \lambda_j!$, $\tilde{j}^{\{1\lambda\}}(0) = \tilde{\varphi}^{(1)}(q_1) \dots \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(q_\lambda) / q=0$, Q^a — остаточный член (остальные обозначения см. в монографии /15/).

Однако БПХЦ-перенормировка оказывается довольно неудобной в практических вычислениях. Кроме того, для применения в теориях с безмассовыми частицами ее необходимо модифицировать. Наконец, метод работ /13-15/ в своем первоначальном виде не приспособлен для исследования общих операторных разложений, связанных с произвольными режимами больших импульсов и масс. Цель нашей работы — описать метод /16/, который является универсальным в отношении рассматриваемых асимптотических режимов и приводит к простым явным формулам для коэффициентных функций разложений.

Предлагаемый метод представляет собой обобщение использованного для вывода разложения Вильсона метода склеивания /17, 18/, который основан на введении в фейнмановские диаграммы дополнительной (склеивающей) линии. При интегрировании ФА с пропагатором такой линии информация об асимптотическом поведении выражается в полюсных свойствах "склеенной" ФА по вспомогательному параметру аналитической регуляризации. Расширяя исходную R-операцию до R-операции для склеенных ФА, можно выразить вычеты в полюсах по этому параметру через некоторые контрчлены. С использованием формул контрчленной техники /13, 15/ диаграммный анализ переносится затем на ряд теории возмущений. С помощью такого метода в частных случаях было выведено /17, 18/ разложение Вильсона для произведения составных полей в рамках схемы минимальных вычитаний /19/. Для произвольных составных полей оно имеет вид

$$(J_1(x+\xi_1) J_2(x+\xi_2)) \stackrel{\xi \rightarrow 0}{\cong} \sum_{\{1\lambda\}} c_{\{1\lambda\}} R^* t_m \langle e^3 j_1(\xi_1) j_2(\xi_2) \tilde{j}^{\{1\lambda\}}(0) \rangle^{\xi \rightarrow 0, prop} J_{\{1\lambda\}}^*(x) \quad (2)$$

Здесь $t_m = \sum_{k=0}^{\infty} t_m^{(k)}$ — оператор, осуществляющий разложение в ряд Тейлора при нулевых массах, а R^* — R^* -операция^{/20,21/}, представляющая собой обобщение R -операции в случае присутствия инфракрасных (ИК) расходимостей. Хотя разложения (1) и (2) очень похожи по форме, второе из них применимо и при наличии безмассовых частиц и оказывается очень простым для вычисления коэффициентных функций: они выражаются через безмассовые ФА, зависящие только от одного внешнего импульса.

В общем асимптотическом режиме больших импульсов и масс некоторые импульсы $\underline{Q}$ ФА $F_r(\underline{Q}, \underline{q}, \underline{M}, \underline{m})$ считаются большими, а остальные — малыми. Аналогично массы подразделяются на тяжелые и легкие. Импульсы могут быть исключительными, т.е. некоторые суммы вида $\sum_i q_i$ и $\sum_i q_i$, вообще говоря, обращаются в нуль. В нашем методе процедура склеивания размерно регуляризованной ФА F_r обобщается с помощью интеграла меллиновского типа:

$$\hat{F}_r(\underline{Q}, \underline{q}, \underline{M}, \underline{m}, \varepsilon, \delta) = \int_0^1 d\lambda \lambda^{\delta} F_r(\underline{Q}/\lambda, \underline{q}, \underline{M}/\lambda, \underline{m}, \varepsilon). \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon = (4-D)/2$, а D — размерность пространства-времени. Основой метода является следующая теорема.

Теорема. Склеенная ФА является мероморфной функцией по ε и δ . Имеются три серии полюсов:

$$\Gamma(\gamma)\varepsilon = [\omega(\gamma)/2] - k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4a)$$

(обычная УФ-серия; γ — любой сильно связанный подграф, $\omega(\gamma)$ — УФ-индекс расходимости, $\Gamma(\gamma)$ — число петель; квадратные скобки обозначают целую часть числа);

$$\Gamma(\tilde{\gamma})\varepsilon = -[\tilde{\omega}(\gamma)/2] + k \quad (4б)$$

(ИК-серия; γ — любой ИК-неприводимый^{/22/} (это значит, что граф $\tilde{\gamma} = \Gamma / (\Gamma \setminus \gamma)$ одновершинно неприводим) и ИК-опасный (γ безмассовый, а суммарный импульс для каждой компоненты связности подграфа $\Gamma \setminus \gamma$ обращается в нуль) подграф; $\tilde{\omega}(\gamma) = -\omega(\tilde{\gamma})$ — ИК-индекс расходимости);

$$2\Gamma(\gamma)\varepsilon + \delta + 1 = \omega(\gamma) - k \quad (4в)$$

(дополнительная УФ-серия: γ берется из множества, определяемого заданным асимптотическим режимом; например, в случае неисключительных импульсов все тяжелые линии (образующие множество $\mathcal{L}_M$) содержатся в $\gamma = \gamma^0 \cup \gamma^1 \cup \dots$, а импульсы $\underline{Q}$ втекают в одну компоненту связности γ^0 , причем граф $\gamma^0 / (\gamma^0 \cap \mathcal{L}_M)$ является сильно связным после стягивания $\mathcal{Q}$ -вершин. Кроме того, компоненты связности γ^i при $i = 1, 2, \dots$ являются тяжелыми, а графы $\gamma^i / (\gamma^i \cap \mathcal{L}_M)$ — сильно связными)

Доказательство этой теоремы основано на модифицированной технике α -представления^{/22/}.

Для вывода асимптотических разложений целесообразно определить R_{ω} -операцию, устраняющую из склеенной ФА полюсы по $\omega = \delta - \epsilon_{n,l}$ при заданных n и l . Она оказывается более простой, чем обычная R -операция, поскольку никакие два расходящихся при $\omega \rightarrow 0$ подграфа не могут лежать один в другом (они имеют одинаковое число петель, а именно l). Использование R_{ω} -операции, а также некоторых комбинаторных выкладок, связывающих УФ- и ИК-контрчлены^{/23/}, позволяет вывести асимптотическое разложение произвольной ФА

$$R^* F_{\Gamma}(\underline{Q}/\lambda, \underline{q}, \underline{M}/\lambda, \underline{m}, \epsilon) \stackrel{\lambda \rightarrow 0}{\cong} \sum_{\gamma \in \Gamma} R^* F_{\gamma}(\underline{Q}/\lambda, \underline{M}/\lambda, \epsilon) R^* F_{\Gamma/\gamma}(\underline{q}, \underline{m}, \epsilon). \quad (5)$$

Суммирование ведется по подграфам из некоторого семейства, определяемого заданным асимптотическим режимом.

С помощью контрчленной техники^{/13,15/}, обобщенной на случай лагранжианов и составных полей без нормального упорядочения^{/24/}, диаграммные асимптотические разложения переносятся на уровень разложений S -матрицы, составных полей и их произведений. Например, разложение S -матрицы при больших массах описывается следующими формулами:

$$(Re^S)_L \stackrel{M \rightarrow \infty}{\cong} Re^{S_{eff}}, \quad S_{eff} = i \int \mathcal{L}_{eff}(x) dx; \quad (6a)$$

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = \mathcal{L}_L^{int}(x) + \sum_{[U, \{\lambda\}]}^L c_{\{\lambda\}} R^* t_m \langle \frac{1}{i} (e^S - 1) \tilde{f}^{\{\lambda\}}(0) \rangle^{H, L-prop} \tilde{f}_{\{\lambda\}}(x). \quad (6b)$$

Здесь Re^S - перенормированная S -матрица, символ $()_L$ обозначает вклад диаграмм с легкими концами, S_{eff} - эффективное действие, $\mathcal{L}_{eff}$ - эффективный лагранжиан низкоэнергетической теории, символ $H, L-prop$ обозначает вклад тяжелых диаграмм, сильно связанных по легким линиям.

Подчеркнем, что разложения (2) и (6) выведены и с помощью некоторого предыдущего оператора^{/25/}. Однако в более общих ситуациях такое непосредственное обобщение техники работ^{/13-15/}, по-видимому, окажется громоздким. Метод же склеивания обобщается довольно прямолинейно. В частности, разложение произведения двух составных полей при наличии тяжелых масс приобретает следующий вид (здесь S_{eff} из формулы (6a)):

$$\langle \langle J_1(x+\xi_1) J_2(x+\xi_2) \rangle \rangle_L \stackrel{\xi, M \rightarrow 0}{\cong} \sum_{[U, \{\lambda\}]}^L c_{\{\lambda\}} R^* t_m \langle e^{S_{eff}} \tilde{f}_1(\xi_1) \tilde{f}_2(\xi_2) \tilde{f}^{\{\lambda\}}(0) \rangle^{S, L-prop} \times$$

$$\times J_{\{\lambda\}}^{eff}(x), \quad J_{\{\lambda\}}^{eff}(x) = Re^{S_{eff}} \tilde{f}_{\{\lambda\}}(x). \quad (7)$$

Отметим, что асимптотические разложения в общих режимах больших импульсов и масс исследовались также Ткачевым и Пивоваровым^{/26/} и Горюхиным^{/27/}. Существенным недостатком этих подходов является отсутствие явной конечности в формулах для коэффицициентных функций. К тому же ис-

ходная точка обоих подходов выражается некоторым асимптотическим разложением фейнмановских интегралов, являющимся лишь постулатом, который навеян опытом первых порядков теории возмущений (в первом случае) или эвристическим обобщением метода Циммермана^{/II/} для размерной регуляризации (во втором).

В заключение перечислим преимущества излагаемого метода.

1. Использование R^* -операции позволяет получить явно конечные формулы.

2. Формулы для коэффициентных функций оказываются явными и простыми для вычисления.

3. Метод склеивания, предназначенный в первую очередь для перенормировок размерного и аналитического типа, допускает обобщение и для перенормировочных схем с вычитаниями по импульсам. (Мы признаем λ -И.Завьялову, обратившему на это внимание.)

4. Операция склеивания не нарушает калибровочной инвариантности, так что выведенные операторные разложения можно приспосабливать для калибровочных теорий (при этом, разумеется, нужно использовать не мономиальный базис $\{j_{(1)}(x)\}$ полей, а другие базисы, учитывающие калибровочную инвариантность). В случае разложения Вильсона соответствующий анализ см. в работе^{/28/}.

5. Метод склеивания допускает обобщение и в случае асимптотических режимов при наличии нескольких масштабов.

Литература

1. Weinberg S.—Phys. Rev., 1960, 118, p.838.
2. Завьялов О.И.—ЖЭТФ, 1964, 47, с.1099.
3. Славнов Д.А.—ТМФ, 1973, 17, с.169.
4. Efremov A.V., Ginzburg I.F.—Fortschr. Phys., 1974, 22, p.575.
5. Pohlmeyer K.—J. Math. Phys., 1982, 23, p.2511.
6. Bergère M.C., Lam Y.—M.P.—Commun. Math. Phys., 1974, 39, p.1.
7. De Calan C., Malbouisson A.P.C. Ann. Inst. H.Poincaré, 1980, A32, p91.
8. Kosinski P., Maslanka P.—Lett. Math. Phys., 1985, 9, p.157.
9. Appelquist T., Carazzone J.—Phys. Rev., 1975, D11, p.2856.
10. Symanzik K.—Commun. Math. Phys., 1973, 34, p.7.
11. Collins J.C. Renormalization, Cambr. Univ. Press, 1984.
12. Zimmermann W.—Ann. Phys., 1973, 77, p.570.
13. Bogoliubov N.N., Parasiuk O.S.—Acta Math., 1957, 97, p.227.
14. Hepp K.—Commun. Math. Phys., 1966, 2, p.301.
15. Zimmermann W.—Ann. Phys., 1973, 77, p.536.
16. Анжии С.А., Завьялов О.И.—ТМФ, 1976, 26, с.162.

- Anikin S.A., Polivanov M.C., Zavialov O.I.—Fortschr. Phys., 1977, 27, p.459.
14. АНИКИН С.А., Завьялов О.И.—ТМФ, 1976, 27, с.425.
Anikin S.A., Zavialov O.I.—Ann. Phys., 1978, II6, p.135.
15. Завьялов О.И. Перенормированные диаграммы Фейнмана, М.: Наука, 1979.
16. Смирнов В.А., Четыркин К.Г. Препринт ИЯИ АН СССР, П-0518, М., 1987.
17. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Tkachov F.V.—Phys. Lett., 1982, II9B, p.407.
Chetyrkin K.G. Ibid., 1983, I26B, p.371.
18. Четыркин К.Г. Препринт ИЯИ АН СССР, П-0519, М., 1987.
19. 't Hooft G.—Nucl. Phys., 1973, B6I, 455.
Breitenlohner P., Maison D.—Commun. Math. Phys., 1977, 52, pp. II, 39, 55.
20. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V.—Phys. Lett., 1982, II4B, p.340.
21. Смирнов В.А., Четыркин К.Г.—ТМФ, 1985, 63, с.208.
22. Smirnov V.A.—Fortschr. Phys., 1985, 33, p.495.
23. Chetyrkin K.G. Preprint NBI-HE-87-24, København, 1987.
24. Смирнов В.А., Четыркин К.Г.—ТМФ, 1985, 64, с.370.
25. Смирнов В.А. Труды X семинара "Проблемы физики высоких энергий и теории поля", Протвино, ИФВЭ, 1987.
26. Tkachov F.V. Preprint INR, P-0332, P-0358, Moscow, 1984.
Pivovarov G.B., Tkachov F.V. Preprint INR, P-0370, Moscow, 1984.
Пивоваров Г.Б., Ткачев Ф.В. Препринт ИЯИ АН СССР, П-0459, М., 1986.
27. Gorishny S.G. Preprint JINR, E2-86-176, E2-86-177, Dubna, 1986.
28. Спиридонов В.П., Четыркин К.Г. Труды семинара "Кварки-86", М.: ИЯИ АН СССР, 1987.

I. Введение фоновой связности и зависящих от нее тензорных функционалов

Замечательного вида тензор энергии-импульса получил Папалетру^{/1/}, погрузив гравитационное поле в мир Минковского с метрикой

$$\gamma_{ab} dx^a \otimes dx^b = c^2 dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz. (I)$$

Он писал: "... Розен доказал^{/2/}, что эйнштейнову теорию гравитации можно интерпретировать без каких-либо изменений ее полевых уравнений как теорию гравитации в плоском пространстве, если только рассматривать тензор g_{ab} просто как гравитационный потенциал и ввести метрический тензор плоского пространства независимо. Новая интерпретация имеет характерное математическое преимущество: все величины, бывшие псевдотензорами в общей теории относительности, и все псевдотензорные уравнения, как например закон сохранения энергии-импульса, становятся теперь тензорами и тензорными уравнениями" (^{/1/}, с. II).

Это преимущество достигается за счет того, что разность кристоффелей для g_{ab} и γ_{ab} является тензором. Между тем в координатной карте, где тензор $\gamma_{ab} dx^a \otimes dx^b$ имеет вид (I), кристоффели для γ_{ab} равны нулю. Следовательно, мы сохраним то же преимущество, если будем вводить не тензор (I), а нечто меньшее - всего лишь аффинную связность, коэффициенты которой в карте x, y, z, t равны нулю. Такая связность называется координатной, поскольку она полностью задается выбором карты. Следовательно, каждый псевдотензор оказывается тензорным функционалом координатной карты. На это обстоятельство было обращено внимание в^{/3,4/}.

Предложенное там толкование псевдотензора приемлемо, если многообразие, на котором псевдотензор рассматривается, простое. Оно легко распространяется на более сложный случай, когда многообразие можно покрыть атласом, карты которого склеиваются линейно. Последнее означает следующее: если две карты x и $\tilde{x}$ покрывают некоторую общую область многообразия, то

$$\tilde{x}^a = C^a_b x^b + C^a, \quad a \in \{1, \dots, N\}, \quad (2)$$

где C_g^a и C^a - константы, N - размерность многообразия. Такие многообразия называются клиффордовыми. Очевидно, к их числу относятся все простые многообразия. Все одномерные (а это - прямая и окружность) клиффордовы. Среди двумерных многообразий к числу клиффордовых относятся плоскость, цилиндр, тор, лист Мебиуса и бутылка Клейна, но не относится сфера.

Более гибким, пригодным для любого многообразия, является следующее толкование: псевдотензор есть тензорный функционал фоновой связности $\overset{\vee}{\Gamma}_{mn}^a$. К нему мы приходим, погружая гравитационное поле в пространство, геометрия которого задается не тензором γ_{ab} , а аффинной связностью $\overset{\vee}{\Gamma}_{mn}^a$. В результате располагаем двумя геометрическими объектами, один из которых называем главным, а другой - фоновым. Главный объект - это гравитационный потенциал, т.е. тензор g_{ab} . Фоновый объект - это аффинная связность $\overset{\vee}{\Gamma}_{mn}^a$. Условимся, что

$$g_{ab} = g_{ba}, \quad \overset{\vee}{\Gamma}_{mn}^a = \overset{\vee}{\Gamma}_{nm}^a. \quad (3)$$

Нарушение этих условий означало бы переход в мало исследованную область единой теории поля Эйнштейна^{/5/}.

Мы будем предполагать, что определитель g матрицы (g_{ab}) не равен нулю, так что существуют, во-первых, элемент объема (N -форма)

$$\varepsilon dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{|g|}, \quad (5)$$

и, во-вторых, тензор g^{ab} , связанный с g_{ab} условием

$$g^{as} g_{sb} = \delta_b^a, \quad (6)$$

где в правой части - единичный аффинор, выражаемый символом Кронекера δ_b^a . Следовательно, существует и аффинная связность Кристоффеля

$$\Gamma_{mn}^a = \frac{1}{2} g^{ak} (\partial_m g_{kn} + \partial_n g_{km} - \partial_k g_{mn}). \quad (7)$$

Разность

$$P_{mn}^a = \Gamma_{mn}^v{}^a - \Gamma_{mn}^a \quad (6)$$

называется тензором аффинной деформации (/6/, с.128). Если известна связность (7), то задание фоновой связности эквивалентно заданию тензора (6).

Важнейшим примером псевдотензора является связность (7). В качестве функционала фоновой связности он выступает в виде тензора $-P_{mn}^a$. Для наших целей достаточно рассмотреть псевдотензоры, представимые алгебраическими выражениями вида $T = T(g^{ik}, \Gamma_{mn}^a)$ от главного тензора g^{ik} и связности Кристоффеля (7). В качестве функционалов фоновой связности они выступают в виде тензоров $\mathcal{T} = T(g^{ik}, -P_{mn}^a)$.

Например, псевдоскаляр

$$L = g^{mn} (\Gamma_{mb}^a \Gamma_{an}^b - \Gamma_{sa}^a \Gamma_{mn}^s), \quad (9)$$

рассматриваемый в качестве функционала фоновой связности, выступает в виде скаляра

$$\mathcal{L} = g^{mn} (P_{mb}^a P_{an}^b - P_{sa}^a P_{mn}^s). \quad (10)$$

Полученный Эйнштейном псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля равен (/7/, с.205)

$$t_b^a = (-\Gamma_{mn}^a + \Gamma_{ms}^s \delta_n^a) \partial_b (\varepsilon g^{mn}) - \varepsilon L \delta_b^a. \quad (11)$$

Если его поделить на ε , то он приведет к указанному выше виду и выступит в виде тензора

$$E_b^a = (P_{mn}^a - P_m^m \delta_n^a) \Phi_b^{mn} - \mathcal{L} \delta_b^a, \quad (12)$$

где

$$\Phi_{\beta}^{mn} = (\nabla_{\beta}^{\vee} - P_{\beta}) g^{mn}, \quad (I3)$$

$$P_m = P_{ma}^a, \quad (I4)$$

$\nabla_{\beta}^{\vee}$ — символ ковариантного дифференцирования со связностью Γ_{mn}^a .
Конкретно, например,

$$\nabla_{\beta}^{\vee} g^{mn} = P_{\beta s}^m g^{sn} + P_{\beta s}^n g^{ms}. \quad (I5)$$

2. Происхождение скалярного функционала фоновой связности, породившего дискуссию, делящуюся вот уже семьдесят лет

Со времен Кристоффеля известно, что из компонент аффинной связности (7) можно составить тензор

$$R_{mn\beta}^a = \partial_m \Gamma_{n\beta}^a - \partial_n \Gamma_{m\beta}^a + \Gamma_{ms}^a \Gamma_{n\beta}^s - \Gamma_{ns}^a \Gamma_{m\beta}^s, \quad (I6)$$

а затем свертку

$$R_{n\beta} = R_{an\beta}^a. \quad (I7)$$

Так получается скаляр

$$R = g^{n\beta} R_{n\beta} \quad (I8)$$

и функционал Гильберта

$$H = \int R \varepsilon dx^1 \dots dx^N \quad (I9)$$

от одного только главного объекта — тензора $g_{\alpha\beta}$.

Согласно (7) и (I6), в скаляр (I8) входят частные производные второго порядка от компонент $g_{\alpha\beta}$. Между тем было замечено, что

$$R = L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\varepsilon g^{mn} \Gamma_{mn}^r - \varepsilon g^{ln} \Gamma_{mn}^m \right), \quad (20)$$

и на этом основании, ссылаясь на теорему Гаусса, интеграл (19) заменили на интеграл

$$E = \int L \varepsilon dx^1 \dots dx^N. \quad (21)$$

Однако здесь ссылка на теорему Гаусса незаконна, поскольку выражение

$$g^{mn} \Gamma_{mn}^r - g^{ln} \Gamma_{mn}^m \quad (22)$$

не составляет вектора. Так был потерян фоновый объект — координатная связность, и началась эпоха псевдотензоров — монстров.

Чтобы сделать применение теоремы Гаусса законным, мы должны назвать (22) вектором и тем самым ввести координатную фоновую связность, а также тензор аффинной деформации, порожденный картой. Процедура введения этих объектов рассмотрена в ^{1/4/}(с.1020, с.1030). Впервые же фоновая связность без кручения и без кривизны была введена, как уже отмечалось выше, Розеном ^{1/2/}. На необходимость ее введения указывает и следующее обстоятельство: функционал Гильберта (19) зависит только от g_{ab} , а функционал Эйнштейна (21) зависит не только от g_{ab} , но и от координатной фоновой связности.

3. Новое тождество

В работе ^{1/6/} рассмотрен интеграл

$$S = \int \mathcal{L} \varepsilon dx^1 \dots dx^N \quad (23)$$

как функционал от g^{ab} и от произвольной фоновой связности $\check{\Gamma}_{mn}^a$ без кручения. Его вариация равна

$$\delta S = \int \left(\Theta_a^{mn} \delta \check{\Gamma}_{mn}^a + S_{mn} \delta g^{mn} \right) \varepsilon dx^1 \dots dx^N, \quad (24)$$

где

$$\Theta_a^{mn} = \Phi_a^{mn} - \frac{1}{2} (\Phi^m \delta_a^n + \Phi^n \delta_a^m), \quad (25)$$

тензор Φ_a^{mn} определен формулами (13)–(15),

$$\Phi^m = \Phi_a^{ma} = g^{ab} P_{ab}^m, \quad (26)$$

$$S_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} - \frac{1}{2} (\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm}) + \frac{1}{2} \check{R}_{ab} g^{ab} g_{mn}. \quad (27)$$

Для сравнения приведем вариацию интеграла (19)

$$\delta H = \int (R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn}) \delta g^{mn} \varepsilon dx^1 \dots dx^N \quad (28)$$

и формулу

$$R = \mathcal{L} + g^{ab} \check{R}_{ab} + \nabla_\ell (g^{\ell n} P_n - \Phi^\ell). \quad (29)$$

Теперь составим производные Ли от главного и фонового объектов:

$$\begin{aligned} \delta g^{mn} &= \xi^s \partial_s g^{mn} - g^{sn} \partial_s \xi^m - g^{ms} \partial_s \xi^n = \\ &= -g^{sn} \nabla_s \xi^m - g^{ms} \nabla_s \xi^n, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \delta \check{\Gamma}_{mn}^a &= \partial_m \partial_n \xi^a + \xi^s \partial_s \check{\Gamma}_{mn}^a + \check{\Gamma}_{sn}^a \partial_m \xi^s + \check{\Gamma}_{ms}^a \partial_n \xi^s - \\ &- \check{\Gamma}_{mn}^s \partial_s \xi^a = \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^a + \xi^s \check{R}_{smn}^a. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя первую из них в (28), получаем известное тождество

$$\nabla_s g^{sn} (R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn}) \equiv 0 . \quad (32)$$

Подставляя обе производные в (24), получаем новое тождество

$$\begin{aligned} \theta_a &\stackrel{\text{def}}{=} (\check{\nabla}_m - P_m)(\check{\nabla}_n - P_n) \theta_a^{mn} + \check{R}_{amn}^s \theta_s^{mn} \equiv \\ &\equiv \nabla_m [g^{ms} (\check{R}_{sa} + \check{R}_{as}) - \delta_a^m g^{ns} \check{R}_{ns}] . \end{aligned} \quad (33)$$

Полагая $P_{mn}^a = 0$, из (33) получаем (32), так что (32) является частным случаем нового тождества.

Полагая $\check{R}_{amn}^s = 0$, мы рассматриваем гравитационное поле на фоне аффинного пространства (погружаем гравитационное поле в это пространство) и тождество (33) принимает вид

$$(\check{\nabla}_m - P_m)(\check{\nabla}_n - P_n) \theta_a^{mn} = 0 . \quad (34)$$

4. Введение фоновой метрики

Вводя фоновую метрику $\check{g}_{ab}$, выражаем связность $\check{\Gamma}_{mn}^a$ в виде кристоффелей. В результате получаем

$$\theta_a = (\check{\nabla}_n - P_n) \check{g}_{am} \theta^{mn} , \quad (35)$$

где

$$\theta^{mn} = (\check{\nabla}_\kappa - P_\kappa) (\theta^{m\kappa n} + \theta^{n\kappa m} - \theta^{\kappa mn}) , \quad (36)$$

$$\theta^{\kappa mn} = \check{g}^{\kappa a} \theta_a^{mn} = \Phi^{\kappa mn} - \frac{1}{2} (\Phi^m \check{g}^{n\kappa} + \Phi^n \check{g}^{m\kappa}) . \quad (37)$$

Окончательно,

$$\Theta^{mn} = (\check{\nabla}_\kappa - P_\kappa)(\check{\nabla}_\ell - P_\ell) S^{\ell\kappa mn}, \quad (3\text{б})$$

где

$$S^{\ell\kappa mn} = \check{g}^{m\ell} g^{\kappa n} + \check{g}^{n\ell} g^{\kappa m} - \check{g}^{\ell\kappa} g^{mn} - \check{g}^{mn} g^{\ell\kappa}. \quad (39)$$

Тождество (33) принимает вид

$$(\check{\nabla}_n - P_n) \check{g}_{\alpha m} \Theta^{mn} = \nabla_m [2 g^{ms} \check{R}_{sa} - \delta_a^m g^{ns} \check{R}_{ns}]. \quad (40)$$

Прямое доказательство тождества (33) выполнено в ¹⁶/.

Л и т е р а т у р а

1. Papapetrou A. Einstein's theory of gravitation and flat space. Proc. Roy. Irish Acad., 1948, A52, p. 11-23.
2. Rosen N. General Relativity and Flat Space.-Phys.Rev. 1940, vol 57, p. 147-153.
3. Черников Н.А. О трудностях в релятивистской теории гравитации. Тр. УП международного совещания по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ Д-2-84-366, Дубна, 1984, с.382-410.
4. Черников Н.А. Трудные вопросы теории относительности.-Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1987, т.18, вып.5, с.1000-1034.
5. Эйнштейн А. Обобщение релятивистской теории гравитации (1945). Собр.научн.трудов. т.2, М.: Наука, 1966, с.614-622.
6. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
7. Эйнштейн А., Громмер Я. Общая теория относительности и закон движения (1927). В кн. ¹⁵/, с.198-210.
8. Черников Н.А. Вариационный метод Гильберта и тензор Папалатру. Сообщения ОИЯИ Р2-67-683, Дубна, 1967.

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПО СЛАБЕННОМУ ПОТЕНЦИАЛУ ДЛЯ СИЛЬНОВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.И. Дкалов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Введение

В методе функций Грина, применяемом для проблемы многих тел, можно выделить три этапа. Первый - определение явного вида массового оператора или собственно-энергетической части, $\Sigma = \Sigma(\varphi, G)$, являющейся функционалом от потенциала взаимодействия $\varphi(z)$ и функции Грина G ; при этом Σ представляется в виде разложения по степеням φ . Второй этап - решение полученного уравнения для функции Грина, пропагатора, $G = G[\Sigma(\varphi, G)]$; обычно итерацию пропагаторного уравнения начинают с пропагатора свободных частиц G_{free} . Третий этап - вычисление с помощью найденного пропагатора некоторых наблюдаемых величин $Q = Q[G[\Sigma(\varphi, G)]]$.

Изложенная схема, очевидно, обоснована для слабодействующих систем. В статистической физике она применима к слабоидеальным газам. Однако в теории конденсированных сред, описывающей сильнодействующие частицы, эта схема терпит фиаско.

Основные причины неудач следующие. Во-первых, реальные частицы взаимодействуют посредством сильно сингулярного потенциала $\varphi(z) \sim 1/z^n$ ($n > 4$). В результате попытка представить массовый оператор как полином по $\varphi(z)$ терпит провал, так как все слагаемые полинома расходятся. Это аналог ультрафиолетовой расходимости в квантовой теории поля^{1/}. Чтобы избежать расходимостей приходится использовать приближения, точность которых невозможно оценить: либо, отказываясь от последовательной теории возмущений, прибегают к какому-либо расщеплению многочастичных пропагаторов, либо, продолжая формально пользоваться теорией возмущений, заменяют истинный сингулярный потенциал некоторым, достаточно произвольным, псевдопотенциалом с мягким ядром.

Во-вторых, начиная итерацию пропагаторного уравнения для сильнодействующих частиц со свободного пропагатора, нельзя надеяться даже на асимптотическую сходимость такой итерационной процедуры, так как G_{free} не является адекватным приближением для сильнодействующей системы. Кажется естественным в качестве начальной итерации

взять такой пропагатор G_0 , который бы приближенно моделировал рассматриваемую физическую ситуацию. При этом начальный пропагатор $G_0 = G_0(\gamma)$ зависит от набора параметров γ , входящих в соответствующий массовый оператор $\Sigma_0(\gamma)$. Допустим, форма $G_0(\gamma)$ может быть определена из общих соображений. Но из каких соображений следует определять параметры γ ? Ведь от них теперь зависят и наблюдаемые величины $Q_n(\gamma)$, вычисляемые по n -му приближению $G_n(\gamma)$.

Очевидно, возникает два главных вопроса:

1) Можно ли построить последовательную теорию возмущений для массового оператора, исходя из некоторого расщепления для многочастичной функции Грина?

2) Как наилучшим образом определить параметры пробного пропагатора $G_0(\gamma)$?

В докладе предлагаются ответы на эти вопросы. Попутно приводятся некоторые технические усовершенствования расчетных процедур.

2. Одевающая функция

В этом параграфе вводятся основные обозначения. Кроме хорошо известных в статистической физике понятий определяется также так называемая "одевающая" функция, идея которой взята из квантовой теории поля^{/2/}.

Набор координат $\vec{r}_i$ времени t_i , спина σ_i и других квантовых чисел, относящихся к частице с номером i , будем обозначать одним числом (i) . Тогда, например, полевой оператор первой частицы записывается в виде $\psi(1)$, потенциал взаимодействия - $\Phi(12)$. Везде ниже $\hbar \equiv 1$.

Зададим одночастичный

$$G(12) = -i \langle \hat{T} \psi(1) \psi^\dagger(2) \rangle \quad (1)$$

и двухчастичный

$$B(1234) = - \langle \hat{T} \psi(1) \psi(2) \psi^\dagger(3) \psi^\dagger(4) \rangle \quad (2)$$

пропагаторы, в которых $\hat{T}$ - хронологический оператор. Уравнению движения для пропагатора (1) можно^{/3/} придать форму

$$\int G^{-1}(13) G(32) d(3) = \delta(12). \quad (3)$$

Так, для нерелятивистских частиц

$$G^{-1}(12) = (i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} + \mu) \delta(12) - \Sigma(12), \quad (4)$$

где $\sum (12)$ - массовый оператор, связанный с бинарным пропагатором (2) соотношением

$$\int \sum (13) G(32) d(3) = \pm i \int \Phi(13) B(1332) d(3),$$

верхний знак - для бозе-, нижний - для ферми-частиц. Отсюда

$$\sum (12) = \pm i \int \Phi(13) B(1334) G^{-1}(42) d(34). \quad (5)$$

Для любого фиксированного пропагатора $G_0(12)$, соответствующего массовому оператору $\sum (12)$, можно записать уравнение Дайсона

$$G(12) = G_0(12) + \int K(13) G(32) d(3) \quad (6)$$

с ядром

$$K(12) = \int G_0(13) \left[\sum(32) - \sum_0(32) \right] d(3).$$

Бинарный пропагатор B и вершинная часть связаны равенством

$$\Phi(12) B(1234) = \int \Gamma(1256) B_0(5634) d(56),$$

в котором

$$B_0(1234) = G(14) G(23) \pm G(13) G(24). \quad (7)$$

Используя тождество

$$\int B_0(1235) G^{-1}(54) d(5) = \delta^T(14) G(23) \pm G(13) \delta^T(24),$$

массовый оператор (5) можно представить в форме

$$\sum (12) = \pm i \int \left[\Gamma(1324) \pm \Gamma(1342) \right] G(43) d(34).$$

Одевающая функция D определяется условием

$$B(1234) = \int D(1256) B_0(5634) d(56). \quad (8)$$

Через одевающую функцию удобно выражаются вершинная часть

$$\Gamma(1234) = \Phi(12) D(1234) \quad (9)$$

и массовый оператор

$$\Sigma(12) = \pm i \int \Phi(13) \left[D(1324) \pm D(1342) \right] G(43) d(34). \quad (10)$$

3. Псевдопотенциальная итерация

При сильносингулярном потенциале взаимодействия необходимо с самого начала учитывать близкодействующую корреляцию частиц. Для этого Кирквуд^{4/} предложил расщепление, которое на языке функций Грина можно представить в виде

$$B(1234) \approx g(12) G(14) G(23);$$

корреляционную функцию $g(12)$ требуется определять из эксперимента. Несколько обобщая расщепление Кирквуда, можно записать

$$B(1234) \approx g(12) B_0(1234).$$

При таком расщеплении потенциал взаимодействия входит в массовый оператор (5) в виде произведения

$$\varphi(12) = g(12) \Phi(12). \quad (11)$$

Сглаживающая функция $g(12)$ компенсирует сингулярность потенциала $\Phi(12)$ и, таким образом, устраняет расходимость массового оператора. Выражение (II) можно назвать сглаженным потенциалом или псевдопотенциалом.

Покажем, как строится теория возмущений для обобщенного расщепления Кирквуда. Пусть бинарный пропагатор удовлетворяет уравнению Бете-Солпитера

$$B(1234) = B_0(1234) + i \int G(15) G(26) \Phi(56) B(5634) d(56). \quad (12)$$

Это допущение не принципиально, но позволяет упростить выкладки. Вершинная часть подчиняется аналогичному уравнению

$$\Gamma(1234) = \Phi(12) \left[\delta(13) \delta(24) + i \int G(15) G(26) \Gamma(5634) d(56) \right].$$

Из (8) находим уравнение для одевающей функции

$$D(1234) = \delta(13) \delta(24) + i \int G(15) G(26) \Phi(56) D(5634) d(56). \quad (13)$$

Введем интегральный оператор $\hat{A}$ посредством равенства

$$\hat{A} f(1234) = \int A(1256) f(5634) d(56),$$

в котором ядро

$$A(1234) = i G(13) G(24) \psi(34).$$

Идентичным образом зададим оператор $\hat{C}$ с ядром

$$C(1234) = \delta(12) \delta'(13) \delta'(24).$$

Определим оператор $\hat{U}$, обратный к $(\hat{C} - \hat{A})$,

$$\hat{U}(\hat{C} - \hat{A}) = 1.$$

Из этих определений следует, что ядро оператора $\hat{U}$ удовлетворяет уравнению

$$U(1234) \delta(34) = \delta'(13) \delta'(24) + \int U(1256) A(5634) d(56).$$

Для одевающей функции, согласно (13), получаем

$$D(1234) = \delta(12) \int \delta'(13) \delta'(24). \quad (14)$$

Чтобы в нулевом приближении теории возмущений вернуться к обобщенному распределению Кирквуда, надо на нулевое приближение оператора $\hat{U}$ наложить условие

$$\hat{U}_0 = (\hat{C} - \hat{A}_0)^{-1} = 1, \quad A_0(1234) \equiv [\delta(12) - 1] \delta'(13) \delta'(24).$$

Тогда

$$D_0(1234) = \delta(12) \delta'(13) \delta'(24), \quad (15)$$

а выражения (8) и (9) дадут соответственно

$$B_i(1234) = \delta(12) B_c(1234), \quad \Gamma_i(1234) = \varphi(12) \delta'(13) \delta'(24).$$

Подставляя (15) в (10), имеем

$$\sum_i \Gamma_i(12) = \delta'(12) \int \varphi(13) n(3) d(3) + i \varphi(12) G(12), \quad (16)$$

где

$$n(1) = \pm i G(11).$$

Учитывая разложение

$$(\hat{C} - \hat{A})^{-1} = (\hat{C} - \hat{A}_0)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{C} - \hat{A}_0)^{-n} (\hat{A} - \hat{A}_0)^n,$$

оператор $\hat{U}$ можно представить в форме

$$\hat{U} = \hat{U}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_0^n (\hat{A} - \hat{A}_0)^n.$$

А так как

$$\hat{U}_0 = 1, \quad \hat{C} = 1 + \hat{A}_0,$$

то

$$\hat{U} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{U}_n, \quad \hat{U}_n \equiv \sum_{m=0}^n (\hat{A} - \hat{A}_0)^m.$$

При $(\hat{C} - \hat{A}) \approx 1$ в каждом порядке по n справедливо условие $\hat{U}_n^* (\hat{C} - \hat{A}) \approx 1$. Для одевающей функции в n -м приближении, вследствие (14), имеем

$$D_n(1234) = s(12) \hat{U}_n \delta'(13) \delta'(24).$$

Нулевое приближение дает (15). В первом приближении получаем

$$D_1(1234) = D_0(1234) + s(12) \left\{ A(1234) - [s(12) - 1] \delta'(13) \delta'(24) \right\}. \quad (17)$$

Во втором приближении

$$D_2(1234) = D_1(1234) + s(12) \left\{ A(1256) A(5634) d(56) - \right. \\ \left. - A(1234) [s(12) + s(34) - 2] + [s(12) - 1]^2 \delta'(13) \delta'(24) \right\}. \quad (18)$$

Подставляя (17) в (10), находим массовый оператор

$$\sum_2(12) = \delta'(12) \int \varphi'(13) n(3) d(3) + i \varphi'(12) G(12) - \\ - \int \varphi(13) [G(14) G(32) \varphi(42) \pm G(12) G(34) \varphi'(24)] G(43) d(34), \quad (19)$$

в котором

$$\varphi'(12) = \varphi(12) [2 - s(12)].$$

Третье приближение для массового оператора получается при подстановке в (10) одевающей функции (18):

$$\begin{aligned} \sum_3 (12) = & \varphi''(13) n(3) d(3) + i \varphi''(12) G(12) - \\ & - \int \varphi(13) \{ G(14) G(32) \varphi(42) [3 - g(13) - g(24)] \pm \\ & \pm G(12) G(34) \varphi(24) [3 - g(13) - g(24)] \} G(43) d(34) - \\ & - i \int \varphi(13) G(15) G(36) \varphi(56) [G(54) G(62) \varphi(42) \pm \\ & \pm G(52) G(64) \varphi(24)] G(43) d(3456), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\varphi''(12) = \varphi(12) [3 - 3 \cdot g(12) + g^2(12)].$$

Формулы (16), (19) и (20) показывают, что имеется последовательная теория возмущений, позволяющая представить массовый оператор как функциональный полином по степеням сглаженного потенциала. Сглаживающая функция $g(12)$ имеет смысл близкодествующей корреляционной функции. При потенциале $\Phi(12)$, сингулярном в случае $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$ и стремящемся к нулю, когда $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty$, сглаживающая функция должна иметь следующие асимптотические свойства:

$$g(12) \simeq \begin{cases} 0, & |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow 0, \\ 1, & |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

При $|\vec{r}_1| \sim |\vec{r}_2|$, кроме того, эта функция должна быть пропорциональна плотности вероятности, соответствующей нахождению двух частиц в точках $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Естественно определить сглаживающую функцию равенством

$$g(12) = |\Psi(12)|^2, \quad |\Psi(12)| \simeq \begin{cases} 0, & |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow 0, \\ 1, & |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

в котором $\Psi(12)$ задается двухчастичным уравнением Шредингера. Приближенное решение для $\Psi(12)$ можно найти с помощью какой-либо процедуры нелинеаризации ^{7/5/}.

4. Массовый оператор

Все предыдущее изложение справедливо как для равновесного, так и для неравновесного случая. Теперь исследуем более подробно структуру массового оператора для равновесной системы бесспиновых частиц.

Условие равновесности позволяет перейти к представлениям Фурье типа

$$G_{(12)} = \int G_{(12), \omega} \exp[-i\omega(t_1 - t_2)] \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Тогда первое приближение для массового оператора (16) дает

$$\begin{aligned} \Sigma_{(12), \omega} = & \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \int \varphi_{(13), \omega} n_{(3)} d\vec{r}_3 + \\ & + i \int \varphi_{(12), \omega - \omega'} G_{(12), \omega'} \frac{d\omega'}{2\pi}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для второго приближения из (19) находим

$$\Sigma_{(12), \omega} = \Sigma_{(12), \omega}' + \Lambda_{(12), \omega}, \quad (22)$$

где $\Sigma_{(12), \omega}'$ отвечает (21) при замене $\varphi \rightarrow \varphi'$, а

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12), \omega} = & - \int \left[G_{(14), \omega - \omega'} G_{(32), \omega''} \varphi_{(42), \omega - \omega''} \pm \right. \\ & \left. \pm G_{(12), \omega - \omega'} G_{(34), \omega''} \varphi_{(24), -\omega'} \right] \times \\ & \times \varphi_{(13), \omega'} G_{(43), \omega'' - \omega'} d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Дальнейших упрощений можно добиться, рассмотрев мгновенные взаимодействия, зависящие лишь от разности координат; при этом

$$\Phi_{(12)} = \Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2 + 0), \quad (24)$$

откуда

$$\Phi_{(12), \omega} = \Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) e^{-i\omega 0}.$$

Для сглаженного потенциала (II) получаем

$$\varphi_{(12), \omega} = \int \Phi_{(12), \omega - \omega'} s_{(12), \omega'} \frac{d\omega'}{2\pi},$$

где

$$\varphi_{(12), \omega} = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) e^{-i\omega 0},$$

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = s(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

$$s(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1 + 0} s_{(12)} = \int s_{(12), \omega} e^{+i\omega 0} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Если за нулевое приближение для массового оператора выбрать диагональную форму

$$\Sigma_c(12) = \delta^T(12) U_c(\vec{r}_1),$$

тогда пробный пропагатор может быть представлен разложением по соответствующим волновым функциям:

$$G_c(12, \omega) = \sum_n G_n(\omega) \psi_n(\vec{r}_1) \psi_n^*(\vec{r}_2); \quad (25)$$

здесь

$$\begin{aligned} G_n(\omega) &= \frac{1 \pm n_n}{\omega - \omega_n + i0} + \frac{n_n}{\omega - \omega_n - i0} = \\ &= \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_n} - i\pi (1 \pm 2n_n) \delta^T(\omega - \omega_n), \\ n_n &= \left[\exp(\omega_n / \Theta) + 1 \right]^{-1} = n(\omega_n), \end{aligned}$$

$\mathcal{P}$ — символ главного значения, ω_n — спектр нулевого приближения, Θ — температура.

Использование разложения (25) в выражении (16) дает

$$\Sigma_c(12, \omega) = [U(\vec{r}_1) \delta^T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \pm \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \sum_n n_n \psi_n(\vec{r}_1) \psi_n^*(\vec{r}_2)], \quad (26)$$

где

$$U(\vec{r}) = \sum_n n_n \varphi_{nn}(\vec{r}),$$

$$\varphi_{mn}(\vec{r}) = \int \varphi(\vec{r}, \vec{r}') \psi_m^*(\vec{r}') \psi_n(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

Второе приближение для массового оператора дается формулой (22), в которую надо подставить $\Lambda(12, \omega)$, обладающее следующими свойствами. На комплексной плоскости

$$\Lambda(12, \omega) = \sum_{mn3} \frac{\Lambda_{mn3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\omega - \omega_{3nm}} \quad (\Im \omega \neq 0),$$

$$\omega_{3nm} = \omega_3 + \omega_n - \omega_m,$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{mn3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = & \varphi_{m3}(\vec{r}_1) \psi_n(\vec{r}_1) \times \\ & \times \left\{ \left[n_n (n_m - n_3) + n_m (n_3 \pm 1) \right] \bar{\varphi}_{nm}(\vec{r}_2) \psi_n^*(\vec{r}_2) \pm \right. \\ & \left. \pm \left[n_n (n_m - n_3) + n_m (n_3 \pm 1) + \frac{1}{4} \right] \varphi_{3m}(\vec{r}_2) \psi_n^*(\vec{r}_2) \right\}, \\ \bar{\varphi}_{mn}(\vec{r}) = & \int \varphi(\vec{r}', \vec{r}) \psi_m^*(\vec{r}') \psi_n(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (27)$$

На действительной оси ω

$$\Lambda(12, \omega) = \int \Gamma(12, \omega') \left[\frac{1 \pm n(\omega')}{\omega - \omega' + i0} \mp \frac{n(\omega')}{\omega - \omega' - i0} \right] \frac{d\omega'}{2\pi}, \quad (28)$$

откуда

$$\Lambda(12, \omega) = P \int \frac{\Gamma(12, \omega')}{\omega - \omega'} \frac{d\omega'}{2\pi} - \frac{i}{2} [1 \pm 2n(\omega)] \Gamma(12, \omega). \quad (29)$$

В предположении, что спектральная функция Γ не имеет полюсов,

$$\Gamma(12, \omega) = i [\Lambda(12, \omega + i0) - \Lambda(12, \omega - i0)].$$

Поэтому из (27) следует

$$\Gamma(12, \omega) = 2\pi \sum_{mn3} \Lambda_{mn3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \delta^T(\omega - \omega_{3nm}).$$

С помощью последнего выражения находим

$$\begin{aligned} \Lambda(12, \omega) = & \sum_{mn3} \Lambda_{mn3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) G_{3nm}(\omega), \\ G_{3nm}(\omega) = & \frac{1 \pm n_{3nm}}{\omega - \omega_{3nm} + i0} \mp \frac{n_{3nm}}{\omega - \omega_{3nm} - i0}, \\ n_{3nm} = & [\exp(\omega_{3nm}/\Theta) \mp 1]^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Мнимая часть массового оператора определяет константу затухания. Комплексность в $\sum$ появляется только в $\sum_2$.

$$\mathcal{I}_m \sum_2(12, \omega) = -\pi [1 \pm 2n(\omega)] \sum_{mn3} \Lambda_{mn3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \delta^T(\omega - \omega_{3nm}).$$

Обычно константы релаксации определяются феноменологически /6/.

Здесь был рассмотрен случай локализованных частиц, которым отвечает дискретный спектр. Изложенная техника может быть использована для описания кристаллических систем с сильным ангармонизмом^{/7/}, в том числе и таких сложных, как суперионные проводники^{/8/} или твердые тела с дислокациями и дисклинациями^{/9/}. Переход к непрерывному спектру не представляет затруднений.

5. Средние значения

Вычисление средних от наблюдаемых величин продемонстрируем на примере внутренней энергии:

$$E = \pm \frac{i}{2N} \int e^{+i\omega\phi} \lim_{\vec{z}_2 \rightarrow \vec{z}_1} \left(\omega - \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) G(12, \omega) d\vec{z}_1 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (31)$$

Подстановка в (31) пробного пропагатора (25) дает

$$E_0 = \frac{i}{2N} \sum_n n_n (\omega_n + \varepsilon_n + \mu) \quad (\varepsilon_n \equiv \varepsilon_{nn}), \quad (32)$$

$$\varepsilon_{mn} = \langle m | -\frac{\nabla^2}{2m} | n \rangle = \int \psi_m^*(\vec{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi_n(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Пропагатор первого приближения находится из уравнения (6),

$$G_i(12, \omega) = G_0(12, \omega) + \sum_{mn} G_m(\omega) G_n(\omega) (\Delta_{mn} + \varphi_{mn}) \psi_m(\vec{r}_1) \psi_n^*(\vec{r}_2),$$

$$\Delta_{mn} \equiv \langle m | U(\vec{r}) - U_0(\vec{r}) | n \rangle,$$

$$\varphi_{mn} \equiv \pm \sum_s n_s \langle m | \psi_{sn}(\vec{r}) | s \rangle.$$

Отсюда

$$E_1 = E_0 + \frac{i}{2N} \sum_{mn} (\Delta_{mn} + \varphi_{mn}) \left[J_{mn} \delta_{mn}^I + (\varepsilon_{mn} + \mu \delta_{mn}^I) I_{mn} \right], \quad (33)$$

где

$$J_{mn} \equiv \frac{\omega_m n_m - \omega_n n_n}{\omega_m - \omega_n}, \quad I_{mn} \equiv \frac{n_m - n_n}{\omega_m - \omega_n}. \quad (34)$$

Если $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_n \delta_{mn}^I$, $\Theta > 0$, то в (33) входят лишь диагональные элементы (34),

$$J_{nn} = n_n \left[1 - \frac{\omega_n}{\Theta} (1 \pm n_n) \right], \quad I_{nn} = -\frac{n_n}{\Theta} (1 \pm n_n), \quad (35)$$

вследствие чего

$$E_i = E_0 + \frac{1}{2N} \sum_n n_n (\Delta_n + \varphi_n) \left[1 - \frac{1 \pm n_n}{\Theta} (\omega_n + \mathcal{X}_n + \mu) \right],$$

$$\Delta_n \equiv \Delta_{nn}, \quad \varphi_n \equiv \varphi_{nn}.$$
(36)

Пропагатор во втором приближении записывается в виде

$$G_i(iz, \omega) = G_i'(iz, \omega) + \sum_{\substack{mn \\ ijk}} G_m(\omega) G_n(\omega) G_{kij}(\omega) \Lambda_{ijk}^{mn} \psi_m(\vec{r}_i) \psi_n^*(\vec{r}_j),$$

$$\Lambda_{ijk}^{mn} \equiv \left[n_j (n_i - n_k) + n_i (n_k \pm 1) \right] \langle m | \varphi_{ik}(\vec{r}) | j \rangle \times$$

$$\times \left[\langle k | \bar{\varphi}_{ji}(\vec{r}) | n \rangle \pm \langle j | \varphi_{ki}(\vec{r}) | n \rangle \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{4} \langle m | \varphi_{ik}(\vec{r}) | j \rangle \langle j | \varphi_{ki}(\vec{r}) | n \rangle \right],$$

здесь G_i' получается из G_i в результате замены $\varphi \rightarrow \varphi'$. Обозначая для краткости набор индексов одной буквой $L \equiv \{ijk\}$, в качестве внутренней энергии (31) имеем

$$E_2 = E_1' + \frac{1}{2N} \sum_{mnL} \Lambda_L^{mn} \left[\mathcal{J}_{mnL} \delta_{mn} + (\mathcal{X}_{mn} + \mu \delta_{mn}) I_{mnL} \right], \quad (37)$$

где E_1' соответствует E_1 при замене γ на γ' ,

$$\mathcal{J}_{mnL} = \omega_m B_{mnL} + \omega_n B_{nLm} + \omega_L B_{Lmn},$$

$$I_{mnL} = B_{mnL} + B_{nLm} + B_{Lmn},$$

(38)

$$B_{mnL} = \frac{n_m (1 \pm n_n) (1 \pm n_L) \pm (1 \pm n_m) n_n n_L}{(\omega_m - \omega_n) (\omega_m - \omega_L)}.$$

Снова, если $\mathcal{X}_{nn}$ - диагонально, то в (37) вместо (38) входят элементы

$$\mathcal{J}_{nnL} = \frac{\omega_n I_{nn} - \omega_L I_{nL}}{\omega_n - \omega_L}, \quad I_{nnL} = \frac{I_{nn} - I_{nL}}{\omega_n - \omega_L}. \quad (39)$$

При непосредственном вычислении диагональных матричных элементов по формуле (31) возникают расхожимости, связанные с неопределенностью

произведения обобщенных функций с совпадающими полюсами $/I/$. Однако эту неопределенность удается устранить $/IO/$, definiруя ℓ - степень пропагатора формулой

$$G_n^\ell(\omega) = \frac{1 \pm n(\omega)}{(\omega - \omega_n + i0)^\ell} + \frac{n(\omega)}{(\omega - \omega_n - i0)^\ell} \quad (40)$$

Всякий конкретный потенциал $U_0(\vec{r})$, задающий пробный пропагатор (25), зависит от некоторого набора параметров γ . Следовательно, каждое ℓ -приближение $E_\ell(\gamma)$ для внутренней энергии (31) зависит от этого же набора. Последовательность итераций $E_\ell(\gamma) \rightarrow E_{\ell+1}(\gamma)$ можно трактовать как совокупность рекуррентных соотношений, определяющих группу итерационных перенормировок. Такая последовательность сходится тем быстрее, чем ближе значение γ к неподвижной точке γ_* , для которой $E_\ell(\gamma_*) = E_{\ell+1}(\gamma_*)$, начиная с некоторого номера ℓ . Поэтому набор параметров γ выбирается так $/IO/$, чтобы он приблизительно соответствовал неподвижной точке γ_* . Последняя находится из соотношений типа $E_c(\gamma_*) = E_n(\gamma_*)$. Указанная методика выбора параметров для пробного пропагатора широко использовалась $/IO/$ при построении теории квантовых кристаллов.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. - Введение в теорию квантованных полей. Наука, Москва, 1973.
2. Шварц А.С. - Математические основы квантовой теории поля. Атомиздат, Москва, 1975.
3. Оказов В.И. - ТМФ, 1973, I7, с. 422.
4. Kirkwood J.G. - Quantum Statistics and Cooperative Phenomena Gordon and Breach, New York, 1965.
5. Турошнер А.В. - УФН, 1984, 144, с. 35.
6. Slichter C.P. - Principles of Magnetic Resonance. Springer, Berlin, 1980.
7. Yukalov V.I., Zubov V.I. - Forts. Phys., 1983, 31, p. 627.
8. Гуревич Д.Я., Харкац Д.И. - УФН, 1982, 136, с. 699.
9. Kleinert H. - Phys. Lett., 1983, 95A, p. 493.
10. Yukalov V.I. - Ann. Physik, 1981, 38, p. 419.

ПЕРТУРБАТИВНАЯ КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

А.В.Радзинский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В коротком докладе невозможно дать полный обзор всех достижений пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД), поэтому я остановлюсь лишь на некоторых последних достижениях в этой области, или, ещё точнее, на некоторых результатах, полученных после предыдущей конференции в Алуште (1984 г.) и имеющих отношение к прогрессу в технике факторизации малых и больших расстояний.

I. Факторизация для жестких процессов

Факторизация вкладов малых и больших расстояний является краеугольным камнем пертурбативной КХД. Это обусловлено тем, что, с одной стороны, амплитуды рассеяния $T(p_1, p_2)$ зависят от динамики как на малых, так и на больших расстояниях (или в импульсном представлении - от малых (p^2) и больших (Q^2) инвариантов, построенных из импульсов p_i). С другой стороны, параметр разложения, т.е. эффективная КХД-константа связи, $\alpha_s(k)$ мал только в области малых расстояний (больших импульсов)/1/.

Факторизация вкладов малых и больших расстояний означает, что для амплитуды $T(Q^2, p^2)$ зависимость от Q^2 и p^2 в главном степенном вкладе может быть выделена в обобщенные множители E, f :

$$T(Q^2, p^2) = E(Q^2/\mu^2, \alpha_s(\mu)) \otimes f(\mu^2/p^2) \{1 + O(1/Q^2)\}, \quad (I)$$

один из которых - $E(Q^2/\mu^2, \alpha_s(\mu))$ зависит от динамики малых расстояний и вычисляется по теории возмущений, а другой - $f(\mu, p)$ - аккумулирует информацию о непертурбативной динамике больших расстояний.

В простейших случаях (например, для процесса глубоконеупругого рассеяния) факторизация вкладов была установлена - в форме операторных разложений - ещё в конце 60-х - начале 70-х годов /2,3/. Динамика больших расстояний в этом случае описывается функцией распределения кварков в исследуемом адроне. Для более сложных случаев, когда для описания динамики больших расстояний требуется одновременно использовать две или более частиц /31-32/, первые факторизационные

тесремы были сформулированы только в 1977-1978 годах /4-14/ для процессов инклюзивного рождения массивных лептонных пар в адронных столкновениях /4,5,8-12/ и электромагнитного фактора пиона /6,7,13,14/. Из последних достижений в этой области следует отметить строгое доказательство /15,16/ сокращения всех типов инфракрасных сингулярностей (включая наиболее сложный класс глауберовских особенностей /17/, специфических для временноподобной кинематики) для драм-яновских процессов.

Имел место также и прогресс в технике операторных разложений. В цикле работ /18-20/ дан строгий вывод операторных разложений в схеме минимальных вычитаний /21/. Доказано, в частности, что коэффициентная функция $E(Q, \mu, m)$ для операторного разложения

$$T(Q, p, m) = E(Q/\mu, m) \otimes f(\mu, p, m) \{1 + O(1/Q^2)\} \quad (2)$$

имеет полиномиальную зависимость от масс частиц (2) /18/, т.е. хорошо определенное поведение в инфракрасной области. При выводе операторных разложений в MS -схеме использовалась техника инфракрасной R -операции (названной её авторами /20/ R* - операцией), позволяющей последовательно вычитать инфракрасные полюса по параметру инфракрасной регуляризации ϵ .

Заметным достижением является распространение техники операторных разложений на произведение 3 токов /22-26/. Наиболее сложным здесь является случай несимметричной кинематики $Q^2 \ll |p_1^2|, |p_2^2|$ для трехточечной функции $T(p_1^2, p_2^2, Q^2)$, имеющей важные приложения при расчете методом правил сумм КХД адронных факторов при малых (включая нулевые) передачах импульса /24-27/. Для описания динамики больших расстояний в такой ситуации требуется введение нового типа объектов ("биклокальных операторов" /26/, имеющих структуру коррелятора двух токов /25,27/). Анализ операторных разложений для трехточечных функций позволил получить (в рамках метода КХД -правила сумм /28/) ряд практических результатов: вычислить магнитные моменты нуклонов /24,25/, отношение /26,29/, электромагнитные радиусы пиона /27/ и нуклонов /30/.

Значительное внимание в последнее время привлекала к себе задача факторизации вкладов для реакций с поляризованными частицами /31-32/. Специфической чертой таких задач является то, что уже в низшем приближении необходимо использовать не только чисто кварковые, но и кварк-глюонные распределения /31/, и суммирование этих двух типов функций в уравнениях эволюции /32/.

Все упомянутые выше формы факторизации вкладов имели ту же структуру, что и в операторном разложении: из всех вкладов выделялся

в отдельной фактор вклад малых расстояний. В недавних работах^{/33-35/} удалось в рамках пертурбативной КХД получить ряд результатов на основе факторизации инфракрасных вкладов, т.е. вкладов очень больших расстояний.

2. Формализм контурных средних и ренормгруппа для инфракрасных асимптотик КХД

Многие логарифмические вклады, возникающие при расчетах по теории возмущений, экспоненцируются после суммирования по всем порядкам. Эффективным методом суммирования ультрафиолетовых логарифмов $\ln(Q^2/\mu^2)$ (где Q - импульс, а μ - параметр ренормировки) является ренормгруппа (РГ)^{/36/}. Метод ренормгруппы, однако, неприменим непосредственно для суммирования ультрафиолетово-конечных вкладов, не затрагиваемых РГ-преобразованиями, каковыми являются коллинеарные логарифмы $\ln(Q^2/m^2)$ (где m - масса кварка или в $K \rightarrow D$ - электрона) и инфракрасные логарифмы $\ln(m^2/\lambda_G^2)$ (λ_G - фиктивная масса глюона (фотона) или какой-либо другой параметр инфракрасного обрезания). Для коллинеарных логарифмов тем не менее удалось воспользоваться методом РГ, дополнив его факторизацией вкладов малых и больших расстояний, выделяющей p^2 - зависимость исходной амплитуды $T(Q^2, p^2)$ в фактор $f(\mu^2/p^2)$ (см. (I)), представляющий собой уже ультрафиолетово-расходящийся объект (например, матричный элемент некоторого составного оператора). Параметр разбегания малых и больших импульсов μ играет для этого объекта роль параметра УФ-обрезания, что позволяет привлечь для анализа μ - зависимости методы РГ. Экспоненциация коллинеарных логарифмов в таком подходе является прямым следствием мультипликативной перенормируемости составных операторов.

Основной результат работ^{/34,35/} состоит в доказательстве того, что инфракрасные особенности пертурбативных вкладов также могут быть выделены в отдельный множитель

$$T(q, p; \lambda_{IR}) = t(q, p) \Big|_{\mu_{IR}} \otimes m_{IR}(\lambda) \Big|_{\mu_{IR}}, \quad (3)$$

представляющий собой вакуумное среднее некоторой вильсоновской петли:

$$m_{IR} = \langle 0 | \text{Pexp} \int_C A_\mu(z) dz^\mu | 0 \rangle. \quad (4)$$

Форма контура C определяется конкретным видом последующего процесса. Физически наиболее важным является контур, образованный двумя прямыми, уходящими из некоторой точки на бесконечность по направлениям p_1 , p_2 , соответствующим импульсу частицы в начальном и конеч-

ном состояниях. Для дальнейшего анализа оказывается решающим тот факт, что M_{JR} в этом случае является ультрафиолетово-расходящейся величиной, параметром ренормировки для которой служит μ_{JR} - граница между мягкими и жесткими импульсами глюонов (фотонов в КЭД). Ренормализационные свойства контурных средних вида (4) были тщательно исследованы ещё в начале 80-х годов в работах /32-40/, где было установлено, что величина $M_{JR}(C)$ ренормируется мультипликативно, а её аномальная размерность зависит от величины γ угла излома контура в точке O /37/:

$$\Gamma_{cusp}(g, \gamma) = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F (\gamma + \lg \gamma - 1). \quad (5)$$

Если выразить угол γ через импульсы p_1, p_2 , то Γ_{cusp} имеет следующий вид:

$$\Gamma_{cusp}(g, \gamma) = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left[\frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} - 1 \right], \quad (6)$$

где $\gamma = (1 + 4m^2/Q^2)^{-1/2}$, $p_1^2 = p_2^2 = m^2$, $Q^2 = -(p_1 - p_2)^2$.

Нетрудно заметить, что (6) совпадает с известной функцией тормозного излучения (см., например /41/). В пределе $Q^2 \gg m^2$ выражение (6) превращается в логарифм $(\alpha_s C_F / \pi) \ln(Q^2/m^2)$.

Подстановка (5), (6) в уравнение ренормгруппы

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \Gamma_{cusp}(g, \gamma) \right] M(C, \mu, g) = 0 \quad (7)$$

позволяет сразу же сделать вывод об экспоненцировании инфракрасных логарифмов.

В КЭД ненулевым является только $O(\alpha)$ вклад в Γ_{cusp} , что позволяет немедленно воспроизвести известные результаты /41, 42/. В неабелевых теориях $\Gamma_{cusp}(g, \gamma)$ является рядом по константе g , причем высшие вклады имеют существенно неабелеву структуру /43/, например, $O(\alpha_s^2)$ - вклад имеет цветовой множитель $C_F N_C$ (а не C_F^2) /43/.

Таким образом, формализм контурных средних дает хорошую основу для построения регулярного метода анализа инфракрасных свойств пертурбативной КЭД, позволяющего хорошо определенным способом вычислять поправки, в принципе, сколь угодно высокого порядка. Из возможных дальнейших обобщений и приложений метода наиболее важным представляется применение его к исследованию судаковских эффектов в КЭД, для которых характерно одновременное наличие и коллинеарных, и инфракрасных логарифмов, что потребует комбинированного использования двух видов факторизации - стандартной и инфракрасной.

3. Достижения в методе квантово-хромодинамических правил сумм

Одним из практически наиболее важных полей приложения факторизационной техники является метод правил сумм КХД^{/28/}, позволяющий вычислять низкоэнергетические адронные характеристики, исходя из информации о непертурбативной структуре КХД-вакуума, аккумулируемой вакуумными средними кварковых и глюонных полей (конденсатами) $\langle \bar{q} q \rangle$, $\langle G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} \rangle$ и т.п. Выше уже упоминались последние результаты в данной области, связанные с исследованием трехтоковых корреляторов. В настоящее время объектом исследования стали уже четырехтоковые корреляторы, определяющие вид структурных функций глубоконеупругого рассеяния^{/44/}. Получены первые результаты: вычислены валентные структурные функции $U_V(x)$, $d_V(x)$ в области промежуточных значений параметра x : $0,1 \leq x \leq 0,7$. Пока можно сказать лишь, что вычисленные распределения качественно соответствуют найденным экспериментально, но о хорошем численном согласии говорить ещё рано. Не совсем ясно также, как распространить метод в "запрещенные" области малых x ("реджевская" область) и x , близких к 1 ("эксклюзивный предел"). Неприменимость существующих методов в этих областях проявляется в том, что вместо $1/M^2$ (M - борелевский параметр^{/28/}) параметрами разложения становятся большие величины $1/x M^2$ и $1/(1-x) M^2$.

В этой связи возникает общий вопрос: разумно ли (и/или достаточно) использовать только локальные характеристики КХД-вакуума ($\langle \bar{q}(0) q(0) \rangle$, $\langle G_{\mu\nu}(0) G_{\mu\nu}(0) \rangle$) при вычислении методом КХД-правил сумм таких нелокальных адронных характеристик, как структурные функции, волновые функции, формфакторы и т.п., или необходимо в таких случаях использовать нелокальные вакуумные средние^{/45-47/}:

$$\langle 0 | G_{\mu\nu}(0) \tilde{E}(0, x, A) G_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle \quad (8)$$

$$\langle 0 | \bar{q}(0) \tilde{E}(0, x, A) q(x) | 0 \rangle \quad (9)$$

где $E(0, x, A)$ - Р-экспоненты

$$E(0, x, A) = P \exp \left(i g x^n \int_0^1 A_F(\tilde{x}) d\tilde{x}_F \right), \quad (10)$$

обеспечивающие калибровочную инвариантность нелокальных конденсатов (8), (9). В калибровке Фока - Швингера $x_F A_F(x) = 0$ /48, 49/ ρ -экспоненты исчезают, и $\langle q(x) \bar{q}(0) \rangle$ имеет смысл непертурбативного вклада в кварковый пропагатор. Поэтому технически удобно использовать для нелокальных конденсатов параметризацию, аналогичную α -представлению для пропагатора (ср. /36/):

$$\langle \bar{q}(0) q(x) \rangle = \langle \bar{q} q \rangle \int_0^\infty e^{x^2/4} \Phi(v) dv, \quad (11)$$

$$\langle \bar{q}(0) \gamma_\nu q(x) \rangle = x_\nu \int_0^\infty d\sigma e^{\sigma x^2/4} \Psi(\sigma) \quad (12)$$

и т.д. ($x^2 < 0$). Функции $\Phi, \Psi, \dots$, аккумулирующие информацию о пространственно - временной структуре вакуумных флуктуаций, имеет смысл называть вакуумными функциями распределения. Как и в случае обычных (адронных) функций распределения, моменты функций Ψ , Φ выражаются через матричные элементы локальных операторов:

$$\int_0^\infty \Phi(v) dv = 1, \quad (13)$$

$$\langle \bar{q} q \rangle \int_0^\infty \Phi(v) v dv = \langle \bar{q} D^2 q \rangle \equiv \lambda^2 \langle \bar{q} q \rangle \quad (14)$$

и т.д. Таким образом, первый момент от Φ характеризует среднюю виртуальность λ^2 вакуумных кварковых полей. Разложение нелокального конденсата

$$\langle \bar{q}(0) q(x) \rangle = \langle \bar{q} q \rangle + \frac{x^2}{8} \langle \bar{q} D^2 q \rangle + \dots \quad (15)$$

в ряд по локальным соответствует разложению вакуумной функции распределения $\Phi(\sigma)$ в ряд по производным от δ -функции

$$\Phi(\sigma) = \delta(\sigma) - \frac{\lambda^2}{2} \delta'(\sigma) + \sum a_n \delta^{(n)}(\sigma) \quad (16)$$

Важность информации о форме функций $\Phi(\sigma), \Psi(\sigma), \dots$ становится особенно наглядной, если записать КХД-правильно сумм непосредственно для волновой функции, например, пиона /50/:

$$f_\pi^2 \varphi_\pi(x) = \frac{3M^2}{2\pi^2} x \bar{x} (1 - e^{-s_0/M^2}) + 4 \bar{x} \Psi(x M^2) +$$

$$+ \frac{16}{9M^2} \pi \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 \bar{x} \int_0^1 \bar{y} dy da d\bar{a} d\bar{b} \Phi\left(\frac{xM^2}{a}\right) \Phi\left(\frac{yM^2}{\bar{b}}\right) \times \\ \times \frac{\Theta(y > \bar{x}) \Theta(a > \bar{b}) + \Theta(y < \bar{x}) \Theta(a < \bar{b})}{|xy a \bar{b} - \bar{x} \bar{y} a \bar{b}|} + (x \rightarrow \bar{x}), \quad (I7)$$

где $\bar{x} = 1-x$, $\bar{y} = 1-y$, Использование в (I7) только первых членов разложения (I6) для Φ , ψ превращает (I7) в правило сумм

$$\int_{\pi}^2 \varphi_{\pi}(x) = \frac{3M^2}{2\pi^2} x\bar{x} \left(1 - e^{-s_0/M^2}\right) + \frac{8\pi\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81M^4} x \\ \times \left[9 \left(\delta(x) + \delta(\bar{x}) \right) + 2 \left(\bar{x} \delta'(x) + x \delta'(\bar{x}) \right) \right], \quad (I8)$$

моменты которого воспроизводят известные правила сумм /51/. Для функций Φ , ψ , имеющих вид, диктуемый известным значением $\lambda^2 = 0,4 \pm 0,1 \Gamma^2$ /52/ параметра λ^2 , характеризующую виртуальность вакуумных кварков, обработка правил сумм (I7) дает волновую функцию $\varphi_{\pi}^{(1)}(x) \approx 8\sqrt{x\bar{x}}/\pi$ /50/ (или, в другой параметризации, $\varphi_{\pi}^{(1)}(x) \approx 6x\bar{x} (1 + 8/9 (1 - 5x\bar{x}))$), более близкую к асимптотической волновой функции $\varphi_{\pi}^{as}(x) = 6x\bar{x}$ /14/, чем к "двугорбой" волновой функции $\varphi_{\pi}^{c2}(x) = 30x\bar{x}(1 - 4x\bar{x})$ /51/.

4. Некоторые перспективы дальнейшего развития

Полученные в последнее время результаты позволяют надеяться на прогресс в решении ряда задач пертурбативной квантовой хромодинамики. Имеются в виду следующие проблемы:

1. Разработка теории судаковских эффектов на основе формализма контурных ординат.

2. Развитие формализма нелокальных конденсатов.

3. Расчет методом правил сумм КХД волновых функций адронов и адронных функций распределения.

4. Разработка теории радиационного поведения в КХД, поведение структурных функций при малых x .

5. Исследование поляризационных эффектов в адронных процессах с большой передачей импульса.

Литература

1. Politzer H.D. - Phys. Reports, 1974, v. 14, p. 129.
Gross D.J., Wilczek F. - Phys. Rev., D, 1974, v. 9, p. 980.
2. Wilson K. - Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499.
3. Christ N., Hasslacher B., Mueller A.H. - Phys. Rev., D, 1972, v. 6, p. 3543.
4. Radyushkin A.V. - Phys. Lett., B, 1977, v. 69, p. 245.
5. Politzer H.D. - Nucl. Phys. B, 1977, v. 129, p. 301.
6. Радюшкин А.В. - Препринт ОИЯИ P2-10717, Дубна, 1977.
7. Черняк В.Л., Китницкий А.Р., Сербо В.Г. - Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 760.
8. Amati D., Petronzio R., Veneziano G. - Nucl. Phys., B, 1978, v. 140, p. 54.
9. Libby S., Sterman G. - Phys. Rev., D, 1978, v. 18, p. 3252.
10. Ефремов А.В., Радюшкин А.В. - ТМФ, 1980, т. 44, ос. 17, 157, 327.
11. Ellis R.K. et al. - Nucl. Phys., B, 1979, v. 152, p. 285.
12. Mueller A.H. - Phys. Reports, 1981, v. 73, p. 237.
13. Brodsky S.J., Lepage G.P. - Phys. Rev., D, 1980, v. 22, p. 2157.
14. Efremov A.V., Radyushkin A.V. - Phys. Lett., B, 1980, v. 94, p. 245.
15. Collins J.C., Soper D.E., Sterman G. - Nucl. Phys. B, 1985, v. 261, p. 104.
16. Bodwin G. - Phys. Rev., D, 1985, v. 31, p. 2616.
17. Bodwin G., Brodsky S.J., Lepage G.P. - Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 1799.
18. Chetyrkin K.G. - Phys. Lett., B, 1983, v. 126, p. 371.
Tkachov F.V. - Phys. Lett., B, 1983, v. 124, p. 212; INR preprint P-0332, P-0358, Moscow, 1984.
Pivovarov G.B., Tkachov F.V. - INR preprint P-0370, Москва, 1984; Препринт ИЯИ ПН СССР П-459, Москва, 1986.
19. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Tkachov F.V. - Phys. Lett., B, 1982, v. 119, p. 407.
20. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. - Phys. Lett., B, 1982, v. 114, p. 340.
Самарнов В.А., Четиркин К.Г. - ТМФ, 1985, т. 63, с. 208.
21. Z. Hooft G. - Nucl. Phys., B, 1973, v. 61, p. 455.
22. Ioffe B.L., Smilga A.V. - Phys. Lett., B, 1982, v. 114, p. 353.
23. Nesterenko V.A., Radyushkin A.V. - Phys. Lett., B, 1982, 115, p. 410.
24. Ioffe B.L., Smilga A.V. - Nucl. Phys., B, 1984, v. 232, p. 109.

25. Balitsky I.I., Yung A.V. - Phys. Lett., B, 1983, v. 129, p.328.
26. Chetyrkin K.G. et al. - Preprint INR P-0337, Moscow, 1984.
27. Нестеренко В.А., Радиккин А.В.-Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 39, с. 576.
28. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.- Nucl. Phys., B, 1979, v. 147, pp. 385, 448.
29. Belyaev V.M., Kogan Ya. I. - Phys., Lett., B, 1984, v. 136, p. 273.
30. Балицкий Я.Я., Колесниченко А.В., Инг А.В.-ЯФ, 1985, т. 42, с. 467.
31. Ефремов А.В., Теряев О.В. - ЯФ, 1984, т. 39, с. 1517.
32. Бухвостов А.П., Кураев Э.А., Липатов Л.Н.- Письма в ЖЭТФ, 1983, т.37, с.406; ЯФ, 1984, т. 39, с. 194.
33. Ivanov S.V., Korchemsky G.P. - Phys. Lett., B, 1985, v. 154, p. 197.
34. Korchemsky G.P., Radyushkin A.V. - Phys. Lett., B, 1986, v.171, p. 459.
35. Корчемский А.В., Радиккин А.В.-ЯФ, 1987, т. 45, сс. 198, 1466.
36. Боголюбов Н.Н. , Ширков Д.В. - Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
37. Polyakov A.M. - Nucl. Phys., B, 1980, v. 164, p. 171.
38. Arefieva I.Ya. - Phys. Lett., B, 1980, v. 93, p. 347.
39. Brandt R.A., Meri M.F., Sato M.-A. - Phys. Rev., D, 1981, v.24, p. 879.
40. Dotsenko V.S., Vergeles S.N. - Nucl. Phys., B, 1980, v. 169, p. 527.
41. Ахмезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
42. Yennie D.R., Frautshi F.C., Suura H. Ann. Phys. (NY) 1961, v. 13, p. 379.
43. Korchemsky G.P., Radyudhkin A.V. - Nucl. Phys., B, 1987, v. 283, p. 342.
44. Belyaev V.M., Ioffe B.L. - Preprint ITEP-138, Moscow, 1987.
45. Bauer V.N., Pinales Yu.F. - INF preprnt 81-141, Novosibirsk, 1981.
46. Shuryak E.V. - Nucl. Phys., B, 1982, v. 203, p. 116.
47. Gromes D. - Phys. Lett., B, 1982, v. 115, p. 482.
48. Фок В.А. - Изв. АН СССР, ИМФН, сер. физ. 1937, № 4-5, с. 551.
49. Пеннгер Д. - Частицы, источники, поля. т. 2, Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
50. Михайлов С.В., Радиккин А.В. - Письма в ЖЭТФ, 1986, т. 43, с. 551.
51. Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R.- Nucl. Phys. B, 1982, v.201, p.492.
52. Беллев В.М., Иoffe Б.Л.-ЖЭТФ, 1982, т.83, с. 8.

ADDITIVITY OF QUARK MASSES IN GAUGE THEORIES

M. D. Scadron*
Physics Department
University of Arizona
Tucson, AZ 85721 USA

In this talk we show that, in spite of the confinement of quarks in (color-singlet) hadrons, effective quark masses of all types (dynamically generated, constituent and current masses), naturally form hadron masses in an additivity fashion. For the purposes of brevity, we limit the discussion primarily to the nonstrange flavor sector. For the larger picture involving SU(3) and SU(4) masses, see Ref. 1.

1. Dynamically generated quark mass in QCD

The breakdown of chiral symmetry in QCD can be characterized by the quark condensate, which we take to be $\langle \bar{q}q \rangle \approx (-250 \text{ MeV})^3$ at the renormalization scale of $M \sim 1 \text{ GeV}$. The short-distance operator product expansion (OPE) applied to quark fields^{3/} then translates this nonperturbative order parameter to the self-energy Σ of the quark propagator of Fig. 1, with^{4,5/}

$$\Sigma(p) = \frac{g_s^2}{9} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{p^2} \left[3 + a - a \frac{p \cdot m_{\text{dyn}}}{p^2} \right] \quad (1)$$

in the deep euclidean region.

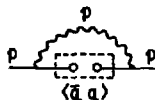


Fig. 1. Nonperturbative quark propagator due to gluon exchange.

No higher-order dimensional condensates influence the chiral-limiting OPE expansion (1) as it truncates^{6/} in this leading order. Furthermore, at the time-like pole position $p = m_{\text{dyn}} = \Sigma$, with $p^2 = m_{\text{dyn}}^2$, (1) becomes gauge-parameter independent. The resulting self-consistent dynamically generated quark mass is then of "physical" significance, with^{4,5/}

$$m_{\text{dyn}} = \left[4\pi\alpha_s(M) |\langle \bar{q}q \rangle_M| / 3 \right]^{1/3} \approx 320 \text{ MeV} \quad (2)$$

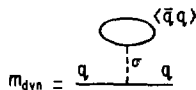
since $|\langle \bar{q}q \rangle| \approx (250 \text{ MeV})^3$ and^{7/} $\alpha_s(M) \approx 0.5$ at $M \approx 1 \text{ GeV}$.

*Supported in part by the United States Department of Energy.

2. Dynamical quark mass generation via scalar tadpole

At the pole position, Fig. 1 can be topologically distorted into the scalar meson $\bar{q}q$ quark tadpole graph of Fig. 2.

Fig. 2. Quark mass generation via scalar meson quark tadpole.



The tadpole "neck" is the $\bar{q}q$ p-wave scalar σ meson, the "tail" is the σ -quark coupling $g_{\sigma qq} = g_{\pi qq}$ and the tadpole "head" is $\langle \bar{q}q \rangle_{\sigma}$ at the pole position $M = m_{\sigma}$. Then the Feynman amplitude for Fig. 2 is^{8/}

$$m_{dyn} = \frac{\langle \bar{q}q \rangle_{\sigma}}{-m_{\sigma}^2} g_{\sigma qq}^2 \quad (3)$$

Combining (3) with (2) and $g_{\pi qq} \approx 2\pi/\sqrt{N_c}$ (derived^{9/} from the pion decay constant $\langle 0 | A_{\mu}^3 | \pi^0 \rangle = i f_{\pi} q_{\mu}$), one power of $m_{dyn} \neq 0$ cancels from both sides of (3) and one obtains^{8/} the "gap equation"

$$m_{\sigma}/m_{dyn} \approx (\pi/\alpha_s(m_{\sigma}))^{1/2} \approx 2 \quad (4)$$

In (4) we have used "asymptotic freedom" to increase $\alpha_s(1 \text{ GeV}) \approx 0.5$ to $\alpha_s(m_{\sigma}) \approx 0.75$ at $M_{\sigma} \approx 640 \text{ MeV}$.

The ratio $m_{\sigma}/m_{dyn} = 2$ follows exactly in the chiral four-fermion model^{10/} or in asymptotically free bound-state Bethe-Salpeter models.^{11/} Furthermore, the scalar σ mass generation via a σ tadpole in the linear σ model with $g_{\sigma\sigma\sigma} = m_{\sigma}^2/2f_{\pi}$ in the chiral limit leads to the quadratic meson σ mass,

$$m_{\sigma}^2 = \frac{\langle \bar{q}q \rangle_{\sigma}}{-m_{\sigma}^2} g_{\sigma qq}^2 2g_{\sigma\sigma\sigma} = \frac{\langle \bar{q}q \rangle_{\sigma}}{-m_{\sigma}^2} g_{\sigma qq}^2 \left[\frac{m_{\sigma}^2}{f_{\pi} g_{\sigma qq}} \right] \quad (5)$$

Then the $m_{\sigma}^2 \neq 0$ numerator cancels out, and after using $f_{\pi} g_{\sigma qq} = m_{dyn}$, (5) reduces to the linear tadpole quark mass generation, Eq. (3).

3. Dynamical quark mass additivity

In summary, the linear quark mass tadpole generation (3) or (5) from the linear σ model is extended by QCD to (4) or to the chiral four-fermion model relation $m_{\sigma} \approx 2m_{dyn}$. We regard this linear m_{σ} as generated by the (chiral) property of linear tadpole field-theoretic insertions on each quark line composing σ (i.e., q and $\bar{q}$). This is depicted in Fig. 3.

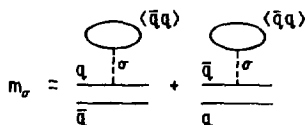


Fig. 3. Tadpole insertions on quark lines generating m_{σ} .

Then since each tadpole insertion in Fig. 3 is governed by the quark tadpole mass generations of Fig. 2 and the latter mass is given by $m_{dyn} \approx 320$ MeV in (2), we have

$$m_c = \frac{\langle \bar{q}q \rangle_\sigma}{-m_\sigma^2} g_{\sigma qq}^2 + \frac{\langle \bar{q}q \rangle_\sigma}{-m_\sigma^2} g_{\sigma qq}^2 = 2m_{dyn} \approx 640 \text{ MeV} \quad (6)$$

This (trivial) tadpole mass insertion approach can be extended to the qq nucleon in the chiral limit, leading to the linear nucleon mass relation due to three tadpole insertions:

$$m_N = m_{dyn} + m_{dyn} + m_{dyn} = 3m_{dyn} \approx 960 \text{ MeV} \quad (7)$$

Note that (7) is near the observed nucleon mass and (6), i.e., $\sigma(700)$ has been detected,^{/12/} albeit with a very large width $\Gamma_\sigma \sim 700$ MeV (as predicted in the linear σ model).

