Master Science de la matière
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I

Stage 2013–2014
Justin Gabriel
M2 Physique

Diverses Approches de la Mécanique Quantique sur Espace Non-Commutatif

Résumé : *On s'intéresse à divers aspects et formalismes de la mécanique quantique et classique, sur espace non-commutatif. Les représentations de la mécanique quantique sur espace non-commutatif en termes de star-produit et en termes des opérateurs canoniques, sont exposés. On rappelle la procédure de Dirac pour les systèmes dynamiques contraints, et on propose une formulation de la mécanique comme système contraint, qui est appliquée au cas non-commutatif. Cette formulation est étendue aux systèmes avec contraintes mécaniques et appliquée à la sphère non-commutative. Pour finir, on calcule les équations d'évolutions des opérateurs d'impulsions et de positions, pour une particule dans un champs extérieur abélien, sur un espace non-commutatif. Ces équations sont semblables à celles d'une particule dans un champs extérieur non-abélien.*

Mots clefs : *Espace non-commutatif, système dynamique contraint.*

Stage encadré par :
François Gieres
gieres@ipnl.in2p3.fr / tél. (+33) 4 72 72 80 00
Institut de Physique Nucléaire de Lyon
Bat. P. Dirac, 4 rue Enrico Fermi, F - 69622 - Villeurbanne (France)
http://www.ipnl.in2p3.fr/

2 août 2014

Remerciements

Je remercie François Gieres pour son soutien, son attention et ses conseils, et toute l'équipe de l'IPNL pour son accueil.

Table des matières

1 Introduction

La mécanique quantique sur espace non-commutatif (MQNC) a, dans un premier temps, été proposée par Heisenberg [1] dans les années 30 puis développée par Snyder à la fin des années 40 [2], dans l'espoir que les propriétés de non-localisabilité induite par la non-commutativité des coordonnées d'espace permettraient de résoudre le problème des divergences à courte distance (ultra violette) de la théorie des champs. Mais les succès de la renormalisation rendirent cette piste caduque et elle fut abandonnée. Récemment, certains développements de la théorie des cordes l'ont sortie de l'oubli. En effet, l'on a pu montrer que dans certaines conditions [3], les systèmes engendrés par la théorie des cordes font intervenir des coordonnées dont le crochet est non-nul. Ces découvertes justifient le regain d'intérêt pour la théorie des champs sur espace non-commutatif et, en particulier, pour la mécanique quantique sur espace non-commutatif qui, vu comme une théorie des champs à une particule, constitue un excellent "toy model". Par exemple, l'étude des systèmes exactement solubles de la MQNC devrait permettre une meilleur compréhension de la théorie des champs sur espace non-commutatif.

Les formalismes de la MQNC sont aussi nombreux que ceux de la mécanique quantique et j'ai eu l'occasion de travailler sur quelques-uns de ces formalismes au cours de mon stage. La première partie de mon rapport consistera en l'exposition de des divers formalismes qui nous serons utiles pour la suite. Il s'agira de l'approche par le star-produit et de sa relation à la représentation par les opérateurs canoniques puis de la procédure de Dirac pour le traitement des lagrangiens singuliers. Ce dernier formalisme nous servira, dans la seconde partie, de base pour l'analyse d'un lagrangien général et de ses relations au système hamiltonien d'algèbre quelconque. Nous avons travaillé à expliciter cette approche lagrangienne déjà présente en germe dans la littérature et l'avons appliquè entre autre à la MQNC. J'exposerai ensuite un développement de cette méthode dans le cadre des systèmes avec contraintes mécaniques, que j'appliquerai en particulier au cas de la sphère non-commutative. Pour finir j'utiliserai le formalisme du star-produit pour calculer les équations du mouvement d'une particule dans un champs extérieur sur un espace non-commutatif ; on verra en particulier les similarité avec celles d'une particule dans un champ non-abélien. Au cours de mon stage, j'ai également travaillé sur les intégrales de chemins sur espace non-commutatif. Il s'agit en effet d'une étape importante pour la compréhension et la formulation d'une théorie des champs sur espace non-commutative. La formulations d'une telle intégrale est loin d'être définitivement établie. On trouve dans la littérature un grand nombre de formulations aux résultats pas toujours équivalents. Mon travail sur le sujet a été largement bibliographique et j'ai tenté de comparer et de comprendre les différentes approches les unes en regard des autres. Cependant, je considère que mon travail sur ce sujet n'est pas suffisamment abouti pour figurer dans ce rapport.

2 Formalisme

2.1 Généralité sur mécanique quantique sur espace non-commutatif

La notion de mécanique quantique sur espace des configurations, non-commutatif, ou plus simplement mécanique quantique non-commutative, se réfère à une mécanique quantique dont l'algèbre des coordonnées et des impulsions est non canonique. En toute généralité on a :

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i\theta_{ij}\mathbb{1}, \quad [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = iF_{ij}\mathbb{1}, \quad [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1} \quad , \quad \text{avec } i, j = 1, ..., d \tag{1}$$

où θ paramètre la non-commutativité des positions et F celle des impulsions et sont toutes deux des matrices antisymétriques constantes. La non-commutativité des impulsions peut être interprétée comme la présence d'un champs magnétique, F_{ij} est alors simplement la partie spatiale du champs électromagnétique. On constate en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la non-commutativité sur les positions mène aux relations d'incertitude :

$$\Delta\hat{X}_i\Delta\hat{X}_j \geq \frac{1}{2}|\theta_{ij}| \tag{2}$$

Ces inégalités impliquent que, dans ce cadre là, une particule ne peut pas être localisée à l'intérieur d'un certain volume défini par les composantes de θ. On voit alors que l'espace devient en quelque sorte “flou" ou muni d'une structure cellulaire. Ce volume caractéristique introduit naturellement une échelle minimale de longueur, c'est cette propriété qui a poussé Heisenberg à proposer la MQNC comme une solution aux divergences ultraviolettes. La non-commutativité engendre également des difficultés pour la construction de l'intégrale de chemins. En effet, puisque les différentes composantes du vecteur position ne sont pas simultanément définies, il est impossible de définir une base de vecteurs propres de l'opérateur position, ce qui invalide la méthode standard pour la construction de l'intégrale de chemins. La solution peut être, par exemple, de considérer des bases du type $|x_1, p_2\rangle$ [4] , où une approche en termes d'états cohérents [5].

On remarque une certaine similarité formelle entre θ_{ij} et F_{ij}. Cette similitude amène à voire θ comme l'analogue d'un champs magnétique. Cette analogie est renforcé quand on écrit $\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta_k$, comparé à $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$. On voit alors que la non-commutativité peut être paramétrée par un champs de vecteurs θ_k. Cette écriture met en évidence l'existence d'une direction privilégiée dans le cadre de la MQNC.

Le fait que la structure cellulaire de l'espace ne soit pas observée au niveau macroscopique implique que la non-commutativité ne doit se manifester qu'à des échelles de l'ordre de l'échelle de Planck. En particulier les paramètres de la non-commutativité (qui ont une dimension inverse de celle d'une masse) peuvent être contraints grâce à divers phénomènes. En effet, il a par exemple été montré [6] que la présence de non-commutativité pourrait engendrer une déformation anormale des raies d'interférences des électrons dans l'expérience de Tonomura [7] pour l'étude de l'effet Aharonov-Bohm. On peut également exploiter la violation de la symétrie de Lorentz qu'engendrerait la non-commutativité [8]. La limite actuelle ($\theta \leq 10^{-30}GeV^{-1}$) vient de la limite sur la décomposition du boson Z en deux photons [9]. Il est important de remarquer que θ n'a pas de rapport avec $\hbar$ et donc que la quantification standard et la non-commutativité de l'espace peuvent être vues comme deux notions indépendantes.

Il est intéressant de noter qu'au delà de l'aspect fondamental, la MQNC peut trouver des applications en tant que théorie effective dans le cadre de l'effet Hall ou de la superfluidité. La mécanique classique sur espace non-commutatif trouve également des applications dans le cadre de la magnéto-hydrodynamique.

