

Table des matières

1	Remerciements	3
2	Introduction Générale	5
3	Modèles Matriciels : Formalisme et Applications	13
3.1	Notions de base de la théorie matricielle	13
3.1.1	Modèle matriciel à un champ	14
3.1.2	Diagrammes à double lignes	15
3.2	Développement perturbatif de l'énergie libre	18
3.2.1	Expansion de t'Hooft	19
3.2.2	Formulation en terme des valeurs propres	19
3.2.3	Modèle Gaussien	21
3.3	Au delà du Gaussien	22
3.3.1	Méthode du point selle	22
3.3.2	Résolvante du modèle matriciel	24
3.3.3	Exemples d'illustration	26
3.4	Méthode des polynômes orthogonaux	28
3.4.1	Représentation diagonale	29
3.4.2	Exemple du modèle Gaussien	30
3.4.3	Potentiels polynomiaux	33
3.5	Contribution : Fluide de D-cordes sur le Conifold II.	35
4	Théorie de Chern-Simons et Modèle de Fluide de Cordes	55
4.1	Généralités sur la théorie de CS à 3D	56
4.1.1	Théorie de CS comme modèle topologique	56
4.1.2	Invariants topologiques : Noeuds et entrelacs	58
4.1.3	Boucles de Wilson	61
4.2	Approche perturbative	62
4.2.1	Structure perturbative de la fonction de partition	63
4.2.2	Facteurs de symétries	67
4.2.3	Quantification canonique	70
4.2.4	Dépendance en 'framing'	79
4.3	Boucles de Wilson et des invariants de noeud : Des Résultats	81
4.3.1	Propriétés générales	81
4.3.2	Noeuds des tores	84
4.3.3	Théorie de représentation $U(\infty)$	86

4.4	Développement en $1/N$	93
4.4.1	Expression de $F_{g,h}$	94
4.4.2	Expression de $F_g(t)$	95
4.5	Théorie de Chern-Simons comme modèle matriciel	96
4.6	Contribution : Fluide de D-cordes sur le Conifold : Modèle topologique	102
5	Cordes Topologiques sur des Calabi-Yau à trois dimensions	125
5.1	Modèles Sigma Topologiques	125
5.1.1	Modèle sigma supersymétrique $\mathcal{N} = 2$	126
5.1.2	Twiste topologique	128
5.1.3	Modèle topologique de type-A	133
5.1.4	Modèle topologique type-B	138
5.2	Cordes topologiques	142
5.2.1	Couplage à la gravité	142
5.2.2	Relation avec les compactifications du modèle type II	143
5.2.3	Corde topologique type-A	145
5.2.4	Cordes topologiques Ouvertes	153
5.3	Géométrie des CY3 toriques	161
5.3.1	CY3 non-compactes	162
5.3.2	Construction des variétés de Calabi-Yau torique	164
5.3.3	Transition du conifold	170
5.3.4	Exemples d'amplitudes de la corde fermée	174
5.4	Contribution : Symétrie miroir dans les supervariétés de Calabi-Yau locales	177
6	Dualité entre Théorie de Jauge $U(N)$ et Cordes Topologiques	191
6.1	Amplitudes F_g en théorie de jauge et théorie des cordes	192
6.1.1	Energies libres F_g en théorie de jauge	192
6.1.2	Amplitudes F_g en théorie de corde ouverte	192
6.1.3	Lien entre les F_g de la théorie de jauge et de la théorie de corde	193
6.2	Théorie des Champs de Corde et Théories de Jauge	195
6.2.1	Théorie de champ de corde ouverte	196
6.2.2	Théorie de Chern-Simons comme théorie de corde ouverte	197
6.2.3	Modèle matriciel comme une théorie de corde ouverte	201
6.3	Transition Géométrique	209
6.3.1	Transition du conifold et dualité N grand	209
6.3.2	Incorporation des boucles de Wilson	210
6.3.3	Transitions géométriques pour des variétés toriques plus généraux	213
6.3.4	Modèles Matriciels et transitions géométriques	218
6.4	Résumé de la contribution hep-th/0611289 : Les trous noirs dérivés de la théorie type IIA sur des CY3 avec des géométries ADE affine	221
	Conclusion	223
	Annexe A	225

Chapitre 1

Remerciements

Ce mémoire de thèse a été effectué au sein du Lab/UFR de Physique des Hautes Energies de la Faculté des Sciences de Rabat, sous la direction de Monsieur le Professeur E.H.Saidi.

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadrant et directeur de thèse Mr. E.H.Saidi, Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat de m'avoir accepté au sein de son laboratoire et pour son orientation, ses discussions tout au long de ces années de recherche doctorale. Sa disponibilité infaillible à mon égard, son aide, son soutien moral et scientifique et ses précieux conseils m'ont permis de mener à bien ce travail. Qu'il en soit grandement remercié.

Je remercie vivement Mr. My B.Sedra, Professeur à la Faculté des Sciences de Kenitra, d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse. Je le remercie aussi pour son enseignement durant la préparation du DESA avec une très grande compétence. Son aide et l'enseignement de haut niveau que j'ai reçu auprès de lui durant ma formation de DESA m'ont été d'un grand intérêt.

Je tiens à remercier Mme T. Lhallabi, Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour son enseignement de bonne qualité durant ma formation de DESA. Je lui suis extrêmement reconnaissant d'avoir accepté de faire partie des membres du jury. Qu'elle trouve ici le témoignage de mes vifs remerciements.

Je tiens à remercier Mr. E.M. Souidi, Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être parmi les membres du jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde considération.

Je tiens à remercier Mr A. Belhaj, Dr Chercheur au Département Physique Théorique, Zaragoza, d'avoir accepté d'être parmi le jury de ma thèse. Ses conseils prodigués avec profusion m'ont été un stimulant bienfaisant et salvateur et j'espère du fond de mon coeur poursuivre avec lui des collaborations aussi enrichissantes que fructueuses.

Mes remerciements les plus distingués vont à ma très chère amie et collègue L.B. Drissi, merci pour tout très chère.

Mes remerciements vont aussi à mes collaborateurs, M. Ait Ben Haddou, L.B. Drissi et H. Jehjough.

Je remercie également tous mes collègues du Laboratoire de Physique des Hautes Energies, pour leur sens de fraternité indéfectible et leur esprit d'équipe en particulier M. Kessabi, A. El Rhalami, H. Elouali, A. Jraifi, H. Sebbata et A. Moujib. Qu'ils trouvent tout le témoignage de mes profondes considérations et de mes sincères sentiments.

Quant à mes très chers parents, je ne trouverai jamais les mots pour les remercier suffisamment, pour les sacrifices qu'ils ont dû faire, leur soutien moral et financier, leur assistance et engagement permanent. C'est à eux que je dois ce mémoire de thèse, sans eux je ne serais jamais arrivé à mon

but. Je ne pourrai oublier l'effort déployé par mes parents pour débayer tous les obstacles. Je les remercie infiniment et j'implore Allah le tout puissant de les protéger et leur prêter longue vie.

Je désire exprimer mes vifs remerciements à mes chères soeurs Naima, Malika, Hafida et Bahija pour leur soutien moral et financier durant ce travail de thèse. Je tiens à remercier vivement mes frères Mohammed, Tarik et Nouredine ainsi que mes beaux frères Brahim, Thami et Khalid pour leur encouragement continu durant toutes mes années d'études.

Je tiens à remercier tous les membres de ma famille d'avoir assister à ma thèse de Doctorat, en particulier ma tante Mina, son mari Lhousine, sa fille Hayat ainsi que ma tante Souad et Fatima, leur présence m'a encouragé à bien présenter l'exposé.

Finalement, je suis reconnaissant à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Chapitre 2

Introduction Générale

L'unification de la théorie de la gravitation et des théories de Yang-Mills décrivant les trois interactions fondamentales (électromagnétique, faible et forte) est un problème récurrent de la physique théorique depuis près d'un siècle. L'incorporation de la gravitation à la théorie quantique des champs se heurte à plusieurs difficultés techniques et demeure un problème crucial en physique des particules élémentaires. Actuellement la théorie des supercordes [1, 2, 3], qui apparaît comme le candidat convenable pour l'unification quantique des quatre interactions fondamentales de la nature, constitue un champ de recherche en plein essor.

Le travail de ce mémoire de thèse est une contribution dans cette matière. L'objectif principal vise, à travers des synthèses et des travaux de recherche, l'étude de certains aspects des supercordes type IIA et IIB compactifiés sur des variétés de Calabi-Yau à six dimensions réelles. Ces aspects concernent les théories de jauge et les modèles de cordes topologiques ; en particulier : (1) La formulation matricielle à la 't Hooft des théories de jauge $U(N)$ ou encore celle de Susskind pour l'effet Hall quantique. (2) L'apport de la corde topologique et la correspondance théorie de jauge/gravitation dans l'établissement de lien entre des théories apparemment différentes. Compte tenu de l'ampleur qu'acquiert de plus en plus la théorie des cordes au sein de la communauté de physique des hautes énergies, nous avons estimé important de traiter dans ce mémoire de thèse, organisé en quatre chapitres, une conclusion générale et une annexe, des récents développements dans ce domaine. En effet nous avons présenté des études de synthèses procurant une reformulation compacte et simplifiée des nombreux résultats obtenus dans ce contexte. En guise d'applications de certains outils exposés, nous avons présenté quelques une de nos contributions notamment celles concernant le fluide de D-corde sur le conifold. Mais avant de passer à la présentation de ce mémoire de thèse, il est utile de rappeler certains éléments concernant le développement de la théorie des supercordes avec un accent sur les supercordes type II et son secteur topologique.

Généralités sur la théorie des supercordes

La théorie des cordes a été introduite dans les années 1970, mais son étude réelle n'a commencé qu'à partir des années 1980. Le postulat principal de cette théorie est de remplacer les particules fondamentales ponctuelles par des objets étendus à une dimension spatiale, appelés cordes fondamentales. L'échelle caractéristique de ces objets est naturellement choisie assez petite pour ne pas être observable aux échelles d'énergie habituelles. Les divergences dues au caractère ponctuel des particules et qui rendent la gravitation non renormalisable sont de cette manière supprimées.

Généralement parlant, on distingue différents types de cordes : corde bosonique (ouverte ou fermée) et fermionique (ouverte, fermée ; chirale ou non chirale). Tout comme une particule

ponctuelle x^μ de masse m décrit une ligne d'univers de genre temps $x^\mu(\tau)$, la corde bosonique X^μ d'extension σ , lors de son mouvement classique, décrit elle aussi une surface d'univers $X^\mu = X^\mu(\sigma, \tau)$. De plus, les contraintes d'invariance conforme exigent que la dimension de l'espace-temps soit égale à $D = 26$. D'autre part, contrairement aux théories des champs qui associent une constante de couplage g_i à chaque type d'interaction selon la nature des particules incidentes, la théorie des cordes unifie tous les types de particules comme différentes excitations d'un même objet. Il n'existe alors plus qu'un seul type d'interaction correspondant à l'ouverture de deux cordes fermées et leur recollement en une seule. L'effet de chaque particule est incorporé par l'insertion d'un opérateur vertex local $V_p \sim e^{ip \cdot X}$ dans la théorie conforme bidimensionnelle sous jacente, dépendant de l'état d'oscillation interne, de la polarisation et de l'impulsion de la particule. Malheureusement, la théorie des cordes bosoniques présente de nombreuses insuffisances en plus de sa dimension 26 de l'espace temps. L'existence du tachyon (masse au carée $m_{tach}^2 < 0$) montre qu'elle n'est pas définie au voisinage de son vide stable, et la théorie de perturbation n'a donc pas de sens. L'absence de particules fermioniques est aussi un sérieux problème pour une théorie visant l'unification des forces.

Heureusement, les théories des supercordes pallient à ces insuffisances en introduisant des champs fermioniques sur la surface d'univers $\psi^\mu = \psi^\mu(\tau, \sigma)$, de manière à étendre la symétrie conforme en une symétrie superconforme. Cette symétrie locale contient en particulier la supersymétrie locale de la supergravité bidimensionnelle. La contribution à la charge centrale c de l'algèbre conforme ($[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n^2(n - 1)\delta_{n+m, \dots}$) correspondante réduit la dimension critique des théories de supercordes à $D = 10$. Tandis que les champs bosoniques, représentant les coordonnées physiques de la corde, doivent être définis globalement sur la surface d'univers, les champs fermioniques peuvent être soit périodiques ($\psi^\mu(\sigma + 2\pi) = +\psi^\mu(\sigma)$) soit antipériodiques ($\psi^\mu(\sigma + 2\pi) = -\psi^\mu(\sigma)$) le long de la corde, définissant respectivement les secteurs de Ramond (R) et de Neveu-Schwarz (NS). L'invariance modulaire $SL(2)$ impose alors l'introduction de périodicités définies le long de l'axe du temps propre de la surface d'univers, projetant effectivement la moitié de chaque secteur. Cette projection de Gliozzi, Scherk et Olive (GSO) élimine en particulier du spectre le tachyon et garantit l'existence d'un nombre égal de particules bosoniques et fermioniques à chaque niveau d'excitation. Or, du fait que la supersymétrie d'espace-temps n'est pas manifeste dans cette construction ; Green et Schwarz ont donné une formulation équivalente dans le cône de lumière où cette supersymétrie est explicite. Ce gain est cependant obtenu au détriment de l'invariance de Lorentz à dix dimensions $SO(1, 9) \rightarrow SO(8)$. Il est vrai que la dimension de l'espace-temps des cordes fermioniques est réduite, mais cela n'empêche qu'elle demeure supérieure à nos quatre dimensions habituelles. La méthode de compactification permet de définir les supercordes dans des dimensions inférieures à $D = 10$.

Compactifications et dualités

La procédure de compactification suppose que certaines des dix dimensions sont compactes ($M_{10} \sim M_d \times K_{10-d}$) et non observables à notre échelle [1, 2, 3]. Les compactifications les plus étudiées en théorie des supercordes sont :

- (i) la compactification toroïdale ($K_{10-d} = T^{10-d}$) qui préserve toutes les supercharges initiales puisqu'elle ne brise pas de supersymétrie.
- (ii) la compactification sur des variétés de Calabi-Yau (CY) ($K_n = CY_n$) préservant une fraction des charges supersymétriques à dix dimensions.

Les supercordes compactifiées sur les variétés de CY restent les candidates les plus probables pour connecter les modèles de supercordes au monde réel à quatre dimension spatio-temporel. Signalons que la compactification est une méthode permettant non seulement de réduire la dimension de

l'espace-temps mais offre aussi des possibilités de connecter les différents modèles de supercordes dans les dimensions inférieures par le biais des symétries de dualités à l'instar de la dualité à six dimension entre la supercorde hétérotique/ T^4 et la supercorde IIA/K3.

L'une des classes de dualité les plus importantes est la T-dualité qui permet de relier deux à deux les théories des supercordes à dix dimensions que l'on croyait distinctes. Son existence dans la théorie des cordes ouvertes de type I semblait à priori problématique, puisque les états d'enroulement images des états de Kaluza-Klein sous la T-dualité n'existent pas en théorie des cordes ouvertes. La résolution de ce paradoxe a mené Polchinski, Dai, et Leigh à la découverte des D-branes qui ont pris depuis une importance considérable dans la compréhension des dualités des théories des cordes et des théories de jauge. Outre la T dualité, la dualité S reliant des régimes de couplages fort et faibles et plus généralement la symétrie miroir échangeant les modules de Kahler et les structures complexes des variétés de CY ont constitué également un pas important dans l'établissement des liens entre les différents types de supercordes.

Corde topologique

En dépit du fait que la théorie des supercordes demeure encore à l'heure actuelle une théorie loin de la réalité, son importance ne cesse de croître puisqu'elle constitue une source de résultats fascinants et de multiples directions de recherche en à la fois en physique et en mathématique. la théorie de la corde topologique est certainement une des grandes découvertes dans cette matière. En effet, au cours de ces dernières années, la théorie des supercordes et un certain nombre d'autres théories qui lui sont intimement liées (comme la théorie des champs conforme et la théorie des champs topologique) ont attiré beaucoup d'attention surtout après les différents résultats obtenus en termes de la théorie de représentation, la géométrie différentielle et la géométrie algébrique. Dans ce cadre, la théorie des nœuds constitue l'une des thématiques les plus utilisées vu sa connexion étroite avec la théorie des champs conforme et la théorie des champs topologique. Dans [4], Witten a montré que plusieurs invariants topologiques des nœuds et des entrelacs découverts au début des années 80 (comme les polynômes de Jones et de HOMFLY) admettent une *réinterprétation* en tant que fonctions de corrélation des opérateurs de boucle de Wilson dans la théorie de Chern-Simons¹. Dans ce même travail [4], Witten a prouvé que la fonction de partition de cette théorie fournit un nouveau invariant topologique de la variété tridimensionnelle. D'ailleurs en établissant la solution exacte de la théorie de jauge de Chern-Simons ; il a abouti à une connexion entre les nœuds d'une part et les invariants de la variété tridimensionnelle et la théorie des champs conforme bidimensionnelle d'autre part. Le modèle de Wess-Zumino-Witten illustre visiblement cette connexion entre ce trio [5, 6].

Introduite par Witten [7, 8], la théorie des cordes topologiques sur des variétés de Calabi-Yau tridimensionnelles, a connu depuis un développement spectaculaire [9]. Cette théorie, qui constitue le secteur topologique de la théorie des supercordes, permet la construction de modèles simplifiés qui ne garde que l'information topologique fournissant ainsi des modèles exactement solubles de la dynamique des cordes. En particulier, les fonctions de corrélation de cordes topologiques sur des variétés de CY particulières permettent de calculer le nombre d'applications holomorphes de la surface d'univers de la corde vers l'espace cible.

L'étude des cordes topologiques nous a appris, entre autres, que : **(a)** Les amplitudes de la corde topologique sont en étroite liaison avec les amplitudes physiques de la théorie des supercordes type II. Les prépotentiels \mathcal{F}_i de la limite supergravité des supercordes type II sont donnés par les amplitudes F_g (énergies libres) de la corde topologique. **(b)** La description des cordes topologiques ouvertes en termes de la théorie *des champs de corde* se réduit pour quelques cas à des théories

¹Une théorie de jauge à trois dimensions qui est invariante topologique.

de jauge simples. (c) il existe une dualité entre les cordes topologiques ouvertes/fermées qui lie leurs -backgrounds- d'une manière bien précise. L'idée principale qui a permis de lier la théorie de corde topologique et la théorie de Chern-Simons est la correspondance (théorie de jauge/théorie de corde). Cette idée est ancienne puisqu'elle remonte à l'année 1974 quand 't Hooft [10] a tenté de décrire les théories de jauge par des théories de cordes. Aussi difficile pour être mise en oeuvre, ce résultat n'a commencé à se manifester clairement que durant ces dernières années après le progrès spectaculaire ayant suivi le travail original de Maldacena [11] qui a mis en exergue une dualité entre la théorie de supercorde type IIB sur $AdS_5 \times S^5$ et la théorie de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ de groupe de jauge $U(N)$. Par la suite, plusieurs résultats ont été obtenus ; notamment ceux concernant la théorie de Chern-Simons en terme de la théorie de corde. Nous citons en particulier, les travaux de Gopakumar et Vafa [12, 13] qui ont montré que la théorie de jauge de Chern-Simons sur la 3-sphère se décrit d'une manière remarquable en termes de la théorie de corde topologique sur le conifold résolu. Ce résultat a eu deux conséquences importantes : (1) Il a fourni un modèle où l'on peut tester explicitement la dualité théorie de jauge/théorie de corde. (2) Il a permis une interprétation des invariants des noeuds de la 3-sphère. Plus précisément, il établit une relation entre les invariants des noeuds et les invariants de Gromov-Witten des cordes ouvertes se propageant sur le conifold résolu. Les résultats de Gopakumar et Vafa sont également utilisés pour résoudre complètement la théorie de corde topologique sur certaines variétés de Calabi-Yau de dimension trois.

Correspondance corde ouverte/fermée.

Ce mémoire de thèse vise aussi à traiter une classe de théories de cordes topologiques où la description en théorie de jauge se réduit à un modèle matriciel. Ce résultat a été élaboré en détail dans une série de travaux par Dijkgraaf et Vafa [14, 15, 16] où ils ont prouvé que, grâce à la connexion avec les cordes ordinaires, le calcul des superpotentiels nonperturbatifs dans des théories de jauge $\mathcal{N} = 1$ se réduit aux calculs perturbatifs du modèle matriciel. Afin de mieux comprendre cette correspondance, il est intéressant de dire quelques mots sur les propriétés (a) et (b) et leur lien avec la dualité N grand. Une étude plus exhaustive concernant à la fois la corde fermée et la corde ouverte est reportée dans les chapitres 3 et 4 de ce document. En théorie de corde topologique fermée sur un CY3 de modules de Kahler $\{t_i\}$ et de genre g , la fonctionnelle génératrice $F(g_s, t_i)$ des énergies libres $F_g(t_i)$ ont l'expression suivante

$$F(g_s, t_i) = \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} F_g(t_i). \quad (2.1)$$

où g_s est la constante de couplage de la corde fermée. En théorie des cordes ouverte, ou les surfaces de Riemann $\Sigma_{g,h}$ injectée dans le CY3 a en plus du genre, des trous où se fixent les D-branes, la fonction génératrice $F(g_s, N)$ des amplitudes $F_{g,h}$ de corde ouverte a la forme

$$F(g_s, N) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} g_s^{2g-2+h} N^h, \quad (2.2)$$

où h est le nombre de trous. Cette relation admet une généralisation utilisant plusieurs facteurs de Chan-Paton et des conditions aux bords plus générales. Signalons aussi que l'eq(2.2) peut être resommée formellement

$$F_g(t) = \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} t^h, \quad t = g_s N, \quad (2.3)$$

établissant ainsi un lien entre les énergies libres de la corde topologique fermée $F_g(t)$ et celle de la corde topologique ouverte $F_{g,h}$ (dualité corde ouverte/fermée).

Armé par ces outils théoriques, nous avons également apporté quelques contributions à l'étude des supercordes type IIB et leurs limite supergravité à quatre dimension d'espace-temps. En particulier, nous avons considéré l'étude de certains aspects spécifiques du secteur topologique des supercordes type II sur des variétés de Calabi-Yau tridimensionnelle, le conifold T^*S^3 entre autres. Il s'agit de :

(1) L'étude de la dynamique de fluide de D-corde sur le fibré cotangent de S^3 . A travers cette étude, nous avons utilisé la correspondance entre la théorie de Chern-Simons à 3d et la théorie de corde topologique ouverte pour développer un modèle de fluide de corde sur le conifold. Dans notre construction, nous avons utilisé le résultat de Susskind pour interpréter la théorie de Chern-Simons à 3d comme décrire un fluide de Hall fractionnaire. Puis, nous avons utilisé la correspondance jauge/corde ouverte pour obtenir une extension de la théorie de Susskind concernant le fluide de Laughlin. Dans ce schéma, les extrémités des D-cordes sont interprétées comme les particules de Hall et le sous espace T^*S^1 du conifold comme la surface d'univers des D-cordes. De cette façon, nous avons pu obtenir une nouvelle extension de l'effet Hall fractionnaire dans des dimensions supérieures ; en occurrence le conifold. Nous avons élaboré explicitement à la fois la formulation matricielle de ce modèle (article 1 du chapitre 2) et sa version en tant que théorie de jauge topologique (article 2 du chapitre 3).

(2) L'étude de la symétrie miroir qui joue un rôle crucial dans l'échange des structures de Kahler et complexe ; et dans les dualités de supercordes ; en particulier les supercordes IIA et IIB. Elle fournit une connexion entre les variétés de Calabi-Yau (CY) utilisées dans la compactification des modèles de supercordes à $10D$ et la théorie de corde topologique. En particulier, les modèles topologiques A et B sont reliés par la symétrie miroir. Il a été montré, que le modèle A défini sur la supervariété de CY $\mathbf{CP}^{3|4}$ est le miroir du modèle B sur une hypersurface quadrique $\mathbf{CP}^{3|3} \times \mathbf{CP}^{3|3}$ [17, 18]. Un intérêt spécial a été donné à la construction des supervariétés miroir aux Calabi-Yau dont les parties bosoniques sont des variétés toriques compactes. Un des objectifs de ce travail est généralisé le résultat de [19] en considérant les variétés de Calabi-Yau locaux qui ont été utilisées dans les compactifications de supecordes type II en présence de D-branes. En particulier, nous avons discuté la symétrie miroir du modèle A topologique sur les supervariétés dont la partie bosonique est une variété de CY locale. La théorie correspondante est un modèle sigma linéaire $U(1)^p$ supersymétrique avec $(n+p)$ superchamps chiraux avec la charge q_i^a et $2p$ superchamps fermioniques avec la charge donnée par Q_α^a qui est une matrice $p \times 2p$. Ces charges satisfont la condition de super CY local (SLCY) exigeant l'égalité entre la charge des bosons et des fermions. Nous avons montré que les supervariétés de CY locales sont décrites par des équations de la géométrie algébrique homologues à celles du cas bosonique puisque ces dernières s'obtiennent facilement en annulant les directions fermioniques. Finalement nous avons montré que cette approche s'applique aussi bien aux miroirs des supergéométries à hautes dimensions notamment au miroir du modèle A sur une superligne fibre sur \mathbf{CP}^n . Plus de détails sont présentés dans l'article 3 du chapitre 4.

Après cette brève introduction sur la théorie des supercordes, son secteur topologique et un aperçu sur certaines de nos contributions, nous présentons rapidement les chapitres de ce travail de thèse et leurs contenus.

Dans le chapitre II, nous passons en revue quelques ingrédients de base du modèle matriciel, en particulier la fonction de partition Z du modèle et le développement de l'énergie libre $F(t)$ en série perturbative de coefficients F_g . Nous dérivons les expressions explicites du développement

de l'énergie libre F dans le cas du modèle gaussien. Nous exposons le cas non gaussien et nous étudions la méthode des polynômes orthogonaux qui permet de calculer les expressions explicites des F_g pour des genres g inférieures. Cette méthode sera également utilisée dans le deuxième chapitre pour étudier la formulation matricielle de la théorie de Chern-Simons à trois dimensions. Nous terminons ce chapitre par l'exposition d'une contribution utilisant la formulation matricielle du fluide de D-corde sur le conifold.

Dans le chapitre III, nous donnons une introduction à la théorie de Chern-Simons. En particulier, nous donnons dans la section 1 une synthèse sur la théorie de CS à 3D. Dans la section 2, nous exhibons le développement perturbatif de l'énergie libre de la théorie de CS et la dépendance en "framing". Dans la section 3, nous discutons quelques résultats utiles pour le calcul des vev^2 des boucles de Wilson. Dans la section 4, nous étudions l'expansion en $1/N$ de l'énergie libre de la théorie de Chern-Simons sur la 3-sphère S^3 . Dans la section 5, nous discutons le fait que la théorie de Chern-Simons sur certaines variétés tridimensionnelles admet une représentation en modèle matriciel. Nous complétons ce chapitre également par une contribution concernant ce même sujet qui met en relief le modèle de jauge topologique décrivant la dynamique d'un fluide des D-cordes en mouvement sur un conifold et en présence d'un champ magnétique fort et constant.

Dans le chapitre IV, nous fixons notre attention sur l'étude de la corde topologique qui est un sujet d'actualité. Pour ce fait, dans la première section, nous décrivons les propriétés de base des modèles sigma topologiques A et B . La seconde section vise à exhiber en détail la formulation des cordes topologiques, avec ses deux types, qui s'obtiennent en couplant les théories sigma topologiques A et B à la gravité. La troisième section traite les variétés de Calabi-Yau toriques non-compactes à trois dimensions qui jouent un rôle fondamental dans la compactification des supercordes type II. La dernière partie, nous la destinons à la présentation de l'une de nos publications portant sur la symétrie miroir des supervariétés de Calabi-Yau locales et leurs modèles physiques correspondants.

Dans le chapitre V, nous traitons dans la première section un aspect fondamental de la dualité entre la théorie de jauge $U(N)$ et les cordes topologiques. En d'autre terme, cette partie visualise la manière avec laquelle se manifeste cette dualité au niveau de l'énergie libre. Dans la deuxième section, nous démontrons que les théories de jauge de Chern-Simons et les modèles matriciels avec des potentiels polynomiaux peuvent être tous deux considérés comme des théories de corde ouverte. Dans la troisième section, nous discutons la transition géométrique et le lien avec la dualité N grand. Nous terminons ce chapitre par une présentation résumée de notre contribution [33].

Nous terminons ce mémoire de thèse par une conclusion générale, des perspectives et une annexe qui contient quelques notions de base de la théorie des polynômes symétriques.

Listes des Publications :

- Black holes in type IIA string on Calabi-Yau threefolds with affine ADE geometries and q-deformed 2d quiver gauge theories

Published in Nucl.Phys.B,2007.

e-Print : *hep-th/0611289*

- On local Calabi-Yau supermanifolds and their mirrors.

Published in J.Phys.A39 :5965-5978,2006.