4. Constituent quark mass additivity

Away from the chiral limit, the gluon-generated m_{dyn} is expected to gain some "flavor weight" to become the nonstrange and strange constituent quark masses $\hat{m}_{con}$, $m_{s,con}$. The latter masses have been estimated from the measured proton and lambda total magnetic moments to be^{/7/}

$$\hat{m}_{con} \approx m_N/\mu_p \approx 340 \text{ MeV} \quad , \quad m_{s,con} \approx -m_N/3\mu_\Lambda \approx 510 \text{ MeV} \quad (8a)$$

These quark mass values (8) also follow from a more relativistic chiral symmetry approach involving $f_\pi g_{\pi qq} = \hat{m}_{con}$ and an analogous relation for f_K

$$\hat{m}_{con} \approx (93 \text{ MeV}) \left(2\pi/\sqrt{3} \right) \approx 340 \text{ MeV} \quad , \quad (m_s/\hat{m}_{con}) \approx 2f_K/f_\pi - 1 \approx 1.5 \quad (8b)$$

In either case, the important point is the obvious and long-appreciated constituent quark mass additivity, in hadrons such as for vector mesons,

$$m_\omega \sim 2\hat{m}_{con} \quad , \quad m_{K^*} \approx (m_s + \hat{m}_{con}) \quad , \quad m_\rho \approx 2m_{s,con} \quad (9)$$

Constituent quark mass additivity appears to work even better in the heavier charmed sector.^{/7/}

5. Additivity of dynamical plus current masses in constituent quarks

Away from the chiral limit, the quark propagators are expected to acquire flavor-dependent "current mass" due to weak interaction (QFD) as well as the flavor-independent m_{dyn} from strong-interaction QCD. Then the flavor-dependent self energy Σ_i has the sought-after additivity structure

$$\Sigma_i(p) = m_{i,cur}(p^2) + m_{dyn}(p^2) \quad (10)$$

The gauge independence of (10) now holds at the constituent mass pole position,¹⁴⁾ where $\hat{p} = m_{i,\text{con}}$, $p^2 = m_{i,\text{con}}^2$. Since $m_{\text{dyn}}(p^2) \sim (\bar{q}q)/p^2$ while the (logarithmic) current masses can be taken as constant in the low energy infrared region, the gauge invariant content of (10) reduces to the additivity relation

$$m_{i,\text{con}} = m_{i,\text{curr}} + m_{\text{dyn}}^3/m_{i,\text{con}}^3 \quad (11)$$

Applying (11) to the nonstrange flavor sector with $m_{\text{dyn}} \approx 320$ MeV, $m_{\text{con}} \approx 340$ MeV, we deduce the current mass scale,

$$\hat{m}_{\text{curr}} = 340 \text{ MeV} - (320 \text{ MeV})^3/(340 \text{ MeV})^2 \sim 60 \text{ MeV} \quad (12)$$

Such a current mass as (12) is an order of magnitude larger than the "conventional" value $\hat{m}_{\text{curr}} \sim 5$ MeV based on the "strong PCAC" assumption $m_\pi^2 = -2\hat{m}_{\text{curr}} f_\pi^{-2}(\bar{q}q)$. Nevertheless, the large $\hat{m}_{\text{curr}}$ of (12) is consistent with phenomenology, such as the πN σ term with $\sigma_N/m_N \approx 0.06$ or the πNN Goldberger-Treiman (GT) discrepancy $\Delta = 1 - (m_N g_A / f_\pi g_{\pi NN}) \approx 0.06$. We digress to discuss the latter since it too depends on a (pion) tadpole graph.

Consider the nucleon axial-vector divergence transition containing the π^0 tadpole of Fig. 4.

$$\langle N | \partial A^3 | N \rangle = -m_N g_A \bar{N} \gamma^3 \gamma_5 N \quad (13)$$

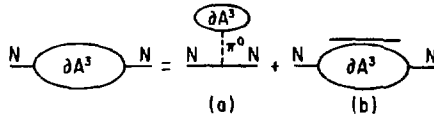


Fig. 4. The π^0 tadpole (a) and background amplitude (b) for $\langle N | \partial A^3 | N \rangle$.

The background amplitude $\langle N | \partial A^3 | N \rangle$ is governed by the Heisenberg equation of motion

$$\partial A^3 = -i[Q_5^3, H] = -\hat{m}_{\text{curr}} \bar{q} \gamma^3 \gamma_5 q \quad (14)$$

The nonvanishing proton spin-flip matrix element of (13) is then

$$-m_N g_A \langle P | \vec{\sigma}_N | P \rangle = -f_\pi g_{\pi NN} \langle P | \vec{\sigma}_N | P \rangle - \hat{m}_{\text{curr}} \langle P | \vec{\sigma}_{qk} | P \rangle \quad (15)$$

The component of $\vec{\sigma}$ mediating the spin-flip transition is $\sigma^- = (\sigma_x - i\sigma_y)/2$ such that $\sigma_N^- |P\rangle = |P\rangle$ for the proton state and $\sigma_{qk}^- |q\rangle = |q\rangle$ for quark states appearing in the qqq proton wave function¹³⁾

$$\begin{aligned} \sqrt{18} |P\rangle &= 2[|u, u, d\rangle + |u, d, u\rangle + |d, u, u\rangle] \\ &- [|u, u, d\rangle + |u, u, d\rangle + |u, d, u\rangle + |u, d, u\rangle + |d, u, u\rangle + |d, u, u\rangle] \end{aligned} \quad (16)$$

Operating on (16) with σ_{qk}^- gives $\sigma_{qk}^- |P\rangle = -|P\rangle$, so that (15) reduces to the spin-flip identity

$$\hat{m}_{\text{curr}} = f_\pi g_{\pi NN} - m_N g_A \approx 72 \text{ MeV} \quad (17)$$

where we use the measured values $f_\pi \approx 93.24 \text{ MeV}$, $g_{\pi NN} \approx 13.4$, $m_N = 938.9 \text{ MeV}$, $g_A \approx 1.254$. Note that both sides of (17) consistently vanish in the $SU(2) \times SU(2)$ chiral limit. Furthermore, note that (17) is roughly compatible with the large $\hat{m}_{\text{curr}}$ found in (12) from gauge invariant dynamical and constituent quark mass additivity.

6. Additivity of current quark masses in QFD

Now we return to more field-theoretic considerations again based on tadpole mass insertions. In the $SU(2) \times U(1)$ model^[14] of weak interactions (referred to as QFD), the (nonstrange) current quark masses are generated by the VEV Higgs tadpole graphs of Fig. 5.

Fig. 5. Current mass generation via Higgs tadpole graphs $m_{u,\text{curr}} = \frac{u \langle \phi_H \rangle}{(a)}$ $m_{d,\text{curr}} = \frac{d \langle \phi_H \rangle}{(b)}$
for (a) u quarks and (b) d quarks.

These (gauge invariant) tadpole graphs correspond to the Weinberg relations

$$m_{u,\text{curr}} = \langle \phi_H \rangle g_{Hu} \quad m_{d,\text{curr}} = \langle \phi_H \rangle g_{Hd} \quad (18)$$

and are the QFD analogs of the dynamical mass QCD tadpole amplitude (3), equivalent to $m_{\text{dyn}} = f_\pi g_{\pi qq}$. The latter Goldberger-Treiman relation at the quark level is the exact parallel of (18).

Then, just as Fig. 2 strong σ tadpoles and (3) lead to Fig. 3 σ tadpole insertions as the dynamical mass quark counting measure of m_q in (6), so now Figs. 5 and (18) lead to Fig. 6 Higgs weak tadpole insertions as the nonstrange current mass quark counting measure of m_q .

$\frac{n}{\langle \phi_H \rangle x} + \frac{p}{\langle \phi_H \rangle x} = +u$ Fig. 6. Higgs tadpole insertions on quark lines generating m_q .

More specifically, Fig. 6 corresponds to the Feynman amplitude measure of pion mass:

$$m_{\pi^+} = \langle \phi_H \rangle g_{Hu} + \langle \phi_H \rangle g_{Hd} \quad (19a)$$

$$= m_{u,\text{curr}} + m_{d,\text{curr}} = 2\hat{m}_{\text{curr}} \approx 140 \text{ MeV} \quad (19b)$$

Needless to say, the current quark mass additivity relation (19) suggests that $\hat{m}_{\text{curr}} \approx 70 \text{ MeV}$, in reasonable agreement with our other estimates (12) and (17). These three relations (12), (17), (19b) are not only numerically compatible, but they all consistently vanish in the $SU(2) \times SU(2)$ chiral limit.

7. Mass additivity in current quark mass matrix

The semistrong hamiltonian density is defined as

$$H' = m_{u,curr} \bar{u}u + m_{d,curr} \bar{d}d + m_{s,curr} \bar{s}s + \dots \quad (20)$$

There is no $\bar{u}d$ nor $\bar{s}d$ off-diagonal term in (20) because charge and strangeness are conserved; in the language of tadpole insertions $\delta_{Hud} = \delta_{Hsd} = 0$. The linear current quark mass additivity structure of (20) follows when we ask for the current quark mass (tadpole insertion) content in the $\bar{q}q$ meson or qqq baryon. The very-short-distance QFD Higgs tadpole is not influenced by longer distance QCD gluon exchanges and current quark mass additivity continues to hold, even for Nambu-Goldstone pions.

If instead we seek the Higgs boson tadpole content of the pion (rather than of the individual quarks within the pion), which would be the QFD analog of the QCD relation (5), the resulting LHS pion mass is then quadratic. However, at a higher energy renormalization point, the RHS of the mass formula due to (20) can also be expressed as a sum of quadratic current quark masses weighted by structure function scaling integrals.^{/15/} Nevertheless, the deduced value for the nonstrange current quark mass is still $\hat{m}_{curr} \sim 60\text{--}70$ MeV.

8. Summary

Even though quarks are confined within hadrons, tadpole mass insertions for both the QCD strong gauge theory and the QFD weak gauge theory suggest that dynamical, constituent and current quark masses appear to form hadron masses in additive combinations.

References

1. V. Elias, V. Miransky and M. Scadron, Univ. of Western Ontario preprint, 1987.
2. S. Eidelman, L. Kurdadze and A. Vainshtein, Phys. Lett., 1979, 82B, p. 278; E. Ioffe, Nucl. Phys., 1981, B188, p. 317.
3. H. Politzer, Nucl. Phys., 1976, B117, p. 397.
4. V. Elias and M. Scadron, Phys. Rev., 1984, D30, p. 647.
5. V. Elias, M. Scadron and R. Tarrach, Phys. Lett., 1985, 163, p. 176.
6. V. Elias, T. Steele, M. Scadron and R. Tarrach, Phys. Rev., 1986, D34, p. 3537.
7. A. DeRújula, H. Georgi, and S. Glashow, Phys. Rev., 1975, D12, p. 147.
8. V. Elias and M. Scadron, Phys. Rev. Lett., 1984, 53, p. 1129.
9. M. Scadron, Ann. Phys. (N.Y.), 1983, 148, p. 257.
10. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev., 1961, 122, p. 345.
11. R. Delbourgo and M. Scadron, Phys. Rev. Lett., 1982, 48, p. 379.
12. See e.g., P. Estabrooks, Phys. Rev., 1979, D19, p. 2678.
13. W. Thirring, Acta. Phys. Austriaca Supp. II, 1966, p. 205; J. Kokkedee, "The Quark Model," Benjamin Publ. (New York) 1969, p. 187.
14. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., 1967, 19, p. 1264; A. Salam in "Elementary Particle Theory," ed. N. Svartholm, Almqvist Forlag AB (Stockholm) 1968, p. 367.
15. J. Guion, P. McNamee and M. Scadron, Phys. Lett., 1976, 63B, p. 81; Nucl. Phys., 1977, B123, p. 445; N. Fuchs and M. Scadron, Phys. Rev., 1979, D20, p. 2421.

FIELD THEORETIC CONSISTENCY OF QCD OPERATOR PRODUCT
EXPANSION CONTRIBUTIONS FROM CHIRAL NON-INVARIANT CONDENSATES

V. Elias and T.G. Steele

Department of Applied Math, University of Western Ontario,
London, Ontario, Canada.

The operator product expansion (OPE) for the quark propagator is

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(0)) | 0 \rangle \equiv i S_F(p) \\ = C_I(p) + C_{\bar{\psi}\psi}(p) \langle \bar{\psi}\psi \rangle + C_{GG}(p) \langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle + \text{higher dimension condensates (hdc)} \quad (1)$$

where $C_I(p)$ represents the purely perturbative contribution from QCD. The non-zero vacuum expectation values (vev's) in (1) are known as condensates and are non-perturbative in origin. This paper will examine some field theoretical characteristics of the OPE.

The coefficients $C_O(p)$ may be determined perturbatively provided that the dimension of the corresponding operator O is less than ≈ 10 .^{/1/} Consequently, the coefficients $C_O(p)$ and the condensates themselves ($\langle O \rangle$) factor the short and long distance content of QCD (within certain limits), enabling the OPE to provide a useful extension of QCD into a non-perturbative regime.

Quark Condensate Component of the Quark Self-Energy

In equation (1) the coefficient $C_{\bar{\psi}\psi}(p)$ is particularly important, as it is the coefficient of the lowest dimension chiral-symmetry violating condensate ($\langle \bar{\psi}\psi \rangle$). A non-zero value of this coefficient makes possible the dynamical generation of a quark mass even when the QCD Lagrangian is chiral symmetry invariant. Thus the OPE description of the quark propagator allows one to find field theoretical support for the phenomenological discrepancy between small, purely perturbative "current" masses and relatively large ($\sim m_{\text{nucleon}}/3$) "constituent" masses for u and d quarks. Indeed, to account for this discrepancy, a large component of (up and down) quark masses must be dynamical in origin, dominating the aggregate mass near the $m_{\text{nucleon}}/3$ "mass shell" and falling off sharply with p^2 as QCD becomes more purely perturbative.^{/2/}

The second order contribution to the fermion propagator is obtained from Figure 1, allowing calculation of $C_{\bar{\psi}\psi}(p)$ to lowest-order in α_s . The "NP box" in the figure represents a normal ordering of the indicated fermion field, as obtained from the Wick expansion for $S_F(p)$. The quark self energy is then given by^{/3,4/}

$$-i\tilde{\Sigma}(p) = \left(\frac{ig}{2}\right)^2 \int d^4(y-z) e^{ip \cdot (y-z)} \gamma^\mu{}_a \langle : \bar{\psi}(z) \psi(y) : \rangle \gamma^\nu{}_b$$

$$+ i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (y-z)} \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + (1-a) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right) \delta^{ab} \quad (2)$$

where only the quark condensate component of $\langle :\bar{\psi}(z)\psi(y): \rangle$ will be extracted.

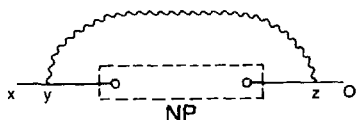


Fig. 1. $O(g^2)$ correction to the quark propagator through the non-perturbative vertex $\langle \bar{\psi}(z)\psi(y) \rangle$.

It is possible to write a gauge covariant Taylor expansion of the $\langle \bar{\psi}(z)\psi(y) \rangle$ vev through use of the Fock-Schwinger gauge.^{15/} In this gauge

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3a)$$

and consequently, through repeated differentiation of (3a),

$$\vec{\tau}(n_1, \dots, n_g, B^a)(0) = 0, \quad (3b)$$

where B^a represents the gluon field. Using the result of (3) the Taylor expansion of $\bar{\psi}(z)\psi(y)$ about $y = z = 0$ may be expressed covariantly as follows:

$$\begin{aligned} \langle : \bar{\psi}(z) \psi(y) : \rangle &= \langle \psi(0) \psi(0) \rangle + (y-z)^4 \langle \bar{\psi} D_4 \psi \rangle \\ &+ \frac{1}{2} (z^\alpha z^\beta + y^\alpha y^\beta) \langle \psi D_{(\alpha} D_{\beta)} \psi \rangle - y^\alpha z^\beta \langle \bar{\psi} D_\beta D_\alpha \psi \rangle \\ &+ \text{higher order terms.} \end{aligned} \quad (4)$$

The expansion (4) may be simplified using Poincaré invariance and the equation of motion $\partial_\nu = -i\not{p}$.^{/6,7/} If only the quark condensate component of (4) is desired, then $\langle\psi(z)\psi(y)\rangle$ becomes^{/6,8/}

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(y) \psi(z) \rangle = & \frac{i\psi}{3} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-im)^{2n}}{(2n)!} (y-z)^{2n} a_{2n} \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-im)^{2n+1}}{(2n+1)!} \gamma \cdot (y-z) (y-z)^{2n} b_{2n+1} \right\} + \text{higher dimension condensates,} \\ & \text{(hdc)} \end{aligned} \quad (5a)$$

where

$$\frac{a_{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{n!(n!)4^{n+1}} \quad (5b)$$

$$\frac{b_{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2(n+2)!n!4^{n+1}} \quad (5c)$$

It is worth noting that the series (5) sums rather elegantly into the closed form^{/8,9/}

$$\langle \bar{\psi}(y)\psi(z) \rangle = \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{6m} [(-x^2)^{-1/2} I_1(m(-x^2)^{1/2}) + \frac{i\gamma \cdot x}{(-x^2)} I_2(m(-x^2)^{1/2})], \quad (6)$$

where $x \equiv (y-z)$, $x^2 < 0$ and I_1, I_2 are modified Bessel functions. A similar expression for time-like x may be obtained in terms of ordinary Bessel functions.

Evaluating (2) using only the zero order term in (5a) eventually leads to a gauge dependent dynamical mass.^{/10,11/} However, if the linear term of (5a) is also included, the resulting self-energy is gauge independent at the $\not{p} = m$ mass shell:^{/4/}

$$\Sigma(p) = \frac{g^2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{9p^2} [(3+a) - \frac{am\not{p}}{p^2} + \text{higher order terms}]. \quad (7)$$

Note that the "one-covariant derivative term" in (5) led to a contribution to $S_F(p)$ involving a factor of $m\not{p}/p^2$ relative to the lead term in (7). This factor exhibits $m/|p|$ as the expansion parameter in momentum space of the OPE given by (5), a standard OPE property. The second derivative terms in (5) are therefore expected to yield contributions to $S_F(p)$ comparable to (m^2/p^2) times the lead term, and so on.

This $m\not{p}/p^2$ expansion parameter is necessarily unity on the $\not{p} = m$ mass shell. Consequently, the only way to extract a meaningful dynamical quark mass from (7) is to show that the full set of higher order OPE contributions to $S_F(p)$ truncates to a finite number of terms.

The second and higher order terms of (5) are zero upon explicit substitution into (2).^{/12/} To see this, let us first consider within (2) the contributions to (5a) proportional to the coefficient a_{2n} :

$$\begin{aligned} & \int d^4(y-z) \int d^4k e^{i(p-k) \cdot (y-z)} \gamma^\mu (y-z)^{2n} \gamma^\nu \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2} + (1-a) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right) \\ &= \gamma^\mu \left(-\frac{\partial}{\partial p_\tau} \frac{\partial}{\partial p_\tau} \right)^n \left[\frac{-g_{\mu\nu}}{p^2} + (1-a) \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \right] \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (8)$$

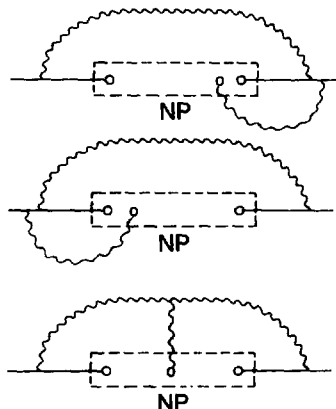
The bottom line of (8) vanishes (for non-zero p^2) if $n \geq 1$. Similarly, the contribution from (5a) proportional to the coefficient b_{2n+1} involves further application of a $\gamma \frac{\partial}{\partial p}$ operator to the bottom line of (8); which again vanishes when $n \geq 1$.

In summary, the original concept of a running dynamical mass^{/2/} has now been given a field theoretic foundation from the result that the quark condensate component of the quark self-energy exhibits a gauge independent mass shell,^{/4/} valid to all orders of the OPE.^{/12/} Phenomenology of this dynamical mass contribution is addressed elsewhere.^{/13/}

Mixed Condensate Component of the Quark Self-Energy

Chiral symmetry is also violated by the dimension five "mixed" condensate $\langle \bar{\psi} G_{\mu\nu} \psi \rangle$ where the field strength $G_{\mu\nu} = [D_\nu, D_\mu]$. The mixed condensate enters the

quark self-energy to lowest order in the coupling g through the processes delineated by Figures 1-4.



Figs. 2-4. $O(g^3)$ corrections to the quark propagator generated through the non-perturbative vev $\langle \bar{\psi}(z)B_\mu(w)\psi(y) \rangle$.

Note that the graphs in Figs. 2 - 4 are explicitly of $O(g^3)$ in the perturbative expansion--one order removed from Fig. 1. However, the mixed condensate contribution to Fig. 1 arises from the antisymmetric component of the second order term in (4) $[-y^\alpha z^\beta \langle \bar{\psi} D_{[\beta} D_{\alpha]} \psi \rangle]$, which yields an additional factor of g from the commutator $[D_\mu, D_\nu] = g(i\lambda^a/2) F_{\nu\mu}^a(x) = G_{\nu\mu}(x)$.

In evaluating the mixed condensate contribution arising through Fig. 1, the non-perturbative vev (5) has already been shown^{/14/} to have a mixed condensate component in addition to the quark condensate component explicitly given in (5a).^{/15/}

$$\langle 0 | \bar{\psi}(z)\psi(y) | 0 \rangle = [\langle \bar{\psi}\psi \rangle \text{ series of (5)}]$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\langle \bar{\psi}\sigma G\psi \rangle}{288} \{ [-3i(y-z)^2/2 - y_\tau z_\eta \sigma^{\tau\eta}] + m[-(y-z)^2 \gamma \cdot (y-z)/4] \\ & + m^2[3i(y-z)^4/8 + y_\tau z_\eta \sigma^{\tau\eta} \{ (y-z)^2/4 \}] + m^3[-15(y-z)^4 \gamma \cdot (y-z)/64] \\ & + \dots + m^n [a_n (\gamma \cdot (y-z))^{n+2} + b_n y_\tau z_\eta \sigma^{\tau\eta} (\gamma \cdot (y-z))^n] + \dots \} + \text{hdc.} \end{aligned} \quad (9)$$

For any particular value of n , the coefficients a_n, b_n can be worked out using tensor algebra procedures (as are $a_0, b_0, a_1, b_1 (=0)$ in Appendix A of ref. /6/).

Similarly, in evaluating the mixed condensate contribution arising through Figs. 2 - 4, the mixed condensate projection of the non-perturbative vev $\langle \bar{\psi}(z)B_\mu(w)\psi(y) \rangle$ has also been obtained to $O(m^3)$.^{/15/}

$$\begin{aligned}
\frac{ig}{2} \langle 0 | : \bar{\psi}(z) \gamma_\mu^a \psi(y) : | 0 \rangle &= \frac{\langle \bar{\psi} \sigma G \psi \rangle \lambda^a}{1536} \\
&\times \left[w^\lambda \sigma_{\lambda\mu} + \frac{m}{2} [-i w^\lambda \sigma_{\lambda\mu} \gamma^\nu (y-z) + w^\lambda (y-z)^\beta (\gamma_\mu g_{\beta\lambda} - \gamma_\lambda g_{\beta\mu})] \right. \\
&- \frac{m^2}{12} [2 w^\lambda \sigma_{\lambda\mu} (y-z)^2 - (y-z)^\lambda \sigma_{\lambda\mu} w^\nu (y-z) - w^\lambda \sigma_{\lambda\beta} (y-z)^\beta (y-z)_\mu] \\
&+ \frac{m^3}{24} [i w^\lambda \sigma_{\lambda\mu} (y-z)^2 \gamma^\nu (y-z)_\nu + \gamma^\nu w (y-z)^2 (y-z)_\mu - \gamma_\mu (y-z)^2 w^\nu (y-z)_\nu] \\
&+ O(m^4) \Big] \\
&+ [\text{Terms proportional to condensates of dimension } > 5].
\end{aligned} \tag{10}$$

Substitution of the mixed condensate component of (9) into the Fig. 1 two-point amplitude, substitution of (10) into corresponding two-point amplitudes of Figs. 2 - 4 yields respectively the following set of corrections to the fermion propagator from mixed condensate insertions:^{/15/}

$$i\Delta S_{(1)}(p) = \frac{g^2 \langle \bar{\psi} \sigma G \psi \rangle (\not{p} + m_p) \not{p}}{288 p^4 (p^2 - m_p^2)^2}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
i\Delta S_{(2)}(p) &= \frac{g^2 \langle \bar{\psi} \sigma G \psi \rangle (\not{p} + m_p)}{288 p^4 (p^2 - m_p^2)^3} \{ [-\not{p} p^2 (1-a)] + m[2\not{p}(\not{p} + m_p)] \\
&+ m^2[\not{p}(1-a)] + m^3[0] + \dots \},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
i\Delta S_{(3)}(p) &= \frac{g^2 \langle \bar{\psi} \sigma G \psi \rangle (\not{p} + m_p)}{288 p^4 (p^2 - m_p^2)^3} \{ [-\not{p}(2p^2 + m_p^2)(1-a)] \\
&+ m[4\not{p}m_p] + m^2[3\not{p}(1-a)] + m^3[0] + \dots \},
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
i\Delta S_{(4)}(p) &= \frac{g^2 \langle \bar{\psi} \sigma G \psi \rangle (\not{p} + m_p)}{288 p^8 (p^2 - m_p^2)^2} \{ [(-54-18a)\not{p}p^4 + (-45-9a)m_p p^4 \\
&+ (m-m_p) \left[\frac{-18a(p^6 + m_p p^4 \not{p})}{(p^2 - m_p^2)} \right] + m[(45+9a)(p^4 + m_p \not{p} p^2)] \\
&+ m^2[-(45+9a)(\not{p} p^2 + m_p p^2)] + m^3[(45+9a)(p^2 + m_p \not{p})] + \dots \},
\end{aligned} \tag{14}$$

where m_p is the propagator mass associated with the fermion lines of Figs. 1-4, as opposed to the (non-perturbative) mass characterizing the OPE.

The non-zero contribution to (11) arises only from the b_0 term in (9): all

other a_i and b_i terms in (9) vanish upon insertion into the Fig. 1 amplitude. Further evidence of truncation is seen in (12) and (13) through the vanishing of the $O(m^3)$ terms. There is no evidence, however, for truncation of the "non-abelian" amplitude corresponding to Fig. 4, for which a non-zero $O(m^3)$ term occurs in (14).

The failure of the Fig. 4 amplitude to truncate the OPE of (10) may be better understood by examining the self-energies associated with the Fig. 1-4 amplitudes and, in particular, how those self-energies affect the position of the quark propagator pole.

The self-energy corresponding to (14) is^{/15/}

$$\Sigma_4(p) = \frac{-ig^2 \langle \bar{q} G q \rangle}{288 p^4} \left\{ -9(1+a) \frac{(p^2 - m_p^2)}{(p^2 - m_p^2)} - \frac{18ap(m - m_p)}{p^2 - m_p^2} \right. \\ \left. - 9(5+a) [1 - m_p/p^2 + m^2/p^2 - m^3 p/p^4 + O(m^4)] \right\}. \quad (15)$$

To proceed further, it is assumed that the truncation of the $O(m^3)$ terms in (12) and (13) continues for all higher orders, consistent with results already obtained from Fig. 1 processes.^{/15/} Secondly, the alternating character of the series in the bottom line of (15) is assumed to continue, accounting for all degree-two and higher order contributions in m . This implies that the "abelian" contributions (Figs. 1 - 3) truncate after $O(m^2)$ in the OPE, whereas the non-truncating, "non-abelian" contribution (Fig. 4) generates a geometric series in m .

Under these plausible assumptions, the aggregate $O(g^2)$ mixed condensate component of the quark self-energy becomes^{/15/}

$$\Sigma(p) = \frac{-ig^2 \langle \bar{\psi} G \psi \rangle}{288 (p^2 - m_p^2)^2 (p^2 - m^2)^4} \{ E(p^2) \not{p} + F(p^2) \}. \quad (16a)$$

$$E(p^2) = [(11+6a)m_p + (47-9a)m]p^4 \\ + [(-7-10a)m_p^3 + (-96)m_p^2 m + (-15-2a)m_p m^2 + (-2+18a)m^3]p^2 \\ + [(45+9a)m_p^4 m + (7+10a)m_p^3 m^2 + (6-18a)m_p^2 m^3 + (4-4a)m_p m^4], \quad (16b)$$

$$F(p^2) = [-56+3a]p^6 + [(97+10a)m_p^2 + 4m_p m + (15-16a)m^2]p^4 \\ + [(-45-9a)m_p^4 + (-7+8a)m_p^2 m^2 - 4m_p m^3 + (-4+4a)m^4]p^2. \quad (16c)$$

Hence the $\langle \bar{\psi} G \psi \rangle$ -corrected inverse propagator may be written in the form^{/10/}

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m_p - \Sigma(p)$$

$$= [1 + \frac{ig^2 \langle \bar{\psi} \sigma G \psi \rangle E(p^2)}{288(p^2 - m_p^2)^2(p^2 - m^2)p^4}] [\not{p} - M(p^2)], \quad (17a)$$

where

$$M(p^2) = \frac{m_p - \frac{ig^2 \langle \bar{\psi} \sigma G \psi \rangle F(p^2)}{288(p^2 - m_p^2)^2(p^2 - m^2)p^4}}{1 + \frac{ig^2 \langle \bar{\psi} \sigma G \psi \rangle E(p^2)}{288(p^2 - m_p^2)^2(p^2 - m^2)p^4}} \quad (17b)$$

In order to have a self-consistent theory, the propagator pole must occur at the mass m corresponding to the $m/|p|$ expansion parameter of the non-perturbative OPE:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m^2} M(p^2) = \frac{-F(m^2)}{E(m^2)} = m. \quad (18)$$

Equations (16b) and (16c) imply that the above equation is satisfied for arbitrary "propagator mass" m_p , i.e.

$$\lim_{p^2 \rightarrow m^2} mE(p^2) = (45+9a)m^2(m^2 - m_p^2)^2 = \lim_{p^2 \rightarrow m^2} -F(p^2). \quad (19)$$

Furthermore, (19) indicates that (18) is satisfied regardless of the choice of the gauge parameter "a". These results provide strong evidence for the gauge independence of the pole position under corrections from higher dimensional condensates, as well as for the self-consistency of dynamical mass generation within OPE augmented QCD.

Quark Condensate Component of the Gluon Self-Energy

The transversality of quark condensate contributions to the gluon self-energy, as required by Slavnov-Taylor identities (ultimately gauge independence), is another field theoretic aspect of the OPE-augmented perturbative QCD which must be verified. The operator product expansion for the gluon propagator is

$$iD_{\mu\nu}^{ab}(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T(A_\mu^a(x) A_\nu^b(0)) | 0 \rangle$$

$$= C_I(p) + C_{\bar{\psi}\psi}(p) \langle \bar{\psi}\psi \rangle + C_{GG}(p) \langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle + \text{hdc}. \quad (20)$$

The $O(g^2)$ contribution to $C_{\bar{\psi}\psi}(p)$ is given by the Fig. (5) vacuum polarization graph, corresponding to the following correction to the gluon propagator for each condensing quark flavour,^{/8/}

$$\begin{aligned}
i\Delta_{\alpha\beta}^{ab}(p) &= \left(\frac{ig}{2}\right)^2 \int d^4x e^{ip \cdot x} \int d^4y \int d^4z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \\
&\left[-\frac{g_{\alpha\mu}}{k^2} + (1-a) \frac{k_\alpha k_\mu}{k^4} \right] \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (y-z)} (-i) \\
&\text{Tr}[\gamma_\mu \frac{(q+m)}{q^2-m^2} \gamma^\nu <\bar{\psi}(y)\psi(z)>_{\text{NP}}] \int \frac{d^4T}{(2\pi)^4} e^{-iT \cdot z} \left[-\frac{g_{\nu\beta}}{T^2} + (1-a) \frac{T_\nu T_\beta}{T^4} \right]. \quad (21)
\end{aligned}$$



Fig. 5. $O(g^2)$ correction to the gluon propagator through the non-perturbative vev $<\bar{\psi}(y)\psi(z)>$.

Notice that the quark propagator mass in (21) is now identified with the OPE mass m characterizing the expansion of $<\bar{\psi}(y)\psi(z)>$ in (5). This restriction is necessary to maintain transversality of the gluon self-energy. Upon substitution of (5) into (21), one can expand the quark propagator in powers of m^2/p^2 and collect the aggregate coefficients of m^{2N+1} to obtain^{/8/}

$$\Pi_{\mu\nu}^{<\bar{\psi}\psi>}(p) \equiv -\frac{4g^2}{3} <\bar{\psi}\psi> \sum_{N=0}^{\infty} m^{2N+1} \Pi_{\mu\nu}^{(N)}(p) \quad (22a)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(N)}(p) &= \int d^4(y-z) e^{ip \cdot (y-z)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (y-z)} \\
&\times \left\{ -\text{Tr}[\gamma^\mu \not{A} \gamma^\nu] \sum_{n=0}^N \frac{(-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\gamma \cdot (y-z)(y-z)^{2n}}{q^{2N-2n+2}} b_{2n+1} \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] \sum_{n=0}^N \frac{(-i)^{2n}}{(2n)!} (y-z)^{2n} \frac{a_{2n}}{q^{2N-2n+2}} \right\}, \quad (22b)
\end{aligned}$$

where a, b are given in (5b,c). For $N > 2$, (22b) may be evaluated^{/8/} to yield the following expression:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(N)}(p) &= \frac{g^{\mu\nu}}{p^{2N+2}} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N}{n} \binom{N}{n+1} \frac{1}{N} + \sum_{n=0}^{N-2} \binom{N}{n} \binom{N}{n+2} \frac{1}{(N-1)} \right\} \\
&- \frac{p^\mu p^\nu}{p^{2N+4}} \sum_{n=0}^{N-2} \frac{2(N+1)}{N(N-1)} \binom{N}{n} \binom{N}{n+2}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Upon performing the summations^{/17/} in (23) and then substituting the result back into (22a), one may obtain the $O(g^2)$ quark condensate component of the gluon self-energy:^{/8/}

$$\begin{aligned}\pi_{\mu\nu}^{<\bar{\psi}\psi>}(p) &= 8g^2 \frac{m^{<\bar{\psi}\psi>}}{3p^2} \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(2N)!(N+1)}{N!(N+2)!} \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^N \\ &\equiv \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right) \pi^{<\bar{\psi}\psi>}(p).\end{aligned}\quad (24)$$

The infinite sum in (24) is well-defined, particularly for Euclidean momenta, for which OPE's phenomenological utility is well-known. Consequently, the gluon's self-energy is manifestly transverse, providing further field-theoretic support for OPE-augmented perturbative QCD.

Further analysis of (24) has been carried out to determine the quark condensate contribution to the analytic form of the gluon propagator.^{18/} This analysis shows that severe restrictions are placed on the existence of gluon propagator singularities, a property suggestive of confinement. Contributions from higher dimensional condensates must be examined to determine whether a gluon pole actually exists.

Conclusions

Several field theoretic aspects of the OPE augmentation of QCD have been examined. Gauge independence of quark self-energies at the mass shell corresponding to the mass m (characterizing the OPE expansion parameter $m/|p|$) has been verified to all orders of the OPE for dimension 3 and 5 chiral symmetry breaking condensates.

Similarly, the necessary transversality of the quark condensate contribution to the gluon self-energy has been verified, provided that propagator masses appearing in the self-energy are equilibrated with the OPE mass parameter m .

We would like to acknowledge the support of the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and discussions with V.A. Miransky and M.D. Scadron.

Equation (11) should read

$$i\Delta S_{(1)}(p) = \frac{-g^2 8^{<\bar{\psi}\sigma G\psi>}(p+m_p) p(1-a)}{288 p^4 (p^2 - m_p^2)^2}.$$

Equations (16b) and (16c) should read

$$E(p^2) = \{(20+16a)m_p + (47-9a)m\}p^4 \\ + \{(-16-20a)m_p^3 + (-96)m_p^2m + (-24-12a)m_p^2 + (-2+18a)m^3\}p^2 \\ + \{(45+9a)m_p^4 + (16+20a)m_p^3m^2 + (6-18a)m_p^2m^3 + (4-4a)m_p^4\}$$

$$F(p^2) = [-65-7a]p^6 + \{(106+20a)m_p^2 + 4mm_p + (24-6a)m^2\}p^4 \\ + \{(-45-9a)m_p^4 + (-16-2a)m_p^2m^2 - 4m_p^3 + (-4+4a)m^4\}p^2.$$

References

- /1/ M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov; Nucl. Phys. B147, (1979) 385.
- /2/ H.D. Politzer; Nucl. Phys. B173, (1980) 13.
- /3/ V. Elias; Can. J. Phys. 64, (1986) 595.
- /4/ V. Elias, M.D. Scadron, R. Tarrach; Phys. Lett. 162B, (1985) 176.
- /5/ V.A. Fock; Phys. Z. Sowjetunion 12, (1937) 404
J. Schwinger; Particles & Fields (Addison-Wesley, N.Y., 1970).
- /6/ V. Elias, T. Steele, M.D. Scadron; U.W.O. Preprint (1987), submitted to Phys. Rev. D.
- /7/ P. Pascual & R. Tarrach; QCD Renormalization for the Practitioner (LNP #194, Springer-Verlag, Berlin, 1970).
- /8/ T.G. Steele; U.W.O. Preprint (1987), submitted to Nuc. Phys. B.
- /9/ E. Hansen; A Table of Series & Products (Prentice-Hall, 1975).
- /10/ T. Larsson; Phys. Rev. D32, (1985) 956.
- /11/ P. Pascual, E. de Rafael; Z. Phys. C12, (1982) 127.
- /12/ V. Elias, T. Steele, M.D. Scadron, R. Tarrach; Phys. Rev. D34, (1986) 3537.
(For alternate methodology see L.J. Reinders, K. Stam; Phys. Lett. 180B, (1986) 125.)
- /13/ V. Elias, M.D. Scadron; Phys. Rev. D30, (1984) 647.
V. Elias, V.A. Miransky, M.D. Scadron; U.W.O. Preprint (1987) submitted to Annals of Physics.
- /14/ V. Elias, M.D. Scadron, R. Tarrach; Phys. Lett. 173B, (1986) 184.
- /15/ V. Elias, T.G. Steele; U.W.O. Preprint (1987), submitted to Phys. Lett. B.
- /16/ The self-energies corresponding to (11)-(13), are obtained via the defining relationship $S_F(p) = (\not{p} - m_p)^{-1} + \Delta S(p) + \dots = [\not{p} - m_p - \Sigma(p)]^{-1}$.
- /17/ I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik; Table of Integrals Series & Products (Academic Press, 1980).

КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИЯХ РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ И СУПЕРСТРУН

А.Т. Филиппов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Недавнее развитие теории суперструн привело к пересмотру основных идей о соотношении между теорией релятивистских частиц и локальной квантовой теорией поля. В современном подходе (см., например, ^{/1,2/}) исходят из калибровочно-подобной формулировки теории релятивистской частицы (см. ^{/3,4/}), в которой связи, $p^2 + m^2 = 0$, $p\xi = 0$, и т.п. играют роль генераторов (супер) калибровочных преобразований (мы обозначаем грассмановы переменные греческими буквами, а бозевские — латинскими; $q^\mu(t)$ — координаты, $p^\mu(t)$ — сопряженные импульсы, $\xi^\mu(t)$ — грассмановы лоренц-векторы). Для релятивистски-инвариантного квантования по методу БФВ^{/5/} необходимо наложить на соответствующие лагранжианы множители $\ell(t)$ условия $\dot{\ell} = d\ell/dt = 0$ (грассмановым связям соответствуют грассмановы лагранжианы множители $\lambda(t)$). В лагранжиан связи вводятся членами типа $\dot{\ell}k$, $\lambda\pi$, т.е. k и π играют роль импульсов. Сокращение нефизических степеней свободы достигается дальнейшим расширением фазового пространства за счет духов Фаддеева-Попова (ФП) и использованием суперсимметрии Паризи-Сурла (см. напр. ^{/1,2/}). В этом формализме все переменные имеют одинаковый динамический статус (квантование с дуализирующей мерой в расширенном фазовом пространстве), что находит отражение и при вторичном квантовании — поля становятся функциями всех координат расширенного пространства ($q, \ell, \dots$).

С физической точки зрения дополнительные переменные, однако, неравноценны. Основную роль в описанной конструкции играют связи и соответствующие им переменные $\ell(t)$, $\lambda(t)$. Связи определяют калибровочно-подобные симметрии теории, а $\ell(t)$, $\lambda(t)$ преобразуются подобно калибровочным потенциалам. Например, в теории скалярной частицы ($0 \leq t \leq 1$)

$$L = p_\mu \dot{q}^\mu - \frac{1}{2} \ell_1(t) (p^2 + m^2), \quad \mu = 0, 1, \dots, D, \quad (1)$$

связь $g_1 = \frac{1}{2}(p^2 + m^2)$ генерирует абелевы преобразования

$$\delta p = \left[\frac{1}{2} f_1(t) (p^2 + m^2), p \right]_{P.B.} = 0, \quad \delta q = \left[f_1(t) g_1, q \right]_{P.B.} = f_1 p, \quad (2)$$

где квадратные скобки обозначают скобки Пуассона. Действие, соответствующее лагранжиану (1), инвариантно, если

$$\delta \ell_1 = \dot{f}_1, \quad f_1(0) = f_1(1) = 0. \quad (3)$$

В соответствии с (3) величина $\int_0^1 dt \ell_1(t)$ является инвариантом при калибровочных преобразованиях (2), (3) (аналог параметра Тейхмюллера в теории струны).

Существование калибровочных инвариантов и динамическое равноправие переменных $\ell(t)$, $\lambda(t)$ с основными переменными позволяет интерпретировать эти функции как настоящие калибровочные потенциалы. Для полного обоснования этой точки зрения необходимо, однако, найти лагранжиан с определенной глобальной симметрией, локализация которого приводила бы к лагранжиану (I), который легко переписать в явно калибровочной форме^{/6/}

$$L = \frac{1}{2} \bar{\Psi} C (\partial_t - A) \Psi, \quad (4)$$

$$\Psi^M = \begin{pmatrix} p^M \\ q^M \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \ell_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Преобразования (2), (3) также легко представить в стандартной форме

$$\delta \Psi = F \Psi, \quad \delta A = \dot{F} + (FA - AF) \equiv \dot{F} + [F, A], \quad (6)$$

где матрица F получается из A заменой $\ell(t)$ на $f(t)$. В работе^{/6/} было показано, что (4) получается с помощью стандартной процедуры локализации линейных канонических симметрий простейшего (рудинтарного) лагранжиана

$$L_0 = \frac{1}{2} \bar{\Psi} C (\partial_t - H_0) \Psi + \Delta_B, \quad (7)$$

где $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_B = \frac{1}{2} (pq)^*.$

Лагранжиан (7) есть простейшая гамильтониан-инвариантная билинейная форма $L_0 = \frac{1}{2} \dot{q}^2$, записанная в формализме первого порядка. Граничный член Δ_B существен лишь для получения граничных условий на параметр $f(t)$, этот член необходимо дописать и в (4), обычно мы его опускаем.

В работе^{/6/} процедура локализации линейных канонических преобразований была обобщена. Во-первых, было отмечено, что при $m = 0$ лагранжиан (I) допускает глобальную симметрию вейлевского типа

$$\delta p = -f_2 p, \quad \delta q = f_2 q, \quad \delta \ell_1 = 2 f_2 \ell_1,$$

которую также можно локализовать. Новый калибровочный лагранжиан и преобразования переменных определяются формулами (4), (6), в которых

$$F = \begin{pmatrix} -f_2 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -l_2 & 0 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}.$$

В этой теории масса частицы запрещена неабелевым характером преобразования функций

$$\delta l_1 = \dot{f}_1 + 2f_2 l_1 - 2f_1 l_2, \quad \delta l_2 = \dot{f}_2.$$

С другой стороны, в^{6/} было показано, что принцип локализации применим к суперканоническим симметриям лагранжианов, содержащих грассмановы переменные и описывающих частицы со спином (см.^{7,8,3,4/}). При этом естественно и просто получаются общие локально суперсимметричные теории частиц (одномерные супергравитации) с суперкоординатами (p^μ, q^μ, ξ^μ) , где $k = 1, \dots, K$. При $K = 1, 2$ такие теории были получены весьма сложным способом в^{3/}, при любых K — более простым способом в работе^{9/}. Мы обсудим эти обобщения позже, а сначала рассмотрим квантование на простом примере бесспиновой частицы.

Для квантования, как известно, необходимо зафиксировать калибровку, но в то же время позаботиться о том, чтобы физические результаты были калибровочно-инвариантными. Один из способов квантования, как и в теории струны, состоит в том, что все нефизические переменные исключаются. Это неизбежно приводит к потере явной лоренц-инвариантности. Для ее сохранения введем, как в любой калибровочной теории, духи Фаддеева-Попова. Сделаем это, пользуясь формализмом Баталина-Вилковыского — Фрадкина (БВФ). У нас есть одна связь, и нужно ввести одно калибровочное условие. Достаточно общее условие, фиксирующее калибровку, можно записать в виде

$$\dot{l} - F(p, q, l) = 0. \quad (8)$$

Заметим, что самое простое условие получается при $F \equiv 0$. Это, конечно, дает $l = \text{const}$, однако взять полностью фиксированное значение l , скажем $l = 1$, мы не можем из-за требования сохранения $l^{(0)} = \int dt l(t)$. Калибровочное условие введем в лагранжиан с помощью лагранжева множителя $k(t)$. Сверх этого введем грассмановы переменные $p, \bar{p}, q, \bar{q}$. Все переменные изобразим с помощью "кубика духов":



$$Q_{gh}(p, k, q, l) = 0, \quad Q_{gh}(p, \bar{q}) = +1, \text{ духи} \\ Q_{gh}(\bar{p}, \bar{q}) = -1, \text{ антидухи}$$

(Q_{gh} - аддитивный "духовый" заряд). В верхней части - исходные динамические переменные реального фазового пространства. Под ними - вспомогательные переменные расширенного фазового пространства БВФ. На левой грани - обобщенные импульсы, на правой обобщенные координаты. Обозначения напоминают об этом (пары $p_q, p_{\bar{q}}, \bar{p}_{\bar{q}}, k_{\bar{q}}$). Лагранжиан (I) обладает очевидной симметрией относительно преобразований

$$\delta p = 0, \quad \delta q = i\varepsilon \bar{p}, \quad \varepsilon \bar{p} = i\varepsilon \bar{q}, \quad (9)$$

которые получаются из (2) заменой $f_i = i\varepsilon \bar{q}$. При этом ε - постоянный грассманов параметр, $\bar{\varepsilon} = 0$, $\varepsilon^2 = 0$, который антикоммутирует с $\bar{q}$ и остальными грассмановыми переменными. Множитель $i\varepsilon \bar{q}$ взят для того, чтобы параметр $i\varepsilon \bar{q}$ был эрмитовым. При фиксации калибровки к лагранжиану добавляется член $k(\bar{q} - F)$. Новый лагранжиан уже неинвариантен относительно преобразований (9); найдем лагранжиан, который инвариантен при преобразованиях (9), дополненных преобразованиями других переменных.

Общий метод конструирования такого лагранжиана основан на определении БРС-заряда Ω . Чтобы определить его на классическом уровне, определим суперскобки Пуассона, которые при квантовании перейдут в коммутаторы или антикоммутаторы

$$\{X, Y\} \rightarrow i[X, Y] \quad (10)$$

для произвольных функций динамических переменных $q_i = (p, p, \bar{p}, k)$ и $Q_i = (q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{p})$. Положим $\varepsilon_X = 1/0$, если X есть ферми/бозе-переменная, и определим суперскобки Пуассона (СП)

$$\{X, Y\} = \sum_i \left(\frac{\partial^R X}{\partial q_i} \frac{\partial^L Y}{\partial Q_i} - (-)^{\varepsilon_X \varepsilon_Y} \frac{\partial^R Y}{\partial q_i} \frac{\partial^L X}{\partial Q_i} \right). \quad (11)$$

Это определение для бозе-переменных совпадает с обычным. Оно удовлетворяет коммутационному условию

$$\{X, Y\} = -(-)^{\varepsilon_X \varepsilon_Y} \{Y, X\} \quad (12)$$

и супертождеству Якоби

$$\begin{aligned} \{\varepsilon X_1, X_2\}, X_3\} (-)^{\varepsilon_1 \varepsilon_3} + \{\varepsilon X_2, X_3\}, X_1\} (-)^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} + \\ + \{\varepsilon X_3, X_1\}, X_2\} (-)^{\varepsilon_3 \varepsilon_1} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Полезно при вычислениях использовать соотношение

$$\{X, YZ\} = \{X, Y\}Z + (-)^{\varepsilon_X \varepsilon_Y} Y\{X, Z\}. \quad (14)$$

С помощью написанных определений легко получить СП для основных динамических переменных:

$$\{P_\mu, q^\nu\} = \delta_\mu^\nu, \quad \{k, l\} = 1, \quad \{\bar{p}, \bar{\epsilon}\} = 1, \quad \{p, \bar{\epsilon}\} = 1. \quad (15)$$

Остальные ССП равны нулю. Иными словами,

$$\{\mathcal{P}_i, Q_i\} = \delta_{ij}, \quad \text{где} \quad \mathcal{P}_i = (P_\mu, p, \bar{p}, k), \quad (16)$$

$$Q_i = (q^\mu, \bar{\epsilon}, \epsilon, l).$$

БРС-заряд, или генератор духовой симметрии, определяется так, чтобы он порождал преобразования (9), имел $Q_{gh} = +1$ и удовлетворял условию нильпотентности

$$\{\Omega, \Omega\} = 0. \quad (17)$$

Из второго условия следует, что Ω линейно зависит от p и $\bar{\epsilon}$. Первое требует, чтобы в Ω содержался член $\epsilon(p^2 + m^2)$. Тогда преобразование, которое в общем виде можно определить как

$$\delta X = \frac{i}{2} \epsilon \epsilon \Omega, X\}, \quad \Omega^+ = \Omega, \quad \bar{\epsilon}^+ = \bar{\epsilon}, \quad (\epsilon \Omega)^+ = -(\epsilon \Omega), \quad (18)$$

дает $\delta p = 0$, $\delta q = i \epsilon \bar{\epsilon} p$. Чтобы было $\delta l \neq 0$, в Ω должен быть член, линейный по k . Естественно поэтому положить

$$\Omega = i k p + \epsilon(p^2 + m^2). \quad (19)$$

При этом $\delta l = \frac{i}{2} \epsilon p$, что не совпадает буквально с (9). Мы, однако, ожидаем, что обобщенный импульс будет пропорционален $\bar{\epsilon}$. Сейчас мы увидим это, но сначала доведем дело до конца.

Легко видеть, что для (19) условие $\{\Omega, \Omega\} = 0$ выполнено. Это значит, что преобразование (18) нильпотентно. Пользуясь тождеством Якоби и (12), отсюда можно вывести, что

$$\delta \{\Omega, X\} = 0 \quad (20)$$

для любой функции переменных $\mathcal{P}$ и Q . В частности, если в качестве гамильтониана взять

$$\mathcal{H} = \epsilon \Omega, \bar{\Omega}_1\}, \quad \bar{\Omega}_1^+ = -\bar{\Omega}_1, \quad (21)$$

где $\bar{\Omega}_1$ имеет $Q_{gh} = -1$, то этот гамильтониан будет инвариантным при любом выборе $\bar{\Omega}_1$, т.е.

$$\{\Omega, \mathcal{H}\} = 0. \quad (22)$$

Конструкция действия теперь ясна:

$$S = \int_0^1 dt [\dot{q}p + \dot{l}k + \dot{\sigma}\bar{p} + \dot{\bar{\sigma}}p - \mathcal{H}] = \int_0^1 dt (\dot{Q}\mathcal{P} - \mathcal{H}), \quad (23)$$

где $\mathcal{H}$ определяется в (21). Заметим, что для эрмитовости действия необходима антиэрмитовость антикоммутирующих импульсов $p, \bar{p}$. Инвариантность кинетической части действия из всего предыдущего не очевидна. Чтобы проверить ее, найдем преобразование всех переменных

$$\delta q = i\epsilon \sigma p, \quad \delta l = -\frac{1}{2}\epsilon p, \quad \delta \bar{p} = \frac{1}{2}\epsilon(p^2 + m^2), \quad \delta \sigma = -\frac{1}{2}\epsilon k. \quad (24)$$

Остальные переменные не получают приращений. Вычислив вариацию действия, находим

$$\delta S = \frac{1}{2}\epsilon [\sigma(p^2 - m^2)]_0^1, \quad (25)$$

откуда следуют граничные условия для $\sigma(\tau)$:

$$\sigma(0) = \sigma(1) = 0, \quad (26)$$

соответствующие граничным условиям для $f(t)$. До сих пор вид гамильтониана не использовался. Простейший получится, если взять

$$\bar{\mathcal{Q}}_1 = \frac{1}{2}l\bar{p}; \quad \mathcal{H} = \{\Omega, \bar{\mathcal{Q}}_1\} = \frac{1}{2}p\bar{p} + \frac{1}{2}l(p^2 + m^2). \quad (27)$$

Действие тогда имеет вид

$$S = \int_0^1 dt [\dot{q}p + \dot{l}k + \dot{\sigma}\bar{p} + \dot{\bar{\sigma}}p - \frac{1}{2}p\bar{p} - \frac{1}{2}l(p^2 + m^2)]. \quad (28)$$

Можно исключить p и $\bar{p}$, пользуясь уравнениями

$$p = -2i\dot{\sigma}, \quad \bar{p} = 2i\dot{\bar{\sigma}}, \quad (29)$$

и получить обычный лагранжиан с ФП - духами и калибровочным условием $\dot{l} = 0$.

Может возникнуть вопрос, почему выбран данный порядок расстановки $\dot{\sigma}p, \dot{\bar{\sigma}}\bar{p}$, а не противоположный $p\dot{\bar{\sigma}}, \bar{p}\dot{\sigma}$. Этот порядок связан с определением ССП. При таком упорядочении гамильтоновы уравнения движения имеют стандартный вид

$$\dot{\bar{p}} = \{\mathcal{H}, \bar{p}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}, \quad \dot{\sigma} = \{\mathcal{H}, \sigma\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \dots$$

Кроме того, преобразование (18), (19) дает для q, p и l правильное выражение (9). Может, конечно, возникнуть и более общий вопрос: а зачем все это нужно? Нельзя ли обойтись без духов и лишних переменных? Конечно, можно, однако приведенная здесь процедура построения обобщенного фазового пространства очень облегчает жизнь при решении более трудных задач, до предела автоматизируя процедуру квантования. В дей-

ствии (28) все переменные совершенно независимы, и мы можем выполнить квантование, просто заменив ССП на коммутаторы или антикоммутаторы, умноженные на $\hat{i}$. Для отбора физических состояний достаточно наложить условия

$$\hat{\Omega} | \text{физ.} \rangle = 0,$$

где $\hat{\Omega}$ — оператор, соответствующий классической функции Ω . Условие $\{ \Omega, \Omega \} = 0$ переходит в квантовом случае в $\hat{\Omega}^2 = 0$. При этом возникает проблема упорядочения операторов в $\hat{\Omega}$. В нашем простом случае эта проблема решается тривиально, однако в более общем случае из $\{ \Omega, \Omega \} = 0$ не обязательно следует, что $\hat{\Omega}^2 = 0$. В частности, в теории бозонной струны условие $\hat{\Omega}^2 = 0$ выполнено лишь при $D = 26$. Нильпотентность оператора $\hat{\Omega}$ имеет, таким образом, фундаментальное значение. Только при условии нильпотентности можно последовательно исключить все нефизические степени свободы при сохранении унитарности.

Покажем, как вычислить пропагатор частицы. Стандартное выражение для пропагатора на языке континуальных интегралов можно записать сразу:

$$G(q_f, q_i) = \int \mathcal{D}q^\mu \mathcal{D}p^\mu \mathcal{D}l \mathcal{D}k \mathcal{D}\varepsilon \mathcal{D}\bar{p} \mathcal{D}\bar{\varepsilon} \mathcal{D}\rho \, e^{iS}. \quad (30)$$

Интегрирование проводится по всем функциям, удовлетворяющим необходимым граничным условиям. Мы их не обсуждали. Заметим лишь, что $q(0) = q_i$, $q(1) = q_f$ и $\dot{p}(0) = \dot{p}(1) = 0$, и что граничные условия не должны нарушать БРС-инвариантность. Для вычисления интеграла удобно разложить все переменные в ряды Фурье

$$\begin{aligned} q^\mu(t) &= q_i^\mu + (q_f^\mu - q_i^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^\mu \sin(\pi n t), \\ l(t) &= l_0 + \sum_{n=1}^{\infty} l_n \sin(\pi n t), \end{aligned} \quad (31)$$

и т.д.

Все интегралы вычисляются тривиально, и получаем

$$G(q_f, q_i) = c \int d^D p_0 \int_0^1 dl_0 \exp \left\{ -i p_0^\mu (q_f - q_i)_\mu - \frac{i}{2} l_0 (p_0^2 + m^2) \right\}. \quad (32)$$

Пологая $m^2 \rightarrow m^2 - i0$, находим стандартное выражение для пропагатора

$$G(x) = \int d^D p \, e^{-ipx} (p^2 + m^2 - i0)^{-1}, \quad x = q_f - q_i. \quad (33)$$

Нетрудно понять, как получить радиационные поправки. Например,

$$x_i \quad x_1 \quad x_2 \quad x_f \quad + \quad x_i \quad x_1 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_f \quad + \quad \dots$$

При этом нужно договориться, что вершинам диаграммы соответствует один и тот же фактор g . Ниоткуда, однако, не следует, что в вершинах встречается только три частицы, или, что вершинный фактор не должен содержать производных по x . Внутри самой теории не возникает существенных ограничений на вид взаимодействия (требования сходимости или перенормируемости, которые сильно ограничивают выбор вершин, не связаны с основами теории, являются внешними). В теории струн, в отличие от этого, вершины определяются почти однозначно, но пока достаточно простую конструкцию вершины получить не удалось.

Понятие о БРС-заряде обобщается на неабелевы симметрии. Для его определения достаточно знать коммутационные соотношения между генераторами калибровочной группы (алгебры связей)

$$[L_i, L_k] = f_{ij}^k L_k \quad (34)$$

(ради простоты ограничимся обычными коммутаторами, нетрудно обобщить построение на случай супералгебры). Введем духи $\bar{\psi}_i$ и антидухи $\bar{\psi}_i$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\{\psi^i, \bar{\psi}_j\} = \delta_j^i, \quad (35)$$

где $\bar{\psi}_i$ будем теперь считать эрмитовыми, $\bar{\psi}_i^+ = \psi_i$. Нетрудно показать, что оператор

$$\Omega = L_i \psi^i - \frac{1}{2} f_{ij}^k \bar{\psi}_k \psi^i \psi^j \quad (36)$$

нильпотентен (при доказательстве надо использовать тождество Якоби для f_{ij}^k). Эти определения и результаты не зависят от динамики. Если у нас есть желание пользоваться расширенным фазовым пространством и общими калибровочными условиями типа (18), это легко сделать, введя переменные $k_i, l^i, \bar{\psi}_i, \psi^i$, и добавив к Ω член $i k_i p^i$. Напомним, что для поднятия и опускания групповых индексов можно использовать стандартную групповую метрику

$$g_{ij} = f_{in}^m f_{jm}^n. \quad (37)$$

Для теории фермионной струны нужна более общая конструкция БВФ. Пусть L_i — связи (генераторы симметрий), удовлетворяющие коммутационным или антикоммутационным соотношениям

$$[L_i, L_j] = f_{ij}^k L_k. \quad (38)$$

Говорят, что L_i образуют градуированную алгебру Ли, если каждому генератору L_i соответствует число $g_i = g(L_i) = 0$ или 1, причем

$$g([L_i, L_j]) = g_i + g_j \quad \text{и}$$

$$[L_i, L_j] = L_i L_j - (-1)^{g_i g_j} L_j L_i, \quad (39)$$

$$[L_i, L_j] = -(-1)^{g_i g_j} [L_j, L_i]. \quad (40)$$

Легко получить тождество Якоби

$$\sum_{(\text{перест.})} (-1)^{g_i g_j} [L_i, [L_j, L_k]] = 0 \quad (41)$$

и аналог соотношения (14). Короче, все свойства операции (38) в точности соответствуют свойствам суперскобок Пуассона. На равных основаниях можно пользоваться теми и другими. Пусть гамильтониан имеет вид линейной комбинации связей

$$\mathcal{H}_0 = \epsilon^i L_i. \quad (42)$$

Тогда можно построить БРС - заряд

$$\Omega = \epsilon^i L_i - \frac{1}{2} (-1)^{g_i} f_{ij}^k \bar{p}_k \epsilon^i \epsilon^j, \quad \Omega^2 = 0, \quad (43)$$

и БРС - инвариантный гамильтониан

$$\mathcal{H} = [\Omega, \bar{\Omega}_1], \quad [\mathcal{H}, \Omega] = 0. \quad (44)$$

Эрмитовы операторы $\epsilon^i, \bar{p}_j$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\epsilon^i, \bar{p}_j] = \delta_j^i,$$

т.е. $\epsilon, \bar{p}$ - фермионы, если $g_i = 0$, и бозоны, если $g_i = 1$. Как указано выше, эту конструкцию можно расширить, добавив переменные $\bar{\epsilon}_i, p_i$.

Того, что сказано о духах и БРС - симметрии, вполне достаточно для технических приложений в теории струн и в калибровочных теориях поля. В частности, можно проквантовать описанную выше неабелеву калибровочную теорию безмассовых скалярных частиц. Заметим, что взаимодействие таких частиц не может быть произвольным, если потребовать сохранения неабелевой калибровочной симметрии. Ввиду возможности появления аномалий, такая теория заслуживает отдельного рассмотрения. Отметим также, что последовательная квантовая трактовка калибровочных теорий частиц требует перехода к квантовой теории поля. Мы не мо-

жем останавливаться на этой проблеме. Подчеркнем лишь, что наиболее последовательная релятивистски-инвариантная конструкция использует Φ -духи, расширенное фазовое пространство БФВ, суперсимметрию БРСТ (Бекки-Рюз-Стора-Тюттина) и соответствующий заряд Ω , а также механизм Паризи-Сурла, обеспечивающий сокращение нефизических вкладов (HC-механизм). Кратко суммируем основные ссылки в диаграмме

$$\begin{array}{c} B \cdots P \\ \Phi - \Pi = \zeta \\ B \quad T \end{array}$$

и рекомендуем читателю обратиться к работам [1,2,4,5,10-12]. Мы же перейдем теперь к другим калибровочным теориям частиц.

В случае частиц со спином рудиментарный лагранжиан возьмем в виде

$$L_0 = p\dot{q} - \frac{i}{2} \xi_k \dot{\xi}_k - \frac{1}{2} p^2. \quad (45)$$

Определяя $\bar{\Psi} = (p, q, \xi_1, \dots, \xi_K)$, перепишем (45) в стандартной форме (7) и найдем все канонические симметрии. Они определяются суперматрицей

$$F = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ i\varphi_1 & \dots & i\varphi_K \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \varphi_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_K & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \varphi_{ik} \end{matrix} \end{array} \right), \quad (46)$$

где $\varphi_{ik} = -\varphi_{ki}$. Для локализации этих преобразований построим матрицу A заменой в F параметров $f \rightarrow l$, $\varphi_i \rightarrow \lambda_i$, $\varphi_{ik} \rightarrow l_{ik}$. Калибровочно-инвариантный лагранжиан (4) в обычных переменных имеет вид

$$L = p\dot{q} - \frac{i}{2} \xi_k \dot{\xi}_k - \frac{1}{2} l p^2 - i\lambda_j (p \xi_j) + \frac{i}{2} \xi_i l_{ik} \xi_k. \quad (47)$$

Эта теория (одномерная супергравитация с K суперсимметриями) описывает частицы со спином $K/2$ и впервые была получена в [3] (см. также [4,9]).

Аналогично можно получить теорию струн. Возьмем в качестве рудиментарного лагранжиана $(x = x^\mu(t, s), p = p^\mu(t, s), x' = \frac{\partial x}{\partial s}, \dots)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x'^2) = p\dot{x} - \frac{1}{2}(p^2 + x'^2). \quad (48)$$

Не представляет труда найти линейные симметрии этого лагранжиана

$$\delta p = (f_1 p + f_2 x')', \quad \delta x = f_2 p + f_1 x'. \quad (49)$$

Пологая $\bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \equiv (p, x)$, запишем эти преобразования в виде ($\partial \equiv \partial/\partial z$)

$$\delta \bar{\Psi} = \partial_+ F \partial_-, \quad \partial_+ \equiv \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_- \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$F \equiv \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Пока f_1 и f_2 рассматриваются как параметры, не зависящие от t и z , указанный в (49) и (50) порядок расстановки производной ∂ несущественен. Чтобы зафиксировать его в том случае, когда f_1 и f_2 — функции t и z , наложим на операции δ групповое условие в виде требования замыкания двух последовательных преобразований: коммутатор преобразований δ и $\bar{\delta}$, соответствующих функциям f_1, f_2 и $\bar{f}_1, \bar{f}_2$, должен представлять собой преобразование того же вида. Для (50) легко показать, что

$$[\delta, \bar{\delta}] = \partial_+ F_{[\delta, \bar{\delta}]} \partial_-, \quad F_{[\delta, \bar{\delta}]} = F_{\bar{\delta}} F'_\delta - F_\delta F'_{\bar{\delta}}, \quad (52)$$

причем матрица $F_{[\delta, \bar{\delta}]}$ имеет такой же вид, как (51):

$$F_{[\delta, \bar{\delta}]} = \begin{pmatrix} w[\bar{f}_1, f_1] + w[\bar{f}_2, f_2] & \\ w[\bar{f}_1, f_2] + w[\bar{f}_2, f_1] & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad w[a, b] \equiv a b' - b a'. \quad (53)$$

При другой расстановке оператора ∂ в (49) алгебра преобразований δ не замыкается.

Естественно ввести калибровочный потенциал

$$A \equiv \partial_+ A \partial_-, \quad A \equiv \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Калибровочно-инвариантный лагранжиан и калибровочные преобразования записываются теперь в компактном виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} C (\partial_+ + A) \Psi, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$\delta A = \dot{\mathcal{F}} - [\mathcal{F}, A], \quad \mathcal{F} \equiv \partial_+ F \partial_-. \quad (56)$$

Лагранжиан (55) можно переписать в обычной форме

$$\mathcal{L} = p \dot{x} + l_1(p x') + \frac{1}{2} l_2(p^2 + x'^2). \quad (57)$$

Совершенно аналогичный подход можно применить для получения лагранжиана релятивистской фермионной струны из рудиментарного лагранжиана

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 - X'^2) + \frac{i}{2} \left(\bar{\xi} \dot{\xi} + \bar{\xi} \epsilon_a \xi' \right), \quad (58)$$

где ξ — двухкомпонентные грассмановы векторы ξ_a^M , $a = 1, 2$ ($M = 1, \dots, D$). Локализация (супер) симметрий этого лагранжиана дает струну Неве-Шварца-Рамона^{/13/}.

Сделанные наблюдения^{/6/} можно сформулировать в виде весьма общего принципа локализации канонических симметрий. Здесь мы приведем достаточно общую формулировку этого принципа и получим с его помощью релятивистские калибровочные теории N частиц, связанных гармоническими силами. Эти модели могут быть использованы для описания составных адронов, струн мембран и т.д.

Рассмотрим весьма общий рудиментарный лагранжиан ($i = 1, \dots, N$)

$$\mathcal{L}_0 = g_{\mu\nu} p_i^M \dot{q}_i^\nu - \frac{i}{2} h_{ab} \bar{\xi}^a \dot{\xi}^b - \mathcal{H}_0(p, q, \xi). \quad (59)$$

Постоянные матрицы $g_{\mu\nu}$ и h_{ab} можно привести к диагональной форме линейным преобразованием. Отбросив переменные, дающие нулевые диагональные элементы, получим $g_{\mu\nu} = (-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$. Можно показать, что последовательное квантование лагранжиана (I) и других лагранжианов, рассмотренных в^{/6,13/}, возможно лишь в метрике Минковского, т.е. $g_{\mu\nu} = (-1, +1, \dots, +1)$; в этом смысле из калибровочного принципа вытекает релятивистская инвариантность (при квантовании можно пользоваться методом Дирака^{/3,7-9/} или более современными методами^{/5,4/}). В дальнейшем здесь используется метрика Минковского, а индексы μ и ν опускаются. В выборе грассмановых переменных имеется значительный произвол, которым можно воспользоваться для описания спиновых и "внутренних" степеней свободы частиц (например, добавление к (I) грассманова члена $-\frac{i}{2} \bar{\xi}^M \dot{\xi}_M$ позволяет описать безмассовую частицу со спином 1/2; если добавить еще один член $-\frac{i}{2} \bar{\xi}^D \dot{\xi}_D$, то получим описание дираковской частицы). Лагранжиан (59) легко переписать в форме (7). Его глобальные суперканонические симметрии, $\delta\psi = F(\xi, q)\psi$, определяются условиями

$$F^T C + C F = 0, \quad [F, H_0] = F H_0 - H_0 F = 0 \quad (60)$$

(заметим, что транспонирование суперматрицы F определено так, что $(F\psi)^T = \psi^T F^T$, с учетом антикоммутативности грассмановых величин).

Лагранжиан, инвариантный при локальных преобразованиях $F(f(t), \varphi(t))$, можно записать в виде (4), где суперматрица $A(l, \lambda)$ получается из $F(f, \varphi)$ заменой $f \rightarrow l$, $\varphi \rightarrow \lambda$, а калибровочные преобразования A определяются общим выражением (6). Для определения граничных условий на параметры $f(t)$ и $\varphi(t)$ необходимо учесть член Δ_B . Это завершает формулировку принципа локализации.

Для практического определения группы симметрии рудиментарного лагранжиана и построения калибровочно-инвариантной теории часто удобнее пользоваться не суперматрицами F , а генератором $\mathcal{Y}$ суперканонических преобразований $\delta X = [\mathcal{Y}, X]_{P, B}$:

$$\mathcal{Y} = \sum_a f_a g_a + \sum_\alpha \varphi_\alpha \delta_\alpha, \quad (61)$$

$$\delta p = -\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial q}, \quad \delta q = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial p}, \quad \delta \xi = i \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \xi},$$

где производная по грассмановой переменной берется слева. При преобразованиях симметрии H_0 не меняется, т.е. $[\mathcal{Y}, H_0]_{P, B} = 0$, а лагранжиан (8) получает приращение

$$\delta L_0 = \frac{d}{dt} \left[p \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial p} + \frac{1}{2} \xi \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \xi} - \mathcal{Y} \right] + \dot{f} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial f} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \varphi}.$$

Первый член определяет граничные условия на $f(t)$, $\varphi(t)$, а остальные члены компенсируются калибровочной добавкой

$$-\frac{1}{2} \bar{\Psi} C A \Psi = -\sum_a l_a(t) g_a(p, q, \xi) - \sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \delta_\alpha(p, q, \xi), \quad (62)$$

где $\bar{\Psi} \equiv (p_i, q_i, \xi_\alpha)$. Вид преобразований калибровочных функций можно определить либо с помощью общей формулы (6), либо непосредственно из требования инвариантности калибровочного лагранжиана, используя замкнутость алгебры генераторов g_a, δ_α относительно скобок Пуассона.

Применим теперь эту конструкцию для построения релятивистской калибровочной теории N частиц, связанных линейными (гармоническими силами). Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением бесспиновых частиц. Тогда рудиментарный лагранжиан можно взять в виде

$$L_0 = p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} p_i p_i - \frac{1}{4} v_{ij} (q_i - q_j)^2, \quad v_{ij} = v_{ji}; \quad v_{ii} = 0, \quad (63)$$

Общее линейное каноническое преобразование определяется генератором

$$y = \frac{1}{2} a_{ij} p_i p_j + b_{ij} p_i q_j + \frac{1}{2} c_{ij} q_i q_j \equiv \frac{1}{2} \Psi \begin{pmatrix} a & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \Psi, \quad (64)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$ (напомним, что мы не рассматриваем лоренцевых преобразований, и все индексы μ, ν свернуты). Нетрудно убедиться, что лагранжиан (63) инвариантен относительно преобразований (61), которые также можно записать в виде $\delta \Psi = c^{-1} \partial y / \partial \Psi$, если

$$[V, a] = 0 = [V, b], \quad b^T = -b, \quad c = -Va, \quad (65)$$

где $N \times N$ матрица V имеет вид

$$V_{ii} = -\sum_{j=1}^N v_{ij}, \quad V_{ij} = v_{ij}, \quad i \neq j. \quad (66)$$

Легко проверить, что условия (65) оставляют в y не менее чем N коммутирующих генераторов, построенных из билинейных лоренцевых инвариантов $p_i p_j$, $p_i q_j$ и $q_i q_j$. В калибровочной теории этого всегда достаточно для исключения временных компонент координат и импульсов ($\geq N$ связей плюс такое же число калибровочных условий).

Таким образом, физическая система, описываемая калибровочным лагранжианом, получаемым из (63), определяется параметрами v_{ij} . Если $v_{ij} \equiv v_0$ при всех i, j , то получаем систему N тождественных частиц, попарно связанных одинаковыми гармоническими силами. Калибровочная группа при этом есть $T_1 \otimes U_1 \otimes SU_{N-1}$. Это можно показать, используя общие формулы. Однако в этом случае более быстро ведет к цели выбор других канонических координат. Введем координату и импульс центра масс частиц

$$Q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum q_i, \quad \mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum p_i,$$

а остальные координаты выберем так, чтобы лагранжиан принял диагональную форму ($i = 1, \dots, N-1$):

$$L_0 = \mathcal{P} \dot{Q} - \frac{1}{2} \mathcal{P}^2 + z_i \dot{y}_i - \frac{1}{2} z_i z_i - \frac{1}{2} y_i y_i \quad (67)$$

(мы выбрали нормировку y_i и t таким образом, чтобы убрать зависимость лагранжиана от v_0). Приложив нашу общую конструкцию, легко получить калибровочный лагранжиан

$$L = \mathcal{P}\dot{Q} + z_i \dot{y}_i - \frac{1}{2} l_0 (\mathcal{P}^2 + M^2) - \frac{1}{2} l_1 (z_i z_i + y_i y_i - \mathcal{P}^2 - m^2) - \frac{1}{2} l_{ij}^3 (z_i z_j + y_i y_j) - \frac{1}{2} l_{ij}^a (z_i y_j - z_j y_i), \quad (68)$$

где

$$l_{ij}^3 = l_{ji}^3, \quad \sum_{i=1}^{N-1} l_{ii}^3 = 0, \quad l_{ij}^a = -l_{ji}^a.$$

Здесь генератор при l_0 порождает трансляции T_1 , генератор при l_1 порождает алгебру группы U_1 , а остальные соответствуют алгебре SU_{N-1} . При этом набор генераторов при l_{ii}^3 порождает подалгебру Картана в алгебре SU_{N-1} . Заметим, что мы воспользовались абелевым характером генераторов T_1 и U_1 , добавив в них массовые константы M^2 и m^2 , и вычленили в генераторе U_1 член $-\mathcal{P}^2$, коммутирующий со всеми генераторами. Если не все параметры l_{ij} одинаковы, т.е. взаимодействия не тождественны, группа SU_{N-1} разрушается. Заметим, что случай $N = 2$ получается из (68), если положить $z_i = y_i = 0$, $i \geq 2$, и оставить только первые два генератора, т.е. калибровочная группа есть $T_1 \otimes U_1$.

Для квантования полученной калибровочной теории наиболее естественно воспользоваться методами, описанными в начале этого доклада. Можно надеяться, что применение методов, развитых в [1, 2], позволит не только построить релятивистскую квантовую теорию невзаимодействующих составных частиц, но и получить эффективную квантовую теорию поля, описывающую их взаимодействия.

Чтобы получить теорию дискретной струны, т.е. линейной цепочки частиц, связанных гармоническими силами, достаточно взять $U_{ij} = \delta_{i-j,1}$ для открытой струны и $U_{ij} = \delta_{i-j,1} + \delta_{iN} \delta_{j1} + \delta_{iN} \delta_{jN}$ — для замкнутой струны и воспользоваться общей конструкцией, описанной выше. Подробное изложение теории дискретных струн будет опубликовано отдельно. Здесь мы ограничимся лишь подсчетом числа генераторов калибровочной группы. Уравнения для b_{ij} легко решаются. Для открытой струны $b_{ij} \equiv 0$, а для замкнутой из условия $[v, b] = 0$ следует, что

$$b_{ij} = b_{j-i}, \quad i < j; \quad b_{ij} = b_{N-i-j}, \quad i > j.$$

Вместе с условием антисимметрии b_{ij} это оставляет $[(N-1)/2]$ параметров $b_1, \dots, b_{[(N-1)/2]}$, где скобки обозначают целую часть числа. Наиболее сложны уравнения для a_{ij} . Для открытой струны имеется N независимых параметров a_{1i} , т.к.

$$a_{ij} = \sum_{l=j-i+1}^{j+i-1} a_{1l} (-1)^{l-j+i-1}, \quad i \leq j \leq N-i+1;$$

$$a_{ij} = a_{N-j+1, N-i+1}, \quad i+j > N+1.$$

В случае замкнутой струны уравнения $[V, a] = 0$ довольно неприятны. Легко, однако, подсчитать, что число независимых параметров a_{ij} равно $[(3N-1)/2]$. Полное число генераторов калибровочной группы для замкнутой струны зависит от четности N и равно:

$$2N-2, \quad N - \text{четно}; \quad 2N-1, \quad N - \text{нечетно}.$$

Эти генераторы соответствуют генераторам алгебры Вирасоро для континуальных струн. Мы не будем приводить их явные выражения (замкнутая "струна" при $N = 3$ описывается лагранжианом (68)).

В заключение отметим возможные обобщения и приложения полученных результатов. С помощью грассмановых переменных можно описать связанные состояния N частиц со спином и внутренними степенями свободы, а также построить соответствующие теории различных типов дискретных струн. Не представляет принципиальных трудностей компактификация части степеней свободы на торы или орбифорды. Обобщенную таким образом теорию связанных состояний N частиц можно было бы попытаться применить для описания адронов, а теорию дискретных суперструн — для приближенного описания безмассовых возбуждений в реалистических моделях суперструн. Не исключено, что теория поля дискретных струн окажется в некоторых отношениях проще, чем теория континуальных струн. Наконец, предложенную схему в принципе можно применить к построению других теорий, например, дискретных мембран (плоские решетки частиц с взаимодействием ближайших соседей). Однако в этом случае найти калибровочную группу, по-видимому, значительно труднее, чем в рассмотренных нами моделях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Siegel W. - Phys.Lett., 1985, 151B, p.391;
Siegel W., Zwiebach B. - Nucl.Phys., 1987, B282, p. 125.
2. Neveu A., West P. - Phys.Lett., 1986, 182B, p. 343;
Preprint CERN-TH, 4564/86, Geneva, 1986.
3. Brink L., Di Vecchia P., Howe P. - Nucl.Phys., 1977, B118, p.76.
4. Henneaux M., Teitelboim C. - Ann.Phys., 1982, 243, p.127.

5. Fradkin E.S., Vilkovisky G.A. - Phys.Lett., 1975, 55B, p.224.
Batalin I.A., Vilkovisky G.A. - Phys.Lett., 1977, 69B, p. 309.
6. Filippov A.T. - JINR Rapid Communications, 1987, No.3,(23), p.5.
7. Березин Ф.А., Маринов М.С. - Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, p.678.
8. Casalbuoni R. - Nuovo Cim., 1976, 33A, p. 389.
9. Гершун В.Д., Ткач В.И. - Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, с. 320.
10. Monaghan S. - Phys.Lett., 1986, 178B, p. 231.
11. Henneaux M. - Phys.Rep., 1985, 126, p.1.
12. Baulieu L. - Phys.Rep., 1985, 129, p.1.
13. Filippov A.T. - Preprint JINR E2-87-659, Dubna, 1987.

STRING FIELD THEORY^{*})

I.Ya.Aref'eva

Steklov Mathematical Institute,

Moscow

I. Introduction

In the last years in the theory of elementary particles the essential change of point of view has taken place. The point particle point of view is replaced by the string point of view. This perestrojka touches the main notions of theoretical physics and the situation can be compared with the creation of the General Relativity and the Quantum Mechanics.

The string theory has the long history. The string was started as a theory of hadron at the 70's [1]. The most impressive success has been achieved in the construction of string theory as the theory of all interactions included gravity. The last two years the string models have been seriously regarded as realistic candidates for a unified theory of all interactions. This is due to the remarkable discovery of Green and Schwarz [2].

The main idea of string theories is simple. We have to consider as a fundamental object of our theory a curve instead of a point which one deals with in usual local field theory. So, main idea is very simple, however the construction of full theory of string is a rather difficult task.

1.1. Motivations for the developing of S.F.T.

Let me recall the main feature of the superstring theory.

Superstring theory

- $D = 10$ (This theory predicts the space-time dimension).
- Gravity + Yang-Mills (string theory in low energy reduces to the (super) gravity and the (super) Yang-Mills theory).
- Absence of divergencies (Divergencies are absent in this theory).
- $E_8 \times E_8$, $SO(32)$ (The theory predicts the gauge group).
- Phenomenology (In some approximation it is possible to argue that string theory does not contradict to known phenomenology).

^{*}) This report coincides with the two first lectures of the cycle of lectures delivered at Poina Brasov School on Strings, Romania, September, 1987.

I dare to say, that we have arguments in favor of these properties of superstring theory but to be sure of them and to have a more profound understanding of them we must be able to investigate superstring non-perturbatively. The unique possibility of doing this is to investigate string theory within second quantization approach or in the framework of string field theory (S.F.T.).

Let me give a comment now above mentioned properties were obtained. As it is well known in the usual local field theory all properties of the theory are derived from the Lagrangian [3]. So, starting from given Lagrangian we can, in principle, obtain all properties of the theory. However in string theory the situation is not the same. In particular, the above mentioned properties were not obtain from given Lagrangian, which would be obtained from some fundamental principle. The reason for this is that during long time the string theory was not the theory which has been constructed from one fundamental Lagrangian, it was itself the set of rules which could not be obtained from some general principle. All above-mentioned properties were derived using these rules.

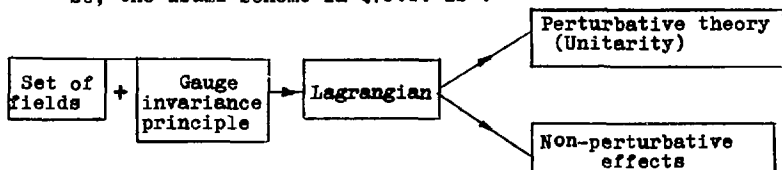
Let me now give some comments about status quo of all these properties.

Recently, it was found that there are many superstring models directly in four-dimensional space-time [4]. These models can be considered as special solutions of 10-dimensional superstring. So, the following question arises. Which of these models is in fact realized, or which one is more stable? In the usual field theory then we get different classical solutions then we know what we have to do to choose one of them. To answer on the same question in string theory we ought to develop the field approach for string because only in the framework of S.F.T. we can choose the preferable solution.