2.2 Star-produit et approche opératorielle

Le formalisme du star-produit initié par Weyl et Wigner pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace des phases[10], s'articule non pas autour d'opérateurs non commutants, comme dans l'approche opératorielle, mais autour de la déformation du produit entre les variables de l'espace des phases, cette procédure de quantification est d'ailleurs appelée "déformation quantization" . Nous allons voir comment ce formalisme peut être utilisé dans le cadre de MQNC.

On commence par le cas le plus général. Soit $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace des phases. Les relations de commutation :

$$[\hat{\xi}^I, \hat{\xi}^J] = i\Omega^{IJ}, \quad \text{où I,J cours sur tout l'espace des phases} \tag{3}$$

peuvent être implémentées dans l'espace des phases en imposant une règle de produit non-commutative (appelée $\star$-produit) entre les variables de l'espace des phases telle que :

$$\xi^I \star \xi^J - \xi^J \star \xi^I \equiv [\xi^I, \xi^J]_\star = i\Omega^{IJ}, \tag{4}$$

Dans le cadre de ce formalisme les états quantiques sont décrits par des fonctions dans l'espace des phases appelées fonctions de Wigner. La correspondance entre les fonctions de l'espace des phases et la représentation opératorielle est assurée par la correspondance de Weyl :

$$\hat{A}(\hat{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\chi d\xi \; a(\xi) e^{i\chi(\hat{\xi}-\xi)} \tag{5}$$

Le produit entre deux fonctions de l'espace des phases peut être obtenu à partir de celui des opérateur grâce à la correspondance de Weyl. Il peut s'écrire :

$$A(\vec{\xi}) \star B(\vec{\xi}) = e^{\frac{i}{2}\Omega^{IJ} \frac{\partial}{\partial \xi^I} \frac{\partial}{\partial \chi^J}} A(\vec{\xi}) B(\vec{\chi})|_{\vec{\chi}=\vec{\xi}}, \tag{6}$$

On peut vérifier que cette règle de produit donne bien les commutateurs (4).

Ici nous allons développer une approche un peu différente, celle utilisée dans le cadre de la théorie des champs non-commutative. Il s'agit de n'utiliser le star produit que dans l'espace des configurations (i.e que pour la multiplication des variables x_i), les états quantiques seront décrits par des fonctions $\psi(\vec{x})$ sur lesquelles l'action de l'impulsion est décrite par $p_i \equiv \partial_i$. On demande :

$$[x_i, x_j]_\star = x_i \star x_j - x_j \star x_i = i\theta_{ij}, \tag{7}$$

On va maintenant définir le $\star$-produit entre les fonction de $\vec{x}$, en utilisant le produit (6). On peut écrire (6) en série de θ :

$$A(\vec{x}) \star B(\vec{x}) = AB + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i A \partial_j B + \frac{1}{2!}(\frac{i}{2})^2 \theta^{ij}\theta^{kl}\partial_i\partial_k A \partial_j \partial_l B + ..., \tag{8}$$

Comme on l'a déjà mentionné plus haut, les composantes de θ doivent être petites, ce qui permet, en écrivant la mécanique quantique en remplaçant le produit par le *star*-produit, puis en tronquant le développement ci-dessus, calculer les corrections aux premiers ordres apportées par la non-commutativité à la mécanique quantique.

On note quelques propriétés du $\star$-produit sous l'intégrale qui sont particulièrement utiles :

$$\int (f \star g)(x) d^n x = \int (g \star f)(x) d^n x = \int (f \cdot g)(x) d^n x, \tag{9}$$

$$\int (f \star g \star h)(x) d^n x = \int (f \cdot (g \star h))(x) d^n x = \int ((f \star g) \cdot h)(x) d^n x, \tag{10}$$

$$\int (f \star g \star h)(x) d^n x = \int (h \star f \star g)(x) d^n x = \int (g \star h \star f)(x) d^n x, \qquad (11)$$

Nous allons maintenant voir une approche opératorielle de la mécanique quantique non-commutative. Il s'agit de la représentation de la MQNC en termes des opérateurs canoniques de la mécanique quantique.

Le théorème de Darboux pour les variétés symplectique nous dit que toutes les variétés symplectiques de dimension 2d sont localement symplectomorphes. En particulier toute forme symplectique de dimensions 2d peut être ramenée à la 2-forme canonique : $\omega_{can} = dp_i \wedge dq_i$ avec $i = 1...d$. Ce théorème implique en particulier que pour toute algèbre $[\hat{\xi}^I, \hat{\xi}^J] = i\Omega^{IJ}$, il existe un changement de coordonnées local $\tilde{\xi}_I = \tilde{\xi}_I(\hat{\xi})$ telles que le crochet des $\tilde{\xi}_I$ soit canonique. En particulier pour le cas :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}\mathbb{1}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\mathbb{1}, \qquad (12)$$

on a :

$$\tilde{x}_i = \hat{x}_i + \frac{\theta_{ij}}{2}\hat{p}_j, \quad \tilde{p}_i = \hat{p}_i, \qquad (13)$$

Cette représentation a l'avantage de rendre les prédictions de la mécanique quantique et celles de la MQNC facilement comparables. De plus, cette représentation peut être mise en correspondance avec la précédente. En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A(\hat{\vec{x}})\psi(\vec{x}) &= A(\tilde{x} - \frac{\theta_{ij}}{2}\tilde{p}_j)\psi(\vec{x}) \\ &= A(\vec{x})\psi(\vec{x}) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i A(\vec{x})\partial_j\psi(\vec{x}) + \frac{1}{2!}(\frac{i}{2})^2\theta^{ij}\theta^{kl}\partial_i\partial_k A(\vec{x})\partial_j\partial_l\psi(\vec{x}) + ... \end{aligned} \qquad (14)$$

En comparant ce développement avec (8), on voit que l'on peut écrire l'égalité :

$$A(\vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = A(\tilde{x} - \frac{\theta_{ij}}{2}\tilde{p}_j)\psi(\vec{x}), \qquad (15)$$

Cette relation nous sera utile dans la dernière section où nous partirons de la fomulation par le $\star$-produit pour déterminer les équations d'évolutions des opérateurs.

2.3 Procédure de Dirac pour les systèmes dynamiques contraints.

La procédure de Dirac a été proposée par ce dernier dans les années 50, pour le traitement des systèmes dynamiques contraints et leur quantification canonique. Les systèmes dynamiques contrains sont décrits par des lagrangiens dits "singuliers", caractérisés par le fait que le déterminant de leur matrice hessienne soit nul ($det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}) = 0$). Cette caractéristique rend la transformation qui amène du lagrangien au hamiltonien irréversible, et engendre un système hamiltonien non physiquement équivalent au système lagrangien.

Regardons plus en détail ce qui se passe avec les lagrangiens singuliers. Soit un lagrangien L singulier. Les équations du mouvement sont données par les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_i} \tag{16}$$

On voit que lorsque la matrice hessienne est non-inversible (i.e. $det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}) = 0$), on ne peut pas exprimer chaque composante de l'accélération comme une fonction de $\vec{x}$ et $\dot{\vec{x}}$. En particulier, cela signifie qu'il existe des équations qui relient $\vec{x}$ et $\dot{\vec{x}}$. Ces équations ne sont pas des équations dynamiques, elles sont appelées contraintes. Cette appellation se justifie en partie car ces relations contraignent les valeurs initiales des vitesses en fonction des valeurs initiales des coordonnées. On peut extraire ces relations en remarquant que la matrice hessienne du lagrangien doit posséder $N = d - R$ vecteur propres V_n^i associés à la valeur propre nulle, avec R le rang de la matrice et d la dimension de l'espace. En contractant l'équation (16) avec ces derniers, on obtient N relations entre $\vec{x}$ et $\dot{\vec{x}}$:

$$\Psi_n(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = V_n^i(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_i}) = 0, \quad n = 1, ..., N \tag{17}$$

Parmi ces équations celle qui sont indépendantes sont appelées contraintes lagrangiennes.