²Valeurs moyennes dans le vide

e-Print : *hep-th/0601215*

– D-string fluid in conifold : II. Matrix model for D-droplets on S^3 & S^2 .

Published in *Nucl.Phys.B749 :206-224,2006*.

e-Print : *hep-th/0605209*

– D-string fluid in conifold. I. Topological gauge model.

Published in *Nucl.Phys.B743 :333-353,2006*.

e-Print : *hep-th/0604001*

– RG cascades in hyperbolic quiver gauge theories.

Published in *Nucl.Phys.B702 :163-188,2004*.

e-Print : *hep-th/0405222*

Chapitre 3

Modèles Matriciels : Formalisme et Applications

Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse des quelques aspects fondamentaux de la théorie matricielle [22, 23]. Nous profitons de cette analyse pour décrire aussi une de nos contributions utilisant une formulation matricielle pour approcher la dynamique d'un fluide de cordes. Il faut dire que la théorie matricielle a été utilisée dans plusieurs formulations quantiques de modèles physiques. C'est le cas par exemple du modèle matriciel de la théorie M [24, 25, 26]. Elle est aussi utilisée dans l'étude de l'effet Hall quantique fractionnaire [27, 28] et des extensions comme celles développées dans [29]. Toutefois, il faut noter que notre principal objectif ici est d'exposer une synthèse des grandes lignes de la théorie matricielle dans l'esprit de l'utiliser dans la dualité entre la théorie de Yang-Mills et la théorie de gravité ("Jauge/Gravity duality") et la dualité entre de la corde topologique ouverte et la corde topologique fermée. Ces outils sont utiles dans les études développées dans les chapitres suivants ; mais aussi dans l'analyse de la conjecture OSV [30] et ses tests [31, 32], y compris notre contribution dans cette matière [33].

Ce chapitre est organisé en cinq sections : Dans la section 1, nous exposons des notions de bases de la théorie matricielle ; en particulier la fonction de partition Z du modèle et le développement de l'énergie libre $F(t)$ en série perturbative de coefficients F_g . Dans la section 2, nous dérivons les expressions explicites de développement de l'énergie libre F dans le cas du modèle gaussien. Dans la section 3, nous exposons le cas non gaussien et dans la section 4, nous étudions la méthode des polynômes orthogonaux qui permet de calculer les expressions explicites des F_g pour des genres g inférieures. Cette méthode sera également utilisée dans le deuxième chapitre pour étudier la formulation matricielle de la théorie de Chern-Simons à trois dimensions. Nous terminons ce chapitre par l'exposition d'une contribution utilisant la formulation matricielle.

3.1 Notions de base de la théorie matricielle

La théorie matricielle, avec ses différents modèles, constitue une classe particulière de théorie quantique des champs de dimension¹ zéro dont les variables dynamiques sont des matrices. Les modèles matriciels jouent un rôle important en physique quantique et constituent des exemples simples de théorie de jauge quantique. Dans ces modèles, les champs de base $M_a = M_a(t)$, $a = 1, 2, \dots$, sont des matrices $N \times N$ hermitiques ; $M_a(t) = (M_a)_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, N$. Ici t est

¹Nous entendons par dimension zéro le cas où les champs M dépend uniquement du temps.

3.1 Notions de base de la théorie matricielle

une variable réelle désignant le temps. On peut également avoir des matrices M_{ij} constantes ($\frac{d}{dt}M_{ij} = 0$) comme dans le modèle [34].

3.1.1 Modèle matriciel à un champ

Le cas le plus simple de modèle matriciel est celui faisant intervenir une seule matrice M constante. Dans ce cas, les interactions typiques sont données par l'action suivante :

$$\frac{1}{g_s}W(M) = \frac{1}{2g_s}Tr(M^2) + \frac{1}{g_s} \sum_{p \geq 3} \frac{g_p}{p} Tr(M^p), \quad (3.1)$$

où g_s et g_p sont des constantes de couplages réelles. Cette relation, qui peut être généralisée pour le cas de plusieurs champs matriciels, a la symétrie de jauge manifeste suivante :

$$M \rightarrow U M U^\dagger, \quad Tr(M^n) = Tr(M^n), \quad n \in N, \quad (3.2)$$

où U est une matrice unitaire du groupe de jauge $U(N)$. La fonction de partition $Z = Z[M]$ du modèle (3.1) est donnée par la fonctionnelle :

$$Z = \frac{1}{vol(U(N))} \int [dM] e^{-\frac{1}{g_s}W(M)} \quad (3.3)$$

où $vol(U(N))$, le volume habituel du groupe de jauge $U(N)$, est un facteur de normalisation et où la mesure dans l'intégrale de chemin $[dM]$ est donnée par la mesure de Haar usuelle :

$$[dM] = 2^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^N dM_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} d(\operatorname{Re} M_{ij}) d(\operatorname{Im} M_{ij}). \quad (3.4)$$

Le facteur numérique dans (3.4) est introduit pour des raisons de normalisation convenable. Un exemple particulièrement simple de modèle matriciel est donné par le modèle Gaussien de fonction de partition Z_G :

$$Z_G = \frac{1}{vol(U(N))} \int [dM] \exp\left(-\frac{1}{2g_s}Tr(M^2)\right). \quad (3.5)$$

Nous dénoterons par :

$$\langle f(M) \rangle_G = \frac{\int [dM] f(M) e^{-\frac{Tr M^2}{2g_s}}}{\int [dM] e^{-\frac{Tr M^2}{2g_s}}} \quad (3.6)$$

les valeurs moyennes normalisées dans le vide d'une fonction $f(M)$ dans le modèle matriciel Gaussien. Ce modèle est exactement soluble et la valeur moyenne (3.6) peut être calculée systématiquement en utilisant le théorème de Wick's. Pour cela, nous commençons par rappeler une propriété remarquable des intégrales gaussiennes qui sera utiliser pour calculer les valeurs moyennes $\langle f(M) \rangle_G$:

$$\langle x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_n} \rangle_G = \frac{\int_{\mathbb{R}^P} d^p x x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_n} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p x_\mu A_{\mu\nu} x_\nu)}{\int_{\mathbb{R}^P} d^p x \exp(-\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p x_\mu A_{\mu\nu} x_\nu)}, \quad (3.7)$$

CHAPITRE 3. MODÈLES MATRICIELS : FORMALISME ET APPLICATIONS

où A est une matrice inversible réelle, définie positive afin que l'intégrale soit bien définie. Si n est impair, (3.7) s'annule vu que $\langle x_1 \cdots x_n \rangle_G$ change de signe sous la symétrie $x \rightarrow -x$. Pour $n = 2$, il est facile de montrer que :

$$\langle x_{\mu_1} x_{\mu_2} \rangle = A_{\mu_1 \mu_2}^{-1}, \quad (3.8)$$

et pour $n > 2$ nous avons :

$$\langle x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_{2n}} \rangle = \sum_{\text{pairings}} \prod_{i=1}^n \langle x_{\sigma_{2i-1}} x_{\sigma_{2i}} \rangle. \quad (3.9)$$

Cette somme s'effectue sur toutes les paires distinctes indexées par σ . Notons que le résultat (3.9) n'est autre que l'expression du théorème de Wick de la théorie quantique des champs.

3.1.2 Diagrammes à double lignes

Avec ces ingrédients en main, il est possible à présent de calculer l'intégrale (3.6) qui est à son tour une intégrale gaussienne puisque :

$$\frac{1}{2} \text{Tr} (M^2) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i M_{ii}^2 + 2 \sum_{i < j} (\text{Re } M_{ij})^2 + (\text{Im } M_{ij})^2 \right\}. \quad (3.10)$$

En utilisant (3.8), la valeur moyenne $\langle M_{ij} M_{lk} \rangle_G$ est alors :

$$\langle M_{ij} M_{lk} \rangle_G = g_s \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (3.11)$$

Cette relation constitue, comme le stipule le théorème de Wick, l'ingrédient de base dans le calcul des moyennes dans le modèle matriciel gaussien. Dans le cas où le modèle matriciel est une théorie quantique de dimension zéro, (3.11) correspond justement au propagateur. Ce résultat est aussi en accord avec le fait que la représentation adjointe de $U(N)$ est le produit tensoriel de la représentation fondamentale N et la représentation anti-fondamentale \bar{N} . L'indice i (resp. j) de M_{ij} est vu comme un indice de la représentation fondamentale (resp. anti-fondamentale). Il s'en suit alors qu'il est plus intéressant de représenter cette structure d'indice par une double ligne avec des directions opposées. Dans cette notation à deux lignes, le propagateur (3.11) peut être représenté comme indiqué par la figure 3.1. Ainsi, les différentes contractions de Wick sont

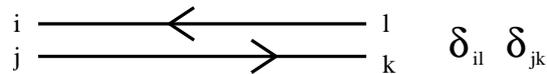


FIG. 3.1 – Propagateur dans la notation à double ligne

représentées par des diagrammes à deux lignes différentes. Afin de mieux expliciter cette idée, considérons à titre d'exemple la moyenne gaussienne

$$\langle (\text{Tr} M^3)^2 \rangle_G, \quad \text{avec} \quad \text{Tr} M^3 = \sum_{i,j,k} M_{ij} M_{jk} M_{ki}. \quad (3.12)$$

Il s'avère clair que calculer (3.12) revient à faire toutes les contractions de Wick possibles entre deux vertex cubiques. Le vertex cubique peut être représenté dans la notation à deux lignes par

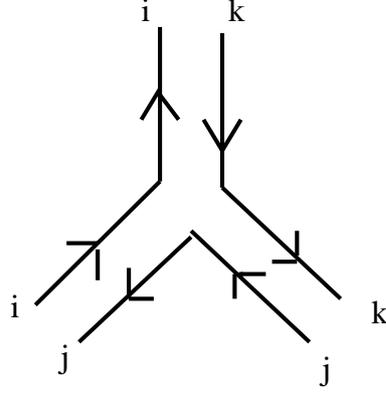


FIG. 3.2 – Vertex cubique dans la notation à double ligne

la figure 3.2. Les différentes contractions de Wick donnent trois diagrammes topologiquement inéquivalents, que nous décrivons ci-dessous : **(1)** Le premier diagramme donné par la figure 3.3 ; il a pour contribution :

$$3 \sum_{ijkmnp} \langle M_{ij} M_{mn} \rangle \langle M_{jk} M_{pm} \rangle \langle M_{ki} M_{np} \rangle = 3g_s^3 N^3. \quad (3.13)$$

(2) Le deuxième diagramme est donné par deux cercles jointifs par un simple propagateur (voir

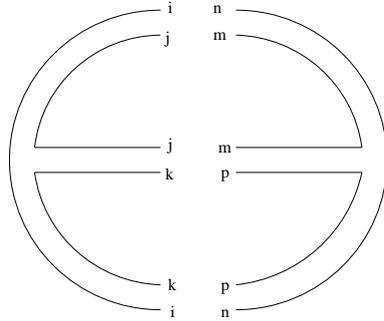


FIG. 3.3 – Diagramme planaire obtenu en contractant deux vertex cubiques

figure 3.4). Sa contribution est :

$$9 \sum_{ijkmnp} \langle M_{ij} M_{ki} \rangle \langle M_{jk} M_{pm} \rangle \langle M_{mn} M_{np} \rangle = 9g_s^3 N^3. \quad (3.14)$$

(3) Le troisième diagramme représenté dans la figure 3.5 donne :

$$3 \sum_{ijkmnp} \langle M_{ij} M_{mn} \rangle \langle M_{jk} M_{np} \rangle \langle M_{ki} M_{pm} \rangle = 3g_s^3 N. \quad (3.15)$$

En tenant compte de tous ces résultats, l'équation (3.12) devient alors :

$$\langle (Tr M^3)^2 \rangle_G = g_s^3 (12N^3 + 3N). \quad (3.16)$$

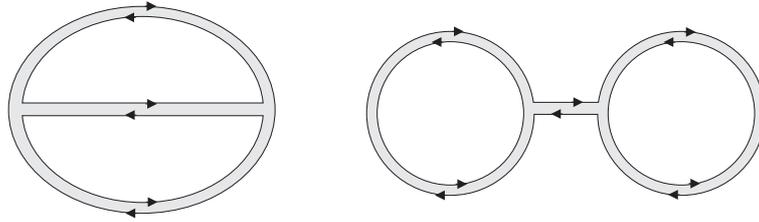


FIG. 3.4 – *Diagramme planaire dans le modèle matriciel cubique.*

En général, les diagrammes à deux lignes, auxquels nous référons désormais par *fatgraphs*, constituent une généralisation des diagrammes standards de Feynman. Par exemple, le diagramme standard de Feynman



se *dédoublé* dans la notation à deux lignes et devient comme dans les figures 3.3, 3.4 et 3.5 qui sont topologiquement inéquivalents. Les fatgraphs sont caractérisés topologiquement par le nombre E de propagateurs (ou de cotés), le nombre V_p de vertex avec p pattes ("legs"), et le nombre h de boucles fermées. Le nombre total de vertex est $V = \sum_p V_p$. Notons que chaque propagateur contribue par un g_s , tandis que chaque vertex ayant p pattes contribue par un facteur $\frac{g_p}{g_s}$. Par conséquent, un tel fatgraph contribuera avec le facteur :

$$g_s^{E-V} N^h \prod_p g_p^{V_p}. \quad (3.17)$$

Nous pouvons aussi considérer le fatgraph comme une surface de Riemann avec des trous dans lesquels chaque boucle fermée représente le bord d'un trou. Le genre g d'une telle surface est déterminé par la relation topologique

$$2g - 2 = E - V - h, \quad (3.18)$$

qui permet de réécrire l'éq (3.17) comme suit :

$$g_s^{2g-2+h} N^h \prod_p g_p^{V_p} = g_s^{2g-2} t^h \prod_p g_p^{V_p}, \quad (3.19)$$

où t est le paramètre de 't Hooft

$$t = Ng_s. \quad (3.20)$$

Les fatgraphs sont classés en deux types différents selon la valeur de g :

- (1) graphes planaires pour $g = 0$
- (2) graphes non-planaires pour $g > 0$.

La figure 3.3 qui correspond topologiquement à une sphère avec trois trous est planaire puisque : elle a $E = 3$, $V_3 = 2$ et $h = 3$, donc $g = 0$. Cependant, La figure 3.5 représente un tore avec un trou est non-planaire puisque : elle a $E = 3$, $V_3 = 2$ et $h = 1$, donc $g = 1$.

A présent, il est clair que le calcul de n'importe quelle valeur moyenne dans le vide (3.6) peut s'effectuer en utilisant des fatgraphs. Notons que, si $f(M)$ eq (3.6) est une fonction invariante de

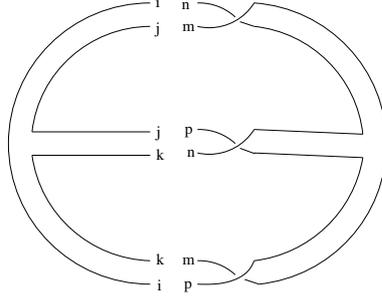


FIG. 3.5 – Diagramme non planaire obtenu en contractant deux vertex cubiques

jauges, elle peut être écrite comme une combinaison linéaire des traces de M dans des représentations arbitraires R de $U(N)$. En utilisant le théorème de Wick, on peut obtenir une formule fermée pour les moyennes $\langle Tr_R M \rangle$ [35, 36]. Par la suite, nous allons représenter R par un tableau de Young constitué d'un total de $l(R)$ boîtes réparties sur des lignes de longueurs l_i avec $l_1 \geq l_2 \dots$. Introduisons un ensemble d'entiers f_i de $l(R)$ défini comme suit :

$$f_i = \lambda_i + l(R) - i, \quad i = 1, \dots, l(R). \quad (3.21)$$

Dans le cas où le nombre des f_i impairs est égal au nombre des f_i pairs, alors le tableau de Young associé à R est paire. Autrement, il sera impair. Si R est paire, on a :

$$\langle Tr_R M \rangle_G = c(R) \dim R, \quad (3.22)$$

où

$$c(R) = (-1)^{\frac{A(A-1)}{2}} \frac{\left[\prod_{f \text{ impair}} (f!!) \right] \left[\prod_{f' \text{ pair}} (f'!!) \right]}{\left[\prod_{f \text{ impair}, f' \text{ pair}} (f - f') \right]}, \quad A = l(R)/2 \quad (3.23)$$

($l(R)$ doit être pair afin d'avoir un résultat non-nul) et où

$$n!! = n(n-2)!!.$$

Ici, $\dim R$ est la dimension de la représentation irréductible de $SU(N)$ associée à R . D'autre part, si R est impaire, la valeur moyenne dans le vide s'annule.

3.2 Développement perturbatif de l'énergie libre

La fonction de partition Z des modèles matriciels ayant l'action (3.1) peut être évaluée par le biais de la théorie de perturbation autour du point gaussien, en développant d'abord l'exponentiel de $\sum_{p \geq 3} \frac{g_p}{g_s} \frac{Tr(M^p)}{p}$ dans l'expression (3.3) et en calculant ensuite la fonction de partition comme une série des constantes de couplage g_p . L'évaluation de chaque terme de la série procure le calcul des valeurs moyennes dans le vide comme exprimée dans (3.6). Ce calcul peut être interprété en termes des diagrammes de Feynman alors que l'expansion perturbative de l'énergie libre

$$F = \log Z$$

impliquera seulement des bulles à vide connectées.

3.2.1 Expansion de t'Hooft

Considérons par exemple, le modèle matriciel cubique où $g_p = 0$ pour $p > 3$. En utilisant (3.16), nous constatons que l'énergie libre est :

$$F - F_G = \frac{2}{3}g_s g_3^2 N^3 + \frac{1}{6}g_s g_3^2 N + \dots \quad (3.24)$$

Nous pouvons re-exprimer l'expansion perturbative de F en termes de fatgraphs ayant g genre et h trous. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$F = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} g_s^{2g-2} t^h, \quad (3.25)$$

où les coefficients $F_{g,h}$ (qui dépendent des constantes de couplage g_p du modèle) tiennent compte des facteurs de symétrie des différents fatgraphs. On peut définir formellement l'énergie libre F_g de genre g par

$$F_g = \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} t^h, \quad (3.26)$$

ainsi l'énergie libre totale s'écrit

$$F = \sum_{g=0}^{\infty} F_g g_s^{2g-2}. \quad (3.27)$$

Dans cette équation, l'énergie libre est une expansion en g_s autour de $g_s = 0$ et de paramètre de 't Hooft $t = g_s N$ fixé [10]. D'une manière équivalente, nous pouvons considérer (3.27) comme une expansion en $1/N$, avec t fixé de sorte que la dépendance en N apparaît comme N^{2-2g} . Par conséquent, pour t fixé et N grand, la principale contribution qui vient des diagrammes planaires pour lesquels $g = 0$ se comporte comme $\mathcal{O}(N^2)$. Les diagrammes non-planaires donnent des termes de corrections.

3.2.2 Formulation en terme des valeurs propres

Il existe une autre façon utile pour écrire la fonction de partition du modèle matriciel dans laquelle la variable du modèle est une matrice hermitienne M ayant N^2 paramètres réels indépendants. En tenant compte des transformations de jauge, il reste seulement N paramètres indépendants. Nous pouvons diagonaliser la matrice M :

$$M \rightarrow U M U^\dagger = D, \quad (3.28)$$

avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Autrement dit, on peut prendre (3.28) comme un choix de jauge et puis utiliser les techniques standard de Faddeev-Popov pour calculer l'intégrale de jauge fixé [37]. La fixation de jauge (3.28) mène à la contrainte :

$$\delta({}^U M) = \prod_{i < j} \delta^{(2)}({}^U M_{ij}), \quad {}^U M = U M U^\dagger \quad (3.29)$$

L'intégrale de n'importe quelle fonction invariante de jauge $f(M)$ s'écrit comme

$$\int [dM] f(M) = \int [dM] f(M) \Delta^2(M) \int dU \delta({}^U M) = \Omega_N \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \Delta^2(\lambda) f(\lambda) \quad (3.30)$$

3.2 Développement perturbatif de l'énergie libre

avec

$$\Delta^{-2}(M) = \int [dU] \delta(U M), \quad (3.31)$$

et

$$\Omega_N = \int dU \quad (3.32)$$

est proportionnel au volume du groupe de jauge $U(N)$. Nous devons évaluer le facteur $\Delta(\lambda)$, obtenu de (3.31) en choisissant M diagonale. Si $F(M) = 0$ est la condition de fixation de jauge, la formule standard de Faddeev-Popov donne :

$$\Delta^2(M) = \det \left(\frac{\delta F(U M)}{\delta(A)} \right)_{F=0}, \quad (3.33)$$

où $U = e^A$ et A est une matrice anti-hermitique. Puisque

$$F_{ij}(U D) = (UDU^\dagger)_{ij} = A_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) + \dots \quad (3.34)$$

l'éq (3.33) mène immédiatement à

$$\Delta^2(\lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2, \quad (3.35)$$

qui est le carré du déterminant de Vandermonde. Finalement, nous fixons le facteur Ω_N en procédant comme suit. L'intégrale gaussienne matricielle peut être calculée explicitement en utilisant la mesure de Haar (3.4),

$$\int [dM] e^{-\frac{1}{2g_s} \text{Tr} M^2} = (2\pi g_s)^{N^2/2}. \quad (3.36)$$

D'autre part, en utilisant l'égalité (3.30), l'éq (3.36) sera égale à

$$\Omega_N \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \Delta^2(\lambda) e^{-\frac{1}{2g_s} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2}. \quad (3.37)$$

Notons que parmi les différentes façons qui permettent d'évaluer l'intégrale sur les valeurs propres, nous citons la technique des polynômes orthogonaux [38] que nous allons décrire explicitement dans la prochaine section. Cette technique attribue à l'intégrale la valeur suivante

$$g_s^{N^2/2} (2\pi)^{N/2} G_2(N+2), \quad (3.38)$$

où $G_2(z)$ est la fonction de Barnes définie par

$$G_2(z+1) = \Gamma(z) G_2(z), \quad G_2(1) = 1. \quad (3.39)$$

En comparant ces résultats, nous constatons que

$$\Omega_N = \frac{(2\pi)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{G_2(N+2)}. \quad (3.40)$$

CHAPITRE 3. MODÈLES MATRICIELS : FORMALISME ET APPLICATIONS

Par ailleurs, sachant que [39] :

$$\text{vol}(U(N)) = \frac{(2\pi)^{\frac{N(N+1)}{2}}}{G_2(N+1)} \quad (3.41)$$

il résulte alors l'expression suivante

$$\frac{1}{\text{vol}(U(N))} \int [dM] f(M) = \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi)^N} \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \Delta^2(\lambda) f(\lambda). \quad (3.42)$$

Le facteur $N!$ de la partie droite de l'éq (3.42) s'interprète en fixant la symétrie de jauge de l'intégrale de la matrice. En effet, en choisissant la jauge diagonale, il existe toujours une symétrie résiduelle donnée par la symétrie de Weyl de $U(N)$. Ce dernier est donné par S_N , le groupe des permutations des valeurs propres λ_i et dont le cardinal $|S_N| = N!$; d'où l'interprétation du facteur $N!$. En utilisant le résultat de l'éq (3.42), il s'avère que la fonction de partition (3.3) s'écrit alors :

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi)^N} \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \Delta^2(\lambda) e^{-\frac{1}{2g_s} \sum_{i=1}^N W(\lambda_i)}. \quad (3.43)$$

Explicitons cette relation pour le cas quadratique.

3.2.3 Modèle Gaussien

Pour le cas du modèle matriciel gaussien (3.5), la fonction de partition Z_G est donnée essentiellement par l'inverse du facteur de volume. Son énergie libre F_G à tout les ordres peut être calculée en utilisant le développement asymptotique de la fonction de Barnes

$$\begin{aligned} \log G_2(N+1) &= \frac{N^2}{2} \log(N) - \frac{1}{12} \log(N) - \frac{3}{4} N^2 + \frac{1}{2} N \log 2\pi \\ &+ \zeta'(-1) + \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} N^{2-2g}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

où les B_{2g} sont les nombres de Bernoulli. Par conséquent, l'expression pour l'énergie libre totale est de la forme :

$$\begin{aligned} F_G &= \frac{N^2}{2} \left(\log(Ng_s) - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{12} \log(N) + \zeta'(-1) \\ &+ \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} N^{2-2g}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Si l'on pose $N = t/g_s$, nous obtenons les expressions explicites de $F_g(t)$ dans le cas gaussien :

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{1}{2} t^2 \left(\log t - \frac{3}{4} \right), & g = 0 \\ F_1(t) &= -\frac{1}{2} \log t, & g = 1 \\ F_g(t) &= \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} t^{2-2g}, & g > 1. \end{aligned}$$

Signalons au passage que $F_0(t)$ donne la contribution planaire et $F_g(t)$, $g \geq 1$, les contributions non planaires.

3.3 Au delà du Gaussien

Le calcul des fonctions $F_g(t)$ pour le cas général est loin d'être une tâche facile puisque dans la théorie de perturbation ce calcul nécessite la sommation sur un nombre infini de fatgraphs (avec différents nombres de trous h). Il a été montré dans [40] qu'il est possible de calculer explicitement le premier terme de l'énergie libre $F_0(t)$. Vu l'importance de ce résultat, nous allons revoir dans la sous-section suivante les grandes lignes de cette procédure.

3.3.1 Méthode du point selle

Le point de départ est de considérer un modèle matriciel dont l'action est $W(M)$ donnée dans (3.1). La fonction de partition Z associée s'écrit après réduction aux valeurs propres (3.43) comme suit

$$Z = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d\lambda_i}{2\pi} e^{N^2 S_{eff}(\lambda)}, \quad (3.46)$$

où l'expression de l'action effective $S_{eff}(\lambda)$ en terme des valeurs propres λ_i s'écrit comme :

$$S_{eff}(\lambda) = -\frac{1}{tN} \sum_{i=1}^N W(\lambda_i) + \frac{2}{N^2} \sum_{i<j} \log |\lambda_i - \lambda_j|. \quad (3.47)$$

Il est clair que puisque la somme sur les N valeurs propres est d'ordre N , l'action effective sera d'ordre $\mathcal{O}(1)$. Nous pouvons interpréter N^2 comme \hbar^{-1} de telle manière que $N \rightarrow \infty$ correspond à une approximation semi-classique. Dans cette limite l'intégrale (3.46) sera dominée par une configuration du *point selle* qui extrêmise l'action effective. En variant $S_{eff}(\lambda)$ par rapports aux λ_i s, nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{2t} W'(\lambda_i) = \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.48)$$

La distribution de la valeur propre est définie pour N fini comme

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i), \quad (3.49)$$

où λ_i est une solution de (3.48). Dans la limite où N est grand, il faut s'attendre à ce que cette distribution devienne une fonction continue avec support compact. Dans cette étude, nous supposons que $\rho(\lambda)$ s'annule en dehors de l'intervalle \mathcal{C} comme l'indique la figure 3.6.

Cette représentation admet une seule coupure (one-cut solution). Dans ce cas, le potentiel $W(x)$ a seulement un minimum noté x_* ,

$$W(x_*) = 0.$$

Nous pouvons considérer les valeurs propres comme les coordonnées d'un système à N particules classiques se déplaçant sur une ligne. L'équation (3.48) indique que ces particules sont soumises à un potentiel effectif :

$$W_{eff}(\lambda_i) = W(\lambda_i) - \frac{2t}{N} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j|, \quad (3.50)$$

CHAPITRE 3. MODÈLES MATRICIELS : FORMALISME ET APPLICATIONS

qui implique une répulsion de type "Coulomb" *logarithmique* entre les valeurs propres. Pour un paramètre de 't Hooft petit, le terme de potentiel $W(\lambda_i)$ domine la répulsion *logarithmique* et les particules ont tendance à être dans le minimum x_* du potentiel $W'(x_*) = 0$. Ceci signifie que, pour $t = 0$, l'intervalle \mathcal{C} s'effondre au point x_* . Quand t croit, la répulsion de Coulomb *logarithmique* forcera les valeurs propres à être indépendantes l'une de l'autre pour se répandre sur l'intervalle \mathcal{C} .