Finally, we need to understand the appearance of the graviton and photon in string theory. This aim can be achieved if we find gauge invariant formulation of the string theory. Indeed, we know that low energy limit for open strings gives us the Yang-Mills theory and for closed string in this limit we get the General Relativity. There are the gauge invariance principles behind these two theories. It is the gauge invariance (or the equivalence principle) which led Einstein to construct the General Relativity and also the gauge invariance led Yang and Mills to the construction of non-abelian gauge field theory. In the usual field theory starting from given set of fields and assuming gauge invariance we construct a Lagrangian. Having the Lagrangian in hand we can at least at formal level investigate non-perturbative questions such as dynamical symmetry breaking, appearance of new par-

ticle (for example, soliton sector, etc.), as well as we can prove at least at formal level unitarity.

So, the usual scheme in Q.F.T. is :



It is natural to try to mimic the same logic in string theory because in some limit case of string theories we get gauge theories, it is natural to believe that some gauge invariant principle is in the base of string theories.

In these lectures I am going to analyze the string gauge invariance principle and you will see that this principle, like Ariadne's thread, will lead to the construction of a gauge invariant S.F.T.

So, we will see that the list of known gauge invariant theories can be enlarged and now in physics there are three gauge invariant theories - Yang-Mills theory, General Relativity and S.F.T. It is well known that the mathematical background of the General Relativity is the classical differential geometry and the background of the Yang-Mills theory is the theory of fibre bundles. I'll argue that an analysis on the non-associative superalgebra may be put into mathematical background of the S.F.T.

So, let me summarize the main motivations for the development of the S.F.T. They are the following.

- To understand the gauge principle behind the string theory.
- To investigate non-perturbative questions such as dynamical symmetry breaking and spontaneous compactification.
- To have unitarity "automatically".

What is S.F.T.? Or what is a set of fields for strings? Or in other words, we want to know the string analogue of usual local fields. To answer on this question let me remind how we get a set of fields in usual field theory. Or in other words, let me recall the connection between the first and second quantization for a system of point particles.

1.2. First and second quantization

Particles

First quantization

We have a world line $x^\mu = X^\mu(\tau)$, along which the particle travels, $\mu = 0, 1, \dots, D-1$, τ is a parameter in the line. The classical action is the length of the line

$$S = \int dt \sqrt{\dot{x}^2}, \quad \dot{x}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}.$$

There are actually two equivalent versions of the first quantized description of the point particle. They are the Feynmann functional approach and the operator quantization. In the Feynmann approach we deal with the functional integral

$$\int e^{-iS} \mathcal{D}x(\tau).$$

To introduce the interaction of point particles we can consider some Feynmann functional integral, but we have take into account paths with intersections. Specifying the intersections we specify the interaction. The sum on the set of intersections we call as the sum on different topology.

$$\sum \int e^{-iS} \mathcal{D}x(\tau) \quad (I.1)$$

(topology $\equiv$ intersections)

$$\text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots$$

In the operator quantization we introduce the canonical conjugate variable x^μ and $p_\mu = -i \partial/\partial x^\mu$ and the vectors of the Hilbert space can be consider as depending on x , i.e. $\varphi = \varphi(x)$.

The classical action leads to the constraint

$$p^2 + m^2 = 0.$$

So, in the quantization version of the theory we put this constraint on the wave functions

$$(p^2 + m^2) \varphi(x) = 0 \quad (\text{physical state condition}) \quad (I.2)$$

Second quantization (field approach)

As is well known the equivalent discription can be done in terms of the field theory.

In the field theory the main object is the field $\varphi(x)$. Operator $\varphi(x)$ creates or destroys particles. Let me stress that field $\varphi(x)$ depends on x not on the path. The first quantized physical state condition becomes the Klein-Gordon field equation. Note that the passage from the single particle theory to field theory only yields the linearized field equations.

It is remarkable that the transition amplitude (I.1) can be also represented as the Feynmann functional integral over classical field $\varphi(x)$ with the action, which is the sum of the free action from which one gets eq. (I.2), and the interaction action, which form is depended on the specification of the paths in the first quantization scheme. For example, the paths in expression (I.1) correspond to φ^3 interaction.

Let me stress that in the field theory the transition function is defined without reference to perturbation theory in contrast to the first quantization approach, where the transition function can be defined only within the perturbation theory. So, the first quantization approach is intrinsically perturbative. To get a deeper understanding of the theory we ought to work within second quantization approach.

Let me also note that the passage from first to second quantization approach gives us naturally only the scalar field. However usually we deal not only with scalar field but also with vector field, tensor field, spinors, etc.

We can perform the same passage from first to second quantization in the string theory.

Strings

First quantization

The string is described by a world-surface $x^\mu = x^\mu(\sigma, \tau)$ in the Minkowski space M^D . Here σ is a space-like coordinate, $0 \leq \sigma \leq \pi$, and τ is a time-like coordinate on the surface. The action for the string is equal to the total area of the world surface

$$S = \int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{x}^\mu x'^\mu)^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad \dot{x}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}, \quad x'^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}.$$

Proceeding with the full analogy to the point particle we can consider the Feynmann integral on surfaces with the string action as well as operator quantization. In Feynmann integral we have to take into account the sum on different topology

$$\sum_{(\text{topology})} \int e^{-iS} \delta x(\tau, \sigma).$$

In the operator quantization the main objects are the canonical conjugate variables $x^\mu(\sigma)$ and $p_\mu(\sigma) = -i \frac{\delta S}{\delta \dot{x}^\mu(\sigma)}$. The vectors of the Hilbert space of states are functionals depending on $x^\mu(\sigma)$, i.e. $\Phi = \Phi[x(\sigma)]$.

Just as in the point particles case, we turn to a field string theory or a second quantization formalism by introducing fields which are functionals of $x(\sigma)$, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}[x(\sigma)]$. The physical state condition of first quantization approach will give us the linearized version of string field equations. It is natural to ask the question about existence of some action from which one can get these equations.

At first sight the functional $\Phi[x(\sigma)]$ is the analog of the scalar field $\varphi(x)$. But what about a string gauge field which must be an analog of the usual field $A_\mu(x)$? I shall discuss this question more later.

So, we have considered the particles and one-dimensional extended object-string. The next step would be the consideration of membranes, which are two-dimensional extended objects.

Membranes

The membrane is described by a world-body $x^\mu = x^\mu(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ and the action is proportional to the total volume of the world body.

Recently, have appeared many papers about membranes theory [5]. The main problem here is a non-renormalizability of the theory.

1.3. Basic fact about operator quantization of strings

Let me return to strings and remind some basic fact about the first quantization of strings.

There are two basic forms of the string action. One is the just mentioned Nambu action, which is proportional to the total area of the world surface. The second action has the form [6]

$$S = \int d\sigma d\tau \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu, \quad (1.3)$$

where $g^{\alpha\beta}$ is a metric on the surface. This metric plays the role of a Lagrangian multiplier and it is easy to see that the actions lead to the same equations of motion. Note that the metric $g^{\alpha\beta}$ in the action (1.3) has no dynamics. The string model for which the 2-dimensional metric satisfies dynamical equations is considered in [7].

Using the reparametrization invariance the equation of motion for the action (1.3) can be reduced in the conformal gauge to the following form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) x^\mu(\tau, \sigma) = 0 \quad (1.4)$$

together with the constraints

$$(\dot{x}^\mu \pm x'^\mu)^2 = 0. \quad (1.5)$$

The boundary conditions have the form $x^{\mu'}(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} =$

$x^{\mu'}(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = 0$ for an open string and $x^\mu(\tau, 0) = x^\mu(\tau, \pi)$ for a closed string. We will restrict ourselves to open string for which the most general solution of eq. (1.4) is given by

$$x^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + p^\mu \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} a_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma,$$

where x^μ is the center-of-mass position. Performing the operator quantization we get the following canonical commutation relations on modes a :

$$[a_n^\mu, a_m^\nu] = n \delta_{n+m} \eta^{\mu\nu}, \quad [x^\mu, p^\nu] = i \eta^{\mu\nu}, \quad (I.6)$$

where $\eta^{\mu\nu}$ is the Minkowski metric. The a_n with positive indices are considered as annihilation operators and a_n with negative indices are considered as creation operators.

The L.H.S. of the constraints (I.5) is summarized as

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^\mu \pm x'^\mu)^2 \Big|_{\tau=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n e^{\mp i n \sigma},$$

where L_n are the operators

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} : a_{n+k}^\mu a_{-k}^\mu :.$$

These operators satisfy the Virasoro algebra:

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{D}{2} n(n^2-1) \delta_{n+m}, \quad (I.7)$$

in which the central charge depends on D , the dimensionality of space-time.

Because of the Lorentz covariance of the commutation relations (I.6), as in the Gupta-Bleuler quantization of quantum electrodynamics, the space spanned by the oscillators contains negative norm states. The space of the on-shell physical states is a subspace of the entire space. It is characterized by the following conditions [1]:

$$[L_0 - 1] \Phi = 0, \quad (I.8a)$$

$$L_n \Phi = 0, \quad n \geq 1, \quad (I.8b)$$

L_0 contains the string mass operator,

$$2(L_0 - 1) = p^2 + 2 \left\{ \sum_{n \geq 1} a_{-n}^\mu a_n^\mu - 1 \right\} = \square + M^2,$$

so eq.(I.8a) gives the equation of motion of physical states and (I.8b) can be considered as the constraint.

To understand the physical contents of the theory it is useful to expand Φ in eigenstates of the mass operator M^2 . Let $|0\rangle$ be ^{the} state annihilated by all of the a_n , $n \geq 1$, i.e. $a_n |0\rangle = 0$, $n \geq 1$. A basis for the Hilbert space of states is formed by applying the a_{-n} to $|0\rangle$, $n \geq 1$. An arbitrary state $|\Phi\rangle$ may be expanded as

$$|\Phi\rangle = [\varphi(x) - i A_\mu(x) a_{-1}^\mu - \frac{1}{2} h_{\mu\nu}(x) a_{-1}^\mu a_{-1}^\nu + i B_\mu(x) a_{-2}^\mu + \dots] |0\rangle. \quad (I.9)$$

here the coefficient functions depend on the center-of-mass position X . This vector state looks as infinite component field theory. It is an eigenvector of the mass operator. $M^2 \varphi(x) |0\rangle = -2 \varphi(x) |0\rangle$,

$M^2 A_\mu a_{-1}^\mu |0\rangle = 0$, etc. So, $\varphi(x)$ is tachyon, A_μ is massless vector field, $h_{\mu\nu}$ is massive tensor field, etc.

The state (I.9) corresponds to some functional $\Phi[x(\sigma)]$. The connection between the state $|\Phi\rangle$ given in oscillators representation and the functional $\Phi[x(\sigma) = x^\mu + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^\mu \cos n\sigma]$ is the same as for usual oscillator

$$\Phi[x(\sigma)] = \langle x(\sigma) | \Phi \rangle,$$

where the state $|x(\sigma)\rangle$ is given by the following formula

$$|x(\sigma)\rangle = \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{x_n^2}{2} - \frac{1}{2n} a_n^\dagger a_n^\dagger + i\sqrt{\frac{2}{n}} a_n^\dagger x_n\right\}; \quad a_n^\dagger = a_{-n}.$$

The bra and ket in these formulae mean that we calculate the usual Fock-space scalar product. In the late I shall omit the bra notations.

So, in the S.F.T. the main object must be the functional $\Phi[x(\sigma)]$, or the corresponding vector in infinite product of Fock space.

Let us consider another state

$$\Omega = \{\omega(x) - i\omega_\mu(x) a_1^\mu + \dots\} |0\rangle$$

and the following transformation $\Phi \rightarrow \Phi + \delta_\Omega \Phi$, where $\delta_\Omega \Phi = L_{-1} \Phi$. Since

$$L_{-1} \Omega = \{-i\omega^\mu(x) a_1^\mu + \dots\} |0\rangle \quad (\text{I.10})$$

from eqs. (I.9), (I.10) we get $\delta_\Omega A^\mu(x) = \partial^\mu \omega(x)$, i.e. the linearized Yang-Mills gauge transformation. So, this transformation can be considered as a string gauge transformation. General string gauge transformation has the form

$$\delta \Phi = \sum_{n \geq 1} L_{-n} \Omega_n. \quad (\text{I.11})$$

2. String Field Theory (S.F.T.)

2.1. Free Bosonic String

In the S.F.T. the main object must be the functional $\Phi[x(\sigma)]$ or the corresponding vector in the infinite product of Fock space.

Linearized field equations have the form (I.8a) and (I.8b). To develop the S.F.T. we need an action. This action has to satisfy three conditions:

- i) it must give us eqs. (I.8a) and (I.8b);
- ii) it must be gauge invariance under (I.11);
- iii) it must for low level fields reproduce the usual action (for

example, it must reproduce the action $\frac{1}{2} \int \varphi(0-m^2)\varphi d^2x$ for tachyon, and the action $\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^2 d^2x$ for massless vector field).

A more simple way to get a desirable action is to introduce ghosts fields C_n and to consider an action

$$S = \langle \Phi, Q \Phi \rangle, \quad (2.1)$$

where Q is equal to $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (L_n - \delta_{n,0})$. If $C_n, n \geq 0$ ($C_n, n < 0$) are realized as creation (annihilation) operators and if $|\Phi\rangle$ has no ghost excitations, then the equation $Q|\Phi\rangle = 0$ implies

$$[C_0(L_0 - 1) + \sum_{n \neq 1} C_n L_n] |\Phi\rangle = 0. \quad (2.2)$$

Since $C_n |\Phi\rangle$ are linearly independent eq.(2.2) yields eqs.(1.8). Therefore the single equation $Q|\Phi\rangle = 0$ is equivalent to the set of eqs.(1.8).

However the action (2.1) with such kind of Q has no gauge invariance. Fortunately, one can modify the operator Q by adding some extra terms up to getting a nilpotent operator Q ,

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (L_n + \frac{1}{2} L_n g^k). \quad (23)$$

Here $L_n g^k = \sum (n+m) b_{n-m} C_m$, C_n and b_m are anticommuting ghosts

$$\{C_m, C_n\} = 0 = \{b_n, b_m\}, \quad \{C_m, b_n\} = \delta_{n+m}, \quad (2.4)$$

which satisfy $C_n^\dagger = C_{-n}$, $b_n^\dagger = b_n$. This operator Q satisfies the nilpotency relation

$$Q^2 = 0 \quad (2.5)$$

only for $D=26$ and it is nothing but the BRST-charge connected with the Virasoro algebra.

Let me note that the BRST-charge connected with an algebra with generators L_n

$$[L_n, L_m] = f_{nm}^{\kappa} L_{\kappa}, \quad \kappa = 1, \dots, N,$$

is given by the formula [35, 29]

$$Q = \sum_{n=1}^N C_n L_n - \frac{1}{2} \sum_{m,n} f_{mn}^{\kappa} b_{\kappa} C_m C_n, \quad (2.6)$$

where C_n and b_m are anticommuting ghosts (2.4).

Due to nilpotency condition (2.5) and hermiticity property of Q the action (2.1) is invariant under gauge transformation.

Notice that the new Q is a sum of terms, each of which contains at least one annihilation operator. So if Φ has no ghost excitation, then $Q|\Phi\rangle=0$ implies again the infinite set of constraints (18)

The action (2.1) for the free open bosonic string field theory was proposed in Refs.[8-10].

More complete list of the references about the field theory free action for the bosonic string and its quantized version see in [12].

It is convenient to restrict our string field to have the number of C excitations to be equal to the number of θ excitations. It is possible to show that a string field with this ghost number includes all the physical component fields Π . Then a general string field can be expanded

$$|\Phi\rangle = [\varphi(x) + iA_\mu(x)a_{-1}^\mu + B(x)\theta_{-1}C_0 + \dots] |0\rangle. \quad (2.7)$$

Substituting this expansion in the (2.1), with Q as in (2.3) one gets

$$\langle\Phi, Q\Phi\rangle = \int dx \left\{ -\frac{1}{2}\varphi(\square-1)\varphi + \frac{1}{2}A_\mu \square A_\mu + B^2 + 2B\partial_\mu A_\mu + \dots \right\}. \quad (2.8)$$

After elimination of the auxiliary field $\theta(x)$ this action reproduces the tachyonic action and the Maxwell action.

2.2. String Field Algebra (interaction)

Let me consider a set of string fields β . Under string fields I mean functional of string coordinates as well as of ghost string coordinates. Within our usual understanding of local gauge invariance parameters of gauge transformation are the objects of the same nature as the fields undergoing gauge transformations. For example usual local Yang-Mills field is Lie algebra valued vector field and gauge parameter is also the Lie algebra valued scalar field. So let us suppose that parameters of gauge transformations are from some subset of the set of string field β .

If we deal with gauge theory then it is natural to suppose that if we perform subsequently two infinitesimal gauge transformation and compare the result with the result of the same gauge transformation performing in the opposite order that the difference between them has to be represented also as a gauge transformation

$$\delta_{\Omega_1} \delta_{\Omega_2} - \delta_{\Omega_2} \delta_{\Omega_1} = \delta_{\Omega_1 \circ \Omega_2}. \quad (2.9)$$

Here δ_Ω is an infinitesimal gauge transformation, depending upon the string field Ω and δ_Ω acts on some string functional. One can think about string field Ω as a parameter of the gauge transformation.

$\Omega_1 \circ \Omega_2$ which appears in the RHS of eq.(3.1) is a multiplication of two string fields Ω_1 and Ω_2 . By multiplication as usual I mean that for any given pair of element Ω_1, Ω_2 corresponds the third element $\Omega_1 \circ \Omega_2$. One can see from eq. (2.9) that the following relation holds

$$\Omega_1 \circ \Omega_2 = -\Omega_2 \circ \Omega_1. \quad (2.10)$$

Therefore for subset $K \subset \mathcal{B}$ which consists of parameters of gauge transformation the multiplication appears in the natural way, so K is an algebra with multiplication law satisfying anticommutation relation (2.10). After that it is natural to think about all set of string fields $\mathcal{B}$ as an algebra. As I have just mentioned the main lesson from the field theory of free bosonic string is that the fields are functionals of bosonic coordinates as well as of anticommuting ghost string coordinates. So, we have $\mathbb{Z}_2$ grading on $\mathcal{B}$ from very beginning, i.e. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$ and an element $\Phi \in \mathcal{B}$ has a degree $|\Phi|$ which is 0 (even element) or 1 (odd element) depending upon whether Φ lies in $\mathcal{B}_0$ or in $\mathcal{B}_1$. For further consideration it is important to distinguish two different cases. For the first case the algebra of the gauge transformation consists of even elements of $\mathcal{B}$, i.e. $K = \mathcal{B}_0$; for the second one it consists of odd elements, i.e. $K = \mathcal{B}_1$.

For the first possibility, the multiplication law must be an even operation, i.e. the degree of the product $\Phi \circ \Psi$ is $|\Phi| + |\Psi|$. It is natural to believe that there is the multiplication law for arbitrary elements of $\mathcal{B}^I$ with the following property

$$\Phi \circ \Psi = (-1)^{|\Phi|(|\Psi|+1)} \Psi \circ \Phi, \quad (2.11)$$

which is the generalization of eq. (2.10).

An alternative possibility is to consider the gauge parameters as the odd elements, i.e. $K = \mathcal{B}_1^I$. In the case the multiplication law has to be odd, i.e. for two elements Φ, Ψ the degree of the product $\Phi \circ \Psi$ is $|\Phi| + |\Psi| + 1$. It is natural to consider the multiplication law $\circ$ for arbitrary elements of $\mathcal{B}^I$ and to demand that the multiplication law be commutative in the sense that the following identity holds

$$\Phi \circ \Psi - (-1)^{|\Phi|(|\Psi|+1)} \Psi \circ \Phi = 0, \quad (2.12)$$

which is another generalization of (2.10), i.e. the even elements commute and the odd elements anticommute. Such algebra $\mathcal{B}^I$ is called the nonassociative commutative superalgebra.

To give further intuitive argument as to why one can say more about properties of two different multiplication laws I have to specialize more gauge transformations. There are two ways to do this.

Namely, to consider the straightforward generalization of the usual gauge transformation for matter fields or for gauge fields. To deal with a transformation of gauge string fields we require the differential on $\mathcal{B}$ algebra. However in order to write the gauge transformation for matter string field the multiplication law is sufficient. So, let us consider the matter-like transformation law, i.e.

$$\delta_{\Omega} \psi = \psi \circ \Omega. \quad (2.13)$$

Here we assume that the parameter Ω of the gauge transformation and the matter string field ψ are the objects of the same algebra $\mathcal{B}$ and moreover the transformation law can be written as the product in the algebra. Substituting the gauge transformation (2.13) in the eq.(2.9) one gets the relation

$$(\psi \circ \Omega_1) \circ \Omega_2 - (\psi \circ \Omega_2) \circ \Omega_1 = \psi \circ (\Omega_1 \circ \Omega_2). \quad (2.14)$$

In eq.(2.14) the Jacobi identity is easily recognized.

Starting from (2.11) and assuming natural linear properties under multiplication on Grassmann numbers one can deduce from (2.14) the Jacobi identity for arbitrary homogeneous elements of $\mathcal{B}^I$,

$$(-1)^{|\psi||\chi|} \psi \circ (\psi \circ \chi) + (-1)^{|\chi||\phi|} \chi \circ (\phi \circ \psi) + (-1)^{|\psi||\phi|} \psi \circ (\chi \circ \phi) = 0. \quad (2.15)$$

Eq. (2.11) and (2.15) give us on the whole $\mathcal{B}^I$ the structure of the Lie super-algebra. The string field algebra $\mathcal{B}^{\#}$ is the nonassociative commutative superalgebra with the multiplication law satisfying the Jacobi identity.

So, from physical reasons we get (after some additional postulates) only two minimal schemes:

- i) $\mathcal{B}^I$ is the Lie super-algebra;
- ii) $\mathcal{B}^{\#}$ is the commutative super-algebra with the Jacobi identity.

In particular case $\mathcal{B}^I$ can be realized with the help of an associative product $*$, $\phi \circ \psi = \phi * \psi - (-1)^{|\phi||\psi|} \psi * \phi$.

By analogy with the Yang-Mills theory one can take the nonabelian gauge transformation of string gauge field to be of the form

$$\delta_{\Omega} \phi = Q\Omega + \phi \circ \Omega, \quad (2.16)$$

where Ω is a linear map of the algebra $\mathcal{B}$ into itself and Q^2 is zero. In this case eq. (2.9) gets in addition to the identity (2.14) the Leibnitz rule for the derivative Q of the algebra $\mathcal{B}$. Q can be considered as exterior derivative on string fields string differential forms [9].

There are two possible string realizations of algebra $\mathcal{B}[13]$. First of them uses the Witten vertex [10, 18], the second uses the light cone-like vertex proposed by Hata et al. [15] and by Neveu and West [14].

To construct an action one can also go by two ways. In the first way, proposed by Witten, one deals with an integral on the algebra $\mathcal{K}$, in the second way one deals with inner product on the algebra $\mathcal{B}$.

So, the main ingredients of the Witten construction are:

- i) $\ast$ product,
- ii) Q exterior derivative,
- iii) $\int$ integral,

i.e. in this case one deals with the Witten-Connes set

$$\mathcal{W} = (\ast, Q, \int).$$

The main ingredients of the construction, proposed by Volovich and myself [16] are

- i) $\circ$ product ($\mathcal{B}^I$ or $\mathcal{B}^{\bar{I}}$),
- ii) Q exterior derivative,
- iii) $(\cdot, \cdot)$ an inner product,

i.e. in this case we deal with the set

$$\mathcal{B} = (\circ, Q, (\cdot, \cdot))$$

The action for the gauge string field ϕ which is an arbitrary even (odd) element of $\mathcal{B}^{\bar{I}}$ ($\mathcal{B}^I$) has the form

$$S = (\phi, Q\phi) + \frac{1}{3}(\phi \circ \phi, \phi). \quad (2.17)$$

The action is invariant under the gauge transformation (2.16).

The Witten system of axioms is more restrictive and, in particular, any given realization of the Witten-Connes set gives the realization of $\mathcal{B}^I = (\mathcal{B}^I, Q, (\cdot, \cdot))$.

We conclude this section with the following table which summarizes the relationship between Yang-Mills theory and interacting open bosonic string field theory

	Yang-Mills Theory	String Field Theory
Gauge Field	$A = A_\mu dx^\mu$	$\Phi(x(\sigma), c(\sigma), \theta(\sigma))$
Gauge Transformation	$\delta A = d\lambda + [A, \lambda]$	$\delta \Phi = Q\Lambda + \Phi \circ \Lambda$
differential multiplication	d $[\cdot, \cdot]$	Q $\circ$ or $\ast$
Action	$\int \text{Tr}(F_{\mu\nu}^2) dx$	$(\Phi, Q\Phi) + \frac{1}{3}(\Phi \circ \Phi, \Phi) =$ $\int \Phi \ast Q\Phi + \frac{1}{3} \int \Phi \ast \Phi \ast \Phi$

Note, that the last year the interesting suggestion to consider the pure cubic action has been proposed [31].

3. Superstring Field Theory (S.S.F.T.)

3.1. Free action

In SSFT, we will glue together the ideas just tested for bosonic string with general ideas of supersymmetric field models. The motivation for developing the field theory approach to superstrings is the same as for bosonic. But there are some additional reasons.

They are the following.

- i) To investigate non-perturbative questions such as SUSY breaking and spontaneous compactification.
- ii) To have unitarity "automatically" (In the first quantization approach there is a problem with spin structures).

The main object of S.S.F.T will be

$$\Phi [x(z), \psi(z), \text{ghosts}],$$

where $x(z)$ and $\psi(z)$ are world sheet bosonic and fermionic coordinates. Different boundary conditions for ψ correspond to different sectors - the Neveu-Schwarz (NS) sector and the Ramond (R) sector

$$\text{NS: } \psi^r(z) = \sum H_r^\mu z^{-r}, \quad r \text{ is half integer};$$

$$\text{R: } \psi^n(z) = \sum f_n^\mu z^{-n}, \quad n \text{ is integer},$$

$$\{f_n^\mu, f_m^\nu\} = -2g^{\mu\nu} \delta_{n+m}, \quad \{H_r^\mu, H_s^\nu\} = -2g^{\mu\nu} \delta_{r+s}.$$

Fermionic ghost representation for the NS and R string has the following content: anticommuting (anti) ghosts (b) c corresponding to the bosonic coordinates x^μ and commuting (anti) ghosts $(\bar{f}) \pm$ corresponding to world sheet spinors ψ .

$\Phi[x(z), \psi(z)]$, being a vector from the Hilbert space of the first quantization approach, satisfies the following constraints:

$$L_n \Phi[x(z), \psi(z)] = 0, \quad n \geq 0$$

$$\text{NS: } G_r \Phi[x(z), \psi(z)] = 0, \quad r \geq \frac{1}{2}; \quad \text{R: } F_n \Phi[x(z), \psi(z)] = 0, \quad n \geq 0,$$

where L_n and G_r (F_n) are the generators of the super Virasoro algebra:

$$[L_n, L_m] = (m-n) L_{m+n} + \frac{D}{8} m(m^2-1) \delta_{m+n,0};$$

NS sector

R sector

$$[L_m, G_r] = (\frac{1}{2}m - r) G_{m+r}, \quad [L_m, F_n] = (\frac{1}{2}m - n) F_{m+n},$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{D}{4} (r^2 - \frac{1}{4}) \delta_{r+s}; \quad \{F_m, F_n\} = -2L_{m+n} - \frac{D}{2} m^2 \delta_{m+n}.$$

The main observation for bosonic string is that if one takes the BRST-charge Q connected with the Virasoro algebra then the equation $Q\Phi = 0$ gives us the correct set of constraints, and moreover one can get this equation from the action.

One can expect the same for fermionic strings and this does work

for the NS sector. But this suggestion does not work directly for R sector for two reasons:

- i) the appearance of new zero modes of the commuting superconformal ghosts;
- ii) the presence of two kinetic energy operators in the BRST operator connected with the R super Virasoro algebra

$$Q_R = C_0 L_R + b_0 (M_R + t_0^2) + t_0 F + \bar{t}_0 K + \tilde{Q}_R. \quad (3.1)$$

Of course we would like to have the Dirac equation for the zero mass-level field $\chi^\alpha(x)$ of the R string

$$\Psi[x, \psi] = \chi^\alpha(x) |0\rangle_\alpha + \dots$$

There are a lot of papers devoted to this subject [19-25]. Up to now there are three versions of the construction of a free $\mathcal{R}$ -string action:

- i) The Witten construction [19] is based on an inverse picture changing operator.
- ii) The Kazawa, Neveu, Nicolai and West [20] and the Terao and Uehara [22] construction uses a notion of consistently truncated fields.
- iii) The Medvedev and Muself construction [23] is based on exploiting the truncated $\equiv$ BRST charge and the truncated scalar product.

Following the paper [23] I will start from the third possibility. I shall show that the appropriate action for the $\mathcal{R}$ -string can be derived from general algebraic considerations. The other proposals I shall discuss later.

As for the bosonic string a field theory action for the R string has to satisfy the three requirements pointed out in Sect. 2. Note that due to the relation $F_0^2 = L_0$, if we just have $F_0 \psi = 0$, we do not worry about the first one, $L_0 \psi = 0$.

This is a reason to drop out the mode C_0 which corresponds to L_0 operator.

But if one drops out one mode from the BRST-operator, then the corresponding truncated operator

$$Q^{tr} = \sum_{n \neq n_0} C_{-n} L_n - \frac{1}{2} \sum_{m, n, k \neq n_0} f_{mn}^k b_k C_{-n} C_{-m}$$

is no more nilpotent on the whole space. However there is a subspace $\mathcal{H}^{tr}$ specified by the constraint

$$\mathcal{H}^{tr} = \left\{ \psi \mid \sum_{m, n \neq n_0} C_{-n} C_{-m} f_{nm}^{n_0} \psi = 0 \right\},$$

where the condition $(Q^{tr})^2 \psi = 0$ holds.

$\equiv$ Note that the notion of the truncated BRST charge was also used by Banks et al. [21] in the context of string differential forms.

So,

$$Q_R^{tr} = t_0 F + \bar{t}_0 K + \tilde{Q}_R$$

is nilpotent on vector satisfying the constraint

$$(t_0^2 + M_R) \Psi = 0.$$

But instead of solving directly this equation I note that to provide a gauge invariance it is sufficient to have a "weak" nilpotency, i.e. only an average of $(Q_R^{tr})^2$ should be equal to zero.

This supplies a reason for introducing a new scalar product $(\cdot, \cdot)_{tr}$ for which the relation $(\Psi_1, (t_0^2 + M_R) \Psi_2)_{tr} = 0$ would hold. Hence, let me introduce the scalar product by the formula $(\Psi_1, \Psi_2)_{tr} = (\Psi_1, Y \Psi_2)$ where the kernel Y is given by the Yamron [24] δ -function

$$Y = \delta(t_0^2 + M_R). \quad (3.2)$$

Under this definition the equality

$$(\Psi_1, Y \delta(t_0^2 + M_R) \Psi_2) \quad (3.3)$$

is expected for all Ψ .

It is possible to give the precise meaning to the last two equations [23].

Now it is the time to describe the space $\mathcal{H}_R$. As for nonzero physical and ghost modes they are in ordinary Fock representation where negative frequency operators are realised as creation ones so the total vacuum $|0\rangle$ is the tensor product of the vacua for each mode. Because the zero modes of the R fermionic oscillators act like gamma matrices, the vacuum and the fields for the R string also carry $SO(9,1)$ Dirac spinor indices, which we suppress as usual.

As to the bosonic ghost zero modes $t_0, \bar{t}_0$, they cannot be realised in the standard way. Really, let $|0\rangle$ be the $\bar{t}_0$ vacuum; $\bar{t}_0|0\rangle=0$ and $\mathcal{H}_{|0\rangle} = \{\Sigma a_n t_0^n |0\rangle \equiv \Sigma a_n |n\rangle\}$ be the corresponding "Fock" space, than it immediately follows from the algebra $[t_0, \bar{t}_0]=1$ and the hermiticity properties $t_0 = t_0^\dagger, \bar{t}_0 = -\bar{t}_0^\dagger$ that a scalar product in $\mathcal{H}_{|0\rangle}$ is identically zero, i.e. $(|n\rangle, |m\rangle) = \langle n|m\rangle = 0$ for every $|n\rangle, |m\rangle$. The same is also true for the space $\mathcal{H}_{|0\rangle} = \{\Sigma \bar{a}_n \bar{t}_0^n |0\rangle = \Sigma \bar{a}_n |\bar{n}\rangle\}$, $t_0|0\rangle=0$, i.e. $(|n\rangle, |m\rangle) = \langle n|m\rangle = 0$. However, demanding $\langle 0|0\rangle = 1$ we obtain

$$(|n\rangle, |m\rangle) = \langle n|m\rangle = n! \delta_{n,m} = (|n\rangle, |m\rangle) = \langle n|m\rangle.$$

So, non one of the two bases $\{|n\rangle\}, \{|\bar{n}\rangle\}$ forms the habitual orthogonal system but together they do form the biorthogonal system and the completeness condition takes the form

$$1 = \sum_n \frac{1}{n!} |n\rangle \langle n| + \sum_n \frac{1}{n!} |\bar{n}\rangle \langle \bar{n}|.$$

The space for the R string states would be $\mathcal{H}_R = \mathcal{H}_{10} \oplus \mathcal{H}_{10}$, where $\mathcal{H}_{10} = \mathcal{H} \otimes h_{10}$ and $\mathcal{H}_{10} = \mathcal{H} \otimes \bar{h}_{10}$ can be considered as the "Fock" spaces corresponding to the total vacua $|0\rangle \otimes |0\rangle$ and $|0\rangle \otimes |\bar{0}\rangle$. In what follows we shall omit, as a rule, all the vacuum structures except the $t_0, \bar{t}_0$ structures.

Now we are ready to give the precise definition for $\delta(t_0^2 + M_R)$:

$$\delta(t_0^2 + M_R) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-M_R)^n}{(2n+1-k)! k!} |2n+1-k\rangle \langle k|.$$

It is easy to check the desired relation

$$\delta(t_0^2 + M_R) (t_0^2 + M_R) |\Psi\rangle = 0.$$

To obtain from $Q_R^{tr} \Psi = 0$ the Dirac-like equation $F_0 \Psi = 0$ we have to define Ψ to be a vector from the $\mathcal{H}_{10}$ space, denoting it as $|\Psi\rangle$.

Let me introduce the important notion of truncated field [23]. The truncated field $|\Psi^{tr}\rangle$ is a state constructed from $|\Psi\rangle = \sum_{n \geq 0} A_n |n\rangle$ as follows:

$$|\Psi^{tr}\rangle = \mathcal{F}|\Psi\rangle = \sum_{n \geq 0} (-M_R)^n A_{2n} |0\rangle + \sum_{n \geq 0} (-M_R)^n A_{2n+1} |1\rangle,$$

where A_n are arbitrary polynomials in nonzero modes.

It is obvious that

$$\delta(t_0^2 + M_R) (|\Psi\rangle - |\Psi^{tr}\rangle) = 0,$$

so $|\Psi\rangle$ and $|\Psi^{tr}\rangle$ are indeed equivalent in respect to the metrics $Y = \delta(t_0^2 + M_R)$.

Dealing with the notion of truncated field we can present a scalar product for $\mathcal{H}_{10}$ vectors in the following way

$$(\Psi_1, \Psi_2)^{tr} = (|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle)^{tr} = -\langle \Psi_1^{tr}, \delta'(t_0) \Psi_2^{tr} \rangle,$$

where $\delta'(t_0) = -|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|$.

As it follows from [24] Q_R is hermitian operator in respect to $(\dots)^{tr}$.

The action for the R string

$$S_R = \langle \Psi, Y Q_R^{tr} \Psi \rangle \quad (3.4a)$$

can naturally be defined in terms of $(\dots)^{tr}$. Moreover, due to the relation $(Q_R^{tr} |\Psi\rangle)^{tr} = (Q_R^{tr} |\Psi^{tr}\rangle)^{tr}$ we can present the R-action (3.4a) through the components of truncated field $|\Psi^{tr}\rangle = \Psi_0 |0\rangle + \Psi_1 |1\rangle$

$$S_R = (\Psi, \sigma Q_Y \Psi), \quad (3.4b)$$

where

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}, \quad Q_Y = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_R & Z \\ F & \tilde{Q}_R \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z = -\frac{1}{2}(FM_R + M_R F)$$

(3.4b')

$$S_R = (\Psi_0, F \Psi_0) + (\Psi_0, \tilde{Q}_R \Psi_1) + (\Psi_1, \tilde{Q}_R \Psi_0) + (\Psi_1, Z \Psi_1)$$

the scalar product in the last line means the scalar product in $\mathcal{H}$ space.

From one side the action (3.4a) coincides with the action proposed by Yamron [24] and from other side the component formula (3.4b') is the same as the formula obtained for S_R in the papers by Kazawa, Neveu, Nicolai and West [20] and by Terao and Uehara [22].

Note that the action (3.4a) is minimal in what concern the number of independent field components and the structure of BRST charge, that makes it suitable for the purposes of studying the interaction.

Recently, in the paper [28] it has been shown that all the R-string actions [19-25] in fact possess the following structure

$$S_R = \langle \Psi, G Q \Psi \rangle, \quad (3.5a)$$

where a metric G admits the following decomposition

$$G = \mathcal{P}_G + g \mathcal{P}_G, \quad (3.6)$$

$\mathcal{P}_G$ being a projector on a two-dimensional subspace and g is metric in a two-dimensional space (we have in mind the dimension of world-sheet supersymmetric ghosts zero modes space). A significant feature of G is its BRST invariance

$$[G, Q] = 0 \quad (3.7)$$

that guarantees the gauge invariance of the action and permits to establish that (3.5a) does depend only on G -truncated fields $\Psi^{tr} = \mathcal{P}_G \Psi$ i.e.

$$S_R = \langle \Psi^{tr}, g(Q_G \Psi^{tr})^{tr} \rangle = \langle \Psi^{tr}, g Q_G \Psi^{tr} \rangle. \quad (3.5b)$$

The Q_G is modified BRST charge which is weakly nilpotent in respect to G metric, i.e. $\langle \Psi, G(Q_G)^2 \Psi \rangle = 0$.

So, an inverse picture-changing operator playing the role of a metric in a space of ghost modes is the origin of the appearance of a truncated string field as well as of a truncated BRST charge.

Note that the representation (3.5a) with the decomposition (3.6) for the action (3.4a) has just been demonstrated. The proof that the Witten action $S_R^{(W)}$,

$$S^{(w)}_R = \langle \Psi, Y(z) Q \Psi \rangle, \quad (3.8)$$

where

$$Y(z) = C(z) \delta'(t(z)),$$

$z = \bar{z}$, is also of the form (3.5b), is less trivial.

The following formula holds

$$Y(z) = \mathcal{T}_W^+ (10)(1|+1)(0|-2 \check{t}(z)/1)(1|) \mathcal{T}_W, \quad (3.9)$$

where

$$\mathcal{T}_W = \mathcal{T}_W^c \mathcal{T}_W^t,$$

$$\mathcal{T}_W^c = (C/C(z), \mathcal{T}_W^c(\varphi_0 + C_0 \varphi_1)/0) = \varphi_0 - \check{C}(z) \varphi_1,$$

$$\mathcal{T}_W^t(\sum_n \psi_n |n\rangle) = (\sum (-1)^{n-1} (n-1) (\check{t})^n \psi_n)/0\rangle + (\sum_n (-1)^n n (\check{t})^{n-1} \psi_n)/1\rangle,$$

$$C(z) = C_0 + \check{C}(z), \quad t(z) = t_0 + \check{t}(z).$$

It is important to note that in close analogy to $Y = \delta(t_0^2 + M)$, $Y(z)$ has a nontrivial kernel, i.e. $Y(z)|\Psi\rangle = 0$, consisting of the following vectors: $|\Psi\rangle = C(z)|A\rangle + \check{t}^2(z)|B\rangle$ with $|A\rangle$ and $|B\rangle$ being "smooth" Fock vectors, i.e. vectors which do not provide the Schwinger terms in OPE around the point Z . We denote by $\mathcal{M}$ the space of these "smooth" vectors. This fact can be really checked by means of OPE if we define

$$Y(z)|\Psi(z)\rangle = \lim_{z' \rightarrow z} Y(z')|\Psi(z)\rangle.$$

Denoting the components of a truncated field as $\mathcal{P}_0$ and $\mathcal{P}_1$, i.e. $\mathcal{T}_W|\Psi\rangle = |\Psi_W^0\rangle = \mathcal{P}_0|0\rangle + \mathcal{P}_1|1\rangle$ it is a matter of simple calculation to check that the change of variables

$$\mathcal{P}_0 = \Psi_0 + \check{C} F \Psi_1, \quad \mathcal{P}_1 = \Psi_1 \quad (3.10)$$

casts (3.8) into the form (3.4b) that has been found by straightforward computation in [26].

3.2. Supersymmetry of free NSR action

It is convenient to write down the action for open superstring using a single string field Φ in the form

$$S = (\Phi, Q\Phi),$$

where $\Phi = \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$. The action is invariant under linear transformation $\delta\Phi = V\Phi$ if $[V, Q] = 0$.

If we choose the matrix V to be off-diagonal, $V = \begin{pmatrix} 0 & V_{R,NS} \\ V_{NS,R} & 0 \end{pmatrix}$, i.e. the variation of bosonic NS string fields is expressed through fermionic R field and vice versa, then the equation $[V, Q] = 0$ means $Q_{NS} V_{R,NS} = V_{R,NS} Q_R$, $Q_R V_{NS,R} = V_{NS,R} Q_{NS}$.

The last equations mean that $V_{R,NS}$ and $V_{NS,R}$ are intertwining operators for the BRST charges.

But actually, things are not so simple, since the scalar product for R sector is deeply degenerate

$$S = (\Phi, JQ\Phi), \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

The action (3.11) is invariant under $\delta\Phi = V\Phi$ if the following condition

$$V^+ JQ + JQ V = 0 \quad (3.12)$$

is fulfilled.

The structure of the matrix V has to be specified. Namely, as the R action really depends not on $|\psi\rangle$ but on $|\psi^{tr}\rangle$, so δa should be defined in terms of $|\psi^{tr}\rangle$, therefore we put

$$V_{R,NS} = V_{R,NS} \mathcal{F}.$$

For the R action in the form (3.4a) we suppose also the following structure for $V_{NS,R}$:

$$V_{NS,R} = -(\delta')^{-1} V_{NS,R}$$

$$(\delta'(t_0))^{-1} = -|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|, \quad \delta'(t_0)(\delta'(t_0))^{-1} = P_{101}, \quad P_{101} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|.$$

So,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & v^+ \mathcal{F} \\ (-\delta')^{-1} v & 0 \end{pmatrix}, \quad V^+ = \begin{pmatrix} 0 & v^+ (-\delta')^{-1} \\ \mathcal{F}^+ v & 0 \end{pmatrix}.$$

Eq.(3.12) reduces to single equation

$$-P_{101} v Q_{NS} - \delta' \mathcal{F} Q_R^{tr} (\delta')^{-1} v = 0.$$

It is possible to find v in the form $v = \mathcal{U} W$, where W is the intertwining operator between Q_{NS} and Q_R , $W Q_{NS} = Q_R W$, and $\mathcal{U}$ is the intertwining operator (on the subspace only!) between Q_R and Q_Y

$$P_{101} (-\mathcal{U} Q_R + Q_Y \mathcal{U}) = 0.$$

W is given by the total fermion-emission vertex [19 - 23] (spin operator in the context of the conformal field theory [36]).

It is not difficult to guess the answer for $\mathcal{U}$ [23]:

$$\mathcal{U} = (|0\rangle - |1\rangle)\langle 0| F \langle 0| C_0.$$

So, the explicit form of SUSY transformations is

$$|\delta a\rangle = [W^+ - W^+ C_0 F |0\rangle\langle 1|] |\psi^{tr}\rangle |0\rangle, \quad (3.13a)$$

$$|\delta \psi^{tr}\rangle = (-\delta')^{-1} \langle 0| [W - |1\rangle\langle 0| F C_0 W] |a\rangle. \quad (3.13b)$$

Let me discuss the connection between SUSY transformation proposed by Witten [19] and (3.13). The Witten SUSY transformations are of the form

$$\delta a = W^+ \psi \quad (3.14a)$$

$$\delta \psi = X W a, \quad (3.14b)$$

where $X(z)$ is the picture changing operator [36]. As soon as the form (3.5b) of the action is established eq. (3.14a) seems rather puzzling. Indeed, the transformation law for NS field a includes the total field ψ , although the action depends only on $\psi^{tr} = \mathcal{I}_W \psi$ and thereby the transformation must be of the form $\delta a = Z \psi_W^{tr} = Z \mathcal{I}_W \psi$. So we have to search for the operator which is capable of transforming ψ_W^{tr} into ψ for all the smooth vectors. Such an operator does exist and it is nothing else the well-known "unity" $X(z)Y(z)$ multiplied by the factor $|0\rangle$. Really, we find that

$$\lim_{z' \rightarrow z} \lim_{z'' \rightarrow z} X(z') (Y(z'') |0\rangle) \mathcal{I}_W \psi = \psi, \quad \psi \in \mathcal{M}. \quad (3.15)$$

The standard calculation yielding $X(z)Y(z) = 1$ is really correct when we suppose that the operator $Y(z)$ acts on regular vectors (finite Fock vectors for example). But in singular cases we have to take into account the nonassociativity of OPE and we ought to define the action of operators carefully:

$$X(z)Y(z)\psi(z) \equiv \lim_{z'' \rightarrow z} \lim_{z' \rightarrow z} X(z'') (Y(z') \psi(z)). \quad (3.16)$$

The eq. (3.15) holds only for the states ψ from the smooth space. For the states from the kernel of $Y(z)$, for example for $\psi = \epsilon^2(z)|0\rangle$, the formula (3.15) does not hold because the L.H.S. is identically zero. The proof of eq. (3.15) one can find in [28].

The above discussion leads to the following modification of the transformation law (3.14a).

$$\delta a = W^+ X Y |0\rangle \psi_W^{tr}, \quad (3.14a')$$

so we conclude that $W^+ X Y |0\rangle$ is a proper operator for SUSY transformation in the truncated space. The R.H.S. of (3.14a') coincides with the R.H.S. of (3.14a) for $\psi \in \mathcal{M}$. Let me compare the transformation laws (3.14) and (3.13) supposing that the components of ψ^{tr} are smooth vectors. The state vector ψ_W^{tr} in the R.H.S. of (3.14a') can be parametrized in terms of ψ_0 and ψ_1 ($\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{M}$) as in eqs. (3.10), $\psi_W^{tr} = (\psi_0 + \epsilon(z) F \psi_1) |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$ that gives

$$\begin{aligned} \delta a &= W^+ X Y |0\rangle \psi_W^{tr} = W^+ X Y [(\psi_0 + \epsilon(z) F \psi_1) |0\rangle + \psi_1 |1\rangle] |0\rangle = \\ &= W^+ (\psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle) |0\rangle - W^+ \epsilon_0 F \psi_1 |0\rangle |0\rangle, \end{aligned}$$

which coincides with the (3.13a).

To compare eqs. (3.13b) and (3.14b) we noted [28] that due to the structure (3.5b) of the Witten action it is sufficient just to look at $(\delta\psi)_w^{tr} = \mathcal{F}_w(XW\alpha)$. The R.H.S. of this formula can be calculated using the following representation for (compare with eq. (B2) in ref. [23])

$$\mathcal{F}_w = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + 2\check{t}(z)|0\rangle\langle 0|) \check{V}(z)$$

that yields

$$(\delta\psi)_w^{tr} = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + 2\check{t}(z)|0\rangle\langle 0|) W\alpha.$$

Exploiting the commutation relation $\{\check{t}(z), F\} = -\ell\check{t}(z)$, we find for the components $\delta\psi_0$ and $\delta\psi_1$ the same transformation rule as in eq. (3.13b). So the equivalence of SUSY transformations (3.14) and (3.13) is established that immediately gives the on-shell closure of the algebra (3.13) due to the closure of the algebra of the Witten transformations [19].

Let me consider the interacting open. It is convenient to write down the action for the open superstring using a single string field in the form

$$S = (\bar{\Phi}, JQ\Phi) + \frac{1}{3}(\bar{\Phi}, J(\Phi \circ \Phi)),$$

where $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ and φ, ψ are functionals from supersymmetric sectors of the NS and $\mathcal{R}$ string, and

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \circ \varphi_2 + \psi_1 \circ \psi_2 \\ \varphi_1 \circ \psi_2 + \psi_1 \circ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

So, to define $\Phi_1 \circ \Phi_2$ it is necessary to define three kinds of multiplication.

As it was demonstrated in [23] it is possible to define the product of the NS and the $\mathcal{R}$ states as well as the product of two $\mathcal{R}$ states by requiring supersymmetry. Naively, one can expect the following consequence of the SUSY invariance

$$V(\Phi \circ \Phi) + (V\Phi) \circ \Phi + \Phi \circ V\Phi = 0,$$

which yields

$$\psi_1 \circ \psi_2 \sim (V_{\mathcal{R}, NS} \psi_1) \circ (V_{\mathcal{R}, NS} \psi_2),$$

i.e. naively one can expect that the product of two $\mathcal{R}$ states is determined in the following way. At first, using $V_{\mathcal{R}, NS}$ operator $\mathcal{R}$ states are converted into the NS states and then it remains to multiply them as two NS states.

But we have to take into account the degeneracy of the metric J . In this case SUSY invariance of interaction yields.

$$V^+ J(\Phi \circ \Phi) + J((V\Phi) \circ \Phi + \Phi \circ V\Phi) = 0.$$

Apart from the formulas defining the NS-R and R-R multiplication, the last equation, put the constraints on the NS-NS multiplication. To complete the construction one needs an explicit form of the NS-NS-NS vertex.

Note that recently the operator realization of the Witten construction has been obtained by Gross and Jevicki [27].

The investigation of the connection between the Witten theory of the interacting superstrings [19] and our theory [23] is now in progress.

References

1. G.Veneziano, Phys.Rep.9C(1984)199
S.Mandelstam, Phys.Rep. 13C(1974) 259
J.Scherk, Rev.Mod.Phys. 47(1975)123
C.Rebbi, Phys.Rep. 12C (1974)1
J.H.Schwarz, Phys.Rep. 8C(1973) 269.
V.Alessandrini, D.Amati, M.Le Bellac, and D.Olive, Phys.Rep. 1C(1971) 269.
B.N.Barbashov and V.V.Nesterenko. Theory of Relativistic String
Moscow, Nauka, 1987.
2. M.B.Green and J.H.Schwarz, Phys.Lett. 149B(1984)117
M.B.Green, J.H.Schwarz, and E.Witten - "Superstring Theory", CUP,
Cambridge, UK(1987)
I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich, Usp.Fiz.Nauk, 146(1985)655
D.I.Kazakov, Usp.Fiz.Nauk, 157(1987)59.
3. N.N.Bogolubov and D.V.Shirkov - "Introduction to the theory of
quantized field", Interscience, N.Y.(1959).
4. W.Lerche, D.Lust, A.Schellekens, Preprint CERN,TH.4590/86.
5. M.J.Duff, T.Inami, C.N.Pope, E.Sezgin and K.S.Stelle, preprint
IC/87/74, CERN-TH 4737/87
6. L.Brink, P.Di Vecchia, P.S.Howe, Phys.Lett. 65B(1976)471
S.Deser and B.Zumino, Phys.Lett. 65B(1976) 369
7. M.O.Katanajev and I.V.Volovich, Phys. Lett.B175 (1986)413.
8. A. Neveu and P.West, Phys.Lett.165B(1985)63.
9. T.Banks and P.West, Phys.Lett.165B(1985)63
10. E.Witten, Nucl.Phys.B268(1986)253
11. G.Thorn, Nucl.Phys.B287(1987)61.
12. I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich. In: "Fields and Geometry",
ed.A.Jadczyk, World Scientific, 1986.
13. I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich, Phys.Lett.B182 (1986)312

14. A.Neveu and P.West, Phys.Lett., B168(1986)192
15. H.Hata, K.Itoh, T.Kunitomo and K.Ogawa, Phys.Lett. B172(1986)196.
16. I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich, Theor.Math.Phys. 67(1986)460; Phys.Lett.B182B(1986)163.
17. H.Hata, K.Itoh, T.Kugo, H.Kunitomo and K.Ogawa, Phys.Rev.D34 (1986)2360; D35(1986)1356.
18. D.Gross and A.Jevicki, Nucl.Phys. B283(1987), 1; Nucl.Phys. B 287(1987)225.
19. E.Witten, Nucl.Phys. B276(1986) 291.
20. Y.Kazama, A.Neveu, H.Nicolai, and P.C.West, Nucl.Phys.B276(1986) 366
21. T.Banks, M.E.Peskin, C.R.Pretishopf, D.Friedan, and E.Martinec, Nucl.Phys.B274(1986) 71
22. H.Terao and S.Uehara, Phys.Lett.173B(1986)
23. I.Ya.Aref'eva and P.B.Medvedev, Preprint ITEP N22(1987).
24. J.Yamron, Phys.Lett.I74B,(1986)69, Preprint UCB-PTH-86/35.
25. H.Ooguri, Phys.Lett.I72B(1986)204
S.P. de Alwis and N.Ohta, Phys.Lett.I74B(1986)573.
W.Siegel, Maryland preprint UMDEPP 87-60(1986)
G.D.Date, M.Gunaydin, M.Pernici, K.Pilch and P van Nieuwenhuizen, Phys.Lett.I71B(1986) 82
A.Le Clair and J.Distler, Nucl.Phys.B273(1986)552
26. B.Sazdovich, Preprint Brown-HET-611.
27. D.J.Gross and A.Jevicki, Preprint Brown-HET-603(1987)
28. I.Ya.Aref'eva and P.B.Medvedev, ITEP preprint I55 (1987)
29. J.-L.Gervais, LPTENS preprint 86/1 (1986),LPTENS preprint 86/29 (1986)
30. I.Ya.Aref'eva and I.V.Volovich, Trieste preprint, IC/87/61
31. G.T.Horowitz, Preprint UCS-BTH-87-38(1987).
32. I.V.Volovich, Theor.Math.Phys. 71(1987)337, Class and Quant Gravity 4 (1987) L83
33. V.S.Vladimirov and I.V.Volovich, Theor.Math.Phys.59(1984)3
34. I.V.Volovich, Preprint CERN-TH-4781/87(1987).
35. E.S.Fradkin and G.A.Vilkovisky, Phys.Lett.55B(1975)224
I.A.Batalin and G.A.Vilkovisky, Phys.Lett 69B(1978) 309.
36. D.Friedan, E.Martinec, and S.Shenker, Nucl.Phys.B271(1986)93.

НОВАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ
НА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОЛЯ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ МОДЕЛЯХ

Р.М.Ибадов

Самаркандский государственный университет им. А.Навои

В.Г.Кадышевский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Отмечено, что вклад вспомогательных полей в лагранжианы теории поля с фундаментальной массой оказывается таким, что простая сумма кинетических членов, отвечающих в новом формализме скалярному, псевдоскалярному и майорановскому полям, является инвариантной относительно преобразований суперсимметрии, присущей модели Весса-Зумино.

Как было установлено ранее^{/1-4/}, в квантовой теории поля с фундаментальной массой (ф.м.) все физические поля появляются в сопровождении вспомогательных полевых переменных, не имеющих своих уравнений движения. Их значения целиком определяются значениями физических полей. Подобная ситуация имеет место и в теории суперсимметрии, хотя происхождение, природа и число вспомогательных полей там совсем другие (см., однако,^{/5/}). Интересно сопоставить оба подхода друг с другом с целью обнаружения хотя бы частичной их эквивалентности.

Суть нашего сообщения сводится к простому замечанию, что в рамках теории поля с ф.м. сумма кинетических членов, отвечающих скалярному, псевдоскалярному и майорановскому полям, инвариантна относительно преобразований суперсимметрии, присущей модели Весса-Зумино^{/6/}. Все дело в том, что само понятие "кинетический член" в нашем подходе приобретает новый смысл (см.^{/4/}).

Введем вначале для перечисленного набора полей переменные $\phi(x, \sigma)$

и $-\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi(x, 0)$:

$(S(x), \xi(x))$ - скалярное поле,

$(P(x), \sigma(x))$ - псевдоскалярное поле,

$(\psi(x), \chi(x))$ - поле Майорана.

По определению размерности всех этих полей - канонические.

Согласно^{/4/}, кинетические члены соответствующих лагранжианов имеют вид^{x)}:

$$L_{kin}[S, \xi] = \frac{1}{2} \frac{\partial S(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial S(x)}{\partial x_\mu} + \frac{M^2}{2} (S(x) - \xi(x))^2, \quad (1)$$

$$L_{kin}[P, \sigma] = \frac{1}{2} \frac{\partial P(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial P(x)}{\partial x_\mu} + \frac{M^2}{2} (P(x) - \sigma(x))^2, \quad (2)$$

$$L_{kin}[\psi, \chi] = \frac{1}{4} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x) + \frac{iM}{4} (\bar{\chi}(x) - \frac{1}{M} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x)) \cdot (\chi(x) - \frac{1}{M} (i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M) \psi(x)), \quad (3)$$

где M - фундаментальная масса. Складывая выражения (1)-(3) и отождествляя слагаемые $\frac{M^2}{2} (S(x) - \xi(x))^2$ и $\frac{M^2}{2} (P(x) - \sigma(x))^2$ со вспомогательными членами в свободном лагранжиане Весса-Зумино для безмассового случая, приходим к выводу, что

$$L_{kin}[S, \xi] + L_{kin}[P, \sigma] + L_{kin}[\psi, \chi] = \quad (4a)$$

$$= L_{m=0}^{WZ} - \frac{M}{4} \bar{\chi}'(x) \chi'(x), \quad (4b)$$

где

$$\chi' \equiv \chi - \frac{1}{M} (i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M) \psi(x). \quad (5)$$

Поскольку поле $\chi'(x)$ полностью отделено от других полей, то (4) будет инвариантным при суперсимметричных преобразованиях Весса-Зумино, если считать $\chi'(x) = invar$.

Выпишем теперь в инфинитезимальной форме окончательный вид суперсимметричных преобразований всех полей, фигурирующих в (4a) (α - беско-

x) Майорановские поля $\psi(x)$ и $\chi(x)$ считаются грассмановыми переменными

вещи (в том числе измерений с широким Майоранчей)^{/7/}:

$$\delta S(x) = \frac{2\psi(x)}{\sqrt{M}}, \quad \delta P(x) = \frac{i\bar{\alpha}\delta^5\psi(x)}{\sqrt{M}},$$

$$\delta \xi(x) = \frac{1}{M^{3/2}} \bar{\alpha} \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \psi(x),$$

$$\delta \sigma(x) = \frac{-i}{M^{3/2}} \bar{\alpha} \delta^5 \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - M \right) \psi(x),$$

$$\delta \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - M \right) \alpha S(x) + \frac{i\gamma^5}{\sqrt{M}} \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - M \right) (\alpha P(x))^{(6)} + \\ + \sqrt{M} (\xi(x) + i\delta^5 \sigma(x)) \alpha,$$

$$\delta X(x) = \left[1 + \frac{i}{M} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \delta \psi(x).$$

В пределе $M \rightarrow \infty$, отвечающем переходу к стандартной теории поля, приращения (6) всех полей обращаются в нуль, т.е. суперсимметричные преобразования вырождаются в тождественные. Чтобы убедиться в исчезновении $\delta \psi(x)$ при $M \rightarrow \infty$, необходимо учесть следующее. Пары полевых переменных вида $\phi(x, 0)$ и $\frac{-i}{M} \frac{\partial}{\partial x^5} \phi(x, 0)$, согласно^{/4/}, играют роль членов Коши для "фундаментального уравнения" теории

$$\left(\square - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - M^2 \right) \phi(x, x^5) = 0. \quad (7)$$

Пологая

$$\phi(x, x^5) = \psi(x, x^5) e^{iMx^5}, \quad (8)$$

будем иметь из (7):

$$\left[\frac{1}{2iM} \left(\square - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^5} \right] \psi(x, x^5) = 0. \quad (9)$$

Следовательно, в пределе $M \rightarrow \infty$ в нулевом приближении

$$\frac{\partial \psi(x, x^5)}{\partial x^5} = 0 \quad (10)$$

и поэтому

$$\phi_0(x,0) = \frac{-i}{M} \frac{\partial \phi_0(x,0)}{\partial x^5}.$$

В следующем приближении

$$\phi_1(x,0) = \frac{-i}{M} \frac{\partial \phi_1(x,0)}{\partial x^5} - \frac{\square}{2M^2} \phi_0(x,0).$$

Таким образом, при выполнении в (6) предельного перехода $M \rightarrow \infty$ надо иметь в виду, что

$$S(x) - \xi(x) = O\left(\frac{1}{M^2}\right),$$

$$\rho(x) - \sigma(x) = O\left(\frac{1}{M^2}\right).$$

Мы не будем воспроизводить модель Весса-Зумино в полном объеме, т.е. с массовыми членами и взаимодействием, поскольку это не дает каких-либо новых результатов. Отметим лишь, что структура массовых членов, как бозонных, так и фермионных, здесь оказывается отличной от той, которая была принята в работах^{1-3/}. Например, свободный лагранжиан нейтральной скалярной частицы массы m в^{1/} имел вид

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial S(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial S(x)}{\partial x_\mu} + \frac{M^2}{2} [\xi(x) - S(x)]^2 - 2M^2 \sinh^2 \frac{\mu}{2} \xi(x) S(x), \quad (11)$$

$$\frac{m}{M} = \sinh \mu,$$

а в рамках модели Весса-Зумино

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial S(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial S(x)}{\partial x_\mu} + \frac{M^2}{2} [\xi(x) - S(x)]^2 + M^2 \sinh \mu (\xi(x) - S(x)). \quad (12)$$

В заключение нам хотелось бы подчеркнуть, что вспомогательные переменные, характерные для теории поля с ф.м., облегчают включение в эту теорию преобразований суперсимметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadyshesky V.G. and Mateev M.D.—Nuovo Cim. v. 87A, N. 3, p. 324, 1985.
2. Chizhov M.V., Donkov A.D., Ibadov R.M., Kadyshesky V.G. and Mateev M.D.—Nuovo Cimento v. 87A, N. 3, p. 350; v. 87A, N. 4, p. 373, 1985.

3. Кадышевский В.Г. "Квантовая теория поля и "максимон" Маркова", ОИЯИ, P2-84-753, Дубна, 1984.
4. Ибадов Р.М., Кадышевский В.Г. "К теории поля с фундаментальной массой". ОИЯИ, P2-86-830, Дубна, 1986.
5. Sohnius M.F., Stelle K.S., West P.C. — Nucl.Phys., B173, p. 127, 1980.
6. Wess J., Zumino B. — Nucl.Phys., B70, 59 1974 .
7. Ибадов Р.М., Кадышевский В.Г. "О преобразованиях суперсимметрии в теории поля с фундаментальной массой", ОИЯИ, P2-86-835, Дубна, 1986.

N.Ilieva

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

Introduction

In the common opinion, anomalous theories have been considered for a time as mathematically interesting but physically unacceptable constructions. So, cancellation of anomalies in the local symmetries has been used as a kind of "selection" rule or a criterion for the physical consistency of different models. This principle was plausible in the GWS model and in D=10 supergravity without matter fields. Nowadays, it is widely used for fixing the gauge group in superstring theories.

The problem with anomalous theories is in their consistent quantization. Since not all classical symmetries are respected on the quantum level, one finds that some of the first-class constraints have become second-class ones, which is crucial for the quantization procedure itself. Some progress in our understanding of anomalies has been achieved with the observation that a scalar field, added by hand to the action through an additional Wess-Zumino term, preserves the constraints to be of the first class after quantization. This maintains gauge invariance on the quantum level^{/1/}. Later it has been shown^{/2,3/} that the W-Z term is an indispensable ingredient of the theory whose presence is simply explained by the impossibility of neglecting the gauge-group volume in the Faddeev-Popov integral in the case of anomalous theories contrary to the case of anomaly-free ones. In any way, it becomes clear that quantum and classical theories may have a different number of degrees of freedom, since some gauge transformations acquire the status of a physical field when gauge-noninvariant interactions are present.

These new developments revived interest in two-dimensional gauge models as a playground where the ideas and mechanisms of gauge-symmetry restoration, anomaly cancellation and consistency of the solution can be verified. For example, the chiral Schwinger model was largely discussed in different approaches because of the contradictory results^{/4,5/}. Recently, both its gauge invariance and non-anomalous nature were argued^{/6/}.

In the present paper an approach to the quantization of anomalous two-dimensional gauge models is developed. It is based on the explicit solution of the constraint equations and controls the gauge invariance at each stage. The paper is organized as follows: Section 1 presents a brief review of the minimal quantization method of gauge theories. In sections 2,3 the "left-handed" QED₁₊₁ and the chiral Schwinger model are considered. A table of the anomalous commutators in D=2 is given in the Appendix.

1. The minimal quantization method

The minimal quantization method^{/1/} is based on the gauge-invariance principle used for the construction of physical variables and in the choice of the energy-momentum tensor. The method is self-consistent in the sense that ensures the same transformation properties under Lorentz transformations for classical and quantum variables. The gauge freedom is reduced to an algebraic one connected with the choice of the time axis of quantization.

Let us illustrate the method by the example of the Schwinger model-massless two-dimensional QED:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} - ie A_{\mu}) \Psi \\ F_{\mu\nu} = & \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \quad \mu, \nu = 0, 1. \end{aligned} \quad (1)$$

According to the minimal quantization method, we exclude the nondynamical field A_0 from (1) through the constraint

$$\frac{\delta S}{\delta A_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{2} (\partial_1 \partial_0 A_1 + e j_0). \quad (2)$$

Then, a transverse projection is done with the operator $\mathcal{V}(A_1)$, $\mathcal{V} = \exp \{ i e \partial_1^{-1} A_1 \}$, following from (2)

$$\begin{aligned} A_1^T &= \mathcal{V}(A) (A_1 + \frac{1}{e} \partial_1) \mathcal{V}^{-1}(A) \\ \Psi^T &= \mathcal{V}(A) \Psi, \quad \bar{\Psi}^T = \bar{\Psi} \mathcal{V}^{-1}(A) \end{aligned} \quad (3)$$

and the effective Lagrangian is obtained

$$\mathcal{L}_{eff}^T = i \bar{\Psi}^T \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi^T - \frac{e^2}{2} (\partial_1^{-1} j_0)^2. \quad (4)$$

We would like to emphasize the main feature of the transverse variables (3) - their invariance under gauge transformations of the initial fields A_{μ}, Ψ /8/

$$\left. \begin{aligned} A_1^g &= g(A_1 + \frac{i}{e} \partial_1) g^{-1} \\ \psi^g &= g \psi \\ \bar{\psi}^g &= \bar{\psi} g^{-1} \\ \sigma^g(A) &= \sigma(A, g) = \sigma g^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1^{T,g} &= \sigma^g(A_1 + \frac{i}{e} \partial_1) (\sigma^g)^{-1} = A_1^T \\ \psi^{T,g} &= \sigma^g \psi \sigma^g = \psi^T \\ \bar{\psi}^{T,g} &= \bar{\psi}^g (\sigma^g)^{-1} = \bar{\psi}^T \end{aligned}$$

The field A_μ disappeared from $\mathcal{L}$, thus reflecting the absence of transverse degrees of freedom in the two-dimensional world. In the general case we are left with the fields $\psi^T, \bar{\psi}^T, A_\mu^T$ and quantize just them and not the initial ones. It is important to note that vacuum has to be defined so as to ensure the positive definiteness of the free fermion Hamiltonian. This task is achieved by filling in the negative energy states in the Dirac sea, i.e. by introducing the Dirac vacuum. The price is the anomalous term in the current commutator though ψ 's themselves canonically anti-commute^{/9/}:

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi^T(y)\} &= \delta(x-y) \quad ; \quad j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \\ [j_\mu(x), j_\nu(y)] &= \frac{i}{\pi} \partial_y \delta(x-y). \end{aligned} \quad (5)$$

Such a commutator structure allows an equivalent formulation of the model in terms of a massive scalar field $\varphi(x)$ through the correspondence relation

$$j_{S\mu}(x) = \frac{\partial_\mu \varphi(x)}{\sqrt{\pi}} \quad ; \quad j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi.$$

So, the mass spectrum is easily found with the help of the Heisenberg equation of motion for $j_{S0}(x)$:

$$\begin{aligned} \partial_0 j_{S0}(x) &= i \int dy [\mathcal{H}^T(y), j_{S0}(x)] = \partial_\mu j_{S\mu} - \frac{e^2}{\pi} \partial_1^{-1} j_{S1} \\ (\mathcal{H}^T \text{ being the Hamiltonian obtained from eq.(4)}) &\text{ that gives us} \\ \partial^\mu j_{S\mu}(x) &= -\frac{e^2}{\pi} \partial_1^{-1} j_{S1}(x) \quad \text{or} \quad (\square + m^2) \varphi(x) = 0 \\ m^2 &= e^2/\pi. \end{aligned} \quad (6)$$

In the same manner the conservation of the vector current $j^\mu(x)$ may be proved

$$\partial_0 j_0(x) = i [H^T, j_0(x)] = \partial_\mu j_\mu \Rightarrow \partial^\mu j_\mu(x) = 0. \quad (7)$$

Note, that in this scheme the role of the Dirac sea is evident since the filling of the negative-energy states is the reason for the appearance of the Schwinger term in (5) and further polarization of this vacuum by the gauge (Coulomb) field leads to the anomaly (6).

The minimal-quantization method is based on the excluding of nondynamical degrees of freedom through their equations of motion (in fact, constraints). So, the choice of the time axis of quantization becomes an essential step that has to be physically motivated. This is the only arbitrariness of our method and it is to be considered separately in each case.

This operator method can be translated into a functional integral language. Let us write the Green-function generating functional

$$\mathcal{Z}[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi) \right\}$$

with $\mathcal{L}$ given by eq.(1). Transition to transverse variables (3) does not cause any change in the fermionic measure since vector gauge invariance is present. However, as $A_0^T = 0$, we have

$$\mathcal{D}A_\mu \rightarrow \mathcal{D}A_0^T.$$

Solving the constraint for A_0 is equivalent to integrating over $\mathcal{D}A_0^T$ in the sense of extremals. So, we are led to the following $\mathcal{Z}^T[\bar{\eta}^T, \eta^T]$

$$\mathcal{Z}^T[\bar{\eta}^T, \eta^T] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}^T \mathcal{D}\psi^T \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_{eff}^T + \bar{\eta}^T \psi^T + \bar{\psi}^T \eta^T) \right\}$$

with

$$\eta^T = \sigma(A) \eta$$

$$\bar{\eta}^T = \bar{\eta} \sigma^{-1}(A)$$

and $\mathcal{L}_{eff}^T$ given by eq.(4). Now, the bosonization is performed^{/10/}

$$\psi^T(x) = : e^{i\sqrt{2} \phi_S(\psi(x) + \mathcal{Z}(x))} : \chi_0(x) \quad , \quad i\delta\chi_0(x) = 0$$

and we finally obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\bar{\eta}^T, \eta^T] = & \int \mathcal{D}\bar{\chi}_0 \mathcal{D}\chi_0 \mathcal{D}\mathcal{Z} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \mathcal{Z} \partial^\mu \mathcal{Z} + i \bar{\chi}_0 \not{p}^T \partial_\mu \chi_0 + \mathcal{L}_{(S)} \right] \right\} \\ \mathcal{L}_{(S)} = & \bar{\eta}^T : e^{i\sqrt{2} \phi_S(\psi + \mathcal{Z})} : \chi_0 + \bar{\chi}_0 : e^{i\sqrt{2} \phi_S(\psi + \mathcal{Z})} : \eta. \end{aligned} \quad (8)$$

Here φ is a massive scalar field and Σ is a massless one, quantized with an indefinite metrics. Its introduction is connected with the consistence of bosonization procedure on the Green-function level in the case of the free fermion theory.

Generating functional (8) leads to the correct two-point fermion Green function in the model^{/10/}

$$G(x-y) = e^{-i\int [\Delta_m(x-y) - \Delta_0(x-y)]} G_0(x-y).$$

where Δ_m , Δ_0 and G_0 are the free Green functions of a massive and massless scalar field and massless spinor field respectively.

Note, that the fermion measure in (8) is not changed again since the transverse spinors $\psi^T, \bar{\psi}^T$ are invariant under arbitrary gauge transformation. So, the change of the action contains the whole physically significant information.

However, this is not the case in an anomalous theory. Due to the anomaly, transition to transverse variables in $\mathcal{L}$ is accompanied by a Jacobian factor apart of that, coming from the bosonization. Thus, the operator formulation is more convenient for consideration of anomalous theories.

2. Two-dimensional U(1) theory with left-handed fermions

In the recent discussion of the chiral Schwinger model two different (though similar) theories have been considered: a model with only left-handed fermions and a model with left-current coupling to the gauge field. We shall treat them separately.

The "left-handed" QED₁₊₁ is determined by^{*)}

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_L \not{D} \psi_L = \\ &= \frac{1}{2} \not{D}_\mu \psi_L^\dagger \not{D}_\mu \psi_L + e \psi_L^\dagger \psi_L A_+ \end{aligned} \quad (9)$$

^{*)} Throughout this paper the following γ -matrix convention is adopted

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5)$$

and

$$g_{00} = -g_{11} = 1; \quad \psi_{L(R)} = \Gamma_{-(1)} \psi.$$

So, we have two possible candidates for a time axis: x^0 and $x^+ = x^0 + x^1$. As has been mentioned above, this is the only ambiguity in our quantization procedure.

The choice $t = x^0$ leads to the constraint

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_0} = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{\partial_1} (\partial_1 \partial_0 A_1 + e \mathcal{Y}_0^+), \quad (10)$$

where

$$\mathcal{Y}_\mu^+ = \bar{\Psi} \Gamma_\mu \not{f}_\mu \Psi = \frac{1}{2} (j_\mu^+ + j_{\mathcal{Y}_\mu}^+), \quad (\mathcal{Y}_0^+ = \mathcal{Y}_1^+ = \Psi_L^+ \Psi_L = \Psi^+ \Gamma_- \Psi)$$

is just the Noether current in the theory. Lagrangian (9) on the solution of (10) becomes

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \Gamma_\mu \not{f}_\mu \partial_\mu \Psi + \frac{e^2}{2} \mathcal{Y}_0^+ \frac{1}{\partial_1^2} \mathcal{Y}_0^+ + e \mathcal{Y}_0^+ \partial_1^{-1} \partial_0 A_1 - e \mathcal{Y}_1^+ A_1$$

and for the Hamiltonian we find

$$\mathcal{H} = i \bar{\Psi} \Gamma_1 \not{f}_1 \partial_1 \Psi - \frac{e^2}{2} \mathcal{Y}_0^+ \frac{1}{\partial_1^2} \mathcal{Y}_0^+ + e \mathcal{Y}_1^+ A_1.$$

It is easily seen that neither a vector nor a (left) chiral gauge invariance takes place here

$$\begin{aligned} \partial_0 j_0^+(x) &= i [H, j_0^+(x)] = \partial_1 \mathcal{Y}_1^+ + \frac{e^2}{2\pi} \partial_1^{-1} \mathcal{Y}_0^+ \\ \Rightarrow \partial^\mu j_\mu^+(x) &= -\partial_1 \mathcal{Y}_1^+(x) + \frac{e^2}{2\pi} \partial_1^{-1} \mathcal{Y}_0^+(x) \end{aligned} \quad (11a)$$

and

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathcal{Y}_0^+(x) &= i [H, \mathcal{Y}_0^+(x)] = \partial_1 \mathcal{Y}_1^+(x) + \frac{e^2}{2\pi} \partial_1^{-1} \mathcal{Y}_0^+(x) \\ \Rightarrow \partial^\mu \mathcal{Y}_\mu^+ &= \frac{e^2}{2\pi} \partial_1^{-1} \mathcal{Y}_0^+. \end{aligned} \quad (11b)$$

In these calculations the anomalous commutators have been taken into account (see Appendix)

$$[j_0^+(x), j_0^+(y)] = [\mathcal{Y}_1^+(x), \mathcal{Y}_1^+(y)] = \frac{1}{2\pi i} \partial_x \delta(x-y) \quad (12a)$$

$$[j_0^+(x), \mathcal{Y}_1^+(y)] = \frac{1}{2\pi i} \partial_y \delta(x-y) \quad (12b)$$

$$[H_0, \mathcal{Y}_0^+(x)] = -[\mathcal{H}_0, \mathcal{Y}_1^+(x)] = \frac{ie}{2\pi} \partial_1 A_1 \quad (12c)$$

There are different ways to compute them. We have followed the BJJ-method (see, for example, ^{/11/}).

Since just the current that is coupled to the gauge field, is anomalous, one cannot expect that transition to transverse variables will make the model content more transparent on the Hamiltonian level. Indeed, one finds

$$\mathcal{H}^T = i \bar{\Psi}^T \Gamma_+ \not{\partial}_+ \Psi^T - \frac{e^2}{2} J_0^+ \frac{1}{\partial_-^2} J_0^+ \quad (13)$$

with the same expression for the chiral-current divergence (11b).

Relations (13), (11b) are very similar to (4), (6). Nevertheless, an analogous interpretation in terms of a bose field is impossible due to eq. (11a). It destroys the canonical structure of the pair $\{\Psi, \pi = \partial_0 \Psi\}$, defined through the relation

$$J_\mu^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_\mu \Psi(x)$$

since commutators $[\Psi(x), \Psi(y)]$ and $[\pi(x), \pi(y)]$ do not vanish.

The other possibility for t is $t = x^+$. The Lagrangian takes the form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} (\partial_- A_+ - \partial_+ A_-)^2 + i \Psi_c^+ \partial_+ \Psi_c + e \Psi_c^+ \Psi_c A_+ \quad (14)$$

Instead of (10) we have the constraint

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta A_+} = 0 \Rightarrow A_+ = \frac{1}{2_-^2} (\partial_- \partial_+ A_- + 4e \mathcal{J}_+)$$

and the Lagrangian on its solution becomes

$$\mathcal{L} = i \Psi_c^+ \partial_+ \Psi_c + 2e^2 \mathcal{J}_+ \frac{1}{\partial_-^2} \mathcal{J}_+ + e \mathcal{J}_+ \partial_-^{-1} \partial_- A_- \quad (16a)$$

The corresponding Hamiltonian is

$$\mathcal{H} = -2e^2 \mathcal{J}_+ \frac{1}{\partial_-^2} \mathcal{J}_+ \quad (16b)$$

Since the only anomalous commutator in the cone frame is (see Appendix)

$$[\mathcal{J}_+(x), \mathcal{J}_+(y)] = -\frac{1}{2\pi i} \partial_- \delta(x^- - y^-),$$

the Heisenberg equation with x^+ as a physical time and Hamiltonian (16b) determine the following time evolution of $\mathcal{J}_+$:

$$\partial_+ \mathcal{I}_+ = \frac{i}{2} [H, \gamma_+(x)] = -\frac{e^2}{\pi} \partial_+^{-1} \gamma_+(x).$$

In other words, $\mathcal{I}_+$ satisfies the Klein-Gordon equation

$$(\square + m^2/4) \mathcal{I}_+ = 0$$

$$\square = \partial_+ \partial_- , \quad m^2 = \frac{4e^2}{\pi}.$$

Recalling the one-parameter formula for the mass spectrum of the model^{/12/}

$$m^2 = \frac{e^2}{\pi} \cdot \frac{a^2}{a-1} \quad (17)$$

one easily sees that we have just singled out the value $Q=2$.

Fig. 1 gives some evidence for the physical motivation of the choice of x^+ as a time axis. The only physical field ψ_- propagates just along this axis and the only interaction that is present in the model has a Coulomb structure a) with respect to the frame (x^0, x^1) when $t = x^0$, b) with respect to the cone frame when $t = x^+$.

So, it is not surprising that the choice of case (b) ensures internal consistency of our further considerations.

In such a way, the minimal quantization method leads to a consistent unitary theory with mass generation. The massive mode represents a fermion bound state and the value of the mass is fixed uniquely.

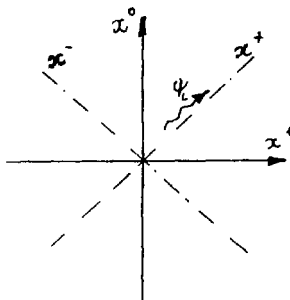


Fig. 1

In the functional integral language the situation looks out much more complicated. The transition into the transverse space is connected with a nontrivial Jacobian factor. Here we mean consideration of quantum fermions in an external field which has to be consistently quantized. If we start from a classical system and try to quantize it as a whole, these troublesome transformations can be performed on a classical level without any influence on the fermionic measure,

which is constructed directly as $\partial\bar{\Psi}^T\partial\Psi^T$, thus simplifying the problem. However, the latter treatment in fact ignores the anomalous nature of the model.

3. The chiral Schwinger model

The chiral version of two-dimensional QED is determined by the following Lagrangian:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi} \not{p}^{\mu} \left(\partial_{\mu} - ie \frac{1-\gamma_5}{2} A_{\mu} \right) \Psi = \\ & = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 + i\psi_R^+ \partial_- \psi_R + i\psi_L^+ \partial_- \psi_L + e\psi_L^+ \psi_L A_+.\end{aligned}\quad (18)$$

Though only left current is coupled to the gauge field, the presence of R-fermion term in (18) changes significantly the situation if compared to the one of the previous section.

Let us begin with the case $t = x^0$. The constraint equation is the same as (10) and on its solution (18) becomes

$$\mathcal{L} = \frac{e^2}{2} \gamma_0^+ \frac{1}{\partial_+} \gamma_0^+ + i\bar{\Psi} \not{p}^{\mu} \partial_{\mu} \Psi + e\gamma_0^+ \partial_+^{-1} \partial_0 A_1 - e\gamma_1^+ A_1, \quad (19)$$

where the notation of section 2 is used. So, for the Noether current in the model we find

$$\partial^{\mu} j_{\mu} = -\frac{e}{2\pi} \partial_1 A_1 + \frac{e^2}{2\pi} \partial_1^{-1} \gamma_0^+. \quad (20)$$

For the left and right current we find, respectively,

$$\begin{aligned}\partial^{\mu} \gamma_{\mu}^+ &= \frac{e^2}{2\pi} \partial_1^{-1} \gamma_0^+ \\ \partial^{\mu} \gamma_{\mu}^- &= -\frac{e}{2\pi} \partial_1 A_1,\end{aligned}\quad (21)$$

Eq. (21) reflects the presence of the R-fermion term in the free Hamiltonian. Though this current is not coupled to the gauge field, its anomaly can be removed in a suitable gauge. This point is new as compared to the case in the above section as well as to the nonanomalous theories (for example, the situation with the axial current in the ordinary Schwinger model).

The fermion asymmetry suggests two types of "transverse" variables

A)

$$A_+^T = \sigma \left(A_+ + \frac{i}{e} \partial_+ \right) \sigma^{-1}$$

$$\psi_L^T = \sigma \psi_L$$

$$\psi_R^T = \sigma \psi_R$$

and

B)

$$A_+^T = \sigma \left(A_+ + \frac{i}{e} \partial_+ \right) \sigma^{-1}$$

$$\psi_L^T = \sigma \psi_L$$

$$\psi_R^T = \psi_R$$

where $\sigma = \exp \left\{ -ie \partial_+^{-1} A_+ \right\}$.