Exemple :

Soit

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 - \frac{\omega^2}{2}(x_1 - x_2)^2, \tag{18}$$

Il n'y alors qu'une unique équation du mouvement :

$$\omega^2(x_1 - x_2) = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2, \tag{19}$$

Cette équation laisse $x_1 + x_2$ complètement indéterminée et arbitraire.

On peut aussi prendre l'exemple plus fondamental de l'électromagnétisme où la densité lagrangienne est donnée par :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{20}$$

qui donne les équations de Lagrange :

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0, \tag{21}$$

On remarque que la composante 0 de ces équations ne contient pas de terme en dérivée seconde du temps, ce qui manifeste la présence de la symétrie de jauge dans le lagrangien, et rend nécessaire la fixation de jauge pour la quantification.

Voyons maintenant en quoi tout cela pose problème pour le passage au formalisme Hamiltonien. La transformation du lagrangien au hamiltonien nécessite de définir les moments conjugués :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \tag{22}$$

On voit, en dérivant (22) par $\dot{x}^j$, que, si la matrice hessienne est de déterminant nul, l'on ne peut pas écrire $\dot{x}^i = \dot{x}^i(q,p)$. En d'autres termes, les moments (22) ne peuvent pas être tous indépendants et il doit exister un certain nombre N relations indépendantes :

$$\phi_n(\vec{x},\vec{p}) = 0, n = 1, ..., N \tag{23}$$

On appelle ces relations les contraintes primaires. On supposera que ces fonctions sont régulières c'est à dire qu'elle peuvent localement être prises comme les M premières coordonnées dans le voisinage de l'hypersurface $\Gamma_\phi = \{(\vec{x},\vec{p}) \mid \phi_n(\vec{x},\vec{p}) = 0,\ n = 1, ..., N\}$, ou de manière équivalente qu'une variation $\delta\phi_n$ est d'ordre ϵ si les variations δp_i, δx_i sont d'ordre ϵ . Si cette hypothèse est vérifiée, alors on a d'intéressants théorèmes [11].

Définition : *On appel, une égalité faible, une égalité vraie à une combinaison linéaire de contraintes prés, et on note :*

$$F(\vec{x},\vec{p}) = G(\vec{x},\vec{p}) + c^n(\vec{x},\vec{p})\phi_n \quad \Leftrightarrow \quad F(\vec{x},\vec{p}) \approx G(\vec{x},\vec{p}), \tag{24}$$

Théorème 1 : *Si une fonction $F(\vec{x},\vec{p})$ s'annule faiblement, alors il existe des fonctions f^n telles que*

$$F = f^n\phi_n \tag{25}$$

Théorème 2 : *Si $\lambda_i\delta x^i + \mu^i\delta p_i = 0$, pour toute variation δx^i, δp^i tangente à Γ_ϕ, c'est à dire*

$$\delta\phi_n = \frac{\partial\phi_n}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial\phi_n}{\partial p_i}\delta p_i = 0, \tag{26}$$

alors il existe des fonctions u^n telles que, sur Γ_ϕ,

$$\lambda_i = u^n\frac{\partial\phi_n}{\partial x^i}, \tag{27}$$

$$\mu^i = u^n \frac{\partial \phi_n}{\partial p_i} \tag{28}$$

Ces contraintes peuvent poser problème, en particulier au regard des règles de crochets que doivent vérifier x_i et p_i. En effet l'on doit avoir :

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{29}$$

Mais imaginons le cas où une contrainte primaire impose $p_i = 0$ pour certains i donnés (c'est le cas pour l'électromagnétisme où le moment conjugué de A_0 doit être nul). Dans ce cas les relations (29) ne peuvent pas être vérifiés. On voit apparaître une contradiction formelle qui doit être résolue en calculant d'abord le crochet de manière générale, puis en l'évaluant sur la surface des contraintes. Cette contradiction vient du fait que le système hamiltonien défini par les crochets canoniques (i.e. (29)) et le hamiltonien :

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \dot{x}^i p_i - L, \tag{30}$$

est défini dans tout l'espace des phases, alors que le système physique est contraint sur une hypersurface définie par les fonctions $\phi_m(\vec{x}, \vec{p})$. En réalité le système hamiltonien précédent est certes défini mais pas forcément bien défini dans tout l'espace des phases. Reprenons l'exemple du lagrangien (18). Le calcul du Hamilton par l'expression (30) donne :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2, \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, p_1, p_2) &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{\omega^2}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{\omega^2}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\omega^2}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{\omega^2}{2}(x_1 - x_2)^2 \end{aligned} \tag{32}$$

On remarque que ces trois expressions de H sont définies sur tout l'espace des phases mais ne sont équivalentes que sur la surface définie par la contrainte $\phi \equiv p_1 - p_2 = 0$. Ainsi, H n'est bien défini que sur cette surface. On voit donc que la transformation standard (30) ne tient pas compte des contraintes, cette information est perdue dans la transformation. La solution proposée par

Dirac intègre cette information dans le crochet à l'aide d'un crochet déformé. Nous allons voir comment l'on peut arriver à cette idée.

Dans un premier temps, différencions sur Γ_ϕ les deux côtés de l'équation (30). On obtient :

$$(\frac{\partial H}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial x^i})\delta x^i + (\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{x}^i)\delta p_i = 0, \tag{33}$$

En utilisant le théorème 2, on obtient qu'il existe des fonctions u_n telles que :

$$\dot{x}^i \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^n \frac{\partial \phi_n}{\partial p_i}, \tag{34}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial x^i}|_{\dot{x}} \approx \frac{\partial H}{\partial x^i}|_p + u^n \frac{\partial \phi_n}{\partial x^i} = -\dot{p}_i, \tag{35}$$

où la dernière égalité a été obtenue en utilisant les équations de Lagrange. On est maintenant en mesure d'écrire l'équation d'évolution d'une fonction $G(\vec{x}, \vec{p})$ quelconque pour un système contraint sur la surface Γ_ϕ . On a :

$$\begin{aligned}\dot{G} &\approx \frac{\partial G}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial G}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial G}{\partial t}\\ &\approx \frac{\partial G}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} + u^n(\frac{\partial G}{\partial x^i}\frac{\partial \phi_n}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi_n}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial p_i}) + \frac{\partial G}{\partial t}\\ &\approx \{G, H\} + u^n\{G, \phi_n\} + \frac{\partial G}{\partial t},\end{aligned} \tag{36}$$

On va maintenant utiliser la condition de stabilité(i.e. $\dot{\phi}_n = 0$) des contraintes pour déterminer les fonctions u^n. En premier lieu, on fait quelques hypothèses sur les contraintes. On suppose que les fonctions ϕ_n ne dépendent pas explicitement du temps et on se place dans le cadre des contraintes de seconde classe, c'est à dire $\{\phi_n, \phi_m\} = \chi_{nm}$ avec χ une matrice non nulle et que nous supposerons inversible. Cette dernière hypothèse ne rend pas cette approche moins générale, puisque les systèmes avec contraintes de première classe(i.e. χ nulle), c'est à dire possédant une symétrie de jauge, peuvent toujours se ramener à un système de contraintes de seconde classe au prix d'une fixation de jauge. On écrit la condition de stabilité des contraintes en utilisant (36) :

$$\dot{\phi}_n \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\phi_n, H\} + u^m\{\phi_n, \phi_m\} = 0, \tag{37}$$

ce qui donne pour les fonctions u^n :

$$u^n \approx -\chi^{nm}\{\phi_m, H\}, \qquad \text{avec } \chi^{nm}\chi_{ml} = \delta^n_l \tag{38}$$

On peut réinjecter cette expression générale dans (36), on trouve :

$$\dot{G} \approx \{G, H\} - \{G, \phi_m\}\chi^{mn}\{\phi_n, H\} + \frac{\partial G}{\partial t}, \tag{39}$$

Cette dernière expression justifie le remplacement du crochet Poisson par un nouveau crochet dit crochet de Dirac :

$$\{A, B\}_d = \{A, B\} - \{A, \phi_m\}\chi^{mn}\{\phi_n, B\}, \tag{40}$$

On peux vérifier que ce crochet vérifie bien les propriétés de bilinéarité, antisymétrique, les identités de Jacobi et la règle de Leibniz pour le produit. Avec ce crochet l'équation d'évolution sur la surface des contraintes se réécrit :

$$\dot{G} = \{G, H\}_d + \frac{\partial G}{\partial t}, \tag{41}$$

Le crochet d'une contrainte avec une fonction quelconque de l'espace des phases est toujours nul et nul partout. Ainsi, contrairement au cas du crochet de Poisson, les contraintes peuvent être mises à zéro, avant ou après le calcul du crochet, levant ainsi l'ambiguïté formelle du crochet de Poisson. En particulier toute les égalités faibles peuvent être prises comme des égalités "fortes". On peut donc effectuer la quantification de ce type de système en substituant des commutateurs aux crochets de Dirac.