Nous pouvons maintenant écrire l'équation du point selle en terme des quantités continues, en utilisant la règle standard des intégrales complexes de Cauchy :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) \rightarrow \int_{\mathcal{C}} f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.51)$$

La distribution des valeurs propres $\rho(\lambda)$ satisfait la condition de normalisation :

$$\int_{\mathcal{C}} \rho(\lambda) d\lambda = 1. \quad (3.52)$$

L'équation (3.48) devient alors :

$$\frac{1}{2t} W'(\lambda) = P \int \frac{\rho(\lambda') d\lambda'}{\lambda - \lambda'}, \quad (3.53)$$

où P est la valeur principale de l'intégrale. C'est une équation intégrale qui, étant donné le potentiel $W(\lambda)$, permet en principe de calculer $\rho(\lambda)$ comme une fonction du paramètre de 't Hooft t et des constantes de couplages. Une fois $\rho(\lambda)$ est connu, on peut facilement calculer $F_0(t)$. En effet, dans l'approximation du point selle, l'énergie libre est donnée par :

$$\frac{1}{N^2} F = S_{eff}(\rho) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (3.54)$$

où l'action effective dans la limite continue est une fonctionnelle de ρ :

$$S_{eff}(\rho) = -\frac{1}{t} \int_{\mathcal{C}} d\lambda \rho(\lambda) W(\lambda) + \int_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}} d\lambda d\lambda' \rho(\lambda) \rho(\lambda') \log |\lambda - \lambda'|. \quad (3.55)$$

Par conséquent, l'énergie libre planaire est donnée par :

$$F_0(t) = t^2 S_{eff}(\rho). \quad (3.56)$$

En intégrant (3.53) par rapport à λ on trouve :

$$\frac{1}{t} W(\lambda) = \int d\lambda' \rho(\lambda') \log |\lambda - \lambda'| + \xi(t), \quad (3.57)$$

où $\xi(t)$ est une constante d'intégration qui dépend seulement des constantes de couplages. Elle peut être calculée en évaluant (3.57) à une valeur convenable de λ ($\lambda = 0$ si $W(\lambda)$ est un polynôme). Puisque l'action effective est évaluée sur la distribution des valeurs propres qui résout (3.53), on peut simplifier l'expression à :

$$F_0(t) = -\frac{t}{2} \int_{\mathcal{C}} d\lambda \rho(\lambda) W(\lambda) + t^2 \xi(t). \quad (3.58)$$

De même, les moyennes dans le modèle matriciel peuvent être calculées dans la limite planaire comme suit :

$$\frac{1}{N} \langle \text{Tr} M^n \rangle = \int_{\mathcal{C}} d\lambda \lambda^n \rho(\lambda). \quad (3.59)$$

À présent, il est évident que la limite planaire est caractérisée par une *densité classique* des états $\rho(\lambda)$, et que la partie planaire d'une moyenne quantique, donné dans (3.59), peut être calculée comme un moment de cette densité. L'approximation planaire à une théorie des champs quantique peut être considérée comme une configuration classique de champ [41, 42]. Cette configuration classique est souvent appelée le *champ principal*. Dans le cas des modèles matriciels, la configuration du champ principal est donnée par la densité des valeurs propres $\rho(\lambda)$.

3.3.2 Résolvante du modèle matriciel

Nous venons de montrer que la densité des valeurs propres est obtenue comme une solution de l'équation du point selle (3.53). C'est une équation intégrale singulière et pour la résoudre il suffit d'introduire une fonction auxiliaire appelée la *résolvante* [43]. Dans le modèle matriciel, la résolvante est définie par le corrélateur :

$$\omega(p) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{p - M} \right\rangle, \quad (3.60)$$

qui est, en fait, une fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélations (3.59) :

$$\omega(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \text{Tr} M^k \rangle p^{-k-1}. \quad (3.61)$$

Il admet un développement de la forme [42] :

$$\omega(p) = \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g} \omega_g(p), \quad (3.62)$$

et la partie de genre zéro ($g = 0$) peut être écrite en terme de la densité des valeurs propres comme suit :

$$\omega_0(p) = \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{p - \lambda}. \quad (3.63)$$

La résolvante de genre zéro (3.63) a trois propriétés importantes.

- (i) C'est une fonction analytique sur le plan complexe sauf sur l'intervalle \mathcal{C} . En plus si $\lambda \in \mathcal{C}$ on a une singularité à $\lambda = p$.
- (ii) En raison de la propriété de normalisation de la distribution des valeurs propres (3.52), la résolvante a le comportement asymptotique

$$\omega_0(p) \sim \frac{1}{p}, \quad p \rightarrow \infty. \quad (3.64)$$

- (iii) Finalement, on peut calculer la discontinuité de $\omega_0(p)$ au point d'intersection avec l'intervalle \mathcal{C} . Ce point n'est autre que le résidu au $\lambda = p$, et d'où il résulte l'équation principale

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} (\omega_0(\lambda + i\epsilon) - \omega_0(\lambda - i\epsilon)). \quad (3.65)$$

CHAPITRE 3. MODÈLES MATRICIELS : FORMALISME ET APPLICATIONS

Donc, si on connaît la résolvante au genre zéro, alors on peut calculer l'énergie libre planaire. D'autre part, en considérant de nouveau la résolvante au voisinage de la discontinuité, on voit que (3.53) est donnée par

$$\frac{1}{2}W'(z) = -\frac{\omega_0(p+i\epsilon) + \omega_0(p-i\epsilon)}{2}t,$$

et par suite :

$$\omega_0(p+i\epsilon) + \omega_0(p-i\epsilon) = -\frac{1}{t}W'(p), \quad (3.66)$$

qui détermine la résolvante en terme du potentiel $W(p)$. De cette façon, nous avons ramené le problème du calcul de $F_0(t)$ à un problème très connu à savoir le problème de Riemann-Hilbert du calcul de $\omega_0(p)$ [44]. Supposons que \mathcal{C} est donné par l'intervalle $b \leq \lambda \leq a$; alors, on a :

$$\omega_0(p) = \frac{1}{2t} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2\pi i} \frac{W'(z)}{p-z} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(z-a)(z-b)}} \quad (3.67)$$

Cette équation est facilement prouvée en convertissant (3.66) en équation de discontinuité :

$$\hat{\omega}_0(p+i\epsilon) + \hat{\omega}_0(p-i\epsilon) = -\frac{1}{t} \frac{W'(p)}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}, \quad (3.68)$$

où $\hat{\omega}_0(p) = \omega_0(p)/\sqrt{(p-a)(p-b)}$. Ainsi en utilisant (3.67), on peut déterminer $\omega_0(p)$ pour les termes réguliers. Mais à cause de l'équation asymptotique (3.64), ces termes réguliers sont absents. L'équation asymptotique de $\omega_0(p)$ donne également deux conditions supplémentaires. Pour la limite $p \rightarrow \infty$, on constate que (3.67) se comporte comme $c + d/p + \mathcal{O}(1/p^2)$. L'exigence du comportement asymptotique (3.64) impose deux conditions : $c = 0$ et $d = 1$ ce qui mène aux résultats suivants

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2\pi i} \frac{W'(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} &= 0, \\ \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2\pi i} \frac{zW'(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} &= 2t. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Ces équations sont suffisantes pour déterminer les extrémités des coupures, a et b , comme des fonctions de couplages de 't Hooft t et des constantes de couplages du modèle. Ces expressions sont, en fait, valables pour tout type de potentiel, mais quand $W(z)$ est un polynôme, on retrouve une expression très commode pour la résolvante. Si nous déformons le contour dans l'expression (3.67) en prenant un pôle à $z = p$ et un autre à l'infini, nous obtenons pour un contour autour de $z = 0$:

$$\omega_0(p) = \frac{1}{2t}W'(p) - \frac{1}{2t}\sqrt{(p-a)(p-b)}M(p), \quad (3.70)$$

où

$$M(p) = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \frac{W'(1/z)}{1-pz} \frac{1}{\sqrt{(1-az)(1-bz)}}. \quad (3.71)$$

Ces formules, ainsi que les expressions (3.69) pour les extrémités de la coupure, permettent de résoudre complètement le modèle à une matrice avec une coupure dans la limite planaire et pour des potentiels polynomiaux.

Une autre façon de trouver la résolvante est de commencer par (3.48), la multiplier par $1/(\lambda_n - p)$ et sommant sur n . On trouve, dans la limite N grand,

$$[\omega_0(p)]^2 - \frac{1}{t}W'(p)\omega_0(p) + \frac{1}{4t^2}R(p) = 0, \quad (3.72)$$

pour

$$R(p) = 4t \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{W'(p) - W'(\lambda)}{p - \lambda}. \quad (3.73)$$

Notons que (3.72) est une équation quadratique en $\omega_0(p)$ qui admet comme solution

$$\omega_0(p) = \frac{1}{2t} \left(W'(p) - \sqrt{(W'(p))^2 - R(p)} \right), \quad (3.74)$$

qui est équivalente à (3.70). Par ailleurs, la solution du modèle matriciel est codée en définissant

$$y(p) = W'(p) - 2t\omega_0(p). \quad (3.75)$$

En terme de $y(p)$, la force $f(p) = -W'_{eff}(p)$ agissant sur une valeur propre est donnée par

$$f(p) = -\frac{1}{2} (y(p + i\epsilon) + y(p - i\epsilon)). \quad (3.76)$$

Dans ce cas, l'équation quadratique (3.72) déterminant la résolvante s'écrit alors comme

$$y^2 = W'(p)^2 - R(p). \quad (3.77)$$

C'est l'équation d'une courbe hyperelliptique résultante après la déformation par le terme $R(p)$ de l'équation typique

$$y^2 = W'(p)^2$$

de la théorie de singularité. L'interprétation de ce résultat en terme de théorie de la corde topologique sur certaines variétés de Calabi-Yau à trois dimensions est discuté dans le chapitre 4.

3.3.3 Exemples d'illustration

Ici nous donnons des exemples d'illustration du calcul de la résolvante avec une ou plusieurs coupures.

Cas d'une seule coupure

Pour fixer les idées, nous appliquons la technique développée ci-dessus au cas du modèle Gaussien,

$$W(M) = \frac{1}{2}M^2.$$

CHAPITRE 3. MODÈLES MATRICIELS : FORMALISME ET APPLICATIONS

Partons de l'éq (3.69) qui fournit la position des extrémités. Ensuite déformant le contour \mathcal{C} à l'infini et en introduisant le variable $z = 1/p$. Nous constatons que la première équation dans (3.69) devient

$$\oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sqrt{(1-az)(1-bz)}} = 0, \quad (3.78)$$

pour un contour autour de $z = 0$. Il s'ensuit alors que l'égalité $a + b = 0$ est en accord avec la symétrie du potentiel. Tenant compte de ceci, la deuxième équation de (3.69) s'écrit :

$$\oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z^3} \frac{1}{\sqrt{(1-a^2z^2)}} = 2t, \quad (3.79)$$

et mène à la forme

$$a = 2\sqrt{t}. \quad (3.80)$$

Remarquons que lorsque le paramètre de 't Hooft t croît, l'intervalle $\mathcal{C} = [-a, a] = [-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]$ s'ouvre et qu'il s'effondre au minimum du potentiel à l'origine lorsque $t \rightarrow 0$. A partir de (3.70) on trouve

$$\omega_0(p) = \frac{1}{2t} \left(p - \sqrt{(p)^2 - 4t} \right), \quad (3.81)$$

et de l'équation de discontinuité nous dérivons la densité des valeurs propres

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi t} \sqrt{4t - \lambda^2}. \quad (3.82)$$

Le graphe associé à cette fonction est un demi-cercle de rayon $2\sqrt{t}$. Dans ce cas, l'équation (3.77) s'écrit,

$$y^2 = p^2 - 4t, \quad (3.83)$$

et correspond à l'équation d'une courbe complexe de genre zéro qui résout la singularité $y^2 = p^2$. De ce fait, il est clair que l'ouverture de la coupure lors de l'introduction du paramètre de 't Hooft s'interprète comme une déformation d'une singularité géométrique.

Cas de plusieurs coupures

A ce stade, nous avons considéré la solution à une seule coupure. Or, celle-ci ne constitue pas la solution la plus générale. Pour rendre l'étude plus intéressante, nous traitons dans ce qui suit la solution multi-coupures dans l'approximation de point selle.

Selon la présentation précédente, la coupure apparaissant dans le modèle avec un seul champ matriciel est centrée autour d'un minimum du potentiel. Ainsi, si le potentiel possède n minimums, la solution obtenue doit avoir plusieurs coupures centrées autour des différents minimums. En effet, la solution la plus générale admet s coupures, avec $s \leq n$; et le support de la distribution des valeurs propres est une union disjointe des différents intervalles

$$\mathcal{C} = \cup_{i=1}^s \mathcal{C}_i, \quad s \leq n, \quad (3.84)$$

où

$$\mathcal{C}_i = [x_{2i}, x_{2i-1}], \quad (3.85)$$

et $x_{2s} < \dots < x_1$. L'équation (3.74) reste toujours valable pour déterminer la résolvante. Pour avoir des multi-coupures, il faut que $\omega_0(p)$ possède $2s$ points correspondant aux racines du polynôme $W'(z)^2 - R(z)$. Donc, la résolvante

$$\omega_0(p) = \frac{1}{2t} \left(W'(p) - \sqrt{\prod_{k=1}^{2s} (p - x_k) M(p)} \right) \quad (3.86)$$

peut être résolue d'une façon compacte et s'écrire alors

$$\omega_0(p) = \frac{1}{2t} \oint_c \frac{dz}{2\pi i} \frac{W'(z)}{p - z} \left(\prod_{k=1}^{2s} \left(\frac{p - x_k}{z - x_k} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.87)$$

Mais, afin de satisfaire l'équation asymptotique (3.64), les conditions suivantes sont nécessaires :

$$\delta_{l_s} = \frac{1}{2t} \oint_c \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^l W'(z)}{\prod_{k=1}^{2s} (z - x_k)^{\frac{1}{2}}}, \quad l = 0, 1, \dots, s. \quad (3.88)$$

Contrairement au cas à une coupure, ici on a seulement $s+1$ conditions pour les $2s$ variables x_k représentant les extrémités d'une coupure. Le cas $s > 1$ n'a pas alors assez de conditions pour déterminer la solution du modèle. Ainsi, il est crucial d'introduire d'autres conditions supplémentaires afin de déterminer les positions des extrémités x_k . D'habitude, les conditions supplémentaires qui sont imposées consistent à ce que les différentes coupures soient aux lignes équipotentielles [45]. Généralement le potentiel effectif est constant sur chaque coupure,

$$W_{eff}(p) = \Gamma_i, \quad p \in \mathcal{C}_i \quad (3.89)$$

mais les valeurs de Γ_i seront, généralement, différentes pour les différentes coupures. Ceci signifie qu'il peut y avoir des valeurs propres permettant le passage d'une coupure à une autre. La manière de garantir l'équilibre est de choisir les extrémités des coupures de telle façon que $\Gamma_i = \Gamma$ pour tout $i = 1, \dots, s$. Il s'ensuit alors qu'en plus des $s + 1$ conditions (3.88) nous avons aussi $s - 1$ conditions données par

$$W_{eff}(x_{2i+1}) = W_{eff}(x_{2i}), \quad i = 1, \dots, s - 1, \quad (3.90)$$

l'éq (3.90) se réécrit

$$\int_{x_{2i+1}}^{x_{2i}} dz M(z) \prod_{k=1}^{2s} (z - x_k)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad i = 1, \dots, s - 1. \quad (3.91)$$

Un ensemble différent de conditions déterminant les extrémités des coupures sera considéré en détail dans le chapitre 5.

3.4 Méthode des polynômes orthogonaux

Une autre méthode permettant de résoudre des modèles matriciels fait appel à des polynômes orthogonaux tels que les polynômes d'Hermite du modèle Gaussien. Cette approche de calcul de l'énergie libre a été développée dans [37, 46]. Elle fournit des expressions explicites des $F_g(t)$ pour les genres inférieures. Nous utiliserons cette technique dans le deuxième chapitre pour étudier la formulation matricielle de la théorie de Chern-Simons à trois dimensions.

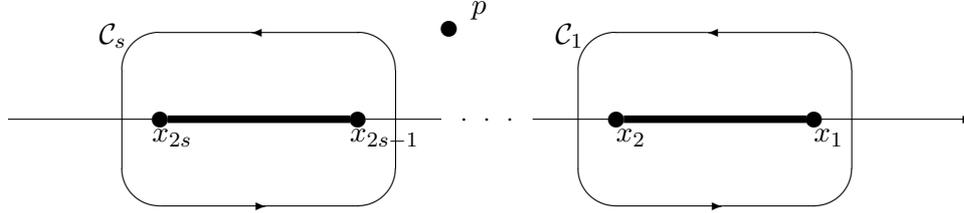


FIG. 3.6 – Cette figure représente le contour d'intégration $\mathcal{C} = \cup_{i=1}^s \mathcal{C}_i$

3.4.1 Représentation diagonale

Le point de départ est de prendre la représentation diagonale où le champ matriciel $M = U^+DM$ est représenté par ses valeurs propres

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N).$$

Dans ce cas, la fonction de partition, rappelons la, s'écrit comme :

$$Z = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d\lambda_i}{2\pi} \Delta^2(\lambda) e^{-\frac{1}{g_s} \sum_{i=1}^N W(\lambda_i)}, \quad (3.92)$$

où $W(\lambda)$ est un potentiel polynomial arbitraire. Si nous considérons

$$d\mu = e^{-\frac{1}{g_s} W(\lambda)} \frac{d\lambda}{2\pi} \quad (3.93)$$

comme une mesure réelle, on peut introduire les *polynômes* p_n définis par :

$$\Delta(\lambda) = \det p_{j-1}(\lambda_i) \quad (3.94)$$

avec la propriété d'orthogonalité suivante

$$\int d\mu p_n(\lambda) p_m(\lambda) = h_n \delta_{nm}, \quad n \geq 0, \quad (3.95)$$

où les h_n sont des constantes et où les $p_n(\lambda)$ ont le développement de type,

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + \dots.$$

En étendant le déterminant comme

$$\sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \prod_k p_{\sigma(k)-1}(\lambda_k), \quad (3.96)$$

3.4 Méthode des polynômes orthogonaux

où la somme est sur les permutations σ des N indices et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation, la fonction de partition \mathcal{Z} s'exprime alors par

$$Z = \prod_{i=0}^{N-1} h_i = h_0^N \prod_{i=1}^N r_i^{N-i}, \quad (3.97)$$

où les coefficients r_k sont définis par

$$r_k = \frac{h_k}{h_{k-1}}, \quad k \geq 1. \quad (3.98)$$

Notons que l'une des propriétés les plus importantes des polynômes orthogonaux $p_n(\lambda)$ repose sur le fait qu'il satisfait des relations de récursion de la forme

$$(\lambda + s_n) p_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) + r_n p_{n-1}(\lambda). \quad (3.99)$$

Il est facile de constater que les coefficients r_n utilisés dans cette relation sont donnés par (3.98). Ceci est obtenu par le biais de l'égalité

$$h_{n+1} = \int d\mu [p_{n+1}(\lambda)] [\lambda p_n(\lambda)], \quad (3.100)$$

ainsi que l'utilisation de la relation de récursion pour $\lambda p_{n+1}(\lambda)$. Pour des potentiels égaux, $s_n = 0$. Considérons un exemple pour fixer les idées.

3.4.2 Exemple du modèle Gaussien

Comme exemple de cette méthode, nous traitons le cas simple du modèle matriciel Gaussien. Les polynômes orthogonaux du modèle gaussien sont bien connus; ce sont essentiellement les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (3.101)$$

Plus précisément, on a

$$p_n(x) = \left(\frac{g_s}{2}\right)^{n/2} H_n\left(x/\sqrt{2g_s}\right), \quad (3.102)$$

d'où résulte que

$$h_n^G = \left(\frac{g_s}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} n! g_s^n, \quad r_n^G = n g_s. \quad (3.103)$$

En utilisant (3.97), on recouvre le résultat (3.38) énoncé auparavant. Une connaissance détaillée des polynômes orthogonaux permet donc le calcul de la fonction de partition du modèle matriciel vu que le calcul des fonctions de corrélation se réduit à une évaluation en terme des coefficients dans la relation de récursion. Pour exhiber ce point, introduisons les *polynômes orthonormaux normalisés*

$$\mathcal{P}_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} p_n(\lambda), \quad (3.104)$$

CHAPITRE 3. MODÈLES MATRICIELS : FORMALISME ET APPLICATIONS

qui satisfont la relation de récursion

$$\lambda \mathcal{P}_n(\lambda) = -s_n \mathcal{P}_n(\lambda) + \sqrt{r_{n+1}} \mathcal{P}_{n+1}(\lambda) + \sqrt{r_n} \mathcal{P}_{n-1}(\lambda). \quad (3.105)$$

Puis considérons la valeur moyenne dans le vide normalisée $\langle Tr M^l \rangle$, qui en terme de valeurs propres est donnée par l'intégrale

$$\langle Tr M^l \rangle = \frac{1}{N!Z} \int \prod_{i=1}^N e^{-\frac{1}{gs} W(\lambda_i)} \frac{d\lambda_i}{2\pi} \Delta^2(\lambda) \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^l \right). \quad (3.106)$$

D'après (3.94), nous retrouvons

$$\sum_{j=0}^{N-1} \int d\mu \lambda^j \mathcal{P}_j^2(\lambda). \quad (3.107)$$

Cette intégrale est calculée en terme des coefficients de (3.104). Par exemple, pour $l = 2$ et $r_0 = 0$ nous avons

$$\langle Tr M^2 \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} (s_j^2 + r_{j+1} + r_j), \quad (3.108)$$

Une manière commode d'exploiter ce résultat est d'introduire la matrice de Jacobi

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & r_1^{1/2} & 0 & 0 & \cdots \\ r_1^{1/2} & 0 & r_2^{1/2} & 0 & \cdots \\ 0 & r_2^{1/2} & 0 & r_3^{1/2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

aussi bien que la matrice diagonale

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (3.110)$$

Par conséquent,

$$\langle Tr M^l \rangle = Tr (\mathcal{J} - \mathcal{S})^l. \quad (3.111)$$

Les résultats que nous avons présentés donnent jusqu'ici la réponse exacte pour le corrélateur et la fonction de partition, à tous les ordres en $1/N$. Or, nous sommes particulièrement intéressés à calculer les fonctions $F_g(t)$ qui sont obtenues en réadditionnant l'expansion perturbative pour un genre fixé. Suivant [37, 46], on peut en fait utiliser les polynômes orthogonaux pour produire des expressions fermées pour $F_g(t)$ dans le cas à une seule coupure. Nous expliquerons dans ce qui suit comment réaliser cette idée.

L'objet que nous voulons calculer est

$$\mathcal{F} = F - F_G = \log Z - \log Z_G. \quad (3.112)$$

3.4 Méthode des polynômes orthogonaux

Puisque $\mathcal{F} = \sum_{g \geq 0} F_g g_s^{2g-2}$, alors on aura

$$g_s^2 \mathcal{F} = \frac{t^2}{N^2} (\log Z - \log Z_G) = \frac{t^2}{N} \log \frac{h_0}{h_0^G} + \frac{t^2}{N} \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{N}\right) \log \frac{r_k(N)}{k g_s}. \quad (3.113)$$

La contribution planaire à l'énergie libre $\mathcal{F}_0(t)$ est obtenue à partir de (3.113) en posant $N \rightarrow \infty$. Pour cette limite, la variable

$$\xi = \frac{k}{N}$$

devient une variable continue, $0 \leq \xi \leq 1$, tel que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) \rightarrow \int_0^1 d\xi f(\xi)$$

Supposant que lorsque $N \rightarrow \infty$, $r_k(N)$ a l'expansion asymptotique suivante :

$$r_k(N) = \sum_{s=0}^{\infty} N^{-2s} R_{2s}(\xi). \quad (3.114)$$

Alors

$$\mathcal{F}_0(t) = -\frac{1}{2} t^2 \log t + t^2 \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \log \frac{R_0(\xi)}{\xi}. \quad (3.115)$$

Ceci mène à une expression de l'énergie libre planaire en terme des coefficients de récursion r_k pour la limite N grand. Dans l'approximation du point selle, nous récupérons la densité d'états $\rho(\lambda)$ à partir des polynômes orthogonaux. Essayons d'abord d'évaluer (3.111) dans l'approximation planaire, de la même manière que celle utilisé dans [37]. Un argument simple basé sur les relations de récursion indique que, pour N grand,

$$\left(\mathcal{J}^l\right)_{nn} \sim \frac{l!}{(l/2)!^2} r_n^{l/2}. \quad (3.116)$$

En utilisant la représentation intégrale

$$\frac{l!}{(l/2)!^2} = \int_{-1}^1 \frac{dy}{\pi} \frac{(2y)^l}{\sqrt{1-y^2}},$$

on trouve

$$\frac{1}{N} \langle Tr M^l \rangle = \int_0^1 d\xi \int_{-1}^1 \frac{dy}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(2y R_0^{1/2}(\xi) - s(\xi)\right)^l,$$

où nous avons dénoté par $s(\xi)$ la limite des coefficients de récursion $s_k(N)$ qui apparaissent dans (3.99) pour $N \rightarrow \infty$. Puisque la moyenne précitée est également calculée par (3.59), en comparant les deux résultats on aboutit à

$$\rho(\lambda) = \int_0^1 d\xi \int_{-1}^1 \frac{dy}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \delta\left(\lambda - \left(2y R_0^{1/2}(\xi) - s(\xi)\right)\right)^l.$$

Plus explicitement,

$$\rho(\lambda) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\pi} \frac{\theta \left[4R_0(\xi) - (\lambda + s(\xi))^2 \right]}{\sqrt{4R_0(\xi) - (\lambda + s(\xi))^2}}, \quad (3.117)$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heveaside. De cette équation on peut déduire que $\rho(\lambda)$ a pour support l'intervalle $[b(t), a(t)]$, tel que

$$b(t) = -2\sqrt{R_0(1)} - s(1), \quad a(t) = 2\sqrt{R_0(1)} - s(1). \quad (3.118)$$

Dans le modèle matriciel Gaussien $R_0(\xi) = t\xi$ et $s(\xi) = 0$. on constate alors que la densité des valeurs propres, qui a pour support l'intervalle $[-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]$, est donnée par l'expression

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\xi \frac{\theta [4t\xi - \lambda^2]}{\sqrt{4t\xi - \lambda^2}} = \frac{1}{2\pi t} \sqrt{4t - \lambda^2}$$

qui reproduit la loi du demi-cercle de Wigner. Comme il est montré dans [37, 46], les polynômes orthogonaux peuvent être utilisés pour obtenir les énergies libres \mathcal{F}_g de genres supérieurs. L'ingrédient principal pour faire ceci est la formule d'Euler-MacLaurin,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) &= \int_0^1 f(\xi) d\xi + \frac{1}{2N} [f(1) - f(0)] \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{N^{2p}} \frac{B_{2p}}{(2p)!} \left[f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0) \right], \end{aligned} \quad (3.119)$$

qui doit être considérée comme une expansion asymptotique pour N grand qui donne une façon de calculer systématiquement les corrections en $1/N$. Nous pouvons alors l'utiliser pour calculer (3.113) à tous les ordres en $1/N$, tel que

$$f\left(\frac{k}{N}\right) = \left(1 - \frac{k}{N}\right) \log \frac{Nr_k(N)}{k}, \quad (3.120)$$

Remarquons que r_k a une expansion de la forme (3.114). On trouve, pour le cas $g = 1$,

$$\mathcal{F}_1(t) = t^2 \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \frac{R_2(\xi)}{R_0(\xi)} + \frac{t^2}{12} \frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi) \log \frac{R_0(\xi)}{\xi} \right]_0^1,$$

et on peut même trouver des expressions explicites pour $\mathcal{F}_g(t)$, $g \geq 2$.

3.4.3 Potentiels polynomiaux

De cette analyse on déduit que les modèles matriciels peuvent être résolus par la méthode des polynômes orthogonaux. Si on connaît la forme précise des coefficients dans la relation de récursion on peut calculer toutes les quantités dans l'expansion $1/N$. Puisque la relation de récursion est connue exactement seulement dans quelques cas, nous avons besoin de méthodes pour déterminer ses coefficients pour des potentiels généraux $W(M)$. Dans le cas de *potentiels* polynomiaux de la forme

$$W(M) = \sum_{p \geq 0} \frac{g_p}{p} \text{Tr}(M^p),$$

3.4 Méthode des polynômes orthogonaux

il existe des techniques bien connues pour obtenir des résultats explicites [37, 23, 22]. Nous commençons par réécrire la relation de récursion (3.99) comme

$$\lambda p_n(\lambda) = \sum_{m=0}^{n+1} B_{nm} p_m,$$

où B est une matrice. Les identités

$$r_n \int d\lambda e^{-\frac{1}{g_s} W(\lambda)} W'(\lambda) p_n(\lambda) p_{n-1}(\lambda) = n h_n g_s,$$

et

$$\int d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(p_n e^{-\frac{1}{g_s} W(\lambda)} p_n \right) = 0 \quad (3.121)$$

mènent aux équations matricielles

$$\begin{aligned} (W'(B))_{nn-1} &= n g_s, \\ (W'(B))_{nn} &= 0. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Ces équations sont suffisantes pour déterminer les coefficients de récursion. Considérons, par exemple, le potentiel quartique

$$W(\lambda) = \frac{g_2}{2} \lambda^2 + \frac{g_4}{4} \lambda^4. \quad (3.123)$$

Il est clair que la première équation dans (3.122) est automatiquement satisfaite alors que la deuxième équation mène à

$$r_n \{g_2 + g_4 (r_n + r_{n-1} + r_{n+1})\} = n g_s,$$

qui s'écrit, pour N grand, comme suit

$$R_0 (g_2 + 3g_4 R_0) = \xi t.$$

Généralement pour un potentiel de la forme

$$W(\lambda) = \sum_{p \geq 0} \frac{g_{2p+2}}{2p+2} \lambda^{2p+2}, \quad (3.124)$$

on trouve

$$\xi t = \sum_{p \geq 0} g_{2p+2} \binom{2p+1}{p} R_0^{p+1}(\xi), \quad (3.125)$$

qui détermine R_0 comme une fonction de ξ . L'équation ci-dessus s'appelle parfois *l'équation de la corde*, et en posant $\xi = 1$ nous trouvons une équation explicite pour les extrémités de la coupure dans la densité des valeurs propres en fonction des constantes de couplages et du paramètre t .