So, we obtain two different Hamiltonians

$$\mathcal{H}^{(T,A)} = i \bar{\psi}^{(T,A)} \not{\partial}_+ \psi^{(T,A)} - \frac{e^2}{2} \bar{\psi}_0^+ \frac{1}{\partial_+^2} \psi_0^+ - e \bar{\psi}_+ A_+$$

$$\mathcal{H}^{(T,B)} = i \bar{\psi}^{(T,B)} \not{\partial}_+ \psi^{(T,B)} - \frac{e^2}{2} \bar{\psi}_0^+ \frac{1}{\partial_+^2} \psi_0^+ \quad (22)$$

Note that in $\mathcal{H}^{(T,A)}$ a new interaction term is present which points the difference between the transverse projection and the gauge fixing in this anomalous model. Of course, the same relations (20), (21) for current divergences take place.

Thus, we are faced with a situation that is analogous to the one in the "left-handed" QED₁₊₁. In fact, ψ_L 's and ψ_R 's propagate separately along x^+ and x^- , respectively.

Right fermions do not interact and the interaction between left currents is of a Coulomb type with respect to the frame

(x^0, x^1) (case "a").

So, a suitable rotation of the coordinate frame seems natural with x^+ as a time axis (case "b"). The Lagrangian then takes the form

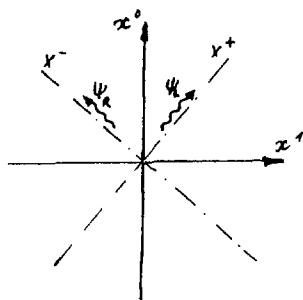


Fig. 2

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g} (\partial_- A_+ - \partial_+ A_-)^2 + i \psi_L^+ \partial_+ \psi_L + i \psi_R^+ \partial_- \psi_R + e \bar{\psi}_+ A_+ \quad (23)$$

and the equations for nondynamical variables A_+ and ψ_R are

$$\partial_-^2 A_+ = \partial_- \partial_+ A_- + 4e \partial_+ \psi_+$$

$$\partial_- \psi_R = 0.$$

On their solutions Lagrangian (23) coincides with the corresponding expression (16a) in left handed QED₁₊₁. So, a massive scalar mode with $m^2 = 4e^2/\pi$ is found.

The R-fermions which propagate freely along the x^- -axis give rise to an additional massless mode.

There is one more possible choice: $t = x^-$ (case "c"), that means A_- and ψ_L are the nondynamical variables with the following equations of motion:

$$\partial_+ A_- = \partial_- A_+ \Rightarrow \mathcal{F}_{-+} \equiv 0$$

$$\partial_+ \psi_L = 0 \quad (\text{or } \partial_+ \psi_L^T = 0, \psi_L^T = \psi \psi_L).$$

Lagrangian (23) takes on their solutions the form

$$\mathcal{L} = i \psi_R^+ \partial_- \psi_R.$$

So, we are dealing with a free fermion theory, which is equivalent, as is known, to a free massless scalar field one.

Conclusions

We have used the ideas of the minimal quantization method in the case of anomalous gauge models in two-dimensional space-time. The fermion asymmetry in the models under consideration puts the problem of a correct choice of the time axis of the system we are going to quantize in. This step is essential since it determines the structure of the constraints in the theory (the equations of motion for its nondynamical variables). Remind that it is just the Gauss law (the constraint that is connected with the nondynamical component of the gauge field) that causes troubles in the anomalous theories.

We have shown that the natural and physically motivated choice is the lightcone frame. In this frame the Coulomb interaction (the only one that is present in these models) is consistent with the fermion propagation direction.

Quantization then leads to the mass spectrum containing
 - a massive scalar particle (fermion bound state) with
 $m^2 = 4e^2/\pi$ in "left-handed" QED₁₊₁;

- a massive ($m^2 = 4e^2/\mathcal{T}$) and a massless scalar modes in the chiral Schwinger model.

We have obtained consistent, unitary theories with uniquely determined mass spectra. The value $\alpha = 2$ of the regularization parameter in the mass formula is singled out (see, also ^{13/}) due to the requirement for self-consistence of the minimal quantization method. So, this requirement plays an analogous role with the gauge-invariance principle which fixes the value of the parameter α in the case of anomaly free theory.

I express my gratitude to Dr.V.N.Pervushin for introducing me to this problem and for helpful suggestions. I would also like to thank Profs. B.M.Barbashov and A.V.Efremov for valuable discussions and A.V. Radyushkin and E.A.Ivanov for fruitful conversations.

Appendix

To calculate the anomalous commutators in the models under consideration we use the method of ref. ^{11/}. We consider currents j_μ and the free Hamiltonian $\mathcal{H}_0$ as local limits of the following functionals after their regularization

$$\mathcal{J}(F) = \int dx dy \Psi^+(x) F(x, y) \Psi(y) \Gamma$$

$$H(F_1) = \int dx dy \Psi^+(x) F_1(x, y) \Psi(y) \Gamma ; F_1(x, y) = \partial_y F(x, y),$$

where

$$F(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_1 dq_1 e^{-ik_1 \frac{x_1+y_1}{2}} e^{-iq_1(x_1-y_1)} \tilde{F}(k_1, q_1) \quad (A.1)$$

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathcal{J}_0(F) \rightarrow j_0 \\ \gamma_5 & \text{for } \mathcal{J}_1(F) \rightarrow j_1 \\ \gamma_5 & \text{for } H(F_1) \rightarrow \mathcal{H}_0. \end{cases}$$

For currents $\bar{\Psi} \gamma_\mu^{\pm} \Psi$ this Γ -matrix acquires additional projection factors $\Gamma_{\pm}^{\pm}$. The change of the fermion Green function under vector and axial gauge transformations is taken into account

$$\Psi(x) \rightarrow \exp\{i\lambda(x)\} \Psi(x)$$

$$S_0(x-y) \rightarrow e^{-i\lambda(x)} S_0(x-y) e^{i\lambda(y)}. \quad (A.2)$$

The anomalous term in commutator $[\mathcal{J}(F), \mathcal{J}(G)]$ is calculated

as

$$\alpha(F, G) = -\text{tr} [F, G] \mathcal{T} \frac{1}{i} S^{\text{int}}(x-y) \Big|_{x^0=y^0=0} p_0; \quad \mathcal{T} = P_F P_G.$$

So, the following commutation relations are obtained

$$[J_0^+(x), J_0^+(y)] = [J_1^+(x), J_1^+(y)] = \frac{1}{2\pi i} \partial_x \delta(x-y)$$

$$[J_0^+(x), J_1^+(y)] = \frac{1}{2\pi i} \partial_y \delta(x-y)$$

$$[H_0, J_0^+(x)] = -i \partial_x J_1^+ + \frac{i}{2\pi} \partial_x^2 \alpha(x)$$

$$[H_0, J_1^+(x)] = -i \partial_x J_0^+$$

which have to be used when gauge transformations are performed on the operator level.

Note, that in terms of the transverse variables $\Psi^T, \bar{\Psi}^T$ there are no anomalous terms in commutators with H_0 . The reason is in the invariance of Ψ^T 's under gauge transformations of Ψ 's, hence in the absence of relation (A.2).

Calculations in terms of cone variables with x^+ as a physical time can be performed in a similar way with the following differences taken into account:

i) instead of (A.1) we have

$$F(x^-, y^-) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_- dq_- e^{ik_- \frac{x^-+y^-}{2}} e^{iq_-(x^- - y^-)} \tilde{F}(k_-, q_-)$$

ii) the equal-time Green function has the form

$$S(x^-) \Big|_{x^0=0} = -\frac{1}{4\pi} \int \theta(p_-) e^{\frac{i}{2} p_- x^-} dp_-.$$

So, we find the only anomalous commutator

$$[J_1(x^-), J_1(y^-)] = -\frac{1}{2\pi i} \partial_- \delta(x^- - y^-)$$

which has to be used in solving the corresponding Heisenberg equation

$$\partial_+ \mathcal{O} = \frac{i}{2} [H, \mathcal{O}]$$

that follows from the representation of the wave function as

$$\Psi = \int dp F(p) e^{-\frac{i}{2} (p \cdot x^- + p_+ x^+)}.$$

The Klein-Gordon equation in this case reads

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu + \frac{1}{4} m^2\right) \Psi = 0.$$

References

1. Faddeev L.D., Shatashvili S.L. - Phys.Lett., 1986, 167B, p.225
2. Babelon O., Shaposnik F.A., Viallet C.M. - Phys.Lett., 1986, 177B, p.385
3. Harada K., Tsutsui J. - Tokyo Preprint TIT-HEP 94, Tokyo, 1986
4. Jackiw R., Rajaraman R. - Phys. Rev. Lett., 1985, 54, p.1219
Rajaraman R. - Phys.Lett., 1985, 154B, p.305
5. Hagen C.R. - Phys.Rev.Lett., 1985, 55, p.2223
Das A. - Phys.Rev.Lett., 1985, 55, p.2126
6. Falck N.K., Kramer G. - DESY Preprint 86-145, Hamburg, 1986
7. Ilieva N., Pervushin V. - Proceedings of VIII International Seminar on the Problems of High Energy Physics (Dubna, 1986), vol. 1, p.69, Dubna, 1987 (D1,2-86-668)
Ilieva N., Nguyen Suan Han, Pervushin V. - Yad.Fiz., 1987, 45,p. 1039
8. Pervushin V. - Riv.Nuovo Cim., 1985, 10, No.8, p.1
9. Ilieva N., Pervushin V. - Yad.Fiz., 1984, 39,p. 1011
10. Ilieva N., Pervushin V. - JINR Communications, E2-85-355, Dubna, 1985.
11. Jo S.-G. - Preprint CTP*1419, Cambridge, 1986
12. Schaposnik F.A. - Preprint PAR LPHE 85/52, Paris, 1985
13. Shatashvili S.L. - Teor.Mat.Fiz., 1987, 71, p.40

КХД И ДИФРАКЦИЯ

Л.Л. Енковский, Б.В. Струминский

Институт теоретической физики АН УССР, Киев

Мы обсудим достижения и проблемы в применении КХД к процессам рассеяния адронов при высоких энергиях, $S \gg m^2$, и фиксированных значениях переданного импульса, $|t| \lesssim m^2$. Эти процессы определяются обменом в t -канале вакуумными особенностями с положительной и отрицательной C -четностью, называемыми соответственно помероном и оддероном. В КХД им соответствует обмен бесцветной комбинации глюонов, причем предполагается, что доминирует вклад с минимальным их числом, обеспечивающим соответствующие квантовые числа (два и три глюона соответственно для померона и оддерона).

Задачей теории является определение характера сингулярностей в J -плоскости, формы и параметров траектории и вычета.

В КХД, несмотря на значительные усилия, эта задача далека от решения — главным образом из-за проблемы заперзания кварков. Отметим основные достижения в этом направлении.

Л.Н. Липатовым и сотрудниками [1] в приближении ведущих логарифмов пертурбативной КХД с фиксированной константой связи показано, что радиализованному двухглюонному обмену (рис.1) в J -плоскости соответствует разрез,

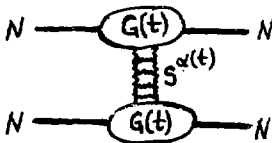


Рис. 1

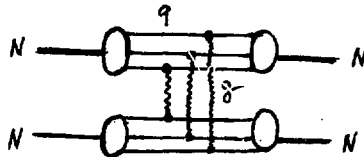


Рис. 2

начинающийся в точке $\Delta = J - 1$, причем $\Delta \geq 0,3 \div 0,4$.

При включении "бегущей" константы связи КХД этот разрез распадается на бесконечную серию полюсов с интерсептом от 1 до $1 + \Delta$. Это все, что известно о помероне в КХД.

Трехглюнный обмен (оддерон) в борновском приближении изучался в работах [2], в которых были получены уравнения на связанное состояние трех глюонов (рис.2). Его решение, возможно, прольет свет на соотношение между параметрами померона и оддерона, которые пока определяются лишь путем экспериментальных подгонок.

Первым экспериментальным указанием на вклад оддерона явились данные об упругом pp - и $p\bar{p}$ -рассеянии при энергии $\sqrt{s} = 53$ ГэВ. Малость эффекта свидетельствует о том, что при этих энергиях вклад оддерона подавлен по сравнению с вкладом померона. Не исключено, однако, что относительный вклад его с энергией будет расти и это приведет к новым наблюдаемым эффектам. Возможно, таким эффектом является большое значение $\rho(s) = \text{Re} T(s,0) / \text{Im} T(s,0) = 0,24$, измеренное недавно на коллайдере SPS при $\sqrt{s} = 546$ ГэВ.

Параметры траекторий померона и оддерона в принципе можно определять также из данных ($t > 0$) о массах и спинах глюоболов [3]. К сожалению, экспериментальный статус этих частиц пока неоднозначен, поэтому такие подгонки могут лишь дополнять сведения о траекториях, полученных из данных о рассеянии, т.е. при $t < 0$.

Упомянутый выше подход Липатова и других [1,2] дает информацию о "пропегаторе" (рис.1,2), но не решает проблемы вершин, связанных с волновыми функциями или формфакторами сталкивающихся адронов.

Интересна идея Доннаки-Ландскофа [4], согласно которой померон связывается с кварками нуклона как "фотон" (с положительной C -четностью), т.е. посредством γ_m -матрицы. Косвенным подтверждением такой аналогии является выполнение эмпирического отношения $\sigma_t^{p^+}/\sigma_t^{p^-} = 2/3$. Проверкой ей будет служить сравнение различных спиновых эффектов с экспериментом.

Отбросив (на основании свойства факторизации) экспоненциальный реджевский вычет с произведением формфакторов двух вершин

$$e^{\beta \alpha(t)} = [F(t)]^2$$

(для определенности рассматриваем NN - рассеяние) и приняв дипольную параметризацию для формфактора нуклона

$$F(t) = (1 - \beta t)^{-2}, \quad \beta = \frac{1}{0,71 \text{ ГэВ}^2},$$

получим следующую параметризацию траектории вакуумного полюса

$$\alpha(t) = \alpha_0 - \gamma \ln(1 - \beta t).$$

Приведенные выше соображения и фрагментарные сведения из КХД желательно использовать при построении реалистичной модели амплитуды рассеяния. Сложность задачи состоит в том, что этих сведений слишком мало для ее решения. Единственный путь состоит в использовании дополнительной информации, основанной на богатом экспериментальном материале, накопленном о $p\bar{p}$ - и $p\bar{p}$ -рассеянии при высоких энергиях.

Удобной феноменологической моделью дифракции адронов является развитая в цикле работ (см. обзор [5] и цитированную в нем литературу) модель дипольного померона (ДП). Особенно просты и наглядны его свойства в случае линейной траектории $\alpha(t) = 1 + \Delta + \alpha' t$:

$$T(s, t) = \frac{is s_0}{16\pi\alpha'} \sum_{i=1}^2 c_i R_i^2 e^{R_i^2 t}, \quad (1)$$

где

$$c_1 = 1/6, \quad c_2 = \lambda - 1/6, \quad R_1^2 = \alpha'(b + L - \frac{i\pi}{2}), \quad R_2^2 = \alpha'(L - \frac{i\pi}{2}),$$

$$L = \ln(s/s_0).$$

Отметим, что следующее из КХД условие $\Delta > 0$ приводит к степенному росту сечений, нарушающему границу Фруассара и условие унитарности. Этого нарушения не будет, если, следуя квантовой теории поля, рассматривать выражение (1), как и вклад диаграммы, изображенной на рис.1, в качестве "затравки". Поправки к нему, вычисляемые, например, в рамках эйконального или ω -матричного подхода (см. [5]), восстанавливают унитарность и приводят к фруассаровскому насыщению.

Возникающий при этом знакопеременный ряд для амплитуды может привести к осцилляциям в дифференциальном сечении, структура которых, однако, не согласуется с экспериментальными данными. По этой причине нам представляется предпочтительнее модель (1), в которой дифракционный минимум, соответствующий экспериментальным данным, генерируется в "борновском" члене (1).

Из подгонок модели (1) к данным о $p\bar{p}$ - и $p\bar{p}$ -рассеянии при максимальных ускорительных энергиях следует значение $\Delta = 0,06$ (см. [5]), однако, если учесть тенденцию, наблюдаемую в поведении сечений в широком интервале энергий и высокое значение $\Delta_0 > 0,3$, следующее из КХД [1], то можно принять

$$\Delta \rightarrow \Delta(s) = \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{\ln(s/\Lambda^2)}. \quad (2)$$

Эффективная особенность с движущимся интерсептом (2) является удобной и емкой параметризацией обмена бесконечным числом полюсов в КХД [1]:

$$T(s,t) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{s}{s_0} \right)^{1+\Delta_k+\alpha(t)}.$$

Для доказательства (2) необходимо знать зависимость Δ_k и c_k от k . Согласно результатам [1] $\Delta_k \simeq 0,4/(k+1)$, $k=0,1,\dots$,

однако c_k в этом подходе не определено.

Модель упругого рассеяния (I) обобщается на процессы дифракционной диссоциации (рис. 3).

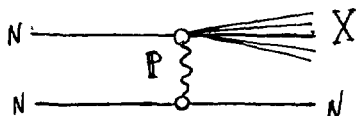


Рис. 3

Пусть $\sigma_t \sim n_A n_B \sim n^2 \sim g(s)$, где n - число частиц в конечном состоянии, а $g(s)$ - "константа" связи в модели (I). Тогда амплитуду однократной диссоциации (рис. 3) в представлении прицельного параметра (см. [5]) можно записать как

$$A_{SD}(s, \vartheta) = c \sqrt{g} e^{-x} / (1 + g e^{-x})^2,$$

где

$$x = \frac{\vartheta^2 (b+L)}{4\alpha' [(b+L)^2 + \pi^2/4]}.$$

Отсюда сечение однократной дифракционной диссоциации равно

$$\sigma_{SD} = c \int_0^\infty d\vartheta \frac{\sqrt{g} e^{-x}}{(1 + g e^{-x})^2} = \frac{c \sqrt{g}}{1+g} (1 + \lambda \ln s) = \frac{c}{\sqrt{g}} \sigma_{in}(s).$$

Свободный параметр c можно исключить, вычислив отношение при двух энергиях:

$$\sigma_{SD}(s_2) = \sigma_{SD}(s_1) \frac{\sigma_{in}(s_2)}{\sigma_{in}(s_1)} \left[\frac{g(s_1)}{g(s_2)} \right]^{1/2},$$

где (см. [5])

$$g(s_2) = g(s_1) \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^\Delta, \quad \Delta = 0,06.$$

Используя экспериментальные данные при энергии ISR ($\sqrt{s} = 53 \text{ ГэВ}$):

$$q = 0,49, \quad b_{in} = 31,29 \text{ мбн}, \quad b_{SD} = 7,3 \pm 0,4 \text{ мбн},$$

получим предсказание для энергии коллайдера $\sqrt{s} = 546 \text{ ГэВ}$

$$q = 0,66 \quad b_{in} = 47,68 \text{ мбн} \quad b_{SD} = 9,6 \pm 0,5 \text{ мбн},$$

которое согласуется с экспериментальными данными $9,4 \pm 0,7 [6]$.

Приведем такое же предсказание для энергий УНК:

$\sqrt{s}$	300 ГэВ	2,2 ТэВ	6 ТэВ
$b_{SD}(\text{мбн})$	$10,1 \pm 0,5$	$12,5 \pm 0,7$	$11,8 \pm 0,5$

Как видно из приведенных результатов, на УНК ожидается смена режима в зависимости b_{SD} от S .

В заключение отметим, что, вопреки ожиданиям, дифракционное рассеяние с ростом энергии становится не проще, а сложнее. Пока теория не в состоянии ни предсказать, ни объяснить разнообразие явлений, обнаруживаемых в опытах по упругой и неупругой дифракции.

Литература

1. Fadin V.S., Kuraev, Lipatov L.N. - Phys. Lett., B, 1975, 60, p.150.
Липатов Л.Н. - ЖЭТФ 1986, 90, с.1536.
2. Jaronzewicz T., Kwiesinski J. - Z.Phys. 1982, 12, p.167.
3. Енковский Л.Л., Струминский Б.В., Шелюженко А.Н. В кн.: Проблемы физики высоких энергий и теории поля, с. 319, Москва, "Наука", 1987.
4. Donnachie A., Landshoff P. - Nucl.Phys.B, 1984, 231, p.189;
ibid. 1986, 267, p.690;
Landshoff P.V., Nachtmann O. Vacuum structure and diffraction scattering. DAMTP 86/27 preprint.
5. Валя А.Н., Енковский Л.Л., Струминский Б.В. - ЭЧАЯ 1988, 19, с. 180.
6. Bernard D., Bozzo M., Braccini P.L. - Phys.Lett., B, 1987, p.227.

КВАРК-ГЛЮОННАЯ ПЛАЗМА ПРИ КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТИ БАРИОНОВ И В ПЕРЕДЕЛЕ БОЛЬШИХ N_c

С.И. Азаков

Институт физики АН АзССР, Баку

1. Введение

В настоящее время можно считать вполне установленным тот факт, что сильно взаимодействующая материя ведет себя как система, претерпевающая фазовый переход (см. например, обзоры [1,2]). При достаточно высокой температуре и/или большой барионной плотности происходит высвобождение цвета (явление деконфайнмента), и в системе имеет место фазовый переход: из фазы адронного газа, где кварки и глюоны удерживаются внутри адронов, она превращается в кварк-глюонную (КГ) плазму, в которой силы между кварками становятся очень слабыми за счет дебаевской экранировки. Такое критическое поведение можно обнаружить, проведя компьютерные монте-карловские вычисления в чисто глюонной $SU(3)$ теории на решетке. Скачок плотности энергии или параметра порядка (вильсоновской петли) с ростом температуры указывает на наличие фазового перехода первого рода. В случае КХД на решетке (включающей и динамические фермионы) ситуация менее ясная. Известно, что в этом случае вновь имеет место явление деконфайнмента, но род фазового перехода все еще твердо не установлен. При температурах много больше критической, $T_c \approx 200$ МэВ, кварк-глюонную плазму можно с хорошим приближением считать идеальным газом.

Идеальный КГ-газ мы будем рассматривать в конечном объеме, так как, во-первых, компьютерные вычисления в КХД при $T \neq 0$ проводятся для решеток конечного размера, во-вторых, в соответствии с общепринятой в настоящее время картиной формирования КГ-плазмы сначала адроны превращаются в КГ-мешки конечного объема, внутри которых КГ-газ можно рассматривать как идеальный, а наступающее при дальнейшем повышении температуры перекрытие этих мешков по-прежнему позволяет говорить об идеальном газе в конечном объеме.

На КГ-газ нужно наложить условие бесцветности. Даже несмотря на то, что при высоких температурах и/или высоких плотностях кварки и глюоны "забывают" о том, "внутренностями" какого адрона они являлись

ранее, вся система по-прежнему должна быть бесцветной. Это означает, что при нахождении следа матрицы плотности и других операторов нужно рассматривать только состояния, изменяющиеся по синглетному (бесцветному) представлению группы глобальной внутренней симметрии $SU(N)$. Наложение условия бесцветности приводит в термодинамических величинах к поправкам конечного размера. Это условие играет решающую роль для получения физически достоверной картины в точно решаемой модели фазового перехода между адронной и КТ-материями [3].

Нами проведено исследование термодинамики идеального бесцветного КТ-газа в пределе больших N_c . Рассмотрение этого предела значительно упрощает задачу о вычислении статсуммы такой системы. В отличие от работ [4], где свойства идеального бесцветного КТ-газа устанавливались в приближении, справедливом только при больших объемах V , в наших вычислениях объем может быть произвольным. Впервые такая задача была рассмотрена Скагерстамом [5], который показал, что если ограничиваться только низкими температурами (т.е. бoльшмановской статистикой), то задача нахождения статсуммы такой системы в точности совпадает с подобной задачей в двумерной решеточной $SU(N_c)$ глюодинамике со смешанным действием [6]. В этой системе при $N_c \rightarrow \infty$ имеется фазовый переход 3-го рода (переход Гросса-Виттена) [7]. Если считать, что число кварковых ароматов пропорционально числу цветов, то без учета сохранения барионного заряда та же фазовая картина имеет место в случае бесцветного кварк-глюонного идеального газа.

Однако, как мы покажем, в более реалистической, с точки зрения физики, задаче, когда учитывается сохранение барионного заряда, фазовый переход отсутствует.

2. Бесцветная статсумма с фиксированным барионным зарядом

Общие методы вычисления вклада в статсумму Z от состояний, изменяющихся по определенному неприводимому представлению группы внутренней симметрии G , изложены в работах [8]. В частности, бесцветная (синглетная) статсумма идеального кварк-глюонного газа представляет собой некоторый групповой интеграл по группе $SU(N_c)$ [4, 5, 8].

В физической ситуации в КТ-плазме кварков должно быть больше, чем антикварков, и барионное число B должно быть фиксированным. Поэтому в интересующую нас статсумму должны давать вклад состояния не только бесцветные, но и обладающие барионным числом B , т.е. такие, которые содержат $N_c(B+m)$ кварков и $N_c m$ антикварков, где m — произвольное положительное число.

В данной работе мы будем учитывать закон сохранения барионного числа точно и воспользуемся для этого подходом микроканонического ансамбля. В этом случае бесцветная статсумма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
Z_{SB} &= \text{Tr}_s [\delta(N_c B - \hat{Q}) e^{-\beta \hat{H}}] = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i N_c B \varphi} \text{Tr}_s (e^{-\beta \hat{H} + i \varphi \hat{Q}}) = \\
&= \frac{\beta}{2\pi i} \int_{-i\pi/\beta}^{i\pi/\beta} d\mu e^{-N_c B \beta \mu} Z_s(\mu).
\end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Tr_s означает, что след берется только по бесцветным состояниям, $Z_s(\mu)$ — бесцветная статсумма в рамках подхода большого канонического ансамбля,

$$Z_s(\mu) = \text{Tr}_s (e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{Q})}), \quad (2)$$

где μ — химический потенциал, $\hat{Q} = \sum_{\kappa, l} (\hat{n}_{\kappa, l} - \hat{\bar{n}}_{\kappa, l}) = N_c \hat{N}_B$, $\hat{n}_{\kappa, l}$, $\hat{\bar{n}}_{\kappa, l}$, $\hat{N}_B$ — операторы числа кварков, антикварков (с импульсами κ и квантовыми числами l) и барионов соответственно.

Z_{SB} можно представить в виде [5]:

$$Z_{SB} = \int dg \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-S_{gl}(g) - S_{g\bar{l}}^B(g, \varphi) - i B N_c \varphi} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
S_{gl}(g) &= 2V \int \frac{d^3 \kappa}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln [1 - e^{-\beta \omega_{\kappa}} R(g)], \\
S_{g\bar{l}}^B(g, \varphi) &= -2V \int \frac{d^3 \kappa}{(2\pi)^3} n_f \text{Tr} \left\{ \ln [1 + e^{-\beta \omega_{\kappa} + i \varphi} g] + \right. \\
&\quad \left. + \ln [1 + e^{-\beta \omega_{\kappa} - i \varphi} g^+] \right\}.
\end{aligned} \quad (4)$$

В этих формулах $R(g)$ — элемент группы $SU(N_c)$ в присоединенном представлении, n_f — число кварковых ароматов, dg — мера Хаара на группе $SU(N_c)$, Tr — след по цветовым индексам. Отметим, что при выводе этих формул дискретная сумма $\sum_{\kappa}$ (гамильтониан идеального газа в конечном объеме имеет дискретный спектр) была заменена интегралом $V d^3 \kappa / (2\pi)^3$, т.е. мы считаем спектр квазинепрерывным. Дейст-

вия" $S_{gc}(g), S_{g\bar{g}}(g, \varphi)$ зависят не от всей матрицы g , а только от ее собственных значений $e^{i\alpha_j}$ ($j=1, \dots, N_c$), где $\sum \alpha_j = 0$, и можно воспользоваться параметризацией редуцированной меры на группе. Считая кварки и глюоны бесмассовыми, т.е. $\omega_k = |k|$, получим после интегрирования по импульсным переменным (с точностью до несущественного множителя)

$$Z_{SB} = \int \prod_{i=1}^{N_c} d\alpha_i e^{-S^B[\alpha]}, \quad (5)$$

где

$$S^B[\alpha] = - \sum_{i>j} \ln 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} \right) + 2B_g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j} \frac{1}{n^4} \cos n(\alpha_j - \alpha_i) + \\ + iB \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_j + 2N_c \tilde{B}_g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos n\alpha_i, \quad (6)$$

$$B_g = 2N T^3 / \pi^2, \quad \tilde{B}_g = 2\eta_f V T^3 / (\pi^2 N_c).$$

Чтобы провести все вычисления аналитически, мы вновь, как и в работе [5], ограничимся бoльцмановской статистикой, т.е. будем удерживать в рядах по n в (6) только члены при $n=1$.

3. Предел $N_c \rightarrow \infty$

В пределе $N_c \rightarrow \infty$ мы заменим дискретные суммы по собственным значениям в (6) интегралом, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N_c} f(\alpha_i) \rightarrow N_c \int_0^1 dt f(\alpha(t)). \quad (7)$$

Чтобы сделать все члены порядка N_c^2 , мы будем считать, что число ароматов η_f пропорционально числу цветов $\eta_f = x N_c$, и, следовательно, $\tilde{B}_g$ не зависит от N_c , а также возьмем $B = b N_c$.

Статсумму (5) можно представить в виде континуального интеграла

$$Z_{SB} = \int_0^1 d\alpha(t) e^{-N_c^2 S[\alpha(\cdot)]} \quad (8)$$

и вычислить его методом стационарной фазы, т.е.

$$Z_{SB} = e^{-N_c^2 S_{eff}}, \quad (9)$$

где S_{eff} — значение функционала $S[\alpha(\cdot)]$ в "точке" $\{\bar{\alpha}(t), t \in [0, 1]\}$, определяемой из уравнения

$$\delta S / \delta \alpha(t) = 0. \quad (10)$$

Как обычно, при исследовании предела больших N_c удобно ввести спектральную плотность $\rho(\alpha)$, определяемую формулой

$$\rho(\alpha) = (d\alpha/dt)^{-1}.$$

Тогда S_{eff} является значением функционала $S[\bar{\rho}(\cdot)]$ при $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\alpha)$, где $\bar{\rho}(\alpha)$ — решение уравнения

$$\delta S / \delta \rho(\alpha) = 0, \quad (11)$$

такое, что

$$\int \rho(\alpha) d\alpha = 1, \quad (12)$$

и интегрирование всюду осуществляется по той области переменной α , где $\rho(\alpha) \neq 0$.

При $b \neq 0$ "точка" стационарности может быть только комплексной, т.е. траектории интегрирования по α в (8) должны быть деформированы таким образом, чтобы они лежали в комплексной области.

Уравнение для спектральной плотности $\rho(\alpha)$ имеет следующий вид [9]:

$$\rho \int d\alpha' \rho(\alpha') \left[i \operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha'}{2} - 2B_g \sin(\alpha - \alpha') \right] = i\sigma + 2\tilde{B}_g \sin \alpha \quad (13)$$

(переменные α и α' являются комплексными). Вводя переменные $z = e^{i\alpha}$ и $z' = e^{i\alpha'}$, это уравнение можно переписать в виде

$$\int_L \frac{dz'}{z' - z} \rho(z') = \frac{i}{2}(1 - \sigma) + \frac{1}{2} \left(B_g \int_L \rho(z') \frac{dz'}{z'^2} + i\tilde{B}_g \right) z - \frac{1}{2} \left(B_g \int_L \rho(z') dz' + i\tilde{B}_g \right) \frac{1}{z}, \quad (14)$$

причем $f(z)$ должно удовлетворять условию нормировки

$$\int_L \frac{f(z')}{iz'} dz' = 1. \quad (I5)$$

Контур L , по которому ведутся интегрирования в (I4) и (I5), как это обычно бывает в задачах такого рода (см. например, [10]), нам неизвестен, и мы должны подбирать его таким образом, чтобы (I4) и (I5) имели решения, а величина $f(z)dz/iz$ была вещественной, т.к. она является не чем иным, как числом собственных значений.

Очень просто показать, что контур L не может быть замкнутым, если $b \neq 0$, и без потери общности его можно выбрать в виде дуги окружности радиуса l с концами $le^{-i\varphi_c}$ и $le^{i\varphi_c}$. Угол φ_c и радиус определяется из уравнений

$$\frac{\tilde{B}_g(l+l^{-1})}{1+B_g\gamma^2-2B_g\gamma} = \frac{1}{\gamma} \quad (I6)$$

и

$$\frac{(1-\gamma)(l-l^{-1})}{1-B_g\gamma^2} = b, \quad (I7)$$

где $\gamma = \sin^2 \frac{\varphi_c}{2}$. Так как $0 \leq \gamma \leq 1$, необходимо потребовать, чтобы $B_g + \tilde{B}_g(l+l^{-1}) \geq 1$.

В случае, когда $b = 0$, $l = 1$, и мы вновь получаем, что решение уравнения (I4) с открытым контуром существует только при $B_g + 2\tilde{B}_g \geq 1$ [5]. Если же $B_g + 2\tilde{B}_g < 1$, имеется решение уравнения (I4) с замкнутым контуром. Поэтому при $b = 0$, т.е. когда сохранение барионного числа не учитывается, имеется фазовый переход третьего рода [5]. При $b \neq 0$ (I6) и (I7) имеют решения при любых значениях B_g , $\tilde{B}_g$ и b , поэтому фазовый переход третьего рода отсутствует.

Если ограничиваться только больцмановской статистикой, можно найти в явном виде и свободную энергию КТ-газа в пределе $N_c \rightarrow \infty$, при $b \neq 0$:

$$F = \frac{b^2}{2} \left[\ln(1-\gamma) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right] - b \ln l + \frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{2} \ln \gamma - \frac{1}{2} + \tilde{B}_g \gamma. \quad (I8)$$

где

$$\nu = \frac{\tilde{B}_2 \gamma^2 + \frac{1}{2}(\ell + \ell^{-1})(1 - \gamma)}{1 - B_2 \gamma^2} \quad (19)$$

Различные термодинамические величины могут быть найдены дифференцированием по параметрам T, ν, β и т.д. Непосредственно вычислять такие производные, используя выражение (18), довольно сложно, и удобнее воспользоваться формулой (9). Тогда в силу (11) достаточно дифференцировать только коэффициенты перед интегралами, зависящие от этих параметров.

В частности, для плотности энергии, деленной на $N_c^2 \epsilon_{df}$, получаем

$$\epsilon_{df} = -\frac{1}{N_c^2 V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{3T}{V} \left\{ B_2 \left[\left(\int \rho(\alpha) \cos \alpha d\alpha \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\int \rho(\alpha) \sin \alpha d\alpha \right)^2 \right] + 2 \tilde{B}_2 \int \rho(\alpha) \cos \alpha d\alpha \right\}, \quad (20)$$

где

$$\int \rho(\alpha) \cos \alpha d\alpha = \nu, \quad (21)$$

а

$$\int \rho(\alpha) \sin \alpha d\alpha = -\frac{i}{2} \frac{(\ell - \ell^{-1})}{(1 - B_2 \gamma^2)} (1 - \gamma). \quad (22)$$

Нетрудно проверить, что в пределе $\beta \rightarrow 0$ (20) переходит в соответствующее выражение в [5].

До сих пор мы рассматривали подход микроканонического ансамбля, в котором барионное число $B = b N_c$ фиксировано. Обратимся теперь к подходу большого канонического ансамбля.

Химический потенциал μ , сопряженный к барионному числу, и статсумма в подходе большого канонического ансамбля были введены в (1) и (2). нас интересует предел больших N_c , в котором все интегралы

$$D_X(s) = -s + m_Z^2 - i m_Z \Gamma_Z$$

$$D_L(p_i) = (\ell_2 - p_i)^2 + m_L^2$$

$$D_R(p_i) = (\ell_2 - p_i)^2 + m_R^2$$

ℓ_1, ℓ_2, p_1, p_2 are the momenta of e^-, e^+ , χ_1, χ_2 , m_L and m_R are the masses of $\tilde{e}_L$ and $\tilde{e}_R$, m_Z and Γ_Z are respectively the mass and decay width of Z^0 .

3. According to SUSY the couplings of the ordinary particles are identical with those of their superpartners. So Z^0 couples $\tilde{H}_0$ and $\tilde{H}_2$ and does not couple $\tilde{f}$ and $\tilde{Z}$, while the charged sleptons at the considered energies of negligible electron mass couple only $\tilde{f}$ and $\tilde{Z}$. Thus in the considered process of neutralino production it is only the $\tilde{H}_0$ -components (N_{i3}, N_{i4}) of χ_1 and χ_2 that contribute to $X_i^Z(\theta)$ and only the gaugino components (N_{i1}, N_{i2}) that contribute to $X_i^Z(\theta)$. It is the interference term $X_i^Z(\theta)$ that gets contributions both from Higgsino and gaugino components.

Let us assume that one of the produced neutralinos χ_1 is either of the gaugino or of $\tilde{H}_0$ -type. In this case $X_i^Z(\theta)$ equals zero, whatever the mixing in the other produced neutralino χ_2 is. If χ_1 is of the Higgsino type, process (I) proceeds via Z^0 -exchange, i.e. $X_i^Z(\theta) = X_i^Z(\theta)$, while if χ_1 is of the gaugino type, it occurs via $\tilde{e}_L, \tilde{e}_R$ -exchange, i.e. $X_i^Z(\theta) = X_i^Z(\theta)$. If we propose now that χ_1 is LSP, separating the contributions from Z^0 and from $\tilde{e}_L, \tilde{e}_R$ -exchange we would be able to distinguish between the two mechanisms of SSB: when LSP is of the Higgsino and gaugino type. If LSP is of the gaugino type, three situations characterizing the mass spectrum of $\tilde{e}_L$ and $\tilde{e}_R$ are discussed: a) the chargino massive states are degenerate, $m_L = m_R$, b) $m_L^2 \gg m_R^2$ and c) $m_L^2 \ll m_R^2$. Obviously when LSP is of the Higgsino type, the cross-section would not depend on m_L and m_R .

In fig.(I) the unpolarized total cross-section $\sigma(s)$ is shown. We see that if LSP appears to be of the $\tilde{H}_0$ -type, due to the Z^0 -annihilation diagram a resonance peak at $\sqrt{s} = m_Z$ is expected, while a flat decreasing behaviour of $\sigma(s)$ is predicted if

большинство наблюдаемых являются интегралами от аналитических функций по замкнутому контуру $\mathcal{L}$, они не зависят от m в этой фазе. В частности, выбор $m = 0$ и $\mathcal{L} = \{z/1\}$ соответствует той же физической ситуации, что и выбор $m = m_c$. Это именно то, как появляется фаза сильной связи Гросса-Виттена [7] в нашем рассмотрении. При $|m| < m_c$

$$S_{\text{eff}}(m) = S_{\text{eff}}(-m) = \tilde{B}_g^2 / (1 - B_g).$$

Литература

1. Cleymans J., Gaii R.V., Suhonen E. - Phys.Rep. 1986. Vol. 130. P. 217.
2. Satz H. - Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 1985. Vol. 35. P. 245.
3. Горенштейн М.И. и др. - ТМФ. 1982. Т. 52. С. 346.
Горенштейн М.И., Липских С.И. - ЯФ. 1983. Т. 38. С. 1262.
4. Gorenstein M.I. et al. - Z.Phys. 1984. Vol. C18. P. 13.
Gorenstein M.I. et al. - Phys.Lett. 1983. Vol. B123. P. 437.
Elze H. - Th., Miller D.E., Redlich K. - Phys.Rev. 1987. Vol. D35. P. 748.
5. Skagerstam B. - S. - Z.Phys. 1984. Vol. C24. P. 97.
6. Ogilvie M.C., Horowitz A. - Nucl.Phys. 1983. Vol. B215 FS7. P. 249.
Makeenko Yu.M., Polikarpov M.I. - Nucl.Phys. 1982. Vol. B205. P. 386.
7. Gross D.J., Witten E. - Phys.Rev. 1980. Vol. D21. P. 446.
8. Redlich K., Turko L. - Z.Phys. 1980. Vol. C5. P. 201; Turko L. - Phys.Lett. 1981. Vol. B104. P. 153; Elze H. - Th., Greiner W., Rafelski J. - Phys.Lett. 1983. Vol. B124. P. 515; Skagerstam B. - S. - J.Phys. 1985. Vol. A18. P. 1; Elze H. - Th., Greiner W. - Phys.Rev. 1986. Vol. A33. P. 1879.
9. Azakov S.I., Salomonson P., Skagerstam B. - S. The Quark Gluon Plasma at Finite Baryon Density. - A Large N Approach. Preprint 86-40, Göteborg, Institute of Theoretical Physics. 1986.
10. Азаков С.И., Алиев Э.С. - ТМФ. 1986. Т. 67. С. 89.



СТРУКТУРА ВАКУУМА КХД В МОДЕЛИ КВАРКОВЫХ МЕШКОВ

П.Н.Боголюбов, А.Е.Дорохов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Н.И.Кочелев

Институт физики высоких энергий АН КазССР, Алма-Ата

В обзоре рассмотрены различные подходы к адронной спектроскопии. Обсуждена их связь с КХД. Сформулирована новая кварковая модель, учитывающая взаимодействие кварков с вакуумными полями внутри мешка.

В рамках развитой модели показано, что энергия удержания кварков в адроне определяется взаимодействием кварков с длинноволновыми вакуумными флуктуациями, которое задает масштаб адронных масс. Внутренняя структура адронов на малых расстояниях ($r < 0,2 \div 0,3$ фм) определяется потенциалом одноглюонного обмена между кварками, а на промежуточных ($r \sim 0,2 \div 0,3$ фм) взаимодействием кварков с высокочастотными вакуумными полями, которые аппроксимируются инстантонами.

1. Модель дубненского мешка $/1/x$

Идея кварков $/3/$, понятие о цвете $/4,5/$, а также формулировка динамических принципов релятивистских составных моделей $/4,6/$ оказали непосредственное влияние на создание кварковой модели мешков $/1/$.

В этом подходе адрон представляет собой бесцветную систему независимых кварков, движущихся в конечной области пространства — мешке (рис. 1). Волновой функцией покоящегося адрона является антисимметризованное по совокупности квантовых чисел произведение одночастичных волновых функций кварков, удовлетворяющих уравнению Дирака

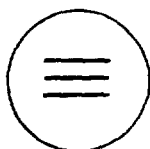


Рис. 1.

Адрон-мешок: система независимых конформированных кварков.

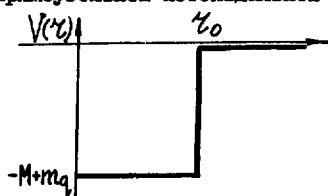
$$[\gamma \vec{p} + m_q + V(\vec{r})]\psi(\vec{r}) = \gamma_0 E \psi(\vec{r}) \quad (1)$$

Обсуждение различных вариантов модели мешков, а также наиболее перспективных направлений её развития содержится в обзоре $/2/$.

со скалярным потенциалом удержания

$$V(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty. \quad (2)$$

Обычно для оценок используется потенциал в виде бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямы (рис. 2):



$$V(z) = \begin{cases} -M + m_q, & z < z_0, \\ m_q, & z > z_0, \end{cases} \quad M \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Мешок является релятивистским протяженным объектом, его орбитальные возбуждения можно рассматривать как струнные конфигурации (рис. 3).

Рис. 2.

Скалярный потенциал удержания.

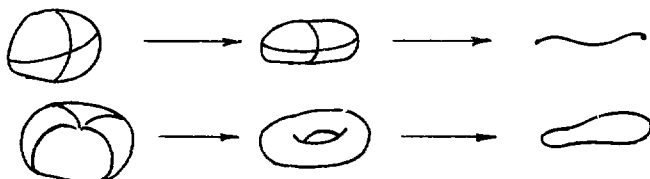


Рис. 3.

Связь мешковых и струнных конфигураций: а) Открытая струна соответствует сферическому мешку. б) Замкнутая струна соответствует тороидальному мешку.

Модель (1,3) имеет один параметр - радиус мешка z_0 . Простейшие оценки указывают на важные особенности модели: 1) получаются разумные значения величин массы, магнитного момента, среднеквадратичного зарядового радиуса нуклона, отношения слабых констант g_A/g_V ; 2) правильными по величине и знаку оказываются релятивистские поправки к $SU(6)$ нерелятивистским соотношениям.

2. Модель мешков

Позже группой из MIT /7/ был предложен вариант модели, в котором были релятивизованы граничные условия удержания. В этом случае с необходимостью следует наложить принцип, благодаря которому система оказалась бы стабильной.

Соответствующий принцип группы MIT заключается в принятии гипотезы о полном разрушении вакуумных флуктуаций в пространстве, занятом кварковыми полями (рис. 4). Избыточная энергия, запасенная таким образом внутри мешка, создает силы, препятствующие разлету кварков.

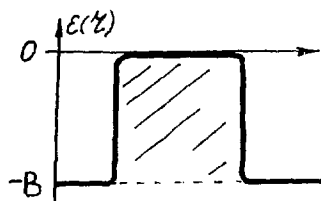


Рис. 4.

Энергетическая плотность вакуумных полей.

Заштрихованная область - внутренняя область мешка, где по предположению MIT справедлива теория возмущений КХД.

B - избыточная, относительно физической, плотность энергии вакуума внутри мешка.

В статическом приближении масса адрона $M_N(R)$ с учетом поправки на движение центра масс кварков в мешке задается соотношением

$$M_N^2 = E_N^2 - \langle \vec{P}^2 \rangle, \quad (4)$$

где

$$\langle \vec{P}^2 \rangle = N P_q^2 \approx N \left(\frac{\partial E}{\partial R} \right)^2 \quad (5)$$

вклад движения центра масс (P_q - импульс кварка в мешке),

$$E_N = \sum_i^N \varepsilon_i(m_q) + \frac{4}{3} \pi B R^3 + \Delta E_{inter}(R) \quad (6)$$

энергия мешка. Первое слагаемое в выражении (6) для энергии E_N есть кинетическая энергия N кварков, а второе - потенциальная энергия удержания с объемной плотностью B .

Уравнения модели сводятся к уравнениям движения свободных конфайнированных кварков в мешке (которые тождественны уравнениям (I),(3)

$$\begin{cases} (\vec{\gamma} \vec{p} - m_q) \psi(\vec{r}) = \gamma_0 \varepsilon_i(m_q) \psi(\vec{r}) & \text{в мешке} \\ -i \vec{\gamma} \vec{n} \psi(\vec{r})|_S = \psi(\vec{r})|_S & \text{на поверхности мешка } S \end{cases} \quad (7)$$

и условие сохранения энергетического потока, гарантирующего динамическую устойчивость системы,

$$\frac{\partial M_N^2(R)}{\partial R} = 0. \quad (8)$$

По предположению^{/8/} взаимодействие между кварками обусловлено потенциалом одноглюонного обмена и учитывается КХД-теорией возмущений в мешке^{/9/} (рис. 5).



Рис. 5.

Графики одноглюонного взаимодействия в мешке.

Вклад одноглюонного обмена в энергию адрона задается выражением

$$\Delta E_g = -\frac{\mathcal{L}_s}{4R} \sum_{i,j}^N M_{ij} \langle N | (\lambda^a \vec{b})_i (\lambda^a \vec{b})_j | N \rangle, \quad (9)$$

где N - полное число кварков в адроне, $\vec{b}_i(\lambda_i^a)$ - спинные (цвето) операторы i -го кварка, $M_{ij} = M(m_{iR}, m_{jR})$ характеризуют интенсивности цвето-спинового взаимодействия. Массовая формула (4-6,9) содержит четыре параметра, значения которых численно определены из фита спектра основных состояний адронов^{/8/}:

$$B^{1/4} = 150 \text{ МэВ}, \quad \mathcal{L}_s = 2,2, \\ \chi_0 = 1,84, \quad m_s = 280 \text{ МэВ}. \quad (10)$$

Модель мешков и различные её версии позволили довольно успешно описать не только массы и статические свойства адронов: среднеквадратичные зарядовые радиусы, магнитные моменты, но также и их динамические характеристики: ширины распадов, константы взаимодействия, формфакторы и т.д.^{/10/}.

3. Конденсаты КХД-вакуум. Инстантоны

Параллельно с феноменологическим развитием модели интенсивно исследовалась возможность её обоснования в рамках КХД путем установления связи параметров модели с характеристиками вакуума КХД^{/11/}.

В частности, одно из определяющих физику низкоэнергетических явлений - спонтанное нарушение киральной симметрии - объясняется наличием ненулевых кирально-неинвариантных средних $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$. В этой области энергий основную роль играют безмассовый голдстоуновский пион и тяжелый нуклон, масштаб масс которого определяется как раз вакуумным средним $m_N \sim \langle \bar{\psi} \psi \rangle^{1/3} / 12$.

Возникновение нетривиальной структуры вакуума КХД можно представить как проявление насыщенных вакуум мощных непертурбативных флуктуаций, хорошо известным примером которых являются инстантоны^{/13/}.

Оценки, выполненные в приближении разряженного инстантонного газа, указывали на высокую степень подавления вакуумных флуктуаций цветными полями кварков, что приводило к фазовому переходу первого рода от кварковой фазы внутри мешка к адронной вне его ^{/14/}. Эта картина практически совпала с моделью MIT, где внутри мешка также предполагалась справедливость теории возмущений КХД.

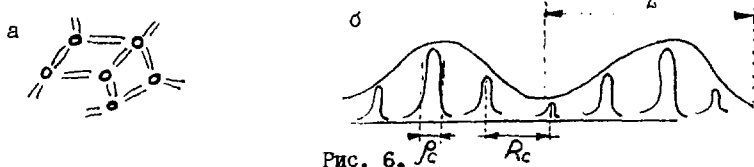


Рис. 6.

Вакуум КХД как инстантонная жидкость.

- а) Среда взаимодействующих = инстантонов $\circ$.
 б) В вакууме наряду с низкочастотными флуктуациями ($\omega_{vac} \sim L^{-1}$) существуют высокочастотные флуктуации ($\omega_{inst} \sim \rho_c^{-1}$). Плотность инстантонов в зависимости от их размера ρ задана соотношением $\frac{dn(\rho)}{d\rho} = n_c \delta(\rho - \rho_c)$
 $n_c = 0,1 \frac{\text{ГэВ}}{\text{Фм}^3}$, $\rho_c = 2 \text{ ГэВ}^{-1}$, $\rho_c / R_c = 1/3$.

Более корректные вычисления в рамках модели вакуума КХД как "жидкости" инстантонов (рис. 6) показали, что фазового перехода первого рода нет и непертурбативные флуктуации практически не разрушаются цветными полями ^{/15/}. Более того, результаты правил сумм КХД ^{/16, 17/} указывали также на существование серьезного противоречия между величинами параметров, извлеченных из правил сумм и полученных из фита спектра масс легких адронов в MIT-модели.

Действительно, если основная гипотеза MIT-модели о полном вытеснении непертурбативного вакуума из объема мешка верна, то вакуумное давление B должно быть связано с глюонными и кварковыми конденсатами соотношением ^{/17/}:

$$B_{\text{КХД}} = \frac{9}{32} \langle 0 | \frac{1}{\beta} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle - \frac{1}{4} \sum_F m_F \langle 0 | \bar{Q} Q_F | 0 \rangle. \quad (II)$$

Это выражение является следствием наличия аномалии в тензоре энергии-импульса. Подставляя в (II) значения конденсатов, извлеченных из правил сумм, получим $B_{\text{КХД}} = 0,55 \text{ ГэВ/Фм}^3$, в то время как $B_{\text{MIT}} = 0,06 \text{ ГэВ/Фм}^3$. Это является прямым свидетельством в пользу того, что параметры вакуума практически не меняются внутри адрона (рис. 7).

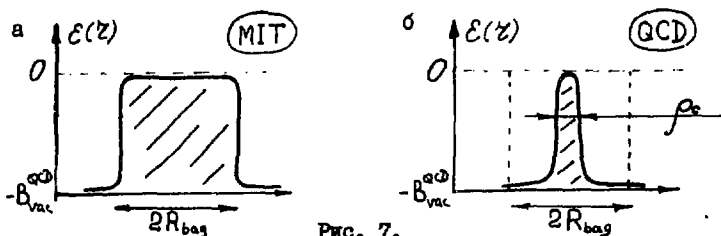


Рис. 7.

Плотность энергии вакуума как функция расстояния.

а) Модель MIT: область локализации адрона и область фазы теории возмущений (заштрихованная) совпадают.

б) Метод правил сумм: область фазы теории возмущений определяется параметром $\rho_c \ll R_{had} \sim R_{bag}$.

В среднем по объему энергетическая плотность вакуума практически не меняется внутри адрона.

Два других параметра модели MIT: константа кварк-глюонного взаимодействия $\alpha_s = 2,2$ и масса странного кварка $m_s = 280 \text{ MeV}$, которые определяют расщепление масс между членами адронных мультиплетов, также не согласуются с КД-значениями $\alpha_{KKB} = 0,7$, $m_s = 150 \text{ MeV} / 17, 18$.

Далее, масштаб адронных масс в модели MIT определяется параметром B^{MIT} , т.е. в основном глюонным конденсатом, а результатом метода правил сумм является утверждение, что спектроскопия легких адронов определяется взаимодействием кварков с конденсатом легких кварков. В частности, упрощенная оценка приводит к соотношению 18 :

$$M_N = [2(2\pi)^2 |\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle|]^{1/3} = 1 \text{ ГэВ}. \quad (12)$$

Что же касается расщепления масс между адронными мультиплетами, то, как показывает анализ правил сумм для псевдоскалярных и векторных мезонов 11 , основной вклад в π -р расщепление дает взаимодействие через инстантоны (рис.8).

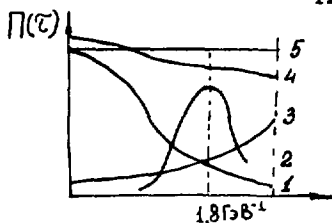


Рис. 8. Поляризационная функция псевдоскалярных пионных токов в зависимости от борелевского параметра τ :

- 1 - вклад теории возмущений,
- 2 - вклад инстантонов,
- 3 - вклад конденсатов; 4 - суммарный вклад, 5 - правая часть

правил сумм, соответствующая насыщению состоянием $m_\pi = 0$.

Этот пример наглядно указывает на существование трех характерных областей проявления сильного взаимодействия:

малые расстояния, где доминирует вклад теории возмущений, промежуточного расстояния – инстантоны, большие расстояния – конденсаты.

Таким образом, как развитие реалистических моделей вакуума КХД, так и следствия правил сумм приводят к необходимости построения новой модели, учитывающей взаимодействие кварков со всем спектром вакуумных полей.

4. Учет эффектов вакуума КХД в модели мешков.

Конденсаты

При построении модели мы будем исходить из следующих представлений /19/.

Адроны являются надвакуумными возбуждениями. Как принято в модели мешков /1,7/, условие конфайнмента постулируется как отсутствие цветового потока через поверхность мешка (7), (8)/1,2,7,8/.

Мы будем также предполагать, что вакуум внутри мешка практически не разрушается цветными полями кварков, и, таким образом, взаимодействие между кварками осуществляется как через прямой обмен глюонами, так и через обмен вакуумными непертурбативными флуктуациями кварковых и глюонных полей.

Обмен глюонами, который доминирует на малых расстояниях $r < r_c$, описывается теорией возмущений КХД в мешке (9) (рис. 5).

Чтобы учесть взаимодействие кварков с длинноволновыми вакуумными полями ($\omega^{vac} \ll \omega^q$ – характерная частота кварков в адроне), рассмотрим КХД-лагранжиан

$$\mathcal{L}_{KHD} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{i}{2} \bar{\psi} \hat{D} \psi + m \bar{\psi} \psi \quad (13)$$

и выполним преобразование^{х)} (рис. 9)

$$\psi = q^{bag}_{valence} + q_{vac}, \quad A_\mu = A_\mu^{bag} + A_\mu^{vac} \quad (14)$$

В соответствии с предположениями модели получим эффективный лагранжиан

х) Преобразование (14) для спинорных полей следует понимать как преобразование для билинейных комбинаций (функций Грина) этих полей.

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{q\bar{q}}^{Bag} (q, \bar{q}) + \mathcal{L}_{int} (q, \bar{q}; Q, \bar{Q}) + \mathcal{L}_{vac} (Q, \bar{Q}). \quad (15)$$

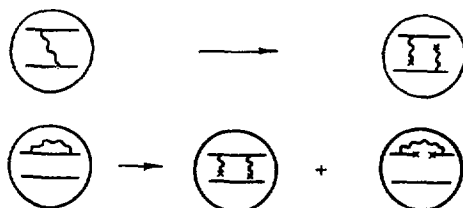


Рис. 9. Графики одноглюонного обмена в результате преобразования (14) переходят в графики взаимодействия валентных полей $(q, \bar{q})_{Bag}^{val}$ с вакуумными конденсатными полями $(Q, \bar{Q})_{vac}$.

Применяя стандартную теорию возмущений

$$\Delta E_{vac} = \langle \Phi | H_I^{vac} | \Psi \rangle / \langle \Phi | \Psi \rangle, \quad (16)$$

где

$|\Phi\rangle$ - невозмущенное состояние,

$$|\Psi\rangle = U(-\infty, 0) |\Phi\rangle,$$

$$U(-\infty, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \dots \int dt_n T[H_I(t_1) \dots H_I(t_n)],$$

для взаимодействия (15), получим ведущий вклад в энергию взаимодействия:

$$\Delta E_{vac} = - \sum_{a=u,d,s} n_a \langle \bar{q}_a q_a \rangle R^2 \beta_a(m_q) + \dots, \quad (17)$$

где суммирование ведется по аромату $a = u, d, s$, n_a - число кварков в адроне данного a , R - радиус мейкера, β_a - численные коэффициенты.

Основными особенностями (17) являются:

1) $M_N \sim N_c$ - число цветов, что соответствует результатам КХД в пределе $N_c \rightarrow \infty$. В то же время в модели мейкеров MIT $M_N \sim N_c^2$ (см. обсуждение в [20]).

2) $M_N \sim \langle \bar{q} q \rangle^{1/3}$, как и в правилах сумм КХД (12), в отличие от MIT-модели, где $M_N \sim \langle G^2 \rangle^{1/4} \sim B^{1/4}$.

3) $\Delta E_{vac} \sim \langle \bar{q} q \rangle R^2$. Таким образом, стабильность мейкера достигается самосогласованным образом благодаря учёту взаимодействия кварка с вакуумным конденсатом.

4) Если выбрать значение величины кваркового конденсата таким, как в правилах сумм $\langle \bar{q}q \rangle \approx -(250 \text{ МэВ})^3$, то хорошо воспроизводятся массы Δ -изобар и ρ -мезона.

5. Учёт эффектов вакуума КХД в модели мешков. Инстантоны

Как отмечалось выше, структура вакуума на промежуточных расстояниях характеризуется высокочастотными флуктуациями, которые аппроксимируются инстантонами $\omega_{inst} \sim \rho_c^{-3} \gg \omega_g$. Инстантонное взаимодействие кварков мы будем учитывать с помощью эффективного лагранжиана 'т Хоофта^{/21/}, рассматриваемого в приближении инстантонной жидкости^{/11,12/}. Взаимодействие через инстантоны^{/19/}

$$\Delta E_{inst} = -\langle \varphi | \mathcal{L}_{inst} | \varphi \rangle = -\frac{4\pi^2}{3} \frac{\rho_c^2}{R^3} \sum_{a,b} \bar{u}_a^s I_{ab} \left\{ 1 + \frac{3}{32} \lambda_a \lambda_b (1 + 3 \bar{c}_a \bar{c}_b) \right\} \quad (18)$$

отлично от нуля в каналах, где оба кварка находятся в состоянии с нулевой модой $|>^{/21/}$

$$\sum_a (\bar{c}_s^a + \bar{c}_c^a) |> = 0, \quad (19)$$

где $\bar{c}$ - спиновая, а $\bar{c}$ - цветоспиновая $SU(2)$ матрицы.

Учет взаимодействия (18) позволяет дать объяснение ряда проблем в рамках составной кварковой модели^{/19/}:

- 1) N - p - расщепление: $\Delta E_{inst} = -470 \text{ МэВ}$; $\Delta E_{inst}^p = 0$,
- 2) $U(1)$ -проблема: $\Delta E_{inst}^p = +540 \text{ МэВ}$; $\Delta E_{inst}^n = -252 \text{ МэВ}$,
- 3) N - Δ - расщепление: $\Delta E_{inst}^N = -180 \text{ МэВ}$; $\Delta E_{inst}^{\Delta} = 0$ и

обосновать существование в нуклоне квазисвязанного состояния - скалярного дикварка^{/22/}.

В результате, комбинируя (9,17,18), получим выражение для массы адрона в нашей модели (рис. 10):

$$\begin{cases} M^2 = E^2 - \langle \vec{P}^2 \rangle, \\ \frac{\partial M^2}{\partial R} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$E = \sum N_i \varepsilon_i + \Delta E_g + \Delta E_{inst} + \Delta E_{vac}.$$

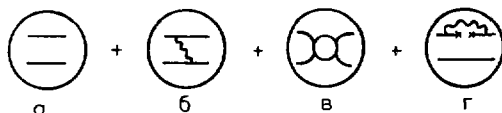


Рис. 10.

Диаграммное представление различных вкладов в энергию адронов: а) вклад независимых конфайнмированных кварков, б) одноглюонный обмен, доминирующий на малых расстояниях $x < \rho_c$, в) вклад инстантонов определяет взаимодействие кварков на промежуточных расстояниях $x \sim \rho_c$, г) на расстояниях порядка радиуса конфайнмента R_c доминирует взаимодействие кварков с длинноволновыми вакуумными полями ($\rho_c \approx 0,2-0,3 \text{ фм}$, $R_c \approx 1 \text{ фм}$).

Массовая формула (20) беспараметрична в том смысле, что константы α_s , ρ_c , $\langle \bar{q}q \rangle$, характеризующие различные вклады, выбраны такими же, какими они используются в методе правил сумм КХД [17, 18].

$$\alpha_s = 0,7, \quad \rho_c = 2 \cdot 10^{-6}, \quad \langle \bar{q}q \rangle = -(250 \text{ МэВ})^3. \quad (21)$$

В [19] мы использовали модель для описания основных состояний адронов. Полученные результаты имеют точность, не худшую, чем в расчетах MIT. В частности, получены результаты, приведенные в табл. I, качественно улучшающие результаты MIT. Более того, вместо четырех параметров MIT в нашей модели свободным является лишь один — масса странного кварка ($m_s = 220 \text{ МэВ}$).

Таблица I. Спектр масс основных состояний адронов (в МэВ)

Состояния	π	ρ	η	η'	N	Δ
M_0	591	736	805	699	1,133	1,228
ΔE_{inst}	-471	0	-252	+540	-180	0
M_{total}	120	736	553	1,239	953	1,228
M_{exp}	140	770	550	960	940	1,236

6. Приложение модели

А. Статические свойства

Модель была применена к изучению статических свойств основных состояний адронов: среднеквадратичных радиусов, магнитных моментов

барионов, констант лептонных распадов барионов /19/. В вычислениях учтены лишь одночастичные вклады. В этом приближении модель с 20 % точностью описывает экспериментальные данные по этим адронным свойствам. Вероятно, это расхождение связано с необходимостью корректного учета движения центра масс кварков в мешке /23/ и выхода за рамки одноинстантонного приближения. Учет этих эффектов особенно важен при описании, например, свойств пиона и среднеквадратичного радиуса нейтрона /24/.

Инстантонный механизм /25/ был использован для объяснения смешивания псевдоскалярных мезонов /19/ (рис. II). Найдены недиагональные матричные элементы от $\mathcal{L}_{inst}$ между состояниями π^0 , η , η' и вычислены углы смешивания: для угла синглет-октетного смешивания ($\tan 2\theta_p = \frac{2M_{81}}{M_8 - M_1}$, где $M_{8,1}$ - массы η_1 и η_8) $\theta_p = 14^\circ$,

(22)

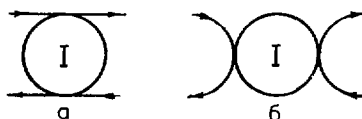


Рис. II.

Диаграммы смешивания: а) рассеивательного типа;

б) аннигиляционного типа.

В векторном канале эти вклады равны нулю.

для углов $\pi^0\text{-}\eta\text{-}\eta'$ смешивания (с $\Delta m = m_d - m_u = 3,80 \pm 1,57 \text{ МэВ}$):

	$\theta_{\pi^0\eta}$	$\theta_{\pi^0\eta'}$	
модель	$(-1,03 \pm 0,42) \cdot 10^2$	$(-0,12 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$	(23)
ЧСЛТ	$-1,3 \cdot 10^2$	$-0,1 \cdot 10^2$	

Качественным образом улучшаются результаты модели мешков при вычислении электромагнитных разностей масс адронов, если учесть взаимодействие кварков через вакуум /26/. Разность $M_p - M_n$ фиксирует в нашей модели разность масс u - и d -кварков: $\Delta m = m_d - m_u = 3,7 \text{ МэВ}$.

Таким образом, предложенная модель является самосогласованной, качественно правильно описывает особенности спектроскопии основных состояний адронов и не противоречит представлениям о структуре адрона в КХД, известным из правил сумм и других независимых подходов, тесно связанных с КХД.

Б. Мультикварковые состояния

В кварковой модели мешков изучение мультикварковых состояний^{/27,28/} является одним из интересных ее приложений. По нашему мнению в этих системах эффекты вакуума должны проявляться наиболее ярким образом.

Основу спектроскопии мультикварков составляют парные силы в дикварковых q^2 - и кваркониевых $q\bar{q}$ -состояниях. Они возникают благодаря взаимодействию кварков через одноглюнный обмен и инстантоны (табл. 2).

Таблица 2

Состояние	S	C	ΔE_{inst}	ΔE_g
q^2	0	6	0	4 f^{ij}
		3^*	-3 η_I	-8 f^{ij}
	1	6	-3/2 η_I	-4/3 f^{ij}
		3^*	0	8/3 f^{ij}
$q\bar{q}$	0	1	-6 $\bar{\eta}_I$	-16 f^{ij}
		8	-3/8 $\bar{\eta}_I$	2 f^{ij}
	1	1	0	16/3 f^{ij}
		8	-9/8 $\bar{\eta}_I$	-22 f^{ij}

$$\eta_I = \begin{Bmatrix} \eta_o & oo & I_{oo} = 0 \\ 0 & oo & I_{oo} = 1 \\ \eta_s & os & \\ 0 & ss & \end{Bmatrix} \quad \bar{\eta}_I = \begin{Bmatrix} -\eta_o & oo & I_{oo} = 0 \\ \eta_o & oo & I_{oo} = 1 \\ \eta_s & os & \\ 0 & ss & \end{Bmatrix}$$

В таблице 2 величины парных сил, обусловленных инстантонами ΔE_{inst} и одноглюнным обменом ΔE_g , представлены в зависимости от спина S, цвета C и изоспина I дикварков q^2 и кваркониев $q\bar{q}$.

Анализ теоретических предсказаний проявляет следующую ситуацию: мультикварковые системы имеют весьма высокую плотность уровней энергии, сравнимую по порядку величины с ожидаемыми временами жизни самих систем. В этой связи особый интерес представляет сильно связанное состояние H - дигиперон^{/29/} - шестикварковое состояние ($IJ^P = 00^+$) со странностью - 2.

Из таблиц 1 можно сделать вывод (правило Хунда^{/29,30/}: более симметричное по цвет-спину состояние обладает меньшей массой. С этим фактом связаны надежды на существование стабильного H - дигиперона. При расчете масс нами учитывались одночастичные и двухчастичные вкла-

ди. Показано ^{/30/}, что H -дигиперон устойчив относительно распада на 2Λ : $M_H = 2,09 \text{ ГэВ} < 2M_\Lambda$.

(24)

Его стабильность связана с сильным притяжением ($\Delta E_{\text{inst}} \approx -900 \text{ МэВ}$) между кварками за счет взаимодействия через инстантон.

Масса H оценивалась в различных вариантах модели мешков ^{/31/} и других независимых подходах: правилах сумм КХД ^{/32/}, модели Скирма ^{/33/}, решеточной модели ^{/34/}. Мы считаем, что недостатком этих вычислений явилось отсутствие учёта взаимодействия кварков через инстантоны. Об этом свидетельствуют и последние решеточные вычисления ^{/35/}, проведенные на гораздо более мелкой решетке $16^3 \times 48$, чем это было сделано раньше ^{/34/}: $6^2 \times 12 \times 18$. Здесь уже, по-видимому, начинает проявлять себя инстантонное взаимодействие. Поэтому результаты ^{/35/} подтверждают существование сильно связанного состояния с массой $M_H \approx 1,9 \text{ ГэВ}$ (в расчетах ^{/34/} H -дигиперон оказался нестабильным). Экспериментальные поиски стабильного H -дигиперона являются хорошим пробником структуры сильных взаимодействий.

В. Спин-орбитальные возбуждения

Одной из проблем составных кварковых моделей остается проблема описанию возбужденных состояний адронов. Эксперимент указывает ^{/36/}, что спин-орбитальное расщепление мало. В то же время нерелятивистская кварковая модель, как и модель MIT, предсказывает очень большое расщепление ^{/37/}. В обеих моделях вклад спин-орбитального взаимодействия в основном обусловлен одноглюонным обменом.

В рамках нашего подхода существуют три вклада в спин-орбитальное расщепление. Пертурбативный определяется малыми расстояниями между кварками и пропорционален α_s . Вклад, связанный с инстантонным взаимодействием, противоположен по знаку первому, так как это взаимодействие начинает доминировать при промежуточных расстояниях между кварками (рис. 12). Третий вклад возникает из потенциала конфайнмента.

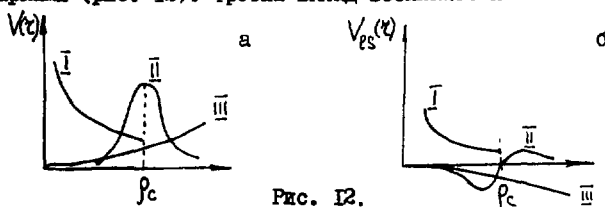


Рис. 12.

а) Потенциал взаимодействия между кварками, индуцированный: I - одноглюонным обменом, II - инстантонами, III - длинноволновыми флуктуациями. б) Спин-орбитальное взаимодействие, индуцированное соответствующими взаимодействиями.

На рис. 12 изображен примерный ход потенциала (а) и спин-орбитального взаимодействия (б) в нашей модели. Отметим, что такой вид спин-орбитальной связи имеет место лишь в каналах с прямыми инстантонами (19), т.е. в барионном октете и в псевдоскалярных мезонах. В других каналах доминирует одноглюнный обмен. Поэтому, например, наша модель предсказывает смену знака спин-орбитального расщепления при переходе от возбужденных состояний нуклона к возбужденным состояниям Δ -изобар. Эксперимент, по-видимому, подтверждает этот качественный вывод ^{/36/}. Важно ещё раз особо подчеркнуть, что рассмотренный процесс невозможно имитировать, рассматривая только потенциал одноглюнного обмена. К таким же явлениям относится ряд процессов слабого взаимодействия, происходящих с изменением киральности кварков.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели основные аспекты вакуума КХД и показали, что ряд основных гипотез группы MIT не нашли своего подтверждения.

Сформулирована новая кварковая модель мешков, в которой существенную роль играет взаимодействие кварков с непертурбативными полями КХД. В рамках модели получено хорошее описание спектра масс и других характеристик адронов, состоящих из легких u -, d -, s -кварков.

Взаимодействие с длинноволновой частью вакуумных флуктуаций носит аддитивный характер. Его интенсивность определяется величинами кварковых конденсатов в вакууме КХД, которые задают энергетический масштаб адронных масс. Это взаимодействие позволяет самосогласованным образом добиться стабильности мешка без введения подавления вакуумных полей.

Эффекты одноглюнного обмена являются малыми поправками и дают лишь незначительный вклад в расщепление между $SU_F(3)$ -мультиплетами, так как константа взаимодействия мала $\alpha_s = 0,7 < \alpha_s^{(M)} = 2,2$.

Учет инстантонного механизма взаимодействия кварков позволяет решить сразу ряд проблем спектроскопии. Дано объяснение существования практически безмассового π -мезона и массивного η' -мезона, а также изотопических разностей масс в рамках релятивистской кварковой модели. Спецификой инстантонного взаимодействия является образование дикуарков с изоскалярными квантовыми числами. Следствием этого механизма является $(N-\Delta)$ -расщепление масс и стабильность N -дигиперона. Дано качественное описание спин-орбитальных возбуждений, которое не может быть имитировано только одноглюнным потенциалом.

На наш взгляд, одним из достоинств модели по сравнению с существующими является наличие тесной связи с выводами правил сумм КХД и реше-

точными вычислениями. Наглядность и простота вычислений в модели мейков представляют ряд преимуществ перед указанными подходами.

Литература

1. Bogolubov P.N.-Ann. Inst. Henri Poincaré. 1967, vol. 8, p. 163.
Боголюбов П.Н.-ЭЧАЯ, 1972, т. 3, с. 144.
2. Боголюбов П.Н., Дорохов А.Е.-ЭЧАЯ, 1987, т. 18 с. 917.
3. Gell-Mann M.-Phys. Lett., 1964, v.8, p. 214.
Zweig G. CERN Report 81821/TH401, 1964.
4. Боголюбов Н.Н., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н. Препринт ОИЯИ, Д-1968, Дубна, 1965.
5. Струминский Б.В. Препринт ОИЯИ, Р-1939, Дубна, 1965.
Nan M.Y., Nambu Y.-Phys. Rev., 1965, v. 139B, p. 1006.
Miyamoto Y.-Suppl. Progr. Theor. Phys., Number Extra, 1965, p. 187.
6. Боголюбов Н.Н., Нгуен Ван Хьеу, Стоянов Д. и др. Препринт ОИЯИ, Д-2075, Дубна, 1965.
Боголюбов Н.Н., Матвеев В.А., Нгуен Ван Хьеу и др. Препринт ОИЯИ, Р-2141, Дубна, 1965.
7. Chodos A., Jaffe R.L., Johnson K. e.a.-Phys. Rev., 1974, v.D9, p. 3471.
8. De Grand T., Jaffe R.L., Johnson K., Kiskis J. J.-Phys. Rev., 1975, v. D12, p. 2060.
Donoghue J., Johnson K.-Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 1975.
9. Lee T.D.-Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 1802.
Close F.E., Horgan R.-Nucl. Phys., 1980, v. B164, p. 413.
10. Кобзарев И.Ю., Мартемьянов Б.В., Щепкин М.Г.-ЯФ, 1979, т. 29, 1620, т. 30, с. 504.
Мусаханов М.М.-ЯФ, 1981, т. 33, сс. 810, 1297, 1621, т. 34, с.1123;
Thomas A.W.-Adv. Nucl. Phys., 1983, v. 13, p. 1.
11. Shuryak E.V.-Phys. Rep., 1984, v. 115, p. 151.
12. Gasser J., Leutwyler H.-Phys. Rep. 1982, v. 87, p. 77.
13. Belavin A.A. et al.-Phys. Lett., 1975, v. 59, p. 85.
Polyakov A.M. -Nucl. Phys., 1977, v. B121, p. 429.
14. Callan C.G., Dashen R., Gross D.J.-Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 2717; ibid, 1979, v. D19, 1826; ibid 1979, v. D20, p. 3279.
15. Shuryak E.V.-Nucl. Phys., 1982, v. B203, pp. 93, 116, 140.
Dyakonov D.I., Petrov V.Yu.-Nucl. Phys., 1984, v. B245, p. 259.
16. Chetyrkin K.G., Krasnikov N.V., Tavkhelidze A.N.,
-Phys. Lett., 1978, v. 76B, p. 83;
Chetyrkin K.G., Krasnikov N.V.-Nucl. Phys., 1977, v. B119, p. 174.

17. Shifman M.A., Vainstein A.I., Zakharov V.I. - Nucl. Phys., v. B147, pp. 385, 448; УФН, 1982, 136, с. 553.
18. Ioffe B.L.-Nucl. Phys. 1981, v. B188, p. 317.
Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S. -Phys. Rep., 1985, v. 127, p. 1.
19. Dorokhov A.E., Kochelev N.I., JINR preprints, E2-86-224, E2-86-355; Dubna, 1986.
Дорохов А.Е., Кочелев Н.И. Труды Международного совещания "Кварки-86", М., ИЯИ АН СССР, 1987, с.392.
20. Hansson T.H.-Nucl. Phys., 1985, v. B249; p. 742;
Phys. Lett., 1986, v.166B, p. 343.
21. 't Hooft G.-Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 3432.
22. Бетман Р.Г., Лаперашвили Л.В.-ЯФ, 1985, т. 41, с. 463;
Кочелев Н.И.-ЯФ, 1985, т. 41, с. 456.
23. Wong C.W.-Phys. Rev., 1981, v. D24, p. 1416.
Дорохов А.Е.-ТМФ, 1984, т. 61, с. 64; ТМФ, 1987, т. 70, с. 52.
24. Bernard V. et al.-Nucl. Phys., 1984, v. A412, p. 349.
25. Geshkenbein B.V., Ioffe B.L.-Nucl. Phys., 1980, v. B166, p. 340. Dubna, 1986.
26. Dorokhov A.E., Kochelev N.I. JINR preprint, E2-86-790, Dubna, 1986.
27. Jaffe R.L.-Phys. Rev., 1977, v. D15, p. 267, 281.
28. Matveev V.A., Sorba P., 1977, Lett. Nuovo Cimento, v. 20, p. 435; Il Nuovo Cimento, 1978, v. 45A, p. 257.
29. Jaffe R.L., 1977, Phys. Rev. Lett., v. 38, p. 195.
30. Dorokhov A.E., Kochelev N.I. JINR preprint, E2-86-847, Dubna, 1986.
31. Liu K.F., Wong C.W.-Phys. Lett., 1982, v. 113B, p. 1.
Mulders P.I., Thomas A.W.-Journal of Phys., G: Nucl. Phys., 1983, v. 9, p. 1159.
Кондратьев П.А., Криворученко М., Шепкин М.Г.-Письма в ЖЭТФ, 1986, т. 43, с. 10.
32. Ларин С.А., Матвеев В.А. и др.-ЯФ, 1986, т. 44, с. 1066.
33. Balachandran A.P. et al. -Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, p. 887.
34. Mackenzie P.B., Thaker H.B.-Phys. Rev. Lett., 1985, v.55, p. 2539.
35. Iwasaki Y. УТНЕР-171 preprint, 1987.
36. Review of Particle Properties. Phys. Lett., 1986, v. 170B, p. 1.
37. Isgur N. -Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 779.

КАОНЫ В КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТИПА
М.К.Волков
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
А.Н.Иванов, Н.И.Троицкая
Ленинградский политехнический институт, Ленинград

1. Введение

Настоящая работа посвящена обсуждению низкоэнергетических свойств каонов. Будут рассмотрены основные низкоэнергетические величины, характеризующие каоны: спектр масс, амплитуды лептонных и нелептонных распадов, разности масс нейтральных каонов и параметры CP-нарушения.

Существенную роль при описании низкоэнергетических свойств каонов играют сильные низкоэнергетические взаимодействия (СНВ), учитывающие спонтанное нарушение киральной симметрии (СНКС) и нарушение унитарной симметрии. Современная теория сильных взаимодействий—КХД успешно описывает высокоэнергетическое взаимодействие адронов на языке кварков и глюонов. Однако описание СНВ адронов в КХД сталкивается со значительными трудностями. Основной причиной этих трудностей является невозможность применения теории возмущений, что обусловлено ростом текущей константы кварк-глюонного взаимодействия при малых переданных импульсах [1]. Поэтому для описания СНВ адронов используют различные приближенные методы и модели, основанные на КХД.

Последовательный способ описания СНВ адронов предлагает кварковая модель сверхпроводящего типа (КМСП) [2,3], представляющая собой обобщение кваркового варианта модели Намбу—Йона-Лазинио [4]. Мезоны в КМСП возникают как $q\bar{q}$ -коллективные возбуждения. Механизм СНКС аналогичен механизму образования энергетической щели в сверхпроводнике при низких температурах [5]. При этом СНКС возникает за счет сильного притяжения в $q\bar{q}$ -канале, обусловленного кирально-инвариантным четырехкварковым взаимодействием с эффективной константой $G_I=4,9 \text{ ГэВ}^{-2}$ [2,6]. В результате СНКС токовые кварки превращаются в составляющие, происходит увеличение масс кварков и перестройка низкоэнергетического вакуума [2,4].

Токовые массы кварков m_{0q} ($q = u, d, s$) и составляющие m_q связаны в КМСП уравнением [2,4]

$$m_{0q} = m_q [1 - 8 G_I \bar{I}_I(m_q)] , \quad (1)$$

где $I_1(m_q)$ — квадратично расходящийся интеграл [2]

$$I_1(m_q) = \frac{-iN_c}{(2\pi)^4} \int^{\Lambda} d^4k \frac{1}{m_q^2 - k^2} = \frac{N_c}{16\pi^2} [\Lambda^2 - m_q^2 \ln(1 + \Lambda^2/m_q^2)]. \quad (2)$$

Здесь N_c — число цветовых степеней свободы кварка (реально $N_c = 3$), а Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Появление зависимости от параметра обрезания в теории с эффективным четырехкварковым взаимодействием естественно. Действительно, поскольку такая теория неперенормируема и описывает, по предположению, лишь низкоэнергетические взаимодействия, то в ней должно быть вполне определенное физическое обрезание, которое характеризует область допустимых энергий взаимодействия и определяет масштаб нарушения киральной симметрии [7]. Нарушение унитарной (а также изотопической) симметрии определено разностями масс составляющих кварков, которые возникают вследствие разностей масс токовых кварков. Параметр Λ и массы составляющих кварков равны соответственно: $\Lambda = 1,25$ ГэВ, $m_u = 0,230$ ГэВ, $m_d = 0,284$ ГэВ и $m_s = 0,460$ ГэВ [2, 6]. Массы токовых кварков $m_{0u} = 3$ МэВ, $m_{0d} = 4,2$ МэВ и $m_{0s} = 30$ МэВ, соответствующие массам составляющих кварков, находятся в качественном согласии с общепринятыми [8].

Эффект СНКС можно описать в КМСП также и на языке кваркового конденсата $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$. Величину $\langle \bar{q}q \rangle$ определим формулой

$$\langle \bar{q}q \rangle = \lim_{V_4 \rightarrow \infty} \frac{1}{V_4} i \frac{\partial \ln Z[m_0]}{\partial m_{0q}} \Big|_{m_0=0}, \quad (3)$$

где V_4 — 4-мерный объем конфигурационного пространства, а $Z[m_0]$ — вакуумный функционал в теории с четырехкварковым взаимодействием [2], m_0 — диагональная матрица с элементами (m_{0u}, m_{0d}, m_{0s}) . В однопетлевом приближении [2–4] кварковый конденсат определен выражением

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{-iN_c}{(2\pi)^4} \int^{\Lambda} d^4k \frac{4m_{eff}}{m_{eff}^2 - k^2} = -4m_{eff} I_1(m_{eff}), \quad (4)$$

где $m_{eff} = 0,266$ ГэВ, и удовлетворяет уравнению (1) при $m_{0q} = 0$. С помощью уравнения для m_{eff} можно выразить кварковый конденсат через m_{eff} и константу G_I :

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle = -(m_{eff}/2G_I) = -(0,30)^3 \text{ ГэВ}^3. \quad (5)$$

Величина кваркового конденсата в КМСП больше общепринятой $\langle \bar{q}q \rangle = -(0,25)^3 \text{ ГэВ}^3$ [8]. Однако, как будет показано ниже, величина (5) согласована с величинами масс токовых кварков в КМСП и приводит к правильному спектру масс мезонов.