3 Travail de recherche

3.1 Mécanique classique comme système hamiltonien contrain

La référence [13] fait apparaître que certains systèmes dynamiques classiques non-commutatifs peuvent être décris comme des systèmes hamiltoniens contrains. Ce résultat nous a amené à généraliser cette approche à n'importe quel systèmes hamiltoniens sur une variété symplectique. Cette idée avait déjà été ébauchée dans certains cas particuliers dans les références [14]-[17] et, en particulier, pour le cas de la matrice de Poisson constante. Nous avons donc formulé cette approche de manière unifiée.

Comme annoncé précédemment, nous allons travailler avec un système hamiltonien défini sur une variété symplectique, ce qui implique que l'espace des phases soit de dimension paire et que le crochet de Poisson soit générée par un matrice symplectique. On se place donc dans un espace des phases Γ

paramétré par $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{pmatrix}_{1,\ldots,2d}$. Le crochet de Poisson est donné de manière générale sous la forme :

$$\{A(\vec{\xi}), B(\vec{\xi})\} = \Omega^{IJ}\partial_I A \partial_J B, \quad \text{en particulier } \{\xi^I, \xi^J\} = \Omega^{IJ} \tag{42}$$

La matrice Ω est appelée matrice de Poisson. Elle est antisymétrique, non-dégénérée et en général elle peut dépendre de $\vec{\xi}$. Les identités de Jacobi pour le crochet donne :

$$\Omega^{IL}\partial_L\Omega^{JK} + \Omega^{KL}\partial_L\Omega^{IJ} + \Omega^{JL}\partial_L\Omega^{KI} = 0, \tag{43}$$

La matrice qui génère la forme symplectique de l'espace est appelée matrice symplectique et correspond à l'inverse de la matrice de Poisson, $\omega_{IJ} = (\Omega^{IJ})^{-1}$. La matrice ω_{IJ} est antisymétrique et non dégénérée et en particulier :

$$\partial_I\omega_{JK} + \partial_K\omega_{IJ} + \partial_J\omega_{KI} = 0, \tag{44}$$

La 2-forme symplectique est alors donnée par :

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{IJ} d\omega^I \wedge d\omega^J, \tag{45}$$

Les identités de Bianchi (44), équivalent au fait que cet forme soit fermée(i.e. dω=0).

On considère maintenant un système dynamique décrit par le Hamiltonien $H(\vec{\xi})$. Le système hamiltonien ainsi défini sur la variété symplectique précédente admet comme équation du mouvement :

$$\dot{\xi}^I = \{\xi^i, H(\vec{\xi})\} = \Omega^{IJ}\partial_J H \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{IJ}\dot{\xi}^J = \partial_I H, \tag{46}$$

Le premier problème est de déterminer en toute généralité une fonction lagrangienne qui fournisse des équations équivalentes à ces dernières via les équations de Lagrange. Pour ce faire, nous allons utiliser les propriétés de fermeture de ω. On a :

$$d\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = da, \quad \text{avec } a \text{ une 1-forme} \tag{47}$$

et en particulier :

$$\omega_{IJ} = \partial_I a_J - \partial_J a_I, \tag{48}$$

En remplaçant cette dernière expression dans les équations du mouvement, on trouve :

$$(\partial_I a_J - \partial_J a_I)\dot{\xi}^J = \partial_I H \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\xi}^J\partial_I a_J - \partial_I H = \frac{da_I}{dt}, \tag{49}$$

Ici, on peut reconnaître les équations de Lagrange pour le lagrangien défini sur l'espace des phases :

$$L(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}) = \dot{\xi}^I a_I - H, \tag{50}$$

On a donc trouvé une forme générale de lagrangien défini dans l'espace des phases, équivalente au système hamiltonien $\{H(\vec{\xi}), \Omega_{IJ}\}$. Où l'équivalence, donnée par celle des équations de Lagrange et des équations de hamiltoniens (49) est évidente par construction. Ce lagrangien est du premier ordre, on peut donc dire qu'il est singulier dans le sens défini plus haut. C'est cette caractéristique qui invite naturellement à utiliser la procédure de Dirac pour le traitement de ce type de lagrangien. L'idée est d'utiliser la définition des moments conjugués m_I associés aux ξ^I comme une contrainte. Ainsi, on a un ensemble de contraintes :

$$\phi_I = m_I - \frac{\partial L(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}})}{\partial \dot{\xi}^I} = m_I - a_I(\xi) \equiv 0, \tag{51}$$

Dans le double espace des phases $\Gamma^2 = (\vec{x}, \vec{p}, \vec{m}_x, \vec{m}_p)$, la définition du moment conjugué constitue bien un ensemble de contraintes dans la mesure où, dans le cas d'un lagrangien du premier ordre, elle ne fait intervenir aucun $\dot{\xi}$. Autrement dit, cette définition définit bien une hypersurface dans Γ^2. On peut remarquer que, dans ce cas là, on a un nombre $2d$ de contraintes.

On va suivre la procédure de Dirac. On a le hamiltonien canonique :

$$H_{can}(\vec{\xi}, m_\xi) = \dot{\xi}^I m_I - L(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}) \approx H(\vec{\xi}), \tag{52}$$

Pour déterminer le crochet de Dirac, il faut déterminer l'algèbre des contraintes :

$$\{\phi_I, \phi_J\} = \partial_I a_J - \partial_J a_I = \omega_{IJ}, \tag{53}$$

En utilisant la définition (40), on peut calculer le crochet de Dirac des variables ξ_I :

$$\begin{aligned} \{\xi^I, \xi^J\}_d &= \{\xi^I, \xi_J\} - \{\xi^I, \phi_K\}\Omega^{KL}\{\phi_L, \xi^J\} \\ &= -\{\xi^I, m_K\}\Omega^{KL}\{m_L, \xi^J\} \\ &= \Omega^{IJ}, \end{aligned} \tag{54}$$

où par définition on a utilisé $\{\xi^I, m_K\} = \delta^I_K$. Il est important de noter que le crochet de Poisson des ξ_I est nul car x_i et p_i sont ici des variables de l'espace Γ^2 indépendantes et non des variables conjuguées. L'usage du crochet de Dirac nous permet de transformer l'égalité faible dans (52) en égalité forte. On remarque que H_{can} et $\{\xi^I, \xi^J\}_d$ sont indépendants de moments conjugués m on peut donc tronquer l'espace de définition Γ^2 de notre système en un espace $(\vec{x}, \vec{p})$. On retrouve alors le système d'origine (H, Ω^{IJ}) définit sur Γ. Ainsi, on a montré l'équivalence entre le lagrangien (50) et le système hamiltonien défini sur la variété symplectique défini par la forme ω.