3.5 Contribution : Fluide de D-cordes sur le Conifold II.

Dans ce travail, nous développons un modèle matriciel décrivant des gouttelettes d'un système de Hall quantique fractionnaire (FQH) sur les sphères S^3 et S^2 avec le facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{k}$. Ce système de FQH est réalisé par D1-branes enveloppés sur un cercle. Nous avons étudié la dynamique de ces D-cordes sur les sous-variétés S^3 et S^2 du conifold. L'action du système est établie comme suit :

(1) D'abord, nous avons considéré le modèle matriciel pour la gouttelette de FQH sur la sphère S^3 en employant la méthode de Lagrange. Dans ce modèle, la sphère S^3 est considérée comme une hypersurface réel

$$|x|^2 + |y|^2 = R^2$$

injectée dans $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. L'action du modèle matriciel correspondante $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_3[X, Y, \mathcal{A}, \mathcal{C}]$ est une fonctionnelle des champs matricielles X et Y associées aux coordonnées x, y . Elle dépend aussi de deux champs de jauge $U(1)$: $\mathcal{A}(t)$ portant la condition d'incompressibilité du fluide et $\mathcal{C}(t)$ l'injection de $S^3 = SU(2)$ dans \mathbb{C}^2 .

(2) Puis à partir de l'action du modèle matriciel \mathcal{S}_3 , et en utilisant la réalisation $SU(2)/U(1)$ de $S^2 \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, on déduit le modèle de la gouttelette de FQH sur la sphère S^2 . L'action résultante \mathcal{S}_2 dépend des champs matriciels $X, Y, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ et \mathcal{C} . Le champ de jauge supplémentaire \mathcal{B} porte la symétrie de jauge $U(1)$ du quotient $SU(2)/U(1)$,

$$\begin{aligned} X'(t) &= e^{i\phi(t)} X(t) \\ Y'(t) &= e^{-i\phi(t)} Y(t). \end{aligned}$$

Nous avons aussi prouvé, entre autres, que l'état fondamental des gouttelettes sur S^3 porte un isospin $j = k \frac{N(N-1)}{2}$ et génère $2j + 1$ gouttelettes sur S^2 de charges $|j_z| \leq j$. Pour plus de détails voir l'article reporté ci après.

3.5 Contribution : Fluide de D-cordes sur le Conifold II.

D-string fluid in conifold: II. Matrix model for D-droplets on \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2

R. Ahl Laamara^a, L.B. Drissi^a, E.H. Saidi^{a,b,c,*}

^a *Lab/UFR-Physique des Hautes Energies, Faculté des Sciences de Rabat, Morocco*

^b *Groupement National de Physique des Hautes Energies, GNPHE, Siege focal, Lab/UFR-HEP, Rabat, Morocco*

^c *VACBT, Virtual African Centre for Basic Science and Technology, Focal point Lab/UFR-PHE,
Fac Sciences, Rabat, Morocco*

Received 19 January 2006; received in revised form 31 March 2006; accepted 17 May 2006

Available online 8 June 2006

Abstract

Motivated by similarities between Fractional Quantum Hall (FQH) systems and aspects of topological string theory on conifold, we continue in the present paper our previous study [R. Ahl Laamara, L.B. Drissi, E.H. Saidi, D-string fluid in conifold, I: Topological gauge model, Nucl. Phys. B 743 (2006) 333–353; E.H. Saidi, Topological $SL(2)$ gauge theory on conifold, hep-th/0601020] concerning FQH droplets on conifold. Here we focus our attention on the conifold sub-varieties \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 and study the non-commutative quantum dynamics of D1 branes wrapped on a circle. We give a matrix model proposal for FQH droplets of N point like particles on \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 with filling fraction $\nu = \frac{1}{k}$. We show that the ground state of droplets on \mathbb{S}^3 carries an isospin $j = k \frac{N(N-1)}{2}$ and gives remarkably rise to $2j + 1$ droplets on \mathbb{S}^2 with Cartan–Weyl charge $|j_z| \leq j$.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Fractional quantum Hall droplets; D1 branes; Matrix model and non-commutative geometry; Conifold; Topological string on $T^*\mathbb{S}^3$

1. Introduction

Recently a matrix model proposal for Laughlin fluid on real 2-sphere \mathbb{S}^2 with a radius R has been studied in [1]. Starting from the field action of a fractional quantum Hall (FQH) particle moving on \mathbb{S}^2 with Kähler potential $K(z, \bar{z}) = \ln(1 + \bar{z}z)$; then promoting the coordinate posi-

* Corresponding author.

E-mail address: h-saidi@fsr.ac.ma (E.H. Saidi).

tions $\{z_a, \bar{z}_a, 0 \leq a \leq N\}$ of the FQH droplet N particles into $N \times N$ matrix fields $Z_b^a = Z_b^a(t)$ and its adjoint conjugate $Z_a^{+b} = Z_a^{+b}(t)$, Morariu and Polychronakos (MP) proposed that the Lagrangian density $\mathcal{L}_{MP} = \mathcal{L}(Z, Z^+, \mathcal{A})$ describing a such system reads as,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MP} = & iB \operatorname{Tr} \left[R^2 (1 + ZZ^+)^{-1} (\mathcal{D}_t Z) Z^+ \right] - iB \operatorname{Tr} \left[R^2 (\mathcal{D}_t Z)^+ (1 + ZZ^+)^{-1} Z \right] \\ & + \operatorname{Tr} \left[\Psi^+ \left(i \frac{d\Psi}{dt} + \mathcal{A} \Psi \right) \right] - B\theta \operatorname{Tr}(\mathcal{A}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

with an ordering in which Z and Z^\dagger alternate. In this relation the constant B is the magnitude of the usual background magnetic field, the $N \times N$ hermitian matrix $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ is the gauge field capturing the fluid incompressibility constraint and $\mathcal{D}_t Z = \frac{dZ}{dt} - i[\mathcal{A}, Z]$. The N component vector (Ψ^a) is the Polychronakos field with adjoint conjugate (Ψ_a^+) and θ is the non-commutativity parameter related to the magnetic field as $B\theta = k$ with k a positive definite integer [2]. Recall that the integer k appears in continuous gauge field formulation as the level of non-commutative $U(1)$ Chern–Simons gauge model and $\nu = \frac{1}{k}$ is the filling fraction of Laughlin state; for related studies and generalizations see also [3–11].

In the present paper, we consider an alternative matrix model approach for FQH droplets on the spheres \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 with filling fraction ν . This study, which is also motivated from the analysis of dynamics of D-string fluid in conifold [12,13], is based on a constrained method and deals with the spheres as hypersurfaces in \mathbb{R}^4 . The matrix field action modeling the system is built as follows:

(1) First, we consider matrix model for FQH droplet on the 3-sphere $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$ by using Lagrange method for dealing with constraint equations. In this model, the 3-sphere \mathbb{S}^3 is thought of as a real hypersurface $|x|^2 + |y|^2 = R^2$ embedded in $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ and the corresponding matrix field action \mathcal{S}_3 has the following field dependence $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_3[X, Y, \mathcal{A}, \mathcal{C}]$ where the gauge field $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ captures fluid incompressibility condition and plays the same role as in Eq. (1.1). After matrix elevation of the coordinate positions $\{x_a\} \rightarrow X$ and $\{y_a\} \rightarrow Y$, the resulting matrix hypersurface elevating the 3-sphere namely,

$$\operatorname{Tr}(X^+ X + Y^+ Y) = R^2 N, \tag{1.2}$$

is treated as a constraint equation and is implemented in the field action via an extra gauge field $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t)$.

(2) Then starting from the matrix field action \mathcal{S}_3 , we use the coset realization $SU(2)/U_C(1)$ of $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ to deduce the matrix model proposal for FQH droplet on the 2-sphere. The resulting matrix field action \mathcal{S}_2 has now the matrix field dependence; $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2[X, Y, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}]$. The extra gauge field $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t)$ captures the coset gauge symmetry,

$$X'(t) = e^{i\varphi(t)} X(t), \quad Y'(t) = e^{-i\varphi(t)} Y(t). \tag{1.3}$$

In the language of $SU(2)$ group generated by the usual 3-operators J_\pm and J_0 (see also Eqs. (4.17), (4.18)), this reduction from \mathbb{S}^3 down to \mathbb{S}^2 corresponds just to fixing the charge of the $U_C(1)$ Cartan Weyl operator J_0 . Quantum mechanically, this means that wave functions $|\Phi\rangle$ describing FQH droplets on \mathbb{S}^2 should obey, amongst others, the following constraint equation

$$J_0 |\Phi\rangle = j_z |\Phi\rangle, \tag{1.4}$$

where $j_z = mN$ is a relative integer. As an immediate consequence; the wave functions describing FQH droplets on the 3-sphere are given by $SU(2)$ highest state representations which we

denote as,

$$|\Phi\rangle = (|\Phi_{j,j_z}\rangle), \quad |j_z| \leq j, \tag{1.5}$$

with highest weight $j = lN$. This result will be proved later on. The condition (1.4) corresponds then to picking up one of the basis states of above isospin j representation. Eqs. (1.4), (1.5) give a remarkable link between FQH systems on the spheres S^3 and S^2 . Indeed, a FQH droplet on the 3-sphere carries a isospin j and then is made of $(2j + 1)$ FQH droplets on S^2 .

Note that our approach to FQH droplets on the 2-sphere may be viewed as a linearized description of MP model. In other words, this way of doing avoids the high non-linearity in the matrix field embodied by the factors $(1 + ZZ^+)^{-1}$ and $(1 + Z^+Z)^{-1}$ of Eq. (1.1) which have infinite expansion in ZZ^+ and Z^+Z , respectively. This aim is achieved by introducing two extra gauge fields. The new matrix field action $S_2[X, Y, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}] = \int dt \mathcal{L}_2$ with

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -iB \operatorname{Tr} \left[X^+ \frac{dX}{dt} + Y^+ \frac{dY}{dt} \right] + B \operatorname{Tr} \left[\mathcal{A} \left([X^+, X] + [Y^+, Y] - \frac{k}{B} \right) \right] \\ & - B \operatorname{Tr} \left[\mathcal{C} \left((X^+X + Y^+Y) - \frac{l}{B} \right) \right] - B \operatorname{Tr} \left[\mathcal{B} \left((X^+X - Y^+Y) - \frac{m}{B} \right) \right] \end{aligned}$$

involves three kinds of constraint equations: (i) The usual fluid incompressibility condition captured by the gauge field \mathcal{A} . (ii) The coordinate restriction, describing the embedding S^3 into \mathbb{R}^4 , and captured by the gauge field \mathcal{C} . (iii) Reduction of S^3 down to S^2 using the standard fibration $S^3 \sim S^1 \times S^2$; the corresponding constraint equation is captured by the gauge field \mathcal{B} .

Another advantage of our method consists in building FQH extensions based on geometries going beyond S^2 . A class of these generalizations is given by the following special extensions: (α) the real 3-sphere S^3 with matrix field action $S_3 = S_2|_{\mathcal{B}=0}$ considered in this paper; see Section 3. (β) The K3 complex surface viewed as T^*S^2 and conifold T^*S^3 under investigation in [14].

The presentation of this paper is as follows: In Section 2, we describe FQH droplets on S^3 and S^2 and derive the corresponding constraint equations. In Section 3, we develop our matrix model proposal of FQH droplets on the spheres and analyse the structure of the matrix constraint equations. In Section 4, we consider the quantum version and build the droplet ground state. Last section is devoted to conclusion and outlook.

2. S^3 and S^2 conifold sub-varieties in \mathbb{C}^2

We start this section by presenting briefly the coordinate frame we shall use to describe the spheres S^3 and S^2 . Then we derive the constraint equations of the system. There are different ways to parameterize these spheres; but here we will think about them as hypersurfaces in the complex space \mathbb{C}^2 ($\simeq \mathbb{R}^4$) with holomorphic coordinates x and y . This choice, which is motivated by the use of manifest isometry, gives also an issue to deal with possible extensions involving K3 and conifold [13].

In the last part, we describe the classical field actions of particles moving on the spheres, embedded into \mathbb{C}^2 , in presence of a constant and strong external magnetic field.

2.1. FQH constraint equations on spheres

Recall that fluid incompressibility constraint is essential in the field theoretic modeling of FQH systems. This constraint equation, related to the fluid approximation, plays a central role in understanding the quantum dynamics. For FQH systems on non-flat manifolds, one should also worry about curvature effect.

In the present case, we want to study FQH systems on the spheres \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 embedded in \mathbb{C}^2 . Since these geometries are non-flat, we have then extra constraint relations besides the usual one dealing with fluid incompressibility. In this subsection, we want to identify these constraint relations.

2.1.1. \mathbb{S}^3 case

Starting from the complex two dimension space \mathbb{C}^2 with local holomorphic coordinates x and y , we can realize the 3-sphere \mathbb{S}^3 as a real hypersurface $H_{\text{real}} = H_{\text{real}}(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ embedded in \mathbb{C}^2 . In practice this is achieved by restricting the complex coordinates (x, y) and their complex conjugates to obey the following constraint relation,

$$H_{\text{real}}(x, y, \bar{x}, \bar{y}): \quad x\bar{x} + y\bar{y} = |x|^2 + |y|^2 = R^2, \tag{2.1}$$

where R is the radius of the sphere. For later use note that Eq. (2.1), may be put into various forms. An interesting way is the one using representations of the $SU(2)$ isometry of \mathbb{S}^3 . For this aim we use the isospinors

$$z^i = (x, y), \quad \bar{z}_i = \overline{(z^i)} = (\bar{x}, \bar{y}), \quad i = 1, 2. \tag{2.2}$$

The usual $SU(2)$ invariant antisymmetric tensor ε^{ij} and its inverse ε_{ji} raise and lower the $SU(2)$ indices. So, Eq. (2.1) reads also as follows,

$$H_{\text{real}}(z, z): \quad \sum_{i=1}^2 z^i \bar{z}_i = R^2. \tag{2.3}$$

This relation is invariant under the following manifest $SU(2)$ rotations $z^i = M_j^i z^j$ and $\bar{z}_i = \bar{z}_k M_i^{*k}$ with $M_i^{*k} M_j^i = \delta_j^k$ and $\det M = 1$. We also have the following operators,

$$J_+ = z^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}, \quad J_- = \bar{z}^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad J_0 = \left(z^i \frac{\partial}{\partial z^i} - \bar{z}^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} \right), \tag{2.4}$$

satisfying the usual commutation relations of the $SU(2)$ algebra,

$$[J_0, J_+] = 2J_+, \quad [J_0, J_-] = -2J_-, \quad [J_+, J_-] = J_0. \tag{2.5}$$

Later on (see Section 4), we shall use creation and annihilation operators of the quantum matrix model proposal to represent this group symmetry. Now let us consider a particle with coordinate position $x(t)$, $y(t)$ and $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ moving in the complex space \mathbb{C}^2 . The restriction to a motion on the 3-sphere is achieved by requiring

$$x(t)\bar{x}(t) + y(t)\bar{y}(t) = R^2, \tag{2.6}$$

at every moment t .

For a set of N particles described by $x_a(t)$, $y_a(t)$ and $\bar{x}_a(t)$, $\bar{y}_a(t)$ with $a = 1, \dots, N$, moving in the complex space \mathbb{C}^2 , the above relation extends as follows,

$$x_a(t)\bar{x}_a(t) + y_a(t)\bar{y}_a(t) = R^2, \quad a = 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

Besides fluid incompressibility constraint relation, (2.7) represents an extra condition restricting the dynamics of N particles on \mathbb{C}^2 down to the 3-sphere. We shall turn to this condition later on; for the moment let us consider the constraint equations for the 2-sphere embedded in \mathbb{C}^2 using Hopf fibration of \mathbb{S}^3 .

2.1.2. \mathbb{S}^2 as reduced \mathbb{S}^3

There are various ways to parameterize \mathbb{S}^2 ; one of these realizations considered recently in [1] is given by the stereographic coordinate variables using Kähler potential of $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. An other interesting coordinate frame, which we shall use here below, rests on embedding \mathbb{S}^2 in the complex two space \mathbb{C}^2 .

To embed \mathbb{S}^2 in the complex space \mathbb{C}^2 , one restricts the complex coordinates (x, y) to the real hypersurface (2.1) and uses the fibration $\mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ to restrict further the 3-sphere down to \mathbb{S}^2 . This is achieved by the identification

$$x' \equiv e^{i\varphi} x, \quad y' \equiv e^{-i\varphi} y, \quad (2.8)$$

where φ is the group parameter of $U_C(1)$ Cartan Abelian sub-symmetry of the $SU(2)$ isometry of the 3-sphere. From group theoretic view, this identification corresponds to starting from $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$ and performing the coset,

$$SU(2) \rightarrow SU(2)/U_C(1). \quad (2.9)$$

Notice that without the identification (2.8), the hypersurface $H_{\text{real}}(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ would describe a \mathbb{S}^3 sphere realized as the fibration of \mathbb{S}^1 over \mathbb{S}^2 .

For a system of N particles with coordinate positions $x_a(t)$, $y_a(t)$ and $\bar{x}_a(t)$, $\bar{y}_a(t)$, we have in addition to Eq. (2.7) the following constraint relation,

$$x'_a(t) = e^{i\varphi(t)} x_a(t), \quad y'_a(t) = e^{-i\varphi(t)} y_a(t), \quad a = 1, \dots, N, \quad (2.10)$$

where the phase $\varphi = \varphi(t)$ is time dependent. Therefore, Eqs. (2.1)–(2.8) form a set of two constraint relations; the first one reduces the space $\mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4$ into the real 3-sphere \mathbb{S}^3 and the second reduces \mathbb{S}^3 down to the 2-sphere \mathbb{S}^2 .

2.2. Classical field action on \mathbb{S}^3

Following [2], the field action $S_3 = \int dt L_3$, describing a particle moving on the real 3-sphere $\mathbb{S}^3 \sim SU(2)$ and taken in the condition of FQH systems, is obtained as follows. Start from the Lagrangian density $L_4 = L_4(x, \bar{x}, y, \bar{y})$ of a FQH particle moving on the complex two dimension space $\mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4$ which reads as follows,

$$L_4 = -\frac{iB}{2} \left[\left(\bar{x} \frac{dx}{dt} - x \frac{d\bar{x}}{dt} \right) + \left(\bar{y} \frac{dy}{dt} - y \frac{d\bar{y}}{dt} \right) \right], \quad (2.11)$$

which, by using the isodoublet coordinates z^i , reads also as,

$$dt L_4 = -\frac{iB}{2} (\bar{z}_i dz^i - z^i d\bar{z}_i). \quad (2.12)$$

In Eq. (2.11), the field variables x and y are the holomorphic coordinate variables of \mathbb{C}^2 . To get the Lagrangian density L_3 describing the dynamics of this FQH particle; but now restricted to moving on \mathbb{S}^3 , one should impose the constraint equation

$$B(x\bar{x} + y\bar{y}) = l, \tag{2.13}$$

where, because of non-commutativity requirement, we have set

$$BR^2 = l, \quad R^2 = \frac{l}{B}, \tag{2.14}$$

with l a positive integer. This condition can be implemented in the above Lagrangian density L_4 as usual by using the Lagrange method. As such the Lagrangian density L_3 describing the classical motion of the particle on the 3-sphere reads as,

$$L_3 = -B \left[\bar{x} \left(i \frac{dx}{dt} + Cx \right) + \bar{y} \left(i \frac{dy}{dt} + Cy \right) - C \frac{l}{B} \right]. \tag{2.15}$$

In this equation, the real field $C = C(t)$ is the Lagrange gauge field capturing the constraint equation (2.13) for embedding the hypersurface \mathbb{S}^3 into \mathbb{C}^2 . By minimizing L_3 with respect to the field C , we get precisely the constraint equation (2.13); i.e.,

$$\frac{\partial L_3}{\partial C} = -B(x\bar{x} + y\bar{y}) + l = 0. \tag{2.16}$$

As we see, Eq. (2.15) is an Abelian one-dimensional gauge theory with target space \mathbb{C}^2 and gauge covariant derivatives $D_t z = (\frac{dz}{dt} - iCz)$ where z stands for $x(t)$ and $y(t)$. The gauge transformations leaving L_3 invariant read then as follows,

$$z' = e^{i\lambda} z, \quad C' = C + \frac{d\lambda}{dt}, \tag{2.17}$$

where $\lambda = \lambda(t)$ is the gauge group parameter.

Starting from the above relations, we consider now the classical system of N FQH particles on \mathbb{S}^3 . Using the $z_a^i = (x_a, y_a)$ and $\bar{z}_{ia} = (\bar{x}_a, \bar{y}_a)$ doublets constrained as,

$$B(x_a \bar{x}_a + y_a \bar{y}_a) = l, \quad a = 1, \dots, N, \tag{2.18}$$

the Lagrangian density describing the classical dynamics of these particles on the 3-sphere reads then as

$$L_3(z, \bar{z}, C) = -B \sum_{a=1}^N \left[i \bar{z}_{ia} D_t z^{ia} - C_a \frac{l}{B} \right], \tag{2.19}$$

where the gauge covariant derivatives $D_t z^{ia}$ is as before and where summation over the $SU(2)$ index is understood. From this Lagrangian density, the conjugate momenta $\pi_{ia}(t)$ of the field variable z^{ia} is equal to $\pi_{ia} = -iB\bar{z}_{ia}$ and the corresponding Poisson brackets are,

$$\{z^{ia}, \bar{z}_{jb}\}_{PB} = \frac{i}{B} \delta_j^i \delta_b^a, \quad \{z^{ia}, z^{jb}\}_{PB} = \{\bar{z}_{ia}, \bar{z}_{jb}\}_{PB} = 0, \tag{2.20}$$

where

$$\{F, G\}_{PB} = \sum_{l,e} \left(\frac{\partial F}{\partial z^{le}} \frac{\partial G}{\partial \pi_{le}} - \frac{\partial F}{\partial \pi_{le}} \frac{\partial G}{\partial z^{le}} \right). \tag{2.21}$$

In the fluid approximation requiring a large number N of particles, the previous coordinate position variables z_a^i and \bar{z}_{ia} are promoted to highest-dimensional fields as shown below,

$$\{z_a^i(t), C_a(t), 1 \leq a \leq N\} \rightarrow z^i(t; \tau, \bar{\tau}, \sigma, \bar{\sigma}), C(t; \tau, \bar{\tau}, \sigma, \bar{\sigma}), \tag{2.22}$$

or by using the x and y variables,

$$\{x_a(t), y_a(t), 1 \leq a \leq N\} \rightarrow x(t; \tau, \bar{\tau}, \sigma, \bar{\sigma}), y(t; \tau, \bar{\tau}, \sigma, \bar{\sigma}). \tag{2.23}$$

In this approximation, the constraint relation capturing the incompressibility condition of the FQH fluid is translated into a condition on the Jacobian \mathcal{J}_{ac} of the transformation,

$$\tau \rightarrow x(\tau, \sigma; \bar{\tau}, \bar{\sigma}), \quad \sigma \rightarrow y(\tau, \sigma; \bar{\tau}, \bar{\sigma}), \tag{2.24}$$

together with similar transformations for the complex conjugate partners. Fluid incompressibility requires that the absolute value

$$|\mathcal{J}_{ac}| = \left| \frac{\partial^4(x, y; \bar{x}, \bar{y})}{\partial^4(\tau, \sigma; \bar{\tau}, \bar{\sigma})} \right| \tag{2.25}$$

should satisfy $|\mathcal{J}_{ac}| = 1$. By explicating (2.25), we see that \mathcal{J}_{ac} is a polynom $P = P(\partial z^i, \partial \bar{z}_i)$ of fourth order in the gradient of the fields;

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ac} = & \{x, \bar{x}\}_{\tau\bar{\tau}}\{y, \bar{y}\}_{\sigma\bar{\sigma}} + \{x, \bar{x}\}_{\sigma\bar{\sigma}}\{y, \bar{y}\}_{\tau\bar{\tau}} + \{x, \bar{x}\}_{\sigma\tau}\{y, \bar{y}\}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}} + \{x, \bar{x}\}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}\{y, \bar{y}\}_{\tau\sigma} \\ & + \{x, \bar{x}\}_{\tau\bar{\sigma}}\{y, \bar{y}\}_{\bar{\tau}\sigma} + \{x, \bar{x}\}_{\bar{\tau}\sigma}\{y, \bar{y}\}_{\tau\bar{\sigma}}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

where $\{f, g\}_{\alpha\beta}$ are defined by $(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \alpha})$. This Jacobian is quadratic in the Poisson brackets and involves the sum of six terms. To deal with the fluid incompressibility condition $|\mathcal{J}_{ac}| = 1$, we begin by simplifying the above expression by restricting the coordinate transformations (2.24) to the sub-class,

$$\tau \rightarrow x(\tau, \bar{\tau}), \quad \sigma \rightarrow y(\sigma, \bar{\sigma}). \tag{2.27}$$

With these particular class of general coordinate transformations, Eq. (2.26) simplifies to $\mathcal{J}_{ac} = \{x, \bar{x}\}_{\tau\bar{\tau}}\{y, \bar{y}\}_{\sigma\bar{\sigma}}$ and the fluid incompressibility condition reduces to the following relation,

$$\{x, \bar{x}\}_{PB}\{y, \bar{y}\}_{PB} = -\theta^2, \tag{2.28}$$

where θ is the usual non-commutative coordinates parameters with $\theta B = k$. This constraint equation can be solved as $\{x, \bar{x}\}_{PB} = i\theta$ and $\{y, \bar{y}\}_{PB} = i\theta$ or equivalently by using the $SU(2)$ doublets as follows,

$$\{\bar{z}_i, z^j\}_{PB} = -i\theta\delta_i^j. \tag{2.29}$$

These special constraint relations constitute then the condition for fluid incompressibility; they have as usual a non-commutative geometry interpretation. Implementing, this constraint equations into Eqs. (2.19) by using the Lagrange method, we get the field action $S_3 = S_3(z, \bar{z}, C, A)$ for incompressible fluid running on the 3-sphere,

$$S_3 = -B \int dt d^2\tau d^2\sigma \left[i\bar{z}_i \nabla_\tau z^i - C \frac{l}{B} - A \frac{k}{B} \right], \tag{2.30}$$

where we have set,

$$\nabla_\tau z^i = \mathcal{D}_\tau z^i - i\{A, z^i\}_{PB}, \tag{2.31}$$

and where θ is the non-commutative parameter considered previously. The gauge field $A = A(t, \tau, \sigma; \bar{\tau}, \bar{\sigma})$ is a real gauge field capturing the fluid incompressibility constraint equation.

3. Matrix model of droplets on \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2

In this section, we develop a matrix model proposal of fractional quantum Hall droplets on the real spheres \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 . The gauge field theoretical method developed here can be also viewed as an other way to approach FQH droplets on \mathbb{S}^2 other than the one considered recently in [1] by using stereographic coordinates. It has moreover the property of giving a unified description of FQH systems on \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 and a priori D-string droplets on conifold which is under investigation in [14]; for a Chern–Simons like description see [13].

To begin note that using the spheres realizations (2.1), (2.8), one can parameterize the FQH droplet N particles moving on \mathbb{S}^3 , up to the identification (2.8) on \mathbb{S}^2 , as follows,

$$x_a = x_a(t), \quad \bar{x}_a = \bar{x}_a(t), \quad y_a = y_a(t), \quad \bar{y}_a = \bar{y}_a(t), \tag{3.1}$$

with $a = 1, \dots, N$ indexing the set of particles. Recall that the restriction of the above FQH particle trajectories on \mathbb{C}^2 down to the real three dimension hypersurface \mathbb{S}^3 is given by the following constraint relations (2.18).

3.1. Matrix field variables

In the non-commutative $N \times N$ matrix description of the FQH system on the spheres \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 , one proceeds more or less as usual. First, one elevates the commuting coordinate position variables $\{z_a^i(t), \bar{z}_i^a, 1 \leq a \leq N\}$ of the ambient space \mathbb{C}^2 into $N \times N$ complex matrices as shown below,

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & x_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & x_N \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & y_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & y_N \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

together with the adjoint matrices X_0^+ and Y_0^+ . This is not the unique way to do, since there are also other equivalent matrices X and Y related to (3.2) by using similarity transformations. Second, in terms of the diagonal matrices (3.2), the constraint relations (2.18) become,

$$B(X_0^+ X_0 + Y_0^+ Y_0) = I_{\text{id}}. \tag{3.3}$$

The hermiticity property of $X^+ X$ and $Y^+ Y$ gives the general picture of Eq. (3.3) where X and Y are no longer diagonal. This is ensured by a $U(N)$ similarity transformation,

$$P: X_0^+ X_0 \rightarrow X^+ X = P^+ (X_0^+ X_0) P, \tag{3.4}$$

with the $N \times N$ matrix P satisfies $P^+ P = P P^+ = I_{\text{id}}$. The same may be also done for $Y^+ Y$. Note in passing that this $U(N)$ transformation is in fact a special solution involving adjoint representation of the $U(N)$ group; for a more general description involving the $U(N) \times U(N)$ gauge symmetry as well as bi-fundamental representations, see [15].