Вершины СНВ мезонов в КМСП определены однопетлевыми кварковыми диаграммами с виртуальными составляющими кварками. Локальные вершины могут быть получены путем длинноволнового разложения

кварковых диаграмм по импульсам мезонов. Рецепт КМСП состоит в том, чтобы учитывать только первые члены разложения, содержащие наименьшие степени импульсов мезонов. Это ограничение обусловлено требованиями киральной симметрии и феноменологического учета конфайнмента [2]. Кроме того, оно представляет собой обобщение гипотез векторной доминантности и частичного сохранения аксиального тока (ЧСАТ), согласно которым амплитуды низкоэнергетического взаимодействия мезонов являются гладкими функциями массовых переменных мезонов вплоть до нулевых значений последних [9].

В КМСП можно получить все вершины СНВ мезонов стандартных эффективных киральных лагранжианов с линейной реализацией киральной симметрии [10]¹⁾. Кроме того, КМСП воспроизводит все вершины низкоэнергетического взаимодействия мезонов, обусловленные киральными аномалиями с топологической и нетопологической природой [11].

Завершая краткий обзор КМСП, следует отметить, что аппроксимация вершин СНВ мезонов однопетлевыми кварковыми диаграммами (с соответствующим рецептом вычисления) согласуется с правилами отбора в многоцветной КХД ($N_c \rightarrow \infty$) [12].

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разделе 2 рассмотрен спектр масс каонов, обусловленный СНВ. В разделе 3 проанализированы распады $K \rightarrow \ell \nu_\ell$ и $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma$, определяемые слабыми взаимодействиями с обменом W -бозоном и СНВ. Предложено теоретическое решение проблемы аксиальных факторов в распадах $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma$. Раздел 4 посвящен распадам $K \rightarrow \gamma \gamma$, $K \rightarrow \ell^+ \ell^-$, $K \rightarrow 2\pi$ и $K \rightarrow 3\pi$. При описании этих распадов важную роль играют не только обмен W -бозоном и СНВ, но также высокоэнергетическое КХД-взаимодействие с обменом глюонами. Предложено теоретическое объяснение усиления переходов с $\Delta I = 1/2$. В разделе 5 проанализирована разность масс K_L и K_S -мезонов и параметры нарушения CP-четности. В разделе 6 проведено обсуждение результатов.

2. Массы каонов

Массы каонов, обусловленные СНВ, определены в КМСП формулами [2,6]:

$$m_{K^+}^2 = C_{us} + Z(m_s - m_u)^2, \quad m_{K^0}^2 = C_{ds} + Z(m_s - m_d)^2, \quad (6)$$

¹⁾ Переход к нелинейной реализации киральной симметрии в КМСП осуществляется в пределе $m_q \rightarrow \infty$.

где

$$C_{is} = \frac{Z}{4G_1 I_2(m_i, m_s)} \{1 - 4G_1 [I_1(m_i) + I_1(m_s)]\} \quad (i=u, d) \quad (7)$$

Здесь $I_2(m_i, m_s)$ — логарифмически расходящийся интеграл [2]:

$$I_2(m_i, m_s) = \frac{-iN_c}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(m_i^2 - k^2)(m_s^2 - k^2)} = \frac{1}{m_i^2 - m_s^2} [I_1(m_s) - I_1(m_i)], \quad (8)$$

$Z^{-1} = 1 - 6m_u^2/m_{a_1}^2 \approx 1/\sqrt{2}$ — константа перенормировки волновых функции 0^- -мезонов, обусловленная прямыми переходами $0^- \leftrightarrow 1^+$ (где 1^+ — нонет аксиальных мезонов)²⁾, возникающими вследствие СНКС. Константу Z можно полагать одинаковой для всех компонент 0^- -нонета [13]. Полагая $m_d = m_u = 0,28$ ГэВ, находим: $(m_K^+)^{КСП} = 0,51$ ГэВ.

Теоретическая величина хорошо согласуется с экспериментальной: $(m_K^+)^{эксп} = 0,494$ ГэВ [14].

Массы каонов, обусловленные СНВ, можно описать также на языке масс токовых кварков, кваркового конденсата и константы ЧСАТ π^- -мезона $F_\pi = 0,093$ ГэВ [8]³⁾:

$$m_{K^+}^2 = -\frac{1}{F_\pi^2} [m_{0u} \langle \bar{u}u \rangle + m_{0s} \langle \bar{s}s \rangle], \quad m_{K^0}^2 = -\frac{1}{F_\pi^2} [m_{0u} \langle \bar{d}d \rangle + m_{0s} \langle \bar{s}s \rangle] \quad (9)$$

Используя численные значения масс токовых кварков и кваркового конденсата, полученные в КМСП, находим ($m_{0d} \approx m_{0u}$): $m_K = 0,51$ ГэВ.

Наблюдаемое экспериментально расщепление масс K^0 - и K^+ -мезонов обусловлено нарушением изотопической инвариантности и может быть объяснено разностью масс u - и d -кварков [6].

3. Распады $K \rightarrow \ell \nu_\ell$ и $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma^*$

Распад $K \rightarrow \ell \nu_\ell$. Лептонные распады $K \rightarrow \ell \nu_\ell$ могут быть описаны в КМСП кварковыми диаграммами на рис. 1. Основной вклад в амплитуду распада дают слабые взаимодействия с бозоном W — бозоном и СНВ. Последние определяют величину матричного элемента перехода

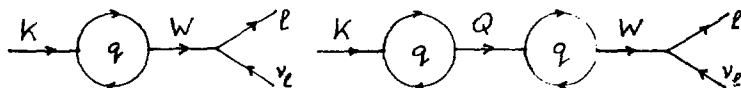


Рис. 1. Кварковые диаграммы, описывающие в КМСП распад $K \rightarrow \ell \nu_\ell$.

²⁾ Здесь $m_{a_1} = 1,28 \pm 0,03$ ГэВ — масса аксиального a_1 -мезона [14].

³⁾ В КМСП константа F_π определена формулой [2, 6]: $F_\pi = 2m_u \times [I_2(m_u, m_u)/Z]^{1/2} = 0,093$ ГэВ.

$K \rightarrow$ вакуум, который пропорционален константе ЧСАТ К-мезона F_K . В КМСП константа F_K определена формулой [2,6]:

$$F_K = (m_u + m_s) [I_2(m_u, m_s) / Z]^{1/2} = \left(\frac{1+\lambda}{2} \right) \left[\frac{I_2(m_u, m_s)}{I_2(m_u, m_u)} \right]^{1/2} F_\pi = 1,15 F_\pi, \quad (10)$$

где $\lambda = m_s / m_u = 1,64$. Теоретическое значение (10) хорошо согласуется с экспериментальным: $(F_K)_{\text{эксп.}} = (1,17 \pm 0,01) F_\pi$ [14].

Распад $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma$. Фейнмановские диаграммы, описывающие распад $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma$, изображены на рис.2. Заштрихованный блок обозначает структурную часть амплитуды распада $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma$, определяемую СНВ. Диаграммы на рис.2а описывают тормозное излучение γ -кванта. Вклад диаграмм на рис.2а пропорционален массе лептона m_ℓ . Поэтому в пределе $m_\ell \rightarrow 0$ ($m_K \gg m_\ell$) тормозным излучением можно пренебречь.

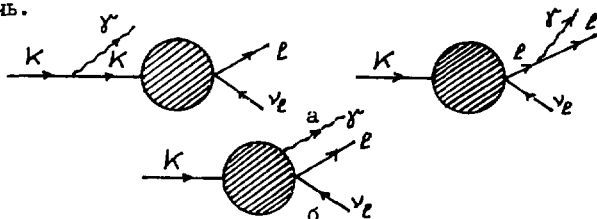


Рис.2. Фейнмановские диаграммы распада $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma$: а) диаграммы с тормозным излучением γ -кванта, б) диаграмма с излучением γ -кванта из структурного блока.

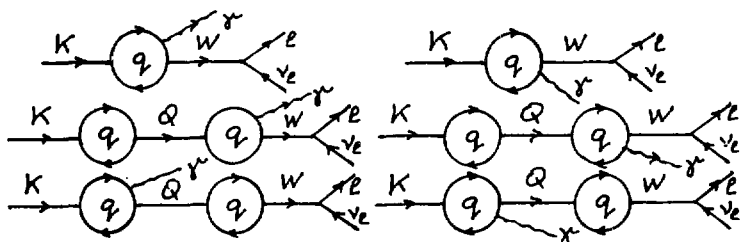


Рис.3. Кварковые диаграммы, определяющие в КМСП структурную часть амплитуды распада $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma$.

Структурная часть амплитуды распада $K \rightarrow \ell \nu_\ell \gamma$ определена в КМСП кварковыми диаграммами на рис.3. Результат вычисления можно описать с помощью двух факторов h_V и h_A [15], где h_V - векторный, а h_A - аксиальный фактор. Вычисляя диаграммы на рис.3, получим следующие выражения для факторов:

$$h_V^K = \frac{1}{8\pi^2 F_K^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{3\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{\lambda(2\lambda^2 + 1)}{(\lambda^2 - 1)^2} \ln \lambda^2 \right], \quad (II)$$

$$h_A^K = \frac{1}{8\pi^2 F_K^2} \left(\frac{1+\lambda}{Z} \right) \left[\frac{1}{\lambda} J_3\left(\frac{1}{\lambda}\right) + (3+2\lambda) J_3(\lambda) - \right. \\ \left. - (1+2\lambda) J_2(\lambda) \right],$$

где

$$J_n(\lambda) = \int_0^1 dx \frac{x^n}{\lambda^2 - (\lambda^2 - 1)x} \quad (I2)$$

Вычислим отношение факторов:

$$\gamma_K = \frac{h_A^K}{h_V^K} = \frac{1+\lambda}{Z} \left[\frac{1}{\lambda} J_3\left(\frac{1}{\lambda}\right) + (3+2\lambda) J_3(\lambda) - (1+2\lambda) J_2(\lambda) \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{2} - \frac{3\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{\lambda(2\lambda^2 + 1)}{(\lambda^2 - 1)^2} \ln \lambda^2 \right]^{-1} = \frac{0,75}{Z} = 0,53. \quad (I3)$$

Величина γ_K меньше единицы! Отклонение γ_K от единицы обусловлено в КМСП: 1) СНКС ($Z \neq 1$) и 2) нарушением унитарной симметрии ($\lambda \neq 1$).

В пределе унитарной симметрии ($\lambda \rightarrow 1$) факторы h_V^K и h_A^K совпадают с факторами h_V^π и h_A^π распада $\pi \rightarrow \ell \nu \gamma$:

$$h_V^\pi = \frac{1}{8\pi^2 F_\pi^2}, \quad h_A^\pi = \frac{1}{8\pi^2 F_\pi^2} \frac{1}{Z}. \quad (I4)$$

В этом случае отношение факторов определено только константой Z :

$$\gamma_\pi = h_V^\pi / h_A^\pi = Z^{-1} < 1. \quad (I5)$$

Таким образом, в распаде $\pi \rightarrow \ell \nu \gamma$ неравенство $\gamma_\pi < 1$ целиком обусловлено СНКС.

Полученные результаты опровергают утверждение Скадрона и Павера [16], что релятивистская кварковая модель адронов не может объяснить наблюдаемого экспериментально соотношения $\gamma_P < 1$ ($P = \pi, K$).

4. Распады $K \rightarrow \gamma \gamma, K \rightarrow \ell^+ \ell^-, K \rightarrow 2\pi$ и $K \rightarrow 3\pi$

Согласно современной теории элементарных частиц распады $K \rightarrow \gamma \gamma, \ell^+ \ell^-, 2\pi$ и 3π определены слабыми взаимодействиями с обменом W -бозоном, сильными высокоэнергетическими взаимодействиями с обменом глюонами и СНВ. Результат слабых взаимодействий с обменом W -бозоном и высокоэнергетических взаимодействий с обменом глюо-

нами можно описать локальным низкоэнергетическим эффективным лагранжианом $\mathcal{L}_{eff}$ [17]:

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} s_1 c_1 c_3 \sum_{i=1,2,3,5,6} C_i(\mu) \mathcal{Q}_i(\mu). \quad (16)$$

Здесь $C_i(\mu)$ — числовые коэффициенты, $\mathcal{Q}_i(\mu)$ — четырехкварковые операторы Гилмана-Ваиса [17], причем $\mathcal{Q}_6(\mu)$ — оператор "пингвин" [18], а μ — точка нормировки. Появление точки нормировки μ обусловлено учетом высокоэнергетического КХД-взаимодействия. Зависимость от μ входит через зависимость от $\alpha_3(\mu) = (2\pi/9) \ln^{-1}(\mu/\Lambda_3)$ — текущей константы кварк-глюонного взаимодействия, где Λ_3 — КХД-параметр.⁴⁾

Коэффициенты $C_i(\mu)$ зависят от структуры модели электрослабых взаимодействий. В стандартной модели Кобаяши-Маскава (KM) [19] коэффициенты $C_i(\mu)$ имеют вид

$$C_i(\mu) = C'_i(\mu) + \tau C''_i(\mu), \quad (17)$$

где $\tau = s_2^2 + (s_2 s_3 c_2 / c_1 c_3) \exp(-i\delta)$. Здесь $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$ ($i=1,2,3$), а δ — вещественная фаза нарушения CP-четности. Численные значения $C'_i(\mu)$ и $C''_i(\mu)$ зависят от μ и масс тяжелых кварков m_c , m_b и m_t . Для стандартной нормировки $\alpha_3(\mu) = 1$ [18] ($\mu = 2\Lambda_3 = 0,24$ ГэВ) и $m_c = 1,4$ ГэВ, $m_b = 4,6$ ГэВ и $m_t = 40$ ГэВ имеем [17]⁵⁾:

$$C_1 = -1,007 + 0,037\tau, C_2 = 1,611 - 0,037\tau, C_3 = -0,033 - 0,007\tau, \\ C_5 = 0,018 + 0,005\tau, C_6 = -0,097 - 0,111\tau. \quad (18)$$

Эффективный лагранжиан (16) удовлетворяет правилам отбора: $|\Delta S|=1$ и $|\Delta I|=1/2, 3/2$. Переходы с $|\Delta I|=3/2$ осуществляются оператором $\mathcal{Q}_{|\Delta I|=3/2}$:

$$\mathcal{Q}_{|\Delta I|=3/2} = (\bar{s}_a \bar{b} d_a)(\bar{u}_b \bar{u}_b) - (\bar{s}_a \bar{b} d_a)(\bar{d}_b \bar{d}_b) + (\bar{s}_a \bar{u}_a)(\bar{d}_b \bar{d}_b) \quad (19)$$

который входит в (16) с множителем $(C_1 + C_2)/3 = 0,201$. Оставшаяся часть лагранжиана (16) приводит к переходам с $|\Delta I|=1/2$ ($\Delta = \delta, \mu$ ($1-\gamma^5$) и a, b — индексы "цвета").

Амплитуды исследуемых распадов каонов включают матричные элементы операторов $\mathcal{Q}_i(\mu): \langle X | \mathcal{Q}_i(\mu) | K \rangle$, где $|X\rangle$ — некоторое низкоэнергетическое состояние. Величины матричных элементов $\langle X | \mathcal{Q}_i(\mu) | K \rangle$

⁴⁾ Параметр Λ_3 связан с массой с-кварка и параметром глубоко неупругого рассеяния Λ_4 соотношением [17]: $\Lambda_3 = \Lambda_4^{25/27} m_c^{2/27}$. При $m_c = 1,4$ ГэВ и $\Lambda_4 = 0,1$ ГэВ имеем $\Lambda_3 = 0,12$ ГэВ.

⁵⁾ Величина массы t -кварка известна плохо, поэтому выбор $m_t = 40$ ГэВ имеет иллюстративный характер.

определены СНВ. Поэтому вычисление $\langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle$ представляет собой чрезвычайно сложную проблему, которая допускает пока лишь модельные решения.

Используя результаты работы [20], можно представить матричные элементы $\langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle$ в виде суммы двух слагаемых:

$$\langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle = \langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle_{\text{НПВ}} + \langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle_{\text{ПВ}}, \quad (20)$$

где $\langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle_{\text{НПВ}}$ обозначает непертурбативный вклад (НПВ), не зависящий от точки нормировки μ и определяемый СНКС, тогда как $\langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle_{\text{ПВ}}$ соответствует пертурбативному вкладу (ПВ). При этом величина $\langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle_{\text{ПВ}}$ определена квантовыми флуктуациями с энергией меньше μ [20]. Согласно [20], при достаточно малом μ ($\mu \sim 2\Lambda_3$) существенную роль должны играть непертурбативные вклады. Поэтому пертурбативными вкладками при $\mu \sim 2\Lambda_3$ можно пренебречь

$$\langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle \approx \langle \chi | Q_i(\mu) | K \rangle_{\text{НПВ}}. \quad (21)$$

В КМСП правую часть соотношения (21) естественно аппроксимировать кварковыми петлями с виртуальными составляющими кварками и параметром обрезания $\Lambda = 1,25$ ГэВ, характеризующим масштаб нарушения киральной симметрии.⁶⁾

Следует отметить, что аппроксимация низкоэнергетических матричных элементов операторов $Q_i(\mu)$ кварковыми петлями со свободными составляющими кварками: 1) удовлетворяет правилам отбора по $1/N_c$ разложению, 2) согласуется с предположением о возможности использования приближения валентных кварков при нормировке $\alpha_3(\mu) = 1$ [18]. Перейдем к рассмотрению конкретных распадов.

Распад $K \rightarrow \gamma\gamma$. Амплитуды распадов $K_{L,S} \rightarrow \gamma\gamma$ определены в КМСП контактными и полюсными диаграммами на рис. 4. Полюсные диаграммы обусловлены обменом псевдоскалярными мезонами π^0, η, η' и скалярным мезоном $\varepsilon(700)$, состоящим только из u - и d -квар-

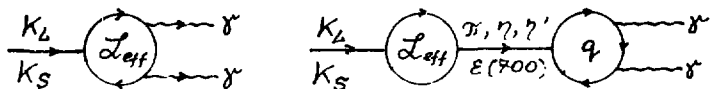


Рис. 4 Контактные и полюсные диаграммы, описывающие распады $K_{L,S} \rightarrow \gamma\gamma$ в КМСП.

6) Для оценки пертурбативных вкладов можно использовать те же кварковые петли, но с обрезанием μ [20]. При этом в каждом конкретном случае легко убедиться, что пертурбативные вклады малы по сравнению с непертурбативными.

ков [2,21]. В пределах точности КМСП (20+25%) вкладом контактных диаграмм можно пренебречь [22].

Амплитуды распадов $K_L \rightarrow \gamma\gamma$ в полюсном приближении включают матричные элементы операторов $Q_i(\mu)$ между состояниями K^0 и X , где $X = \pi^0, \eta, \eta'$ или ε (700). На рис. 5 изображены кварковые диаграммы матричных элементов переходов $K^0 - \pi^0, \eta, \eta'$ и $K^0 - \varepsilon$.

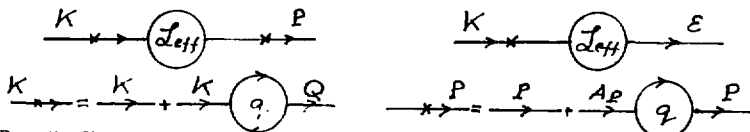


Рис. 5. Кварковые диаграммы, определяющие матричные элементы переходов $K^0 - P$ и $K^0 - \varepsilon$, где $P = \pi^0, \eta$ и η' ; A_P — аксиальный мезон с квантовыми числами P -мезона.

Аналитические выражения этих матричных элементов получены в работах [22,23]. Численные значения приведены в таблице I.

Таблица I. Численные значения матричных элементов переходов $K^0 \rightarrow \pi^0, \eta, \eta'$ и ε (700), определяемых операторами Q_i .

Q_i	$K^0 \rightarrow \pi^0$	$K^0 \rightarrow \eta$	$K^0 \rightarrow \eta'$	$K^0 \rightarrow \varepsilon$
	в ед. $\langle \pi^0 Q_i K^0 \rangle = \sqrt{2} F_\pi F_K m_K^2 = 3,5 \times 10^{-3}$			ГэВ ⁴
Q_1	1,0	0,8	0,6	0
Q_2	0,3	0,3	0,2	0
Q_3	-0,3	0,4	3,3	0
Q_5	17,0	3,8	-37,0	$i 23$
Q_6	51,0	13,0	-104,0	$i 68$

Амплитуды распадов $K_L \rightarrow \gamma\gamma$ определены выражениями [22,23]:

$$A(K_L \rightarrow \gamma\gamma) = -\frac{\alpha}{\pi F_\pi} (G_F S_1 C_1 C_3) \left\{ \frac{1}{m_K^2 - m_\pi^2} \langle \pi^0 | Q_1 \Delta S | K^0 \rangle + \frac{1}{m_K^2 - m_\eta^2} \cdot \frac{1}{3} (5 \sin \bar{\theta} - \sqrt{2} \frac{F_\pi}{F_K} \cos \bar{\theta}) \langle \eta | Q_1 \Delta S | K^0 \rangle + \frac{1}{m_K^2 - m_{\eta'}^2} \cdot \frac{1}{3} (5 \cos \bar{\theta} + \sqrt{2} \frac{F_\pi}{F_K} \sin \bar{\theta}) \langle \eta' | Q_1 \Delta S | K^0 \rangle \right\} = 3,3 \times 10^{-9} \text{ ГэВ}^{-1}, \quad (22)$$

$$A(K_S \rightarrow \gamma\gamma) = -\frac{10}{9} \frac{\alpha}{\pi F_\pi} \bar{Z} \eta_2 (G_F S_1 C_1 C_3) \frac{i \langle \varepsilon | Q_1 \Delta S | K^0 \rangle}{m_K^2 - m_\varepsilon^2} \cdot \cos \bar{\theta}_\varepsilon(m_K) \cdot \exp i \bar{\theta}_\varepsilon(m_K) = 4,0 \times 10^{-9} \cos \bar{\theta}_\varepsilon(m_K) \exp i \bar{\theta}_\varepsilon(m_K) \text{ ГэВ}^{-1}$$

Теоретическая величина $A(K_L \rightarrow \gamma\gamma)$ хорошо согласуется с экспериментальной [14]: $|A(K_L \rightarrow \gamma\gamma)|_{\text{эксп.}} = (3,18 \pm 0,14) \times 10^{-9} \text{ ГэВ}^{-1}$. В свою очередь, амплитуда $A(K_S \rightarrow \gamma\gamma)_{\text{теор.}}$ удовлетворяет экспериментальному ограничению [14]: $|A(K_S \rightarrow \gamma\gamma)|_{\text{эксп.}} < 7 \times 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-1}$.

Распады $K \rightarrow \ell^+ \ell^-$. Распады $K_L, S \rightarrow \ell^+ \ell^-$ идут через двухфотонное промежуточное состояние (см. рис. 6) с изменением спиральности лептонов. Поэтому амплитуды распадов $K_L, S \rightarrow \ell^+ \ell^-$ пропорци-

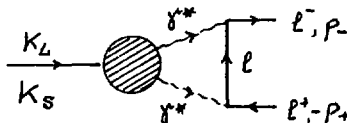


Рис. 6. Фейнмановская диаграмма распада $K_L, S \rightarrow \ell^+ \ell^-$ через двухфотонное промежуточное состояние.

ональны массе лептона m_ℓ . Амплитуды распадов $K_L, S \rightarrow \ell^+ \ell^-$ содержат мнимые и вещественные части. мнимые части определяют нижнюю границу (унитарный предел) вероятностей распадов $K_L, S \rightarrow \ell^+ \ell^-$ и пропорциональны амплитудам распадов $K_L, S \rightarrow \gamma\gamma$ с двумя реальными фотонами. Для вычисления вещественных частей необходимо ввести формфакторы. Поскольку амплитуды распадов $K_L, S \rightarrow \gamma\gamma$ определены полюсными диаграммами с обменом мезонами π^0, η, η' и $\epsilon(700)$, то вещественные части амплитуд распадов $K_L, S \rightarrow \ell^+ \ell^-$ в этом приближении могут быть определены двухфотонными формфакторами мезонов π^0, η, η' и $\epsilon(700)$ [24]:

$$A(K_L \rightarrow \gamma^* \gamma^*) = A_L \frac{1}{1 - q_1^2/m_\pi^2} \frac{1}{1 - q_2^2/m_\pi^2} + B_L \frac{1}{1 - q_1^2/m_\eta^2} \frac{1}{1 - q_2^2/m_\eta^2}, \quad (23)$$

$$A(K_S \rightarrow \gamma^* \gamma^*) = A_S \frac{1}{1 - q_1^2/m_\pi^2} \frac{1}{1 - q_2^2/m_\pi^2}.$$

Здесь m_V — масса векторного мезона $V = \rho, \omega$ и φ , $A_L = 2,1 \times 10^{-9} \text{ ГэВ}^{-1}$, $B_L = 1,2 \times 10^{-9} \text{ ГэВ}^{-1}$ и $A_S = 2,0 \times 10^{-9} \text{ ГэВ}^{-1}$ [25].

Амплитуды распадов $K_L, S \rightarrow \ell^+ \ell^-$, вычисленные с учетом (23), имеют вид [25]:

$$A(K_L \rightarrow \ell^+ \ell^-) = A(K_L \rightarrow \gamma\gamma) \frac{\alpha m_\ell}{4\pi} (0,64 M_\rho + 0,36 M_\varphi) [\bar{u}(p_-) \gamma^\mu v(p_+)], \quad (24)$$

$$A(K_S \rightarrow \ell^+ \ell^-) = A(K_S \rightarrow \gamma\gamma) \frac{\alpha m_\ell}{4\pi} M_\rho' [\bar{u}(p_-) v(p_+)].$$

Здесь $u(p_-)$ и $v(p_+)$ — дираковские спиноры лептонов, M_V ($V = \rho, \varphi$) и M_ρ' определены выражениями [24]:

$$M_V = -\frac{i\pi}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2} \left[2 F\left(-\frac{1-z}{2}\right) + \frac{\pi^2}{6} + \ln^2 \frac{1+z}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_K^2}{m_\pi^2} + 2 \ln \frac{m_K^2}{m_\pi^2} \cdot \ln \frac{1+z}{2} \right] - 2 \frac{m_V^2}{m_K^2} \left(\ln \frac{m_V^2}{m_K^2} + 1 \right) - \\ - 2 \left(\frac{m_V^2}{m_K^2} - 1 \right)^2 \left[\ln \frac{m_V^2}{m_\pi^2} \cdot \ln \left(1 - \frac{m_K^2}{m_V^2} \right) + F\left(-\frac{m_K^2}{m_V^2}\right) \right] + \\ + 4 \left(4 \frac{m_V^2}{m_K^2} - 1 \right) \operatorname{arctg}^2 \left(1 / \sqrt{4 \frac{m_V^2}{m_K^2} - 1} \right), \quad (25)$$

$$M'_p = -M_p + 16 \frac{m_p^4}{m_K^2} \operatorname{arctg}^2 \left(1 / \sqrt{4 \frac{m_p^2}{m_K^2} - 1} \right) - 8 \frac{m_p^2}{m_K^2} \sqrt{4 \frac{m_p^2}{m_K^2} - 1} \cdot \\ \cdot \operatorname{arctg} \left(1 / \sqrt{4 \frac{m_p^2}{m_K^2} - 1} \right) - 4 \frac{m_p^2}{m_K^2} \left(\frac{m_p^2}{m_K^2} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{m_K^2}{m_p^2} \right).$$

Определим относительные вероятности распадов $K_L \rightarrow \ell^+ \ell^-$:

$$B(K_L \rightarrow \ell^+ \ell^-) = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \ell^+ \ell^-)}{\Gamma(K_L \rightarrow \gamma \gamma)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha m_\ell}{\pi m_K} \right)^2 \left(1 - \frac{4 m_\ell^2}{m_K^2} \right)^{1/2} \cdot |0,64 M_p + 0,36 M_p|^2, \quad (26)$$

$$B(K_S \rightarrow \ell^+ \ell^-) = \frac{\Gamma(K_S \rightarrow \ell^+ \ell^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \gamma \gamma)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha m_\ell}{\pi m_K} \right)^2 |M_p|^2 \left(1 - \frac{4 m_\ell^2}{m_K^2} \right)^{1/2}$$

Численные значения $B(K_{L,S} \rightarrow \ell^+ \ell^-)$ приведены в таблице 2.

Таблица 2. Численные значения относительных вероятностей распадов $K_{L,S} \rightarrow \ell^+ \ell^-$

Распад	M_p	m_p	M'_p	B_i в ед. 10^{-5}	B в ед. 10^{-5}	Эксперим. в ед. 10^{-5}
$K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$	-3,1- -i10,4	-5,4- -i10,4	-	1,20	1,52	$1,86 \pm 0,43$
$K_L \rightarrow e^+ e^-$	59- -i44	55- -i44	-	5×10^{-4}	14×10^{-4}	< 40
$K_S \rightarrow \mu^+ \mu^-$	-	-	1,8+ +i10,4	1,00	1,03	< 30
$K_S \rightarrow e^+ e^-$	-	-	-60- -i44	5×10^{-4}	15×10^{-4}	

Примечание. Здесь B_i определена мнимой частью амплитуды распада и является унитарным пределом вероятности распада. Результат вычисления $B_i(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ согласуется с полученным в работе [26].

Удовлетворительные экспериментальные данные имеются только для распада $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Теоретическое значение $B(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ хорошо согласуется с экспериментальным. Для остальных каналов распада теоретические значения относительных вероятностей удовлетворяют экспериментальным ограничениям. Более подробное обсуждение результатов расчета выполнено в работе [25].

Распады $K \rightarrow 2\pi$. Амплитуды распадов $K \rightarrow 2\pi$ можно выразить через амплитуды A_I распадов $K \rightarrow (2\pi)_I$ в 2π -состояния с полным изоспином $I=0,2$ соответственно

$$\begin{aligned} A(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= \sqrt{3/2} A_2 e^{i\delta_2}, \\ A(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= \sqrt{2/3} A_0 e^{i\delta_0} + i\sqrt{1/3} A_2 e^{i\delta_2}, \\ A(K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \sqrt{2/3} A_0 e^{i\delta_0} - 2i\sqrt{1/3} A_2 e^{i\delta_2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь δ_0 и δ_2 — фазы сильного низкоэнергетического $\pi\pi$ -взаимодействия в состояниях с изоспином $I=0,2$ соответственно.

Амплитуда $A_I e^{i\delta_I}$ представляет собой матричный элемент эффективного лагранжиана (16) между состояниями $|K\rangle$ и $|(2\pi)_I\rangle$:

$$A_I e^{i\delta_I} = i \langle (2\pi)_I | \mathcal{L}_{eff} | K \rangle. \quad (28)$$

Из выражения (28) и структуры эффективного лагранжиана (16) следует, что величина амплитуды A_0 определена переходами с $\Delta I=1/2$, тогда как величина амплитуды A_2 — переходами с $\Delta I=3/2$. Согласно экспериментальным данным $|A_2/A_0|_{\text{эксп}} = (4,44 \pm 0,03) \times 10^{-2} \ll 1$ [14], переходы с $\Delta I=1/2$ усилены по отношению к переходам с $\Delta I=3/2$ (правило $\Delta I=1/2$).

Переходы с $\Delta I=3/2$. Эффективный лагранжиан, удовлетворяющий правилам отбора $\Delta S=1$ и $\Delta I=3/2$, имеет вид [23]:

$$\mathcal{L}_{eff}^{\Delta I=3/2} = (G_F/\sqrt{2}) s_r c_r c_3 \times 0,201 \times \mathcal{Q}_{\Delta I=3/2}. \quad (29)$$

Амплитуда распада $A^{3/2}(K \rightarrow 2\pi)$ пропорциональна матричному элементу $\langle 2\pi | \mathcal{Q}_{\Delta I=3/2} | K \rangle$:

$$A^{3/2}(K \rightarrow 2\pi) = 3,54 \times 10^{-7} \times \langle 2\pi | \mathcal{Q}_{\Delta I=3/2} | K \rangle (\text{ГэВ})^{-2} \quad (30)$$

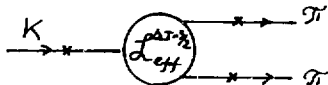


Рис. 7. Контактные диаграммы, описывающие амплитуды переходов с $\Delta I=3/2$.

В КМСП матричные элементы $\langle 2\pi | Q | \Delta I = 3/2 \rangle K$ определены контактными диаграммами на рис.7. Выпишем результат вычисления [27]:

$$\begin{aligned} \langle \pi^+ \pi^- | Q | \Delta I = 3/2 | K^0 \rangle &= -\frac{1}{2} \langle \pi^0 \pi^0 | Q | \Delta I = 3/2 | K^0 \rangle = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \langle \pi^+ \pi^0 | Q | \Delta I = 3/2 | K^+ \rangle, \\ \langle \pi^+ \pi^0 | Q | \Delta I = 3/2 | K^+ \rangle &= \frac{8}{1+\lambda} F_K m_K^2 \left[1 - \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^2 \frac{F_\pi^2 m_\pi^2}{F_K^2 m_K^2} \right] \quad (31) \\ &- (2-1) \left(\frac{1+\lambda}{2} \right) \left(1 - \frac{F_\pi^2}{F_K^2} \right) = 6,55 \times 10^{-2} (138)^3. \end{aligned}$$

Численные значения амплитуд и парциальных ширин распадов $K \rightarrow 2\pi$, обусловленных переходами с $\Delta I = 3/2$, приведены в таблице 3.

Таблица 3. Численные значения амплитуд и парциальных ширин распадов $K \rightarrow 2\pi$

Распад	Теория				Эксперимент	
	Переходы с $\Delta I=3/2$		Переходы с $\Delta I=1/2$			
	A	Г	A	Г	A	Г
$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^-$	2,33	1,80	0	0	1,84	1,13
$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	1,10	0,40	30,0	297	27,7	253
$K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	2,20	0,80	30,0	149	26,3	116

Примечание. Здесь A — абсолютная величина амплитуды распада $K \rightarrow 2\pi$ в ед. 10^{-8} ГэВ, а Г — парциальная ширина распада в ед. 10^{-17} ГэВ.

Переходы с $\Delta I = 1/2$. Переходы с $\Delta I = 1/2$ имеют место в распадах $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ и $K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$. Эффективный лагранжиан, удовлетворяющий правилам отбора $\Delta S = 1$ и $\Delta I = 1/2$, может быть получен из (16) вычитанием (29) [23]:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\Delta I = 1/2} = \mathcal{L}_{\text{eff}} - \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\Delta I = 3/2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} s_1 c_1 c_3 \times Q_{\Delta I = 1/2}. \quad (32)$$

Амплитуды распадов $K^0 \rightarrow 2\pi$ определены как контактными, так и полюсными диаграммами. Основной вклад дает полюсная диаграмма с обменом скалярным мезоном ϵ (700). В пределах точности КМСП вкладом контактных диаграмм и полюсных диаграмм с обменом други-

ми резонансами можно пренебречь по сравнению с вкладом мезона $\mathcal{E}(700)$ [23, 28].

Матричный элемент оператора $Q_{\Delta I=1/2}$ между состояниями $|K^0\rangle$ и $|\mathcal{E}\rangle$ связан с матричным элементом оператора Q_6 соотношением

$$i\langle \mathcal{E} | Q_{\Delta I=1/2} | K^0 \rangle = -0,09 i \langle \mathcal{E} | Q_6 | K^0 \rangle = 2,2 \times 10^{-2} (\text{ГэВ})^4. \quad (33)$$

Кварковые диаграммы, описывающие матричные элементы перехода $K^0 \rightarrow \mathcal{E}$, изображены на рис. 5. Выпишем амплитуды распадов $K^0 \rightarrow 2\pi$, обусловленные переходами с $\Delta I=1/2$ [23]:

$$A^{1/2}(K^0 \rightarrow 2\pi) = \frac{G_F S_1 C_1 C_2}{\sqrt{2}} i \langle \mathcal{E} | Q_{\Delta I=1/2} | K^0 \rangle \frac{g_{\pi\pi}(m_K)}{m_{\mathcal{E}}^2 - m_K^2} \cdot \cos \delta_{\mathcal{E}}(m_K) \cdot e^{i\delta_{\mathcal{E}}(m_K)} = 3,0 \times 10^{-7} e^{i\delta_{1/2}} (\text{ГэВ}). \quad (34)$$

Здесь $\delta_{1/2} = \delta_{\mathcal{E}}(m_K) = 61,4^\circ$ — фаза амплитуды $A^{1/2}(K^0 \rightarrow 2\pi)$. Численные значения амплитуд и парциальных ширин распадов $K^0 \rightarrow 2\pi$, обусловленных переходами с $\Delta I=1/2$, приведены в таблице 3.

Теоретические значения амплитуд и парциальных ширин распадов $K \rightarrow 2\pi$ находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными и подтверждают феноменологическое правило $\Delta I=1/2$: $(A_2/A_0)_{\text{теор}} = 5,2 \times 10^{-2}$, где численные значения A_0 и A_2 найдены из таблицы 3. Усиление переходов с $\Delta I=1/2$ в КМСП происходит за счет обмена скалярным мезоном $\mathcal{E}(700)$. Мезон $\mathcal{E}(700)$ является широким резонансом и описывает сильное низкоэнергетическое взаимодействие в конечном состоянии π -мезонов распада.

Применение широких резонансов для описания в распадах сильного взаимодействия в конечном состоянии часто встречается в литературе [29]. Амплитуда распада, параметризованная широким резонансом, удовлетворяет условию двухчастичной унитарности. Это допускает описание не только абсолютной величины амплитуды распада, но и ее фазы [29]. Обычно параметры промежуточного широкого резонанса — масса и ширина — являются подгоночными и определяются из сравнения результатов расчета с экспериментальными данными [29]. Важно отметить, что в КМСП параметры мезона $\mathcal{E}(700)$ фиксированы, а не выбраны специально для объяснения усиления переходов с $\Delta I=1/2$ в распадах $K \rightarrow 2\pi$. Действительно, поскольку мезон $\mathcal{E}(700)$ является в КМСП киральным партнером π -мезона, то его параметры — масса и константа $g_{\pi\pi}$ — взаимодействия могут быть вычислены [2, 21]: $g_{\pi\pi}(m_K) = (4m_\pi^2 \mathcal{E}^2 / F_\pi) [1 + (m_{\mathcal{E}}^2 - m_K^2) / 16\pi^2 F_\pi^2] = 4,6 \text{ ГэВ}$ и $\Gamma(\mathcal{E} \rightarrow 2\pi) = (3 g_{\pi\pi}^2(m_K) / 32\pi m_K) (1 - 4m_\pi^2 / m_K^2)^{1/2} = 1 \text{ ГэВ}$.

Важную роль при описании переходов с $\Delta I=1/2$ играет высоко-

энергетическое КХД-взаимодействие. Действительно, основной вклад в матричный элемент перехода $K^0 \rightarrow \pi$ дает оператор Q_6 , появление которого в эффективном лагранжиане (16) обусловлено диаграммой "пингвин" с обменом W -бозоном и глюоном [13] (см. рис. 8).

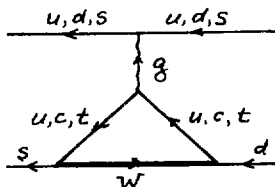


Рис. 3. Диаграмма "пингвин", приводящая к появлению в эффективном лагранжиане слабых взаимодействий (16) оператора Q_6 .

Перейдем к обсуждению фазы амплитуды $A^{1/2}(K^0 \rightarrow 2\pi)$. В стандартной параметризации фазы амплитуд распадов $K \rightarrow 2\pi$ параметризуют параметрами δ_0 и δ_2 . Фазу $\delta_{1/2}$ амплитуды $A^{1/2}(K^0 \rightarrow 2\pi)$ надо сравнивать с фазой δ_0 . Однако из экспериментальных данных по распадам $K \rightarrow 2\pi$ можно извлечь только разность: $(\delta_0 - \delta_2)_{\text{эксп.}} = 56.5 \pm 3.0^\circ$ [30]. Тем не менее, если принять во внимание, что фаза δ_2 мала по сравнению с δ_0 , то разность $(\delta_0 - \delta_2)$ можно сравнивать с $\delta_{1/2}$. Нетрудно видеть, что теоретическая величина $\delta_{1/2} = 61.4^\circ$ хорошо согласуется с экспериментальной.

Таким образом, возможность правильного описания широким резонансом с фиксированными параметрами как абсолютной величины, так и фазы амплитуды распада $K^0 \rightarrow 2\pi$ с $\Delta T = 1/2$ делает схему распада $K^0 \rightarrow \pi(700) \rightarrow 2\pi$ реалистичной.

Распады $K \rightarrow 3\pi$. Нелептонные распады $K \rightarrow 3\pi$ идут с небольшим энергосвободением (~ 0.025 ГэВ на одну частицу распада), поэтому метод мягких пионов (низкоэнергетический предел) является хорошим приближением для их описания. В низкоэнергетическом пределе амплитуды распадов $K \rightarrow 3\pi$ можно связать с амплитудами распада $K^0 \rightarrow 2\pi$ [31]. Например, в случае распада $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ имеем

$$A(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ (q_+)) \Big|_{q_+ = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} A(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-). \quad (35)$$

Соотношения для амплитуд других каналов распада $K \rightarrow 3\pi$ можно получить из (35) путем изотопических преобразований [31].

5. Разность масс K_L -и K_S -мезонов, параметры CP-нарушения

Слабые взаимодействия приводят к расщеплению масс K^0 - и $\bar{K}^0$ -мезонов, возникающему вследствие недиагональных переходов $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$. В результате наблюдаемыми являются мезоны K_L и K_S , волновые функции которых линейным образом выражены через волновые функции мезонов K^0 и $\bar{K}^0$:

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= [2(1+|\bar{E}|^2)]^{-1/2} [(1+\bar{E})|K^0\rangle + (1-\bar{E})|\bar{K}^0\rangle], \\ |K_S\rangle &= [2(1+|\bar{E}|^2)]^{-1/2} [(1+\bar{E})|K^0\rangle - (1-\bar{E})|\bar{K}^0\rangle]. \end{aligned} \quad (36)$$

Волновые функции K^0 - и $\bar{K}^0$ -мезонов связаны между собой преобразованием CP-четности: $CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$. Комплексный параметр $\bar{E}$ характеризует отклонение состояний K_L и K_S от собственных состояний оператора CP-четности.

Разность масс K_L - и K_S -мезонов, а также параметр $\bar{E}$ можно выразить через вещественную и мнимую части M_{12} , где M_{12} -матричный элемент перехода $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$:

$$\Delta m = m_L - m_S = 2 \operatorname{Re} M_{12}, \quad (37)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \frac{\operatorname{Im} M_{12}}{\Delta m}. \quad (38)$$

Матричный элемент M_{12} представляют в виде суммы двух слагаемых [32]:

$$M_{12} = M_{12}^{(SD)} + M_{12}^{(LD)}, \quad (39)$$

где $M_{12}^{(SD)}$ -обозначает вклад малых расстояний, а $M_{12}^{(LD)}$ -больших расстояний. Эффективный лагранжиан, описывающий вклад малых расстояний, имеет вид [17]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(SD)} = & - \frac{G_1^2 S_1^2 C_1^2 C_2^2}{16\pi^2} \{ [0,69 C_2^4 m_c^2 + 0,59 S_2^4 m_t^2 + 0,82 S_2^2 C_2^2 \cdot \\ & \cdot m_c^2 \ln(m_t^2/m_c^2)] + i \operatorname{Im} \eta [-1,38 C_2^2 m_c^2 + 1,18 S_2^2 m_t^2 + \\ & + 0,82 (C_2^2 - S_2^2) m_c^2 \ln(m_t^2/m_c^2)] \} Q_7, \end{aligned} \quad (40)$$

где Q_7 -четырехкварковый оператор

$$Q_7 = [\bar{s}_a \gamma_\mu (1-\gamma^5) d_a] [\bar{s}_b \gamma_\mu (1-\gamma^5) d_b], \quad (41)$$

меняющий странность на две единицы: $\Delta S = 2$. Эффективный лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(LD)}$, описывающий вклад больших расстояний, может быть получен во втором порядке по константе Ферми с помощью эффективного лагранжиана (16). В КМСП эффективный лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(LD)}$ можно описать кварковыми диаграммами на рис. 9. Аналитическое выражение для $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(LD)}$ получено в работе [33]. Оно достаточно громоздкое, поэтому мы не будем приводить его здесь.

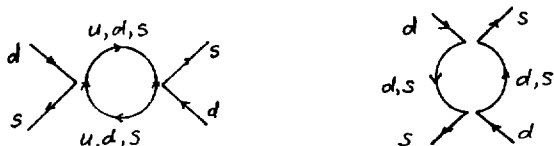


Рис.9. Кварковые диаграммы, описывающие $\mathcal{L}_{eff}^{(LD)}$ в КМСП.

Разность масс K_L - и K_S -мезонов. Из формул (37) и (39) следует, что разность масс K_L - и K_S -мезонов Δm определена формулой

$$\Delta m = \Delta m^{(SD)} + \Delta m^{(LD)}, \quad (42)$$

где $\Delta m^{(SD)} = 2 \operatorname{Re} M_{12}^{(SD)}$, а $\Delta m^{(LD)} = 2 \operatorname{Re} M_{12}^{(LD)}$. Вычислим сначала $\Delta m^{(SD)}$. Используя эффективный лагранжиан (40), получим [33]:

$$\Delta m^{(SD)} = (G_F^2 S_1^2 C_1^2 / 16\pi^2 m_K) [0,69 C_2^4 m_c^2 + 0,59 S_2^4 m_c^2 + 0,82 S_2^2 C_2^2 m_c^2 \ln(m_c^2/m_c^2)] \langle \bar{K}^0 | Q_7 | K^0 \rangle. \quad (43)$$

Матричный элемент $\langle \bar{K}^0 | Q_7 | K^0 \rangle$ имеет вид

$$\langle \bar{K}^0 | Q_7 | K^0 \rangle = B \frac{16}{3} F_K^2 m_K^2, \quad (44)$$

где параметр B характеризует отклонение $\langle \bar{K}^0 | Q_7 | K^0 \rangle$ от $\langle \bar{K}^0 | Q_7 | K^0 \rangle_0 = (16/3) F_K^2 m_K^2$. В [27] имеем $B=1$. Полагая $m_c = 1,4$ ГэВ и $m_K = 40$ ГэВ, перепишем $\Delta m^{(SD)}$ как функцию параметра S_2 :

$$\Delta m^{(SD)} = 1,64 \times 10^{-15} (1 + 6 S_2^2 + 697 S_2^4) \text{ ГэВ}. \quad (45)$$

Наименьшее значение $\Delta m^{(SD)}$ находим при $S_2 = 0$: $\Delta m_{min}^{(SD)} = 1,64 \times 10^{-15}$ ГэВ. При $S_2 \neq 0$ величина $\Delta m^{(SD)}$ возрастает.

Перейдем к вычислению $\Delta m^{(LD)}$. Используя аналитическое выражение для эффективного лагранжиана $\mathcal{L}_{eff}^{(LD)}$ [33], получим [33]:

$$\Delta m^{(LD)} = 3,43 \times 10^{-15} (1 - 4,9 \times 10^{-5} \omega - 3,8 \times 10^{-3} \omega') \text{ ГэВ}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \bar{K}^0 | \bar{s}_a \gamma^\mu \gamma^5 (1 \pm \gamma^5) d_a] [\bar{s}_b \gamma_\mu \gamma^5 (1 \pm \gamma^5) d_b] | K^0 \rangle &= \omega \frac{16}{3} F_K^2 m_K^2, \\ \langle \bar{K}^0 | [\bar{s}_a \gamma^\mu \gamma^5 (-\gamma^5) d_a] [\bar{s}_b \gamma_\mu \gamma^5 (1 \pm \gamma^5) d_b] | K^0 \rangle &= \omega' \frac{16}{3} F_K^2 m_K^2. \end{aligned} \quad (47)$$

В КМСП параметры ω и ω' определены формулами [33]:

$$\omega' = -5 \omega = 320 Z^2 m_u^2 F_\pi^2 / m^2 F^2 = 152. \quad (48)$$

Подставляя численные значения ω и ω' в (46), получим [33]:

$$\Delta m^{(LD)} = 1,45 \times 10^{-15} \text{ ГэВ.} \quad (49)$$

Суммируя вклады $\Delta m_{mix}^{(SD)}$ и $\Delta m^{(LD)}$, найдем нижнюю границу для разности масс K_L - и K_S - мезонов

$$\Delta m \geq 3,09 \times 10^{-15} \text{ ГэВ.} \quad (50)$$

Этот результат согласуется с экспериментальным: $(\Delta m)_{\text{эксп.}} = (3,521 \pm 0,014) \times 10^{-15} \text{ ГэВ [14]}$. Окончательная величина полной разности масс K_L - и K_S - мезонов зависит от угла θ_2 матрицы КМ. Например, полагая $s_2 = 0,11$ [33], находим разность масс $\Delta m = 3,38 \times 10^{-15} \text{ ГэВ}$, которая хорошо согласуется с экспериментальной.

Параметры CP-нарушения. Нарушение CP-четности в распадах $K \rightarrow 2\pi$ характеризуют двумя параметрами ε и ε' , которые определяют величину CP-нарушения в распадах $K \rightarrow (2\pi)_I$ с $I = 0$ и 2 соответственно. Параметры ε и ε' можно выразить через мнимые и вещественные части M_{12} и амплитуд A_0 и A_2

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \left(\xi + \frac{\text{Im} M_{12}}{2 \text{Re} M_{12}} \right) \approx \bar{\varepsilon}, \quad (51)$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/2 + \delta_2 - \delta_0)} \text{Re} \left(\frac{A_2}{A_0} \right) (-\xi),$$

где $\xi = \text{Im} A_0 / \text{Re} A_0$. В КМФ можно найти следующие выражения для указанных в формулах (51) величин:

$$\xi = \frac{\text{Im}(C_5 + 3C_6)}{\text{Re}(C_5 + 3C_6)} = \text{Im} \tau,$$

$$\text{Im} M_{12}^{(SD)} = -1,7 \times 10^{-15} \times (1 + 673 s_2^2) \times \text{Im} \tau,$$

$$\text{Im} M_{12}^{(LD)} = -2,1 \times 10^{-15} \times \text{Im} \tau, \quad (52)$$

$$\text{Im} M_{12} = \text{Im}(M_{12}^{(SD)} + M_{12}^{(LD)}) = -3,9 \times 10^{-15} \times (1 + 293 s_2^2) \times \text{Im} \tau,$$

$$2 \text{Re} M_{12} = 3,1 \times 10^{-15} \times (1 + 3 s_2^2 + 369 s_2^4),$$

$$\text{Re}(A_2/A_0) = 5,2 \times 10^{-2},$$

где $\text{Im} \tau = -(s_2 s_3 C_2 / C_1 C_3) \mp \delta$. С помощью (52) определим параметры ε и ε' на языке параметров КМ:

$$\varepsilon = - \frac{1 + 293 s_2^2}{1 + 3 s_2^2 + 369 s_2^4} \times e^{i\pi/4} \times \text{Im} \tau, \quad (53)$$

$$\varepsilon' = -3,7 \times 10^{-2} \times e^{i2\delta, 6^\circ} \times \text{Im} \tau.$$

Наконец, из формул (53) найдем величину $Re(\varepsilon'/\varepsilon)$:

$$Re\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) = 3,6 \times 10^{-2} \times \frac{1 + 3S_2^2 + 369S_2^4}{1 + 2935S_2^2} = 0,8 \times 10^{-2}. \quad (54)$$

Численное значение получено при $S_2 = 0,11[33]$. Сравним полученный результат с имеющимися экспериментальными данными:

$$\begin{aligned} Re(\varepsilon'/\varepsilon) &= (-0,46 \pm 0,53 \pm 0,24) \times 10^{-2}, [34a], \\ Re(\varepsilon'/\varepsilon) &= (+0,17 \pm 0,82) \times 10^{-2}, [348], \\ Re(\varepsilon'/\varepsilon) &= (+0,53 \pm 0,30 \pm 0,20) \times 10^{-2}, [348]. \end{aligned} \quad (55)$$

Нетрудно видеть, что теоретическая величина $Re(\varepsilon'/\varepsilon) = 0,8 \times 10^{-2}$ не противоречит экспериментальным данным [34б, в].

Таким образом, КМСИ дает согласованное описание правила $\Delta I = 1/2$ в распадах $K \rightarrow 2\pi$, разности масс K_L и K_S -мезонов и параметров CP-нарушения.

6. Обсуждение

Резюмируем кратко полученные результаты. Анализ низкоэнергетических взаимодействий каонов на основе кварковой модели сверхпроводящего типа (КМСП) показывает, что КМСП правильно описывает динамику сильных низкоэнергетических взаимодействий. Теоретические результаты, полученные для широкого класса низкоэнергетических характеристик каонов, находятся в разумном согласии с экспериментальными данными.

Литература

1. H.D.Politzer -Phys.Rev.Lett., 1973, 30, 1346;
D.Gross, F.Wilezek -Phys.Rev.Lett., 1973, 30, 1343; Phys.Rev. 1973, D8, 3633.
2. D.Ebert, M.K.Volkov -Zh.Phys., 1983, 16C, 205;
M.K.Volkov.-Ann.Phys., 1984, 157, 282; M.K.Волков ЭЧАЯ, 1986, 17, 433.
3. А.Н.Иванов, В.М.Шехтер -ЯФ, 1980, 31, 530; А.Н.Иванов -ЯФ, 1981, 33, 1679; А.Н.Иванов, Н.И.Троицкая -ЯФ, 1982, 36, 220.
4. Y.Nambu, G.Jona-Lasinio -Phys.Rev., 1961, 122, 345.
5. J. Bardeen, L.M.Cooper, I.R.Schiffer -Phys.Rev., 1957, 106, 162; Н.Н.Боголюбов, В.В.Толмачев, Д.В.Ширков. "Новый метод те-

- ории сверхпроводимости", М.Изд-во АН СССР, 1958, с. 128.
6. М.К.Волков, А.Н.Иванов -ТМФ, 1986, 69, 156.
7. A.Manoher, H.Georgi -Nucl.Phys., 1984, B234, 189.
8. H.Leutwyler -Phys.Lett., 1974, B48, 45; Nucl.Phys., 1974, B76, 413.
9. J.Bramon, F.J.Yndureain -Phys.Lett., 1979, B80, 239.
10. S.Gasiorowicz, D.A.Geffen -Rev.Mod.Phys., 1969, 41, 531.
11. D.Ebert, A.N.Ivanov, H.Reinhardt, M.K.Volkov -Phys.Lett., 1986, B182, 193.
12. E.Witten -Nucl.Phys. 1979, B160, 57.
13. М.К.Волков, А.А.Осипов. Сообщение ОИЯИ, P2-85-390, Дубна, 1985;
М.К.Волков, А.Н.Иванов. Сообщение ОИЯИ, P2-85-566, Дубна, 1985.
14. Particle Data Group. Phys.Lett., 1986, B170, 1.
15. М.К.Волков, В.Н.Первушин -ЯФ, 1975, 22, 366; Phys.Lett., 1975, B58, 74; М.К.Волков, А.Н.Иванов, М.Надь. Препринт ОИЯИ, P2-87-89, Дубна, 1987.
16. N.Paver, M.Scadron -Nuovo Cim., 1983, A78, 159.
17. F.J.Gilman, M.B.Wise -Phys.Rev., 1979, D20, 2392; ibid. 1983, D27, 1128; A.J.Buras, W.Slominsky -Nucl.Phys. 1985, B235, 231.
18. А. И.Вайнштейн и др. -ЖЭТФ, 1977, 72, 1275.
19. M.Mobayashi, M.Maskawa -Progr.Theor. Phys., 1973, 49, 652.
20. А.И.Вайнштейн и др. -ЯФ, 1985, 41, 1063.
21. М.К.Волков, А.Н.Иванов. Сообщение ОИЯИ, P2-85-818, Дубна, 1985.
22. A.N.Ivanov, N.I.Troitskaya, M.K.Volkov -Phys.Lett., 1986, B175, 467.
23. М.К.Волков, А.Н.Иванов, Н.И.Троицкая -ЯФ, 1987, 47, № 1.
24. А.Н.Иванов, В.М.Шехтер -ЯФ, 1980, 32, 796; А.Н.Иванов, Н.И.Троицкая -ЯФ, 1982, 36, 220.
25. М.К.Волков, А.Н.Иванов, Н.И.Троицкая. Препринт ОИЯИ, P2-86-401, Дубна, 1986.
26. L.M.Segal -Phys.Rev., 1969, 183, 1511.
27. М.К.Волков, А.Н.Иванов -ЯФ, 1986, 44, 1272.

28. M.K.Volkov, A.N.Ivanov, N.I.Troitskaya.JINR, E2-86-416,
Dubna, 1986.
29. A.N.Kamal, M.Scadron -Phys.Rev., 1985, D32, 1164.
30. A.N.Kamal. Preprint SLAC-PUB 3593, 1985.
31. В.Де Альфаро и др. Токи в физике адронов , М.: Мир , 1976,
с. 670.
32. L.Wolfenstein -Nucl.Phys., 1979, B160, 501.
33. A.N.Ivanov, N.I.Troitskaya, M.K.Volkov -Phys.Lett, 1986,
B184, 94.
- 34.а) R.H.Bernstein et al. -Phys.Rev.Lett., 1985, 54, 1631;
б) J.K.Black et al. - Phys.Rev.Lett., 1985, 54, 1628;
в) B.Winstein, invited talk at the Division of Particles and
Field Meeting Salt Lake City, Utah, January 14-17, 1987.

КОНФАЙНМЕНТ И КВАРКОВАЯ СТРУКТУРА АДРОНОВ

Г.В. Ефимов, М.А. Иванов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. ВВЕДЕНИЕ

Мир легких кварков и легких адронов схематически можно представить следующим образом. На малых расстояниях (до $0,2 - 0,3$ фм) имеются только свободные кварки и глюоны, а на больших расстояниях (свыше 1 фм) только адроны. Кварки и глюоны описываются квантовой хромодинамикой (КХД), причем из-за свойства асимптотической свободы кварки на малых расстояниях являются дираковскими, глюоны — векторными частицами, а их взаимодействие описывается теорией возмущений КХД. Адроны на больших расстояниях являются свободными частицами, которые подчиняются уравнениям стандартной квантовой теории поля.

В промежуточной области расстояний ($0,2-1$ фм) осуществляется так называемый конфайнмент кварков и глюонов и происходит их адронизация. Теоретически механизмы этих процессов являются наименее изученными (см., например, ^{1/}). С физической точки зрения, это область адронной физики низких энергий, т.к. физические процессы с энергосделением до $1-1,5$ ГэВ протекают на этих расстояниях. Методы, следующие из КХД и связывающие физику адронов с кварками и глюонами, как бы проскакивают эту область и ставят своей задачей связать амплитуды адронных процессов с параметрами кварков и глюонов. При этом проблема конфайнмента не решается и так или иначе обходится.

Так, метод правил сумм КХД ^{2/} ставит своей задачей связать представление матричных элементов адронных токов в форме дисперсионных правил сумм и в виде кварк-глюонных диаграмм. Влияние области конфайнмента учитывается минимальным образом — введением феноменологических параметров — кваркового и глюонного конденсатов.

Метод феноменологических лагранжианов (см., например, ^{3/}) ставит своей задачей, используя группу градиентных и киральных преобразований, получить лагранжианы мезонных взаимодействий, минуя проблемы динамической адронизации кварков и объяснение механизма конфайнмента.

Разработанная нами в ^{4/} виртон-кварковая модель (ВКМ), в рамках которой удалось описать большинство процессов физики легких адронов при низких энергиях, исходит из определенного представления о поведе-

нии кварков и адронов в области конфайнмента. Основное предположение состоит в том, что в интересующей нас области кварки ведут себя как некие квазичастицы, несущие квантовые числа кварков, и эти кварки-квазичастицы можно описывать виртонным полем, т.е. полем, кванты которого существуют только в виртуальном и не могут существовать в свободном состоянии. Математически это обеспечивается тем, что пропагатор виртонного поля является целой аналитической функцией определенного вида в комплексной плоскости импульсного переменного p^2 . Таким образом, в модели удовлетворено требование конфайнмента кварков. Далее предполагается, что связь адронов с кварками-виртонами можно задать соответствующими лагранжианами взаимодействия, а тот факт, что адроны состоят из кварков, учитывается квантово-полевым условием связности, которое определяет константу связи в лагранжиане взаимодействия. Знание динамики перехода адрона в кварки и кварков в адроны позволяет полностью описать все возможные процессы адронов низких энергий.

Однако в данной формулировке ВМ не имеет непосредственной связи с КХД. Мы формулируем модель, которую назовем моделью конфайнированных кварков (МКК), основанную на идеях КХД. В частности, будет видно, при каких предположениях из МКК можно получить ВМ.

Предлагаемая модель основана на следующей физической картине, которая, как предполагается, имеет место на интересующих нас расстояниях. Образуется нетривиальный, достаточно сложный вакуум глюонных полей КХД. Изучению этой проблемы посвящено большое количество работ (см., например, ^{/5/}), однако эта проблема до сих пор не решена. Этот вакуум представляет собой своего рода среду, в которой не могут существовать ни кварки, ни глюоны, ни любые другие цветные состояния как свободные частицы. Другими словами, вакуум глюонных полей КХД обеспечивает конфайнмент любых цветных объектов.

Адроны, как бесцветные состояния, появляются в форме коллективных переменных, соответствующих бесцветным токам кварков. Эта идея развивалась во многих работах (см., например, ^{/6/}).

Математическая реализация этой картины на языке матрицы рассеяния адронов требует определенных гипотез о механизме конфайнмента как усреднении кварковых петель по глюонному вакууму и о механизме адронизации кварков как переходе к коллективным переменным в лагранжиане КХД. Соответствующие предположения и составляют содержание предлагаемой модели конфайнированных кварков - МКК.

В частности, из предлагаемой картины конфайнмента и адронизации можно получить ВКМ как один из вариантов усреднения по глюонному вакууму.

2. ГИПОТЕЗА О КХД-ВАКУУМЕ И АДРОНИЗАЦИИ

В данном разделе изложим аргументы, на которых основан вывод нашей модели из КХД. Следует отметить, что многое в предлагаемых рассуждениях не является доказанным, однако основные предположения нам представляются вполне правдоподобными.

Будем исходить из лагранжиана КХД

$$\mathcal{L}_{\text{КХД}} = -\frac{1}{8} \text{tr} G_{\mu\nu}^2 + \sum_{f=1}^2 \bar{q}_f(x) (\hat{p} - m_f + g \hat{B}(x)) q_f(x). \quad (2.1)$$

Здесь $\hat{B} = B_\mu^a \gamma_\mu t^a$; $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + g [B_\mu, B_\nu]$, где B^a - глюонное поле и t^a - матрицы цветовой группы $SU_c(3)$, $q_f (f=1,2,3)$ - кварковые поля с массой m_f из группы ароматов $SU(3)$, g - константа связи.

Запишем функциональный интеграл КХД

$$Z = \int \delta g \delta \bar{g} \int \delta B \mathcal{D}(B) \exp \{ \int d^4x \mathcal{L}_{\text{КХД}}(x) \}, \quad (2.2)$$

где функционал $\mathcal{D}(B)$ учитывает выбор калибровки глюонного поля B .

Наше предположение состоит в том, что КХД - вакуум реализуется на квантовых глюонных полях с индефинитной метрикой. Обозначим эти поля через $B_{\text{vac}}(x)$. Далее предположим, что вакуум вырожден, т.е. существует множество вакуумных полей $B_{\text{vac}}(x)$, характеризующихся набором независимых параметров $\{c_{\text{vac}}\}$, являющихся, по сути дела, степенями свободы вакуума. Тогда глюонное поле можно представить в виде

$$B(x) = B_{\text{vac}}(x) + B_{\text{fl}}(x),$$

где $B_{\text{fl}}(x)$ - флуктуационные глюонные поля над КХД-вакуумом - представляют собой конфайнированные поля глюонов, находящихся в вакууме КХД. Эти поля зависят от B_{vac} и определяются набором своих независимых параметров $\{c_{\text{fl}}\}$. Функциональный дифференциал глюонного поля запишем в виде

$$\prod d B(x) = \prod d c_{\text{vac}} \prod d c_{\text{fl}} \mathcal{D}(B | c_{\text{vac}}, c_{\text{fl}}),$$

где $\mathcal{D}(B | c_{\text{vac}}, c_{\text{fl}})$ определяет детерминант перехода к переменным $\{c_{\text{vac}}\}$ и $\{c_{\text{fl}}\}$.

Подставим полученные формулы в (2.2) и проинтегрируем по переменным флуктуационного поля $\{C_{ff}\}$. Результат интегрирования запишется

$$Z = \int d\sigma_{vac} \left\{ \delta q \delta \bar{q} \exp \left\{ \sum_f \int dx \bar{q}_f (\hat{p} - m_f + g \hat{B}_{vac}) q_f + \sum_n L_n \right\} \right. \quad (2.3)$$

$$L_n = g^n \int dx_1 \dots \int dx_n \prod_{j=1}^n J_{\mu_j}^{a_j}(x_j) G_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n | B_{vac}).$$

Здесь

$$J_{\mu}^a(x) = \sum_f \bar{q}_f(x) \gamma_{\mu} t^a q_f(x)$$

цветной кварковый ток и

$$d\sigma_{vac} = \prod dC_{vac} F[B_{vac}] \quad (2.4)$$

индетерминантная мера интегрирования по вакуумному полю, явный вид которой может быть найден только в результате решения проблемы КХД-вакуума.

$$\text{Функции } G_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n | B_{vac}) = G_{\{\mu\}}^{\{a\}}(x | B_{vac})$$

являются полными связанными n -точечными функциями Грина глюонов, находящимися в вакуумном поле B_{vac} .

Предположим далее, что при описании области больших расстояний в функциональном интеграле (2.3) функции Грина флуктуационного глюонного поля $G_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n | B_{vac})$, переносящего сильное взаимодействие между кварковыми токами, можно заменить на

$$\begin{aligned} G_{\{\mu\}}^{\{a\}}(x | B_{vac}) &\rightarrow \int d\sigma_{vac} G_{\{\mu\}}^{\{a\}}(x | B_{vac}) = \\ &= G_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $G_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n)$ является n -точечной связанной функцией Грина глюонов в режиме сильной связи. Это приближение означает, что в функциональном интеграле (2.5) можно пренебречь связями через глюонный вакуум между кварковыми полями и различными глюонными функциями Грина.

Следующий шаг - адронизация. Адронизацию будем понимать как переход к коллективным переменным в представлении (2.5) с учетом (2.6). Идея состоит в том, чтобы в каждом L_n перейти от цветных кварковых токов J_{μ}^a к произведению бесцветных кварковых объектов. При этом слагаемое L_n должно дать набор бесцветных адронных состояний, образованных n кварками.

Продemonстрируем механизм адронизации на примере образования двухкварковых адронных состояний - мезонов. Для этого ограничимся в функциональном интеграле (2.3) только членом L_2 . Итак, рассмотрим слагаемое L_2 в (2.3), которое запишем в виде

$$L_2 = \int dx_1 dx_2 J_{\mu_1}^{a_1}(x_1) G_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(x_1 - x_2) J_{\mu_2}^{a_2}(x_2),$$

где кварковый ток $J_{\mu}^a(x)$ является октетом в цветовой группе $SU_c(3)$ и синглетом в группе ароматов.

Функцию Грина глюонного поля представим в виде

$$G_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(x_1 - x_2) = \delta_{a_1 a_2} g_{\mu_1 \mu_2} G(x_1 - x_2) = \delta_{a_1 a_2} g_{\mu_1 \mu_2} \left(\frac{d\rho}{2\pi} \right)^4 e^{-i\rho(x_1 - x_2)} \tilde{G}(\rho^2)$$

Имеются две точки зрения на поведение $\tilde{G}(\rho^2)$ при малых ρ^2 . По одной из них $\tilde{G}(\rho^2) \rightarrow 1/\rho^4$ при $\rho^2 \rightarrow 0$, чтобы обеспечить линейно растущий потенциал между кварками на больших расстояниях. Другая точка зрения ^{/b/} состоит в том, что $\tilde{G}(\rho^2)$ аналитична в точке $\rho^2 = 0$, а может быть, даже является целой функцией в ρ^2 -плоскости, чтобы обеспечить полный конфайнмент глюонов. Мы примем вторую точку зрения.

Заметим, что если положить $G(x_1 - x_2) = \delta(x_1 - x_2)$, то L_2 представляет собой локальный четырехкварковый лагранжиан взаимодействия вида ток-на-ток. Имеется целое направление исследований ^{/9/} и дальнейшие ссылки там), берущее свое начало от работы ^{/10/}, в которой авторы, исходя из вышеприведенного четырехкваркового лагранжиана, получают низкоэнергетические лагранжианы для псевдоскалярных, скалярных и векторных мезонов. Мы будем действовать в русле этих идей.

Преобразуем L_2 . Методом фирцевания L_2 можно записать в форме

$$L_2 = H_2 + \mathcal{D}_2,$$

$$H_2 = \sum_J \sum_{f=0}^8 a_{Jf} \int dx_1 dx_2 J_{Jf}(x_1, x_2) G(x_1 - x_2) J_{Jf}(x_2, x_1), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{D}_2 = \sum_J \sum_{f=0}^8 \theta_{Jf} \int dx_1 dx_2 \bar{B}_{Jf}^{ab}(x_1, x_2) G(x_1 - x_2) B_{Jf}^{ab}(x_2, x_1), \quad (J=S, P, V, A).$$

Слагаемое H_2 состоит из суммы произведений бесцветных токов

$$J_{Jf} = \bar{q}(x_1) \lambda_f q(x_2),$$

где λ - матрица группы ароматов $SU(3)$.

Слагаемое $\mathcal{D}_2$ содержит произведения дикварковых цветных состояний

$$B_{Jf}^{ab} = q(x_1) C O_J \lambda_f q(x_2).$$

Следует сразу же отметить, что в представлении (2.6) выбор коэффициентов a_{Jf} и b_{Jf} неоднозначен. Как увидим ниже, знак этих коэффициентов должен обеспечить интерпретацию токов J_{Jf} как адюнтных связанных состояний, а величина a_{Jf} определяет массу этих адюнтных состояний. Эти проблемы заслуживают отдельного обсуждения. Мы же в данной работе ограничимся рассмотрением только H_2 .

В H_2 перейдем к переменным $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\xi = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, получим

$$H_2 = \sum_{\Gamma = \{Jf\}} a_{\Gamma} \int dx \int d\xi J_{\Gamma}(x, \xi) G(\xi) J_{\Gamma}(x, -\xi)$$

$$J_{\Gamma}(x, \xi) = \bar{q}(x + \xi) \Gamma q(x - \xi), \quad (\Gamma = O_J \lambda_f).$$

Согласно нашему предположению, глюонный пропагатор $\tilde{G}(p^2)$ аналитичен в точке $p^2 = 0$. Представим функцию $G(\xi)$ в виде

$$G(\xi) = \left(\frac{d\rho}{2\pi} \right)^4 e^{-i\rho\xi} \tilde{G}(\rho^2) = \left(\frac{d\rho}{2\pi} \right)^4 e^{-i\rho\xi} \sum_{k=0}^{\infty} G_k(\rho^2)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} G_k \square_{\xi}^k \delta(\xi).$$

Подставим это представление в H_2 и, пользуясь интегрированием по частям, запишем

$$H_2 = \sum_{\Gamma} a_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} G_k \sum_{2n+l=k} \tau_{nl} J_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(\Gamma, n, l)}(x) J_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(\Gamma, n, l)}(x), \quad (2.7)$$

где τ_{nl} — численные известные коэффициенты и

$$J_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(\Gamma, n, l)}(x) = \square_{\xi}^n T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\ell} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \bar{q}(x + \xi) \Gamma q(x - \xi) \Big|_{\xi=0} =$$

$$= \bar{q}(x) \Gamma T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\ell} \left(\overset{\leftrightarrow}{\partial}_x \right) \left(\overset{\leftrightarrow}{\partial}_x \cdot \overset{\leftrightarrow}{\partial}_x \right)^n q(x). \quad (2.8)$$

Здесь $T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\ell}(a)$ — полностью симметричный с нулевым следом тензор, составленный из вектора a :

$$T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\ell}(a) = a_{\mu_1} a_{\mu_2} \dots a_{\mu_l} - \delta_{\mu_1 \mu_2} a_{\mu_3} \dots a_{\mu_l} - \dots,$$

$$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}^{\ell}(a) = 0.$$

Этот тензор описывает орбитальный момент ℓ .

Ток $J_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\Gamma, n, \ell)}(x)$ представляет собой состояние двух кварков, квантовые числа которого определяются индексами $\Gamma = \{J, \ell\}$ и ℓ и не зависят от n . Это означает, что n связано с радиальным возбуждением двухкваркового состояния, описываемого током $J_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\Gamma, n, \ell)}(x)$. Должна существовать некоторая ортогональная система полиномов, характеризующих эти возбуждения. Вполне допустимо, что эта система полиномов зависит от квантовых чисел двухкваркового состояния, т.е. от Γ и ℓ . Мы не будем в данной работе углубляться во все детали этого представления.

Следует подчеркнуть, что представление (2.7) содержит все двухкварковые адронные состояния.

Воспользуемся представлением

$$e^{H_2} = \int \prod_{Q=\{\Gamma, n, \ell\}} \delta M_Q \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx M_Q^2(x) + \sum_Q \frac{g_Q}{\sqrt{2}} \int dx M_Q(x) J_Q(x) \right\}.$$

Полевые переменные $M_Q(x) = M_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\Gamma, n, \ell)}(x)$ соответствуют мезонным полям с произвольными возбуждениями. Подставим это представление в (2.3), причем ограничимся только слагаемым H_2 , проинтегрируем по кварковым полям

$$Z = \int \prod_Q \delta M_Q \int d\sigma_{vac} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx M_Q^2(x) + F[M, B_{vac}] \right\},$$

$$F[M, B_{vac}] = \sum_N \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots \int dx_N \text{tr} \{ M(x_1) S(x_1, x_2 | B_{vac}) \dots S(x_N, x_1 | B_{vac}) \} \quad (2.9)$$

где

$$S(x_1, x_2 | B_{vac}) = (m_f + g \hat{B}_{vac}(x) - \hat{p})^{-1} \delta(x_1 - x_2).$$

Наше следующее предположение состоит в том, что (2.9) можно переписать в виде

$$Z = \int \prod_Q \delta M_Q \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx M_Q^2(x) + \int d\sigma_{vac} F[M, B_{vac}] \right\}. \quad (2.10)$$

Это предположение означает, что кварковые петли при низких энергиях могут быть связаны только адронами, а связями между кварковыми петлями через глюонный вакуум можно пренебречь.

Действие меры $d\sigma_{vac}$ в (2.10), т.е. усреднение по глюонному вакууму КХД, должно обеспечить конфайнмент кварков. Предположение о свойствах этой меры будут изложены в разделе 4.

Выделим теперь из выражения $\{d\sigma_{VAC} F[M, B_{VAC}]\}$ в (2.10) слагаемые, диагональные по мезонным переменным M_Q :

$$\frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \sum_Q g_Q^2 M_Q(x_1) \Pi_Q(x_1 - x_2) M_Q(x_2) ,$$

$$\Pi_Q(x_1 - x_2) = \{d\sigma_{VAC} \text{tr} \{ \Gamma_Q S(x_1, x_2 | B_{VAC}) \Gamma_Q S(x_2, x_1 | B_{VAC}) \} \}.$$

Объединяя это слагаемое с квадратичным членом в (2.10), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \sum_Q M_Q(x_1) [\delta(x_1 - x_2) - g_Q^2 \Pi_Q(x_1 - x_2)] M_Q(x_2) = \\ = \frac{1}{2} \sum_Q \int d\rho \tilde{M}_Q(\rho) [1 - g_Q^2 \tilde{\Pi}_Q(\rho^2)] \tilde{M}_Q(\rho). \end{aligned}$$

Уравнение

$$1 - g_Q^2 \tilde{\Pi}_Q(m_Q^2) = 0 \quad (2.11)$$

определяет массу мезона M_Q .

Перейдем в (2.10) к нормировке

$$M_Q(x) \rightarrow M_Q(x) [g_Q^2 \tilde{\Pi}_Q'(m_Q^2)]^{-1/2}$$

Вводя источники мезонных полей $J_Q(x)$, с учетом (2.11) получаем

$$\begin{aligned} Z[J] = \int \prod_Q dM_Q \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dx \sum_Q M_Q(x) (\square - m_Q^2) M_Q(x) + \right. \\ \left. + \sum_N' \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N \{ d\sigma_{VAC} \text{tr} \{ M(x_1) S(x_1, x_2 | B_{VAC}) \dots M(x_N) \} \right. \\ \left. + \sum_Q \int dx M_Q(x) J_Q(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $M(x) = \sum_Q \frac{G_Q}{\sqrt{2}} M_Q(x) \Gamma_Q$.

Штрих у суммы в (2.12) означает, что в квадратичных диагональных по M_Q членах следует ставить $\tilde{\Pi}_Q^{wg} = \tilde{\Pi}_Q(\rho^2) - \tilde{\Pi}_Q(m_Q^2) - \tilde{\Pi}_Q'(m_Q^2)(\rho^2 - m_Q^2)$.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, заметим, что уравнение на массу (2.11), а также преобразование от (2.10) к (2.12) требуют определенного соотношения знаков коэффициентов a_r , G_n , γ_{nl} в (2.7) и $\tilde{\Pi}(m_Q^2)$, $\tilde{\Pi}'(m_Q^2)$, чтобы обеспечить правильную нормировку физических величин. Это обстоятельство налагает определенное требование на разложение (2.6).

Во-вторых, представление (2.12) не содержит в явном виде величин a_r , G_n , z_n , определяющих разложение глюонного пропагатора вблизи $p^2 = 0$. Константа связи G_Q определяется только массой адрона и механизмом конфайнмента в кварковой петле.

В третьих, уравнение (2.11) дает связь между спектром масс мезонов, коэффициентами разложения конфайнированной глюонной функции Грина в окрестности точки $p^2 = 0$ и универсальными функциями конфайнмента, возникающими при усреднении кваркового массового оператора по глюонным полям.

Производящий функционал $Z[J]$ в (2.12), определяющий взаимодействия мезонов друг с другом через кварковые петли, лежит в основе нашей модели. Однако удобнее при практической работе пользоваться другим представлением, полностью эквивалентным (2.12):

$$Z[J] = \int \prod_q \delta M_q \int d\sigma_{vac} \int \delta q \delta \bar{q} \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_q \int dx M_q (\square - m_q^2 - \delta m_q^2) M_q + \right. \\ \left. + \sum_f \int dx \bar{q}_f (\hat{p} - m_f - g \cdot \hat{B}_{vac}(x)) q_f + \right. \\ \left. + \sum_{qf} \int \frac{g}{\sqrt{2}} \int dx M_q(x) \bar{q}_f(x) \Gamma_q q_f(x) + \sum_q \int dx M_q(x) J_q(x) \right\} \quad (2.13)$$

при условии, что константа перенормировки волновой функции мезона M_q равна нулю:

$$Z_{M_q} = 1 - g_q^2 \cdot \tilde{\Pi}'_q(m_q^2) = 0. \quad (2.14)$$

Это равенство называется условием связности в квантовой теории поля^{/11/}.

Итогом этого раздела является представление матрицы рассеяния мезонов, как связанных кварковых состояний, в форме (2.13) с условием связности (2.14). Это представление полностью эквивалентно (2.12) и лежит в основе нашей модели.

3. МОДЕЛЬ КОНФАЙНИРОВАННЫХ КВАРКОВ

В этом разделе будет сформулирована модель конфайнированных кварков (МКК), в рамках которой мы будем описывать физику адронов низких энергий. Модель основана на следующих предположениях.

I. Спектр адронов с массами m_h и квантовыми числами $1^{G J PC}$ выбирается согласно экспериментальным данным. Постулируется кварковый состав адрона. Лагранжиан взаимодействия адронов с кварками строится

на основании принципа: в нерелятивистском пределе кварки, образующие адрон, должны находиться в состоянии с наименьшим орбитальным моментом.

2. Взаимодействие между адронами описывается производным функционалом вида (2.13), где константы связи адронов с кварками определяются из условия связности (2.14).

3. Действие меры $d\sigma_{vac}$, осуществляющей усреднение по КХД-вакууму, обеспечивает конфайнмент кварков и сходимость всех кварковых петель.

В этом разделе рассмотрим подробнее первые два ansatz'a модели, а в разделе 4 определим механизм действия меры $d\sigma_{vac}$ на кварковые петли и зададим ее явный вид.

Пусть имеется набор адронных полей H с массами m_h и квантовыми числами J_h^{PC} . Последовательно рассмотрим мезоны и барионы.

Мезоны (двухкварковые состояния)

Бесцветные двухкварковые токи с мезонными квантовыми числами $Q = 1^6 J^{PC}$ имеют вид

$$J_Q(x) = \bar{q}(x) \Gamma_Q q(x), \quad (3.1)$$

где матрица Γ_Q обеспечивает нужные квантовые числа.

Связь мезонного поля M_Q , имеющего массу m_Q , с кварковыми токами выражается в форме

$$\mathcal{L}_Q = \frac{g_Q}{\sqrt{2}} M_Q(x) J_Q(x). \quad (3.2)$$

Барионы (трехкварковые состояния)

Трехкварковые токи, имеющие барионные квантовые числа $B = 1^6 J^P$, могут быть представлены в виде

$$J_B(x) = R_B q^a(x) q^b(x) q^c(x) \varepsilon^{abc}, \quad (3.3)$$

где R_B — произведение матриц γ и матриц аромата λ^f , действующих на кварковые поля и определяющих квантовые числа бариона.

Связь барионного поля B , имеющего массу m_B , с кварковыми полями записывается

$$\mathcal{L}_B(x) = g_B \bar{B}_B \sum_j \gamma_j R_B^j q^a q^b q^c \varepsilon^{abc} + \text{з.с.}, \quad (3.4)$$

где g_B — константа связи, а сумма берется по всем возможным трехкварковым токам (3.3) с квантовыми числами B .

Взаимодействие между адронами описывается производящим функционалом, полностью аналогичным (2.13):

$$\begin{aligned} Z[J_M, J_B] = & \int \prod_Q \delta M_Q \int \prod_B \delta B_B \delta \bar{B}_B \int d\sigma_{vac} \int \delta q \delta \bar{q} \cdot \\ & \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(d\chi \sum_Q M_Q (\Pi - m_Q^2) M_Q + d\chi \sum_B \bar{B}_B (\hat{p} - M_B) B_B + \right. \right. \\ & \left. \left. + d\chi \sum_f \bar{q}_f (\hat{p} - m_f - g \hat{B}_{vac}) q_f + d\chi \left(\sum_Q \mathcal{L}_Q + \sum_B \mathcal{L}_B \right) + \delta L \right\}^{(3.5)} \\ \delta L = & \left[d\chi, d\chi_2 \left[\frac{1}{2} \sum_Q M_Q g_Q^2 \Pi_Q^{reg} M_Q + \sum_B \bar{B}_B g_B^2 \sum_B^{reg} B_B \right] \right]. \end{aligned}$$

Лагранжианы $\mathcal{L}_Q$ и $\mathcal{L}_B$ определяются формулами (3.2) и (3.4). Константы связи в лагранжиане взаимодействия определяются из условия связности (2.14).