On remarque en particulier que, dans le processus que l'on vient de décrire, on part d'un espace des phases $(\vec{x}, \vec{p})$ de dimension 2d, puis on passe au formalisme lagrangien dans un espace $(\vec{x}, \vec{p}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{p}})$ de dimension 4d et ,pour finir, on revient à un système hamiltonien défini dans un espace $(\vec{x}, \vec{p}, \vec{m}_x, \vec{m}_p)$ de dimension 4d, mais qui peut se réduire trivialement à l'espace d'origine $(\vec{x}, \vec{p})$. La singularité d'un lagrangien peut manifester le fait que l'espace de définition de ce dernier permet plus de degrés de liberté que le système n'en a réellement. Ici l'espace des phases Γ^2 permet 2d degrés de liberté, cependant le système ne peut clairement avoir que d degrés de liberté physique. Les équations de Lagrange de (50) donnent :

$$\dot{\xi}^I = \Omega^{IJ} \partial_J H, \tag{55}$$

Si on pense en termes de contraintes lagrangiennes, il semblerait que toutes les équations ne sont que des contraintes, puisqu'elles permettent d'exprimer complètement les $\dot{\xi}_I$ en fonction des ξ. Dans ce cas le système ne posséderait aucun degré dynamique, ce serait le cas si le lagrangien était défini sur l'espace standard. Cependant, il faut garder à l'esprit que la moitiè de ces équations porte sur $\dot{p}$. En mécanique classique la détermination complète d'un système physique passe par la donnée des vitesses et des positions initiales, pas par celle des impulsions et de leurs dérivées temporelles. Autrement dit, seules les positions doivent être des degrés dynamiques. Pour bien comprendre ces équations, il faut se rappeler que les impulsions ne sont pas des degrés de liberté. En réalité pour bien interpréter ces équations, il faut les traiter comme des équations hamiltoniennes. Ainsi, on peut, en principe, obtenir d équations dynamiques pour x en réinjectant les contraintes sur les impulsions dans les dérivées temporelles des équations sur les positions.

Exemple :

Nous allons utiliser ce que nous venons d'exposer pour déterminer le lagrangien pour une particule dans un champs magnétique sur un espace non commutatif . On prend le cas d=3. Suivant la référence [12], on considère la 2-forme symplectique :

$$\omega = dp_i \wedge dx^i + \frac{1}{2} e\epsilon_{ijk} B^k dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\theta^k dp^i \wedge dp^j, \quad \text{avec } i, j, k = 1...3 \tag{56}$$

où e est la charge électrique, $\vec{B}(\vec{x})$ un champs magnétique et $\vec{\theta}(\vec{p})$ le champs qui paramètre la non-commutativité. Pour que ω soit fermée, $\vec{B}$ doit suivre les équations de Maxwell $div\vec{B} = 0$, i.e. $\vec{B} \equiv \vec{rot}\vec{A}$, et $\vec{\theta}$ doit être de divergence nulle dans l'espace des impulsions et donc $\vec{\theta}(\vec{p}) \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \times \vec{\tilde{A}}(\vec{p})$. On a, de manière équivalente la structure de Poisson :

$$\{x_i, x_j\} = \frac{1}{\kappa}\epsilon_{ijk}\theta_k, \quad \{p_i, p_k\} = \frac{1}{\kappa}e\epsilon_{ijk}B_k, \quad \{x_i, p_j\} = \frac{1}{k}(\delta_{ij} - eB_i\theta_j), \tag{57}$$

Ici, on voit bien apparaître les similitudes formelles entre le champs magnétique et le champs de non-commutativité. Avec le Hamiltonien :

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + eV(\vec{x}, t), \tag{58}$$

on obtient les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= e\vec{E} + e\dot{\vec{x}} \times \vec{B} \\ \dot{\vec{x}} &= \frac{\vec{p}}{m} - \dot{\vec{p}} \times \vec{\theta}, \end{aligned} \tag{59}$$

où $\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{grad}(V(\vec{x}, t))$. La seconde relation se réduit bien au cas standard quand $\vec{\theta} = 0$, mais on remarque que les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires lorsque $\vec{\theta}$ n'est pas nul, même en l'absence de champs magnétique. La 2-forme (56) peut se réécrire $\omega = da$ avec

$$a = a_I(\xi)d\xi^I = p_i dx^i + eA_i(\vec{x})dx^i + \tilde{A}^i dp_i \tag{60}$$

En reprenant la forme (50) on peut écrire un lagrangien définit dans l'espace des phases qui mène aux équations (59). On trouve :

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{p}, \dot{\vec{p}}, t) = (\vec{p} + e\vec{A}) \cdot \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{p}} \cdot \vec{\tilde{A}} - \frac{\vec{p}^2}{2m} - eV, \tag{61}$$

Nous avons montré comment l'approche de Dirac permet de retrouver le système Hamiltonien, et en particulier de retrouver la bonne structure symplectique. Je propose ici une approche alternative, plus "axiomatique". L'idée étant de chercher à déterminer à partir du lagrangien de la forme (50) quels doivent être les crochets des ξ_I afin que l'on puisse écrire les équations de Lagrange sous la forme :

$$\dot{\xi}^I = \{\xi^I, H\}, \tag{62}$$

De manière générale on considère un système lagrangien contraint par les M contraintes $f_m(\vec{\xi},\dot{\vec{\xi}}) = 0$. On sait que le système physique doit être contraint sur cette surface, aussi on différencie les équations (62) sur la surface :

$$\begin{aligned}\delta(\dot{\xi}^I - \{\xi^I, H\}) = 0 \Leftrightarrow \delta(\dot{\xi}^I - \{\xi^I, \xi^J\}\partial_J H) = 0 \\ \Leftrightarrow \delta\dot{\xi}^I - \delta\xi^K \partial_K\{\xi^I,\xi^J\}\partial_J H - \delta\xi^K\{\xi^I,\xi^J\}\partial_K\partial_J H = 0,\end{aligned} \tag{63}$$

sachant que l'on a :

$$\frac{\partial f_m}{\partial \dot{\xi}^I}\delta\dot{\xi}^I + \frac{\partial f_m}{\partial \xi_I}\delta\xi^I = 0, \tag{64}$$

en contractant (63) avec $\frac{\partial f_m}{\partial \dot{\xi}^I}$ on trouve les équations que doit vérifier le crochet :

$$\frac{\partial f_m}{\partial \dot{\xi}^I}\partial_K C^{IJ}\partial_J H + \frac{\partial f_m}{\partial \dot{\xi}^I} C^{IJ}\partial_K\partial_J H - \frac{\partial f_m}{\partial \xi^I} = 0, \tag{65}$$

où $C^{IJ} = \{\xi^I, \xi^J\}$. Ces équations montrent le lien entre les contraintes lagrangiennes et la déformation du crochet. On remarque que l'on obtient $M \times 2d$ équations, et que le crochet C^{IJ} possède $4d^2$ composantes. Il faut donc un système maximale ment contraint (i.e. $M = 2d$) pour déterminer complètement le crochet à partir des équations précédentes. On a vu que c'était le cas du lagrangien (50). Ainsi avec les contraintes lagrangiennes

$$f(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \dot{\xi}^I - \Omega^{IJ}\partial_J H, \tag{66}$$

On obtient :

$$\partial_K(C^{IJ} - \Omega^{IJ})\partial_J H + (C^{IJ} - \Omega^{IJ})\partial_K\partial_J H = 0,. \tag{67}$$

On a la solution évidente : $C^{IJ} = \Omega^{IJ}$

3.2 Système avec contraintes mécaniques

On a vu dans la section précédente que, à n'importe quel système hamiltonien défini sur une variété symplectique, on peut associer un lagrangien défini sur l'espace des phases de la forme (50). Il existe une classe de système pour lequel le système hamiltonien $(H(\vec{\xi}, \Omega^{IJ}))$ ne peut pas être défini sur une variété symplectique. C'est en particulier le cas lorsque Ω n'est pas inversible. Les systèmes hamiltoniens soumis à des contraintes mécaniques et décrits en termes de coordonnées globales sont de ceux-là. Ces systèmes sont contraints sur une sous-variété de l'espace des configurations. J'appelle les coordonnées de l'espace des configutations, coordonnées globales, qui s'opposent aux coordonnées définies sur la sous-variètè.