The third step towards the building of the matrix model is to note that FQH system $\{z_a^i(t), \bar{z}_i^a(t), 1 \leq a \leq N\}$ constrained as in Eqs. (2.18) can be described by using $N \times N$ matrices X and Y as well as their adjoints. These matrices encode the coordinate positions of the FQH droplet and the extra degrees of freedom are eliminated at the level of the field action by

imposing the $U(N)$ symmetry,

$$\begin{aligned}(X, Y) &\rightarrow (P^+ X P, P^+ Y P), \\ (X^+, Y^+) &\rightarrow (P^+ X^+ P, P^+ Y^+ P)\end{aligned}\quad (3.5)$$

as well as,

$$B \operatorname{Tr}(X^+ X + Y^+ Y) = lN, \quad (3.6)$$

for FQH on the 3-sphere \mathbb{S}^3 . We will show below that the reduction down to the \mathbb{S}^2 geometry requires moreover the condition,

$$B \operatorname{Tr}(X^+ X - Y^+ Y) = mN, \quad (3.7)$$

where m is a relative integer. Combing Eqs. (3.6) and (3.7), one has

$$B \operatorname{Tr}(Y^+ Y) = \frac{l-m}{2} N \quad (3.8)$$

and

$$B \operatorname{Tr}(X^+ X) = \frac{l+m}{2} N. \quad (3.9)$$

Positivity of these quantities leads to the condition,

$$mN \leq lN. \quad (3.10)$$

This relation recalls the usual $SU(2)$ spin projection inequality,

$$j_z \leq j. \quad (3.11)$$

Note that emergence of such $SU(2)$ relation is not a strange thing. We will derive it later on; but for the moment note that this is a previsible property since the matrix variables X and Y carry a $SU(2)$ charge.

3.2. Lagrangian density

The non-commutative matrix field Lagrangian density describing the above FQH droplet on the 2-sphere is obtained by following the steps:

(a) Implement the matrix elevation $x \rightarrow X$ and $y \rightarrow Y$ into the field action equation (2.11). This gives a matrix field action $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_4[X, Y]$ on \mathbb{C}^2 .

(b) Embed the constraint equation (2.18) for droplet dynamics on the 3-sphere by using a Lagrange gauge field $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t)$. We get then the field action $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_3[X, Y, \mathcal{C}]$ on \mathbb{S}^3 .

(c) Require invariance of the matrix field action \mathcal{S}_3 under the $U_C(1)$ Cartan symmetry (2.8) to describe droplet dynamics on the 2-sphere,

$$X \rightarrow e^{i\varphi} X, \quad Y \rightarrow e^{-i\varphi} Y. \quad (3.12)$$

This lead to the introduction of gauge field $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t)$ and the resulting action is $\mathcal{S}'_2 = \mathcal{S}'_2[X, Y, \mathcal{C}, \mathcal{B}]$.

(d) Inject the fluid incompressibility condition by help of a third Lagrange gauge field $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$. The field action is denoted as $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2[X, Y, \mathcal{C}, \mathcal{B}, \mathcal{A}]$.

The solution for $\mathcal{S}_2 = \int dt \mathcal{L}_2$ reads, up to a total derivative, as follows,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -iB \operatorname{Tr} \left[X^+ \frac{dX}{dt} + Y^+ \frac{dY}{dt} \right] + B \operatorname{Tr} \left[\mathcal{A} \left([X^+, X] + [Y^+, Y] - \frac{k}{B} \right) \right] \\ & - B \operatorname{Tr} \left[\mathcal{C} \left((X^+ X + Y^+ Y) - \frac{l}{B} \right) \right] - B \operatorname{Tr} \left[\mathcal{B} \left((X^+ X - Y^+ Y) - \frac{m}{B} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

It is obvious that we could recover the matrix model for FQH droplets on the 3-sphere from the above Lagrangian density just by setting $B = 0$. It coincides with the matrix elevation of Eq. (2.30).

Moreover minimizing the matrix field Lagrangian density \mathcal{L}_2 with respect to the gauge fields \mathcal{A} , \mathcal{C} and \mathcal{B} , one gets the three following matrix constraint relations,

$$\begin{aligned} B[X^+, X] + B[Y^+, Y] &= kI_{\text{id}}, \\ B(X^+ X + Y^+ Y) &= lI_{\text{id}}, \quad B(X^+ X - Y^+ Y) = mI_{\text{id}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

The first relation is the standard one with positive integer k ; it captures fluid droplet incompressibility. The second constraint equation restricts the target space geometry from \mathbb{C}^2 down to \mathbb{S}^3 ; it describes amongst others the quantization of the radius R of the three sphere into $\sqrt{\frac{l}{B}}$ units,

$$R = \sqrt{\frac{l}{B}}, \quad l \in \mathbb{N}^*. \quad (3.15)$$

The third condition restricts further \mathbb{S}^3 down to \mathbb{S}^2 ; we will give details on this constraint relation when we consider the quantum matrix model. In that case, the condition gets an remarkable group theoretic interpretation.

Notice that like in the study of matrix model for FQH on plane, here also we have a problem when taking the trace of both sides of the first relation of Eqs. (3.14). To overcome this difficulty, we extend the Polychronakos trick by modifying the original set of matrix variables. This is achieved by adding the Polychronakos field $\Psi = (\Psi^a(t))$ transforming in the fundamental representation of $U(N)$ with gauge invariant Lagrangian density,

$$\sum_{a,b=1}^N \Psi_a^+ \left(\delta_b^a i \frac{d\Psi^b}{dt} + \mathcal{A}_b^a \Psi^b \right). \quad (3.16)$$

This field transforms as a scalar field under the isometry of the spheres; so it has no coupling with the extra gauge fields \mathcal{B} and \mathcal{C} . The previous matrix field action \mathcal{S}_2 becomes then $S = \int dt \mathcal{L}$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 - \operatorname{Tr} \left[\Psi^+ \left(i \frac{d\Psi}{dt} + \mathcal{A} \Psi \right) \right]. \quad (3.17)$$

This is the full classical Lagrangian density of the matrix model proposal for FQH droplet on the 2-sphere. Now minimizing (3.17) with respect to the gauge fields, we get the following modified constraint relations,

$$\begin{aligned} T_b^a &= B[X^+, X]_a^b + B[Y^+, Y]_a^b + \Psi_b^+ \Psi^a, \\ E_0 &= B \operatorname{Tr}(X^+ X + Y^+ Y), \quad I_0 = B \operatorname{Tr}(X^+ X - Y^+ Y). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Setting $T_0 = \sum_{a=1}^N \Psi_a^\dagger \Psi^a$, the above classical constraint equations can be also decomposed as follows,

$$S_b^a = T_b^a - T_0 \delta_b^a = 0, \quad T_0 = kN, \quad E_0 = lN, \quad I_0 = mN. \quad (3.19)$$

For later use, we need also the conjugate momenta Π_a^b , Γ_a^b and Υ_a of the holomorphic matrix field variables X_b^a , Y_b^a and Ψ^a , respectively. The appropriate variations of the Lagrangian density (3.13)–(3.17) lead to,

$$\Pi_a^b = -iB X_a^{*b}, \quad \Gamma_a^b = -iB Y_a^{*b}, \quad \Upsilon_a = -i\Psi_a^*. \quad (3.20)$$

Using the following Poisson bracket for functions F and G ,

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\text{PB}} = & +i \left(\frac{\partial F}{\partial \Psi_c^*} \frac{\partial G}{\partial \Psi^c} - \frac{\partial F}{\partial \Psi^c} \frac{\partial G}{\partial \Psi_c^*} \right) + \frac{i}{B} \left(\frac{\partial F}{\partial X_b^{*a}} \frac{\partial G}{\partial X_a^b} - \frac{\partial F}{\partial X_a^b} \frac{\partial G}{\partial X_b^{*a}} \right) \\ & + \frac{i}{B} \left(\frac{\partial F}{\partial Y_b^{*a}} \frac{\partial G}{\partial Y_a^b} - \frac{\partial F}{\partial Y_a^b} \frac{\partial G}{\partial Y_b^{*a}} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

we have for the canonical variables,

$$\{\Psi_a^*, \Psi^b\} = +i\delta_a^b, \quad \{X_a^{*d}, X_c^b\} = +\frac{i}{B}\delta_a^b\delta_c^d, \quad \{Y_a^{*d}, Y_c^b\} = +\frac{i}{B}\delta_a^b\delta_c^d, \quad (3.22)$$

and zero for all remaining others.

With these tools at hand, we turn now to study the quantization of the matrix model proposal.

4. Droplet ground state

In this section, we consider the quantization of above FQH systems on the spheres \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 . We derive the explicit form of the wave functions of their ground states $|\Phi\rangle$ which solve the quantum version of the constraint equations (3.19). We start by giving useful tools on the algebra of monomials of creation and annihilation operators. Then we build the ground state for the FQH droplet on \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 , respectively.

4.1. Droplet monomial creators

To build the quantum states of the fluid droplets on the spheres, we need monomials of creation operators satisfying specific properties. In this subsection, we describe some useful features of these monomials; they will be used later.

4.1.1. Algebra of monomials

From the Poisson brackets (3.22) and correspondence principle of quantum mechanics, the canonical commutation relations for quantum matrix model read as follows,

$$[\Psi_a^\dagger, \Psi^b] = -\delta_a^b, \quad [X_a^{\dagger c}, X_b^d] = -\theta\delta_a^d\delta_b^c, \quad [Y_a^{\dagger c}, Y_b^d] = -\theta\delta_a^d\delta_b^c, \quad (4.1)$$

with $\theta = \frac{1}{B}$. We also have,

$$[\Psi_a^\dagger, X_b^{\dagger c}] = [\Psi_a^\dagger, Y_b^{\dagger c}] = [Y_a^{\dagger c}, X_b^{\dagger d}], \quad (4.2)$$

together others type $[\Psi_a^\dagger, \Psi_b^\dagger] = 0$ and so on. Then the quantum version of the classical constraint equations (3.19) reads for the case of droplets on the 3-sphere as

$$S_b^a |\Phi\rangle = 0, \quad \mathcal{T}_0 |\Phi\rangle = kN |\Phi\rangle, \quad \mathcal{E}_0 |\Phi\rangle = lN |\Phi\rangle. \quad (4.3)$$

For the case of FQH droplets on the 2-sphere, we have, in addition to Eqs. (4.3), the following constraint relation

$$\mathcal{I}_0 |\Phi\rangle = mN |\Phi\rangle. \quad (4.4)$$

The quantum operators \mathcal{T}_0 , \mathcal{E}_0 and \mathcal{I}_0 , associated with the corresponding classical analogues (3.18), are given by,

$$\mathcal{T}_0 = \text{Tr}(\Psi^\dagger \Psi), \quad \mathcal{E}_0 = B \text{Tr}(X^\dagger X + Y^\dagger Y), \quad \mathcal{I}_0 = B \text{Tr}(X^\dagger X - Y^\dagger Y). \quad (4.5)$$

They depend linearly on the creation operators Ψ^\dagger , X^\dagger and Y^\dagger and their annihilation partners Ψ , X and Y satisfying the canonical commutation relations (4.1), (4.2). These are hermitian operators ($\mathcal{T}_0^\dagger = \mathcal{T}_0$, $\mathcal{E}_0^\dagger = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{I}_0^\dagger = \mathcal{I}_0$) verifying

$$[\mathcal{T}_0, \mathcal{E}_0] = 0, \quad [\mathcal{T}_0, \mathcal{I}_0] = 0, \quad [\mathcal{I}_0, \mathcal{E}_0] = 0, \quad (4.6)$$

and implying that the wave functions describing droplets on the 2-sphere should depend on three quantum numbers as shown below,

$$|\Phi\rangle \equiv |\Phi_{k,l,m}\rangle, \quad (4.7)$$

or more precisely $|\Phi\rangle \equiv |\Phi_{k,j,j_z}\rangle$ with the integers j and j_z as in introduction section. To get the wave function for the ground state $|\Phi\rangle$ solution of the quantum constraint equations (4.5), it is interesting to begin by considering the properties of the following matrix operator monomials,

$$\begin{aligned} A_{a_n}^\dagger &= \Psi_{b_0}^\dagger X_{b_1}^{\dagger b_0} \dots X_{a_n}^{\dagger b_{n-1}}, \quad n \geq 0, \\ B_{a_n}^\dagger &= \Psi_{b_0}^\dagger Y_{b_1}^{\dagger b_0} \dots Y_{a_n}^{\dagger b_{n-1}}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$A_{a_n}^\dagger$ involves one Ψ^\dagger creator and $(n - 1)$ creators type X^\dagger and $B_{a_n}^\dagger$ uses one Ψ^\dagger and $(n - 1)$ operators Y^\dagger respectively; they transform in the fundamental of $SU(N)$. We also introduce the specific building blocks,

$$\mathbb{A}_{a_1 \dots a_p}^\dagger = \prod_{n=1}^p A_{a_n}^\dagger, \quad \mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger = \prod_{n=1}^q B_{a_n}^\dagger, \quad (4.9)$$

more general ones will be given later on.

Concerning the commutation relations of these operators with S_b^a , \mathcal{T}_0 , \mathcal{E}_0 and \mathcal{I}_0 , it is useful to arrange them into three classes according to the constraint equation one is dealing with. Each class consists of two sets; one involving monomials in Ψ^\dagger and X^\dagger and the other uses Ψ^\dagger and Y^\dagger . The first class concerns commutation relations with the charge operator \mathcal{T}_0 . We have $[\mathcal{T}_0, X_b^{\dagger a}] = [\mathcal{T}_0, Y_b^{\dagger a}] = 0$, $[\mathcal{T}_0, A_{a_n}^\dagger] = A_{a_n}^\dagger$, $[\mathcal{T}_0, B_{a_n}^\dagger] = B_{a_n}^\dagger$ and

$$[\mathcal{T}_0, \mathbb{A}_{a_1 \dots a_p}^\dagger] = p \mathbb{A}_{a_1 \dots a_p}^\dagger, \quad [\mathcal{T}_0, \mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger] = q \mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger. \quad (4.10)$$

Similarly, we have $[\mathcal{E}_0, X_b^{\dagger a}] = X_b^{\dagger a}$, $[\mathcal{E}_0, Y_b^{\dagger a}] = Y_b^{\dagger a}$, $[\mathcal{E}_0, A_{a_n}^\dagger] = n A_{a_n}^\dagger$, $[\mathcal{E}_0, B_{a_n}^\dagger] = n B_{a_n}^\dagger$ and in general,

$$[\mathcal{E}_0, \mathbb{A}_{a_1 \dots a_p}^\dagger] = \frac{p(p+1)}{2} \mathbb{A}_{a_1 \dots a_p}^\dagger, \quad [\mathcal{E}_0, \mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger] = \frac{q(q+1)}{2} \mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger. \quad (4.11)$$

Finally, we have the identities $[\mathcal{I}_0, X_b^\dagger a] = X_b^\dagger a$, $[\mathcal{I}_0, Y_b^\dagger a] = -Y_b^\dagger a$, $[\mathcal{I}_0, A_{a_n}^\dagger] = nA_{a_n}^\dagger$, $[\mathcal{I}_0, B_{a_n}^\dagger] = -nB_{a_n}^\dagger$ from which we derive,

$$[\mathcal{I}_0, \mathbb{A}_{a_1 \dots a_p}^\dagger] = \frac{p(p+1)}{2} \mathbb{A}_{a_1 \dots a_p}^\dagger, \quad [\mathcal{I}_0, \mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger] = -\frac{q(q+1)}{2} \mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger. \tag{4.12}$$

As one sees, the matrix operators X^\dagger and Y^\dagger as well as their adjoint partners play a symmetric role. Thus, the building blocks $\mathbb{A}_{a_1 \dots a_q}^\dagger$ and $\mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger$ should be related by the action under $SU(2)$ generators; they are particular condensates of more general ones which we denote as $\mathbb{D}_{a_1 \dots a_q}^{(n)\dagger}$. In what follows, we study some properties of these objects and their symmetry; then turn back to the construction of the wave functions.

4.1.2. $\mathbb{D}_{a_1 \dots a_q}^{(n)\dagger}$ building blocks

We start by recalling that the classical coordinate variables x and y are rotated under $SU(2)$ isometry of the 3-sphere. This invariance is generated by the operators J_0 and J_\pm satisfying the commutation relations,

$$[J_0, J_+] = 2J_+, \quad [J_0, J_-] = -2J_-, \quad [J_+, J_-] = J_0. \tag{4.13}$$

This symmetry is also valid after the matrix elevation and quantization. To get the explicit expression of the generators J_0 and J_\pm of this symmetry in quantized matrix model, we should solve highest weight relations; in particular,

$$[J_0, X] = -X, \quad [J_0, Y^\dagger] = -Y^\dagger, \quad [J_-, X] = 0, \quad [J_-, Y^\dagger] = 0, \tag{4.14}$$

which mean that Y^\dagger and X carries a spin $\frac{1}{2}$ charge. We have as well,

$$[J_0, X^\dagger] = X^\dagger, \quad [J_0, Y] = Y, \quad [J_+, X^\dagger] = 0, \quad [J_+, Y] = 0. \tag{4.15}$$

Remembering the properties,

$$[X^\dagger, X] = -\theta, \quad [Y^\dagger, Y] = -\theta, \tag{4.16}$$

and using the relations $[X^\dagger X, X] = -\theta X$ and $[Y^\dagger Y, Y] = -\theta Y$ as well similar others, Eq. (4.14) can be solved as follows,

$$J_0 = \frac{1}{\theta} (X^\dagger X - Y^\dagger Y). \tag{4.17}$$

This quantum charge operator satisfy $[J_0, X^\dagger] = X^\dagger$ and $[J_0, Y^\dagger] = -Y^\dagger$. Putting this solution back into Eq. (4.13), we get

$$J_+ = \frac{1}{\theta} X^\dagger Y, \quad J_- = \frac{1}{\theta} Y^\dagger X. \tag{4.18}$$

From this realization, we can check that this representation obey Eq. (4.13). Moreover, we can check as well that the operators $\mathbb{A}_{a_1 \dots a_q}^\dagger$ and $\mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger$ are related as

$$\mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger = \frac{1}{q!} ad^q J_- (\mathbb{A}_{a_1 \dots a_q}^\dagger), \quad q \geq 1, \tag{4.19}$$

showing that $\mathbb{A}_{a_1 \dots a_q}^\dagger$ and $\mathbb{B}_{a_1 \dots a_q}^\dagger$ are in fact just two special operators of a more general set of monomials involving both the creators X^\dagger and Y^\dagger . This set of operators is given by

$$\mathbb{D}_{a_1 \dots a_q}^{(n)\dagger} = \frac{(q-n)!}{q!} ad^n J_- (\mathbb{A}_{a_1 \dots a_q}^\dagger), \quad n = 0, 1, \dots, q. \tag{4.20}$$

The $\mathbb{D}_{a_1 \dots a_q}^{(n)\dagger}$ s form then a $SU(2)$ representation of isospin $j = \frac{q}{2}$. They constitute the building blocks for the derivation of the quantum matrix model wave functions. With these tools, we are now in position to build the wave function for the ground state of the FQH fluids on the spheres.

4.2. Wave functions for droplets on \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2

Since \mathbb{S}^2 is obtained from \mathbb{S}^3 as a fiber bundle section, we begin by studying the fundamental wave function for a FQH fluid droplet on the 3-sphere. Then we consider the computation of the ground state for the case of FQH droplets on the 2-sphere.

4.2.1. Ground state for droplets on \mathbb{S}^3

We start by introducing a $U(N) \times SU(2)$ gauge invariant vacuum state $|0\rangle$ describing a state with zero particle. This state satisfies the symmetries,

$$S_b^a |0\rangle = 0, \quad J_{0,\pm} |0\rangle = 0, \tag{4.21}$$

where S_b^a and $J_{0,\pm}$ are the generators of $U(N)$ and $SU(2)$, respectively. This vacuum state is also annihilated by the operators Ψ^b , X_a^b and Y_a^b of the quantized matrix model; i.e.

$$\Psi^b |0\rangle = 0, \quad X_a^b |0\rangle = 0, \quad Y_a^b |0\rangle = 0. \tag{4.22}$$

By applying monomials of creation operators $\Psi^{\dagger b}$, $X_a^{\dagger b}$ and $Y_a^{\dagger b}$, using the properties equations (4.10)–(4.12), and borrowing some ideas from the construction of [16], one can build the wave function for FQH droplets on \mathbb{S}^3 solving the constraint equations (4.3). In what follows, we focus our attention on ground state; the corresponding results are collected in the following theorem,

Theorem 1.

1. (a) Creation operators $X_a^{\dagger b}$ and $Y_a^{\dagger b}$ of quantum matrix model carry isospin charge $\frac{1}{2}$ of the $SU(2)$ isometry group of \mathbb{S}^3 . The wave functions $|\Phi\rangle$ built out of these operators carry then a $SU(2)$ isospin charge j .

(b) There are $[kN(N - 1) + 1]$ possible wave functions describing FQH droplet ground states on the 3-sphere. These ground states, which solve the constraint equations (4.3), are invariant under $U(N)$ gauge symmetry and form a $SU(2)$ representation.

2. The ground states $|\Phi_{k,j}\rangle$ of droplets on \mathbb{S}^3 belong to a highest weight representation of isospin $j = \frac{kN(N-1)}{2} = lN$. Besides fluid incompressibility relation $\mathcal{T}_0|\Phi_{k,j}\rangle = k|\Phi_{k,j}\rangle$, the highest weight states $|\Phi_{k,j}\rangle$ satisfy,

$$J_0|\Phi_{k,j}\rangle = j|\Phi_{k,j}\rangle, \quad J_+|\Phi_{k,j}\rangle = 0, \tag{4.23}$$

where J_0 and J_{\pm} are $SU(2)$ generators given by Eqs. (4.13).

3. The quantum number l describing the quantization of the radius squared of the 3-sphere ($l = BR^2$) is given by

$$l = \frac{k(N - 1)}{2}. \tag{4.24}$$

The meaning of number k is as usual, however the apparition of the factor $\frac{(N-1)}{2}$ is a consequence of matrix elevation of the 3-sphere geometry. Requiring the $N \times N$ matrices to be

in a $SU(2)$ isospin l_1 representation, one discovers by solving the equation $2l_1 + 1 = N$ that $l_1 = \frac{(N-1)}{2}$; it corresponds to setting $k = 1$ in Eq. (4.24).

4. The explicit expression of the highest weight state $|\Phi_{k,j}\rangle$ describing the ground state of droplets on S^3 is given by

$$|\Phi_{k,j}\rangle = [(\epsilon^{a_0 a_1 \dots a_{N-1}} \Psi_{a_0}^\dagger \mathbb{A}_{a_1 \dots a_{N-1}}^\dagger)^k] |0\rangle, \tag{4.25}$$

where $\mathbb{A}_{a_1 \dots a_{N-1}}^\dagger$ is as in Eq. (4.8) and where $\epsilon^{a_0 a_1 \dots a_{N-1}}$ is the completely antisymmetric invariant tensor of $SU(N)$ gauge symmetry. Excited states are obtained in a quite similar manner as in [16].

The proof of this theorem follows immediately by using the tools given in previous subsections. Let us give below some indications. Notice that the first relation of the constraint equations (4.3) is solved in same manner as done in [16]. This is built by using $SU(N)$ invariants, in particular the trace, determinant and the completely antisymmetric invariant tensor $\epsilon^{a_1 \dots a_N}$ which contract N indices of the $U(N)$ gauge group. Focusing on one of the matrix variables; say the creator X_{ca}^\dagger and borrowing results from [15,16], the first and second constraint relations of Eqs. (4.3) tell us that

$$|\Phi_{k,j,0}\rangle = [(\epsilon^{a_0 a_1 \dots a_{N-1}} \Psi_{a_0}^\dagger \mathbb{A}_{a_1 \dots a_{N-1}}^\dagger)^k] |0\rangle \tag{4.26}$$

is a candidate for the wave function.

By using the relations $J_0|0\rangle = 0$, $[J_0, \Psi_{a_0}^\dagger] = 0$ and $[J_0, \mathbb{A}_{a_1 \dots a_{N-1}}^\dagger] = \frac{N(N-1)}{2} \mathbb{A}_{a_1 \dots a_{N-1}}^\dagger$, we find that the above quantum state obeys the following relations,

$$J_0 |\Phi_{k,j}\rangle = k \frac{N(N-1)}{2} |\Phi_{k,j}\rangle. \tag{4.27}$$

Similarly using $[J_+, X^\dagger] = 0$ and then $[J_+, \mathbb{A}_{a_1 \dots a_{N-1}}^\dagger] = 0$, we get $J_+ |\Phi_{k,j}\rangle = 0$. These two relations show that $|\Phi_{k,j}\rangle$ is a $SU(2)$ highest weight state with highest weight j given by

$$j = k \frac{N(N-1)}{2}, \tag{4.28}$$

and should be thought of as the top vector basis

$$|\Phi_{k,j}\rangle \equiv |\Phi_{k,j,j_z}\rangle, \quad j_z = j \tag{4.29}$$

of a $(2j + 1)$ component vector ($|\Phi_{k,j,j_z}\rangle$). Using Eq. (4.26), one can build the states of the $SU(2)$ highest weight representation by applying the monomials $(J_-)^p$. We then have

$$|\Phi_{k,j,j-p}\rangle = \frac{(j-p)!}{j!} (J_-)^p |\Phi_{k,j,j}\rangle, \tag{4.30}$$

where the integer p takes values as $p = 0, \dots, \frac{kN(N-1)}{2}$. Using the explicit expression of $J_- = \frac{1}{\theta} Y^\dagger X$ as well as the relation $[J_-, X^\dagger] = Y^\dagger$, it is not difficult to see that the lowest state is given by

$$|\Phi_{k,j,-j}\rangle = [\epsilon^{a_0 a_1 \dots a_{N-1}} (\Psi_{a_0}^\dagger \mathbb{B}_{a_1 \dots a_{N-1}}^\dagger)^k] |0\rangle, \tag{4.31}$$

involving only monomials built of the creation operators Y^\dagger . From this solution, one can compute the mean values of T_0 and \mathcal{E}_0 operators. By using the explicit expression of the wave function

and the algebra of the creation and annihilation operators, we find for the second relation of constraint equations (4.4)

$$\frac{\langle \Phi_{k,j,j-p} | \mathcal{T}_0 | \Phi_{k,j,j-p} \rangle}{\langle \Phi_{k,j,j-p} | \Phi_{k,j,j-p} \rangle} = k[1 + p + (N - p - 1)] = kN. \tag{4.32}$$

Following the same method, we can compute in a similar manner the mean value $\langle \Phi | \mathcal{E}_0 | \Phi \rangle$ from which we determine the integer l . We get precisely $l = k \frac{(N-1)}{2}$ as in theorem.

4.2.2. Ground states for droplets on \mathbb{S}^2

The analysis that we have just carried out in the \mathbb{S}^3 case is also used for building the ground state of FQH droplets on the 2-sphere. In that context, the construction of the low energy wave function follows directly from the link between the isometries of the two spheres. In particular, we get it by using the two following:

(a) The fibration of the 3-sphere \mathbb{S}^3 as a circle \mathbb{S}^1 fibered on a base \mathbb{S}^2 . In the isometry group theoretic language, this fibration reads as follows,

$$\mathbb{S}^3 \simeq SU(2), \quad \mathbb{S}^2 \simeq SU(2)/U_C(1), \quad \mathbb{S}^1 \simeq U_C(1) \tag{4.33}$$

and shows that \mathbb{S}^2 may be obtained by fixing the Abelian $U_C(1)$ gauge subsymmetry of the isometry of the 3-sphere.

(b) Droplets on the 2-sphere are described by $SU(2)/U_C(1)$ representations. These are obtained from those of $SU(2)$ representations by projection of the isospin j highest weight vector on one of the $(2j + 1)$ possible directions j_z . With this indication, we can solve without difficulty the constraint equations of droplets on \mathbb{S}^2 .