Из (3.5) можно получить представление для S -матрицы:

$$S = \int d\sigma_{vac} T \exp \left\{ i \left(d\chi \left(\sum_Q \mathcal{L}_Q + \sum_B \mathcal{L}_B \right) + i \delta L \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Здесь хронологическое упорядочение понимается как обычное **виновое** T -произведение для адронных и кварковых полей, причем пропагатор кваркового поля имеет вид

$$\overline{q_f(x)} q_f(x') = \delta_{ff'} (m_f + g \hat{B}_{vac} - \hat{p})^{-1} \delta(x - x'), \quad (3.7)$$

и после перехода в (3.6) к нормальному упорядочению следует положить кварковые поля равными нулю. Мера $d\sigma_{vac}$ действует точно так же, как в (2.10).

Этим представлением для матрицы рассеяния (3.6) мы будем пользоваться в дальнейшем.

4. ГИПОТЕЗА КОНФАЙНМЕНТА КВАРКОВ

Гипотеза конфайнмента касается определения действия на кварковые поля глюонного вакуумного поля $\hat{B}_{vac}$, которое определяет и механизм кваркового конфайнмента и динамику адронных взаимодействий при низких энергиях, но о котором мы в настоящее время меньше всего знаем с точки зрения точных результатов теории. Наша гипотеза конфайнмента состоит в том, что кварки в области конфайнмента не имеют определенного значения массы, превращаются в некие квазичастицы, несущие квантовые числа кварка, но не существующие как обычные частицы.

Наш ansatz заключается в том, что в функциональном интеграле (2.10) интегрирование кварковых петель по $d\sigma_{VAC}$ можно заменить однократным интегралом

$$\int d\sigma_{VAC} \text{tr} \{ M(x_1) S(x_1, x_2 | B_{VAC}) : \dots : M(x_n) S(x_n, x_1 | B_{VAC}) \} \rightarrow \\ \rightarrow \int d\sigma_\lambda \text{tr} \{ M(x_1) S_\lambda(x_1, x_2) : \dots : M(x_n) S_\lambda(x_n, x_1) \}, \quad (4.1)$$

где

$$S_\lambda(x_1, x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p (x_1 - x_2)} \frac{1}{m_f + \lambda \Lambda_f - \hat{p}}. \quad (4.2)$$

Параметр Λ_f , имеющий размерность массы, зависит от аромата кварка и характеризует размер области конфайнмента кварков с ароматом f .

Таким образом, ansatz конфайнмента (4.1) сводится к тому, что от функционального интеграла по вакуумным глюонным полям в (2.10) или (3.5) мы переходим к однопараметрическому интегралу (4.1), эффективно учитывающему действие глюонного вакуума на кварковые поля.

При дальнейшем определении меры $d\sigma_\lambda$ мы хотим решить две задачи. Во-первых, обеспечить конфайнмент кварков, т.е. гарантировать отсутствие особенностей в матричных элементах $\hat{S}$ -матрицы, связанных с рождением кварковых пар. Во-вторых, добиться ультрафиолетовой сходимости всех интегралов, определяющих любые матричные элементы $\hat{S}$ -матрицы. Это позволит нам ограничить число независимых параметров, входящих в модель.

Определение действия меры $d\sigma_\lambda$ состоит из двух пунктов: определение алгебраического характера действия меры в пространстве цвета и определение ее аналитической структуры.

А л г е б р а и ч е с к а я с т р у к т у р а м е р ы

После взятия интеграла в (3.5) или (3.6) по кварковым переменным производящий функционал или $\hat{S}$ -матрица представляют собой совокупность замкнутых бесцветных кварковых циклов для мезонов и более сложных структур в случае барионов, к которым присоединены адронные поля мезонов и барионов. Первое наше предположение состоит в том, что все эти бесцветные циклы усредняются по мере независимо, как об этом говорилось при получении формулы (2.10) из (2.9),

$$\int d\sigma_\lambda = \prod_{a=1}^3 \int d\sigma_\lambda^a, \quad \int d\sigma_\lambda^a = 1.$$

Действие меры $d\sigma_\lambda$ в кварковых петлях, возникающих только в мезон-мезонных взаимодействиях, определяется формулой (4.1). Амплитуды с

участием бариона и мезонов определим как

$$\left\{ d\sigma_{VAC} \varepsilon^{ab'c} I^{aa'} S^{(k_1)}(x_1, x_2 | B_{VAC}) \right\} \varepsilon^{bb'c'} S^{(k_2)}(x_1, x_2 | B_{VAC}) \cdot \\ \cdot I^{cc'} S^{(k_3)}(x_1, x_2 | B_{VAC}) \varepsilon^{a'b'c'} \Rightarrow 6 \prod_{j=1}^3 S^{(k_j)}(x_i, x_2), \quad (4.3)$$

где

$$S^{(k)}(x_1, x_2) = \int dy_1 \dots \int dy_k \left\{ d\sigma_\lambda S_\lambda(x_1, y_1) M(y_1) \dots M(y_k) S_\lambda(y_k, x_2) \right\}. \quad (4.4)$$

В диаграммах для более сложных процессов с участием барионов и многокварковых состояний будем следовать правилу: каждой линии с заданным цветом сопоставляется функция (4.4).

Аналитическая структура меры

Ansatz конфайнмента состоит в определении аналитической структуры меры $d\sigma_\lambda$, т.е. в определении интеграла

$$\left(\frac{d\sigma_\lambda}{\lambda \Lambda_f^{+m_f-\hat{p}}} = \frac{1}{\Lambda_f} G\left(\frac{m_f-\hat{p}}{\Lambda_f}\right) = \frac{1}{\Lambda_f} \left[a\left(-\frac{p^2}{\Lambda_f^2}, \frac{m_f}{\Lambda_f}\right) + \frac{\hat{p}}{\Lambda_f} b\left(-\frac{p^2}{\Lambda_f^2}, \frac{m_f}{\Lambda_f}\right) \right] \right)$$

или

$$\int \frac{d\sigma_\lambda}{\lambda + z} = G(z).$$

Функцию $G(z)$ будем называть функцией конфайнмента. Предполагается, что $G(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $G(z)$ универсальна, т.е. не зависит от цвета и аромата (по крайней мере для группы ароматов $SU(3)$). Другими словами, функция $G(z)$ одинакова для всех кварковых структур, определяющих взаимодействие мезонов, барионов и других многокварковых адронов.

2. $G(z)$ является целой аналитической в плоскости комплексной переменной z . Это условие обеспечивает конфайнмент кварков и унитарность S -матрицы в адронном секторе пространства состояний.

3. $G(z)$ убывает быстрее любой степени z^2 в евклидовой области, т.е.

$$\lim_{z^2 \rightarrow -\infty} (-z^2)^N |G(z)| = 0, \quad \forall N > 0.$$

Это условие обеспечивает сходимость любых кварковых диаграмм.

4. Явный вид функции $G(z)$ пока не может быть найден из каких-либо общих соображений. Поэтому выбор функции конфайнмента также входит в ansatz модели. Однако, как показали расчеты, для удовлетво-

рительного описания низкоэнергетических процессов с участием мезонов и барионов важны главным образом интегральные характеристики функции $G(z)$.

В цикле расчетов, проведенных в $^{13/}$, использовалась функция

$$G(z) = \exp \{ (z-1)^2 \}.$$

Эта форма функции конфайнмента взята из виртон-кварковой модели $^{14/}$.

5. При вычислении матричных элементов матрицы рассеяния все расчеты необходимо проводить в евклидовой метрике и затем переходить в физическую область импульсных переменных, аналитически продолжая матричные элементы $\hat{S}$ -матрицы по инвариантным импульсным переменным.

Построенная по всем вышесказанным правилам $\hat{S}$ -матрица (3.6), где мера $d\sigma_\lambda$ удовлетворяет перечисленным условиям, относится к классу теорий с нелокальным взаимодействием, исследованным в $^{12/}$.

$\hat{S}$ -матрица унитарна и макропричинна в адронном секторе в каждом порядке разложения по степеням лагранжиана взаимодействия.

Сформулированную теорию будем называть моделью конфайнированных кварков (МКК), и в ее рамках будем описывать низкоэнергетическую физику мезонов и барионов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Индурайн Ф. Квантовая хромодинамика М.: Мир, 1986.
2. Shifman M., Vainshtein A., Zakharov V. - Nucl.Phys., B147, p.385, 1979.
3. Andrianov A.A., Novozhilov Yu.V. - Phys.Lett., B153, p.422, 1985.
4. Ефимов Г.В., Иванов М.А. - ЭЧАЯ, т.12, с.1220, 1981.
5. Первушин В.Н. - ЭЧАЯ, т.15, с.1073, 1984.
Андреев И.В. - УФН, т.150, с.299, 1986.
Симоннов Ю.А. со.: Физика элементарных частиц (материалы XXII зимней школы ЛЯФ), ЛЯФ АН СССР, Ленинград, 1987.
6. Eguchi T. - Phys.Rev., D14, p.2755, 1976.
7. Mandelstam S. - Phys.Rev., D20, p.3223, 1979.
Алексеев А.Н., Арбузов Б.А., Байков В.А. - ТМФ, т.52, с.187, 1982.
8. Stingl M. - Phys.Rev., D34, p.3863, 1986.
9. Волков М.К. - ЭЧАЯ, т.17, с.433, 1986.
10. Nambu Y., Yona - Lesinio G. - Phys.Rev., v.122, p.345, 1961.
11. Hayashi K. et al. - Fortschr. Phys., Bd 15, p. 625, 1967.
12. Ефимов Г.В. Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий, М.: Наука, 1985.

DYNAMICAL ORIGIN OF CABIBBO ANGLE AND KAON $\Delta I = \frac{1}{2}$ RULE

M. D. Scadron*
Physics Department
University of Arizona
Tucson, AZ 85721 USA

Two long-standing dynamical problems in particle physics are: (i) explaining the origin of the flavor misalignment of strong and weak interactions as measured by the Cabibbo angle $\theta_c \approx 13.1^\circ$; (ii) given θ_c , then understanding the quark model mechanism driving the dominant $\Delta I = \frac{1}{2}$ $K_{2\pi}^0$ weak decays. In our opinion, deciphering problem (i) presents the necessary tools to solve problem (ii).

1. Strong flavor vs. weak flavor

We begin by recalling that the (strong flavor) strangeness quantum number is defined through the strong interaction $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$, which conserves strangeness. The subsequent weak decays of K^0 and Λ violate (strong flavor) strangeness. At the quark level, the various strong flavor quantum numbers (u, d, s, c, etc.) explicitly appear in the "semistrong" hamiltonian density

$$H_{ss} = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s + m_c \bar{c}c + \dots \quad (1)$$

where $m_{u,d,s,c}$ are current quark masses. Of course, there is no direct "semistrong interaction," but (1) represents the influence of the strong flavor breaking weak interactions upon (semi) strong interactions (as in $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$) in the "world hamiltonian density"

$$H = H_0 + H_{ss} + H_w \quad (2)$$

In the "chiral limit" $H_w \rightarrow 0$, the "current" quark masses in (1) vanish, $m_{u,d,s} \rightarrow 0$.

Just as H_{ss} in (1) is manifestly diagonal in strong flavor, the weak quark current (which drives the weak decays of K^0 and Λ) is defined "diagonal" in weak quark flavor (u_0, d_0, s_0, c_0):

$$J_\mu^\pm = \bar{u}_0 \gamma_\mu^\pm d_0 + \bar{c}_0 \gamma_\mu^\pm s_0 \quad (3)$$

Here the word "diagonal" refers to charge-changing ($W^\pm$) processes which conserve the magnitude of isospin ($I_{u_0} = I_{d_0} = \frac{1}{2}$, $I_{c_0} = I_{s_0} = 0$). The caveat with (3) is our unfamiliarity with weak flavor.

*Supported in part by the United States Department of Energy.

Instead we are more comfortable with the "isospin-off-diagonal" or $\Delta S = 0, 1$ and $\Delta C = 0, 1$ off diagonal Cabibbo-GIM form^{11/} of the same weak quark current expressed in terms of strong flavor:

$$j_\mu^W = \bar{u} \gamma_\mu^L (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c) + \bar{c} \gamma_\mu^L (s \cos \theta_c - d \sin \theta_c) \quad (4)$$

2. Diagonalization of $Q = -\frac{1}{3}$ quark mass matrix

The off-diagonal $Q = -\frac{1}{3}$ quark mass matrix is diagonalized as

$$\begin{pmatrix} m_{d_0} & \lambda_{sd} \\ \lambda_{sd} & m_{s_0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \quad (5)$$

Such a quark flavor realignment is embodied in the mixing angle ϕ_{sd} defined by

$$d = d_0 \cos \phi_{sd} - s_0 \sin \phi_{sd} \quad (6a)$$

$$s = d_0 \sin \phi_{sd} + s_0 \cos \phi_{sd} \quad (6b)$$

$$\tan 2\phi_{sd} = 2\lambda_{sd}/(m_{s_0} - m_{d_0}) \quad (6c)$$

While the diagonalized d-s current quark mass matrix on the RHS of (5) is manifested by the diagonalized H_m of (1), the diagonal weak flavor masses (m_{d_0}, m_{s_0}) and off-diagonal λ_{sd} on the LHS of (5) must be computed from the dynamics of the weak hamiltonian H_w . However the ratio of $\lambda_{sd}/(m_{s_0} - m_{d_0})$ (as needed in (6c)) can be determined from the chiral symmetry properties of the light, relativistic weak flavor quarks u_0, d_0, s_0 without detailed knowledge of H_w .

More specifically, in analogy with the usual PCAC chiral properties satisfied by the strong interaction quark current, we study the partially conserved vector current (PCVC) properties of the weak quark current expressed in terms of weak flavor fields (3). The Heisenberg equation of motion (ie., the Dirac equation for free fields) gives the vector current divergence

$$i\partial \cdot j_V^W = (m_{d_0} - m_{u_0}) \bar{u}_0 d_0 - (m_{c_0} - m_{s_0}) \bar{c}_0 s_0 \quad (7a)$$

$$= 0 - (m_{c_0} - m_{s_0}) \bar{c}_0 s_0 \quad (7b)$$

It is certainly reasonable to assume $m_{d_0} = m_{u_0}$ (why not?). But in any case, the $\bar{u}_0 d_0$ isovector component of $\partial \cdot j_V^W$ is much smaller than the $\bar{c}_0 s_0$ isoscalar component, since we expect $m_{u_0} \approx m_{d_0} < m_{c_0} < m_{s_0}$. This bears a striking resemblance to the standard^{2/} isovector CVC hypothesis.

In particular, just as the CVC electromagnetic current component V_μ^3 is rotated to the V_μ^{1+2} CVC weak current, so from the PCVC statement (7b) we can also expect the (lighter) weak flavor $Q = -\frac{1}{3}$ quark vector current $\bar{s}_0 \gamma_\mu d_0$ to be partially conserved. In the standard $SU(2) \times U(1)$

model^{13/} (which is the approximate analog of the linear σ model but for weak interactions), the spontaneous chiral symmetry breaking scalar Higgs VEV $\langle\phi_H\rangle \neq 0$ together with the Higgs-quark diagonal coupling $g_{Hq\bar{q}}$ generates the current masses according to

$$\langle\phi_H\rangle g_{Hd_0 d_0} = m_{d_0} \quad , \quad \langle\phi_H\rangle g_{Hs_0 s_0} = m_{s_0} \quad . \quad (8)$$

Then the PCVC statement (7) extends the weak chiral symmetry relations (8) to the off-diagonal form^{4/}

$$\lambda_{sd} \equiv \langle\phi_H\rangle g_{Hs_0 d_0} = \frac{1}{2} (m_{s_0} - m_{d_0}) \quad . \quad (9)$$

The minus sign on the RHS of (9) is needed because no diagonalization of (5) is required if the current masses become equal: as $m_{s_0} \rightarrow m_{d_0}$ then $\lambda_{sd} \rightarrow 0$. The factor of $\frac{1}{2}$ on the RHS of (9) is similar to the semistrong Goldberger-Treiman-type of (chiral symmetry) relation involving a scalar kappa meson and strong flavor constituent quark masses^{5/}

$$\lambda_{sd} = -f_\kappa g_{\kappa sd} = \frac{1}{2} (m_s - m_d)_{\text{con}} \quad . \quad (10)$$

For pseudoscalar pions and kaons, the analogs of (10) (but with a plus sign on the RHS of (10)) give the measured decay constants $f_\pi \approx 93$ MeV, $f_K \approx 116$ MeV, $f_K/f_\pi \approx 1.25$.

Note that (9) and also (10) have interpretations as quark "tadpole" amplitudes; in the weak tadpole relation (9), the scalar Higgs (propagator) mass divides out, while in the semistrong tadpole relation (10) the scalar kappa mass cancels out. Furthermore the weak scales $\langle\phi_H\rangle \approx 250$ GeV and $g_{Hsd} \sim 10^{-3}$ cancel out on the LHS of (9), leaving the semistrong scale of 10^3 MeV to describe the semistrong current quark mass difference on the RHS of (9).

Taken together, (10) phenomenologically supports (9). When the latter is substituted in the mixing angle constraint (6c), we then obtain the chiral result^{4/}

$$\tan 2\phi_{sd} = \frac{(m_{s_0} - m_{d_0})}{(m_{s_0} - m_{d_0})} = 1 \quad , \quad \phi_{sd} = \frac{\pi}{8} = 22.5^\circ \quad . \quad (11)$$

In fact, this angle (11) was first approximately found^{5/} from the phenomenological semistrong relation (10) with^{6/} $f_\pi \approx f_s - f_K$.

3. Diagonalization of $Q = \frac{2}{3}$ quark mass matrix

The $Q = \frac{2}{3}$ c-u quark sector can be diagonalized in analogy with the s-d sector. In particular, (5) and (6c) are respectively replaced by

$$\begin{bmatrix} m_{u_0} & \lambda_{cu} \\ \lambda_{cu} & m_{c_0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_c \end{bmatrix} \quad . \quad (12)$$

$$\tan 2\phi_{cu} = \frac{2\lambda_{cu}}{m_{c_0} - m_{u_0}} \quad (13a)$$

A mixing expression equivalent to (13a) but more useful for our purposes here is

$$\sin 2\phi_{cu} = \frac{2\lambda_{cu}}{m_c - m_u} \quad (13b)$$

Since the (nonrelativistic) charmed c quark is much heavier than the (relativistic) light u , d , s quarks, chiral symmetry arguments will not be valid in the c - u sector. Instead we appeal to the semistrong relation (10) to write^{4,5/}

$$\lambda_{cu} = -f_{D_s} g_{D_s cu} \approx \left[\frac{m_c - m_u}{m_s - m_d} \right]_{\text{con}}^{1/2} \lambda_{sd} \approx \frac{1}{2} [(m_c - m_u)(m_s - m_d)]_{\text{con}}^{1/2} \quad (14)$$

The square root in (14) is reminiscent^{7/} of a nonrelativistic wave function description of a meson decay constant (in this case a scalar D_s $c\bar{u}$ meson replacing the scalar $s\bar{d}$ kappa in (10)).

Then substituting (14) in (13b) for the usual^{8/} constituent quark mass differences $(m_s - m_d)_{\text{con}} \approx 170$ MeV and $(m_c - m_u)_{\text{con}} \sim 1.6$ GeV leads to the cu mixing angle^{4,5/}

$$\sin 2\phi_{cu} \sim \left[\frac{m_s - m_d}{m_c - m_u} \right]_{\text{con}}^{1/2} \approx 0.33 \quad , \quad \phi_{cu} \sim 9.5^\circ \quad (15)$$

4. Origin of Cabibbo angle

The semistrong hamiltonian (1) and quark mass matrices (5) and (12) are diagonal for strong flavor, while the weak quark current (3) is diagonal for weak flavor. This mismatch is translated to the Cabibbo-GIM form^{11/} of the weak quark current, but then the various mixing angles must be related by trigonometric identities as^{9/}

$$\theta_c = \phi_{sd} - \phi_{cu} \quad (16)$$

Given another mismatch between the chiral angle $\phi_{sd} = 22.5^\circ$ generated by the light s , d quarks in (11) and the nonchiral angle $\phi_{cu} \sim 9.5^\circ$ due primarily to the heavy c quark in (15), the Cabibbo angle in (16) should be

$$\theta_c \approx 22.5^\circ - 9.5^\circ \approx 13^\circ \quad (17)$$

The latter value is quite close to the observed Cabibbo angle $\theta_c \approx 13.1^\circ$.

If the c quark were light like u , d , s , or if all four u , d , s , c quarks were heavy like b and t , then the Cabibbo angle would nearly vanish. The latter is what happens^{5/} for the KM mixing angles^{10/} θ_2 and θ_3 in the six-quark (rather than four-quark) model.

5. Dynamical origin of kaon $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule

Once the weak to strong s-d and c-u flavor diagonalizations are performed leading directly to $\theta_c \approx 13.1^\circ$, no further flavor transformations are allowed. Nevertheless, first-order weak transitions do occur, then generated by the (rotated strong flavor) Cabibbo-GIM weak quark current (4).

In particular, there is a $\Delta I = \frac{1}{2}$ s-d (strong flavor) weak transition, which we depict in the standard $SU(2) \times U(1)$ model^{/3/} by the perturbative graphs of Fig. 1. For diagonal weak flavor masses, all three types of graphs of Fig. 1 are needed to manifest gauge invariance (at the current mass pole position.^{/4,11/}) However, for the already rotated strong flavor diagrams in Fig. 1, the s-d diagonalization procedure of Sec. 2 demands that g_{Had} and the tadpole graph of Fig. 1(c) identically vanish. Furthermore the unphysical χ^- Higgs non-left-handed (LH) loop of Fig. 1(b) is suppressed to $O(1/M_W^4)$, as can be verified^{/4/} using "operator regularization."^{/12/}

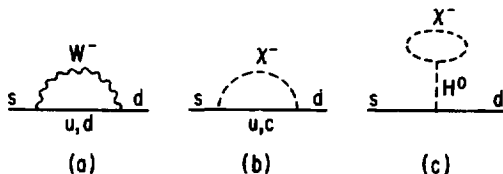


Fig. 1. Leading order $SU(2) \times U(1)$ graphs for the s-d quark transition.

This leaves the physical LH W^- loop of Fig. 1(a) to control the $\Delta I = \frac{1}{2}$ s-d quark transition. Due to the GIM mechanism, the latter amplitude is finite, generating the $O(1/M_W^2)$ effective LH weak hamiltonian density^{/13/} (with $\gamma_\mu^L \equiv \gamma_\mu(1-i\gamma_5)$ and $s_c c_c \approx 0.221$):

$$H_{w,1/2}^{\text{eff}} = b \left(\bar{s} \gamma_\mu^L d + \text{h.c.} \right) \quad (18a)$$

$$b \approx b(p^2 = 0) = - \frac{G_F s_c c_c}{8\pi^2 \sqrt{2}} (m_c^2 - m_u^2) \approx -5.9 \times 10^{-8} \quad (18b)$$

Next, this s-d (strong flavor) weak quark transition (18) can be nonperturbatively hadronized between a Nambu-Goldstone kaon and pion, as depicted in Fig. 2.

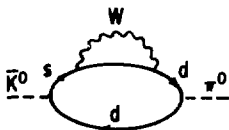


Fig. 2. Hadronization of s-d quark transition in K_0 .

Using light plane wave functions^{/14/} for K and π normalized to the observed decay constants f_K and f_π , (18) becomes "cemented" into the K_s transition of Fig. 2, with

$$\langle \pi^0 | H_{w,1/2}^{\text{eff}} | K^0 \rangle \approx \sqrt{2} b m_K^2 f_K / f_\pi \approx -2.6 \times 10^{-8} \text{ GeV}^2 \quad (19)$$

Finally, folding (19) and current algebra-pion PCAC into $K_{2\pi}^0$ decays,^{/13/} we are led to the dominant $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitudes (with $f_\pi \approx 93 \text{ MeV}$),

$$|M_{K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}^{1/2}| = |M_{K_s^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0}^{1/2}| \approx |\langle \pi^0 | H_{w,1/2}^{\text{eff}} | K^0 \rangle (1 - m_\pi^2/m_K^2) / f_\pi| \approx 26 \times 10^{-8} \text{ GeV} \quad (20)$$

This prediction is very near the observed amplitudes^{/15/}

$$|M_{K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}| \approx 27.7 \times 10^{-8} \text{ GeV} \quad |M_{K_s^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0}| \approx 26.3 \times 10^{-8} \text{ GeV} \quad (21)$$

6. Summary

The heavy charmed quark mass sets the scale for the PCVC mixing theory of the Cabibbo angle and also for the current algebra-PCAC theory of the dominant $\Delta I = \frac{1}{2}$ weak $K_{2\pi}^0$ decays. Both of these problems have been solved without introducing any free parameters.

References

1. N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett., 1963, 10, p. 531; S. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev., 1970, D2, p. 1285.
2. S. Gershtein and Y. Zel'dovich, Soviet Phys. JETP, 1956, 2, p. 576; R. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev., 1958, 109, p. 193.
3. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., 1967, 19, p. 1264; A. Salam, in Elementary Particle Theory, ed. N. Svartholm Almquist, Wiksell (Stockholm) ; 1968, p. 367.
4. V. Elias, D. McKeon and M. Scadron, University of Western Ontario preprint, 1987.
5. N. Paver and M. Scadron, Nuovo Cim., 1985, 88A, p. 447.
6. S. Glashow and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., 1968, 20, p. 224; P. Auvil and N. Deshpande, Phys. Rev., 1969, 183, p. 1463; 1969, 185, p. 2043.
7. J. Ellis, M. Gaillard, D. Nanopoulos, and S. Rudaz, Nucl. Phys., 1977, B131, p. 285; A. Ali, J. Korner, and G. Kramer, Zeit. Phys., 1979, C1, p. 269.
8. A. DeRujula, H. Georgi, and S. Glashow, Phys. Rev., 1975, D12, p. 147.
9. H. Fritzsch, Phys. Lett., 1977, 70B, p. 436; 1978, 73B, p. 317.
10. M. Kobayashi and T. Maskawa (KM), Prog. Theor. Phys., 1973, 49, p. 652.
11. R. Delbourgo and M. Scadron, Nuovo Cim. Lett., 1985, 44, p. 193.
12. D. McKeon and T. Sherry, Phys. Rev., 1987, D35, p. 3854.
13. M. Scadron, Phys. Lett., 1980, 95B, p. 123; Rep. Prog. Phys., 1981, 44, p. 213; Nuovo Cim., 1986, 91A, p. 87.
14. N. Fuchs and M. Scadron, J. Phys., 1985, G11, p. 299; Nuovo Cim., 1986, 93A, p. 205.
15. Particle Data Group, Phys. Lett., 1986, 170B, April 1.

МАССЫ И ШИРИНЫ РАДИАЦИОННЫХ РАСПАДОВ МЕЗОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

В.О.Галкин

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Р.Н.Фаустов

Всероссийский научно-исследовательский центр по изучению
свойств поверхностей вакуума, Госстандарт

Описание свойств мезонов в рамках составных моделей элементарных частиц является важной теоретической задачей [1,2]. Изучение мезонов позволяет получить информацию о потенциале взаимодействия кварка с антикварком, которая необходима для понимания характера сильного взаимодействия на больших расстояниях [1,3]. Одной из проблем описания свойств мезонов является учет релятивистских эффектов. Оценки скорости движения кварка в мезонах показывают, что роль релятивистских поправок сильно возрастает при уменьшении массы кварка. Поэтому для единого описания свойств легких и тяжелых мезонов необходимо пользоваться релятивистскими кварковыми моделями.

Учет релятивистских эффектов позволяет правильно описать экспериментально наблюдаемые расщепления масс и ширины радиационных распадов мезонов. В данной работе использована релятивистская модель, построенная на основе квазипотенциального метода Логунова-Тавхелидзе [4-6].

Квазипотенциальное уравнение, описывающее двухчастичную релятивистскую составную систему, может быть преобразовано [7] к локальному уравнению Шредингеровского типа

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu_R} - \frac{\vec{p}^2}{2\mu_R} \right) \Psi_M(\vec{p}) = \int V(\vec{p}, \vec{q}; M) \Psi_M(\vec{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \quad (1)$$

где $\Psi_M(\vec{p})$ — спроектированная на положительно-частотные состояния квазипотенциальная волновая функция связанной системы; $V(\vec{p}, \vec{q}; M)$ — квазипотенциал; m_1, m_2 — массы взаимодействующих частиц; M — масса связанного состояния; $\vec{p}$ — относительный импульс частиц;

$$\mu_R = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} = \frac{M^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^3}; \quad (2)$$

$$E_1 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}; \quad E_2 = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2M};$$

$$b^2(M) = \frac{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}{4M^2}. \quad (3)$$

Уравнение (I) имеет форму, удобную для вычисления масс связанных состояний. Простейшие примеры использования уравнения (I) для получения массовых формул рассмотрены в [7,8].

Построим оператор квазипотенциала взаимодействия кварков в мезоне с точностью v^2/c^2 . Предположим, что эффективное кварк-антикварковое взаимодействие описывается комбинацией пертурбативного одноглюонного обмена с дальнедействующим скалярным и дальнедействующим векторным обменом с кварк-глюонным аномальным магнитным взаимодействием [9]. Тогда оператор квазипотенциала будет иметь вид [5]

$$V(\vec{p}, \vec{q}; M) = \bar{u}_1(\vec{p}) \bar{u}_2(-\vec{p}) \left\{ \gamma_1^\mu \gamma_2^\mu D_{\mu\nu}(\vec{k}) + V_{\text{conf}}^V(\vec{k}) \Gamma_1^\mu \Gamma_{2\mu} + \right. \\ \left. + V_{\text{conf}}^S(\vec{k}) I_1 I_2 \right\} u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}), \quad (4)$$

где $D_{\mu\nu}(\vec{k})$ — пропагатор глюона (с цветовым фактором $4/3$), который удобно выбрать в кулоновской калибровке; $V_{\text{conf}}^V(\vec{k})$, $V_{\text{conf}}^S(\vec{k})$ — векторный и скалярный запирающие потенциалы; Γ_μ — эффективная векторная вершина:

$$\Gamma_\mu(\vec{k}) = \gamma_\mu + \frac{i\kappa}{2m} \epsilon_{\mu\nu} K^\nu, \quad (5)$$

κ — дальнедействующий аномальный хромомгнитный момент кварка;

$\vec{k} = \vec{p} - \vec{q}$; $u_{1,2}(\vec{p})$ — биспиноры:

$$u^\lambda(\vec{p}) = \sqrt{\frac{\epsilon(p) + m}{2\epsilon(p)}} \left(\frac{1}{\epsilon(p) + m} \vec{\epsilon} \vec{p} \right) w^\lambda. \quad (6)$$

Подставим биспиноры (6) в выражение для квазипотенциала (4) и удержим члены порядка v^2/c^2 . После перехода в координатное представление получим

$$V^{\text{eff}}(z) = V_{\text{spin-indep}}(z) + V_{\text{spin-dep.}}(z), \quad (7)$$

$$V_{\text{spin-indep.}}(z) = (V^{\text{conf}}(z) + V_{\text{conf}}^V(z)) \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{m_1 m_2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + V_{\text{conf}}^S(z) \left(1 - \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \frac{\vec{p}^2}{2} \right) - V_{\text{conf}}^{\text{coul}}(z) \frac{1}{m_1 m_2} \frac{\vec{L}^2}{2z^2} + \\
& + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \Delta \left(V_{\text{conf}}^{\text{coul}}(z) + V_{\text{conf}}^S(z) \right) + \frac{1}{8} \left(\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} \right)^2 + \frac{2\alpha_1}{m_1^2} + \right. \\
& \left. + \frac{2\alpha_2}{m_2^2} \right) \Delta V_{\text{conf}}^V(z) + \left(\frac{1}{m_1 m_2} V_{\text{conf}}^{'IV}(z) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) V_{\text{conf}}^{'S}(z) \right) \frac{\vec{z} \vec{\nabla}}{z}, \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{spin-dep.}}(z) = & \frac{1}{m_1 m_2} \left\{ \left(1 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4 m_1 m_2} \right) \frac{V_{\text{conf}}^{'\text{coul}}(z)}{z} - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4 m_1 m_2} \left(\frac{V_{\text{conf}}^{'IV}(z)}{z} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{V_{\text{conf}}^{'S}(z)}{z} \right) + \frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2} \left((1 + \alpha_1) m_2 + (1 + \alpha_2) m_1 \right) \frac{V_{\text{conf}}^{'IV}(z)}{z} \right\} \vec{L} \vec{S} + \\
& + \frac{1}{m_1 m_2} \left\{ \frac{m_2^2 - m_1^2}{4 m_1 m_2} \frac{V_{\text{conf}}^{'\text{coul}}(z)}{z} - \frac{m_2^2 - m_1^2}{4 m_1 m_2} \left(\frac{V_{\text{conf}}^{'IV}(z)}{z} + \frac{V_{\text{conf}}^{'S}(z)}{z} \right) + \right. \\
& + \frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2} \left((1 + \alpha_1) m_2 - (1 + \alpha_2) m_1 \right) \frac{V_{\text{conf}}^{'IV}(z)}{z} \left. \right\} \vec{L} (\vec{S}_1 - \vec{S}_2) + \\
& + \frac{1}{3 m_1 m_2} \left(\frac{V_{\text{conf}}^{'\text{coul}}(z)}{z} - V_{\text{conf}}^{\text{coul}}(z) + (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \left(\frac{V_{\text{conf}}^{'IV}(z)}{z} - V_{\text{conf}}^{'IV}(z) \right) \right) \left[-\vec{S}_1 \vec{S}_2 + \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} (\vec{S}_1 \vec{z})(\vec{S}_2 \vec{z}) \right] + \frac{2}{3 m_1 m_2} \left(\Delta V_{\text{conf}}^{\text{coul}}(z) + (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \Delta V_{\text{conf}}^V(z) \right) \vec{S}_1 \vec{S}_2, \quad (9)
\end{aligned}$$

где $V_{\text{conf}}^{\text{coul}}(z) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{z}$; штрих означает дифференцирование по z ; $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$; $\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}]$ — оператор орбитального момента.

Предположим линейное задержание кварков в мезоне, тогда

$$V_{\text{conf}}^V(z) = (1 - \varepsilon) (A z + B), \quad (10)$$

$$V_{\text{conf}}^S(z) = \varepsilon (A z + B), \quad (11)$$

где ε — параметр смешивания векторного и скалярного линейного потенциала.

Подставляя (10), (11) в (8), (9), получим выражение для квазипотенциала в рассматриваемой модели. Применим его для описания спектра

масс тяжелых мезонов. Для этого подставим в уравнение (I) полученный квазипотенциал и усредним по волновым функциям мезона. Учитывая точность наших вычислений, при расчете матричных элементов квазипотенциала можно пользоваться волновыми функциями уравнения (I) с потенциалом $V(z) = V_{conf}^{\text{con}}(z) + V_{conf}^V(z) + V_{conf}^s(z)$. Выполняя усреднение, заменим $\vec{p}^2$, согласно (I), на $B^2(M) - 2\mu_R V(z)$. Получим следующую массовую формулу:

$$\frac{B^2(M)}{2\mu_R} = W_{12} + a \langle \vec{L} \vec{S} \rangle + b \langle T_{12} \rangle + c \langle \vec{S}_1 \vec{S}_2 \rangle + d \langle \vec{L} \vec{S}_1 \vec{S}_2 \rangle, \quad (I2)$$

где $W_{12} = \langle \vec{V}_{spin-indep} \rangle + \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{2\mu_R}$, $T_{12} = \frac{3}{2} (\vec{S}_1 \vec{z}) (\vec{S}_2 \vec{z}) - \vec{S}_1 \vec{S}_2$. Коэффициенты a, b, c, d для мезонов, состоящих из кварка и антикварка одного аромата ($m_1 = m_2 = m$, $x_1 = x_2 = x$), имеют вид

$$a = \frac{1}{2m^2} \{ 4\alpha_s \langle z^{-3} \rangle - A \langle z^{-1} \rangle + 4(1+x)(1-\varepsilon) A \langle z^{-1} \rangle \}, \quad (I3)$$

$$b = \frac{1}{3m^2} \{ 4\alpha_s \langle z^{-3} \rangle + (1-\varepsilon)(1+x)^2 A \langle z^{-1} \rangle \}, \quad (I4)$$

$$c = \frac{4}{3m^2} \{ \frac{8\pi}{3} \alpha_s |\Psi(0)|^2 + (1-\varepsilon)(1+x)^2 A \langle z^{-1} \rangle \}, \quad (I5)$$

$$d = 0,$$

где α_s - константа сильного взаимодействия

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2M_f)\ln(a^2/\Lambda^2)}; \quad (I6)$$

N_f - число ароматов кварков; $\Lambda = 220 \text{ МэВ}$ [10].

Для проведения расчетов спектра масс с помощью формул (2), (3), (I2) - (I5) нужно фиксировать коэффициент ε , определяющий смешивание векторного и скалярного линейного потенциала, и аномальный хромомagnитный момент кварка x . Ранее [11] при рассмотрении радиационных распадов векторных мезонов было показано, что нужно положить $\varepsilon = -0,9$. Для определения x перепишем выражения (I3), (I4) следующим образом:

$$a = \frac{3}{2} b + \frac{2-3\varepsilon}{2m^2} A \langle z^{-1} \rangle + \frac{2x-x^2}{2m^2} A (1-\varepsilon) \langle z^{-1} \rangle. \quad (I7)$$

Из анализа экспериментальных данных для ψ -состояний чармония (3P_J) следует [12], что $a < b$. Используя выражения (I7), получим соотношения: $x > 2,86$ либо $x < -0,86$. Сравнение результатов расчетов по формулам (I2) - (I5) с экспериментальными данными показывает, что при положительных значениях x ($> 2,86$) получаются значительные расхожде-

Таблица I. Спектр масс тяжелых мезонов

Состояние	Частица	M теор. ГэВ	M эксп. ГэВ	Частица	M теор. ГэВ	M эксп. ГэВ
1^3S_1	J/ψ	3,092	3,0969	Υ	9,462	9,460
1^1S_0	η_c	2,976	2,981	η_b	9,401	-
1^3P_0	χ_c^0	3,417	3,415	χ_b^0	9,861	9,860
1^3P_1	χ_c^1	3,504	3,510	χ_b^1	9,888	9,892
1^3P_2	χ_c^2	3,546	3,556	χ_b^2	9,905	9,913
1^1P_1		3,510	-		9,892	-
2^3S_1	Ψ'	3,690	3,686	Υ'	10,03	10,023
2^1S_0	η_c'	3,60	3,594	η_b'	9,995	-

ния. Наилучшее согласие с экспериментом достигается при $\alpha \sim -1$, поэтому при проведении всех дальнейших вычислений положим $\alpha = -1$. Результаты расчетов спектра масс тяжелых мезонов по формулам (12) – (15) приведены в табл. I. Значения параметров линейного потенциала были выбраны: $A = 0,18 \text{ ГэВ}^2$, $B = -0,27 \text{ ГэВ}$.

Перейдем к рассмотрению спектра масс легких мезонов. Скорость движения u -, d -, s - кварков в мезонах составляет более половины скорости света. Роль релятивистских эффектов возрастает, поэтому при проведении вычислений с помощью формулы (12) недостаточно ограничиваться рассмотрением только вкладов порядка v^2/c^2 в не зависящую от спина часть W_{12} . В работе [10] на основе квазипотенциального метода построена релятивистская модель, в которой величина W_{12} в (12) рассматривалась как феноменологический параметр. Это позволило также качественно учесть вклад в волновые функции некоторых мезонов различных примесей. Для получения спектра масс и определения феноменологического параметра W_{12} использовался эмпирический факт постоянства величины $\Delta = M_V^2 - M_P^2$ для всех мезонов, содержащих по крайней мере один легкий кварк [13, 14]. Спектр масс легких векторных и псевдоскалярных мезонов, рассчитанный в рамках этой модели, приведен в табл. 2.

Ширины радиационных распадов векторных мезонов V со скрытым ароматом в псевдоскалярные P ($V \rightarrow P + \gamma$) с учетом основных релятивистских поправок рассмотрены нами в работе [11]. Получено следующее выражение для ширины распада:

$$\Gamma(V \rightarrow P + \gamma) = \frac{\omega^3}{3\pi} |\vec{M}_{PV}|^2, \quad \omega = \frac{M_V^2 - M_P^2}{2M_V}, \quad (18)$$

$\vec{M}_{PV}$ — матричный элемент магнитного момента перехода из векторного состояния в псевдоскалярное, M_V и M_P — массы векторного и псевдоскалярного мезона. Были рассмотрены случаи: 1) векторного взаимодействия кварков с учетом аномального хромомagnetного момента; 2) скалярного взаимодействия; 3) суперпозиции векторного и скалярного потенциалов с параметром смешивания ε (см. (IO), (II)). Наилучшее согласие с экспериментом достигается при $\varepsilon = -0,9$ (см. [II]), а также табл.3). Отметим, что аномальный хромомagnetный момент кварка не дает вклада в ширину распада мезона со скрытым ароматом [II].

Таблица 2. Массы векторных и псевдоскалярных мезонов, содержащих по крайней мере один легкий кварк

Кварки	M_P теор., ГэВ	M_P эксп., ГэВ	M_V теор., ГэВ	M_V эксп., ГэВ
$u\bar{u}, d\bar{d}$	π 0,135	0,13496	ρ, ω 0,760	0,770
$u\bar{s}$	K 0,496	0,49772	K^* 0,897	0,8921
$u\bar{u}, d\bar{d}$	η 0,543*	0,5488		
$s\bar{s}$	η' 0,951*	0,95757	φ 1,02	1,0195
$u\bar{c}$	D 1,865	1,8646	D^* 2,01	2,0072
$s\bar{c}$	D_s 1,98	1,971	D_s^* 2,12	—
$u\bar{b}$	B 5,28	5,2752	B^* 5,33	—
$s\bar{b}$	B_s 5,47	—	B_s^* 5,52	—
$c\bar{b}$	B_c 6,94	—	B_c^* 6,99	—

$m_{u,d} = 0,33$ ГэВ; $m_s = 0,485$ ГэВ; $m_c = 1,6$ ГэВ; $m_b = 4,85$ ГэВ.

*) угол смешивания $\theta_P = -20^\circ$.

Рассмотрим радиационные MI -распады мезонов с открытым ароматом. В этом случае из общих выражений для матричных элементов магнитного момента перехода $\vec{M}_{PV}$ [7] получим:

1) для распада нейтрального мезона $V^0 \rightarrow P^0 + \gamma$

а) векторный потенциал взаимодействия кварков

$$M^{0V} = \frac{e}{2} Q \left\{ \frac{1}{\mu} - \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{3} \left(\frac{1-x_1}{m_1^2} + \frac{1-x_2}{m_2^2} + \frac{(3+2x_1)m_1 + (3+2x_2)m_2}{2m_1^2 m_2^2} \right) \right\}, \quad (19)$$

б) скалярный потенциал

$$M^{0S} = \frac{e}{2} Q \left\{ \frac{1}{\mu} + (m_1 + m_2 - M) \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{3} \left(\frac{1}{\mu m_1 m_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) \right) \right\}, \quad (20)$$

где Q - заряд кварка, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса.

2) для распада заряженного мезона $V^+ \rightarrow P^+ + \gamma$

а) векторный потенциал

$$M^{+V} = \frac{e}{2} Q \left\{ \frac{2m_2 - m_1}{m_1 m_2} - \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{3} \left(\frac{2(1-x_1)}{m_1^3} - \frac{1-x_2}{m_2^3} + \frac{2(3+2x_2)m_2 - (3+2x_1)m_1}{2m_1^2 m_2^2} \right) \right\}, \quad (21)$$

б) скалярный потенциал

$$M^{+S} = \frac{e}{2} Q \left\{ \frac{2m_2 - m_1}{m_1 m_2} + (m_1 + m_2 - M) \left(\frac{2}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{3} \left(\frac{2m_2 - m_1}{m_1^2 m_2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{m_1^3} - \frac{1}{m_2^3} \right) \right) \right\}, \quad (22)$$

где $Q = \frac{1}{3}$.

Таблица 3. Ширины радиационных М1-распадов мезонов со скрытым ароматом

Распад	$M_V, \Gamma_{\gamma B}$	$M_P, \Gamma_{\gamma B}$	$\langle \vec{p}^2 \rangle, \Gamma_{\gamma B'}$	$\Gamma_V^V, \kappa \rightarrow B'$	$\Gamma_S^S, \kappa \rightarrow B'$	$\Gamma^{V+S}, \kappa \rightarrow B'$	$\Gamma_{\text{эксп.}}, \kappa \rightarrow B'$
$\eta/\eta' \rightarrow \eta_c + \gamma$	3,0969	2,981	0,5	1,8	2,8	1,07	$0,80 \pm 0,34$
$\psi' \rightarrow \eta_c' + \gamma$	3,686	3,592	0,8	0,75	0,67	0,82	$0,43 \pm 2,8$
$\Upsilon' \rightarrow \eta_c + \gamma$	9,460	9,401	1,8	$8,6 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$6,6 \cdot 10^{-6}$	-
$\omega \rightarrow \pi + \gamma$	0,7826	0,13496	0,034	670	565	782	860 ± 50
$\rho \rightarrow \pi + \gamma$	0,770	0,13496	0,034	70	68	71	$70,8 \pm 7,7$
$\omega \rightarrow \eta + \gamma$	0,7826	0,5488	0,034	3,7	3,5	3,9	-
$\rho \rightarrow \eta + \gamma$	0,769	0,5488	0,034	28	29	27	-
$\psi \rightarrow \eta + \gamma$	1,0195	0,5488	0,067	82	137	45	50 ± 10
$\psi' \rightarrow \eta' + \gamma$	1,0195	0,9576	0,067	0,2	0,3	0,1	-
$\psi' \rightarrow \eta_c + \gamma$	3,686	2,981	0,28	4,0	0,24	7,4	$0,92 \pm 0,56$
$\eta_c' \rightarrow \eta_c + \gamma$	3,0969	3,592	0,28	4,4	0,27	8,2	-
$\Upsilon' \rightarrow \eta_b + \gamma$	10,0234	9,40	1,1	$12,5 \cdot 10^{-6}$	$0,45 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	-
$\eta_b' \rightarrow \Upsilon + \gamma$	9,460	9,995	1,1	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	-

Таблица 4. Ширины радиационных МП-распадов мезонов с открытым ароматом

Распад	$M_V,$ $\Gamma \rightarrow B$	$M_P,$ $\Gamma \rightarrow B$	$\langle P^2 \rangle,$ $\Gamma \rightarrow B$	$\Gamma^V,$ $\kappa \rightarrow B$	$\Gamma^S,$ $\kappa \rightarrow B$	$\Gamma^{V+S},$ $\kappa \rightarrow B$	$\Gamma^{эксп.},$ $\kappa \rightarrow B$
$K^{*0} \rightarrow K^0 \gamma$	0,896	0,498	0,044	120	141	105	117 ± 12
$K^{*+} \rightarrow K^+ \gamma$	0,892	0,493	0,044	59	72	47	52 ± 6
$D^{*0} \rightarrow D^0 \gamma$	2,007	1,864	0,13	4,5	12,5	1,0	2430
$D^{*+} \rightarrow D^+ \gamma$	2,010	1,869	0,13	0,034	0,04	0,82	340
$D_s^{*+} \rightarrow D_s^+ \gamma$	2,12	1,971	0,16	0,02	0,09	0,19	-
$B^{*0} \rightarrow B^0 \gamma$	5,33	5,275	0,15	0,25	0,07	1,3	-
$B^{*+} \rightarrow B^+ \gamma$	5,33	5,271	0,15	0,009	0,01	0,008	-
$B_s^{*0} \rightarrow B_s^0 \gamma$	5,52	5,47	0,27	0,02	0,015	0,025	-

Результаты расчетов ширин радиационных распадов векторных мезонов с открытым ароматом в псевдоскалярные по формулам (18) - (22) приведены в табл.4.

Итак, построена релятивистская кварковая модель, на основе которой получены результаты для спектра масс и ширин радиационных МП-распадов. Наилучшее согласие с экспериментальными данными, как по массам, так и по ширинам радиационных распадов, достигается, если действующее взаимодействие кварков в мезоне выбрать в виде суперпозиции (с параметром смешивания $\xi = -0,9$) скалярного и векторного потенциалов, с учетом аномального хромомagnetного момента кварка $\mathcal{M} = -I$ на больших расстояниях.

Литература

1. Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В. - УФН, 1984, 143, 3.
2. Герасимов С.Б., Говорков А.Б. - ОИЯИ Р2-86-758, Дубна, 1986.
3. Арбузов Б.А., Боос Э.Э., Куренной С.С., Турашвили К.Ш.-ЯФ, 1984, 40, 835; ЯФ, 1985, 42, 987.
4. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. - Nuovo Cim., 1963, 29, 380.
5. Фаустов Р.Н. - ЭЧАЯ, 1972, 3, 238; Annals of Phys., 1973, 78, 176.
6. Боголюбов П.Н. - ТМФ, 1970, 5, 244.
7. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. - ТМФ, 1985, 54, 179.
8. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. - ТМФ, 1986, 66, 399; Вестн. Моск. ун-та. Сер.3, 1986, 27, 3.
9. Schnitzer H.J. - Phys.Rev.D, 1978, 18, 3482.
10. Галкин В.О., Фаустов Р.Н. - ОИЯИ Р2-87-251, Дубна, 1987.
11. Галкин В.О., Фаустов Р.Н. - ЯФ, 1986, 44, 1575.
12. Königsmann K. - DESY 86-009, Hamburg, 1986.
13. Frank M., O'Donnel P.J. - CERN-TH.4367/86, 1986.
14. Igi K., Ono S. - Phys.Rev.D, 1985, 32, 232.

ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ В ФОРМАЛИЗМЕ С ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПОКОЯЩИХСЯ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ

А. Н. Сисакян

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

А. Н. Квинихидзе, А. М. Хведелидзе

Математический институт АН ГССР, Тбилиси

Теория возмущений является единственным регулярным методом в квантовой теории поля. Однако многие задачи рассчитываются с ее помощью лишь частично и для их полного решения необходимо привлечение так называемых непертурбативных методов. Это относится, в частности, к описанию процессов рассеяния составных систем. Учет составной структуры адронов приводит к представлениям для амплитуды рассеяния, в которых по теории возмущений вычисляется лишь часть, соответствующая рассеянию высвобожденных из связанного состояния составляющих $1/1$. Полное выражение содержит функции, соответствующие переходу физической частицы в составляющие (волновые функции связанного состояния), определение которых, как известно, выходит за рамки теории возмущений. Поэтому представляет интерес построение формализма, в котором часть, рассчитываемая непертурбативными методами, максимально упрощена. Следует отметить, что это, вообще говоря, приведет к некоторому усложнению теории возмущения.

В настоящей работе рассматривается один из наиболее простых примеров взаимодействия составных систем: глубоконеупругое рассеяние точечной частицы на адроне. Выбором системы покоя составной частицы (адрона), соответствующее сечение выражается через более привычные, с точки зрения нерелятивистской квантовой механики, волновые функции связанного состояния в покое. Как известно, в традиционном подходе используются более сложные и менее изученные волновые функции в системе бесконечного импульса $P_z \rightarrow \infty$ $/2,3/$. Предлагается новый вариант разложения структурных функций в ряд по константе связи, каждый член которого обладает свойством спектральности благодаря правильному учёту закона сохранения энергии в любом порядке теории возмущений. Анализ, проведенный в КХД, показывает, что в системе покоя связанного состояния ($\vec{P}=0$) импульсное приближение, хотя и удовлетворяет требованию масштабной инвариантности, недостаточно для корректного описания упругого предела

$x_{vj} \rightarrow 1$, в отличие от системы $P_z \rightarrow \infty$. Это означает, что партонная модель эквивалентна импульсному приближению лишь в системе $P_z \rightarrow \infty$. Для получения ведущих в асимптотической области $x_{vj} \rightarrow 1$ членов необходим учёт взаимодействия составляющих в конечном состоянии. В этом кажущемся усложнении расчетов по теории возмущений заключается вышеупомянутая плата за простоту и физическую наглядность волновых функций, фигурирующих в нашем подходе.

§ I. Теория возмущений

Рассмотрим процесс глубоконеупругого рассеяния электрона на адроне. Сечение процесса определяется тензором

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iq \cdot x) \langle P | J_\mu(x) J_\nu(0) | P \rangle, \quad (1)$$

где $|P\rangle$ - собственное состояние полного гамильтониана H , соответствующее адрону с 4-импульсом P ($P^2 = M^2$), нормированное условием $\langle P' | P \rangle = (2\pi)^3 2P^0 \delta^{(3)}(\vec{P} - \vec{P}')$, $J_\mu(x)$ - электромагнитный ток в представлении Гейзенберга. Для определенности условимся, что в нулевой момент времени картины Гейзенберга и взаимодействия совпадают

$$J_\mu(x) = J_\mu(x) \quad \text{при} \quad x_0 = 0.$$

Если одетый ток $J_\mu(x)$ разложить по константе взаимодействия

$$J_\mu(\vec{x}, t) = \left\{ T \exp i \int_0^t H_I(t') dt' \right\}^+ J_\mu(\vec{x}, t) \left\{ T \exp i \int_0^t H_I(t') dt' \right\}, \quad (2)$$

получим один из возможных вариантов теории возмущений для структурных функций глубоконеупругого рассеяния. В нулевом порядке имеем известное выражение со свободными токами

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iq \cdot x) \langle P | J_\mu(x) J_\nu(0) | P \rangle, \quad (3)$$

выявляющее основной недостаток теории возмущений (2) - в ней потеряно такое важное свойство структурных функций, как спектральность, связанное с правильным учётом закона сохранения энергии при составлении сечения глубоконеупругого рассеяния. Действительно, можно проверить, что в нулевом приближении (3) $W_{\mu\nu} \neq 0$ ниже порога реакции $(P+q)^2 = M^2$, $x_{vj} = -q^2/2Pq > 1$. Ясно, что никакой полный набор состояний $|N\rangle$ между токами в (3) не приведет к δ -функции по энергии в выражении

$$\mathcal{T}_\mu = \int d^4x \exp(iq \cdot x) \langle P | J_\mu(x) | N \rangle, \quad (4)$$

так как $|P\rangle$ – собственное состояние полного гамильтониана $\hat{H}$, временные трансляции тока $J_\mu(x)$ задаются свободным гамильтонианом. Поскольку нарушение свойства спектральности заведомо означает искажение поведения структурных функций в окрестности $x_{Bj} \sim 1$, представление (3) становится непригодным для изучения этой области. Для восстановления свойства спектральности в (3) используют партонную картину, в которой важны два момента – переход к системе $P_z \rightarrow \infty$, предположение об ограниченности поперечного движения кварков в адроне. При этом существенны проекционные свойства волновой функции связанного состояния по продольной фракции импульса составляющих, имеющие место только в системе $P_z \rightarrow \infty$. Поскольку ниже рассмотрение ведется в системе покоя составной частицы, необходимо иметь теорию возмущений, в которой свойство спектральности сохранено в каждом члене разложения.

Тензор $W_{\mu\nu}$ перепишем в виде

$$W_{\mu\nu} = \int d^3\vec{x} \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x}) \langle P | J_\mu(\vec{x}, 0) \delta(P_0 + q_0 - \hat{H}) J_\nu(0) | P \rangle. \quad (5)$$

Символическая запись δ – функции с операторным аргументом расшифровывается с помощью замены (5):

$$\delta(z - \hat{H}) \Rightarrow \sum_N \delta(z - E_N) |N\rangle \langle N|,$$

где $|N\rangle$ – полный набор собственных состояний гамильтониана $\hat{H}$. Поскольку оба тока в (5) свободные, построение теории возмущений сводится к разложению δ – функции по константе связи. Для этого воспользуемся представлением

$$2\pi i \delta(z - \hat{H}) = [z - \hat{H} - i\epsilon]^{-1} - [z - \hat{H} + i\epsilon]^{-1},$$

определением оператора $\hat{\Gamma}$ – матрицы

$$[z - H + i\epsilon]^{-1} = [z - H_0 + i\epsilon]^{-1} + [z - H_0 + i\epsilon]^{-1} \hat{\Gamma}(z) [z - H_0 + i\epsilon]^{-1},$$

$$[z - H - i\epsilon]^{-1} = [z - H_0 - i\epsilon]^{-1} + [z - H_0 - i\epsilon]^{-1} \hat{\Gamma}^\dagger(z) [z - H_0 - i\epsilon]^{-1}$$

и условием унитарности^{х)}

$$\hat{T}^+(z) - \hat{T}(z) = 2\pi i \hat{T}(z) \delta(z - \hat{H}_0) \hat{T}^+(z). \quad (6)$$

Тогда после несложных выкладок получим

$$W_{\mu\nu} = \int d^3\vec{x} \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{x}) \langle P | J_\mu(\vec{x}, 0) \{ I + [z - \hat{H}_0 + i\epsilon]^{-1} \hat{T}(z) \} \cdot \\ \cdot \delta(z - \hat{H}_0) \cdot \{ I + [z - \hat{H}_0 + i\epsilon]^{-1} \hat{T}(z) \}^+ J_\nu(0) | P \rangle. \quad (7)$$

Если воспользоваться полным набором голых состояний $|n\rangle$ (т.е. собственных состояний гамильтониана H_0) и проинтегрировать по $d^3\vec{x}$, имеем

$$W_{\mu\nu} = (2\pi)^3 \sum_n \delta^{(4)}(P+q-P_n) T_\mu T_\nu^+, \quad (8)$$

где

$$T_\mu = \langle P | J_\mu(0) \{ I + [z - H_0 + i\epsilon]^{-1} \hat{T}(z) \} | n \rangle,$$

P_n - полный 4-импульс состояния $|n\rangle$. Мы предлагаем теорию возмущений для функций $W_{\mu\nu}$, основанную на разложении по константе связи оператора $\hat{T}(z)$ в соотношениях (7) или (8). Тогда наличие в (8) четырехмерной δ -функции в любом порядке предложенного варианта теории возмущений обеспечивает сохранение вышеуказанного свойства спектральности. Следует обратить внимание на следующее обстоятельство: каждый член разложения (8) инвариантен относительно преобразований Лоренца, в то время как разлагаемая функция $W_{\mu\nu}$ лоренц-инвариантна. Указанная зависимость членов разложения от системы отсчета характерна для теорий возмущений, в которых выделяются нековариантные непертурбативные "блоки" (в нашем случае волновые функции связанного состояния), нетривиально зависящие от параметра разложения.

х) При наличии в теории связанных состояний $|\beta\rangle$ в правой части условия унитарности (6) имеется дополнительный член $2\pi i \sum_\beta (z - H_0) |\beta\rangle \cdot \delta(z - E_\beta) \langle \beta | (z - H_0)$. Более того, в одной из возможных схем записания кварков именно это слагаемое оказывается существенным. Обсуждение этих вопросов будет проведено в другом месте.

§ 2. Импульсное приближение и пороговое поведение

Представим связанное состояние $|P\rangle$ фокковским столбцом с компонентами $\Psi_P^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$, которые ниже будем называть n -частичными волновыми функциями

$$\langle p_1, \dots, p_n | P \rangle = \delta^{(3)}(\vec{P} - \sum_{i=1}^n \vec{p}_i) \Psi_P^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n).$$

Выпишем (8) в импульсном приближении, соответствующем $\hat{T}(z) = 0$:

$$W_{\mu\nu} = \sum_i \int \mathcal{Q}_P^i(p) \delta^{(4)}((P+q-p)^2 - m_i^2) \omega_{\mu\nu} d^4p, \quad (9)$$

где $\mathcal{Q}_P^i(p)$ — есть вероятность того, что в адроне с импульсом P суммарный четырехимпульс всех составляющих, кроме i -й, находится в интервале $p, p+dp$,

$$\mathcal{Q}_P^i(p) = \sum_n \frac{1}{(2\pi)^4} \left| \int \prod_{l=1}^n \frac{d\vec{p}_l}{2p_l^0} \delta^{(4)}(p - \sum_{l=1}^n \vec{p}_l) \delta^{(3)}(\vec{P} - \sum_{l=1}^n \vec{p}_l) \right| \left| \Psi_P^{(n)}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n) \right|^2 \quad (10)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \langle p_i | J_\mu(0) | p_i' \rangle \langle p_i' | J_\nu(0) | p_i \rangle,$$

$$\vec{p}_i' = \vec{P} - \vec{p}, \quad \vec{p}_i' = \vec{p}_i + \vec{q}, \quad p_i^2 = m_i^2.$$

Матричные элементы свободного электромагнитного тока спинорных составляющих имеют простой вид:

$$\langle p_i | J_\mu(0) | p_i' \rangle = e_i \bar{U}(p_i) \gamma_\mu U(p_i'). \quad (11)$$

Ограничимся рассмотрением специальных систем отсчета $\vec{P} = 0$ и $P_z \rightarrow \infty$. Заметим, что согласно (10) $\mathcal{Q}_P^i(p)$ является функцией двух аргументов p_0 , $|\vec{p}|$, а в системе $P_z \rightarrow \infty$ зависит от трех аргументов $x = p_0^2 p^2 / P_0 + P^2$, $\vec{p}_1^2$, p^2 , инвариантных относительно вращений в плоскости, перпендикулярной оси z . Пренебрежение малыми слагаемыми (порядка m^2/ν) в аргументе δ -функции (9) дает приближенные представления, соответствующие партонной картине (в системе $\vec{P} = 0$)

$$W_{\mu\nu} = \frac{M_E}{W^2} g_c \sum_i \int_{m^2}^{\infty} dp_0 \int_{\frac{p^2}{2M_E} + \frac{M_E}{2}}^{\infty} \mathcal{Q}_P^i(p_0, p^2). \quad (12)$$

В системе $P_z \rightarrow \infty$ ($q^+ < 0$)

$$W_{\mu\nu} = \pi \frac{M\xi}{W^2} \sum_i g_{\infty}^i (1-\xi) \omega_{\mu\nu}, \quad (13)$$

где

$$g_{\infty}^i(x) = \int_{m^2}^{\infty} d\rho^2 \int_0^{\infty} d\vec{p}_1^2 g_{\infty}^i(x, \vec{p}_1^2, \rho^2), \quad \rho^{\pm} = \rho^0 \pm \rho^3$$

известное партонное распределение по продольным функциям импульсов

$$W^2 = (P+q)^2, \quad M\xi = M + \nu - |\vec{q}|.$$

Пользуясь представлением (12), можно исследовать поведение структурных функций вблизи эксклюзивного порога $\xi \rightarrow 0$. Легко видеть, что оно определяется асимптотическим поведением волновых функций покоящегося адрона в области больших импульсов всех составляющих $p_i^- < M\xi$. Аналогичным образом в системе $P_2 \rightarrow \infty$ упругий предел структурных функций согласно (13) задается поведением функций светового фронта при $x \rightarrow 1$. Асимптотический анализ уравнений для n -частичных волновых функций связанных состояний в КХД ^{4,5}:

$$\Psi_{\vec{\sigma}}^{(n)}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n) \rightarrow |\vec{p}|^{-3(n-1)+n/2}$$

$$|\vec{p}_1| \sim |\vec{p}_2| \sim \dots \sim |\vec{p}_n| \sim |\vec{p}| \rightarrow \infty$$

$$\Psi_{\infty}^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, x_1, \dots, x_n) \rightarrow (1-x_i)^{\frac{1}{2}(2n-3)+|\Delta\lambda|}$$

$$x_i \rightarrow 1$$

($\Delta\lambda$ — разность между спиральностью связанного состояния и спиральностью активного кварка) показывает, что импульсное приближение даёт различные результаты в зависимости от системы отсчета. А именно: в формализме с покоящимися адронами получается более сильное падение при $\xi \rightarrow 0$ $\nu W_2 \sim \xi^{5n-6}$, чем общепринятое в настоящее время $\nu W_2 \sim \xi^{2n-3+2|\Delta\lambda|/4}$, согласующееся со следствием импульсного приближения в системе отсчета $P_2 \rightarrow \infty$. Здесь мы имеем случай, когда нулевой порядок по теории возмущений не обеспечивает правильного описания исследуемой закономерности и необходим учёт следующих членов разложения $\hat{T}(z)$ в (8).

Действительно, в работе ⁶ показано, что ведущая асимптотика при $\xi \rightarrow 0$ в системе $\vec{P} = 0$ соответствует диаграммам типа рис. 1, 2 и результаты расчетов согласуются с импульсным приближением в системе $P_2 \rightarrow \infty$.

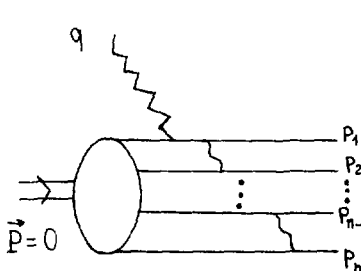


Рис. 1

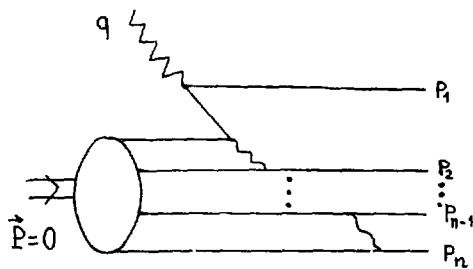


Рис. 2

Для качественного объяснения сказанного заметим, что часть любой диаграммы (типа 1,2), находящаяся справа от фотонной вершины, соответствует рассеянию составляющих с полным импульсом $\vec{q}$. В пределе $|\vec{q}| \rightarrow \infty$ (это есть исследуемая нами область) ядра, соответствующие этим диаграммам, определяются теорией возмущений в системе "бесконечного импульса" $P_z \rightarrow \infty$ с осью z , направленной вдоль вектора $\vec{q}$. Этим же интуитивно объясняется ослабление падения сечений при $\xi \rightarrow 0$ за счет характерного в $P_z \rightarrow \infty$ сокращения больших слагаемых в энергетических знаменателях.

Авторы глубоко благодарны В.А. Матвееву и А.Н. Тавхелидзе за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. Квинихидзе А.Н., Сисакян А.Н., Слепченко Л.А., Тавхелидзе А.Н. ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 3, 478-543.
2. Kogut J., Susskind E.L. - Phys. Reports 8C, No 2, 75-172, 1973.
3. Lepage G.P., Brodsky S.J., Huang T. and Mackenzie P., Particles and Fields - 2, Proc. of the Banff Summer Institute, Banff, Canada 1981, edited by A.Z. Capri and Komal (Plenum, New-York, 1983).
4. Gunion J.F., Nason P. and Blankenbuecher R. - Phys. Rev., 1984, D29, No II, 2491-2511.
5. Квинихидзе А.Н., Матвеев А.В., Хведелидзе А.М. ТМФ, 1987, т. 72, № I, 45-57.
6. Khvedelidze A.M., Kvinikhidze A.N., Sissakian. Preprint JINR E2-87-543, Dubna, 1987.

АРЕАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ В ФИЗИКЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Н.С.Шевокина

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В работах^{/1-7/} были построены арельные модели двух частиц с парным взаимодействием, трех частиц с тройным и парными взаимодействиями и четырех частиц с четверным, тройными и парными взаимодействиями между ними. Эти модели были названы арельными, поскольку для описания различных взаимодействий частиц в них используется понятие меры площади всех вложенных в X_4 поверхностей^{/8/}. Будем говорить, что линия — это одномерная поверхность, а ее площадь равна ее длине. Будем говорить также, что само X_4 вложено в X_4 в виде четырехмерной поверхности и что мера площади области ω_4 четырехмерной поверхности совпадает с мерой объема области ω_4 пространства-времени X_4 .

Арельные модели описывают арельные объекты. Если область задания действия арельного объекта конечна, то будем говорить о пространственно-ограниченном арельном объекте. Если область задания действия бесконечна, то арельный объект будем называть бесконечным.

В работе^{/7/} перечислены и исследованы все возможные в X_4 пространственно-ограниченные арельные объекты. Простейшим таким объектом является материальная точка, т.е. бесструктурная частица. Действие для нее пропорционально длине времениподобной линии между двумя произвольными мгновениями времени. Поэтому материальную точку назовем одномерным арельным объектом. Свободная материальная точка движется по геодезической в X_4 . Исследование свойств пространства-времени, а также кинематики и динамики одной материальной точки составляет значительное содержание теперь уже ставшей классической специальной теории относительности (СТО)^{/9,10,11/}.

Системе из двух релятивистских материальных точек, часть действия которых представима в виде площади конечной открытой области ω_2 времениподобной поверхности с соответствующим коэффициентом пропорциональности, образует двумерный элементарный арельный объект^{/1-4,7/}. Этот объект ограничен в пространстве и представляет собой релятивистскую структурную частицу. Боковыми времениподобными границами области ω_2 служат мировые траектории частиц. Пространственноподобными верхней и нижней границами ω_2 служат отрезки линий, лежащих в пересече-

нии указанной двумерной поверхности и двух гиперповерхностей $t = t_1$ и $t = t_2$ между соответствующими точками траекторий. На жаргоне двумерный эреальный объект известен как струна с массами на концах^{12,13/} или двумерный мешок^{14/}.

Три материальные точки образуют трехмерный элементарный эреальный объект^{5,15/}, если в действии такой системы присутствует слагаемое, описывающее тройное взаимодействие, пропорциональное объему открытой конечной области ω_3 трехмерной временноподобной поверхности. По боковым двумерным граням ω_3 передаются парные взаимодействия. Боковые одномерные грани являются мировыми траекториями частиц. В сечениях $t = t_1$ и $t = t_2$, которые ограничивают ω_3 сверху и снизу, лежат криволинейные треугольники конечных размеров.

Трехмерный эреальный объект можно представить как структурную частицу из трех материальных точек с парными и тройным взаимодействием между ними. Этот же объект можно представить как систему трех взаимодействующих двумерных эреальных объектов. Трехмерные эреальные объекты могут не содержать внутри себя материальных точек, если в действии для них положить массы частиц равными нулю и потребовать выполнение условий гладкости двумерной боковой границы ω_3 .

Четыре материальные точки образуют четырехмерный элементарный объект, если между точками присутствует четверное взаимодействие^{16,7/}. В действии для четырехмерного эреального объекта четверное взаимодействие описывается слагаемым, пропорциональным гиперплощади открытой конечной области ω_4 пространства-времени X_4 . Четверное взаимодействие в эреальной модели в X_4 передает само пространство-время X_4 . Тройные взаимодействия частиц передают боковые трехмерные грани ω_4 , парные взаимодействия частиц передают двумерные грани ω_4 , одномерные боковые грани ω_4 служат траекториями частиц. Сверху и снизу ω_4 ограничено двумя криволинейными тетраэдрами T_1 и T_2 конечного объема. Четырехмерные эреальные объекты, как и трехмерные, могут не содержать внутри себя материальных точек. Чтобы получить такие объекты, в действии для указанной системы четырех материальных точек надо положить массы всех четырех частиц равными нулю и считать боковые границы ω_4 гладкими. Четырехмерные эреальные объекты образуют сложную структурную частицу. Такой объект можно представить как взаимодействие его граничных эреальных объектов: 1) четырех точек; 2) шести двумерных эреальных объектов; 2) четырех трехмерных эреальных объектов.

Пятимерных элементарных эреальных объектов в X_4 не существует. Безусловно, в X_4 можно рассматривать взаимодействия произвольного числа всех возможных в X_4 элементарных эреальных объектов со всеми

допустимыми между ними взаимодействиями. Перечислим основные свойства элементарных арельных объектов в X_4 .

1. Свободные арельные объекты описываются кривой задачей для минимальных времениподобных поверхностей, размерность которой равна размерности арельного объекта.

2. Уравнения для минимальной четырехмерной поверхности в X_4 обрещаются в тождество. Четырехмерный арельный объект свисывается условиями на границе конечной области ω_4 пространства-времени X_4 .

3. В элементарном арельном объекте реализуется взаимодействие всех его граничных арельных объектов. Они не являются свободными. Взаимодействуя между собой, они образуют арельные объекты высших размерностей.

4. Силы, возникающие в процессе взаимодействия частей арельного объекта, удерживают эти части в конечной пространственной области, если константы взаимодействия выбрать должным образом.

5. Арельные объекты размерности 2 и выше образуют структурные пространственно-ограниченные релятивистские протяженные объекты.

6. Арельные объекты размерности 3 и выше могут не содержать внутри себя материальных точек.

7. Все арельные объекты как целое обладают лоренц-инвариантными четырехвектором энергии-импульса, бивектором момента и массой, а также собственной осью времени - релятивистским аналогом мировой траектории центра масс системы классических частиц.

Выше перечислены все возможные в пространстве-времени Пуанкаре-Минковского X_4 пространственно-ограниченные релятивистские протяженные объекты и кратко описаны их свойства, откуда следует, что предлагаемая арельная модель является последовательной релятивистской моделью составного образования, части которого в процессе их взаимодействия заключены в конечной области пространства. Такую модель можно назвать вариантом модели мешков^{/14/}. Известно, что первая релятивистская модель ограниченных в пространстве составных элементарных частиц-адронов, позднее получивших в литературе название модели "дубненских мешков", была предложена П.Н.Боголюбовым в 1967 году^{/16/} (см. также обзор^{/17/}). О дальнейшем развитии модели кварковых мешков и ее современном состоянии смотри обзор^{/14/}. Подчеркнем, что и в модели кварковых мешков составная частица-адрон описывается кривой задачей для системы дифференциальных уравнений, которая следует из минимизации соответствующего функционала действия.

В широко известных работах А.М.Белдине (см., например,^{/18/}) был предложен кумулятивный эффект в физике сильных взаимодействий, который был экспериментально обнаружен в Дубне. В ра-

ботех/19,20/ был дан последовательный релятивистский анализ образования струй адронов. В своих выступлениях и работах А.М.Балдин неоднократно указывал на необходимость построения строго релятивистской модели протяженных объектов и взаимодействия частиц для преодоления ряда трудностей в релятивистской ядерной физике. Изложенная выше ареальная модель пространственно-ограниченных протяженных ареальных объектов в X_4 является строго релятивистской. Она описывает взаимодействие релятивистских материальных бесструктурных частиц и описывает также взаимодействие протяженных ареальных объектов. Эта модель предсказывает существование релятивистских пространственно-ограниченных объектов, не содержащих внутри себя частиц.

Всё сказанное выше можно считать вступлением к построению теории релятивистских пространственно-ограниченных ареальных объектов в произвольном пространстве-времени X_n и с облегчением сказать: "Хоть поздно, а вступление есть"/21/. Слово "релятивистский" здесь используется в широком смысле слова и означает, что X_n является дифференцируемым многообразием, на котором существует глобальная координата времени $t = x^1$, $-\infty < t < \infty$ и что в нем допустимы все преобразования координат

$$\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^1, \dots, x^n), \quad \alpha \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

при условии, что $\tilde{x}^1$ вновь является глобальной координатой времени и что $\frac{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} > 0$. Кроме того, в X_n мы умеем измерять площади/22/ всех нужных нам поверхностей. В частности, X_n может быть многомерным ($n > 4$) плоским пространством-временем Минковского. Рассмотренные ранее ареальные объекты в X_4 являются основой для построения теории ареальных объектов в X_n и придают им некоторую наглядность.

Запишем общий вид действия для m -мерного ареального объекта в X_n ($1 \leq m \leq n$) следующим образом:

$$S_{Q_m} = G_1 \int_{\omega_1} L_1 du^1 + G_2 \int_{\omega_2} L_2 du^1 du^2 + \dots + G_m \int_{\omega_m} L_m du^1 \dots du^m, \quad (2)$$

где через G_i , $i \in \{1, \dots, m\}$ обозначены постоянные i -кратных взаимодействий в ареальном объекте, $G_m \neq 0$, интегралы $J_i = \int_{\omega_i} L_i du^1 \dots du^i$ не зависят от выбора допустимой параметризации области ω_i , а матрические функции/22/ L_i являются плотностями веса $-i$ при преобразованиях переменных интегрирования

$$\tilde{u}^j = \tilde{u}^j(u^1, \dots, u^i) \quad j \in \{1, \dots, i\}. \quad (3)$$

Здесь мы рассматриваем только такой случай, когда

$$L_i = L_i(x, a_1, \dots, a_i), \quad (4)$$

где через $x = \{x^\alpha\}$, $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ обозначена точка i -мерной поверхности

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, \dots, u^i), \quad (5)$$

а через $a_1, \dots, a_i$ обозначена совокупность независимых в каждой точке x поверхностей (5), касательных к ней векторов

$$a_j = \{a_j^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}\}, \quad j \in \{1, \dots, i\}. \quad (6)$$

Через Ω_m обозначена конечная область определения действия (2). Будем называть Ω_m m -призмой событий эвального m -мерного объекта. Ω_m состоит из открытой конечной области ω_m m -мерной времениподобной поверхности и боковой времениподобной границы, равной

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m-1}, \quad (7)$$

между двумя произвольными мгновениями времени $t = t_1$ и $t = t_2$. Пересечения Ω_m с гиперповерхностями $t = t_1$ и $t = t_2$ обозначим ${}_mT_1$ и ${}_mT_2$. Они ограничивают ω_m сверху и снизу. ${}_mT_1$ и ${}_mT_2$ представляют собой пространственные полиэдры с m вершинами, объемы которых конечны. Полная граница $\partial\omega_m$ области ω_m равна

$$\partial\omega_m = {}_mT_1 + {}_mT_2 + \omega_{m-1}.$$

Она, как и положено границе, ориентируема и отделяет внутреннюю часть ω_m времениподобной m -мерной поверхности от ее внешней части.

Величины

$$[L_i]_\alpha = \frac{\partial L_i}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial L_i}{\partial a_j^\alpha}; \quad [F_i]_\alpha = \begin{vmatrix} \frac{\partial L_i}{\partial a_1^\alpha} & \dots & \frac{\partial L_i}{\partial a_i^\alpha} \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^i}{\partial v^i} \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^{i+1}} & \dots & \frac{\partial u^i}{\partial v^{i+1}} \end{vmatrix} \quad (8)$$

$i \in \{1, \dots, m\}$
 $j \in \{1, \dots, i\}$
 $m \in \{1, \dots, n\}$

будем называть ковектором Эйлера области ω_i и ковектором сил девиации для ее границы $\partial\omega_i$ соответственно. В (8) область ω_i записана в виде (5), а ее $(i-1)$ -мерная граница - в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(v^1, \dots, v^{i-1}), \quad u^i = u^i(v^1, v^2, \dots, v^{i-1}). \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что величины (8) при преобразованиях

$$\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^1, \dots, x^n) \quad (10)$$

действительно являются ковекторами в X_n . Без доказательства приведем следующие свойства ковекторов вида (8)

$$[L_i]_\alpha a_j^\alpha = 0, \quad [F_{i+1}]_\alpha a_j^\alpha = 0, \quad (11)$$

где $a_j^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}$, $j \in \{1, \dots, i\}$ — векторы, касательные к ω_i .

Обращая в нуль вариацию действия (2) на Ω_m и всех ее времени-подобных боковых гранях, получим в крестовой форме систему уравнений движения чистейшего эрвального объекта

$$1) G_1[L_1]_\alpha = G_2[F_2]_\alpha, \dots, i) G_i[L_i]_\alpha = G_{i+1}[F_{i+1}]_\alpha, \\ (m-1) G_{m-1}[L_{m-1}]_\alpha = G_m[F_m]_\alpha; m) G_m[L_m]_\alpha = 0. \quad (12)$$

Уравнение m в (12) совпадает с уравнениями для m -мерной минимальной времениподобной поверхности в X_n , а уравнения $2, \dots, (m-1)$ являются крестовыми условиями к области ω_m этой поверхности. Подчеркнем, что система (12) имеет смысл только на m -призме событий Ω_m , которая может служить образом m -мерного пространственно-ограниченного эрвального объекта.

Если к тому же действие (2) инвариантно относительно группы преобразований над переменными x и a_i , то по теореме Нетер получаем сохраняющиеся величины, которые не зависят от выбора пространственного сечения π_T и характеризуют эрвальный объект как целое. Если X_n — плоское пространство-время, то такими сохраняющимися величинами будут лоренц-инвариантные n -вектор энергии-импульса $P = \{P^\alpha\}$, бивектор момента $M^{\alpha\beta}$ и масса эрвального объекта, равная длине n -вектора P . Для любого свободного эрвального объекта в плоском X_n можно построить собственную ось времени $\sqrt{2}$ согласно формулам

$$x^\alpha(P^\beta P_\beta) - P^\alpha(x^\beta P_\beta) = M^{\alpha\beta} P_\beta,$$

которая является мировой траекторией центра масс эрвального объекта в X_n .

В X_n существует n видов эрвальных объектов. Все они описываются системой уравнений (12) для различных m . При $m=1$ имеем материальную точку, при $m=n$ имеем n -мерный эрвальный объект. В этом случае $[L_n]_\alpha \equiv 0$. В X_n не существует $(n+1)$ -мерных эрвальных объектов.

Отметим, что при всех $m > 1$ система уравнений (I2) описывает динамику всех частей арееального объекта. Так, например, система (I2) описывает динамику i -мерных ($1 \leq i \leq m-1$) граничных объектов числом C_m^i со всеми взаимодействиями между ними от $(i+1)$ -кратных до m -кратных. Граничные i -мерные объекты не являются свободными. На них действуют силы давления, пропорциональные $[F_{i,n}]_\alpha$, которые и объединяют их в $(i+1)$ -мерный арееальный объект.

Уравнения I в (I2) описывают динамику точечных масс внутри арееального объекта. Для i -й частицы G_i равняется ее массе m_i . Если положить все $m_i = 0$, то получаем m -мерный арееальный объект без точечных масс. Далее, обращая в нуль последовательно все члены ряда $G_1, G_2, \dots, G_{m-2}$, получим $(m-2)$ видов различных арееальных объектов, не содержащих внутри себя точечных частиц. Все арееальные объекты, начиная с двумерных, имеют внутреннюю структуру.

Вернемся опять к системе (I2). Уравнения I в ней задают движение точечных масс под действием сил, возникающих в процессе взаимодействия. Все уравнения 2 - $(m-1)$ аналогичны по форме и описывают некоторые поверхности размерности от 2 до $(m-1)$, вложенные в X_n , наконец, уравнения m описывают минимальную поверхность m измерений, вложенную в X_n . И только все вместе уравнения системы (I2) описывают арееальный объект как целое. Если X_n - плоское пространство-время, то вопрос о вложении в него поверхностей хорошо изучен (см. например ^{/8/}) и встает вопрос о их физическом истолковании. В работах ^{/23,24/} было показано, что в пространстве-времени Минковского X_4 минимальные двумерные поверхности можно представить как решения уравнений Борна-Инфельда нелинейной электродинамики, зависящее от двух переменных. В них впервые точно проквантованы нелинейные полевые уравнения и построена алгебра полевых операторов, которая теперь известна как алгебра Черникова-Барбашова-Вирасоро ^{/13/}. В работе ^{/25/} был найден класс точных решений уравнений Борна-Инфельда в плоском X_n в виде минимальных поверхностей специального вида различных размерностей. Известно, что поля тяготения Эйнштейна ^{/8/} можно представить как поверхности, вложенные в X_n . В общем случае эти поверхности не будут минимальными. Возможно, что и другие физические поля можно представить в виде времениподобных поверхностей в X_n . С большой степенью вероятности можно предположить, что в плоском пространстве-времени X_n в арееальной модели взаимодействия m релятивистских частиц носителем i -кратного ($2 \leq i \leq m$) взаимодействия является поле, которое представимо i -мерной времениподобной поверхностью. Вопрос об однозначном определении физической природы этого поля является сложным и одним из самых острых в арееальной модели. Можно сказать

сразу же, что все поля, вложенные как искривленные времениподобные поверхности в пространство-время, имеют локальную калибровочную инвариантность^{/26/}.