Exemple :

La particule libre sur une sphère de rayon a peut être décrite en termes des coordonnées de $\mathbb{R}^3$ et de leurs impulsions associèes, avec la contrainte $x^2 = a^2$. Dans cette représentation on a :

$$H = \frac{p^2}{2m}, \quad \Omega^{IJ} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 0 & a^2\delta^{ij} - x^i x^j \\ -a^2\delta^{ij} + x^i x^j & p^i x^j - x^i p^j \end{pmatrix} \tag{68}$$

avec $i = 1, .., 3$. On peut vérifier que la matrice de Poisson est ici non-inversible. En conséquence, il n'y a pas dans cette représentation, de description possible en termes de variété symplectique. Cependant, en termes des coordonnées sur la sphère, il est possible de faire une telle description.

J'ai travaillé à savoir s'il était possible de faire entrer ce type de système dans l'approche décrite dans la section précédente, sans avoir à les décrires en termes des coordonnées sur la sous-variété des contraintes. Ce travail a en particulier, était motivé par l'étude de la sphère non-commutative.

Commençons par le cas de la particule libre sur la sphère commutative. Le méthode standard pour contraindre mécaniquement un système est celle des multiplicateurs de Lagrange. Pour le cas de la particule libre sur la sphère commutative de rayon a, on a donc le lagrangien défini sur espace des phases :

$$L(\vec{x}, \vec{p}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{p}}, \alpha) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - \vec{p}^2 - \alpha(\vec{x}^2 - a^2), \tag{69}$$

où on a pris la masse de la particule $m = \frac{1}{2}$, et où α est un multiplicateur de Lagrange. La présence de ce dernier empêche d'écrire le lagrangien sous la forme (50). L'idée, pour permettre cette écriture, est de remarquer que la contrainte peut aussi s'écrire :

$$\frac{dx^2}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = cste \equiv a^2, \tag{70}$$

On peut donc réécrire le lagrangien :

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \vec{p}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{p}}, \alpha, \dot{\alpha}) &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - \vec{p}^2 - \alpha(\dot{x^2}) \\ &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - \vec{p}^2 + \dot{\alpha}x^2 \end{aligned} \tag{71}$$

où la dernière égalité est vraie à une dérivée totale près. Ce dernier lagrangien peut être écrit sous la forme (50). Cependant la dimension de l'espace $(\vec{x}, \vec{p}, \alpha)$ étant impaire, la matrice ω_{ij} sera de dimension impaire et donc non inversible.

Il faut donc une seconde contrainte à imposer pour avoir un espace pair. On peut imposer la stabilité de la première contrainte. D'abord réécrivons la première contrainte

$$\frac{dx^2}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}^i x_i = 0. \tag{72}$$

Dans notre cas, on peut sans peine affirmer que l'impulsion doit être colinéaire à la vitesse. On peut donc écrire la contrainte sous la forme $p^i x_i = 0$ et la stabilité s'écrit $\frac{dp^i x_i}{dt} = 0$. En rajoutant cette contrainte on peut écrire le lagrangien :

$$L(\vec{x}, \vec{p}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{p}}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \vec{p}^2 + \dot{\alpha} x^2 + \dot{\beta} p^i x_i, \tag{73}$$

Pour vérifier la validité du lagrangien on peut calculer les équations du mouvement. On a

$$\begin{aligned} &x^2 = cste \equiv a^2, \quad \vec{p} \cdot \vec{x} = cste \equiv 0, \\ &\dot{x}^i = -x^i \dot{\beta} + 2p^i, \quad \dot{p}^i = 2x^i \dot{\alpha} + p^i \dot{\beta} \end{aligned} \tag{74}$$

On peut résoudre ces équations pour $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$:

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} = -\frac{p^2}{a^2}, \quad \dot{\beta} = \frac{2\vec{p} \cdot \vec{x}}{a^2} = 0 \\ &\dot{x}^i = 2p^i, \quad \dot{p}^i = -\frac{2p^2}{a^2} x^i, \end{aligned} \tag{75}$$

On retrouve bien les équations du mouvement de la particule libre sur la sphère. Il faut noter que le lagrangien (71) donne les mêmes équations, la dernière contrainte n'intervient que pour des raisons formelles.

Le lagrangien est maintenant défini sur l'espace ($\vec{\chi} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \dot{\vec{\chi}}$) et on peut écrire :

$$L(\vec{\chi}, \dot{\vec{\chi}}) = \dot{\chi}^R a_R - H, \quad H = p^2, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{0} \\ x^2 \\ \vec{p} \cdot \vec{x} \end{pmatrix} \tag{76}$$

avec $R = 2d + 2$. Ainsi on a la matrice :

$$\omega_{RS} = \partial_R a_S - \partial_S a_R = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & x_i & p_i \\ \delta_{ij} & 0 & 0 & x_i \\ -x_j & 0 & 0 & 0 \\ -p_j & -x_j & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

Dans cette dernière matrice, on a enlevé les facteurs dans le secteur de α par souci de simplicité. Cela n'a aucune influence sur la physique puisque les contrainte sont définies à un facteur près. Pour déterminer le crochet que doivent suivre les variables ξ_I, on inverse la matrice $\omega_R S$ et on extrait la sous-matrice $\tilde{\Omega}^{IJ}$ correspondant au secteur physique (i.e les composantes pour R et S allant de 1 à $2d$). On trouve :

$$\tilde{\Omega}^{IJ} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 0 & a^2\delta^{ij} - x^i x^j \\ -a^2\delta^{ij} + x^i x^j & p^i x^j - x^i p^j \end{pmatrix}, \tag{78}$$

On retrouve bien l'algèbre que doivent suivre les coordonnées de l'espace des phases sur la sphère, et en particulier le système hamiltonien $(H(\xi), \tilde{\Omega}^{IJ})$ correspondant à la particule libre sur la sphère.

On va maintenant voir dans quelle mesure on peut généraliser le raisonnement précédent. On va prendre le cas d'un système contraint par un nombre M de contraintes mécaniques quelconques $f_m(\vec{x}) = 0$, non dépendantes explicitement du temps. Si M est pair, alors, la procédure s'applique sans problème. Sinon, il faut rajouter une contrainte. On peut essayer de rajouter une condition de stabilité d'une des M contraintes :

$$\frac{df_m(\vec{x})}{dt} = \dot{x}^i \partial_i f_m(\vec{x}) = 0, \tag{79}$$

Pour appliquer l'astuce d'écrire $p^i \partial_i f_m(\vec{x}) = 0$, il faut que $\vec{p}$ soit partout tangent à l'hypersurface décrite par l'une des contraintes. Autrement dit, l'impulsion doit différer de la vitesse d'une quantité vectorielle partout tangente à cette hypersurface. Si une telle contrainte existe, appelons la $f_a(\vec{x})$, alors on peut rajouter la contrainte $p^i \partial_i f_m(\vec{x}) = 0$ de la même manière que dans le cas de la sphère. La présence de champs magnétique en particulier peut rendre l'astuce précédente impossible. Cependant dans le cas ou le champs magnétique est partout perpendiculaire à l'hypersurface générée par l'une des contraintes, la contribution du champs magnétique à $\dot{\vec{p}}$ est tangente à cette hypersurface, et donc $\vec{p}$ reste partout tangente à celle-ci (cf les équations (59)).