To get the explicit expression of the wave function of the ground state describing the FQH droplet on the 2-sphere, we start from the solution (4.30)

$$\left\{ | \Phi_{k,j,j-p} \rangle, \quad 0 \leq p \leq \frac{1}{2} kN(N - 1) \right\}, \tag{4.34}$$

obtained for the 3-sphere equations (4.23)–(4.25). Then, we restrict \mathbb{S}^3 down to \mathbb{S}^2 geometry by imposing the constraint equation $\mathcal{I}_0 | \Phi \rangle = m | \Phi \rangle$. This constraint equation corresponds just to singling out one of the state of the highest weight representation. Thus the wave function with spin projection m reads as follows,

$$| \Phi_{SU(2)/U_C(1)} \rangle = | \Phi_{k,j,j-m} \rangle, \tag{4.35}$$

where m is one of the integers belonging to the set $[-l, +l]$. Using the building block operators $\mathbb{D}_{a_1 \dots a_{N-1}}^{(n_i)^\dagger}$ Eq. (4.20), we can rewrite the above fundamental wave function as follows,

$$| \Phi_{k,j,j-m} \rangle = \left(\prod_{i=1}^k [\epsilon^{a_0 a_1 \dots a_{N-1}} \psi_{a_0}^\dagger \mathbb{D}_{a_1 \dots a_{N-1}}^{(n_i)^\dagger}] \right) | 0 \rangle, \tag{4.36}$$

where k and l are same as in previous theorem and the integer m is given by,

$$m = \sum_{i=1}^k \left(\frac{N(N - 1)}{2} - 2n_i \right), \tag{4.37}$$

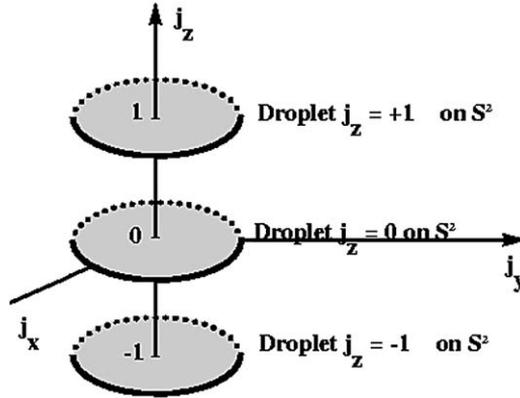


Fig. 1. This figure gives a schematic illustration of FQH droplet on S^3 with isospin $j = 1$; which is constituted of three FQH droplets on S^2 .

with $n_i = 0, \dots, \frac{N(N-1)}{2}$.

Comparing this result with its S^3 analogue, it is illuminating to recognize that one FQH droplet moving on the 3-sphere manifests as,

$$2 \frac{kN(N-1)}{2} + 1 = kN(N-1) + 1 \tag{4.38}$$

FQH droplets on S^2 . As an illustrating example, we consider below the S^3 FQH droplet $j = 1$ by taking $k = 1$ and $N = 2$. It consists of the three discs representing S^2 FQH droplets with isospin projections $j_z = -1, 0, +1$; see also Fig. 1.

5. Conclusion and outlook

In this paper, we have developed a matrix model proposal for fractional quantum Hall droplets on the spheres $S^3 \simeq SU(2)$ and $S^2 \simeq SU(2)/U_C(1)$. These geometries are realized as hypersurfaces embedded in $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ and treated as constraint relations implemented in the field action by help of gauge fields. For the case of droplets on S^2 , this approach may be viewed as an alternative method to the highly non-linear matrix model proposal considered recently in [1]. Moreover, the wave function Eq. (4.36), derived in this paper, completes the results of the above mentioned study. An other powerful point of our proposal is its unified description of both S^3 and S^2 spheres.

Among the main results obtained in this study, we mention the derivation of a new matrix model proposal for FQH droplets on S^3 and its reduction down to S^2 by borrowing ideas from gauge constrained systems. After having identified the underlying quantum matrix constraint equations (4.4), (4.5), we have worked out explicitly the droplet ground state solutions for both spheres S^3 and S^2 . We have found that isometries of these manifolds play a central role in building the wave function for ground state of droplets. In particular, we have shown that FQH droplets on S^3 carries an isospin j equal to,

$$j = kN \frac{(N-1)}{2}, \quad l = kl_1, \quad l_1 = \frac{(N-1)}{2}, \tag{5.1}$$

with $\frac{1}{k}$ being the filling fraction of the Laughlin state. We have also found that a generic droplet on \mathbb{S}^3 with isospin j and ground state,

$$|\Phi_{k,j}\rangle = \{|\Phi_{k,j,j-p}\rangle, |p| \leq j\}, \quad (5.2)$$

is made of $(2j + 1)$ droplets on the 2-sphere,

$$|\Phi_{k,j,j-p}\rangle, \quad p \in \{-j, \dots, j\}, \quad (5.3)$$

with fixed value of the relative integer p . It would therefore be interesting to construct matrix model for FQH droplets on group manifolds G and cosets G/H ; then check whether the FQH ground state property relating $\mathbb{S}^3 \simeq SU(2)$ and $\mathbb{S}^2 \simeq SU(2)/U_C(1)$ is a general feature valid as well for FQH droplets on higher-dimensional group manifolds.

In the end of this paper, we would like to add that the next step of our FQH project is to push further this method by applying it to other particular examples. Our immediate interest concerns the derivation of matrix model for wrapped D-string droplets on $K3 \simeq T^*\mathbb{S}^2$ and conifold $T^*\mathbb{S}^3$ geometries. This is important for our quest in looking for the connection between FQH droplets on $T^*\mathbb{S}^3$ and the partition function of topological string B model on conifold. Progress in this direction will be reported elsewhere.

Acknowledgements

This research work is supported by the program Protars III D12/25, CNRST.

References

- [1] B. Morariu, A.P. Polychronakos, Fractional quantum Hall effect on the two-sphere: A matrix model proposal, Phys. Rev. D 72 (2005) 125002, hep-th/0510034.
- [2] L. Susskind, The quantum Hall fluid and non-commutative Chern Simons theory, hep-th/0101029.
- [3] S. Hellerman, L. Susskind, Realizing the quantum Hall system in string theory, hep-th/0107200.
- [4] A.P. Polychronakos, Quantum Hall states as matrix Chern–Simons theory, JHEP 0104 (2001) 011, hep-th/0103013.
- [5] A.E. Rhalami, E.M. Sahraoui, E.H. Saidi, NC branes and hierarchies in quantum Hall fluids, JHEP 0205 (2002) 004, hep-th/0108096.
- [6] A.E. Rhalami, E.H. Saidi, NC effective gauge model for multilayer FQH states, JHEP 0210 (2002) 039, hep-th/0208144.
- [7] J. Gates Jr., A. Jellal, E.H. Saidi, M. Schreiber, Supersymmetric embedding of the quantum Hall matrix model, JHEP 0411 (2004) 075, hep-th/0410070.
- [8] S.C. Zhang, Quantum Hall effect in higher dimensions, Talk given at the Conference on Higher-Dimensional Quantum Hall Effect, Chern–Simons Theory and Non-Commutative Geometry in Condensed Matter Physics and Field Theory, 1–4 March 2005, AS-ICTP Trieste.
- [9] D. Karabali, Electromagnetic interactions of higher-dimensional quantum Hall droplets, Nucl. Phys. B 726 (2005) 407–420, hep-th/0507027.
- [10] D. Karabali, V.P. Nair, Quantum Hall effect in higher dimensions, Nucl. Phys. B 641 (2002) 533–546, hep-th/0203264.
- [11] V.P. Nair, S. Randjbar-Daemi, Quantum Hall effect on S^3 , edge states and fuzzy S^3/Z_2 , Nucl. Phys. B 679 (2004) 447–463, hep-th/0309212.
- [12] E.H. Saidi, Topological $SL(2)$ gauge theory on conifold, hep-th/0601020, Lab/UFR-HEP/0514, GNPHE/0514, VACBT/0514, Under consideration in JMP.
- [13] R. Ahl Laamara, L.B. Drissi, E.H. Saidi, D-string fluid in conifold, I: Topological gauge model, Nucl. Phys. B 743 (2006) 333–353, Lab/UFR-PHE/0516.
- [14] R. Ahl Laamara, A. Belhaj, L.B. Drissi, E.H. Saidi, D-string fluid in conifold: III. Matrix model on $K3$ and conifold, Lab/UFR-PHE/0610, in preparation.

- [15] E.H. Saidi, Topological matrix model proposal for Laughlin wave and cousin state, Lab/UFR-HEP0517/GNPHE/0519/VACBT/0519.
- [16] S. Hellerman, M. Van Raamsdonk, Quantum Hall physics equals non-commutative field theory, JHEP 0110 (2001) 039, hep-th/0103179.

Chapitre 4

Théorie de Chern-Simons et Modèle de Fluide de Cordes

La théorie des champs topologiques a connu un développement spectaculaire durant les dernières décennies. Un des exemples qui a été le centre de plusieurs études est nul doute le modèle de Chern-Simons (CS) à trois dimensions. C'est une théorie de champs topologique exactement soluble qui a été utilisée dans plusieurs occasions et à plusieurs fins [4], [84] ; en particulier dans l'étude des invariants topologiques des espaces à 3D (noeuds et entrelacs) ; et dans l'interprétation physique de polynômes à l'instar du polynôme de Jones [85]. La théorie de CS sur la sphère \mathbb{S}^3 a également joué un rôle cruciale dans le développement de la théorie des supercordes type II compactifiées sur des variétés de Calabi-Yau à six dimensions réelles et dans le test de conjectures concernant des équivalences impliquant les cordes topologiques ouverte et fermée ou encore la théorie de jauge de CS et la gravité à 3D. Le caractère topologique de la théorie de CS sur \mathbb{S}^3 a constitué aussi une des motivations derrière la formulation topologique du fluide de cordes sur le conifold $T^*\mathbb{S}^3$ considérée dans [86] et que nous discuterons dans la section 6 de ce chapitre.

Dans cette étude, nous exposons les grandes lignes de la théorie de champs topologiques avec un accent particulier sur la théorie de CS à 3D et tout particulièrement sur \mathbb{S}^3 . Nous étudions, dans un premier volet, le modèle de CS à 3D et les invariants topologiques qui en découlent. Puis, nous développons les calculs explicites de la fonction de partition topologique $Z_{top} \equiv Z$ de cette théorie ainsi que le développement perturbatif de son énergie libre F . Dans un deuxième volet, nous présentons une contribution concernant un fluide de cordes sur le conifold $T^*\mathbb{S}^3$. Dans cette contribution, nous développons un modèle de jauge topologique pour approcher la dynamique d'un fluide de cordes. Nous montrons, entre autres, que notre construction unifie plusieurs formulations de fluides de Hall à 3D réelles.

L'organisation de ce chapitre est comme suit : Dans *la section 1*, nous présentons une synthèse sur la théorie de CS à 3D. Dans la section 2, nous exposons le développement perturbatif de l'énergie libre de la théorie de CS et la dépendance en "framing". Dans *la section 3*, nous discutons quelques résultats utiles pour le calcul des valeurs moyennes dans le vide des boucles de Wilson. Dans *la section 4*, nous étudions l'expansion en $1/N$ de l'énergie libre de la théorie de Chern-Simons sur la 3-sphère \mathbb{S}^3 [88, 89, 90]. Dans *la section 5*, nous discutons le fait que la théorie de Chern-Simons sur certaines variétés tridimensionnelle admet une représentation en modèle matriciel. Nous terminons ce chapitre par une contribution sur un modèle de jauge topologique [87].

4.1 Généralités sur la théorie de CS à 3D

La théorie de Jauge de Chern-Simons que nous considérons ici vit dans un espace à trois dimension M_3 sur lequel on définit une structure de fibré principal ayant pour fibre un groupe de jauge G de connexion de jauge A . Pour fixer les idées, nous fixons notre attention sur le cas où G est un groupe de jauge unitaire ; soit $G = U(N)$. L'action de cette théorie est donnée par [47],

$$S_{cs}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_{M_3} Tr \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad (4.1)$$

où k est la constante de couplage. Cette théorie a les propriétés d'être : (a) une théorie de champ topologique et (b) d'offrir un cadre physique pour l'étude des noeuds \mathcal{K} et des entrelacs \mathcal{L} des variétés tridimensionnelles [4]. Ces derniers interviennent dans la détermination des observables physiques et dans l'étude de leurs fonctions de corrélations. Dans ce qui suit, nous décrivons ces deux aspects de l'eq(4.1).

4.1.1 Théorie de CS comme modèle topologique

La théorie de Chern-Simons est un exemple remarquable d'une *théorie de champ topologique* ayant joué un rôle important dans l'interprétation de plusieurs propriétés de théorie quantique des champs et dans l'étude de la compactification de la théorie des supercordes type II à quatre dimensions. Nous discutons ci après quelques propriétés générales de cette théorie de jauge topologique.

A. Observables topologiques

Rappelons tout d'abord qu'une théorie des champs quantique définie sur une variété différentiable et compacte M est une théorie topologique si elle contient un ensemble d'opérateurs \mathcal{O}_i (*observables*) dont les fonctions de corrélation,

$$\langle \mathcal{O}_{i_1} \cdots \mathcal{O}_{i_n} \rangle$$

ne dépendent pas de la métrique $g_{\mu\nu}$ choisie sur M . Formellement, nous avons

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \langle \mathcal{O}_{i_1} \cdots \mathcal{O}_{i_n} \rangle = 0 \quad (4.2)$$

pour un ensemble d'opérateurs $\mathcal{O}_{i_1} \cdots \mathcal{O}_{i_n}$. Les observables $\{\mathcal{O}_i, i = 1, 2, \dots\}$ inclut habituellement l'opérateur identité

$$I = \mathcal{O}_1.$$

La fonction de partition Z_{top} de la théorie topologique est donc elle aussi indépendante de la métrique

$$\frac{\delta Z_{top}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

Elle définit alors un invariant topologique de M .

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

B. Théories type Schwartz et type Witten

Selon la terminologie de [48] ; les théories des champs topologiques se scindent en deux types : (1) Les théories des champs topologiques du type Schwartz ; et (2) Les théories des champs topologiques de Witten ou du type cohomologie.

Pour les théories du type Schwarz, le lagrangien classique $L_{schwartz}$ ne contient aucune dépendance explicite de la métrique $g_{\mu\nu}$. En d'autres terme, l'action classique

$$S_{schwartz} = \int_M L_{schwartz}$$

est invariante sous le changement de la métrique. Si cette symétrie de la théorie classique est préservée après quantification, on obtient une théorie des champs topologique puisque la fonction de partition de la théorie est indépendante de la métrique. L'ensemble des observables dans une théorie de type Schwarz est donné par des opérateurs sans la dépendance en métrique.

Les théories des champs cohomologique du type Witten ont une saveur très différente ; elles seront discutées séparément dans le chapitre 4. Puisque l'action de la théorie de Chern-Simons sur M_3 ne dépend pas de métrique, ceci mène à une théorie des champs topologique de type Schwarz. En particulier, la fonction de partition $Z_{cs}(M) = Z$,

$$Z = \int_{M_3} [DA] \exp(iS_{cs}[A]) \quad (4.3)$$

définit un invariant topologique de la variété M_3 . Le fait que le lagrangien classique est indépendant de la métrique n'est pas, en général, suffisant pour garantir que la théorie quantique préservera cette invariance, puisqu'il pourrait y avoir des anomalies qui brisent la symétrie classique. Il a été prouvé dans [4] que l'invariance topologique de la théorie de Chern-Simons est préservée au niveau quantique, mais avec une subtilité supplémentaire : l'invariance dépend non seulement de la variété M_3 mais aussi du choix de la trivialisaton du fibré tangent TM (*framing*¹).

C. Framing

Le choix du '*framing*' change la valeur de la fonction de partition d'une manière très précise. En effet si le *framing* est changé par n unités, la fonction de partition $Z(M)$ change comme suit [133] :

$$Z(M) \quad \rightarrow \quad e^{i\frac{\pi nc}{12}} Z(M), \quad (4.4)$$

où c est la charge centrale du modèle de Wess-Zumino-Witten (WZW) de groupe G [49].

$$c = \frac{kd}{k+y}. \quad (4.5)$$

Dans cette équation, les nombres d et y sont respectivement la dimension et le nombre de Coxeter dual du groupe G (pour $G = U(N)$, $d = N^2$, $y = N$). Suivant [50], il existe un choix canonique de '*framing*' pour chaque variété de dimension trois. Les autres choix différents sont indexés par un nombre entier $s \in \mathbb{Z}$ avec $s = 0$ (Le nombre d'auto-entrelacement = 0) correspond au *framing* canonique.

¹Pour un point asymptotique $x \rightarrow \infty$, et une 1-forme $\lambda = pdx$, le type de changement de variables ; $x \rightarrow x + f(p)$, laissant p fixe de tel sorte que λ est invariant est appelé "framing".

4.1.2 Invariants topologiques : Noeuds et entrelacs

La théorie de Chern-Simons donne les invariants topologiques à 3D. En effet, il existe une connexion très étroite entre les entrelacs pondéré et les variétés tridimensionnelles. N'importe quelle variété orientée fermée de dimension 3 peut être obtenue par les *entrelacs pondéré* (framed oriented link).

A. Noeuds \mathcal{K} et entrelacs \mathcal{L}

Un noeud \mathcal{K} Un noeud est une corde nouée fermée dans l'espace. Un entrelacs \mathcal{L} est une réunion disjointe d'un ensemble fini de noeuds. Parmi les propriétés de ces invariants, nous citons :

(1) **Equivalence** : Deux noeuds \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 sont équivalents s'ils sont homotopes. En clair, deux noeuds sont équivalents si on peut leur donner la même forme sans couper la corde.

$$\mathcal{K}_1 \sim \mathcal{K}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{K}_1 \text{ et } \mathcal{K}_2 \quad \text{sont homotopes}$$

Le problème est de reconnaître directement si deux noeuds \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 sont effectivement équivalents ou non.

(2) **Invariance** : Un invariant est une quantité I qui peut-être un nombre entier, un nombre réel, un polynôme, un groupe ou tout autre objet mathématique. Un noeud

$$I(\mathcal{K})$$

invariant est une quantité qui reste inchangée lors d'une *déformation* du noeud. Si nous disposons d'un invariant $I(\mathcal{K})$, nous pouvons affirmer que deux noeuds \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 sont vraiment *différents* quand l'invariant ne prend pas la même valeur pour les deux noeuds

$$I(\mathcal{K}_1) \neq I(\mathcal{K}_2)$$

Mais si deux noeuds \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 ont le même invariant, nous ne pouvons affirmer qu'ils sont du même type (déformable l'un en l'autre)

$$I(\mathcal{K}_1) = I(\mathcal{K}_2) \quad \text{n'implique pas automatiquement} \quad \mathcal{K}_1 \sim \mathcal{K}_2$$

Il faudrait pour cela disposer d'un *système complet d'invariants*.

(3) **Noeud non trivial** : On associe au noeud \mathcal{K} des objets mathématiques $I(\mathcal{K})$ calculables (polynômes, nombres) appelés "invariants du noeud" et qui sont insensibles à une déformation du noeud. Si l'invariant n'est pas égal à celui du noeud trivial, on est sûr que le noeud n'est pas trivial. Le problème est donc de trouver des invariants assez fins. Dans ce qui suit, nous décrivons deux exemples : (i) *Le nombre d'entrelacement*; et (ii) *Le polynôme de Jones* ; pour plus de détails voir [51, 52] :

B. Exemple 1 : Le nombre d'entrelacement

(i) **Cas de deux Noeuds** : Étant donné deux noeuds orientés liés $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$, on peut définir un invariant topologique élémentaire, appeler *nombre d'entrelacement* (*linking number en anglais*), par

$$\text{lk}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \frac{1}{2} \sum_p \epsilon(p), \quad (4.6)$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

où la somme est portée sur tous les points de croisement, et $\epsilon(p) = \pm 1$ est un signe associé aux croisements comme indiqué dans la figure 4.4.

(ii) **Cas d'un entrelacs** $\mathcal{L} = \{\mathcal{K}_\alpha, \alpha = 1, \dots, L\}$: Le nombre d'entrelacement $\text{lk}(\mathcal{L})$ d'un entrelacs \mathcal{L} avec \mathcal{K}_α composantes, $\alpha = 1, \dots, L$, est défini par

$$\text{lk}(\mathcal{L}) = \sum_{\alpha < \beta} \text{lk}(\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta). \quad (4.7)$$

A titre d'illustration, une fois qu'une orientation est choisie pour les deux composantes d'entrelacs de Hopf 2_1^2 montré dans la figure 4.1, on trouve deux entrelacs orientés inéquivalents avec les nombres entrelacement ± 1 .

Dans la figure 4.1, nous présentons quelques configurations des noeuds \mathcal{K} et des entrelacs \mathcal{L} :

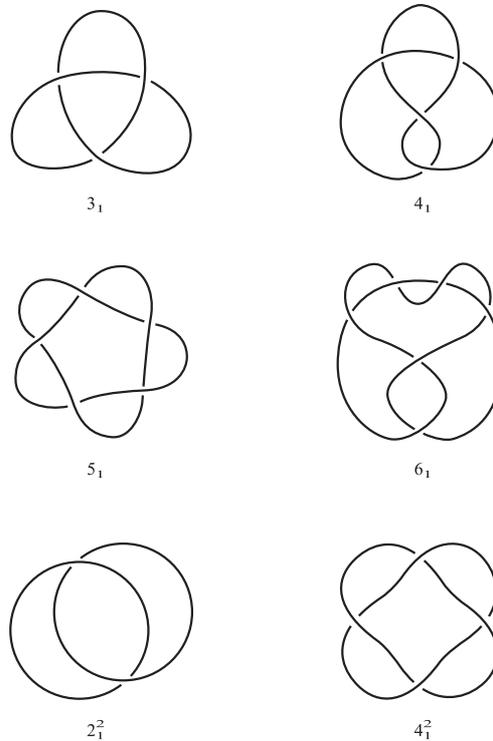


FIG. 4.1 – Quelques noeuds et entrelacs. Dans la notation x_n^L , x indique le nombre de croisements, L le nombre de composantes et n est un nombre utilisé pour énumérer des noeuds et des entrelacs dans un ensemble donné caractérisé par x et L .

C. Exemple 2 : Polynôme de Jones

Cet invariant $V(t)$ qui est capable de différencier un noeud \mathcal{K} de son image dans un miroir (voir la figure 4.3). En outre, ce polynôme permet d'étudier l'alternance des noeuds. Afin de calculer le polynôme de Jones d'un noeud \mathcal{K} quelconque, il faut au préalable déterminer son *polynôme de crochet*

$$\langle \mathcal{K} \rangle,$$

objet qui reste invariant par les mouvements d'avancée et de glissement mais pas de torsion.

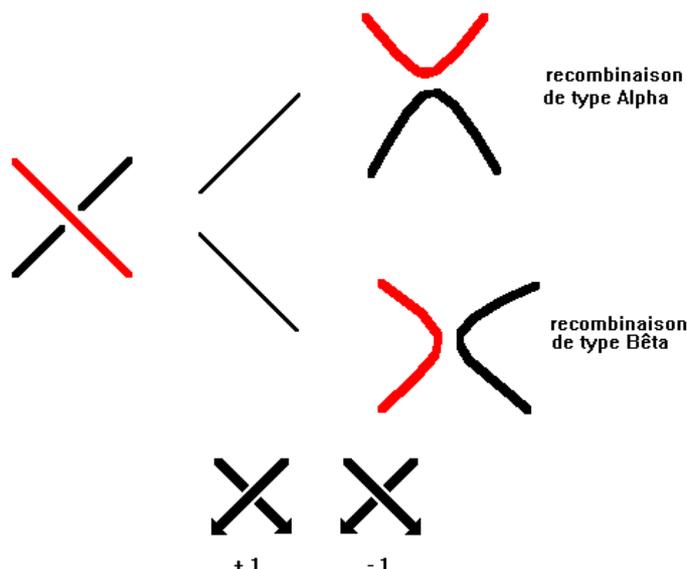


FIG. 4.2 -

Trois règles doivent impérativement être respectées :

- Le polynôme de crochet du noeud trivial vaut l'unité, autrement dit $\langle O \rangle = 1$.
- l'ajout d'une boucle non nouée, sans enlacement avec \mathcal{K} , se traduit par

$$\langle \mathcal{K} \cup O \rangle = -(a^2 + a^{-2}) \cdot \langle \mathcal{K} \rangle .$$

- la brisure d'un croisement X peut se réaliser de deux façons, conduisant à

$$\langle X \rangle = a \cdot \langle a \rangle + a^{-1} \cdot \langle b \rangle .$$

Il suffit donc de rompre successivement tous les croisements de la projection du noeud \mathcal{K} , jusqu'à ce qu'il n'en reste plus aucun et d'appliquer simultanément les règles énoncées ci-dessus. Les effets dus à un mouvement de torsion peuvent être contrecarrés en multipliant $\langle \mathcal{K} \rangle$ par un coefficient qui dépend du *vrillage*

$$E(\mathcal{K})$$

du noeud \mathcal{K} . Le vrillage $E(\mathcal{K})$ étant égal à la somme des croisements munis du signe de leur orientation. Nous avons,

$$X(\mathcal{K}) = (-a)^{-3E(\mathcal{K})} \cdot \langle \mathcal{K} \rangle$$

ce qui implique, en remplaçant a par $t^{1/4}$, $V(t) = (-t^{1/4})^{-3E(\mathcal{K})} \cdot \langle \mathcal{K} \rangle$.

D. Entrelacs pondéré orienté

Un entrelacs pondéré orienté (framed oriented link) est un entrelacs orienté \mathcal{L} de \mathbb{R}^3 dont chaque composante \mathcal{K}_α est munie d'un nombre entier l_α , son poids (framing number). l_α est le

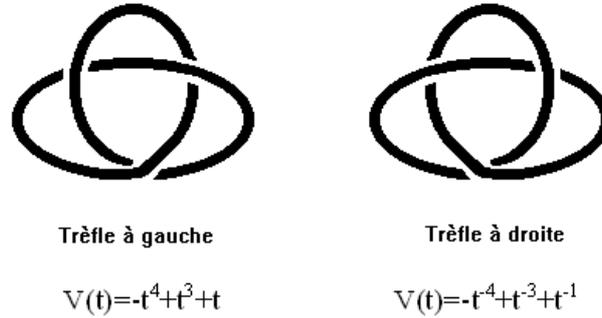


FIG. 4.3 – Cette figure représente les deux types de noeud de trèfle.

nombre d'entrelacement de la composante \mathcal{K}_α avec la nouvelle composante \mathcal{K}'_α qui est la translation de \mathcal{K}_α dans la direction d'un champ vectoriel normal à \mathcal{K}_α . Le poids d'une composante ne dépend pas de son orientation, en effet, si \mathcal{K}_α change d'orientation, \mathcal{K}'_α le fait aussi, et les signes des croisements de \mathcal{K}_α avec \mathcal{K}'_α restent inchangés

4.1.3 Boucles de Wilson

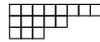
Étant donné un noeud orienté \mathcal{K} de la sphère S^3 , on peut considérer la trace d'holonomie de la connexion de jauge autour de \mathcal{K} dans une représentation irréductible donnée R de $U(N)$. Ceci donne l'opérateur de boucle de Wilson :

$$W_R^{\mathcal{K}}(A) = \text{Tr}_R(U_{\mathcal{K}}), \quad (4.8)$$

où

$$U_{\mathcal{K}} = P \exp(\oint_{\mathcal{K}} A) \quad (4.9)$$

est l'holonomie autour du noeud. L'opérateur dans l'équation (4.8) est un opérateur invariant de jauge dont la définition ne contient pas de métrique. Il représente donc une observable de la théorie de Chern-Simons considérée comme une théorie des champs topologique.



Les représentations irréductibles de $U(N)$ seront marquées par les plus hauts poids ou d'une manière équivalente par les longueurs des lignes dans un tableau de Young,

$$(l_1, l_2, \dots, l_n), \quad l_1 \geq l_2 \geq \dots,$$

Si on considère maintenant un entrelacs \mathcal{L} avec \mathcal{K}_α composantes, $\alpha = 1, \dots, L$, on peut, en principe, calculer la fonction de corrélation normalisée,

$$\begin{aligned} W_{R_1 \dots R_L}(\mathcal{L}) &= \langle W_{R_1}^{\mathcal{K}_1} \dots W_{R_L}^{\mathcal{K}_L} \rangle \\ &= \frac{1}{Z(M)} \int [\mathcal{D}A] \left(\prod_{\alpha=1}^L W_{R_\alpha}^{\mathcal{K}_\alpha} \right) e^{iS}. \end{aligned} \quad (4.10)$$



FIG. 4.4 – En calculant le nombre d’entrelacement de deux noeuds, les croisements ont un signe ± 1 comme indiqué dans la figure.

La fonction de corrélation non normalisée sera dénotée par $Z_{R_1 \dots R_L}(\mathcal{L})$; elle est égale à $Z(M) W_{R_1 \dots R_L}(\mathcal{L})$. Le caractère topologique de l’action et le fait que les opérateurs de boucle de Wilson peuvent être définis sans l’utilisation d’aucune métrique de la variété trois dimensionnelle indiquent que (4.10) est un invariant topologique d’entrelacs.