Пусть теперь пространство-время X_N ($N > 4$) имеет структуру, более сложную, чем плоское. Действие для любого поля, записанное в однородной форме, порождает пространство-время X_M , где M определяется числом компонент полевой функции ψ , если лагранжиан поля зависит только от первых производных $\partial_\mu \psi_A$. Пространство X_M может иметь и не полностью метрическую природу. Уравнение поля (M для разных полей, вообще говоря, имеет разное значение) определяет в своем X_M минимальную поверхность. Чтобы построить единое для всех полей пространство-время X_N , необходимо записать все известные сейчас физические поля в единой форме. Чтобы рассмотреть в таком X_N m -мерный эреальный объект ($m \leq N$), необходимо в том же виде записать уравнения системы (12). В этом случае m -мерный пространственно-ограниченный эреальный объект будет полностью погружен в X_N и будут однозначно определены поля, которые переносят все возможные взаимодействия в нем. Изучение метрических свойств X_N и определение в нем связности позволит найти все физические величины, которые можно измерять в X_N , и построить общую теорию калибровочных полей.

Такую общую задачу в теории эреальных объектов позволяют решить универсальные нелинейные уравнения Федорова^{/27,28/}, которые имеют вид

$$(\alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^0)_{AB} \psi_B(x) + \Lambda_{ABC} \psi_B(x) \psi_C(x) = 0, \quad (13)$$

где α^μ и α^0 — квадратные, а Λ — кубическая матрица с постоянными коэффициентами, $\mu = 1, 2, 3, 4$, $A, B, C = 1, \dots, N$, ψ — полевая функция с компонентами $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$. Это уравнение следует из вариационной задачи для функционала вида

$$S = \int \psi(x) \left\{ \frac{1}{2} [\alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^0] \psi(x) + \frac{1}{3} \Lambda \psi(x) \psi(x) \right\} d^4x, \quad (14)$$

и к нему приводятся все известные в современной физике классические полевые уравнения, в том числе и уравнения системы (12). Пространство-время X_{4+N} , порожденное функционалом (14), имеет наибольшую общность для решения многих задач теоретической физики. Пространство-время X_{4+N} содержит все эреальные пространственно-ограниченные объекты. Уравнение (13) напоминает по форме нелинейное спинорное уравнение Гейзенберга-Иваново и дифференциальное уравнение в кривой задаче в модели дубинских мячков. Сейчас уравнения Федорова интенсивно исследуются физиками и математиками. Надо думать, это приведет к успехам и в теории эреальных объектов.

Л и т е р а т у р а

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. Пример релятивистской задачи двух тел. I. Кривая задача для минимальной поверхности.-ТМФ, 1980, т. 41, № 1, с. 59-70.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. Пример релятивистской задачи двух тел. II. Уравнения движения.-ТМФ, 1980, т. 43, № 3, с. 356-366.
3. Шавохина Н.С. Системы уравнений с отклоняющимся аргументом в релятивистской задаче двух тел. Препринт ОИЯИ P2-80-76, Дубна, 1980.
4. Шавохина Н.С. Релятивистская задача двух одинаковых тел с постоянной по величине силой притяжения.-ДАН СССР, 1983, т. 265, № 4, с. 852-856.
5. Шавохина Н.С. Вариационный метод описания системы трех кварков. Препринт ОИЯИ P2-84-67, Дубна, 1984. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Под редакцией К.П.Станковича. М.: Энергоатомиздат. 1985. Вып. 15, с. 189-196.
6. Шавохина Н.С. Четверное взаимодействие частиц в релятивистской механике. Сообщения ОИЯИ P2-87-391, Дубна, 1987.
7. Шавохина Н.С. Ареальные модели релятивистских пространственно-ограниченных объектов. Препринт ОИЯИ P2-87-716, Дубна, 1987.
8. Эйзенхарт Л.Риманова геометрия. М.: ГИИЛ, 1948, 316 с.
9. Пуанкаре Л. О динамике электрона. Избранные труды. Наука, М., 1974, с. 429-432.
10. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, М.: Наука, 1966, т. I.
11. Минковский Г. Пространство и время. Сб.: Новые идеи в математике. У.С.П.Б. 1914, с. 1-21.
12. Chodos A, and Thorn C.B. Making the massless string massive. -Nucl. Phys., 1974, Vol. 72, N3, p. 509-522.
13. Барбозов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в фазе адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987, 176 с.
14. Боголюбов П.Н., Дорохов А.Б. Современное состояние модели кварковых мешков.-ЭЧАЯ, т. 18, № 5, 1987, стр. 917-959.
15. Шавохина Н.С. Тройное взаимодействие частиц в мире Галилея-Ньютона. Сообщение ОИЯИ P2-86-636, Дубна, 1986, II с.
16. Боголюбов П.Н. Препринт ОИЯИ, P2-3115, Дубна, 1967.
17. Боголюбов П.Н. Уравнения для связанных состояний (кварков).-ЭЧАЯ, 1972, т. 3, № 1, с. 144-174.
18. Беддин А.М. Физике релятивистских ядер.-ЭЧАЯ, 1977, т. 8, № 3, с. 429-477.

19. Балдин А.М., Диденко Л.А. Релятивистский инвариантный анализ корреляционных явлений в процессах множественного рождения. Краткие сообщения ОИЯИ, 1985, № 8-85, с. 5-17.
20. Балдин А.М. и др. Струм адронов в глубоконеупругих $\sqrt{N}$ -взаимодействиях и универсальность их характеристик в пространстве 4-мерных относительных скоростей. Краткие сообщения ОИЯИ, 1987, №1(21)-87, Дубна, с.17-25.
21. Пушкин А.С. Евгений Онегин. Соч. в 3-х томах. М.: ХЛ, 1985, т.2, с.314.
22. Кебанов Н.И. Дифференциально-геометрические методы в вариационном исчислении. Итоги науки. Алгебра. Геометрия. Топология. 1968. ВИНТИ, М., 1970, с. 193-224.
23. Барбашов Б.М., Черников Н.А. Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа Борне-Инфельда.-ХЭТФ, 1965, 50, вып. 5, с. 1296-1308.
24. Барбашов Б.М., Черников Н.А. Рассеяние двух плоских электромагнитных волн в нелинейной электродинамике Борне-Инфельда. Препринт ОИЯИ Р-2642, Дубна, 1966, 14 с.
25. Шавокине Н.С. Решение уравнений Борне-Инфельда в виде минимальных поверхностей. Сообщение ОИЯИ Р2-86-485, Дубна, 1986, 6 с.
26. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1980, с.238.
27. Федоров Ф.И. Уравнение первого порядка для гравитационного поля. -ДАН, СССР, 1968, т. 179, № 4, с. 802-805.
28. Богун Л.А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. Минск: Наука и техника, 1981, 390 с.

МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Э.Д.Каграманов, Р.М.Мир-Насимов, Ш.М.Нагиев
Объединенный институт ядерных исследований,
Д у б н а

Релятивистское конфигурационное X -представление^{/1/} вводится с помощью разложения волновой функции в импульсном пространстве $\Psi(p)$ по матричным элементам неприводимых унитарных представлений группы движений P -пространства $\{P, X\}$:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\Omega_P \{P, X\} \Psi(P), \quad (1)$$

где

$$\{P, X\} = (P_0 - P)^{-ix} = e^{ixX}, \quad (2)$$

$$P_0 = \cosh X, \quad (3)$$

$$P = \sinh X,$$

$X = \operatorname{arctanh}(P_0 + P)$ - бистрота.

В одномерном случае мы имеем дело с гиперболой

$$P_0^2 - P^2 = m^2. \quad (4)$$

В дальнейшем мы пользуемся системой единиц $\hbar = c = m = 1$.

В X -представлении операторы энергии и импульса являются разностными операторами

$$\begin{aligned} H_0 e^{ixX} &= \cosh i \frac{d}{dx} e^{ixX} = \cosh X \cdot e^{ixX}, \\ \hat{P} e^{ixX} &= -\sinh i \frac{d}{dx} e^{ixX} = \sinh X e^{ixX}. \end{aligned} \quad (5)$$

Удобно перейти к половинным гиперболическим углам^{/4/}. При этом релятивистская энергия покоя mc^2 отделяется от кинетической энергии.

$$k_q = 2 \operatorname{sh} \frac{x_q}{2}, \quad q_0 = 1 + e_q = 1 + \frac{k_q^2}{2} \quad (6)$$

$$\hat{k} = -2 \operatorname{sh} \frac{i}{2} \frac{d}{dx}, \quad H_0 = 1 + h_0 = 1 + \frac{\hat{k}^2}{2}.$$

В результате релятивистское (квазипотенциальное) уравнение Шредингера запишется в виде

$$(h_0 + V(x) - e_q) \Psi_q(x) = (h - e_q) \Psi(x) = 0. \quad (7)$$

Мы требуем, чтобы релятивистский линейный осциллятор обладал следующими свойствами: 1) точная решаемость; 2) существование "нерелятивистской" динамической симметрии $SU(1,1)$; 3) существование симметрии между описанием в x - и p -представлении; 4) правильный нерелятивистский предел.

Построим метод факторизации для разностного уравнения Шредингера/5,6/. С этой целью, предполагая, что волновая функция основного состояния имеет вид $\Psi_0 = e^{-P(x)}$, запишем операторы

$$M^{\pm} = \mp e^{P(x)} \frac{i \alpha(x)}{\sqrt{2}} \hat{k} e^{-P(x)} = \pm \sqrt{2} i \alpha(x) e^{P(x)} \operatorname{sh} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} e^{-P(x)} \quad (8)$$

и рассмотрим выражение

$$M^+ e^{-a(x)} M^- - M^- e^{a(x)} M^+ = [M^+, M^-]_P =$$

$$= 2 \alpha(x) \{ \alpha_c(x) \cdot \operatorname{sh}(p_c - p) \cdot \operatorname{ch} p_s + \alpha_s(x) \operatorname{ch}(p_c - p) \cdot \operatorname{sh} p_s \}, \quad (9)$$

где

$$a(x) = 2 \operatorname{ch} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} P(x) - 2 P(x)$$

$$p_c = \operatorname{ch} i \frac{d}{dx} P(x) \quad p_s = \operatorname{sh} i \frac{d}{dx} P(x)$$

$$\alpha_c = \operatorname{ch} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} \alpha(x) \quad \alpha_s = \operatorname{sh} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} \alpha(x).$$

В нерелятивистском пределе (9) принимает вид (см./5,6/):

$$[a^+, a^-] = - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (10)$$

В настоящей работе мы не будем изучать разностный метод факторизации в общем виде, а сосредоточимся на случае релятивистского линейного осциллятора. Напомним, что для нерелятивистского линейного осциллятора выполняются соотношения

$$[a^+, a^-] = \text{const} = -\omega, \quad p(x) = \frac{\omega x^2}{2}, \quad (\text{II})$$

где $a^\pm$ - обычные операторы рождения и уничтожения

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \frac{d}{dx} + \omega x \right).$$

В релятивистском случае будем искать операторы M^+ , M^- , удовлетворяющие соотношению

$$[M^+, M^-]_p = \text{const}. \quad (\text{I2})$$

Легко видеть, что и в этом случае следует положить $p(x) = \frac{\omega x^2}{2}$. При этом $a(x) = -\frac{\omega}{4}$, $d(x) = 1/\cos \frac{\omega x}{2}$.

В результате будем иметь

$$\begin{aligned} M^\pm &= \pm i\sqrt{2} e^{\pm \frac{i\omega}{2} x} \left(\text{sh} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} \mp i \text{tg} \frac{\omega x}{2} \cdot \text{ch} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} \right) = \\ &= \pm \frac{i\sqrt{2}}{\cos \frac{\omega x}{2}} \text{sh} \frac{i}{2} \left(\frac{d}{dx} \mp \omega x \right) = \frac{\mp i\sqrt{2}}{\cos \frac{\omega x}{2}} \text{sh} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} a^\pm \right) = \\ &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega x^2}{2}} \hat{\mathcal{D}} e^{\frac{\omega x^2}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{I3})$$

где

$$\hat{\mathcal{D}} = -\frac{2i}{\cos \frac{\omega x}{2}} \text{sh} \frac{i}{2} \frac{d}{dx}.$$

Для операторов M^+ и M^- выполняется соотношение

$$\begin{aligned} [M^+, M^-]_\omega &= e^{\frac{\omega}{4}} M^+ M^- - e^{-\frac{\omega}{4}} M^- M^+ = \\ &= \text{ch} \frac{\omega}{4} [M^+, M^-] + \text{sh} \frac{\omega}{4} \{M^+, M^-\} = -4 \text{sh} \frac{\omega}{4}. \end{aligned} \quad (\text{I4})$$

Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \{M^+, M^-\}_\omega = \frac{1}{2} \{e^{\frac{\omega}{4}} M^+ M^- + e^{-\frac{\omega}{4}} M^- M^+\} = \\ &= 2 \left(\frac{1}{\cos \frac{\omega x}{2}} \text{ch} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} \right)^2 - 2 \text{ch} \frac{\omega}{4} = e^{\frac{\omega}{4}} M^+ M^- + e_0, \end{aligned} \quad (\text{I5})$$

где

$$e_0 = 2 \operatorname{sh} \frac{\omega}{4}. \quad (16)$$

Из выражений (14) и (15) следует

$$\begin{aligned} [M^+, h]_{\omega} &= -2 \operatorname{sh} \frac{\omega}{2} \cdot M^+ \\ [h, M^-]_{\omega} &= -2 \operatorname{sh} \frac{\omega}{2} \cdot M^-. \end{aligned} \quad (17)$$

Откуда следует, что операторы M^+ и M^- повышают и понижают значения энергии

$$h \Psi_{n \pm 1} = h M^{\pm} \Psi_n = e_{n \pm 1} \Psi_{n \pm 1}, \quad (18)$$

причем спектр энергий задается формулой

$$e_n = 2 \left(e^{\frac{2n+1}{4}\omega} - \operatorname{ch} \frac{\omega}{4} \right). \quad (19)$$

Волновые функции будем искать в виде

$$\Psi_n(x) = e^{-\frac{\omega x^2}{2}} \cdot h_n. \quad (20)$$

Величины $h_n(x)$ (релятивистские полиномы Эрмита) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\hat{\mathcal{D}} h_n = 8 e^{\frac{n\omega}{4}} \operatorname{sh} \frac{n\omega}{4} \cdot h_{n-1}, \quad (21)$$

$$\Pi^+ h_n = h_{n+1}, \quad h_n = (\Pi^+)^n h_0, \quad (22)$$

$$\Pi^+ = -e^{\frac{\omega x^2}{2}} \hat{\mathcal{D}} e^{-\frac{\omega x^2}{2}} = \quad (23)$$

$$= \frac{2ie^{\frac{\omega x^2}{2}}}{\cos \frac{\omega x}{2}} \left[\cos \omega x \cdot \operatorname{sh} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} - i \sin \omega x \cdot \operatorname{ch} \frac{i}{2} \frac{d}{dx} \right].$$

Для низших значений n имеем

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \quad h_1 = 4e^{\frac{\omega}{4}} \sinh \frac{\omega x}{2}, \\ h_2 &= 8e^{\frac{\omega}{2}} \left[2e^{\frac{\omega}{4}} \sinh^2 \frac{\omega x}{2} - \sinh \frac{\omega}{4} \right], \\ h_3 &= 32e^{\frac{3\omega}{2}} \sinh \frac{\omega x}{2} \left[2 \sinh^2 \frac{\omega x}{2} + \left(\cosh \frac{\omega}{4} \cdot e^{-\frac{3\omega}{4}} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя соотношение (22) и тождество

$$h_0(x) \equiv 1 = \frac{e^{\omega x^2}}{\sqrt{\pi \omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{\omega}} e^{2ixt} dt,$$

получаем интегральное представление для $h_n(x)$:

$$e^{-\omega x^2} h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \omega}} \left(e^{-\frac{t^2}{\omega}} \frac{2}{\sqrt{\omega}} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} T_n(t) e^{2ixt} e^{-\frac{t^2}{\omega}} dt, \quad (25)$$

где $T_n(t)$ — полиномы, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\sinh t \cdot T_n(t) e^{-\frac{t^2}{\omega}} = \cosh \frac{\omega}{4} \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{t^2}{\omega}} T_{n+1}(t) \right). \quad (26)$$

В нерелятивистском пределе $T_n(t) \rightarrow t^n$ и мы приходим к интегральному представлению для полиномов Эрмита.

Введем операторы

$$\begin{aligned} L^+ &= - \frac{1}{(32 \sinh^2 \frac{\omega}{4} \cdot \cosh \frac{\omega}{4})^{1/2}} (M^+ M^-)^{1/2} M^+, \\ L^- &= \frac{1}{(32 \sinh^2 \frac{\omega}{4} \cdot \cosh \frac{\omega}{4})^{1/2}} M^- (M^+ M^-)^{1/2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$L^3 = \frac{1}{2 \sinh \frac{\omega}{2}} \cdot h.$$

Легко видеть, что эти операторы удовлетворяют соотношениям "деформированной алгебры Ли" $SU(1,1)$:

$$\begin{aligned} [L^+, L^-]_{2\omega} &= L^3, \\ [L^+, L^3]_{\omega} &= -L^+, \quad [L^3, L^-]_{\omega} = -L^-. \end{aligned} \quad (28)$$

Напомним, что значок " ω " у коммутатора означает взятие определенной комбинации коммутатора и антикоммутатора (см. формулы (I4), (I7)). Для этих величин вместо обычного соотношения симметрии и тождества Якоби выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [x, y]_{\omega} &= -[y, x]_{-\omega}, \\ [[x, y]_{\omega}, z]_{\omega} + [[y, z]_{\omega}, x]_{\omega} + [[z, x]_{\omega}, y]_{\omega} + \\ + [[x, y]_{\omega}, z]_{-\omega} + [[y, z]_{\omega}, x]_{-\omega} + [[z, x]_{\omega}, y]_{-\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadyshchevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. - *Nuovo Cimento*, 1968, 55A, No.2, 233-257.
2. Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М., Нагиев Ш.М. - *ТМФ*, 1980, 44, № 1, 47-62.
3. Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М. - *Краткие сообщения ОИЯИ*, Дубна, 1985, № II-85, 38-44.
4. Черников Н.А. - В кн.: *Гравитация и теория относительности*. Изд.-во Казанского университета, Казань, 1965.
5. Infeld L., Hull T.E. - *Rev. Mod. Phys.*, 1951, 23, No 1, 21-68.
6. Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В. - *ТМФ*, 1984, 61, № 2, 183-199.

ПОКОЛЕНИЯ ЛЕПТОНОВ И КВАРКОВ И АЛГЕБРА ПОСТОКТОНИОНОВ

А.Б. Говорков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В последние годы в физике элементарных частиц стали популярными представления о последовательно появляющихся поколениях фундаментальных частиц-лептонов и кварков. В настоящее время известно два целиком заполненных поколения и почти заполненное третье:

$$\nu_e, e, \mu, d; \quad \nu_\mu, \mu, s, s; \quad \nu_\tau, \tau, t?, b.$$

Замечательным свойством последовательности этих поколений является точная повторяемость (по крайней мере известных) свойств входящих в них лептонов и кварков: копирование электрических зарядов (0, -1, 2/3, -1/3) и электрослабых взаимодействий (с учётом смешивания кварков из разных поколений), одинаковость цветовых свойств кварков и универсальность и совершенство цветовой $SV(3)_c$ -симметрии. Единственное пока что известное различие заключается в увеличении масс заряженных (а возможно и нейтрино) частиц.

Для описания поколений предлагались различные теоретические схемы, основанные на введении калибровочных "фамильных" групп, когда собственным значениям одного из генераторов сопоставлялись номера поколений.

В данном сообщении предлагается сопоставить последовательному появлению поколений лептонов и кварков схему постоктонионов, получающихся применением процедуры Кэли - Диксона.

Гурсей /1/ (см. также /2/) первым предложил описывать лептоны и кварки с помощью октонионов. Октонионы можно понимать как совокупность комплексных скаляра и вектора, записанных в виде столбца

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vec{a} \end{bmatrix} \quad (1)$$

и подчиняющихся следующему правилу умножения^{х)}:

$$\alpha \ell = \left[\frac{a_0}{\alpha} \right] \left[\frac{\ell_0}{\ell} \right] - \left[\frac{a_+ \ell_+}{\alpha} - \frac{\alpha_- \ell_-^*}{\alpha} + \frac{\alpha_-^* \ell_-}{\alpha} \right] \quad (2)$$

Гюрсей предложил описывать совокупность одного лептона и одного цветного кварка одним дираковским октонионным полем (для краткости будем называть его "октополем"), сопоставляя скалярной части - лептон, а компонентам вектора - цветные компоненты кварков

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \ell(x) \\ \vec{q}(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Группой автоморфизмов октонионов является исключительная группа

G_2 (14 параметров, ранг 2). Она содержит преобразования, смешивающие скалярную и векторную части октониона, и при переходе к калибровочно-инвариантной G_2 -симметрии, следовательно, подразумевает лептон-кварковые переходы. Её подгруппой является $SU(3)$, преобразующая между собой лишь компоненты вектора, т.е. цветные компоненты кварка. Группа автоморфизмов G_2 должна быть нарушена до своей цветовой подгруппы $SU(3)_c$. Такое нарушение можно организовать с помощью механизма Хиггса. Для этого наряду с дираковским октополем предполагается существование скалярного октополя

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \vec{\phi}(x) \end{bmatrix} \quad (4)$$

гамильтониан которого имеет спонтанно-нарушенный вид. Используя свободу калибровки, можно исключить цветные компоненты $\vec{\phi}$, а поле ϕ_0 превратить в чисто мнимое. В такой калибровке возникает единственный массивный скалярный хиггсовский мезон, лептон-кварки приобретают массу, а глюоны остаются безмассовыми и, следовательно, цветовая $SU(3)_c$ -симметрия - ненарушенной.

Естественно расширить эту конструкцию таким образом, чтобы она включала большее число лептонов и кварков^{/4/}. Для этого перейдем от октонионов к диоктонионам, изображаемым в виде

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{\alpha} & \frac{A_-}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (5)$$

х) Аналогичное правило умножения октонионов использовалось недавно де Альфаро, Фубини и Фурланом^{/3/} для описания инстантонов в 8-мерном пространстве.

и подчиняющихся правилу умножения^{х)}

$$a\bar{b} = \begin{bmatrix} a_0 & A_0 \\ \bar{a} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_0 & B_0 \\ \bar{b} & \bar{B} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 \bar{b}_0 - \bar{a} \cdot \bar{b}^* - A_0 B_0^* - \bar{A} \cdot \bar{B}^* & a_0 B_0 - \bar{a}^* \cdot \bar{B} + A_0 \bar{b}_0^* + \bar{A} \cdot \bar{b}^* \\ a_0 \bar{b} + \bar{a} \bar{b}_0^* + \bar{a}^* \cdot \bar{b}^* & a_0^* \bar{B} + \bar{a} B_0 - \bar{a}^* \cdot \bar{B}^* \\ + A_0^* \bar{B} - \bar{A} B_0^* - \bar{A}^* \cdot \bar{B}^* & + \bar{A} \bar{b}_0 - A_0 \bar{b} - \bar{A}^* \cdot \bar{b}^* \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Теперь диоктополю можно сопоставить целое поколение

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \nu(x) & e(x) \\ \bar{u}(x) & \bar{d}(x) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Замечательным свойством диоктонионов является то, что группой их автоморфизмов вновь является G_2 , причем преобразования под-
вергаются лишь компоненты одного и того же столбца. Спонтанное на-
рушение G_2 предполагается происходящим за счет скалярного диокто-
поля, которое записывается теперь в виде повторения одного и того
же столбца

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_0(x) & \phi_0(x) \\ \bar{\phi}(x) & \bar{\phi}(x) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Таким образом, универсальность и совершенство цветовой симметрии
 $SU(3)_c$ объясняется тем, что спонтанно-нарушенная группа G_2 -ав-
томорфизмов одна и та же для двух столбцов диоктониона.

Калибровочная $SU(2)_L \times U(1)$ - симметрия электрослабых вза-
имодействий связывает (левые) компоненты октополя из разных лептон-
кварковых столбцов. Как обычно, её дублетами являются (ν_L, e_L)
и $(\bar{u}_L, \bar{d}_L)$, а синглетами e_R , $\bar{u}_R$, $\bar{d}_R$. Для того чтобы
спонтанно нарушить эту симметрию, необходимо предположить наличие
ещё одного скалярного хиггсовского диоктополя

$$\xi(x) = \begin{bmatrix} \xi_0(x) & \bar{\xi}_0^-(x) \\ \bar{\xi}(x) & \bar{\xi}_0^-(x) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Используя G_2 -инвариантность, можно выбрать калибровку, в кото-
рой векторные компоненты $\bar{\xi}$ и $\bar{\xi}_0^-$ будут отсутствовать. Однако
она может не совпадать с калибровкой, выбранной ранее для устранения
поля $\bar{\phi}$. При переходе к последней у поля $\xi(x)$ вновь могут возник-
нуть цветные компоненты, пропорциональные параметрам перехода $\bar{y}$:

$$\bar{\xi} = i\bar{y}(\xi_0 - \xi_0^*), \quad \bar{\xi}_0^- = i\bar{y}(\bar{\xi}_0 - \bar{\xi}_0^*). \quad (10)$$

^{х)} Диоктонионы некоммутативны, неассоциативны и неальтернативны, но
сохраняют свойство гибкости, как и все последующие постоктонионы.

Но теперь можно воспользоваться $SU(2)_L \times U(1)$ -калибровочной инвариантностью и, как обычно, устранить компоненту Σ_0^- , а компоненту ξ_0 сделать вещественной. Тогда оба приведенных выражения обратятся в нуль, а поле $\xi(\infty)$ будет содержать лишь одну вещественную компоненту $\xi_0(\infty)$, т.е. превратится из диоктополя в обычное поле. В результате мы приходим к обычной теории Глэшоу - Вайнберга - Салама.

Совершая следующий шаг, мы приходим к дидиоктонионам^{x)}, с помощью которых мы можем описать уже два поколения лептонов и кварков

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \nu_e(x) & e(x) & \nu_\mu(x) & \mu(x) \\ \bar{u}(x) & \bar{d}(x) & c(x) & s(x) \end{bmatrix}. \quad (II)$$

Совершив же следующий шаг, мы придем сразу к четырем поколениям. Поскольку в настоящий момент есть все основания считать существование трех поколений бесспорным (хотя вопрос об обнаружении t -кварка все ещё не решен), можно сказать, что изложенная процедура сопоставления лептонов и кварков с процессом удвоения постоктонионов предсказывает существование и четвертого поколения. Следующий же шаг привел бы к появлению сразу четырех новых поколений, и продолжение этого процесса должно было бы привести к катастрофически быстрому росту числа поколений 2^n , так же, как это произошло с числом зерен на шахматной доске в известной легенде об изобретателе шахмат. Если массы частиц при этом заметно возрастают от поколения к поколению, то мы довольно быстро доберемся до максимона Маркова.

Замечательным свойством всех получающихся таким путем постоктонионов является то, что группой их автоморфизмов является одна и та же группа $G_2 / 5/$, а будучи спонтанно нарушенной, она приводит к одной и той же цветовой симметрии всех кварков $SU(3)_c$!

Следует подчеркнуть, что в данной схеме фундаментальными предполагаются лишь дираковское лептон-кварковое и хиггсовское скалярное постоктополя, а калибровочные векторные поля не могут быть представлены в виде одного постоктополя, но требуют для своей формулировки выделения отдельных проекций постоктонионов.

В слабые взаимодействия входят комбинации отдельно чётных и отдельно нечётных столбцов лептон-кваркового постоктополя, получающиеся путем унитарного преобразования^{xx)}. По этой причине все они

^{x)} Из-за того, что правило умножения дидиоктонионов довольно длинно, здесь оно не приводится.

^{xx)} На самом деле, как известно, смешивать надо либо чётные, либо нечётные столбцы, так как одно из таких смешиваний может быть включено в другое с помощью всегда допустимого унитарного преобразования.

должны, в силу закона сохранения заряда, иметь одинаковые заряды. Однако природа такого смешивания и, соответственно, значения его параметров остаются пока что невыясненными, как и природа возникновения масс у фермионов.

Интересная возможность имеется в данной схеме для интерпретации майорановских нейтрино. Если мы будем рассматривать лишь собственно октонионы (постоктонионы), то их скалярная (первая) компонента должна быть чисто мнимой. Это означает, что поле $\psi_e(x)$ должно быть майорановским, тогда как остальным нейтрино $\psi_\mu(x), \psi_\tau(x)$ должны соответствовать дираковские поля. При нулевой массе майорановский спинор эквивалентен вейлевскому, например, левому спинору. Очевидно, такое вейлевское нейтрино может смешиваться с другими, также только вейлевскими (левыми) нейтрино.

Отметим, что собственно октополя, как и все постоктополя, удовлетворяют тринейным паракмутационным соотношениям Грина и являются неассоциативными параполями. Мы, однако, видели, что для формулировки калибровочных теорий в рамках таких параполей нам приходится выделять их отдельные компоненты, и в этом смысле такие теории не являются параполевыми в собственном смысле. Последовательной параполевой теорией является теория кватернионных полей ("кватерполей"), в которой калибровочные поля также формулируются в виде кватерполей^{/6/}. Однако группой автоморфизмов кватернионов является лишь $SO(3)$ -симметрия, и, кроме того, дираковское (точнее, майорановское) собственное кватерполе содержит лишь (псевдо)кварковую часть и не содержит лептонов вообще. Возможно, такая теория окажется подходящей для описания составных моделей лептонов и кварков типа теории пресонов.

Литература

1. Gurnsey F. In.: Proc. Johns Hopkins Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory, Johns Hopkins Univ., 1974, p. 15.
2. Casalbuoni R., Domokos C., Kovesi - Domokos S. - Nuovo Cimento, 1976, 31A, p. 423.
3. de Alfaro V., Fubini S., Furlan G. - Prog. Theor. Phys., Suppl., 1986, No 86, p. 274; Fubini S., Nicolai H. - Phys. Lett., 1985, 155B, p. 369.
4. Говорков А.Б. Краткие сообщения ОИЯИ № 7-85, Дубна, 1985, с. 17.
5. Schaefer R. D. - Amer. J. Math. 1954, 76, p. 435.
6. Говорков А.Б. В сб.: Кварки-82. ИГи АН СССР, Москва, 1983, с. 20; ТМФ, 1986, 68, 381; 69, 69.



ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО. РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

А.С. Гальперин, Е.А. Иванов, В.И. Огиевский, Е.С. Сокачев
Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна

1. В 1984 году было введено гармоническое суперпространство для реализации расширенной $N = 2$ суперсимметрии вне массовой оболочки на языке суперполей, свободных от связей^{/1/}. Такая реализация необходима с самых различных точек зрения: и для эффективных доказательств конечности суперсимметричных моделей, и для анализа спонтанного нарушения суперсимметрии (по известным теоремам вакуумные средние приобретают вспомогательные поля, существенные именно вне массовой оболочки), и так далее, вообще в таком виде теория записывается проще и изящнее, ее можно охватить одним взглядом.

На предыдущем совещании в Алуште в 1984 году было сообщено о первых шагах применения гармонического суперпространства^{/2/}. Настоящий доклад посвящен дальнейшим продвижениям в рамках этого подхода, достигнутым за прошедшие три года нашей группой, состоящей из А.Гальперина, Е.Иванова, С.Калицина, Е.Сокачева и докладчика, а также другими исследователями, включившимися в эту тематику.

2. Напомним основные моменты. Алгебра N -расширенной суперсимметрии с определяющим соотношением ($i, j = 1, \dots, N$)

$$\{Q_\alpha^i, \bar{Q}_{\dot{\alpha}j}\} = 2\delta_j^i P_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (1)$$

в качестве группы автоморфизмов имеет группу $SU(N)$. В (1) $Q_\alpha^i, \bar{Q}_{\dot{\alpha}j}$ — спинорные генераторы суперсдвигов, $P_{\alpha\dot{\alpha}}$ — генератор сдвига в двухкомпонентном спинорном формализме ($\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$). Как хорошо известно, эта алгебра легко реализуется в стандартном суперпространстве

$$R^{4|4N} = \{x^m, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}j}\}. \quad (2)$$

Это суперпространство и его аналитическое подпространство — киральное суперпространство

$$\{x^m, \theta^{i\alpha}, \bar{\theta}^{i\dot{\alpha}}, u_i^{\pm}\}. \quad (8)$$

Удобно сделать замену координат и перейти к

$$C^{4/2N} = \{x^m, \theta_i^{\alpha}\} \quad (3)$$

прекрасно работают в простейшем случае $N=1$. Однако, начиная с $N=2$, возникают трудности, долгое время казавшиеся непреодолимыми. На суперполя приходится налагать связи, необходимые для того, чтобы они описывали нужные физические мультиплеты. Эти связи, однако, оказываются чересчур ограничительными. Они не только выделяют мультиплет, но часто содержат также свободные уравнения движения. Так, Файе и Сониус показали, что материальный $N=2$ мультиплет материи, состоящий из дираковского поля $\psi = (\frac{\psi_a}{\bar{\psi}_{\dot{a}}})$ и четырех скалярных полей, описывается скалярным суперполем q^i со связью

$$D_{\alpha}^{(i} q^{j)} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(i} q^{j)} = 0, \quad (4)$$

где $D_{\alpha}^{(i}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(i}$ — спинорные ковариантные производные. Они антикоммутируют со спинорными генераторами Q , но подчиняются алгебре, аналогичной (1). Легко проверить тогда, что (4) содержит в себе свободные уравнения для физических полей. Поэтому наличие связей (4) приводит к существенным трудностям с включением взаимодействия. Объясним теперь, почему при работе в гармоническом суперпространстве эти трудности снимаются.

Рассмотрим реализацию $SU(2)$ группы автоморфизмов $N=2$ суперсимметрии на двумерной сфере S^2 . В качестве координат сферы возьмем координаты трехмерной сферы, отвечающей $SU(2)$, $u_i^{\pm}$ ($i=1,2$),

$$u^+ u_i^- = 1, \quad (5)$$

но определенные с точностью до $U(1)$ — фазы

$$u_i^{\pm} = e^{\pm i\alpha} u_i^{\pm}. \quad (6)$$

Остается ровно две независимые координаты, отвечающие двумерной сфере $S^2 = SU(2)/U(1)$. При этом следует рассматривать поля с определенным $U(1)$ — зарядом. Например, поле с $U(1)$ — зарядом $+1$ содержит в своем разложении по U только мономы из $u_i^{\pm}$ с зарядом $+1$

$$q^+(x, \theta, u) = q^i(x, \theta) u_i^+ + q^{(ij)k}(x, \theta) u_i^+ u_j^+ u_k^- + \dots \quad (7)$$

Гармоническое суперпространство есть прямое произведение $R^{4/8} \times \frac{S^{4(2)}}{U(4)}$ и имеет координаты

$$\{x^m, \theta^{\pm\alpha} = \theta^{i\alpha} u_i^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{i\dot{\alpha}} u_i^{\pm}, u_i^{\pm}\}. \quad (9)$$

Это расширенное суперпространство содержит аналитическое подпространство, с вдвое меньшим числом спинорных координат. В аналитическом базисе гармоническое суперпространство координатизируется согласно

$$\{z = (x_A^m = x^m - 2i\theta^i \sigma^m \bar{\theta}^{\dot{j}} u_j^{\pm}, \theta^{+\alpha}, \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}, u_i^{\pm}, \theta^{-\alpha}, \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}})\}. \quad (10)$$

Аналитическое подпространство имеет координаты (z, u) и оно замкнуто относительно преобразований суперсимметрии

$$\begin{aligned} \delta^c x_A^m &= -2i(\epsilon^i \sigma^m \bar{\theta}^{\dot{j}} + \theta^{+\alpha} \sigma^m \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}) u_i^{\pm}, \\ \delta \theta^{+\alpha} &= \epsilon^{i\alpha} u_i^{\pm}, \quad \delta \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} = \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}i} u_i^{\pm}, \quad \delta u_i^{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы увидеть плодотворность введения аналитического подпространства, умножим связи (4) на $u_i^{\pm} u_j^{\pm}$. Тогда они перейдут в

$$D_{\alpha}^{+} q^{+} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+} q^{+} = 0, \quad (12)$$

где $D_{\alpha}^{+} = D_{\alpha}^{i} u_i^{+}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{\dot{i}} u_i^{+}$

и $q^{+} = q^i u_i^{+}. \quad (13)$

Уравнение (13) подразумевает, что производная на сфере

$$D^{++} = u_i^{+} \partial/\partial u_i^{-} \quad \text{от } q^{+} \text{ равна нулю,}$$

$$D^{++} q^{+} = 0. \quad (14)$$

Итак, связи (4) расщепились теперь на соотношения (12) и уравнение (14).

Замечательно, что $\{D_{\alpha}^{+}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+}\} = 0$ и, следовательно, уравнения (12) интегрируемы! В аналитическом базисе (10) они приобретают вид $\partial/\partial \theta^{-\alpha} q^{+} = 0, \quad \partial/\partial \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}} q^{+} = 0$ и становятся просто условиями аналитичности, условиями независимости q^{+} от грассмановых координат с отрицательным u (I) зарядом $\theta^{-\alpha}, \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}$. Они означают, что q^{+} живет в аналитическом пространстве.

Гармоническая производная D^{++} в аналитическом базисе содержит производную по пространственным координатам

$$(D^{++})_{\Lambda\dot{6}} = u_i^+ \partial / \partial u_i^- - \theta^+ \sigma^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^+ \partial / \partial x^{\alpha}, \quad (15)$$

и уравнение (14), как можно проверить, теперь есть просто свободное уравнение движения.

Теперь, сохраняя условия аналитичности (12), можно так ввести взаимодействие

$$D^{++} q^+ = J^{+3}, \text{ или, } D^{++} q^+ = \lambda (q^+)^2 \bar{q}^+, \quad (16)$$

чтобы эти уравнения получились варьированием из принципа действия (см. раздел 4).

Важное свойство. Суперполе q^+ содержит бесконечное число вспомогательных полей, возникающих в гармоническом разложении

$$q^+(\zeta, u) = q^+(\zeta) u_i^+ + q^{(ijk)} u_i^+ u_j^+ u_k^+ + \dots \quad (17)$$

После установления этого факта в^{1,2/} появилась общая "no-go" теорема^{3/}, гласящая, что вообще невозможна формулировка комплексного гипермультиплетта без связей вне массовой оболочки с конечным числом вспомогательных полей.

3. В 1984 году мы ввели гармоническое пространство и гармоническую аналитичность, дали несколько простых примеров самодействия гипермультиплеттов, определили препотенциал $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории, аналитическое суперполе с $\mathcal{U}(1)$ -зарядом 2, $\mathcal{V}^{++}$, и нашли его закон преобразования, указали действие для абелевой калибровочной $\mathcal{N} = 2$ теории в аналитическом пространстве и низшие члены для неабелевой теории, выявили группу общих преобразований координат для одной из версий $\mathcal{N} = 2$ супергравитации и ее препотенциалы. Прошло три года, в течение которых были полностью построены формулировки всех расширенных $\mathcal{N} = 2$ теорий, и теории материальных $\mathcal{N} = 2$ полей и их самодействий, и расширенной $\mathcal{N} = 2$ калибровочной теории, и различных версий $\mathcal{N} = 2$ супергравитаций. При этом была открыта новая версия $\mathcal{N} = 2$ супергравитации, допускающая наиболее общие взаимодействия материальных полей. Она включает в себя существенным образом гипермультиплет, обсужденный выше, и, соответственно, содержит бесконечное число вспомогательных полей. Впервые были указаны препотенциалы для так называемых гиперклевровых и кватернионных многообразий.

Было проведено квантование и получены правила Фейнмана для $N=2$ теории материальных полей с самодействием и взаимодействием с полем Янга-Миллса. Было дано эффективное, основанное на соображениях размерности, доказательство конечности $N=4$ сигма-моделей в двумерии.

Что касается случаев $N>2$, была построена $N=3$ калибровочная теория. Она оказалась удивительно простой, имеющей чисто черн-саймоновскую форму, т.е., в частности, простую полиномиальную лагранжеву плотность.

Сейчас мы переходим к изложению этих результатов.

4. Самодействия материальных $N=2$ полей. Наиболее общий принцип действия имеет вид

$$I = \int d^2x du \{ \dot{q}^+ \dot{q}^+ + \mathcal{L}^{(+)}(q^+, \bar{q}^+, u) \}. \quad (18)$$

Здесь $q^+ = (q^+, \bar{q}^+)$ и возможно наличие нескольких гипермультиплетов. Первый член - кинетический и имеет "диракоподобный" вид. Второй член описывает самодействие, характеризуемое некоей функцией $\mathcal{L}^{(+)}$, ограниченной только значением ее $\mathcal{U}(1)$ -заряда. Как известно, любое суперсимметричное самодействие отвечает в бозонном секторе сигма-модели, имеющей глубокий геометрический смысл: лагранжева плотность имеет вид $g_{ik}(\varphi) \partial^\mu \varphi^i \partial_\mu \varphi^k$. В $N=1$ суперсимметрии есть метрика, принадлежащая к замечательному подклассу комплексных многообразий, так называемых калеровых многообразий (см., например^[4]). В этом случае известно, как представить ее в общем случае, она имеет вид

$$g_{i\bar{k}}(\varphi, \bar{\varphi}) = \frac{\partial^2 K(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial \varphi^i \partial \bar{\varphi}^k}. \quad (19)$$

Лагранжева плотность в $N=1$ случае задается калеровым потенциалом $K(\varphi, \bar{\varphi})$. В случае $N=2$ ситуация еще интересней: соответствующее многообразие должно быть не просто калеровым, оно должно быть гиперкалеровым^[5]. Гиперкалеровы многообразия имеют размерность $4n$, их группа голономии содержится в $Sp(n)$, и они имеют три комплексные структуры (вместо одной у калеровых). У нас нет возможности вдаваться здесь в подробности, их можно найти, например, в^[4]. Подчеркнем, однако, что, в отличие от калеровых многообразий, для гиперкалеровых общее представление метрики через потенциал до сих пор не было известно. Подход гармонического пространства впервые позволил определить гиперкалеров потенциал как $\mathcal{L}^{(+)}(q, \bar{q}, u)$ - лагранжеву плот-

ность самодействия материй в гармоническом суперпространстве. Каждому $\mathcal{L}^{(4)}$ отвечает та или иная гиперкалерова метрика. Чтобы найти ее, надо написать соответствующие $\mathcal{L}^{(4)}$ уравнения движения и с их помощью устранить вспомогательные поля. И тогда в бозонном секторе мы получаем гиперкалерову метрику. В^{6/} мы рассмотрели простейший пример

$$\mathcal{L}^{(4)} = \lambda (\bar{q}^+)^2 (\bar{q}^+)^2 \quad (20)$$

и установили, что ему соответствует метрика известного гиперкалерова многообразия, так называемого Тауб-НУТ многообразия. Нами затем были найдены препотенциалы для метрики Егучи - Хансона (размерность 4), для метрик Калаби и мульти-Калаби (разм. 4n), и т.д.^{7/}. Еще для ряда потенциалов были найдены гиперкалеровы метрики^{8/}. Во всех случаях вид гиперкалерова потенциала $\mathcal{L}^{(4)}$ значительно проще, чем вид соответствующей ему метрики. Подчеркнем, однако, что процедура перехода от него к гиперкалеровой метрике включает, как говорилось выше, исключение вспомогательных полей и является более емкой, чем определение калеровской метрики по калеровскому потенциалу дифференцированием, см. (18). Было бы весьма желательно разработать методы, с помощью которых можно было бы работать прямо с гиперкалеровым потенциалом $\mathcal{L}^{(4)}$, без перехода к метрике.

Очень соблазнительным кажется также нахождение $\mathcal{L}^{(4)}$, отвечающего знаменитому гиперкалерову КЗ многообразию, метрика которого неизвестна, а также $\mathcal{L}^{(4)}$ для гиперкалерова многообразия Атьи - Хитчина (решение второй задачи, по-видимому, вполне реально, более того, есть правдоподобная гипотеза о виде $\mathcal{L}^{(4)}$).

Взаимно однозначное соответствие между гиперкалеровыми потенциалами и общим лагранжианом $\mathcal{L}^{(4)} = 4$, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной модели окончательно установлено в^{9/}, где также подробно обсуждается принцип гармонической аналитичности. Отметим, что в литературе имеется ряд описаний $\mathcal{N} = 2$ материи с помощью мультиплетов со связями, несколько менее сильными, чем (4), и допускающими определенные взаимодействия ограниченного типа. Все эти описания (тензорный мультиплет, ослабленный гипермультиплет и другие) переводятся, конечно, на язык гармонического суперпространства с гармоническими суперполями, ограниченными связями (напр., тензорный мультиплет - $\mathcal{L}^{++}$ со связью $\Delta^{++}\mathcal{L}^{++} = 0$). Соответствующие им взаимодействия дуально эквивалентны ограниченному подклассу общих самодействий (18). Мы отсылаем читателя по этому поводу к работе^{10/}.

5. Расширенная $N = 2$ калибровочная теория получается путем удлинения гармонической производной^{/1,2/}:

$$D^{++} \Rightarrow \mathcal{D}^{++} = D^{++} + i V^{++}(z, u). \quad (21)$$

Янг-миллсов мультиплет содержится в гармонической связности V^{++} , представляющей собой аналитическое суперполе с двойным $U(1)$ -зарядом. Связность V^{++} преобразуется в полной аналогии с обычной янг-миллсовой векторной связностью A_m , только векторная производная $\partial/\partial x^m$ заменяется на гармоническую D^{++} :

$$V^{++1} = e^{i\lambda} (V^{++} - i D^{++}) e^{-i\lambda}, \quad (22)$$

где $\lambda = \lambda(z, u)$ - аналитическое суперполе без $U(1)$ заряда (и V^{++} и λ принимают значения в алгебре калибровочной группы). Кроме удлинения гармонических производных (21) следует добавить также адекватный кинетический член и самодействие для калибровочного препотенциала V^{++} . Теперь мы научились писать его прямо в удобном виде, и для общего неабелева случая калибровочно-инвариантное действие имеет вид^{/11/}:

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} \int d^{12}z du_1 \dots du_n \frac{\text{tr} [V^{++}(z, u_1) \dots V^{++}(z, u_n)]}{(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u_3^+) \dots (u_n^+ u_1^+)}. \quad (23)$$

Здесь интегрирование по u определено правилом

$$\int du = 1, \quad \int du u_1^+ \dots u_k^+ u_{k+1}^- \dots u_{k+m}^- = 0, \quad (24)$$

и $(u_i^+ u_{i+1}^+)^{-1}$ - простейшие гармонические распределения^{/12/}

$$D_1^{++} \frac{1}{u_1^+ u_2^+} = \delta^{1,1}(u_1, u_2), \quad (25)$$

а гармоническая дельта-функция определена согласно^{/12/}

$$\int du_2 \delta^{n, n}(u_1, u_2) f^p(u_2) = \delta^{p, n} f^p(u_1). \quad (26)$$

Янг-миллсово действие (23) обладает нелокальностями по гармоническим переменным u . Все они пропадают, однако, при вычислении квантовых эффектов по правилам Фейнмана на массовой оболочке.

Правила Фейнмана были сформулированы в нашей статье^{/12/} (см. также параллельные работы^{/13, 14/}). Отсылая за подробностями к^{/12/}, приведем здесь только их основные свойства:

1) Гармонические координаты не ведут к каким-либо новым расходимостям (в отличие от дополнительных координат в теориях типа Калуца-Клейна).

2) Все нелокальности по гармоническим координатам пропадают, когда внешние линии кладутся на массовую оболочку.

3) Квантовые поправки даются интегралом, содержащим полную грасманову меру $d^4\theta$.

4) Нет нужды в духах-для-духов.

5) $d = 4$, $N = 2$ материальные связи (например, $\lambda(q^+ \bar{q}^+)^2$) являются неперенормируемыми.

6) Однако в двумерии конечность $d = 2$, $N = 4$ теории доказывается прямо из размерных соображений^{/12/}, и это было первое самостоятельное доказательство ее конечности. Аналогично доказывается и конечность $d = 2$, $(4,0)$ киральных суперсимметричных сигма-моделей^{/15/}.

6. Из расширенных суперсимметрий с $N > 2$ пока удалось построить на языке суперполей без связей в гармоническом суперпространстве только расширенную $N = 3$ калибровочную теорию^{/16,17/}. Группа автоморфизмов $SU(3)$ реализуется в фактор-пространстве $SU(3) / U(1) \times U(1)$. Теперь у нас два $U(1)$ -заряда. Фактор-пространство имеет $SU(3)$ координаты

$$u_i^a = (u_i^{-1,1}, u_i^{-1,2}, u_i^{0,2}) \quad , \quad u_a^i = \overline{(u_a^i)} \quad , \quad i, a = 1, 2, 3 \quad (27)$$

$$u_i^a u_a^i = \delta_i^i \quad , \quad u_a^i u_i^a = \delta_a^a \quad , \quad \det u = 1.$$

Эти координаты определены с точностью до $U(1) \times U(1)$ преобразований. Вместо одной D^{++} теперь возникают три гармонические производные $D^{2,0}$, $D^{1,1}$ и $D^{1,-1}$. Их связности $V^{2,0}$, $V^{1,1}$, $V^{1,-1}$ и будут служить янг-милловыми препотенциалами. Эти препотенциалы живут в аналитическом подпространстве с координатами

$$\{z, u\} = \{x_A^{2,2}, \theta_A^{1,1}, \theta_A^{0,2}, \bar{\theta}_A^{1,1}, \bar{\theta}_A^{0,2}, u\}. \quad (28)$$

Действие имеет простой полиномиальный вид

$$S = \int d^4x d^4\theta \left\{ V^{1,1} F^{1,-1} + V^{1,-1} F^{1,1} + V^{2,0} F^{2,0} - i V^{2,0} [V^{1,1}, V^{1,-1}] \right\} \quad (29)$$

и из него следует равенство нулю напряженностей

$$F^{3,3} = \frac{1}{i} [\mathcal{A}^{2,0}, \mathcal{A}^{1,3}] = 0, \quad F^{3,3} = \frac{1}{i} [\mathcal{A}^{1,3}, \mathcal{A}^{2,0}] = 0,$$

$$F^{2,0} = \frac{1}{i} [\mathcal{A}^{1,3}, \mathcal{A}^{1,3}] = 0.$$

Отметим, что калибровочная $N = 3$ теория оказалась первой полностью черн - саймоновской теорией!

Несколько замечаний по литературе. В работе^{/18/} рассматривались тензорные свойства $N = 3$ калибровочной теории, в^{/19/} были изучены $N = 3$ суперконформная группа, суперконформная инвариантность $N = 3$ калибровочной теории и группа общих координатных преобразований расширенной $N = 3$ супергравитации. В статье^{/20/} трактовались $N = 3$ гармонические инстантоны. Наконец, на этой конференции Б.Зупник будет говорить о $N = 6$ трехмерной калибровочной теории.

7. Теперь перейдем к супергравитации. В 1984 г. была найдена группа общих преобразований координат в гармоническом суперпространстве, отвечающая одной из версий $N = 2$ супергравитации в компонентных полях^{/21,22/}. В настоящее время мы полностью построили суперполевые формулировки для всех известных версий $N = 2$ супергравитации и, более того, открыли новую версию $N = 2$ супергравитации, совместимую с наиболее общими взаимодействиями материальных полей. Их общекординатные группы и препотенциалы были даны еще в^{/23/} (см. также^{/24/}). Процедура получения вариационного принципа для $N = 2$ супергравитации потребовала усилий и была завершена в конце 1986 года^{/25/}.

Систематический путь состоит, как известно, в следующем. Вначале надо построить конформную супергравитацию, а затем компенсировать лишние калибровочные преобразования (Вейля, γ_5 и другие) путем введения определенных материальных и максвелловских мультиплетов. Компенсаторы можно вводить различные - поэтому и получаются версии, различные вне массовой оболочки и неравносильные с точки зрения взаимодействий. Все ранее известные версии получаются путем компенсирования материальными мультиплетом со связями, о которых шла речь выше. В новой версии компенсатором служит наиболее присущий материи компенсатор q^+ , свободный от связей. Поэтому именно новая версия допускает наиболее общие взаимодействия материи. Все остальные версии дуально ей эквивалентны при соответствующих ограничениях на взаимодействия материи.

Отступление. Отметим, что в моделях с высшими производными, возникающих в теориях суперструны, различные версии могут перестать быть

эквивалентными за счет того, что компенсаторы и некоторые вспомогательные поля становятся распространяющимися. Такое явление для различных $N = 1$ версий было наблюдеено в ^{/26/}.

Мы предпочитаем уклониться в докладе от каких-либо деталей, их можно найти в ^{/23,25/}. Упомянем только, что включение гравитационного взаимодействия достигается удлинением гармонической производной

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{++} = & \partial^{++} + H^{++}\partial^{-} + H^{++m}\partial/\partial x^m + H^{++r}\frac{\partial}{\partial \theta^r} + H^{++\dot{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{r}}} + \\ & + H^{++r}\frac{\partial}{\partial \theta^r} + H^{++\dot{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{r}}} \end{aligned} \quad (30)$$

и в качестве гравитационных препотенциалов выступают реперы H^{++} , H^{++m} , H^{++r} , $H^{++\dot{r}}$.

Отметим также, что самодействия $N = 2$ материальных полей на искривленном гравитационном фоне отвечают уже не гиперклеровым, а кватернионным многообразиям в сигма-моделях, возникающих в бозонном секторе после исключения вспомогательных полей ^{/27/}. (Напомним, что в отличие от гиперклеровых у кватернионных многообразий группа голономии лежит в $Sp\,n \times Sp\,1$). Таким образом, гармоническое суперпространство дает нам возможность располагать препотенциалами и для более широкого класса кватернионных многообразий. В недавней работе с Дж.Беггером нам удалось локализовать группы изометрии самодействия $\mathcal{L}^{(4)}$ и сделать их калибровочными. Иногда это возможно сделать только на супергравитационном фоне. Это относится к тем изометриям, которые на нашем языке связаны с преобразованиями гармонических координат, и тем самым, при их локализации, с группой общих преобразований координат.

6. Перейдем теперь к области, на первый взгляд весьма далекой, к решению уравнений самодуальности для обычных теорий Янга-Миллса и Эйнштейна без всякой суперсимметрии. Оказывается, что, спускаясь к обычным теориям и применяя методы гармонического пространства, мы попадаем в теорию твисторов. Действительно ^{/23/}, рассмотрим евклидово 4-мерное пространство. Его группа Лоренца есть прямое произведение

$$SO(4) \sim SU(2) \times SU(2), \quad (31)$$

одной из $SU(2)$ отвечает индекс без точки λ , а другой — индекс с точкой $\dot{\lambda}$. "Гармонизируем" одну из $SU(2)$, т.е. реализуем ее на однородном пространстве $SU(2)/U(1)$, например, ту, которая дает ин-

дексы с точкой. Добавим к обычным координатам $\chi^{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma^{\alpha\dot{\alpha}}_m \chi^m$ координаты $u^\pm_\alpha$ пространства $SU(2)/U(1)$. Мы приходим к гармоническому пространству

$$\{ \chi^{\alpha\dot{\alpha}}, u^\pm_\alpha \} \quad (.)$$

или (сравни преобразование Пенроуза)

$$\{ \chi^{+\dot{\alpha}} = \chi^{\alpha\dot{\alpha}} u^\pm_\alpha, u^\pm_\alpha, \chi^{-\dot{\alpha}} = \chi^{\alpha\dot{\alpha}} u^\mp_\alpha \}. \quad (33)$$

Оно содержит в себе аналитическое подпространство (твисторы?)

$$\{ \chi^{+\dot{\alpha}}, u^\pm_\alpha \}. \quad (34)$$

Условие независимости от $\chi^{\alpha-}$, условие аналитичности есть

$$\partial_\alpha^+ f^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \chi^{\alpha-}} f^{\dot{\alpha}} = 0. \quad (35)$$

Обратимся теперь к теории Янга - Миллса :

$$\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}} = \partial_{\alpha\dot{\beta}} + i A_{\alpha\dot{\beta}}, \quad (36)$$

$$[\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}, \mathcal{D}_{\gamma\dot{\delta}}] = i(\varepsilon_{\alpha\gamma} F_{\dot{\beta}\dot{\delta}} + \varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\delta}} F_{\alpha\gamma}). \quad (37)$$

Пусть $\mathcal{D}_{\dot{\beta}}^+ = u^{+\alpha} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}$. Тогда условие ковариантной аналитичности запишется (вместо (35))

$$\mathcal{D}_{\dot{\beta}}^+ f = 0, \quad (38)$$

интегрируемость этого уравнения требует, чтобы

$$[\mathcal{D}_{\dot{\beta}}^+, \mathcal{D}_{\dot{\delta}}^+] = 0, \quad (39)$$

что, как видно из (37) после умножения на $u^{+\alpha} u^{+\gamma}$, влечет за собой условие самодуальности

$$F_{\alpha\gamma} = 0. \quad (40)$$

Итак, ковариантно аналитические функции существуют тогда и только тогда, когда Янг - Миллсово поле самодуально.

Уравнение (39) легко разрешить. Для связности в производной $\mathcal{D}_\alpha^+$ мы сразу находим калибровочное решение ($\mathcal{U}$ - некоторое гармоническое поле)

$$A_\alpha^+ = e^{i\nu} \partial_\alpha e^{-i\nu}. \quad (41)$$

По определению $D^{++} A_\alpha^+ = 0$. Отсюда можно вывести, что

$$\partial_\alpha (e^{i\nu} D^{++} e^{i\nu}) = 0, \quad (42)$$

т.е. поле $e^{-i\nu} D^{++} e^{i\nu} = i V^{++}$ является аналитическим.

Наоборот, любое аналитическое поле с $\mathcal{U}(1)$ -зарядом $+2$

отвечает решению уравнения самодуальности. Перечислить все решения уравнения самодуальности означает перебрать все возможные суперполя V^{++} .

Для перехода в обычное пространство следует решить уравнение

$$D^{++} e^{-i\nu} = i V^{++} e^{-i\nu}.$$

Проблема теперь в том, как отобразить те V^{++} , которые соответствовали бы решениям с конечным действием, инстантонам. Одноинстантонное решение для $\mathcal{SU}(2)$ теории (инстантон Белавина-Полякова-Шварца-Тыпкина) в гармоническом пространстве описывается мономом^{/23/}

$$V^{++}_{ij} = -\frac{i}{f^2} x_i^+ x_j^+.$$

Аналогично Хофта для n -инстантонного решения в гармоническом пространстве дан в работе^{/24/}, а V^{++} для общего n -инстантонного решения Атьи - Дринфельда - Манина - Хитчина получено в^{/25/}.

9. Монополи представляют собой статические решения уравнения автодуальности и содержатся в подходящих V^{++} . Однако, гораздо красивее находить их, полностью гармонизуя группу Лор¹ с учетом статического характера задачи. Мы не можем отказать себе в удовольствии привести поучительную процедуру, разработанную в^{/26/}. Для статических решений $A_i = A_i(x)$, $A_0 = A_0(x)$ уравнение самодуальности

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta} F_{\lambda\delta}$$

сводится к

$$2F_{i0} = 2[\nabla_i \varphi_0 + A_0] = 2\nabla_i A_0 = \varepsilon_{ijk} F_{jk}. \quad (43)$$

В статическом случае мы имеем дело с трехмерным и группой $O(3)$. Гармонизируем ее

$$\{u_\alpha^\pm\} = \frac{O(3)}{U(1)}, \quad u^{+\alpha} u^-_\alpha = 1,$$

запишем пространственную координату в спинорных обозначениях $x^i \rightarrow x^{\alpha\beta} = x^{\beta\alpha}$ и введем гармоническое пространство

$$\{x^{\alpha\beta}, u_\alpha^\pm\} = \{x^{++} = x^{\beta\alpha} u_\beta^+ u_\alpha^+, x^{+-} = x^{\beta\alpha} u_\beta^+ u_\alpha^-, x^{--} = x^{\beta\alpha} u_\beta^- u_\alpha^-, u_\alpha^\pm\} \quad (44)$$

и соответствующие производные

$$\nabla^{++} = \nabla_{\alpha\beta} u^{+\alpha} u^{+\beta}, \quad \nabla^{+-} = \nabla_{\alpha\beta} u^{+\alpha} u^{-\beta}, \quad \nabla^{--} = \nabla_{\alpha\beta} u^{-\alpha} u^{-\beta}. \quad (45)$$

Основное уравнение (43) теперь эквивалентно системе

$$\nabla^{++} A_0 = [\nabla^{++}, \nabla^+], \quad [\nabla^{++}, \nabla^{++}] = 0, \quad [\nabla^{++}, \nabla^+] = \nabla^{++}, \quad (46)$$

где ∇^{++} — гармоническая производная. После замены $\nabla = \nabla^{+-} - A_0$ эта система становится очевидным образом интегрируемой

$$[\nabla^{++}, \nabla] = 0, \quad [\nabla^{++}, \nabla^{++}] = 0, \quad [\nabla^{++}, \nabla] = \nabla^{++}, \quad (47)$$

и имеет своим решением

$$\nabla^{++} = h \nabla^{++} h^{-1}, \quad \nabla = h \nabla^{++} h^{-1} \quad (48)$$

$$\nabla^{++} = h \nabla^{++} h^{-1} = \nabla^{++} + V^{++} \quad (49)$$

$$\nabla^{++} V^{++} = 0, \quad \nabla^{+-} V^{++} = 0. \quad (50)$$

Иными словами, снова возникает аналитическое пространство, содержащее только одну компоненту пространственной координаты x^{++} ,

$$\{x^{++}, u_\alpha^\pm\},$$

и любая аналитическая $V^{++}(x^{++}, u^{\pm})$ дает решение статического уравнения самодуальности. Опять проблема состоит в выделении регулярных решений, монополей. В^{/29/} выяснено, что одномонопольному решению Прасада и Коммерцелла отвечает простой моном

$$V^{++}_d = (x^{++})^2 u^{-\beta} u^{\beta}_d. \quad (51)$$

В^{/29/} рассматривается и конструкция Нама для общего n -монопольного решения на языке V^{++} .

10. Решение уравнений самодуальности для гравитационного поля, нахождение гравитационных инстантонов также естественным образом проводится с помощью введения гармонического пространства. По Пенроузу^{/30/} эти решения, называемые им нелинейными гравитонами, должны играть основную роль в квантовой теории тяготения, теория возмущений должна развиваться вблизи именно нелинейных гравитонов, полуплоских решений, а не вблизи плоского пространства. Для исследования этих решений привлекаются математически продвинутые идеи твистерного формализма. В^{/6/} мы рассматриваем их с привлечением гармонического пространства и отсылаем к^{/9/} заинтересовавшегося. Следует подчеркнуть, что и при решении уравнений самодуальности в теории Янга-Миллса в разделах 8, 9 мы имели дело, по существу, с разновидностью твистерного подхода, и эксперт, несомненно, усмотрит близкое сходство с известными подходами из работ^{/31-33/}. Производит впечатление единство природы: ведь мы спускались с "высоты" суперсимметрий. Как нам кажется, наш подход отличается тем, что он эффективен и не требует априорных знаний высоких разделов математики, скажем, алгебраической геометрии. Мы надеемся, что он поможет теоретикам - специалистам по теории элементарных частиц и их симметрий - овладеть методами теории твисторов. За примером таких теоретиков ходить недалеко; достаточно взять авторов этого доклада.

Заслуживает внимания также принципиальное различие применения гармонического пространства в теории расширенных суперсимметрий и для решения уравнений самодуальности. В первом случае гармоническое пространство используется для формулировки теории, вариационного принципа и уравнений движения, из него следующих. Во втором случае оно используется "на массовой оболочке" для решения уже написанных уравнений движения.

11. В заключение остановимся на ближних и дальних перспективах применений гармонического пространства. Как нам кажется, квантование $N = 3$ теории Янга - Миллса будет проведено в ближайшее время. Не

должна надолго задержаться и расширенная $N = 3$ супергравитация, хотя здесь могут быть и сюрпризы. Очень хотелось бы понять и преодолеть трудности, лежащие на пути построения расширенных $N = 4$ теорий, это несомненно помогло бы глубже разобраться с применением концепций гармонического суперпространства в теории суперструны. Первые попытки такого применения уже имеются^{/34,35/}, однако, они пока весьма предварительны.

Нам представляются привлекательными возможности использования расширенных $N = 2$ суперсимметрий на языке гармонического суперпространства для феноменологических целей. Здесь также предприняты первые попытки^{/57,36/}. Такое использование представляется перспективным, так как гармоническое пространство позволяет взглянуть на $N = 2$ суперсимметрии как бы с птичьего полета, и возможности трактовки вне массовой оболочки будут безусловно важными для полного обсуждения моделей спонтанного нарушения $N = 2$ суперсимметрии, трудностей с вектороподобностью и других вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.Galperin, E.Ivanov, S. Kalitzin, V.Ogievetsky, E.Sokatchev - Class.Quantum.Grav.-I(1984) 469; Письма в ЖЭТФ,40(1984) 912.
2. А.Гальперин, Е.Иванов, С.Калицин, В.Огиевецкий, Е.Сокачев. - Труды УИ межд.совещания по проблемам квантовой теории поля, Алуста, апрель 1984 г. ОИЯИ Д2-84-366, Дубна, 1984, с. 196.
3. P.Howe, K.S.Stelle, P.West. - Class.Quantum Grav.2(1985) 815.
4. J.Bagger, Prepr. SLAC-PUB - 3461 (1984).
5. L.Alvarez - Gaume, D.Z.Freedman - Comm.Math.Phys.80(1981) 443.
6. A.Galperin, E.Ivanov, V.Ogievetsky, E.Sokatchev - Commun. Math. Phys. 103(1986) 625.
7. A.Galperin, E.Ivanov, V.Ogievetsky, P.Townsend - Class.Quantum. Grav. 3 (1986) 625.
8. D.Olivier, G.Valent. Phys.Lett. - B109 (1987) 79; Prepr. PAR LPTHE-87, 27.
9. A.Galperin, E.Ivanov, V.Ogievetsky, E.Sokatchev. - Prepr. JINR, E2-87-263, Dubna, 1987, 264.
10. A.Galperin, E.Ivanov, V.Ogievetsky. - Nucl.Phys. B282(1987) 74, Phys.Scripta T15 (1987) 176.
11. Б.М.Зупник. - ЯФ, 44 (1986) 1781.
12. A.Galperin, E.Ivanov, V.Ogievetsky, E.Sokatchev -Class. Quantum. Grav. 2 (1985) 601, 617.

13. T.Kubota, S.Sawada - Prog.Theor.Phys. 74 (1985) 1389.
14. N.Ohta, H.Yamaguchi - Phys.Rev. D32 (1985) 1954.
15. E.Sokatchev, K.S.Stelle - Class.Quantum Grav. 4(1985) 501.
16. A.Galperin, E.Ivanov, S.Kalitzin, V.Ogievetsky, E.Sokatchev - Phys.Lett. 151B, (1985) 215.
17. A.Galperin, E.Ivanov, S.Kalitzin, V.Ogievetsky, E.Sokatchev - Class.Quantum Grav. 2 (1985) 156.
18. P.Калиот. - ПИСЬМА В ЖУТФ, 41(1985) 172.
19. A.Galperin, E.Ivanov, V.Ogievetsky- Prepr.JINR E2-86-553, Dubna, 1986
20. A.Semichatov, B.Kudryavtzev - Prepr. FIAN, No.82, 1986.
21. E.Fradkin, M.Vasiliev - Phys.Lett. 85B (1979) 47.
22. B.de Wit, van Holten, van Proeyen - Nucl.Phys. B167 (1980) 186.
23. A.Galperin, E.Ivanov, V.Ogievetsky, E.Sokatchev - Prepr. JINR, E2-85-363, Dubna, 1985; Essays in honour of E.S.Fradkin, Adam Hilger, London.
24. B.Delamotte, J.Kaplan - Class.Quantum Grav. 4 (1987) 1223.
25. G.Galperin, E.Ivanov, A.K.Nguen, V.Ogievetsky, E.Sokatchev - Class. Quant. Grav. 4 (1987) 1235, 1255.
26. S.Ferrara a.o. - CERN TH 4786/87.
27. J.Bagger, E.Witten - Nucl.Phys. B222 (1983) 1.
28. S.Kalitzin, E.Sokatchev - Class.Quant.Grav. 4 (1987) L173.
29. O.Ogievetsky - Theor. Group. Methods in Physica. Proc. of Varna Symposium 1987, Springer, 1987, p. 112.
30. R.Penrose - Gen.Rel.Grav. 7(1976) 31. R.Penrose, R.S.Ward, in - "General Relativity and Gravitation", Plenum Press. N.Y. 1980, v.2, p. 283.
31. A.Belavin, V.Zakharov - Phys.Lett. 73B (1977) 53.
32. E.T.Newman - Gen.Rel.Grav. 7 (1976) 107; Phys.Rev. D22, (1980) 3023; J.Math.Phys. 27(1986) 2797.
33. R.S.Ward - Phys.Lett. 61A(1977) 81; Nucl.Phys. B236(1984) 381.
34. E.Sokatchev - Phys.Lett. 169B (1986) 209; Class.Quant.Grav. 4 (1987) 237.
35. E.Nissimov, S.Pacheva, S.Solomon - Prepr. WIS-87/28, 43, 44.
36. В.АКУЛОВ, А.БАНДЭС, Д. СЗРЯКИН. - Препр. Харьков, ХФТИ 87-27, 1987.
37. А.Капустников - ЯФ, 45 (1987) 275.
38. B.Delamotte, P.Fayet - Phys.Lett. B293(1987) 563.

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СУПЕРСИММЕТРИИ

А.А.Славнов

Математический институт им.В.А.Стеклова АН СССР, Москва

Суперсимметрия является важным элементом большинства современных моделей взаимодействий элементарных частиц. Она позволяет естественным образом включить в схему большого объединения гравитационное взаимодействие. Привлекательной чертой суперсимметричных теорий является компенсация расходимостей, приводящая в ряде случаев, как например в расширенной суперсимметричной теории Янга-Миллса, к ультрафиолетовой конечности теории. Тот же механизм работает и в наиболее далеко идущих моделях взаимодействий — моделях суперструн, в которых, по-видимому, отсутствуют ультрафиолетовые расходимости.

Проблема компенсации расходимостей в суперсимметричных теориях имеет и более прагматический аспект, представляющий большой интерес с точки зрения теорий большого объединения. Я имею в виду проблему иерархий. Как известно, в моделях большого объединения существуют два естественных масштаба масс: низкоэнергетический $M_w \sim 100$ ГэВ, определяющий физику слабых и электромагнитных взаимодействий, и высокоэнергетический $M_p \sim 10^{19}$ ГэВ, определяющий область объединения взаимодействий и вступления в игру гравитационного взаимодействия. Успех перенормируемых низкоэнергетических моделей свидетельствует о том, что эти области расщепляются, и влияние высокоэнергетических эффектов может быть учтено логарифмической перенормировкой низкоэнергетических параметров. При наличии в теории фундаментальных хиггсовских частиц их масса перенормируется квадратично, т.е. получаем добавку $\sim g M_p$, что нарушает расщепление области низких и высоких энергий. С точки зрения формальной теории перенормировок это не является серьезной трудностью, т.к. мы всегда можем подобрать контрчлены таким образом, чтобы обеспечить желаемый спектр масс. Однако такая подгонка выглядит крайне неестественной, если иметь в виду, что низкоэнергетические модели взаимодействий являются, скорее всего, лишь эффективными лагранжианами для фундаментальной единой теории, в которых масса Планка играет роль импульса обрезания. В суперсимметричных моделях проблема иерархий решается естественным образом, так как в них отсутствуют квадратичные расходимости.

Однако в реальном мире отсутствует вырождение между фермионами и бозонами, и, следовательно, суперсимметрия нарушена. Для того чтобы сохранялись отмечавшиеся выше привлекательные черты суперсимметричных теорий, это нарушение должно быть спонтанным. Поэтому проблема спонтанного нарушения симметрии является одним из основных вопросов для суперсимметричных теорий.

Суперсимметрия накладывает жесткие ограничения на вид эффективного потенциала, поэтому число вариантов сценариев спонтанного нарушения суперсимметрии значительно меньше, чем в случае внутренних симметрий. Большинство из этих вариантов не выдерживает сравнения с экспериментом.

Наиболее простые схемы спонтанного нарушения суперсимметрии используют механизмы Файе-Иллиопулоса ^{1/} или О'Райферти ^{2/}. Первый механизм работает в моделях, инвариантных относительно абелевой калибровочной группы. Он сводится к добавлению линейного по абелеву калибровочному суперполю члена, что приводит к ненулевому вакуумному среднему его D -компоненты и, следовательно, к спонтанному нарушению суперсимметрии. В этом случае предсказывается существование скалярных частиц, более легких, чем их фермионные суперпартнеры, избавиться от которых можно лишь ценой чрезмерного усложнения модели.

В механизме О'Райферти нарушение суперсимметрии происходит за счёт отличия от нуля вакуумного среднего F -компоненты кирально-го суперполя. При этом расщепление по массам происходит таким образом, что комплексное суперполе, являющееся, например, суперпартнером электрона, расщепляется на две компоненты, масса одной из которых больше массы электрона, а масса другой на столько же меньше. Таким образом, и этот механизм не позволяет конструировать реалистические модели.

Приемлемую модель можно построить, вводя массовые члены, "мягко" нарушающие суперсимметрию. Такие члены можно генерировать путем спонтанного нарушения суперсимметрии в секторе вспомогательных полей ^{3/}, поэтому все упоминавшиеся выше свойства суперсимметричных теорий остаются в силе и в этом случае. При этом, однако, массовые параметры остаются совершенно произвольными и сама процедура представляется несколько искусственной.

Наиболее привлекательно выглядит схема нарушения суперсимметрии в моделях, включающих гравитацию. Вводя в теорию неполиномиальные функции киральных суперполей, нетрудно добиться того, что состояние с минимальной энергией не будет суперсимметричным. Возникающий при этом голдстоуновский фермион объединяется с частицей спина $3/2$, и в результате суперсимметричного эффекта Хиггса возникает массивное гравитино. Таким образом, проблема спонтанного нарушения суперсимме-

три решается, но, к сожалению, существующие модели супергравитации неперенормируемы и не позволяют включить все необходимые элементарные частицы. Следует отметить, что упоминавшееся выше мягкое нарушение суперсимметрии массовыми членами можно рассматривать как полуженоменологическую модель, учитывающую влияние гравитационного взаимодействия.

Таким образом, все перечисленные выше механизмы спонтанного нарушения суперсимметрии обладают существенными недостатками, и проблема спонтанного нарушения суперсимметрии до сих пор не имеет вполне удовлетворительного решения. В связи с этим последнее время предпринимаются попытки исследовать возможность динамического нарушения суперсимметрии, при котором в древесном приближении симметрия не нарушена, а эффект возникает лишь при полном учете взаимодействия. Проведение в жизнь подобной программы связано с большими трудностями. Дело в том, что суперсимметрия устойчива относительно радиационных поправок: если основное состояние суперсимметрично в древесном приближении, то оно остается таковым в любом порядке теории возмущений ^{/4/}. Решение проблемы динамического нарушения суперсимметрии требует выхода за рамки теории возмущений. Ввиду отсутствия надежных вычислительных методов, не связанных с разложением по константе связи, большая часть полученных здесь результатов носит полукачественный характер и опирается, как правило, на дополнительные гипотезы.

Замечательным образом оказывается, однако, что для целого класса теорий удастся строго доказать невозможность спонтанного нарушения суперсимметрии. Как показал Виттен ^{/5/}, спонтанное нарушение суперсимметрии возможно лишь в моделях с нулевым индексом. Для ряда важных теорий индекс Виттена удастся вычислить. Для векторноподобных моделей с массивными полями материи, к которым относится, в частности, суперсимметричная КХД с массивными кварками, индекс отличен от нуля. Таким образом, спонтанное нарушение суперсимметрии возможно лишь в моделях с существенно киральным взаимодействием, либо в векторноподобных моделях с безмассовыми полями материи. (Формально в последнем случае индекс также отличен от нуля, однако в действительности этот случай является сингулярным, и можно продемонстрировать явно, что для безмассовых полей материи возможно спонтанное нарушение суперсимметрии ^{/6/}.)

Основным методом исследования проблемы динамического нарушения суперсимметрии является сейчас метод эффективных лагранжианов ^{/7-12/}. Как известно, эффективный лагранжиан представляет собой сумму сильно связанных диаграмм, и поэтому его точное вычисление эквивалентно пол-

ному решению задачи. Поэтому обычно вид эффективного лагранжиана постулируют, исходя из свойств симметрии — он должен воспроизводить все необходимые тождества Уорда, включая аномалии. Это требование не фиксирует, однако, полностью вид эффективного лагранжиана, и приходится привлекать дополнительные гипотезы, благодаря чему различные авторы приходят к разным выводам относительно возможности спонтанного нарушения суперсимметрии.

Интересный подход к этой проблеме основан на использовании инстантонов [13-16]. Поскольку эффекты нарушения суперсимметрии в теории возмущений отсутствуют, можно ожидать, что определяющую роль будут играть экспоненциально малые по обратной константе связи вклады, обусловленные инстантонами. Соответствующие эффекты вычисляются явно в одноинстантонном приближении, что позволяет исследовать свойства эффективного потенциала. Удалось показать, что в теориях с киральными полями материи инстантоны могут генерировать спонтанное нарушение суперсимметрии.

С этим направлением связывают сейчас определенные надежды, однако до сих пор не удалось построить реалистическую модель, основанную на инстантонном механизме спонтанного нарушения суперсимметрии.

В этом докладе я более подробно остановлюсь на другом подходе к проблеме построения низкоэнергетического эффективного лагранжиана, основанном на использовании разложения по обратному числу цветов. Этот подход был ранее с успехом применен к обычной квантовой хромодинамике [17]. С его помощью удалось, исходя из лагранжиана КХД, получить в старшем порядке $1/N$ -разложения эффективный лагранжиан Вайнберга, включающий аномальные члены Весса-Зумино-Виттена.

Исходным пунктом является действие, описывающее суперсимметричное взаимодействие поля Янга-Миллса с полями материи:

$$S = S_{YM} + \int d^4x \left[\bar{\varphi}_i^{\alpha} (e^{V_1})_{\alpha\beta} \varphi_i^{\beta} + \bar{\psi}_i^{\lambda} (e^{-V_2})_{\lambda\kappa} \psi_i^{\kappa} \right]. \quad (1)$$

Глюонное поле A_{μ} является компонентой калибровочного суперполя V , преобразующегося по присоединенному представлению цветовой группы $SU(N)$. Материя описывается киральными суперполями φ_i^{α} , $\bar{\varphi}_i^{\dot{\alpha}}$, ψ_i^{λ} , $\bar{\psi}_i^{\dot{\lambda}}$, реализующими некоторые, вообще говоря различные, представления группы $SU(N)$, характеризующиеся генераторами λ_1^a , λ_2^a :

$$V_1 = \sum_a \lambda_1^a V^a, \quad V_2 = \sum_a \lambda_2^a V^a. \quad (2)$$

Мы считаем, что $\alpha, \beta \leq N_1$, $\lambda, \kappa \leq N_2$, $N_1 \sim N_2 \sim N$. В качестве группы ароматов выбрана группа $U(n)$. В случае квантовой хромодинамики поля φ и ψ реализуют одно и то же (фундаментальное) представление группы $SU(N)$, в этом случае $V_1 = V_2$.

Цветовые индексы α , λ и индексы ароматов i , j мы в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям, будем опускать.

Основная идея метода эффективных лагранжианов состоит в том, что низкоэнергетическая динамика может быть описана в терминах составных полей — "параметров порядка", имеющих квантовые числа наблюдаемых бесцветных частиц.

В случае КХД простейшим синглетным параметром порядка является киральное суперполе

$$i(\bar{\varphi}^{\alpha} t^a \bar{\psi}^{\alpha} - \psi^{\alpha} t^a \varphi^{\alpha}) = \mathcal{L}^a(A, \psi), \quad (3)$$

где t^a — генераторы группы ароматов. Эффективный лагранжиан КХД, зависящий от параметров $\mathcal{L}^a$, был построен в работе [23]. Однако в случае киральной материи такой инвариант построить нельзя, и простейшим синглетным параметром порядка является суперполе общего вида

$$i[\bar{\varphi}^{\alpha}(e^{V_1})_{\alpha\beta} t^a \varphi^{\beta} - \psi^{\lambda}(e^{V_2})_{\lambda\kappa} t^a \bar{\psi}^{\kappa}]. \quad (4)$$

Эффективный лагранжиан должен зависеть от такого же числа переменных, что можно обеспечить, вводя синглетное суперполе общего вида $\mathcal{U}^a$, либо два киральных суперполя $\mathcal{J}_1^a$, $\mathcal{J}_2^a$. Первая возможность была использована в работе [12], мы используем второй вариант.

Будет показано, что в пределе $N \rightarrow \infty$ в низкоэнергетической области производящий функционал функций Грина синглетных полей (4) может быть записан в виде

$$Z(\xi) = \int d\mu(\varphi, \psi, V) \exp\{iS(\varphi, \psi, V)\} = \int d\mu(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \exp\{iS_q(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)\}, \quad (5)$$

где S' задаётся формулой (1) плюс члены с синглетными источниками.

Синглетные поля можно ввести с помощью киральных вращений, умножив левую часть равенства (5) на "единицу"

$$1 = \Delta \int d\mu(\Omega_1, \Omega_2) \delta(\bar{\varphi} \bar{\Omega}_1 t^a e^{V_1} \Omega_1 - \psi \Omega_2 t^a e^{-V_2} \bar{\Omega}_2 \bar{\psi}), \quad (6)$$

где Ω_1, Ω_2 - киральные суперполя вида

$$\Omega_{1,2} = \exp \{ i \pi_{1,2}^a t^a \} , \quad (7)$$

Делая замену переменных $\bar{\varphi} \bar{\Omega}_i \rightarrow \bar{\varphi}$, $\Psi \Omega_i \rightarrow \Psi$, получим

$$\begin{aligned} Z(\xi) = & \int d\mu(\varphi, \psi, \bar{\psi}) d\mu(\Omega_1, \Omega_2) d\psi \exp \{ i S_{YM} + i S_p(\bar{\varphi} \bar{\Omega}_i e^{V_i} \Omega_i \varphi + \\ & + \psi \Omega_i e^{-V_i} \bar{\Omega}_i \bar{\psi}) + \varphi^a (\bar{\varphi} t^a e^{V_i} \varphi - \psi t^a e^{-V_i} \bar{\psi}) \} \Delta \cdot \mathcal{Y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь Δ - детерминант Фаддеева-Попова, который, как можно показать [17, 21], не дает вклада в старшем порядке по $1/N$. $\mathcal{Y}$ - аномальный якобиан, который был явно вычислен в работах [18-20]. Он включает член Весса-Зумино, а также член, отвечающий абелевой аномалии. В низкоэнергетической области существенен лишь последний член, т.к. все прочие слагаемые содержат старшие производные.

В формуле (8) символом S_p обозначена операция взятия следа вместе со всеми необходимыми интегрированиями. Член с источником явно не выписан, в пределе $N \rightarrow \infty$ он переходит в источник для синглетных полей $\bar{\pi}$ [17, 21].