La procédure décrite précédemment peut aussi être vue en termes des variétés symplectiques. La particule libre peut être décrite par un hamiltonien $H = p^2$, sur un variété de forme symplectique $\omega_{can} = dp_i \wedge dx_i$. On remarque que l'adjonction de contraintes dans le lagrangien correspond à l'ajout de termes supplémentaires dans la 2-forme. En effet dans notre cas, on peut écrire la 2-forme contrainte générée par la matrice (77) comme :

$$\omega = \omega_{can} + x_i dx_i \wedge d\alpha + p_i dx_i \wedge d\beta + x_i dp_i \wedge d\beta, \tag{80}$$

L'étude des cas sur espace non commutatif par cette méthode est encore largement en cours. L'idée est de tenter de décrire les surfaces plongées dans un espace non-commutatif. La première intuition suggère qu'il est difficile de définir une surface dans un espace "flou", et en particulier qu'une surface n'est bien définie que si elle est en tout point perpendiculaire au champs de non-commutativité. On se place donc dans ce cas. Ces surfaces, pour peu qu'elles soient suffisamment régulières, ont la propriété particulière de pouvoir être localement vues comme un plan non-commutatif. Si la norme du champs de non-commutativité est constante, j'appelle ces surfaces, les surfaces non-commutatives. J'ai, pour l'instant, réduit mon étude à ces dernières pour des raisons techniques, et par ce qu'il s'agit probablement des cas les plus physiquement pertinents. L'application de la méthode précédente à l'obtention du plan non-commutatif par plongement dans un espace non-commutatif de dimensions trois donne de bon résultat, mais est un peut triviale. Cependant c'est la seule qui ne soit pas problématique. En effet l'obtention de surface non-commutative, autres que le plan, par plongement nécessite que le champs de non-commutativité soit dépendant des coordonnées de l'espace de plongement, afin qu'il soit partout normal à la surface. Par exemple pour la sphère de rayon a, on doit choisir $\vec{\theta}(\vec{x}) = \frac{\theta}{a}\vec{x}$. Or les identités de Jacobi sur les crochets de l'espace de plongement interdisent toutes dépendances en $\vec{x}$ pour le champs θ. De plus, cette dépendance peut rendre impossible l'écriture d'un lagrangien de la forme (50), ce qui amoindri l'intérêt de la méthode. Cependant, si on accepte que le plongement s'effectue dans un espace non-physique, ce qui n'empêche pas la surface d'être physiquement pertinente (i.e. d'avoir des crochets qui vérifient les identités de Jacobi), cette méthode reste un moyen relativement intuitif d'obtenir les crochets sur la surface.

Considérons le cas de la sphère non-commutative. En partant de la 2-forme (80) à laquelle on ajoute le terme de non-commutativité $\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\theta^k dp^i \wedge dp^j$, on obtient une 2-forme générée par la matrice :

$$\omega_{RS} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & x_i & p_i \\ \delta_{ji} & \frac{\theta}{a}\epsilon_{ijk}x_k & 0 & x_i \\ -x_j & 0 & 0 & 0 \\ -p_j & -x_j & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } i,j = 1...3, \text{ et } R,S = 1...5, \tag{81}$$

On suppose, ici, que l'impulsion reste tangente à la sphère. L'examen des équations (59) va dans ce sens, cependant l'espace de plongement n'étant pas physique, l'hypothèse demanderait de plus amples investigations. La sous-matrice correspondant au secteur physique de l'inverse de ω_{RS} nous donne l'algèbre des ξ_I sur la sphère non-commutative :

$$\tilde{\Omega}_{IJ} = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{a}\epsilon_{ijk}x_k & \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{a^2} + \frac{\theta}{a^3}\tilde{L}_i x_j \\ -\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{a^2} - \frac{\theta}{a^3}\tilde{L}_j x_i & -\frac{1}{a^2}\epsilon_{ijk}\tilde{L}_k \end{pmatrix} \tag{82}$$

où $\tilde{L} = \epsilon_{ijk}x_j p_k$ est différent du moment angulaire L qui est le générateur des rotations, doit recevoir des corrections du fait de la non-commutativité. On peut d'ailleurs écrire l'algèbre sur la sphère non-commutative en représentation (x_i, L_i). En effet par définition on doit avoir :

$$\{L_i, x_j\} = \epsilon_{ijk}x_k, \quad \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k, \tag{83}$$

On doit rajouter à ces crochets celui des x_i, que l'on peut extraire de (82) :

$$\{x_i, x_j\} = \frac{\theta}{a}\epsilon_{ijk}x_k \tag{84}$$

On obtient, à un changement d'échelle près, l'algèbre proposée par Nair et Polychronakos [18] pour la sphère non-commutative. Contrairement à celle proposée dans [18], cette algèbre fait intervenir explicitement le paramètre de non-commutativité, et la limite vers la sphère commutative se retrouve simplement en prenant $\theta = 0$.

On peut également vérifier que l'on retrouve localement le plan non-commutatif. On se place au voisinage d'un pôle de la sphère $x_3 \approx a$ et on prend $a \to \infty$. A l'ordre 0 en δ on a :

$$\begin{aligned} \{x_r, x_s\} &= \theta\epsilon_{rs}(1 + \frac{1}{a}) \approx \theta\epsilon_{rs} \\ \{x_r, p_s\} &= \delta_{rs} - \frac{x_r x_s}{a^2} + \frac{\theta}{a^3}\tilde{L}_r\delta \approx \delta_{rs}, \end{aligned} \tag{85}$$

et tous les autres crochets s'annulent. Ainsi on retrouve bien les crochets du plan non-commutatif.

Ce travail est loin d'être terminé. Je pense que l'on peut généraliser dans une certaine mesure, l'approche exposée précédemment pour déterminer une algèbre plus générale pour les surfaces non-commutatives. Le point principal restant à examiner étant celui de déterminer quelles sont les conditions qui laissent l'impulsion tangente à la surface. Un deuxième point pourrait être de chercher une autre contrainte à substituer à cette dernière. Reste également que la méthode exposée ne permet pas de formuler un lagrangien pour la sphère non-commutative, on peut espérer qu'il existe une autre manière d'exploiter le lagrangien (50).

3.3 Particule dans un champ extérieur sur espace non-commutatif

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la dynamique d'une particule chargée dans un champs abélien extérieur sur un espace non-commutatif.

L'étude d'une telle dynamique a déjà était menée en perturbation dans la référence [21]. J'ai procédé à une étude à tous les ordres. Cette étude met en évidence les similarités entre le cas du champs abélien sur espace non-commutatif et celui du champs non-abélien sur espace commutatif. Pour se faire nous allons reprendre la démarche de Wong [19], qui a fait ce calcul pour le cas non-abélien. Nous allons également utiliser la correspondance entre le formalisme de $\star$-produit et celui des opérateurs, exposés plus haut. L'action de la QED non-commutative est écrite en substituant le $\star$-produit au produit commutatif dans l'action de la QED standard :

$$S = \int d^4x(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} - \bar{\psi} \star \gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) \star \psi - im\bar{\psi} \star \psi) \tag{86}$$

où on prend $\hbar = c = 1$, $\mu, \nu = 0, .., 4$ et où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]_\star \tag{87}$$

La propriété (10) permet de simplifier, sous l'intégrale, un $\star$-produit par monôme. On peux donc écrire l'action :

$$S = \int d^4x(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu\star)\psi - im\bar{\psi}\psi) \tag{88}$$

On calcule les équations du mouvement pour ψ :

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu\star)\psi + im\psi = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\alpha^i(-i\partial_i - gA_i\star)\psi + m\beta\psi - gA_0 \star \psi = i\partial_t\psi, \end{aligned} \tag{89}$$

avec $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$ et $\beta = \gamma^0$. En utilisant la relation (15) on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\alpha^i(-i\partial_i - g\tilde{A}_i) + m\beta - g\tilde{A}_0)\psi = i\partial_t\psi, \quad \text{avec } \tilde{A}_\mu = A_\mu(\hat{x}_i - \frac{\theta_{ij}}{2}\hat{p}^j). \tag{90}$$

En interprétant cette équation comme une équation de Schrödinger, on peut extraire un hamiltonien :

$$\hat{H} = \alpha^i(\hat{p}_i - g\tilde{A}_i) + m\beta - g\tilde{A}_0 \tag{91}$$

Pour déterminer la dynamique d'une particule dans le champs extérieur A_μ, on calcule les équations de Hamilton engendré par ce dernier hamiltonien.

$$\dot{\hat{x}}^i = i[H, \hat{x}^i] = \alpha^i + g\frac{\theta^{ki}}{2}\alpha^\mu\widetilde{\partial_k A_\mu} \tag{92}$$

Avec $\widetilde{\partial_k A_\mu} = \partial_k A_\mu|_{\hat{x}^i - \theta^{ij}\hat{p}_j}$, et $\alpha^\mu = \mathbb{1}$.

Remarque :
Dans le cas commutatif on a $\dot{\hat{x}}^i = \alpha^i$. Cette relation trouve une interprétation particulièrement intéressante. Pour en savoir plus on pourra se référer à la référence [22].