Comme nous verrons plus loin, et de la même façon à celle produite pour la fonction de partition, pour définir l’invariance d’entrelacs nous avons besoin de quelques informations supplémentaires en raison des ambiguïtés quantiques dans la fonction de corrélation (4.10). Notons que les noeuds et les entrelacs ont été pris orientés provoquant ainsi une différence. Si \mathcal{K}^{-1} dénote le noeud obtenu à partir de \mathcal{K} en inversant son orientation, on aura

$$Tr_R(U_{\mathcal{K}^{-1}}) = Tr_R(U_{\mathcal{K}}^{-1}) = Tr_{\bar{R}}(U_{\mathcal{K}}), \quad (4.11)$$

où \bar{R} dénote la représentation conjuguée. Certaines fonctions de corrélation des boucles de Wilson dans la théorie Chern-Simons s’avèrent être liés aux polynômes invariants des noeuds et des entrelacs. Comme il est développé dans [53], l’un des polynômes invariants d’entrelacs \mathcal{L} le plus important est le polynôme de HOMFLY² $P_{\mathcal{L}}(q, \lambda)$, qui dépend de deux variables q et λ . Ce polynôme s’avère être lié à la fonction de corrélation (4.10) quand le groupe de jauge est $U(N)$ et tous les composants sont dans la représentation fondamentale $R_{\alpha} = \square$. Plus précisément, nous avons

$$W_{\square \dots \square}(\mathcal{L}) = \lambda^{lk(\mathcal{L})} \left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) P_{\mathcal{L}}(q, \lambda) \quad (4.12)$$

où $lk(\mathcal{L})$ est le nombre d’entrelacement de \mathcal{L} , et les variables q et λ sont liées aux variables de Chern-Simons comme suit

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{k + N}\right), \quad \lambda = q^N. \quad (4.13)$$

Pour $N = 2$ le polynôme de HOMFLY se réduit à un polynôme à une variable [51].

4.2 Approche perturbative

La fonction de partition et les fonctions de corrélation des boucles de Wilson dans la théorie de Chern-Simons peuvent être calculées de différentes façons. Nous présenterons dans ce qui suit

²Bien que ce polynôme à deux variables constitue un invariant plus puissant que les deux précédents -il contient leurs informations respectives-, il reste malheureusement incomplet.

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

des résultats de base de la théorie de perturbation de Chern-Simons pour la fonction de partition [54, 55, 56].

4.2.1 Structure perturbative de la fonction de partition

Dans le calcul de la fonction de partition dans la théorie de perturbation, nous commençons par donner les solutions classiques des équations de mouvement de Chern-Simons. Si

$$A = \sum_a A^a T_a, \quad [T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c,$$

où T_a est une base de l'algèbre de Lie du groupe de jauge, alors

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} = \frac{k}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}^a = 0.$$

Il s'ensuit que les solutions classiques sont justes des connexions plates ($dA = 0$) sur M . Ces connexions plates sont en correspondance une à une avec l'homomorphisme de groupe,

$$\pi_1(M) \rightarrow G. \quad (4.14)$$

Par exemple, pour le cas où M est donné par l'espace de Lens, $L(p, 1)$, définie par,

$$M = \mathbf{S}^3 / \mathbf{Z}_p, \quad \text{alors} \quad \pi_1(L(p, 1)) = \mathbf{Z}_p$$

et les connexions plates A sont classées par l'homomorphisme de groupe

$$\mathbf{Z}_p \rightarrow G.$$

Supposons que les connexions plates sur M constituent un ensemble discret de points

$$\left\{ A^{(c)}, c = 1, \dots \right\}.$$

Ceci est le cas par exemple si M est une sphère d'homologie rationnelle³ (premier nombre de Betti nul) puisque dans ce cas $\pi_1(M)$ est un groupe fini. Dans cette situation, on exprime la fonction de partition $Z(M)$ comme la somme de termes associés aux points stationnaires :

$$Z(M) = \sum_c Z^{(c)}(M), \quad (4.15)$$

où c désigne les différentes connexions plates $A^{(c)}$ sur M . Chacun des $Z^{(c)}(M)$ constitue une série asymptotique en $1/k$ de la forme

$$Z^{(c)}(M) = Z_{1\text{-boucle}}^{(c)}(M) \exp\left(\sum_{l=1}^{\infty} S_l^{(c)} x^l\right). \quad (4.16)$$

Dans cette équation, x est le paramètre effectif de l'expansion et est donné par :

$$x = \frac{2\pi i}{k + y}, \quad (4.17)$$

³Soit une sphère plongée, de codimension 1, homotope à zero. Si elle ne borde pas une boule, alors la variété ambiante est une sphère d'homologie rationnelle.

qui tient compte du changement quantique $k \rightarrow k + y$ dû aux effets de renormalisation finie [4, 57]. La correction à une boucle $Z_{1\text{-boucle}}^{(c)}(M)$ a été étudiée par [4, 58, 59, 60]. Elle a la forme

$$Z_{1\text{-boucle}}^{(c)} = \frac{(2\pi x)^{\frac{1}{2}(\dim H_c^0 - \dim H_c^1)}}{\text{vol}(H_c)} e^{-\frac{1}{x} S_{CS}(A^{(c)}) - \frac{i\pi}{4} \varphi} \sqrt{|\tau_R^{(c)}|}, \quad (4.18)$$

où les H_c^0 et H_c^1 sont les groupes de cohomologie avec des valeurs dans l'algèbre de Lie de G associée à la connexion plate $A^{(c)}$. $\tau_R^{(c)}$ est la torsion de Reidemeister-Ray-Singer de $A^{(c)}$, H_c est le groupe d'isotropie de $A^{(c)}$, et φ est une phase. Pour une connexion plate triviale

$$A^{(c)} = 0, \quad H_c = G.$$

Les termes dans (4.16) qui correspondent aux connexions triviales, seront dénotés par S_l .

Schématiquement, l'énergie libre F est calculée par les diagrammes de bulles connexes (sans pattes externes) faisant intervenir de vertex trivalents (puisque l'interaction dans l'action de Chern-Simons est cubique). Nous nous référerons à ces diagrammes comme des *graphes trivalents connexes*. S_l est la contribution des graphes trivalents connexes avec $2l$ vertex et $l + 1$ boucles. Pour chacun de ces graphes

$$\mathcal{G} : \quad \text{à } 2l \text{ vertex et } (l + 1) \text{ boucles}$$

nous devons calculer un facteur de groupe et une intégrale de Feynman. Cependant, ces graphes \mathcal{G} ne sont pas tous indépendants, puisque la structure sous-jacente de l'algèbre de Lie impose l'existence de l'identité de Jacobi :

$$\sum_e (f_{abe} f_{edc} + f_{dae} f_{ebc} + f_{ace} f_{edb}) = 0. \quad (4.19)$$

Ceci mène à la relation de graphe connue sous le nom relation IHX ou relation de Jacobi. L'antisymétrie de f_{abc} mène à ce qu'on appelle la relation AS [56, 54].

Définitions :

1) Si deux diagrammes de \mathcal{G} ne diffèrent que par l'ordre cyclique de l'un de leurs sommets trivalents, leur somme est nulle (relation dite (AS) pour antisymétrie, voir la figure 4.5).

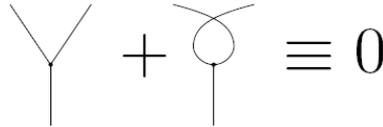


FIG. 4.5 –

2) la relation (IHX) fait intervenir trois diagrammes de \mathcal{G} qui ne diffèrent qu'au voisinage d'une arête comme l'indique la figure 4.6 :

Invariance perturbative universelle et LMO

Invariance perturbative universelle L'existence des relations précédentes suggère de définir une relation d'équivalence \mathcal{R} dans l'espace des graphes trivalents connexes G en quotientant par les relations IHX et AS, d'où nous obtenons l'*homologie graphique*. L'espace des classes d'homologie des diagrammes connexes sera dénoté par $\mathcal{A}(\emptyset)^{conn}$;

$$\mathcal{A}(\emptyset)^{conn} = G/\mathcal{R}.$$

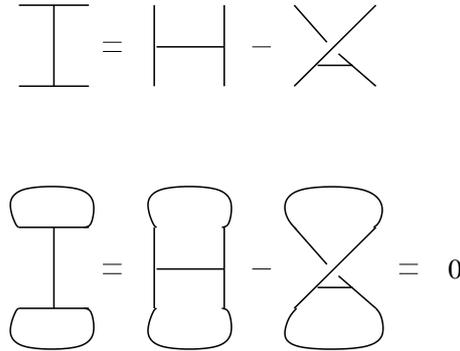


FIG. 4.6 –

Cet espace est gradué par la moitié du nombre de vertex l , donnant le degré du graphe. L'espace des classes d'homologie des graphes de degré l est dénoté par

$$\mathcal{A}(\emptyset)_l^{conn}.$$

Pour chaque l , on a un espace vectoriel de dimension $d(l)$. La dimension de ces espaces est connue explicitement pour des degrés bas [56]. Dans la table 2.1, on donne certains d'entre eux. Pour n'importe quel groupe G , nous avons une transformation

$$r_G : \mathcal{A}(\emptyset)^{conn} \rightarrow \mathbf{R} \quad (4.20)$$

qui associe à chaque graphe Γ son facteur $r_G(\Gamma)$ de la théorie du groupe. Cette transformation est bien définie, puisque les différents graphes dans la même classe d'homologie $\mathcal{A}(\emptyset)^{conn}$ mènent par définition au même facteur de groupe. Cette transformation est un exemple d'un *système de poids* de $\mathcal{A}(\emptyset)^{conn}$. Chaque groupe de jauge donne un système de poids pour $\mathcal{A}(\emptyset)^{conn}$, mais on peut trouver des systèmes de poids qui ne sont pas associés à des groupes de jauge [61]. On

ℓ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(\ell)$	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8

TAB. 4.1 – $d(\ell)$ dans le cas $\mathcal{A}(\emptyset)_\ell^{conn}$ est inférieur à $\ell = 10$.

peut maintenant étudier la structure de S_l apparaissant dans (4.16) : Puisque les diagrammes de Feynman peuvent être groupés dans des classes d'homologie, Alors on a

$$S_l = \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}(\emptyset)_l^{conn}} r_G(\Gamma) I_\Gamma(M), \quad (4.21)$$

où $r_G(\Gamma)$ est le facteur de groupe de symétrie des graphes. Les facteurs $I_\Gamma(M)$ apparaissant dans (4.21) sont certaines sommes d'intégrales des propagateurs sur M . Il a été montré par [62] que ceux-ci sont des invariants de la variété trois dimensionnelle M , et puisque la dépendance en groupe de jauge a été factorisée, ils capturent seulement l'information topologique de M , contrairement à $Z(M)$, qui dépend aussi du choix du groupe de jauge. Ce sont *les invariants perturbatifs universels* définis par la théorie de Chern-Simons. A chaque ordre l dans la théorie de perturbation, il y a $d(l)$ invariants perturbatif indépendant. Bien sûr, ces invariants héritent

de $\mathcal{A}(\emptyset)_l^{conn}$ la structure d'un espace vectoriel de dimension fini, et en particulier on peut choisir une base de graphes trivalents. Un choix possible pour $l \leq 5$ est le suivant [63] : Les graphes avec k cercles jointifs par des lignes seront dénotés par θ_k . Donc, le graphe correspondant à $l = 1$ est dénoté par θ , le graphe correspondant à $l = 2$ est dénoté par θ_2 , et ainsi de suite.

$$\begin{aligned}
 \ell = 1 : & \quad \text{---} \bigcirc \text{---} \\
 \ell = 2 : & \quad \text{---} \bigcirc \text{---} \\
 \ell = 3 : & \quad \text{---} \bigcirc \text{---} \\
 \ell = 4 : & \quad \text{---} \bigcirc \text{---} \quad \square \\
 \ell = 5 : & \quad \text{---} \bigcirc \text{---} \quad \square
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Invariance LMO : La théorie de Chern-Simons détecte l'homologie de graphe par le système de poids associé aux algèbres de Lie. Mais cela n'empêche l'existence d'un élément d'homologie de graphe qui n'est pas détecté par les systèmes de poids. Heureusement, nous pouvons faire recours à une définition mathématique très élégante de l'invariance perturbative universelle d'une variété de dimension trois qui fonctionne directement en homologie de graphe. Ceci s'appelle invariance LMO (*Le, Murakami and Ohtsuki*) [64] et c'est une combinaison linéaire formelle des graphes d'homologie avec des coefficients rationnels :

$$\omega(M) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{A}(\emptyset)^{conn}} I_{\Gamma}^{LMO}(M) \Gamma \in \mathcal{A}(\emptyset)^{conn}[\mathbf{Q}]. \tag{4.23}$$

Les invariants universels extraits à partir de la théorie de perturbation de Chern-Simons sont analogues aux invariants LMO. Plus précisément, puisque $\omega(M)$ qui est invariant par LMO est égale à 0 pour \mathbf{S}^3 , on a :

$$I_{\Gamma}^{LMO}(M) = I_{\Gamma}(M) - I_{\Gamma}(\mathbf{S}^3), \tag{4.24}$$

tant que le graphe Γ est détecté par des systèmes de poids d'algèbre de Lie. Dans ce sens l'invariance par LMO est plus raffinée que les invariants perturbatifs universels extraits à partir de la théorie de Chern-Simons. Finalement, signalons que, l'évaluation perturbative des corrélateurs de

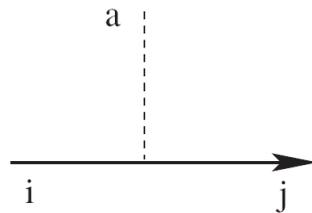


FIG. 4.7 – Représentation graphique du générateur $(T_a)_{ij}$ d'une algèbre de Lie.

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

boucle de Wilson peut également être faite en utilisant des procédures standard.

(i) D'abord, on doit développer l'opérateur holonomie comme

$$W_R^K(A) = Tr_R [1 + \oint_{\mathcal{K}} dx^\mu A_\mu(x) + \oint_{\mathcal{K}} dx^\mu \int^x dy^\nu A_\nu(y) A_\mu(x) + \dots],$$

où $A_\mu = \sum_a A_\mu^a T_a$.

(ii) Puis, après la fixation de jauge, on peut évaluer les fonctions de corrélation dans la théorie de perturbation standard [65, 55].

La structure résultante peut être formalisée d'une belle manière en présentant une algèbre des diagrammes. Comme il a été fait pour les fonctions de partition, les invariants perturbatifs universels correspondants sont des invariants des noeuds de Vassiliev [56].

Rappelons qu'un invariant de Vassiliev de type n , V_n , (on dit aussi de type fini), est une application V de l'ensemble des noeuds avec points doubles vers un anneau \mathcal{A} ,

$$V : \{\mathcal{K}\} \rightarrow \mathcal{A},$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

$$V(X) = V(+)-V(-)$$

$$V(\mathcal{K}) = 0 \quad \text{si } \mathcal{K} \text{ est un noeud avec plus de } n \text{ points doubles.}$$

Voir la figure 4.8 pour illustration. On note V_m , l'ensemble des invariants de Vassiliev de type m .

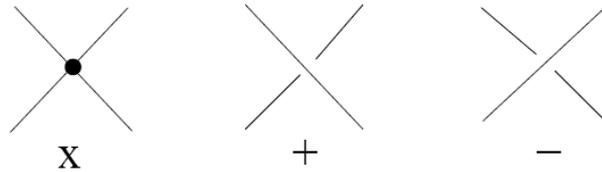


FIG. 4.8 –

Ceci est une graduation des invariants de Vassiliev.

4.2.2 Facteurs de symétries

Le calcul de S_l implique l'évaluation des facteurs de groupes de symétries des diagrammes de Feynman, que nous avons dénoté par $r_G(\Gamma)$. Cette partie est destinée à donner quelques détails de la façon qui permet d'évaluer ces facteurs quand $G = U(N)$ [56, 66].

En fait, l'idée fondamentale qui consiste à évaluer les facteurs de groupe est très semblable à la notation à double ligne de 't Hooft où les indices sont dans la représentation adjointe en termes d'indices de la représentation fondamentale (et anti-fondamentale). Dans le cas de $U(N)$, la représentation adjointe est juste le produit tensoriel de la représentation fondamentale et anti-fondamentale. D'abord, on normalise la trace dans la représentation fondamentale en posant

$$Tr(T_a T_b) = \delta_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, N^2. \quad (4.25)$$

Il découle que

$$\sum_a (T_a)_{ij} (T_a)_{kl} = \delta_{il} \delta_{kj}. \quad (4.26)$$

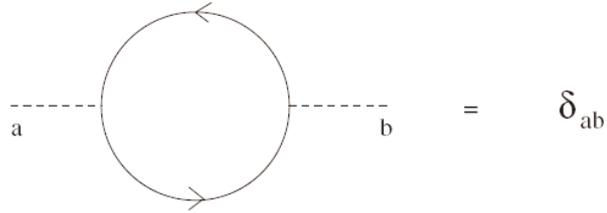


FIG. 4.9 – Représentation graphique de la condition de normalisation (4.25).

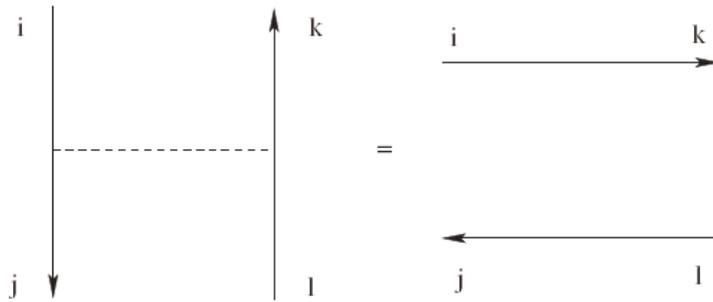


FIG. 4.10 – Représentation graphique de (4.26).

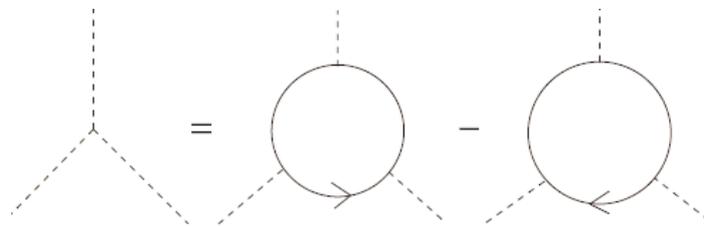


FIG. 4.11 – Représentation graphique de la relation (4.27) entre les constantes de structure et les générateurs.

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

Si on représente le générateur $(T_a)_{ij}$ comme dans la figure 4.7, la relation (4.26) se représente comme dans la figure 4.10. C'est seulement le fait que la représentation adjointe de $U(N)$ est donnée par $V_N \otimes V_N^*$. De même, la condition de normalisation (4.25) est graphiquement représentée comme la figure 4.9. L'évaluation des facteurs de groupe des diagrammes de Feynman implique, naturellement, les constantes de structure de l'algèbre de Lie f_{abc} , associées au vertex cubique. La relation définissant des constantes de structure donne ;

$$f_{abc} = \text{Tr}(T_a T_b T_c) - \text{Tr}(T_b T_a T_c), \quad (4.27)$$

que nous représentons dans la figure 4.11. En plus de la figure 4.10, nous obtenons la règle graphique représentée dans la figure 4.12. On peut interpréter ceci comme règle générale qui nous indique comment couper un diagramme de Feynman d'une seule ligne de la théorie $U(N)$ en *fatgraphs* : étant donné un diagramme de Feynman, nous substituons chaque vertex par le vertex à double ligne sans twists, moins le vertex à double ligne avec des twists dans tous les côtés. Si le diagramme a $2l$ vertex, on produit 4^l fatgraphs (certains d'entre eux peuvent être égaux), qui peuvent être interprétés comme surfaces de Riemann avec des trous. Le facteur de groupe d'un fatgraph avec h trous est simplement N^h .

Exemple : *facteurs de groupes de quelques diagrammes simples.*

On peut employer les règles précédentes pour calculer le facteur de groupe du diagramme de Feynman à deux boucles



En résolvant les deux vertex nous obtenons deux fatgraphs différents : le graphe dans la figure 3.3 avec le poids 2 et le graphe dans la figure 3.5 avec le poids -2 . On trouve alors :

$$r_{U(N)}(\theta) = 2N(N^2 - 1). \quad (4.28)$$

La même procédure donne aussi

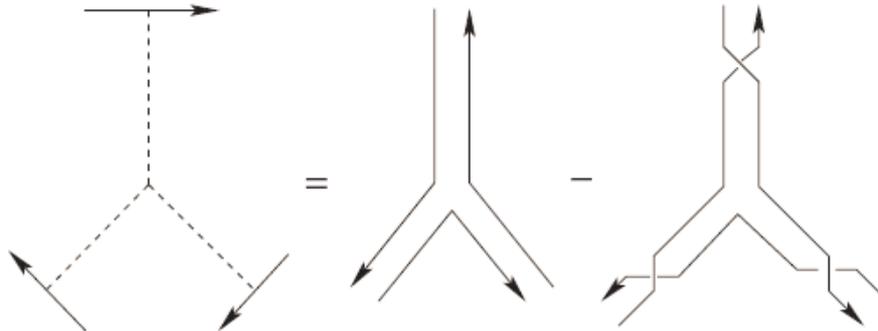


FIG. 4.12 – Règle graphique pour transformer des diagrammes de Feynman en diagrammes à double ligne.

$$r_{U(N)}(\theta_2) = 4N^2(N^2 - 1). \quad (4.29)$$

L'utilisation des techniques schématiques que nous avons récapitulées, fournissent

$$r_G(\theta) = 2yd, \quad r_G(\theta_2) = 4y^2d \quad (4.30)$$

pour n'importe quel groupe simple de jauge, où y est le nombre de Coxeter dual et d la dimension du groupe. Une des conséquences de (4.30), ainsi que (4.4), est que le seul invariant perturbatif universel qui dépend d'un choix de 'framing' est $I_\theta(M)$. Sous un changement du 'framing' on a

$$I_\theta(M) \rightarrow I_\theta(M) - \frac{n}{48}, \quad (4.31)$$

alors que les autres invariants perturbatifs universels reste les mêmes.

On peut voir de l'évaluation des facteurs de groupe que l'expansion perturbative de l'énergie libre de la théorie de Chern-Simons autour de la connexion triviale peut être écrite sous la forme

$$F = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} x^{2g-2+h} N^h, \quad (4.32)$$

comme dans le cas des modèles matriciels. En fait, cette structure pour la fonction de partition est valable pour n'importe quelle théorie quantique contenant seulement des champs dans la représentation adjointe [10]. Comme on a fait pour les modèles matriciels, nous pouvons également réorganiser la série perturbative (4.32) pour qu'elle devienne similaire à (3.26). Le couplage de 't Hooft de la théorie de Chern-Simons est donné par

$$t = Nx, \quad (4.33)$$

et on peut définir la quantité $F_g(t)$ en effectuant la sommation sur tous les trous et on posant g fixe. Nous verrons plus tard dans cette section comment calculer les coefficients $F_{g,h}$ et la fonction $F_g(t)$ pour la théorie de Chern-Simons sur \mathbf{S}^3 .

4.2.3 Quantification canonique

Comme il a été montré par [4], la théorie de Chern-Simons est exactement soluble en utilisant des méthodes non-perturbatives et la relation avec le modèle de Wess-Zumino-Witten (WZW). Afin de présenter cette solution, il est commode de rappeler quelques faits de base sur la quantification canonique du modèle.

Soit M une variété de dimension trois avec bord donnée par une surface de Riemann Σ ,

$$\partial M = \Sigma.$$

On peut introduire un opérateur général \mathcal{O} dans M , qui peut être en général un produit des boucles de Wilson le long des différents noeuds et dans des représentations arbitraires du groupe de jauge. Nous considérerons le cas dans lequel les boucles de Wilson n'intersecte pas avec la surface Σ . L'intégrale de chemin sur M donne une fonction d'onde $\Psi_{M,\mathcal{O}}(A)$ qui est une fonctionnelle des valeurs du champ sur Σ . Schématiquement, nous avons :

$$\Psi_{M,\mathcal{O}}(A) = \langle A | \Psi_{M,\mathcal{O}} \rangle = \int_{A|\Sigma} [\mathcal{D}A] \mathcal{O} e^{iS}. \quad (4.34)$$

En fait, nous avons un espace de Hilbert $\mathcal{H}(\Sigma)$ associé à la surface de Riemann Σ , qui peut être obtenue en faisant la quantification canonique de la théorie de Chern-Simons sur $\Sigma \times \mathbf{R}$.

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

Dans le contexte de la quantification canonique, la fonction de partition peut être calculée comme suit. Nous appliquons d'abord le dédoublement de Heegaard de la variété 3-dimensionnelle, c'est-à-dire nous la représentons comme la somme connexe de deux variétés 3-dimensionnelles M_1 et M_2 partageant un bord commun Σ , où Σ est une surface de Riemann. Si $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est un homéomorphisme, nous écrirons

$$M = M_1 \cup_f M_2,$$

de sorte que M peut être obtenue en collant M_1 à M_2 par leur bord commun et en utilisant l'homéomorphisme f . Ceci est représenté dans la figure 4.13. Nous pouvons alors calculer l'intégrale de chemin (4.34) total sur M en calculant d'abord l'intégrale de chemin sur M_1 pour obtenir un état

$$|\Psi_{M_1}\rangle$$

dans $\mathcal{H}(\Sigma)$. Le bord de M_2 est aussi Σ , mais avec une orientation opposée, ainsi son espace de Hilbert est l'espace dual $\mathcal{H}^*(\Sigma)$. L'intégrale de chemin sur M_2 produit alors un état

$$\langle \Psi_{M_2} | \in \mathcal{H}^*(\Sigma).$$

L'homéomorphisme $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ sera représentée par un opérateur agissant sur $\mathcal{H}(\Sigma)$,

$$U_f : \mathcal{H}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}(\Sigma) \tag{4.35}$$

et la fonction de partition peut être finalement évaluée comme

$$Z(M) = \langle \Psi_{M_2} | U_f | \Psi_{M_1} \rangle. \tag{4.36}$$

Par conséquent, si nous connaissons les fonctions d'ondes et les opérateurs associés aux homéomorphismes, nous pouvons calculer la fonction de partition. Le résultat du calcul est indépendant du dédoublement de Heegaard de M . Un des résultats fondamentaux de [4] est la description pré-

FIG. 4.13 – *Dédoublement de Heegaard d'une variété trois-dimensionnelle M en deux variétés trois-dimensionnelles M_1 et M_2 avec un bord commun Σ .*

cise de $\mathcal{H}(\Sigma)$: C'est l'espace des blocs conformes du modèle WZW sur Σ avec le groupe de jauge G et le niveau k [49]. En particulier, $\mathcal{H}(\Sigma)$ a la dimension finie, mais ici on ne va pas s'intéresser à ce résultat.

Blocs conformes

La description de l'espace des blocs conforme sur des surfaces de Riemann peut être faite explicitement quand Σ est une sphère ou un tore. Pour $\Sigma = \mathbf{S}^2$, l'espace des blocs conforme est unidimensionnel, ainsi $\mathcal{H}(\mathbf{S}^2)$ est engendré par un seul élément. Pour $\Sigma = \mathbf{T}^2$, l'espace des blocs conformes est en correspondance linéaire avec les représentations intégrables de l'algèbre de Lie affine associée à G au niveau k .

Par la suite on va utiliser les notations suivantes : les poids fondamentaux de G seront dénotés par

$$\lambda_i \quad i = 1, \dots, r,$$

et les racines simples par

$$\alpha_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

où r dénote le rang de G . Les réseaux de poids et de racines de G sont dénotés respectivement par Λ^w et Λ^r , et $|\Delta_+|$ dénotent le nombre de racines positives. La chambre fondamentale 'chambre de Weyl' \mathcal{F}_l est donnée par

$$\Lambda^w / l\Lambda^r,$$

modulo l'action du groupe de Weyl. Pour le cas de $SU(N)$ par exemple, un poids

$$p = \sum_{i=1}^r p_i \lambda_i \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, r$$

est dans \mathcal{F}_l si

$$\sum_{i=1}^r p_i < l. \tag{4.37}$$

Rappelons qu'une représentation donnée par le plus haut poids Λ est intégrable si $\rho + \Lambda$ est dans la chambre fondamentale \mathcal{F}_l , où $l = k + y$ (ρ dénote le vecteur de Weyl, donné par la somme des poids fondamentaux). Par la suite, les états dans l'état de Hilbert du tore $\mathcal{H}(\mathbf{T}^2)$ seront dénotés par

$$|p\rangle = |\rho + \Lambda\rangle$$

où $\rho + \Lambda \in \mathcal{F}_l$, constituent une représentation intégrable du modèle de WZW au niveau k . Ces états seront aussi dénotés par $|R\rangle$, où R est la représentation associée à Λ . L'état $|\rho\rangle$ sera dénoté par $|0\rangle$. Les états $|R\rangle$ peuvent être choisis orthonormaux [4, 67, 68],

$$\langle R | R' \rangle = \delta_{RR'}. \tag{4.38}$$

Il y a une classe spéciale d'homéomorphismes de \mathbf{T}^2 qui s'expriment comme des opérateurs dans $\mathcal{H}(\mathbf{T}^2)$; ce sont les transformations de $SL(2, \mathbf{Z})$. Rappelons que le groupe $SL(2, \mathbf{Z})$ se compose de matrices 2×2 avec des entrées entières et de déterminant égal a 1. Si

$$(1, 0) \quad \text{et} \quad (0, 1)$$

dénotent les deux 1-cycles de \mathbf{T}^2 , on peut spécifier l'action d'une transformation $SL(2, \mathbf{Z})$ sur le tore en donnant son action sur cette base d'homologie. Le groupe $SL(2, \mathbf{Z})$ est généré par les transformations T et S qui sont données par

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

La transformation S échange les 1-cycles du tore. Ces transformations peuvent être prolongées à $\mathcal{H}(\mathbf{T}^2)$ et elles ont les éléments matriciels suivants dans la base des représentations intégrables :

$$\begin{aligned} T_{pp'} &= \delta_{p,p'} e^{2\pi i(h_p - c/24)}, \\ S_{pp'} &= \frac{i^{|\Delta_+|}}{(k+y)^{r/2}} \left(\frac{Vol\Lambda^w}{Vol\Lambda^r} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) \exp\left(-\frac{2\pi i}{k+y} p \cdot w(p')\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Dans la première équation, c est la charge centrale du modèle de WZW et h_p est le poids conforme du champ primaire associé à p :

$$h_p = \frac{p^2 - \rho^2}{2(k+y)}, \quad (4.41)$$

où p est de la forme $\rho + \Lambda$. Dans la deuxième équation de (4.40), la somme sur w est une somme sur les éléments du groupe de Weyl \mathcal{W} , $\epsilon(w)$ est la signature de l'élément w , et $Vol\Lambda^w$ ($Vol\Lambda^r$) dénotent, respectivement, le volume du réseau de poids (de racine). On écrit souvent $S_{RR'}$ pour $S_{pp'}$, où $p = \rho + \Lambda$, $p' = \rho + \Lambda'$ et Λ, Λ' sont les plus hauts poids correspondant aux représentations R, R' .