Из формулы (8) следует, что интересующее нас эффективное действие $S_{eff}(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$ зависит лишь от комбинаций $\bar{\Omega}_1 \Omega_1$ и $\bar{\Omega}_2 \Omega_2$. Наиболее общее суперсимметричное выражение, зависящее от $\bar{\Omega}_1 \Omega_1$ и $\bar{\Omega}_2 \Omega_2$ и содержащее минимальное число производных, имеет вид

$$\begin{aligned} S_{eff} = N \sum_{m,n=0}^{\infty} S_p(a_{nm} \mathcal{V}_1^n \mathcal{V}_2^m + [\bar{b}_1(\bar{\theta}\bar{\theta}) + b_2(\theta\theta)] \mathcal{V}_1 + \\ + [\bar{b}_2(\bar{\theta}\bar{\theta}) + b_2(\theta\theta)] \mathcal{V}_2), \end{aligned} \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\bar{\Omega}_1 \Omega_1 = \exp \{ \mathcal{V}_1 \}, \quad \bar{\Omega}_2 \Omega_2 = \exp \{ \mathcal{V}_2 \}. \quad (10)$$

Выражение (9) содержит большой произвол, т.к. фактически зависит от произвольной функции от $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$. Однако из представления (8) следует, что S_{eff} должно быть инвариантно относительно масштабных преобразований

$$\bar{\Omega}_{1,2} \rightarrow e^d \bar{\Omega}_{1,2}, \quad \Omega_{1,2} \rightarrow e^d \Omega_{1,2}, \quad (11)$$

где d — произвольная константа. Инвариантность неаномальной части следует из возможности компенсирующей замены переменных:

$$\bar{\varphi} \rightarrow e^{-d} \bar{\varphi}, \quad \varphi \rightarrow e^{-d} \varphi, \quad \psi \rightarrow e^{-d} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-d} \bar{\psi}, \quad \varphi \rightarrow e^{2d} \varphi, \quad (12)$$

а в инвариантности аномальной части можно убедиться непосредственно.

При преобразованиях (II)

$$U_{1,2} \rightarrow U_{1,2} + 2d; \quad \delta(U_{1,2})^K = K(U_{1,2})^{K-1} \cdot 2d. \quad (13)$$

Поскольку при произвольных $\pi_1, \pi_2, S_P U_{1,2} = 0$, а $S_P U_1^K U_2^L \neq 0$, ($K+L > 1$), мы приходим к выводу о том, что отличны от нуля лишь коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{22}, \theta_1, \theta_2$, и S_{ef} имеет вид

$$S_{ef} = N S_P (a_{11} U_1^2 + a_{12} U_1 U_2 + a_{22} U_2^2 + \\ + [\bar{\theta}_1 (\bar{\theta} \bar{\theta}) + \theta_1 (\theta \theta)] U_1 + [\bar{\theta}_2 (\bar{\theta} \bar{\theta}) + \theta_2 (\theta \theta)] U_2). \quad (14)$$

Ясно, что возможность спонтанного нарушения симметрии связана с присутствием линейного по $U_{1,2}$ члена. Если коэффициенты $\theta_{1,2} = 0$, то действие (14) имеет очевидный суперсимметричный экстремум $\pi_1 = \pi_2 = 0$. В противном случае возможно несуперсимметричное основное состояние.

Чтобы исследовать вопрос о наличии линейного по π_1 члена, заметим, что эффективное действие можно получить следующим образом. Вначале выполним интегрирование по цветным полям φ, ψ, V . В результате мы получим выражение вида

$$Z = \int \exp \{ i N \tilde{S}(\varphi, \Omega_1, \Omega_2) \} d\varphi d\mu(\Omega_1, \Omega_2). \quad (15)$$

Функционал $\tilde{S}$ представляет собой сумму планарных диаграмм, содержащих одну петлю материи. Для получения S_{ef} нужно выполнить в формуле (15) интегрирование по φ . В пределе $N \rightarrow \infty$ это можно сделать с помощью метода стационарной фазы. Интеграл (15) равен подинтегральному выражению, вычисленному в точке экстремума показателя экспоненты

$$\left. \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \varphi} \right|_{\varphi = \varphi_0} = 0. \quad (16)$$

Воспользуемся теперь суперсимметричными тождествами Уорда для функционала (15). Эти тождества можно записать в виде ^{1/22}

$$E_+ \langle \bar{\varphi} t^a e^{V_1} \varphi + \bar{\varphi} t^a e^{V_2} \varphi + \delta^{a0} a_1 \rangle + (E_+ \leftrightarrow E_-) = 0 \quad (17)$$

$$E_+ \langle \psi t^a e^{-V_2} \bar{\psi} - \psi t^a e^{-V_1} \bar{\psi} + \delta^{a0} a_2 \rangle + (E_+ \leftrightarrow E_-) = 0.$$

Здесь $\alpha_{1,2}$ - абелева аномалия, $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по цветным полям, E_+ , E_- - киральные проекторы. Из тождеств (17) следует, что

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \pi_1} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \pi_2} \sim \psi \frac{\delta S}{\delta \psi} \Big|_{\pi_{1,2}=0}. \quad (18)$$

Следовательно, в точке экстремума по ψ

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \pi_1} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \pi_2} \Big|_{\psi=\psi_0, \pi_{1,2}=0} = 0. \quad (19)$$

В случае квантовой хромодинамики ($V_1 = V_2$) эффективное действие должно быть симметрично относительно замены $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2$. Это следует из возможности компенсирующей замены переменных $V \rightarrow -V$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\psi \rightarrow -\varphi$ в формуле (8).

Поэтому в КХД $\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \pi_1} = \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \pi_2}$ и из формулы (19) следует, что

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \pi_1} = \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \pi_2} \Big|_{\pi_{1,2}=0} = 0. \quad (20)$$

Линейный по $\pi_{1,2}$ член отсутствует, суперсимметрия не нарушена.

В случае киральной материи симметрия отсутствует и возможны линейные по $\pi_{1,2}$ члены в эффективном действии. В настоящее время мы не можем, не делая дополнительных предположений, дать однозначный ответ относительно величины коэффициентов θ_1 и θ_2 в киральном случае. Заметим, однако, что если среднее значение аномалии равно нулю, $\langle \alpha_{1,2} \rangle = 0$, то, как следует из тождеств (17),

$$\langle \bar{\varphi} t^a e^{V_1} \varphi \rangle_{\pi_{1,2}=0} = 0; \quad \langle \psi t^a e^{-V_2} \bar{\psi} \rangle_{\pi_{1,2}=0} = 0, \quad (21)$$

и линейные члены отсутствуют. Таким образом, необходимым условием спонтанного нарушения суперсимметрии является отличие от нуля среднего значения аномалии

$$\langle a_{1,2} \rangle \neq 0. \quad (22)$$

Мы видим, следовательно, что результаты, полученные в рамках $\frac{1}{N}$ разложения, качественно согласуются с результатами, полученными в рамках инстантонного подхода: для динамического спонтанного нарушения суперсимметрии необходимо наличие существенно кирального взаимодействия полей материя. В векторноподобной суперсимметричной квантовой хромодинамике спонтанное нарушение суперсимметрии не происходит.

Литература

1. P.Fayet, J.Illiopoulos.-Phys. Let. 1974, 51B, p.461.
2. O'Raifeartaigh.-Nucl. Phys. 1975, B96, p.331.
3. A.A.Славнов.-ТМФ, 1976, 27, стр.141.
4. S.Weinberg.-Nucl. Phys. 1975, B97, p.127.
5. E.Witten.-Nucl. Phys. 1981, B185, p.513; 1982, 202, p.253.
6. M.E.Peshkin. SLAC Preprint PUB-3061 (1983).
7. G.Veneziano, S.Yankielowicz.-Phys. Let. 1982, B113, p.321.
8. T.R.Taylor, G.Veneziano, S.Yankielowicz.-Nucl. Phys. 1983, B 218, p.493.
9. K.Shizuya, Y.Yasui.-Phys. Rev. 1983, D29, p.1160.
10. H.P.Nilles.-Phys. Let. 1983, 129B, p.103.
11. O.Kaymakcalan, J.Shechter.-Nucl.Phys. 1984, B259, p.519.
12. K.Konishi, G.Veneziano. Preprint CERN-TH 4588/86, 1986.
13. V.A.Novikov et al.-Nucl.Phys. 1985, B256, p.157.
14. А.И.Вайнштейн и др.-УФН, 1985, 146, стр.683.
15. D.Amati et al.-Nucl. Phys. 1986, B263, p.591.
16. I.Affleck et al.-Nucl.Phys. 1985, B256, p.557.
17. Н.Карчев, А.А.Славнов.-ТМФ, 1985, 65, стр.192.
18. L.O.Chekhov, V.K.Krivoshekov,-Mod.Phys. Let., 1986, A1, p.501.
19. В.К.Кривошеков и др.-ТМФ, 1986, 68, стр.236.
20. R.Garreis et al.-Z.Phys. 1985, c28, p.623.
21. А.А.Славнов.-ТМФ, 1986, 66, стр.197.
22. O.Piquet, K.Sibold.-Nucl.Phys. 1984, B247, p.484.
K.Konishi.-Phys. Let. 1984, 135 B, p.433.
23. В.К.Кривошеков и др.-ТМФ, 1987, 72, стр.12.

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В СУПЕРСИММЕТРИИ

М.П. Чавлейшвили

Институт физики высоких энергий Тбилисского
государственного университета,
Тбилиси

Теория суперсимметрии интенсивно развивается в последние годы. В ней есть выражающие сущность заложенных принципов и в этом смысле твердо установленные факты – связь частиц с разными спинами. Ключевой частицей в объединенных теориях, основанных на суперсимметрии, является гравитация, частица со спином $3/2$, суперсимметричный партнер гравитона $[1-3]$. Несмотря на приложенные огромные усилия и полученные результаты в изучении структуры теории, до сих пор не найден "окончательный" лагранжиан, описывающий с единой точки зрения процессы взаимодействия частиц, тем не менее в этой незавершенной теории уже сегодня можно получить важные общие результаты. В данной работе рассматриваются низкоэнергетические теоремы для рассеяния гравитино. Их удастся доказать, основываясь на общем формализме рассмотрения спиновых явлений в бинарных процессах.

При нахождении адекватной параметризации матрицы рассеяния частиц со спином важно органически учитывать связанные с общими принципами симметрий законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Модельно независимые свойства S -матрицы связаны с ее аналитическими свойствами. Матрица рассеяния имеет особенности двух видов – связанные со спином частиц кинематические

особенности и динамические особенности, которые задаются дисперсионными соотношениями. Оказалось, что если последовательно учитывать законы сохранения, можно получить параметризацию матрицы рассеяния и связанных ней спиральных амплитуд и определить так называемые динамические амплитуды, которые свободны от кинематических особенностей по обоим инвариантным переменным.

Знание кинематической структуры спиральных амплитуд бинарных процессов и дисперсионного представления для них позволяет получить интересные следствия. Были доказаны низкоэнергетические теоремы для фотон-адронных процессов и выявлена их кинематическая природа [4,5], найдены модельно-независимые ограничения типа правил сумм для комптон-эффекта [6,7]. В суперсимметрии кинематический анализ применялся в [8,9].

Мы единым образом рассматриваем рассеяние безмассового гравитино [10] на массивных частицах со спинами 0 (пионе) и $1/2$ (нуклоне). Определяем динамические амплитуды для этих процессов, получаем дисперсионные соотношения для физических спиральных амплитуд, доказываем низкоэнергетические теоремы.

Если наложить требования Р-инвариантности, рассеяние гравитино на пионе в системе центра масс S -канала описывается двумя спиральными амплитудами $f_{\pi 0, \pi 0}^s(s, t)$ и $f_{\pi 0, -\pi 2 0}^s(s, t)$. Для рассеяния на нуклоне имеем 6 независимых амплитуд:

$$f_{\pi 1/2, \pi 1/2}^s, f_{\pi 1/2, -\pi 1/2}^s, f_{\pi 1/2, \pi 3/2}^s, f_{\pi 1/2, -\pi 3/2}^s, f_{\pi 3/2, \pi 1/2}^s, f_{\pi 3/2, -\pi 1/2}^s. \quad (I)$$

Закон сохранения проекции момента требует обращения в ноль при рассеянии на нулевой угол амплитуды с изменением спиральности - вторая амплитуда для рассеяния на пионе и четыре последних амплитуды в (I) для рассеяния на нуклоне. Для рассеяния назад в ноль должны обращаться другие амплитуды. Эти свойства можно получить, используя соответствующее разложение спиральных амплитуд.

Для спиральных амплитуд их общие свойства симметрии приводят к физической выделенности разложения в ряд по собственным функциям оператора вращения d -функции Вигнера. Учитывая связь между функциями Вигнера и полиномами Якоби второго рода [II], такое разложение для любого бинарного процесса можно представить в виде:

$$\bar{f}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^s(s, t) = (s i \frac{\theta_s}{2})^{|\lambda_1 \mu|} (c i \frac{\theta_s}{2})^{|\lambda_3 \mu|} \sum_J (2J+1) \bar{f}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{s, J}(s) P_{J-\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)}^{|\lambda_1 \mu|, |\lambda_3 \mu|}(\cos \theta_s). \quad (2)$$

λ_i - спиральности соответствующих частиц, $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\mu = \lambda_3 - \lambda_4$, θ_s - угол рассеяния в с.ц.м. s -канала. Безразмерные тригонометрические множители перед знаком суммы гарантируют выполнение законов сохранения.

Для рассеяния безмассового гравитино на пионе и нуклоне

$$\sin \frac{\theta_s}{2} = \frac{\sqrt{-st}}{s-m^2}, \quad \cos \frac{\theta_s}{2} = \frac{\sqrt{st+(s-m^2)^2}}{s-m^2}, \quad (3)$$

где m - масса мипени. Зависимость от переменной t в (2) содержится в множителях (2) и в полиномах Якоби. $\cos \theta_s$ линейно зависит от t , полиномы Якоби в (2) будут полиномами и по t . Выражения $\sqrt{-t}$ и $\sqrt{st+(s-m^2)^2}$ в (3) содержат кинематические особенности спиральных амплитуд по t . Множители (3) вводят также лишние кинематические особенности по переменной s . Можно определить амплитуды, не содержащие кинематических особенностей по t и не имеющие лишних особенностей по s . Такие амплитуды $\bar{f}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^s(s, t)$ (их можно назвать дисперсионными амплитудами) определяются следующим образом:

$$\bar{f}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^s(s, t) = \left(\frac{\sqrt{-t}}{m} \right)^{|\lambda_1 \mu|} \left(\frac{\sqrt{st+(s-m^2)^2}}{m^2} \right)^{|\lambda_3 \mu|} \bar{f}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^s(s, t). \quad (4)$$

Дисперсионные амплитуды, как легко можно увидеть, используя (2) и (3), разлагаются по полиномам по t и по этой переменной (а также по третьей, мандельштамовской переменной u), не имеют кинематических особенностей. Множители перед дисперсионной ампли-

тудой в (3) обеспечивают автоматическое выполнение закона сохранения проекции момента для рассеяния вперед и назад, эти множители безразмерны, они содержат все кинематические особенности спиральных амплитуд по t и не вводят дополнительных кинематических особенностей по S . Для рассеяния гравитино $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и имеем

$$\bar{f}_{\lambda_3, 0, \lambda_0}^s(s, t) = \left(\frac{\sqrt{-t}}{m} \right)^{|\lambda_1 - \lambda_3|} \left(\frac{\sqrt{St + (S - m^2)^2}}{m^2} \right)^{|\lambda_1 + \lambda_3|} \bar{f}_{\lambda_1, 0, \lambda_0}^s(s, t). \quad (5)$$

В t -канале связь между спиральными и дисперсионными амплитудами задается формулой

$$\bar{f}_{\mu_1, \mu_2, 00}^t(s, t) = \left(\frac{\sqrt{St + (S - m^2)^2}}{m^2} \right)^{|\mu_1 - \mu_2|} \bar{f}_{\mu_1, \mu_2, 00}^t(s, t). \quad (6)$$

Функции $\bar{f}_{\mu_1, \mu_2, 00}^t(s, t)$ не содержат кинематических особенностей по S .

Для нахождения кинематических особенностей спиральных амплитуд S -канала воспользуемся кроссинг-соотношениями [12].

Для рассеяния гравитино на пионе из-за нулевой массы гравитино и нулевого спина пиона кроссинг-соотношения предельно просты:

$$\bar{f}_{\lambda_3, 0, \lambda_0}^s(s, t) = \eta \bar{f}_{\lambda_1 - \lambda_2, 00}^t(s, t). \quad (7)$$

η по модулю равен единице и не зависит от S, t . Для дисперсионных амплитуд имеем:

$$\bar{f}_{\lambda_3, \lambda_1, 0}^s(s, t) = \eta \left(\frac{\sqrt{-t}}{m} \right)^{|\lambda_2 - \lambda_3|} \bar{f}_{\lambda_3 - \lambda_1, 00}^t(s, t). \quad (8)$$

$\bar{f}_{\lambda_3 - \lambda_1, 00}^t$ не имеет кинематических особенностей по S , множитель перед ней не зависит от S , стало быть $\bar{f}_{\lambda_3, \lambda_1, 0}^s$, будучи кинематически регулярной по t , свободна и от кинематических особенностей по S . Она вообще не содержит кинематических особенностей. Такую функцию мы называем динамической амплитудой, для данного процесса она совпадает с дисперсионной амплитудой

$$\mathcal{D}_{\lambda_3, \lambda_0}^s(s, t) = \bar{\mathcal{D}}_{\lambda_3, \lambda_1, 0}^s(s, t) \quad (9)$$

и связана со спиральной амплитудой соотношением:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\lambda_3, \lambda_1, 0}^s(s, t) = \left(\frac{\sqrt{-t}}{m}\right)^{|\lambda_1 - \lambda_3|} \left(\frac{\sqrt{st + (s-m^2)^2}}{m^2}\right)^{|\lambda_1 + \lambda_3|} \mathcal{D}_{\lambda_3, \lambda_1, 0}(s, t). \quad (10)$$

Для рассеяния гравитино на нуклоне кроссинг-соотношения более сложны. Связь между дисперсионными и динамическими амплитудами задается формулой

$$\bar{\mathcal{D}}_{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) = \frac{m^2}{s - m^2} \mathcal{D}_{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2}(s, t). \quad (11)$$

Учитывая (4), имеем окончательно параметризацию спиральных амплитуд посредством динамических

$$\bar{\mathcal{D}}_{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t) = \left(\frac{\sqrt{-t}}{m}\right)^{|\lambda_1 - \lambda_3|} \left(\frac{\sqrt{st + (s-m^2)^2}}{m^2}\right)^{|\lambda_1 + \lambda_3|} \left(\frac{m^2}{s - m^2}\right)^{2S_1} \mathcal{D}_{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2}(s, t). \quad (12)$$

Мы ввели в формулу S_1 -спин мишени. Тогда формула (11) становится общей - справедливой и для рассеяния гравитино на пионе (тогда (12) переходит в (10)), и для рассеяния на нуклоне.

Соотношение (12) дает возможность получать дисперсионные соотношения для физических спиральных амплитуд $\bar{\mathcal{D}}_{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2}^s(s, t)$. Дисперсионные соотношения ищутся на основе знания аналитической структуры амплитуд. Если рассеиваются частицы без спина, то аналитические свойства одной амплитуды, описывающей процесс, определяются только условием унитарности, которое определяет, в частности, положение полюсов и начало разрывов в дисперсионном представлении. В реальных процессах, когда хотя бы одна амплитуда обладает ненулевым спином, ситуация усложняется. У каждой спиральной амплитуды помимо особенностей, связанных с условием унитарности (динамических особенностей), возникают дополнительные кинематические особенности. Эти особенности в (12) явно выделены.

Рассмотрим динамические амплитуды при фиксированном значении

5. Аналитические свойства динамических амплитуд для комплексных значений переменных задаются особенностями, которые определяются условием унитарности, при этом однозначные промежуточные состояния в условии унитарности определяют полюса, а многочастичные промежуточные состояния — амплитуды на разрезе. Начало разреза определяется пороговым значением двухчастичных промежуточных состояний. Дисперсионные соотношения для динамических амплитуд имеют вид

$$\mathcal{D}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t) = \frac{i}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt' [\mathcal{D}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t')]^t}{t' - t} + \frac{i}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du' [\mathcal{D}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, u')]^u}{u' - u}. \quad (13)$$

Здесь $[\mathcal{D}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t')]^t$ и $[\mathcal{D}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, u')]^u$ — скачки указанных в скобках функций в t - и u -каналах соответственно.

Для обычного комптон-эффекта на пионе и нуклоне имеются борновские члены, соответствующие промежуточному состоянию с полюсом в точке $s = m^2$, где m — масса частицы мишени. В нашем случае начальная частица и одночастичная промежуточная частица имеют разные спины, из-за того, что гравитино является фермионом. Предположив, что не существует фермиона с массой, точно равной массе пиона, и отсутствует бозон с массой нуклона, мы исключаем борновские члены. Однако в обеих рассматриваемых нами реакциях существует вклад t -канального борновского члена с обменом фотоном, что дает полюсный член в точке $t = 0$. Вкладом t -канального обмена гравитоном, из-за малости соответствующей константы взаимодействия, мы пренебрегаем.

Для процессов с участием фотона [13-15] промежуточными многочастичными состояниями в условии унитарности (определяющими скачки динамических амплитуд), которые содержат фотоны, пренебрегали вследствие малости константы электромагнитных взаимодействий. Полученные результаты были точны по сильным взаимодействиям (для которых теория возмущения не работала), а по электромагнитным взаимодействиям они были справедливы лишь в приближении. Ана-

логичное предположение об отсутствии в промежуточных состояниях безмассовых частиц делалось при рассмотрении рассеяния гравитона [4, 16]. Мы будем считать, что константа взаимодействия безмассового гравитина с массивными частицами мала, будем пренебрегать вкладами двухчастичных и многочастичных унитарных диаграмм, которые содержат безмассовые частицы. Учитывая эти замечания и формулы (12), (13), будем иметь для физических спиральных амплитуд дисперсионные соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2}^s (s, t) = & \int_{\lambda_3 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2}^B (s, t) + \left(\frac{\sqrt{-t}}{m} \right)^{|\lambda_1 \lambda_4|} \left(\frac{\sqrt{s t + (s - m^2)^2}}{m^2} \right)^{|\lambda_1 \lambda_2|} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \left[\left(\frac{\sqrt{-t'}}{m} \right)^{-|\lambda_1 \lambda_4|} \left(\frac{\sqrt{s t' + (s - m^2)^2}}{m^2} \right)^{-|\lambda_1 \lambda_2|} \int_{\lambda_3 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2}^s (s, t') \right]^{\tau} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{u' - u} \left[\left(\frac{\sqrt{2m^2 - s - u'}}{m} \right)^{-|\lambda_1 \lambda_4|} \left(\frac{\sqrt{m^2 - s - u'}}{m^2} \right)^{-|\lambda_1 \lambda_2|} \int_{\lambda_3 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2}^s (s, u') \right]^u \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\int_{\lambda_3 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2}^B (s, t)$ борновский член, соответствующий обмену фотоном. Энергия падающего гравитина E связана с инвариантными переменными формулами

$$E = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}, \quad t = -2E^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}. \quad (15)$$

Когда $E \rightarrow 0$ при фиксированном угле рассеяния, $s \rightarrow m^2$, $t \rightarrow 0$. Нас интересует поведение спиральных амплитуд при $s \approx m^2$, $t \approx 0$. Для удобства изучения низкоэнергетического поведения, множители перед фигурными скобками в (14) выразим посредством S и Θ (т.к. нас интересует поведение спиральных амплитуд при фиксированном Θ). В подынтегральном выражении для нас удобнее иметь динамические амплитуды, свободные от кинематических особенностей.

Учитывая эти замечания, имеем вместо (14):

$$\begin{aligned} f_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^S(s, t) = & \int_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^B(s, t) + \left(\sin \frac{\Theta_1}{2}\right)^{|\lambda_1 - \mu_1|} \left(\cos \frac{\Theta_2}{2}\right)^{|\lambda_2 - \mu_2|} \left(\frac{m}{\sqrt{s}}\right)^{|\lambda_3 - \mu_3|} \left(\frac{s - m^2}{m^2}\right)^{\eta} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} [\mathcal{D}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t')]^t + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{u' - u} [\mathcal{D}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, u')]^u \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для нас существенно, что вклад от континуума в формулах (16) является неизвестной, но регулярной функцией при $E \rightarrow 0$. Она свободна как от кинематических особенностей по обеим переменным (содержит динамические амплитуды), так и от динамических сингулярностей (динамические полюса выделены). При $E \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$, $s \rightarrow m^2$, Θ_1 фиксировано) вклад от континуума подавляется множителем $E^{\eta} \sim \left(\frac{s - m^2}{m^2}\right)^{\eta}$, остается борновский член, и мы получаем искомые низкоэнергетические теоремы для спиральных амплитуд:

$$f_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^S(s, t) = \int_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^B(s, t) + O(E^{\eta}). \quad (17)$$

Число η определяется кинематикой процесса (конкретно из (12)). Итак, мы показали, что для обеих независимых спиральных амплитуд рассеяния гравитона на пионе и для четырех амплитуд рассеяния на нуклоне (кроме $\int_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^S$ и $\int_{\mu_1 \mu_2 - \mu_3 - \mu_4}^S$) в низкоэнергетическом пределе борновский член определяет поведение спиральных амплитуд с точностью до $O(E^{\eta})$, а для остальных двух амплитуд - с точностью до $O(E)$.

Автор признателен А.Н.Тавхелидзе за внимание и поддержку, В.Г.Кадышевскому, В.А.Матвееву за полезные обсуждения.

Литература

1. В.И.Огиевецкий, Л.Мезиническу -УФН, 1975, т. 117, с. 637.
2. P.Fayet, S.Ferrara -Phys.Reports, 1977, v. 32C, p. 422.
3. P. van Nieuwenhuizen -Phys. Reports, 1981, v. 68C, p. 380.
4. Р.М.Мурадян, М.П.Чавлейшвили -ТМФ, 1971, т. 6, с. 16.

5. М.П.Чавлейшвили. ОИЯИ Р2-9417, Дубна, 1975.
6. М.П.Чавлейшвили -ЯФ, 1983, т. 37, с. 380.
7. М.П.Чавлейшвили -ЯФ, 1984, т. 40, с. 813.
8. M.T.Grisaru, H.N.Pendelton, P. van Nieuwenhuizen -Phys. Rev., 1977, v. D15, p. 996.
9. M.T.Grisaru, H.N.Pendelton -Nuclear Physics, 1977,v.B124, p. 81.
10. S.Weinberg -Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, p. 1303.
11. Д.А.Варшавский и др. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
12. J.P.Ader, M.Capdeville, H.Navelet -Nuovo Cimento, 1968, v. 56A, p. 315.
13. A.A.Logunov, L.D.Soloviev, A.N.Tavkhelidze -Nucl. Phys., 1957, v. 4, p. 425.
14. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков -ДАН СССР, 1957, т. 113, с. 520.
15. H.D.Abarbanel, M.L.Goldberger -Phys.Rev., 1968, v. 165, p. 1594.
16. D.J.Gross, R.Jackiw -Phys.Rev., 1968, v. 166,p. 1287.

POSSIBLE TESTS FOR LIGHTEST SUPERSYMMETRIC PARTICLE IN POLARIZED e^+e^- - COLLISIONS

E.Ch.Christova, M.P.Nedelcheva

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

Annihilation of the longitudinally polarized e^+e^- into two neutralinos is considered. One of the produced neutralino is assumed to be the lightest SUSY particle (LSP). It is shown that measurements of the cross-section and polarization asymmetry would allow one to distinguish between the two cases: when LSP is of the Higgsino or gaugino type.

1. In supersymmetric models ^{/1/} that seem to play an important role in unified theories, heavy Majorana particles called the neutralinos appear inevitably. In the minimal SUSY extension of the standard model ^{/2/} these are the superpartners $\tilde{\gamma}$ and $\tilde{Z}$ of the two neutral gauge bosons and the superpartners $\tilde{H}_0$ and $\tilde{H}_{20}$ of the two neutral Higgs bosons.

As no hint of existence of the proposed superpartners of the conventional particles has been observed so far, one should admit that at the energies available at present SUSY is badly broken. This implies a physical (massive) neutralino χ_i to be a mixture of spin -1/2 neutral SUSY-partners:

$$\chi_i = N_{ij} \Psi_j, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} \\ \tilde{Z} \\ \tilde{H}_{10} \\ \tilde{H}_{20} \end{pmatrix}, \quad (I)$$

where N_{ij} are elements of the neutralino mixing matrix determined by the mechanism of SUSY-breaking (SSB) (the subindex L denotes l.h. components of the four-component spinors). Knowledge of N_{ij} and the mass spectrum of χ_i is of fundamental theoretical importance for understanding the mechanism of SSB.

In this paper the production cross-section for two different neutralinos χ_1 and χ_2 in longitudinally polarized e^+e^- collisions

$$e^+ + e^- \rightarrow \chi_1 + \chi_2 \quad (2)$$

is calculated in the framework of the SUSY extended minimal standard model. The general case of arbitrary neutralino mixing is considered, i.e. N_{ij} are not associated with any definite SSB mechanism. Process (2) has been considered earlier for unpolarized initial beams in refs. /3-6/ and for polarized beams in refs. /7,8/.

We assume that χ_1 is the lightest SUSY-particle (LSP). The existence of LSP to be stable follows from the R-parity conservation /2/. The most plausible candidate in most SUSY-models is the lightest massive state among the $S = 1/2$ neutralinos χ_i . Its type is uniquely predicted by the accepted scheme of SSB. It would be interesting to find specific properties of the cross-section and its polarization asymmetries that would allow one to distinguish between the different types of LSP. To obtain properties that reflect only the type of LSP, χ_1 , and do not depend on χ_2 in process (1) is the aim of this paper.

We assume process (2) to be identified by observation of a lepton l^+l^- - pair (from the decay of the short-lived neutralino $\chi_2 \rightarrow \chi_1 + e^+e^-$) and a large amount of "missing" momentum (taken away by χ_1). No serious background from the standard model exists.

We shall here show that measurements of the cross-section and longitudinal polarization asymmetry allow us to distinguish between the two characteristic cases for neutralino mixing:

i) when LSP is of a gaugino type, i.e. χ_1 is mainly a mixture of the spartners of neutral gauge bosons and

ii) when LSP is of a Higgsino type, i.e. χ_1 is a mixture of $\tilde{H}_{10}$ and $\tilde{H}_{20}$. It is shown also that the longitudinal asymmetry is very sensitive to the mass spectrum of the charged sleptons.

2. The interaction Lagrangian of the minimal SUSY model /2,4/ generating process (1) consists of two parts, $\mathcal{L}_\chi$ and $\mathcal{L}_{\tilde{e}}$, describing the interaction of e^-, e^+ and χ_i with $\tilde{\chi}^c$ and the left- and right-handed charged sleptons $\tilde{e}_L$ and $\tilde{e}_R$ respectively. We assume that CP-invariance holds. In this case the Lagrangian may be written in the form:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{\tilde{e}}$$

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{-ig}{\cos \theta_w} \left[\bar{e} \not{f}_\mu (c_V + c_A \not{f}_5) e - \bar{\chi}_i \not{f}_\mu (g_V + g_A \not{f}_5) \chi_i \right] \cdot \tilde{\chi}_\mu \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{e}} = \frac{ig}{2} \sum_{i=1,2} \left\{ \xi_i U_{iL} \tilde{e}_L \bar{e} \frac{1-\not{f}_5}{2} \chi_i - \right. \\ \left. - U_{iR} \tilde{e}_R \bar{e} \frac{1+\not{f}_5}{2} \chi_i \right\} + h.c.,$$

where

$$c_V = \frac{1}{4} - \sin^2 \theta_w, \quad c_A = \frac{1}{4}$$

$$g_V = O_{12} (1 - \xi_1 \xi_2), \quad g_A = O_{12} (1 + \xi_1 \xi_2)$$

$$O_{12} = -\frac{1}{2} N_{13} N_{23} + \frac{1}{2} N_{14} N_{24}$$

$$U_{iL} = N_{i2} + N_{i1} \tan \theta_w, \quad U_{iR} = 2 N_{i1} \tan \theta_w, \quad i=1,2.$$

The couplings of $\tilde{\chi}^0$ to e^+e^- are given by the standard model and expressed in terms of the weak mixing angle $\sin^2 \theta_w$. The couplings of neutralinos to $\tilde{\chi}^0$ (g_V and g_A) and to the charged sleptons (U_{iL} and U_{iR}) are determined by the SSB mechanism and expressed via N_{ij} . Without loss of generality the neutralino mixing matrix in eq. (3) is chosen to be orthogonal. In this case (of CP-invariance and $N^{-1} = N^T$) the sign factor ξ_κ in the Majorana condition

$$C \tilde{\chi}_\kappa^T(x) = \xi_\kappa \chi_\kappa(x), \quad \xi_\kappa = \pm 1, \quad \kappa = 1, \dots, 4 \quad (4)$$

(C is the charge conjugate matrix, $C \not{f}_\mu^T C^{-1} = -\not{f}_\mu$) is related to the CP-parity η_κ^{CP} ($\eta_\kappa^{CP} = \pm 1$) of χ_κ [9], $i \eta_\kappa^{CP} = \xi_\kappa$, which ensures the mass spectrum of χ_κ to be non-negative.

The cross-section of process (2), when e^+ and e^- are longitudinally polarized, has the general form [10]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\lambda_1, \lambda_2} = \mathcal{L}_0 \left[(1 - \lambda_1 \lambda_2) X_1(\theta) + (\lambda_2 - \lambda_1) X_2(\theta) \right]. \quad (5)$$

Here λ_1 and λ_2 are longitudinal polarizations of e^- and e^+ , θ is the angle between the momenta of e^- and X_2 in the c.m.s. Both $X_1(\theta)$ and $X_2(\theta)$ get contributions from the diagrams with $\tilde{X}^0$ -exchange, $\tilde{e}_L$ and $\tilde{e}_R$ exchange and from $\tilde{X}^0$ - $\tilde{e}_L$, $\tilde{X}^0$ - $\tilde{e}_R$ interference:

$$X_i(\theta) = X_i^{\tilde{X}}(\theta) + X_i^{\tilde{e}}(\theta) + X_i^I(\theta), \quad (6)$$

$i = 1, 2.$

From eqs. (4)-(6) we obtain

$$\mathcal{L}_0 = \frac{4\mathcal{L}^2 |\vec{p}|}{5\sqrt{5}} \frac{1}{\sin^4 \theta_W \cos^4 \theta_W},$$

$$|\vec{p}| = \lambda(s, m_1^2, m_2^2)/2\sqrt{s}$$

$$X_1^{\tilde{X}}(\theta) = \frac{4\mathcal{O}_{12}^2 (c_1^2 + c_2^2)}{|D_{\tilde{X}}(s)|^2} \left\{ A + B - \frac{s}{2} \xi_1 \xi_2 m_1 m_2 \right\} \quad (7a)$$

$$X_2^{\tilde{X}}(\theta) = \frac{8\mathcal{O}_{12}^2 a_1 a_2}{|D_{\tilde{X}}(s)|^2} \left\{ A + B - \frac{s}{2} \xi_1 \xi_2 m_1 m_2 \right\},$$

$$X_1^{\tilde{e}}(\theta) = \frac{1}{8} \left(\frac{\cos^2 \theta_W}{4} \right)^2 \left\{ U_{1L}^2 U_{2L}^2 \left[\frac{A}{D_L^2(p_1)} + \frac{B}{D_L^2(p_2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{S}{2} \frac{\xi_1 \xi_2 m_1 m_2}{D_L(p_1) D_L(p_2)} \right] + (L \rightarrow R) \right\}, \quad (7b)$$

$$X_2^{\tilde{e}}(\theta) = \frac{1}{8} \left(\frac{\cos^2 \theta_W}{4} \right)^2 \left\{ U_{1L}^2 U_{2L}^2 \left[\frac{A}{D_L^2(p_1)} + \frac{B}{D_L^2(p_2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{S}{2} \frac{\xi_1 \xi_2 m_1 m_2}{D_L(p_1) D_L(p_2)} \right] - (L \rightarrow R) \right\},$$

$$X_1^I(\theta) = \frac{\cos^2 \theta_W}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{D_Z(s)} \right) \cdot O_{12} \times$$

$$\times \left\{ (C_A + C_V) U_{1L} U_{2L} \left[\frac{A}{D_L(p_1)} + \frac{B}{D_L(p_2)} - \frac{S}{4} \xi_1 \xi_2 m_1 m_2 \left(\frac{1}{D_L(p_1)} + \frac{1}{D_L(p_2)} \right) \right] \right. \\ \left. + (C_A - C_V) \times (L \rightarrow R) \right\}, \quad (7c)$$

$$X_2^I(\theta) = \frac{\cos^2 \theta_W}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{D_Z(s)} \right) \cdot O_{12} \times$$

$$\times \left\{ (C_A + C_V) U_{1L} U_{2L} \left[\frac{A}{D_L(p_1)} + \frac{B}{D_L(p_2)} - \frac{S}{4} \xi_1 \xi_2 m_1 m_2 \left(\frac{1}{D_L(p_1)} + \frac{1}{D_L(p_2)} \right) \right] \right. \\ \left. - (C_A - C_V) \times (L \rightarrow R) \right\},$$

$$A = (\ell_1 p_1)(\ell_2 p_2), \quad B = (\ell_1 p_2)(\ell_2 p_1).$$

Here S is the c.m. energy squared,

$$D_X(s) = -s + m_Z^2 - i m_Z \Gamma_Z$$

$$D_L(p_i) = (\ell_2 - p_i)^2 + m_L^2$$

$$D_R(p_i) = (\ell_2 - p_i)^2 + m_R^2$$

ℓ_1, ℓ_2, p_1, p_2 are the momenta of e^-, e^+, χ_1, χ_2 , m_L and m_R are the masses of $\tilde{e}_L$ and $\tilde{e}_R$, m_Z and Γ_Z are respectively the mass and decay width of Z^0 .

3. According to SUSY the couplings of the ordinary particles are identical with those of their superpartners. So Z^0 couples $\tilde{H}_0$ and $\tilde{H}_2$ and does not couple $\tilde{f}$ and $\tilde{Z}$, while the charged sleptons at the considered energies of negligible electron mass couple only $\tilde{f}$ and $\tilde{Z}$. Thus in the considered process of neutralino production it is only the $\tilde{H}_0$ -components (N_{i3}, N_{i4}) of χ_1 and χ_2 that contribute to $X_i^Z(\theta)$ and only the gaugino components (N_{i1}, N_{i2}) that contribute to $X_i^Z(\theta)$. It is the interference term $X_i^Z(\theta)$ that gets contributions both from Higgsino and gaugino components.

Let us assume that one of the produced neutralinos χ_1 is either of the gaugino or of $\tilde{H}_0$ -type. In this case $X_i^Z(\theta)$ equals zero, whatever the mixing in the other produced neutralino χ_2 is. If χ_1 is of the Higgsino type, process (I) proceeds via Z^0 -exchange, i.e. $X_i^Z(\theta) = X_i^Z(\theta)$, while if χ_1 is of the gaugino type, it occurs via $\tilde{e}_L, \tilde{e}_R$ -exchange, i.e. $X_i^Z(\theta) = X_i^Z(\theta)$. If we propose now that χ_1 is LSP, separating the contributions from Z^0 and from $\tilde{e}_L, \tilde{e}_R$ -exchange we would be able to distinguish between the two mechanisms of SSB: when LSP is of the Higgsino and gaugino type. If LSP is of the gaugino type, three situations characterizing the mass spectrum of $\tilde{e}_L$ and $\tilde{e}_R$ are discussed: a) the chargino massive states are degenerate, $m_L = m_R$, b) $m_L^2 \gg m_R^2$ and c) $m_L^2 \ll m_R^2$. Obviously when LSP is of the Higgsino type, the cross-section would not depend on m_L and m_R .

In fig.(I) the unpolarized total cross-section $\sigma(s)$ is shown. We see that if LSP appears to be of the $\tilde{H}_0$ -type, due to the Z^0 -annihilation diagram a resonance peak at $\sqrt{s} = m_Z$ is expected, while a flat decreasing behaviour of $\sigma(s)$ is predicted if

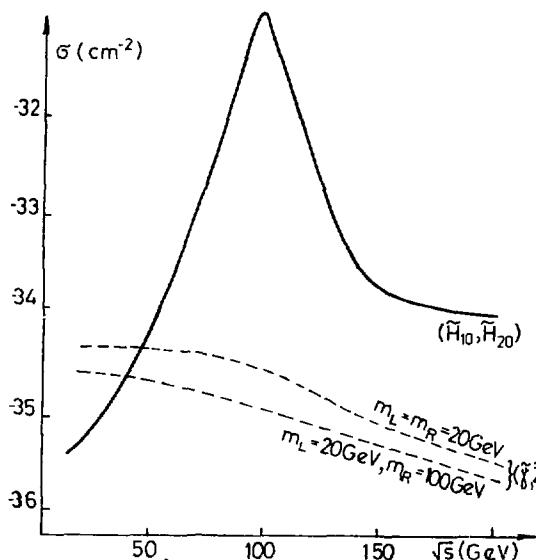


Fig.1. The total cross section versus $\sqrt{s}$ when LSP is of higgsino (full line) and of gaugino (dotted line) type.

LSP is of the gaugino type. The cross-section at the $\tilde{\chi}^0$ -peak reaches 10^{-31} cm^2 . The three considered possibilities for the chargino mass spectrum do not lead to any significant difference in $\sigma(s)$, its value being mainly determined by the lighter $\tilde{e}$ -exchange diagram. The cross section decreases for larger selectron masses.

Let us now consider the longitudinal asymmetry $A_{||}$ conventionally defined as

$$A_{||}(s) = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\sigma_{\lambda_1,0} - \sigma_{-\lambda_1,0}}{\sigma_{\lambda_1,0} + \sigma_{-\lambda_1,0}} = - \frac{1}{\lambda_2} \frac{\sigma_{0,\lambda_2} - \sigma_{0,-\lambda_2}}{\sigma_{0,\lambda_2} + \sigma_{0,-\lambda_2}}, \quad (8)$$

where $\sigma_{\lambda,p}(\sigma_{0,\lambda})$ denotes the total cross section of process (2) when the electron (positron) beam has longitudinal polarization λ . From eqs. (5) and (8) we obtain

$$A_{||}(s) = - \frac{\int \chi_2(\theta) d\Omega}{\int \chi_1(\theta) d\Omega}. \quad (9)$$

The performed calculations show that measurements of $A_{||}(s)$ can provide more refined tests of the expectations of the theory. The contrast between the predictions due to different LSP and chargino mass spectrum may be formulated as follows:

I. If A_{11} is independent of $\sqrt{s}$, two possibilities exist:

1) LSP is of the $\tilde{H}_0$ -type. Then eqs. (7a) and (9) imply that

$A_{11}(s)$ is a constant:

$$A_{11} = \frac{c_v c_A}{c_v^2 + c_A^2}, \quad (10)$$

uniquely fixed by $\sin^2 \theta_w$ whose value is known with good accuracy from other experiments. At $\sin^2 \theta_w = .23/11$, $A_{11} = -8\%$.

2) LSP is of the gaugino type, $m_L = m_R$. In this case from eqs. (7b) and (9) we obtain that A_{11} is a constant:

$$A_{11} = \frac{\ell_{1R}^2 \ell_{2R}^2 - \ell_{1L}^2 \ell_{2L}^2}{\ell_{1R}^2 \ell_{2R}^2 + \ell_{1L}^2 \ell_{2L}^2},$$

sensitive to the neutralino matrix elements. The asymmetry does not depend on the values of $m_L = m_R$. Precise measurements of A_{11} would give information on N_{ij} and the degeneracy of chargino massive states.

II. If A_{11} depends on $\sqrt{s}$, LSP should necessarily be of the gaugino type, $m_L \neq m_R$. If $A_{11} > 0$ then $m_L^2 \gg m_R^2$, if $A_{11} < 0$ then $m_L^2 \ll m_R^2$. These results follow immediately from eq. (7b) determining $\sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$ in this case, if one takes into account that the lighter $\tilde{e}$ -exchange term is dominant in $X_L^{\tilde{e}}(\theta)$. The $\tilde{e}_L$ and $\tilde{e}_R$ -exchange terms enter $X_2^{\tilde{e}}(\theta)$ with opposite signs and $X_1^{\tilde{e}}(\theta)$ with equal signs, so the sign of $A_{11}(s)$ determined by their ratio, eq. (9), is governed by the contribution of the lighter selectron.

Figure (2) shows the magnitude of $A_{11}(s)$. For LSP of the gaugino type, $m_L \neq m_R$, $|A_{11}|$ decreases with $\sqrt{s}$. It amounts to about 100% at low energies ($\sqrt{s} \approx 20$ GeV) however still remaining quite large in the energy range of interest in LEP ($A_{11} \sim 50\%$ at $\sqrt{s} \approx 150$ GeV).

We would like to thank Dr. S.M. Bilenky for useful discussions.

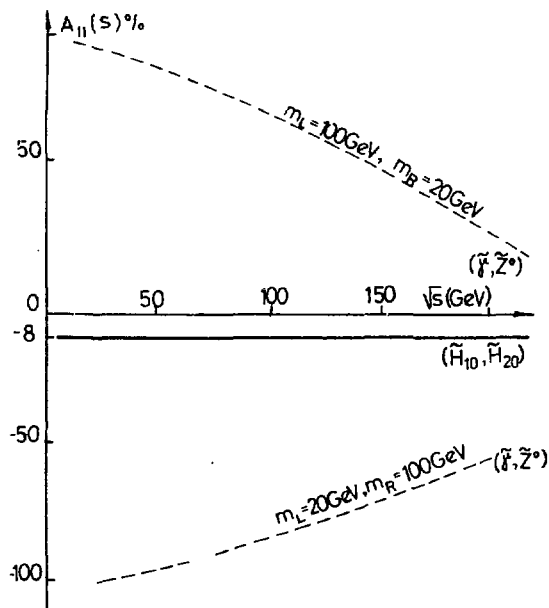


Fig.2.

The longitudinal asymmetry $A_{||}(s)$ when LSP is of higgsino (full line) and of gaugino, $m_L \neq m_R$, (dotted line) type. Predictions for $A_{||}$ when LSP is of gaugino type, $m_L = m_R$ necessitates knowledge of N_{ij} .

References

1. Duff M.J. Proc. of Intern.Europh. Conf. on High Energy Physics, Bari, Italy, 1985, p.681.
2. Haber H.E., Kane G.L. Phys.Rep., 1985, 117G, p.76.
3. Ellis J., Hagelin J. Phys.Lett., 1982, 122B, p.303.
4. Frere J., Kane G. Nucl. Phys., 1983, B223, p.33.
5. Ellis J. et al. Phys.Lett., 1983, 132B, p.406.
6. Bartl A. et al. Nucl.Phys., 1986, B278, p.1.
7. Chappetta P. et al. Nucl.Phys., 1985, B262, p.495.
8. Bilenky S.M., Christova E.C., Nedelcheva M.P. Phys.Lett., 1985, 161B, p.397.
9. Bilenky S.M., Nedelcheva M.P., Petrov S.T. Nucl. Phys., 1984, B247, p.61.
10. F.M. Renard, Basics of e^+e^- collisions, ed. Frontiers (1981).
11. U. Amaldi et al., 1987, CERN-EP-87-93.

NEUTRINOS TODAY IN THE UNIVERSE AND IN THE LABORATORY

S.M.Bilenky, B.M.Pontecorvo

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

1. Neutrinos and the Universe

In general, because of their properties, mainly low masses (if any) and an enormous penetrating power, neutrinos are of extreme importance in astrophysics, cosmology and astronomy. Noteworthy are:

1) the appearance of a new page in astronomy - the solar neutrino astronomy;

2) the participation of neutrinos in hydrogen burning thermonuclear reactions, whereby hydrogen is finally transformed into helium ($4H \rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e + 26 \text{ MeV}$), resulting for the Sun case in a flux at the earth surface equal to $\sim 6 \cdot 10^{10}/\text{cm}^2\text{sec}$ (the neutrino luminosity of the Sun being only $\sim 2\%$ of its photon luminosity, a proportion typical for all stars slowly evolving while hydrogen burning thermonuclear reactions take place in their central regions);

3) the today presence, inferred by big-bang cosmology, of a relict radiation of neutrinos of all types, whose last interactions took place only ~ 1 sec after the big-bang, that is much earlier than the last relict microwave radiation interactions, having taken place $\sim 10^6$ years after the big-bang;

4) the possible contribution of neutrinos to the mass of dark matter (that is the bulk of matter in the Universe which is not luminous and is revealed only through gravitation), as well as their possible importance in the formation of galaxies;

5) the remarkable fact that cosmological, astrophysical and astronomical data are giving some information on neutrino properties (number of neutrinos, masses, mixing, magnetic moments...);

6) the fantastically large ($\sim 10^{58}$) number of neutrinos of all types with average energy ~ 10 MeV radiated by a gravitationally collapsing star during ~ 10 sec;

7) the variety in the star evolution of neutrino emission processes, which rapidly increase in importance while the nuclear fuel is being consumed in the star central regions, insure the neutrino luminosity to dominate over the photon one at temperatures $T > 10^8$ K, lead to a considerable shortening in the time scale of the late stages in the evolution of massive stars, eventually entirely define the star collapse dynamics: in order of relevance, starting back from the collapse phase and high temperatures down to relatively small temperatures, the processes are: 1) one neutrino processes in which the charge W boson is involved - $\bar{e}p \rightarrow \bar{\nu}_e n$, $e n \rightarrow \bar{\nu}_e p$ (Urka), 2) neutrino pair processes in which the W and/or the neutral Z^0 are involved $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e, \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ (electron positron), $\text{plasmon} \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e, \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ (plasma), $\gamma e \rightarrow e \nu_e \bar{\nu}_e, e \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, e \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ (photo), $e \bar{e} \rightarrow e \nu_e \bar{\nu}_e, e \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, e \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ (bremsstrahlung), 3) neutrino pair processes in which only Z^0 is involved - $A^* \rightarrow A \nu_e \bar{\nu}_e, A \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, A \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ (neutrino radioactivity from excited nuclei);

8) the importance in nucleosynthesis, especially in the efficient production of by-passed (neutron poor) isotopes, of neutrinos from the collapsing stellar core, which produce (in the matter of the star envelope to be thrown out) such isotopes in agreement with observed galactic abundancies;

9) the rise, to be covered below, of a new era in astronomy, marked by experimental searches for, and investigation of, neutrinos associated with gravitationally collapsing stars.

2. Gravitational collapse of stars. Supernova SN 1987 A

On February 24, 1987 the supernova now called SN 1987 A, resulting from the collapse and successive explosion of the star Sanduleak (69-202) was optically discovered by Shelton and Jones in the Large Magellanic Cloud, a nearby galaxy. The event is providing and will provide unique astrophysical information because

1) the supernova is an enormously bright object, many millions of times brighter than the Sun,

2) the distance of the Supernova from the earth, only about 170000 light years, is well known,

3) detailed and comprehensive observations of the initial explosion stages are being made for the first time,

4) the dependence of the supernova SN 1987 A luminosity upon time is rather unexpected, the fact that the presupernova star was much heavier than the Sun being almost beyond question,

5) also for the first time a supernova is observed at a moment when theoretical understanding of supernovas, and in general of the star gravitational collapse, is serving as a guide to physicists, astrophysicists and astronomers, in particular through the outstanding prediction that a few tens of second long burst of $\simeq 10^{58}(!)$ neutrinos of average energy $\simeq 10$ MeV should accompany the collapse, preceding somewhat in time the emission of visible supernova light,

6) last but not least the supernova has appeared at a time when in various sites a number of large electron detectors suitable for the registration of ~ 10 MeV neutrinos were found to be in working conditions.

Naturally all the groups working with large electron detectors carefully inspected their records before and after the 24 of February. During the last few years they created the necessary apparatus suitable to observe an event just of the type considered (neutrino burst from gravitational collapse) and they were more or less ready (see also the paragraph "Panorama..." at the end of the present paper). The detectors with the help of which collapse neutrinos were observed on February 23, as it was announced, are:

1) The ~ 100 ton liquid scintillator (antineutrino) detector (Italy-USSR) placed in the Mont-Blanc tunnel: during 7 seconds there were registered 5 pulses ($\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$?) above the 5,7 MeV energy threshold (on February 23, about 1 day before the first optical sighting)

11) The ~ 2000 ton H_2O Čerenkov detector Kamiokande II (Japan): during 13 seconds there were registered 11 electron pulses in the energy interval 7.5 - 36 MeV (on February 23, also before the optical sighting, but 4.5 hours after the Mon-Blanc burst). Two electrons (from neutrino-electron scattering?) point to the Large Magellanic Cloud with angles 18 ± 18 and 15 ± 27 degrees. The other tracks ($\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$?) are distributed random. The discrepancy in time of the Mont-Blanc and

the Kamiokande II signals is not explained. The Kamiokande II signal is, maybe, the more convincing experimental evidence for a correlation between the Supernova SN 1987 A and a neutrino burst.

iii) The ~ 5000 ton H_2O Čerenkov detector (Irvine-Michigan-Brookhaven): during six seconds there were registered 8 electron pulses in the energy range 20-40 MeV at a time coinciding with the Kamiokande time to an accuracy of ± 1 min. The discrepancy with the Mont-Blanc event time is not explained. Also not sufficiently well explained is the absence of a signal at the Mont-Blanc time in the Kamiokande detector, which makes it difficult to think in terms of two distinct neutrino bursts.

vi) The ~ 3000 liquid scintillators (of total weight ~ 300 ton) at the Baksan Observatory (USSR); indications of a neutrino signal (3 pulses in 6 sec.) were suggested at the Kamiokande - time.

The question as to whether a neutrino burst connected with the light emission from the Supernova SN 1987 A has been actually detected with 100% certainty seems to us, under the circumstances, not essential.

There are many unclear points in evaluating a posteriori probabilities of accidental coincidences and in comparing the neutrino observations performed by different groups. And yet all the groups have open a new era in astronomy. The study of the light from SN 1987 A and the search for, as well as the investigation of neutrinos connected with star gravitational collapse constitute a sort of dress rehearsal of an international enterprise (especially associated with the name of G. Zatspepin), and as such are of utmost importance. The enterprise has been prepared in the course of the last ten years and will certainly be very active in the future. It is already clear that there is a lot of room for improvement, especially the necessity of unambiguous universal time measurement and of registering star collapse neutrinos independently of supernova light.

The international collaboration program should include the permanent operation at various sites of apparatus suitable for the observation of visible light from the supernova, of X-rays and nuclear γ -rays, of radio waves from its possible remnant neutron star (pulsar), of neutrinos and gravitational waves. At the moment there exist sensitive cryogenic antennas for gravitational radiation, but unfortunately on February 23, 1987 only a room temperature resonance antenna (Rome) was in operation. The relatively low sensitivity of the antenna gave little hope of detecting gravitational waves; it was not claimed by the authors that gravitational radiation has

been detected, although there was an indication of a positive signal coinciding in time with the Mont-Blanc neutrino burst. However the record of the data from such antenna was published mainly with the aim of showing "the kind of analysis involved on occasion of events of this and similar types".

The star gravitational collapse is a quite complex phenomenon. However some of its features, of great importance from the point of view of the possibility of observing the neutrino burst and also of getting information on neutrino properties (mass, lifetime,...) are almost model independent. The energy of neutrinos ($\sim 3 \cdot 10^{53}$ erg) emitted in the gravitational collapse of a star (the collapsing mass of which is, for example $\sim 2 M_{\text{Sun}}$) can be estimated simply: neutrino emission is the only effective way of cooling the star and therefore the gravitational mass defect of the remaining star is emitted almost entirely in form of neutrinos. The neutrino energy is estimated to be 10-15 MeV, which correspond to 10^{58} neutrinos of all types ($\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$)*). The time in which neutrinos are emitted is expanded to ~ 10 sec due to the opacity of the collapsing star to neutrinos. These considerations directly suggested the experimental requirements to a detector suitable for revealing a gravitational collapse taking place, let us say, in our galaxy: one must be able to register with efficiency 100% the passage through the detector of $\sim 10^{12}$ ν/cm^2 during ~ 10 sec. An underground detector of weight ~ 100 tons (either CH_2 scintillator or H_2O Čerenkov counter) is sufficient to fix (well above the background) $\gtrsim 10$ interacting neutrinos (neutrino burst), especially if several detectors are working at various sites. Of course larger weights of H_2O detectors are being considered having in mind investigations of solar neutrinos, of the proton stability, and not only of collapse neutrinos.

*) The emission of $\nu \bar{\nu}$ pairs is due to neutral current processes ($e^+e^- \rightarrow \nu \bar{\nu}$) involving the Z^0 -boson. Because the photon mean free path is incomparably smaller than the neutrino mean free path, electromagnetic processes are no more competing with processes involving the virtual Z^0 . Thus collapsing stars are practically the only example (we are able to give) of a neutrino source in which neutrinos arise in the decays of virtual Z^0 -bosons (whereas usual neutrino sources are due to virtual W-boson decay).

Information on neutrino masses can in principle be obtained in the following ways:

1) if gravitational radiation is detected, the delay of the anti-neutrino signal ($\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$), together with the measurement of the positron energy, yields direct information on the $\bar{\nu}_e$ -mass.

2) if neutrino have finite masses, neutrinos of higher energy arrive to the detector earlier than neutrinos of lower energy; thus the study of the time of arrival of neutrinos together with measurements of their energy gives information on neutrino masses. If a neutrino burst has really been detected in the Kamiokande II experiment, one could get an upper value of the electron neutrino mass $m_{\bar{\nu}_e} \lesssim 10$ eV from an analysis of the time distribution of pulses in the burst.

As far as the stability of neutrinos is concerned, it is clear that the very observation of neutrino bursts would permit to get information on neutrino life-times. For example the Kamiokande II observation of the neutrino burst implies that the life-times of $\bar{\nu}_e$ and $\bar{\nu}_\mu$ are larger than 10^5 years.

Thus all over the world there are now a number of permanently working stations, well communicating between themselves, led by physicists, astronomers and astrophysicists, who are expecting the great event, the collapse. How long will they have to wait?

The gravitational collapse, a fantastically rapid (free fall) implosion of the star or of the central star region in which the nuclear fuel has been consumed^{*)}, may be accompanied by a supernova explosion, when the star envelope is thrown out and there appears a fantastic show whereby a single star has the luminosity of a galaxy. Of course supernova have been observed for a long time. They are quite rare in our galaxy. Their number in hundred years may be as small as one and as high as 6: supernovas may not be visible, as their light is absorbed by interstellar dust.

Gravitational collapse may take place without the star envelope being thrown out. The number of such events is estimated to be comparable with, but larger than, the number of supernovas. Thus the number of neutrino bursts might be an order of magnitude larger than the number of observable supernovas.

^{*)}One would expect that the result of the collapse is either a neutron star (pulsar) or a black hole.

3. Panorama of today experimental neutrino physics

Neutrino type	Typical neutrino energies and intensities	Neutrino source. Facilities	Neutrino detector type and size	Main significance
1	2	3	4	5
$\bar{\nu}_e$	0 - 7 MeV. The total flux at several meters from reactor center is $10^{13}-10^{14}$ cm $^{-2}$ s $^{-1}$	Powerful ($> 10^6$ kW) fission <u>reactors</u> (Grenoble, Gosgen, Bugey, Savannah, River, Rovno)	Liquid scintillator (200-400 liters) registering the reaction $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$.	Particle physics: search for neutrino oscillations. Reactor physics: burning rate of ^{235}U , production rate of ^{239}Pu , neutrino external control of reactors, ...
$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_e$	30 MeV (ν_μ) < 53 MeV ($\bar{\nu}_\mu, \nu_e$) The total flux for every indicated neutrino type is $\sim 10^7$ cm $^{-2}$ s $^{-1}$ at a distance ~ 10 m from beam dump place.	<u>Meson factory</u> where 800 MeV protons produce π^+ which are brought at rest, the neutrinos originating in the decays $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ (Los Alamos, in future Moscow meson factory)	water Čerenkov counter of weight ~ 6 tons, scintillator system of weight ~ 15 tons.	Particle physics: search for oscillations, $\nu_e - e$ scattering.

1	2	3	4	5
$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	10-200 GeV (CERN), 2-30 GeV (Protvino), 1-15 GeV (Brookhaven), 20-400 GeV (Batavia) The fluxes of ν_μ at the detector in the wide band beam at CERN, for example, are $10^{-9} \text{ GeV}^{-1} \text{ m}^{-2}$ per accelerator pulse at 20 GeV and $10^6 \text{ GeV}^{-1} \text{ m}^{-2}$ per pulse at 180 GeV.	In <u>accelerators</u> of protons to energies 400, 70, 30, 1000 GeV (CERN, Protvino, Brookhaven, Batavia, correspondingly) there are generated pions and kaons, the decay of which in turn generates ν_μ or $\bar{\nu}_\mu$. The decay is taking place in the facility containing a decay region (300 m, 140 m, 60 m, 400 m) and a shield for muons and hadrons (400 m Fe, 62 m Fe, 30 m Fe, 1000 m earth + Fe).	Electronic detector - calorimeter with magnetic spectrometer for muons: CERN-CDHS ~ 1000 tons, CHARM ~ 100 tons, IHEP-JINR ~ 200 tons, Batavia 4000 tons. Large bubble chambers: CERN Gargamelle, $5 \text{ m}^3 \text{ CF}_3\text{Br}$, BEBC $20 \text{ m}^3 \text{ H}_2, \text{D}_2 + \text{Ne}$; Protvino SKAT, $4.5 \text{ m}^3 \text{ CF}_3\text{Br}$; Batavia 15' FNAL, $20 \text{ m}^3 \text{ H}_2 + \text{Ne}$; Brookhaven 12' ANL, $16 \text{ m}^3 \text{ H}_2, \text{D}_2$ 7' BNL, $6 \text{ m}^3 \text{ H}_2, \text{D}_2$.	Particle physics: discovery $\nu_e \neq \bar{\nu}_\mu$, discovery of neutral currents (reactions $\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e$, $\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu X$...), quark structure of nucleons by investigating the reactions $\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu X$, elastic $\nu_\mu - p$ scattering, measurements of electroweak angle, production of charmed particles by neutrinos ($\nu_\mu N \rightarrow \mu^- \mu^+ \mu^- X$) search for neutrino oscillations. Practical applications of neutrino beams from future accelerators: prospecting for oil, etc., neutrino tomography of the Earth.

1	2	3	4	5
$\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ (not from pion and kaon de- cays).		<u>High Energy accele- rators generate</u> charged particles the decay of which originates "direct" prompt neutrinos - CERN, Protvino, Batavia.	Electronic detectors - ca- lorimeters and bubble chamber BEBC.	Particle physics: study of the produc- tion of charmed particles in collis- sion of protons with nuclei by in- vestigating the decay of charmed particles with emission of neut- rinos.
318 $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	1-100 GeV	Atmospheric neut- rinos from decay mesons generated by <u>cosmic ray</u> <u>protons in the</u> <u>atmosphere.</u>	Underground scintilla- tion telescope, mass 300 tons (Baksan), wa- ter Čerenkov detectors of weight a few thous- and tons) Kamioka mine and Morton-Thiokol mine)	Search for neutri- no oscillations and for neutrino decay.
Tagged $\nu_\mu, \nu_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_e$	Average energies of ν_e and ν_μ , for example, are 12 GeV and 23 GeV, correspondingly.	<u>Proton accelera- tor (70 GeV) ge- nerating $K^\pm$ beams</u> of energies ~ 30 GeV, the registrat- ion of muons,	Liquid argon calorime- ter (~ 600 tons) and muon spectrometer	Particle physics: tests of μ -e universality, search for neutrino os- cillations, ν_e -e scattering.

type ($\bar{\nu}_e d \rightarrow p p e^-$, $\bar{\nu}_e e \rightarrow \bar{\nu}_e e$,
 $\bar{\nu}_e d \rightarrow \bar{\nu}_e p n$), 1000 tons

D₂O, Sudbury Observatory

suitable for measuring

^8B ν_e -flux, direction and energy (future).

Liquid argon time projection chamber Icarus, Gran-

-Sasso 6500 tons Ar, suitable

for detecting ν_e through

$\nu_e {}^{40}\text{Ar} \rightarrow e^- K^+$ (threshold

5.9 MeV), all neutrinos

through $\bar{\nu}_e e \rightarrow \bar{\nu}_e e$

and of measuring their energies and directions

(future).

$\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$
 $\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$

Average energies

~ 10 MeV, total

number of neutrino emitted $\sim 10^{58}$

within a few tens of seconds.

Supernovas, stellar
gravitational
 collapse.

Water Cerenkov detectors of weight several thousand tons (Kamioka mine and Morton Thiokol mine). Liquid scintillation detectors: ~ 100 tons (Mont Blanc, Artemovsk, Home-stake mine). Underground scintillation telescope, ~ 300 tons (Baksan).

Neutrino properties: masses, lifetimes, mixings, magnetic moments. Astrophysics: mechanism of supernova explosions.

1	2	3	4	5
	Total tagged neutrino intensity $\sim 10^8$ per accelerator pulse.	electrons and photons from $\kappa^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, $\kappa^+ \pi^0 e^+ \nu_e$, $\kappa^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$, $\kappa^- \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$ tagging the neutrinos (Protvino, future).		
ν_e , may be ν_μ , ν_τ et al., if os- cilla- tions play a role.	Expected maximum energies and fluxes are correspondingly 0.42 MeV, $6 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ from reaction $pp \rightarrow de^+ \nu_e$; 1.44 MeV (monochromatic) $1.5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ from $p\bar{e}p \rightarrow d\nu_e$; 0.86 MeV, $5 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ from ${}^7\text{Be} \rightarrow {}^7\text{Li} e^+ \nu_e$; 14 MeV, $5 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ from ${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} e^+ \nu_e$.	<u>Sun</u>	Underground radiochemical detectors: $\nu_e {}^7\text{Cl} \rightarrow e^- {}^7\text{Ar}$ threshold 0.81 MeV, 4 10^5 liters C_2Cl_4 , South Dakota and 2 10^6 l C_2Cl_4 , Baksan (future); $\nu_e {}^{71}\text{Ga} \rightarrow e^- {}^{71}\text{Ge}$, threshold 0.23 MeV 50 tons metallic Ga (Baksan, future) and 30 tons Ga in form GaCl_3 (Gran Sasso, future). Underground Čerenkov detector, $\nu_e \rightarrow \nu_e$, $\tau = e, \mu, \tau$; ν 3000 tons H_2O , Kamioka mine, capable of detecting ${}^8\text{B}$ solar ν 's of energy > 9 MeV and of measuring their energies and directions. Underground Čerenkov detector of charged and neutral current	Particle physics (are lepton mixed?) and astrophysics.

1	2	3	4	5
$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	$10^2 - 10^5$ GeV	Supernovas (?) Nuclei of active Galactics, Brigh stage of Universe.	Deep underwater Čerenkov detector ($\sim 3 \cdot 10^7 \text{ m}^3$ H_2O), Baikal (future). Pacific ocean (?).	Particle physics: search for new particles, investigation of neutrino interactions at very high energies, search for neutrino oscillations. Astrophysics: investigation of active processes in the Universe.
$\bar{\nu}_e$		<u>Tritium</u>	Spectra of electrons from ${}^3\text{He} \rightarrow {}^3\text{He} e^- \bar{\nu}_e$ are measured near the end point with the help of β -spectrometers.	Attempts to measure directly $\bar{\nu}_e$ mass.

СПИСОК ДОКЛАДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ НА СОВЕЩАНИИ

- Азаков С.И.
Кварк-глюонная плазма при конечной плотности барионов и в пределе больших N_c
- Арбузов Б.А.
Квантовая хромодинамика на больших расстояниях*
- Арефьева И.Я.
Полевая теория взаимодействующих струн
- Арефьева И.Я.
Р-адическая струна*
- Ачасов Н.Н.
Проблема экзотических мезонов*
- Барбашов Б.М., Червяков А.М.
Геометрический метод решения краевой задачи в теории релятивистской струны с массами на концах
- Биленький С.М., Понтекорво Б.М.
Нейтрино сегодня
- Боголюбов Н.М.
Эффекты конечного размера и инфракрасная асимптотика корреляционных функций*
- Боголюбов П.Н., Дорохов А.Е., Кочелев Н.И.
Структура вакуума КХД в модели кварковых мешков
- Власов А.А.
Теория гравитации, вложенная в пространство с размерностью больше четырех*
- Волков М.К., Иванов А.Н., Троицкая Н.И.
Каоны в кварковой модели сверхпроводящего типа
- Галкин В.О., Фаустов Р.Н.
Массы и ширины радиационных распадов мезонов в релятивистской кварковой модели
- Гальперин А.С., Иванов Е.А., Сокачев Э.
Геометрия материальных полей в расширенной суперсимметрии*
- Герасимов С.Б.
Магнитные моменты барионов и радиационные распады низших мезонных резонансов*
- Говорков А.Б.
Поколения лептонов и кварков и алгебра постоктонионов
- Гогилдзе С.А., Санадзе В.В., Ткебучава Ф.Г.
Устранение калибровочного произвола в сингулярных теориях*
- Горинский С.С., Катаев А.Л., Ларин С.А.
Аналитическое вычисление поправок $O(a_s^3)$ к $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$ в КХД*
- Gursey F.
Aspects of Supersymmetry*
- Gursey F.
Algebraic Treatment of Certain Lattices Generated by Weyl Reflections*
- Дадашев Л.А.
Аксиоматика уравнений движения в нерелятивистской квантовой механике нескольких частиц*

*Доклады, не вошедшие в Труды совещания.

Джорджадзе Г.П., Квинихидзе А.Н., Чечелашвили Г.А.
Представление S-матрицы в формализме функционального интегрирования
de Groot S.R.
On the Transport Coefficients of Mixtures Containing Neutrinos
Дубровский В.А.
Упругая модель физического вакуума*

Elias V., Steele T.G.
Field Theoretic Consistency of QCD Operator Product Expansion Contributions from Chiral Non-Invariant Condensates

Енковский Л.Л., Струминский Б.В.
КХД и дифракция

Ефимов Г.В., Иванов М.А.
Конфайнмент и кварковая структура адронов

Завьялов О.И.
Новые инвариантные регуляризации и новые схемы инвариантной перенормировки в калибровочных теориях*

Задорожный А.М., Митрюшкин В.К.
Магнитные флуктуации и структура вакуума в модели Джорджи - Глазгоу на решетке*

Зиновьев Г.М.
Проблема фазовых переходов в решеточной КХД при конечных температурах в приближении сильной связи*

Зупник Б.М., Пак Д.Г., Хелиус Д.
Суперполевая геометрия трехмерной суперсимметрии и супергравитации*

Ilieva N.
Minimal Quantization of Two-Dimensional Models with Chiral Anomalies

Каграманов Э.Д., Мир-Касимов Р.М., И.М.Нагиев
Модель линейного осциллятора в релятивистском конфигурационном представлении

Каллис В., Нгуен Суан Хан, Первушин В.Н., Сариков Н.А.
Квантовая хромостатика как низкоэнергетическая теория адронов*

Капусцик Э., Хожеля А.
Волновые уравнения расширения расширенной группы Галилея*

Квинихидзе А.Н., Сисакян А.Н., Хведелидзе А.М.
Глубоконеупругое рассеяние в формализме с волновыми функциями покоящихся составных систем

Корелин В.Е.
Корреляционные функции интегрируемых моделей*

Красников Н.В.
О нарушении суперсимметрии в суперструнных теориях*

Курышкин В.В., Энтральго Э.Э.
Нестандартные алгебры операторов рождения и уничтожения в релятивистской теории квантованных полей

Ланик Я.
О скалярном глюонии и интерпретации $G(1590)$ -мезона*

Лезнов А.Н.
О двумеризации четырехмерной системы уравнений автодуальности Янга - Миллса

Леонович А.А.
Конформная симметрия в теории поля*

Липатов Л.Н.
Затравочный померон в квантовой хромодинамике*

Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Чугреев Ю.В.
Масса гравитона и развитие Фридмановской вселенной*

Лукач И.
О группе движений трехмерной квадратичной формы*

Матвеев В.А., Рубаков В.А., Тавхелидзе А.Н., Токарев В.Ф.
Несохранение фермионного числа и предельная плотность холодной фермионной материи*

Мельников В.К.
О динамике двумерных солитонов

Менский М.Б.
Группа путей и взаимодействие квантовых струн*

Миранский В.А.
Нарушение киральной симметрии и непертурбативная масштабная аномалия в калибровочных теориях поля*

Огиевецкий В.И., Гальперин А.С., Иванов Е.А., Сокачев Э.
Гармоническое суперпространство. Результаты и перспективы

Павлов В.П.
Фазовое пространство систем со связями*

Пашнев А.И.
Квантовая теория уравнения Лиувилля и струна в размерности D^*

Плющай М.С., Пронько Г.П., Соловьев Л.Д.
Спектроскопия легких мезонов*

Поливанов М.К., Погребков А.К.
Пуассонова структура для иерархии уравнений КДВ*

Прохоров Л.В., Шабанов С.В.
Особенности динамики ферми-систем с калибровочной группой /о природе поля Хиггса/*

Радюшкин А.В.
Пертурбативная квантовая хромодинамика

Рекало М.П.
Адронные распады тяжелого лептона как источник проверки свойств симметрии слабого взаимодействия адронов*

Рончка Р.
Непертурбативный анализ устойчивости модели Глэшоу - Салама - Вайнберга и стандартной модели*

Садыхов Ф.С.
Изучение процесса глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на нуклонах и процесса Дрелла - Яна в КХД*

Scadron M.D.
Additivity of Quark Masses in Gauge Theories

Scadron M.D.
Dynamical Origin of the Cabbibo Angle and Kaon $\Delta I = 1/2$ Rule

Славнов А.А.
Спонтанное нарушение суперсимметрии

Славнов Д.А.
Пятимерная перенормировка по асимптотикам*

Смирнов В.А., Четыркин В.Г.
Асимптотические разложения, метод склеивания и P^* -операция

Старушкевич А.
КЭД и теория унитарных представлений группы Лоренца*

Ferrara S.
 Kahler Geometry and Higher Derivative in Supergravity Theories*
 Ferrara S.
 General Properties of Scalar Potentials in Supersymmetric Theories*
 Физнев П.
 Эффекты неинтегрируемости в классической задаче трех частиц на прямой*
 Филиппов А.Т.
 Калибровочные симметрии в теориях релятивистских частиц и суперструн
 Christova E.Ch., Nedelcheva N.P.
 Possible Tests for Lightest Supersymmetric Particle in Polarized
 e^+e^- -Collisions
 Чавлейшвили М.П.
 Низкоэнергетические теоремы в суперсимметрии
 Черников Н.А.
 Псевдотензор энергии-импульса как функционал фоновой связности
 Шабохина Н.С.
 Ареальные объекты в физике взаимодействия релятивистских частиц
 Шапошников М.Е.
 Барionная асимметрия Вселенной и электрослабая аномалия*
 Ширков Д.В.
 Ренормгруппа в современной физике*

СПИСОК УЧАСТНИКОВ

<u>НРБ</u>	Донков А. Райчев П.	Радюшкин А.В. Сазонов А.А. Смондырев М.А. Сидоров А.В. Филиппов А.Т. Физиев П. Христова Е. Хожеля А. Червяков А.М. Черников Н.А. Широков М.И. Ширков Д.В. Шавохица Н.С.
<u>ГДР</u>	Гайер Б. Полле Г.-Ю.	
<u>КАНАДА</u>	Стил Т.	
<u>МНР</u>	Намсрай Х.	
<u>НИДЕРЛАНДЫ</u>	Де Гроот С.Р.	
<u>ОИЯИ</u>	Авдеев А.А. Баслер М. Биленький С.М. Боголюбов Н.Н. Боголюбов П.Н. Волков М.К. Герасимов С.Б. Говорков А.Б. Дорохов А.Е. Ефимов Г.В. Иванов М.А. Исаев А.П. Капусцик Э. Ким В.Т. Ланик Й. Литова Н. Ли Ам Гир Матвеевко А.В. Мельников В.К. Мещеряков М.Г. Мир-Касимов Р.М. Митрюшкин В.К. Надь М. Нгуен Хунг Шон Огиевецкий В.И. Полубаринов И.В. Понтекорво Б.М.	<u>ПНР</u> Рончка Р. Старушкевич А. <u>СССР</u> Арефьева И.Я. Арбузов Б.А. Атакишев Н.М. Азаков С.И. Алиев М.К. Ачасов Н.Н. Боголюбов Н.М. Бирюков А.А. Бештоев Х.М. Власов А.А. Валл А.Н. Гогилидзе С.А. Гальперин А.С. Дадашев Л.А. Демичев А.П. Дубровский В.А. Енковский Л.Л. Завьялов О.И. Зиновьев Г.М. Зупник Б.М. Иванов А.Н.

Иванов С.В.
Ибадов Р.М.
Катаев А.Л.
Курышкин В.В.
Корепин В.Е.
Кочелев Н.И.
Квинихидзе А.И.
Красников Н.В.
Карнаков В.А.
Лезнов А.Н.
Поладзе Г.
Липатов Л.Н.
Любовицкий В.Е.
Леонович А.А.
Лунев Ф.А.
Медведев Б.В.
Мельников В.Н.
Менский М.Б.
Манько В.И.
Миранский В.А.
Ноговицын Е.А.
Павлов В.П.
Поливанов М.К.
Плющай М.С.
Пронько Г.П.
Прохоров Л.В.
Пашнев А.И.

США

ЦЕРН

ЧССР

Рекало М.П.
Рустамов К.А.
Славнов А.А.
Славнов Д.А.
Свешников К.А.
Смирнов В.А.
Смирнов В.Г.
Смородинский Я.А.
Суханов А.Д.
Сабов В.И.
Санадзе В.В.
Садыхов Ф.С.
Сариков Н.А.
Суяров У.С.
Фаустов Р.И.
Федоров Ф.И.
Ходжаев Л.Ш.
Чугреев Ю.В.
Чавлейшвили М.П.
Шапошников М.Е.
Шелест В.П.

Гюрсей Ф.
Скадрон М.Д.

Феррара С.

Лукач И.



17. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. - Nucl. Phys., v. B147, pp. 385, 448; УФН, 1982, 136, с. 553.
18. Ioffe B.L. - Nucl. Phys. 1981, v. B188, p. 317.
Reinders L.J., Rubinstein H.R., Yazaki S. - Phys. Rep., 1985, v. 127, p. 1.
19. Dorokhov A.E., Kochelev N.I., JINR preprints, E2-86-224, E2-86-355; Dubna, 1986.
Дорохов А.Е., Кочелев Н.И. Труды Международного совещания "Кварки-86", М., ИЯИ АН СССР, 1987, с.392.
20. Hansson T.H. - Nucl. Phys., 1985, v. B249; p. 742;
Phys. Lett., 1986, v. 166B, p. 343.
21. 't Hooft G. - Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 3432.
22. Бетман Р.Г., Лаперашвили Л.В. - ЯФ, 1985, т. 41, с. 463;
Кочелев Н.И. - ЯФ, 1985, т. 41, с. 456.
23. Wong C.W. - Phys. Rev., 1981, v. D24, p. 1416.
Дорохов А.Е. - ТМФ, 1984, т. 61, с. 64; ТМФ, 1987, т. 70, с. 52.
24. Bernard V. et al. - Nucl. Phys., 1984, v. A412, p. 349.
25. Geshkenbein B.V., Ioffe B.L. - Nucl. Phys., 1980, v. B166, p. 340. Dubna, 1986.
26. Dorokhov A.E., Kochelev N.I. JINR preprint, E2-86-790, Dubna, 1986.
27. Jaffe R.L. - Phys. Rev., 1977, v. D15, p. 267, 281.
28. Matveev V.A., Sorba P., 1977, Lett. Nuovo Cimento, v. 20, p. 435; Il Nuovo Cimento, 1978, v. 45A, p. 257.
29. Jaffe R.L., 1977, Phys. Rev. Lett., v. 38, p. 195.
30. Dorokhov A.E., Kochelev N.I. JINR preprint, E2-86-847, Dubna, 1986.
31. Liu K.F., Wong C.W. - Phys. Lett., 1982, v. 113B, p. 1.
Mulders P.I., Thomas A.W. - Journal of Phys., G: Nucl. Phys., 1983, v. 9, p. 1159.
Кондратьев П.А., Криворученко М., Шепкин М.Г. - Письма в ЖЭТФ, 1986, т. 43, с. 10.
32. Ларин С.А., Матвеев В.А. и др. - ЯФ, 1986, т. 44, с. 1066.
33. Balachandran A.P. et al. - Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, p. 887.
34. Mackenzie P.B., Thaker H.B. - Phys. Rev. Lett., 1985, v. 55, p. 2539.
35. Iwasaki Y. UTHER-171 preprint, 1987.
36. Review of Particle Properties. Phys. Lett., 1986, v. 170B, p. 1.
37. Isgur N. - Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 779.

D14-88-833	Proceedings of the International Workshop on Modern Trends in Activation Analysis in JINR. Dubna, 1988	8.00
D13-88-938	Proceedings of the XIII International Symposium on Nuclear Electronics. Varna, 1988	13.00
D10-89-70	Proceedings of the International School on the Problems of Use of Computers in Physical Research. Dubna, 1988	8.00

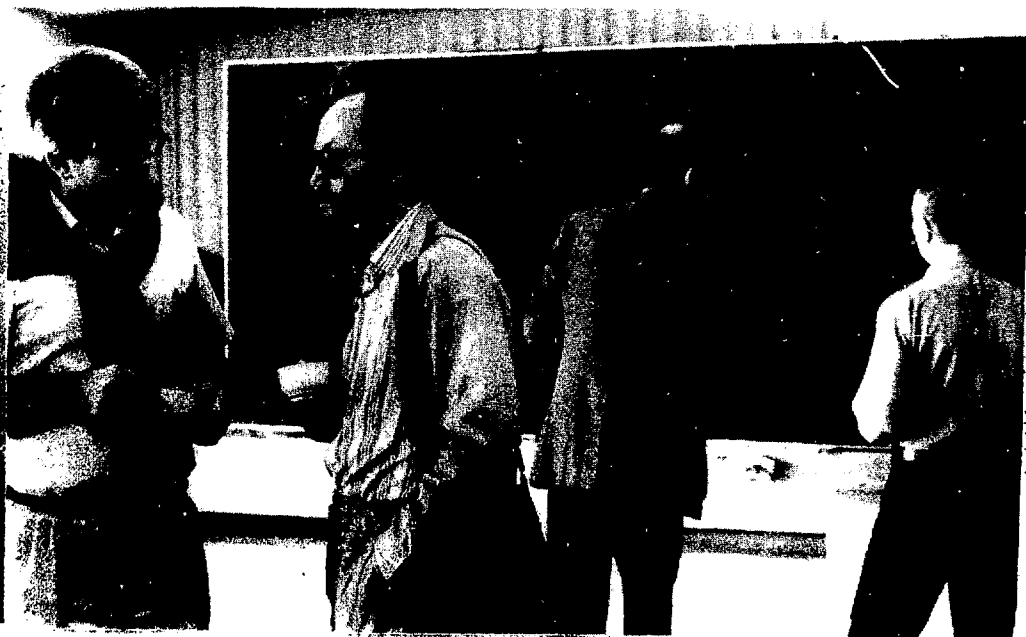
Orders for the above-mentioned books can be sent at the address:
Publishing Department, JINR
Head Post Office, P.O.Box 70 101000 Moscow, USSR













Рукопись сборника поступила в издательский отдел
16 ноября 1987 года.

Ответственные за выпуск М.К.Волков, А.Е.Дорохов.

Редакторы Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич. Макет Р.Д.Фоминой.
Обложка Ю.Г.Мешенкова. Фото Ю.А.Туманова.

Подписано в печать 23.12.87.
Формат 60х90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 23,92.
Тираж 400. Заказ 40022.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области