On fait de même pour l'impulsion :

$$\dot{\hat{p}}_i = i[H, \hat{p}_i] = g\alpha^\mu \widetilde{\partial_i A_\mu} \tag{93}$$

On peut définir le moment mécanique $\hat{\pi} = \hat{p}_i - g\tilde{A}_i$. On peut calculer $\dot{\hat{\pi}}$:

$$\dot{\hat{\pi}}_i = g\alpha^\mu(\widetilde{\partial_\mu A_i} - \widetilde{\partial_i A_\mu}) + ig^2[\alpha^\mu \tilde{A}_\mu, \tilde{A}_i] = -g\alpha^\mu \tilde{F}_{\mu i}, \tag{94}$$

avec $\tilde{F}_{\mu i} = \widetilde{\partial_\mu A_i} - \widetilde{\partial_i A_\mu} - ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_i]$. On remarque que les équations (92) et (93) permettent d'écrire :

$$\alpha^i = \dot{\hat{x}}^i + \frac{\theta^{ij}}{2}\dot{\hat{p}}_j, \tag{95}$$

On remarque également qu'il est raisonnable de prendre $\dot{\hat{x}}^0 = \mathbb{1}$ et $\theta^{0i} = 0$. La dernière égalité ce justifie en particulier par des considérations liées à l'unitarité de la théorie des champs [20]. On peut donc réécrire (94) sous la forme :

$$\dot{\hat{\pi}}_i = g(\dot{\hat{x}}^\mu + \frac{\theta^{\mu\nu}}{2}\dot{\hat{p}}_\nu)\tilde{F}_{i\mu} = \dot{\hat{x}}^\mu \tilde{F}_{i\mu} \tag{96}$$

Ce résultat est très similaire à celui de Wong pour les champs non-abéliens, qui trouve :

$$\dot{\hat{\pi}}_i = \dot{\hat{x}}^\mu F^a_{i\mu}\hat{T}_a \tag{97}$$

Avec $F^a_{\mu i}\hat{T}_a = \partial_\mu A_i - \partial_i A_\mu - ig[A_\mu, A_i]$

4 Conclusion

Les réflexions menées ici doivent encore être développées. L'approche proposée dans la section 3.1, qui trouve également des applications dans le cadre de la description lagrangienne des systèmes "non-lagrangiens"[25], doit égalment pouvoir être développé dans le cadre de la théorie des champs. Le développement de cette approche dans le cadre des systèmes avec contraintes mécaniques, doit encore eclairci sur de nombreux aspects, en particulier en ce qui concerne les espaces de plongements des surfaces non-commutatives.

Que l'espace soit ou ne soit pas réellement commutatif, la mécanique quantique sur espace non-commutatif est un sujet intéressant. Elle porte en elle des questions formelles d'intérêt, et nourri des réflexions plus générales qui vont au-delà de son propre domaine. Elle pousse à élargir les formalismes de la mécanique classique, ce qui ne peut que leurs apportés plus de profondeur. Si elle peut apporter de réponse sur des sujets précis, comme dans le cas de la théorie des cordes en présence de B-field [3], elle apporte aussi de pistes sur des sujets plus généraux comme pour la description des interactions non-locales [23]. Comme le montre certaine recherche les propriétés de non-localité approte toujours une piste intéressante dans la construction d'une théorie des champs sans divergences ultravilettes [24].

Références

[1] W. Heisenberg : "Letter to R. Peierls (1930), in 'Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence', Vol. III, p.15, Ed. K. von Meyenn", (Springer Verlag 1985)

[2] H.S. Snyder, "Quantized space-time", *Phys.Rev.*, **71**, 38 (1947)

[3] N. Seiberg and E. Witten, "String Theory and Noncommutative Geometry", [arXiv :hep-th/9908142]

[4] C. Acatrinei, "Path Integral Formulation of Noncommutative Quantum Mechanics", (2001) [arXiv :hep-th/0307217v1]

[5] A. Smailagic, E. Spallucci, "Feynman Path Integral on the Noncommutative Plane", *Phys.Rev.D*, **66**, (2002) 010001 [arXiv :hep-th/0307217v1]

[6] J. Gamboa , M. Loewe and J. C. Rojas," Noncommutativity and the Aharonov-Bohm Effect" [arXiv :hep-th/0101081]

[7] A. Tonomura et al., "Observation of Aharonov-Bhom Effect by Electron Holography", *Phy.Rev.Lett*, **48**, 1443 (1981)

[8] S. M. Carroll, J. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D.Lane and T. Okamoto,"Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation", [arXiv :hep-th/0105082]

[9] I. Mocioiu, M. Popelov and R. Roibar,"Low-energy Limits on the Antisymmetric Tensor Field Background on the Brane and on the Noncommutative Scale", [arXiv :hep-ph/0005191] ;

[10] Cosmas K. Zahos, David B. Fairlie, Thomas L. Curtright, "Quantum Mechanics In Phase Space", *World Scientific Series in 20th Century Physics*, **34**

[11] A.W Wipf, "Hamilton's Formalism for Systems with Constraints", (1993) [arXiv :hep-th/9312078v3]

[12] C. Duval et P.A Horvathy, "The Peierls subsitution and the exotic Galilei group",*Phys.Rev.*, **B479**, 284-290 (2000), [arXiv :hep-th/0002233]. C. Duval et P.A Horvathy, "Exotic Galilean symmetry in the noncommutative plane, and the Hall effect",*J. Phys. A : Math. Gen.*, **34**, 10097 (2001), [arXiv :0106089].

[13] A.A. Deriglazov, "Noncommutative Quantum Mechanics as a Constrained System", (2002) [arXiv :hep-th/0112053]

[14] M.E.V Costa, H.O. Girotti, "Comment on 'Selfdual fields as charge density solitons"', *Phys.Rev.Lett*, **60**, (1988) 1692

[15] L.D. Faddeev, R. Jackiw, "Hamilton Reduction of Unconstrained and Constrained Systems", *Phys.Rev.Lett.*, **60**, (1988) 1692

[16] A.J Macfarlane, “Equations of Korteweg-de Vries type I : Lagrangian and Hamiltonian formalism”, *Preprint CERN-TH-3289* (unpublished)

[17] Y. Nutku, “Hamiltonian Formulation of the KdV Equation”, *J.Math.Phys.*, **25**, (1984) 2007 Y. Nutku, “Lagrangian Approach to Integrable Systems Yields New Symplectic Structures for KdV”, [arXiv :hep-th/0011052]

[18] V.P. Nair, A.P. Polychronakos, “Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere”, *Phys.Lett.B* **505** (2001) 267, [arXiv :hep-th/0011172]

[19] S.K Wong, "Field And Particle Equations For The Classical Yang-Mills Field ans Particles With Isotopic Spin", *Nuovo Cim.*, **A65**, (1970) 689

[20] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, G. Piacitelli, “On the Unitarity Problem in Space-time Noncommutative Theories”, *Phys.Lett.B*, **533**, (2002) 178 [arXiv :het-th/0201222]

[21] A. H. Fatollahi et H. Mohammadzadeh, “On The Classical Dynamics Of Charges In Noncommutative QED”, (2004) [arXiv :hep-th/0404209v1]

[22] W. Greiner, “Relativistic Quantum Mechanics : Wave Equations”, *Springer*, 117

[23] C.M. Rohwer, K.G. Zloschastiev, L. Gouba, F.G. Scholtz, “Noncommutative quantum mechanics - a perspective on structure and spactial extent”, [arXiv :math-ph/1004.1984v1] (2010)

[24] A. Smailagic, E. Spallucci, “UV divergence-free DFT on noncommutative plane”, (2003) [arXiv :hep-th/0308193v2]

[25] D.M. Gitman, V.G. Kupriyanov, “Canonical quantization of non-Lagrangian théories and its application to damped oscillator and radiating point-like chage”,*Eur.Phys.J C* **50** (2007) 691 [hep-th/0605025], D.M.Gitman, V.G Kupriyanov,“On the action principle for a system of differential equations”, *J.Phys. A* bf 40 (2007) 10071, [arXiv : math-ph/0710.4532]