Description des états $|R\rangle$ dans $H(\mathbf{T}^2)$

Considérons le tore solide $\mathcal{T} = D \times \mathbf{S}^1$, où D est un disque dans \mathbf{R}^2 . C'est une variété de dimension trois dont le bord est un tore \mathbf{T}^2 , et qui a un cycle non contractible donné par \mathbf{S}^1 . L'intégrale de chemin de Chern-Simons sur ce tore solide, avec l'insertion de l'opérateur

$$\mathcal{O}_R = Tr_R U$$

donnée par une boucle de Wilson dans la représentation R autour du cycle non contractible, comme dans la figure 4.14. De cette façon, on obtient un état dans $\mathcal{H}(\mathbf{T}^2)$, et on a

$$|\Psi_{\mathcal{T}, \mathcal{O}_R}\rangle = |R\rangle. \quad (4.42)$$

En particulier, l'intégrale de chemin sur le tore solide sans l'insertion d'opérateur donne l'état de 'vide' $|0\rangle$. Ces résultats nous permettent de calculer la fonction de partition de n'importe

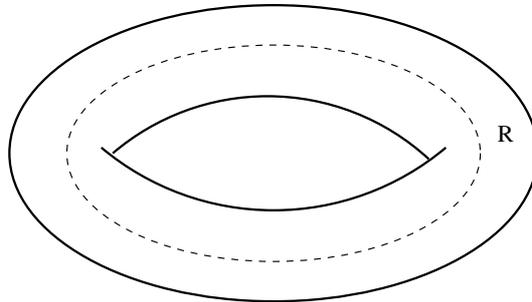


FIG. 4.14 – Application de l'intégrale de chemin sur un tore solide avec une ligne de Wilson dans la représentation R donne l'état $|R\rangle$ dans $\mathcal{H}(\mathbf{T}^2)$.

quelle variété tridimensionnelle qui admet un dédoublement de Heegaard le long d'un tore. Par exemple, si on prend deux tores solides et nous les collons le long de leur bord par le biais de la

transformation identité. Puisqu'un tore solide est le produit d'un disque par un cercle, $D \times \mathbf{S}^1$, en effectuant cette opération nous obtenons une variété qui est le produit de \mathbf{S}^1 par les deux disques collés le long de leurs bords. Par conséquent, cette opération mène à la variété $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$, et (4.36) donne alors

$$Z(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1) = \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (4.43)$$

Cependant, si on fait le collage, après une S -transformation appliquée sur le \mathbf{T}^2 la variété résultante est \mathbf{S}^3 . Pour voir ceci, notons que le complément d'un tore solide à l'intérieur de \mathbf{S}^3 est en effet un autre tore solide dont le cycle non-contractible est homologue au cycle contractible dans le premier tore. On trouve alors

$$Z(\mathbf{S}^3) = \langle 0 | S | 0 \rangle = S_{00}. \quad (4.44)$$

En utilisant la formule du dénominateur de Weyl,

$$\sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) e^{w(\rho)} = \prod_{\alpha > 0} 2 \sin h \frac{\alpha}{2}, \quad (4.45)$$

où $\alpha > 0$ sont des racines positives, on trouve

$$Z(\mathbf{S}^3) = \frac{1}{(k+y)^{r/2}} \left(\frac{\text{Vol} \Lambda^w}{\text{Vol} \Lambda^r} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha > 0} 2 \sin \left(\frac{\pi(\alpha \cdot \rho)}{k+y} \right). \quad (4.46)$$

Ce résultat peut être généralisé afin de calculer des intégrales de chemin dans \mathbf{S}^3 avec des noeuds et entrelacs.

Considérons un tore solide où une ligne de Wilson dans la représentation R a été insérée. L'état correspondant est $|R\rangle$, comme nous l'avons expliqué auparavant. Si nous le collons à un autre tore solide vide après une S -transformation, nous obtenons un noeud trivial, ou *dénoué*, dans \mathbf{S}^3 . L'intégrale de chemin avec l'insertion est alors,

$$Z_R = \langle 0 | S | R \rangle. \quad (4.47)$$

Il s'ensuit que la valeur moyenne dans le vide normalisée pour le dénoué dans \mathbf{S}^3 , dans la représentation R est donnée par

$$W_R(\text{dénoué}) = \frac{S_{0R}}{S_{00}} = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) e^{-\frac{2\pi i}{k+y} \rho \cdot w(\Lambda + \rho)}}{\sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) e^{-\frac{2\pi i}{k+y} \rho \cdot w(\rho)}}. \quad (4.48)$$

Cette expression s'écrit également en termes des caractères du groupe G . Rappelons que le caractère de la représentation R , évalué sur un élément $a \in \Lambda^w \otimes \mathbf{R}$ est défini par

$$ch_R(a) = \sum_{\mu \in M_R} e^{a \cdot \mu}, \quad (4.49)$$

où M_R est l'ensemble de poids associés à la représentation irréductible R . En utilisant la formule de caractère de Weyl, nous avons

$$W_R(\text{dénoué}) = ch_R \left(-\frac{2\pi i}{k+y} \rho \right). \quad (4.50)$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

De plus, en utilisant (4.45), on obtient

$$W_R(\text{dénoué}) = \prod_{\alpha > 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{k+y}\alpha \cdot (\Lambda + \rho)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{k+y}\alpha \cdot \rho\right)} \right). \quad (4.51)$$

Cette quantité est souvent appelée la *dimension quantique* de R et elle est dénotée $\dim_q R$.

On peut aussi considérer un tore solide avec une boucle de Wilson dans la représentation R , collée à un autre tore solide avec la représentation R' par une transformation S . On obtient un entrelacs dans \mathbf{S}^3 avec deux composantes, qui est l'entrelacs de Hopf montré dans la figure 4.1. Tenant compte de l'orientation, nous constatons que c'est l'entrelacs de Hopf avec le nombre d'entrelacement $+1$. L'intégrale de chemin avec cette insertion est :

$$Z_{RR'} = \langle R' | S | R \rangle, \quad (4.52)$$

ainsi la valeur moyenne dans le vide normalisée est

$$\mathcal{W}_{RR'} \equiv W_{RR'}(\text{Hopf}^{+1}) = \frac{S_{\bar{R}'R}}{S_{00}} = \frac{S_{R'R}^{-1}}{S_{00}}, \quad (4.53)$$

où l'indice $+1$ se réfère au nombre d'entrelacement. Ici, nous avons utilisé le fait que les bras $\langle R |$ sont canoniquement associés aux représentations conjuguées \bar{R} , et que $S_{\bar{R}'R} = S_{R'R}^{-1}$ [49]. Par conséquent, l'invariance de Chern-Simons d'entrelacs de Hopf est essentiellement un élément de la matrice S . Afin d'obtenir l'invariance d'entrelacs de Hopf avec le nombre d'entrelacement -1 , notons que les deux entrelacs de Hopf peuvent être reliés en changeant l'orientation d'un des composants. On a alors

$$W_{RR'}(\text{Hopf}^{-1}) = \frac{S_{R'R}}{S_{00}}, \quad (4.54)$$

où nous avons utilisé la propriété (4.11).

Quand $G = U(N)$, les sus-dites valeurs moyennes dans le vide pour les dénoués et les entrelacs de Hopf sont évalués en termes du polynômes de Schur. Il est bien connu que le caractère du groupe unitaire dans la représentation R est donné par le polynôme de Schur S_R [69]. Il y a une relation entre l'élément a sur lequel on évalue le caractère dans (4.49) et les variables entrant du polynôme de Schur. Soit

$$\mu_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

les poids associés à la représentation fondamentale de $U(N)$. Si R est donné par un tableau de Young dont les lignes ont les longueurs $l_1 \geq \dots \geq l_N$, alors $\Lambda_R = \sum_i l_i \mu_i$. On a aussi

$$\rho = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (N - 2i + 1) \mu_i. \quad (4.55)$$

Soit $a \in \Lambda^w \otimes \mathbf{R}$ qui s'exprime comme suit

$$a = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i. \quad (4.56)$$

Alors,

$$ch_R [a] = s_R (x_i = e^{a_i}). \quad (4.57)$$

Par exemple, dans le cas de dimension quantique, on a $\dim_q R = \dim_q \overline{R}$, et on trouve

$$\dim_q R = s_R \left(x_i = q^{\frac{1}{2}(N-2i+1)} \right), \quad (4.58)$$

où q est donné dans (4.13). En utilisant le fait que s_R est homogène en x_i de degré $l(R)$, on obtient finalement l'expression

$$\dim_q R = \lambda^{l(R)/2} s_R \left(x_i = q^{-i+\frac{1}{2}} \right)$$

pour N variables x_i où $\lambda = q^N$ est comme (4.13). La dimension quantique s'écrit en termes des q -nombres :

$$[a] = q^{\frac{a}{2}} - q^{-\frac{a}{2}}, \quad [a]_\lambda = \lambda^{\frac{1}{2}} q^{\frac{a}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{a}{2}}. \quad (4.59)$$

Si R correspond à un tableau de Young avec c_R ligne de longueurs l_i , $i = 1, \dots, c_R$, la dimension quantique est donnée par :

$$\dim_q R = \prod_{1 \leq i < j \leq c_R} \frac{[l_i - l_j + j - i]}{[j - i]} \prod_{i=1}^{c_R} \frac{\prod_{v=-i+1}^{l_i-i} [v]_\lambda}{\prod_{v=1}^{l_i} [v - i + c_R]}. \quad (4.60)$$

On peut vérifier que dans la limite $k+N \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire à la limite semi-classique) la dimension quantique devient la dimension de la représentation R . Notons que la dimension quantique est une fonction rationnelle de $q^{\pm\frac{1}{2}}$, $\lambda^{\pm\frac{1}{2}}$. C'est une propriété générale de toutes les valeurs moyennes dans le vide normalisées des noeuds et des entrelacs dans \mathbf{S}^3 .

Les éléments de la matrice S qui apparaissent dans (4.53) et (4.54) peuvent être évalués par l'expression (4.40), en utilisant la relation entre les caractères de $U(N)$ et les fonctions de Schur. Notons d'abord que

$$\frac{S_{R_1 R_2}^{-1}}{S_{00}} = ch_{R_1} \left[\frac{2\pi i}{k+y} (\Lambda_{R_2} + \rho) \right] ch_{R_2} \left[\frac{2\pi i}{k+y} \rho \right]. \quad (4.61)$$

Si $l_i^{R_2}$, $i = 1, \dots, c_{R_2}$ dénote les longueurs des lignes du tableau de Young correspondant à R_2 , alors

$$\mathcal{W}_{R_1 R_2}(q, \lambda) = (\lambda q)^{\frac{l(R_1)}{2}} s_{R_1} \left(x_i = q^{l_i^{R_2} - i} \right) \dim_q R_2, \quad (4.62)$$

où $l_i^{R_2} = 0$ pour $i > c_{R_2}$. Une façon commode d'évaluer

$$s_{R_1} \left(x_i = q^{l_i^R - i} \right)$$

pour une partition

$$\{l_i^R\}_{\{i=1, \dots, c_R\}}$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

associée à R revient à utiliser la formule de Jacobi-Trudi (6.98). On peut montrer que les fonctions symétriques élémentaires (6.94) sont donnée par

$$E_R(t) = E_{\emptyset}(t) \prod_{j=1}^{c_R} \frac{1 + q^{l_j^R - j} t}{1 + q^{-j} t}, \quad (4.63)$$

où

$$E_{\emptyset}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \quad (4.64)$$

et les coefficients a_n sont définis par

$$a_n = \prod_{r=1}^n \frac{1 - \lambda^{-1} q^{r-1}}{q^r - 1}. \quad (4.65)$$

La formule (4.62) ainsi que (4.63) fournissent une expression explicite pour (4.53) comme fonction rationnelle de $q^{\pm \frac{1}{2}}, \lambda^{\pm \frac{1}{2}}$ [70].

Les techniques de ‘chirurgie’ permettent aussi d’évaluer la fonction de partition de la théorie de Chern-Simons sur n’importe quelle variété M d’une façon purement combinatoire, en termes des invariants d’entrelacs dans \mathbf{S}^3 . Par le théorème de Lickorish [51], n’importe quelle variété trois dimensionnelle M peut être obtenue par ‘chirurgie’ sur un entrelacs \mathcal{L} dans \mathbf{S}^3 . \mathcal{K}_i $i = \dots, L$, dénote les composants de \mathcal{L} . L’opération de chirurgie signifie qu’autour de chacun des noeuds \mathcal{K}_i nous prenons un voisinage tubulaire

$$Tub(\mathcal{K}_i)$$

que nous enlevons de \mathbf{S}^3 . Ce voisinage tubulaire est un tore solide avec un cycle contractible α_i et un cycle non-contractible β_i . Nous collons alors les tores solides après l’application d’une transformation $SL(2, \mathbf{Z})$ donnée par la matrice

$$U^{(p_i, q_i)} = \begin{pmatrix} p_i & r_i \\ q_i & s_i \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Ceci signifie que les cycles

$$p_i \alpha_i + q_i \beta_i \quad \text{et} \quad r_i \alpha_i + s_i \beta_i$$

sur le bord du complément de \mathcal{K}_i sont identifiés avec les cycles α_i, β_i dans $Tub(\mathcal{K}_i)$. Dans le cas des groupes de jauge simplement lacés, la transformation $SL(2, \mathbf{Z})$ donnée par $U^{(p, q)}$ a les éléments matriciels suivants dans la susdite base [59, 71] :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\alpha\beta}^{(p, q)} &= \frac{[i \operatorname{signe}(q)]^{|\Delta|+1}}{(l|q|)^{r/2}} \exp \left[-\frac{id\pi}{12} \Phi \left(U^{(p, q)} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Vol} \Lambda^w}{\operatorname{Vol} \Lambda^r} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \sum_{n \in \Lambda^r / q \Lambda^r} \sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) \exp \frac{i\pi}{lq} \left\{ p\alpha^2 - 2\alpha(ln + w(\beta)) + s(ln + w(\beta))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Dans cette équation, $\Phi(U^{(p, q)})$ est la fonction de Rademacher :

$$\Phi \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \frac{p+s}{q} - 12s(p, q), \quad (4.68)$$

où $s(p, q)$ est la somme de Dedekind

$$s(p, q) = \frac{1}{4q} \sum_{n=1}^{q-1} \cot\left(\frac{\pi n}{q}\right) \cot\left(\frac{\pi np}{q}\right). \quad (4.69)$$

Avec ces données nous pouvons déjà présenter le résultat de Witten pour la fonction de partition de Chern-Simons de M . Comme auparavant, on suppose que M est obtenu en effectuant une ‘chirurgie’ sur un entrelacs \mathcal{L} dans \mathbf{S}^3 . On dénote par

$$|0, \dots, 0\rangle \in \mathcal{H}(\mathbf{T}^2)^{\otimes L} \quad (4.70)$$

l’état correspondant aux voisinages tubulaires liés qui sont obtenus après l’enlèvement des L composants d’entrelacs. Le 0 dans chaque composant d’entrelacs indique qu’ils sont dans la représentation triviale. L’état correspondant à l’espace complémentaire dans \mathbf{S}^3 sera dénoté par $\langle\psi|$. Si en tenant compte des lignes de Wilson dans des représentations R_1, \dots, R_L le long des cycles non-contractibles des tores, on obtient l’entrelacs invariant (non normalisé) de Chern-Simons de \mathcal{L} dans des représentations R_1, \dots, R_L . En d’autres termes,

$$\langle\psi| R_1, \dots, R_L\rangle = Z_{R_1, \dots, R_L}(\mathcal{L}). \quad (4.71)$$

Si nous collons les tores après exécution de la transformation $U^{(p_i, q_i)}$ de $SL(2, \mathbf{Z})$ sur chaque tore, $i = 1, \dots, L$, la fonction de partition de la théorie de Chern-Simons sur la variété trois dimensionnelle résultante est donnée par

$$\langle\psi| \prod_{i=1}^L \mathcal{U}^{(p_i, q_i)} |0, \dots, 0\rangle. \quad (4.72)$$

Mais

$$\prod_{i=1}^L \mathcal{U}^{(p_i, q_i)} |0, \dots, 0\rangle = \sum_{R_1, \dots, R_L \in \mathcal{F}_i} \prod_{i=1}^L \mathcal{U}^{(p_i, q_i)} |R_1, \dots, R_L\rangle,$$

donc la fonction de partition sur M est

$$Z(M) = e^{i\phi_{fr}} \sum_{R_1, \dots, R_L \in \mathcal{F}_i} \prod_{i=1}^L \mathcal{U}_{R_i 0}^{(p_i, q_i)} Z_{R_1, \dots, R_L}(\mathcal{L}). \quad (4.73)$$

Le facteur de phase $e^{i\phi_{fr}}$ est une correction ‘framing’ qui garantit que le résultant invariant est dans le ‘framing’ canonique pour la variété trois dimensionnelle M . Son expression explicite est [59] :

$$\phi_{fr} = \frac{\pi kd}{12l} \left(\sum_{i=1}^L \Phi(U^{(p_i, q_i)}) - 3\sigma(\mathcal{L}) \right), \quad (4.74)$$

où $\sigma(\mathcal{L})$ est la signature de la matrice d’entrelacement de \mathcal{L} (dont les entrées sont les nombres d’entrelacement de différents composants de \mathcal{L}). De ce fait, le calcul des invariants de Chern-Simons des variétés arbitraires peut être réduit au calcul des invariants l’entrelacs dans \mathbf{S}^3 .

4.2.4 Dépendance en ‘framing’

Dans l’analyse ci-dessus concernant les fonctions de corrélation des boucles de Wilson nous avons mentionné que, afin de définir la fonction de partition de la théorie de Chern-Simons au niveau quantique, on doit spécifier un ‘framing’ de la variété de dimension trois. Il s’avère que l’évaluation des fonctions de corrélation comme (4.10) implique également un choix de ‘framing’ des noeuds [4].

Cas abélien : Pour bien illustrer la notion de ‘framing’ on considère l’exemple de la théorie Chern-Simons avec le groupe de jauge $U(1)$. Cette théorie abélienne de Chern-Simons s’avère être simple, puisque le terme cubique dans (4.1) s’annule, et la théorie devient gaussienne [72]. Les représentations $U(1)$ sont indexés par des nombres entiers, et la fonction de corrélation (4.10) peut être calculée exactement. Cependant, on doit choisir un ‘framing’ pour chacun des noeuds \mathcal{K}_α . Cela surgit comme suit :

Dans l’évaluation de la fonction de corrélation, les contractions des holonomies correspondantes au différents \mathcal{K}_α produisent l’intégrale suivante :

$$lk(\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{K}_\alpha} dx^\mu \oint_{\mathcal{K}_\beta} dy^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3}. \quad (4.75)$$

C’est un invariant topologique, c’est-à-dire que $lk(\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta)$ est invariant sous les déformations des noeuds $\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta$. Cette relation est la représentation intégrale de Gauss de leur nombre d’entrelacement $lk(\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\beta)$ défini dans (4.6). D’une part, les contractions des holonomies correspondant au même noeud \mathcal{K} impliquent l’intégrale

$$\phi(\mathcal{K}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{K}} dx^\mu \oint_{\mathcal{K}} dy^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3}. \quad (4.76)$$

Cette intégrale qui est bien défini et fini [65], est appelé la *cotorsion de \mathcal{K}* . Elle donne le nombre d’auto-entrelacement de \mathcal{K} : Si on projette \mathcal{K} sur un plan et on dénote par

$$n_\pm(\mathcal{K}),$$

le nombre de croisements positifs (négatifs) comme il est indiqué dans la figure 4.4, alors on aura

$$\phi(\mathcal{K}) = n_+(\mathcal{K}) - n_-(\mathcal{K}). \quad (4.77)$$

Cependant le fait que la cotorsion n’est pas invariante par les déformations du noeud constitue un problème. Pour préserver l’invariance topologique de la fonction de corrélation, on doit choisir une autre définition de l’opérateur composé

$$(\oint_{\mathcal{K}} A)^2,$$

par le biais d’un ‘framing’. Un ‘framing’ du noeud consiste à choisir un autre noeud \mathcal{K}^f autour de \mathcal{K} , indiqué par un champ vectoriel normal n . La cotorsion $\phi(\mathcal{K})$ devient alors

$$\phi_f(\mathcal{K}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{K}} dx^\mu \oint_{\mathcal{K}^f} dy^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3} = lk(\mathcal{K}, \mathcal{K}^f). \quad (4.78)$$

La fonction de corrélation que nous obtenons de cette façon est un invariant topologique puisqu’elle implique seulement les nombres d’entrelacement. Mais le prix à payer est que notre régularisation dépend d’un ensemble d’entiers

$$p_\alpha = lk(\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha^f)$$

(un pour chaque noeud). La fonction de corrélation (4.10) peut être calculée, après le choix des framings, comme suit :

$$\left\langle \prod_{\alpha} \exp \left(n_{\alpha} \oint_{\mathcal{K}_{\alpha}} A \right) \right\rangle = \exp \left\{ \frac{\pi i}{k} \left(\sum_{\alpha} n_{\alpha}^2 p_{\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta} n_{\alpha} n_{\beta} lk(\mathcal{K}_{\alpha}, \mathcal{K}_{\beta}) \right) \right\}. \quad (4.79)$$

Cette régularisation est simplement la méthode de séparation de points ‘point-splitting’ familier dans le contexte de la théorie des champs quantique.

Cas non abélien : Considérons maintenant la théorie de Chern-Simons avec le groupe de Jauge $U(N)$, et fixons notre intérêt sur le calcul de (4.10) dans le contexte de la théorie de perturbation. Il est facile de constater que les auto-contractions des holonomies mènent au même genre d’ambiguïtés que nous avons trouvées dans le cas Abélien, c’est-à-dire un choix de ‘framing’ doit être fait pour chaque noeud \mathcal{K}_{α} . La seule différence avec le cas abélien est que l’auto-contraction de \mathcal{K}_{α} donne un facteur de groupe

$$Tr_{R_{\alpha}}(T_a T_a),$$

où T_a est une base de l’algèbre de Lie [65]. Le résultat est interprété comme l’effet sur la fonction de corrélation (4.10) sous un changement de ‘framing’, et énonce que, sous un changement de ‘framing’ de \mathcal{K}_{α} par des unités de P_{α} , la valeur moyenne dans le vide du produit des boucles de Wilson change comme suit [4] :

$$W_{R_1 \dots R_L} \rightarrow \exp \left[2\pi i \sum_{\alpha=1}^L p_{\alpha} h_{R_{\alpha}} \right] W_{R_1 \dots R_L}. \quad (4.80)$$

Dans cette équation, h_R est le poids conforme du champ primaire de WZW correspondant à la représentation R . L’éq (4.41) prend la forme

$$h_R = \frac{C_R}{2(k+N)}, \quad (4.81)$$

où $C_R = Tr_R(T_a T_a)$ est le Casimir quadratique dans la représentation R . Pour le groupe $U(N)$ on a

$$C_R = Nl(R) + \kappa_R, \quad (4.82)$$

où $l(R)$ est le nombre total de boîtes dans le tableau et

$$\kappa_R = l(R) + \sum_i (l_i^2 - 2il_i). \quad (4.83)$$

En termes des variables (4.13) le changement sous ‘framing’ (4.80) s’écrit comme

$$W_{R_1 \dots R_L} \rightarrow q^{\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^L \kappa_{R_{\alpha}} p_{\alpha}} \lambda^{\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^L l(R_{\alpha}) p_{\alpha}} W_{R_1 \dots R_L}. \quad (4.84)$$

Par conséquent, l’évaluation des valeurs moyennes dans le vide des opérateurs de boucle de Wilson dans la théorie de Chern-Simons dépend d’un choix de ‘framing’ pour des noeuds.

Il s’ensuit que pour des noeuds et des entrelacs dans \mathbf{S}^3 , il y a un ‘framing’ canonique ou *standard*, défini en exigeant que le nombre d’auto-entrelacement est zéro. Les expressions que nous avons données auparavant pour l’invariant de Chern-Simons du noeud trivial et l’entrelacs de Hopf sont tous dans le ‘framing’ standard. Une fois la valeur de l’invariant est connue dans le ‘framing’ standard, la valeur dans n’importe quel autre ‘framing’ indiqué par des nombres entiers p_{α} différents de zéro est facilement obtenu à partir de (4.80).

4.3 Boucles de Wilson et des invariants de noeud : Des Résultats

Dans cette section, nous discutons quelques résultats utiles pour le calcul des valeurs moyennes dans le vide des boucles de Wilson. Nous énonçons d'abord quelques propriétés générales pour donner par la suite des résultats concrets pour les noeuds et les entrelacs particuliers [73].

4.3.1 Propriétés générales

(1) *Factorisation* : La première propriété que nous énonçons est la *propriété de factorisation* pour les valeurs moyennes dans le vide des *entrelacs disjoints*, qui indique que pour un entrelacs \mathcal{L} avec L composants $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_L$ qui sont des noeuds disjoints, où la représentation R_α est attachée au α -ème composante, nous avons

$$W_{R_1 \dots R_L}(\mathcal{L}) = \prod_{\alpha=1}^L W_{R_\alpha}(\mathcal{K}_\alpha). \quad (4.85)$$

Cette propriété implique seulement quelques arguments de chirurgie élémentaires et le fait que $\mathcal{H}(\mathbf{S}^2)$ est unidimensionnel [4].

(2) *Parité* Π : La deuxième propriété que nous considérerons est la *symétrie de parité*. La théorie de Chern-Simons est une théorie de entrelacs orientés, et sous une transformation de parité un entrelacs \mathcal{L} se transformera en son miroir \mathcal{L}^*

$$\Pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^*.$$

Le miroir de \mathcal{L} est obtenu à partir de sa projection plate en changeant des sous-croisements par des sur-croisements, et vice-versa. D'une part, la parité change le signe de l'action de Chern-Simons, en d'autres termes

$$\Pi : (k + N) \rightarrow -(k + N).$$

Nous constatons alors que les valeurs moyennes dans le vide se transforment comme

$$W_{R_1 \dots R_L}(\mathcal{L}^*)(q, \lambda) = W_{R_1 \dots R_L}(\mathcal{L})(q^{-1}, \lambda^{-1}). \quad (4.86)$$

Du point de vue théorie des noeud, ce résultat est important puisqu'il implique que les invariants de Chern-Simons des entrelacs permettent en principe de distinguer un entrelacs de son image miroir. Notons par exemple que le noeud trivial est identique à son image miroir, donc les dimensions quantiques satisfont

$$(\dim_q R)(q^{-1}, \lambda^{-1}) = (\dim_q R)(q, \lambda). \quad (4.87)$$

(3) *Règle de fusion* : A ce niveau, on traite l'exemple le plus simple d'une *règle de fusion* dans la théorie de Chern-Simons. Considérons une valeur moyenne dans le vide de la forme

$$\langle \text{Tr}_{R_1}(U) \text{Tr}_{R_2}(U) \rangle, \quad (4.88)$$

où U est l'holonomie du champ de jauge autour d'un noeud \mathcal{K} . L'opérateur classique $\text{Tr}_{R_1}(U) \text{Tr}_{R_2}(U)$ s'écrit comme

$$\text{Tr}_{R_1}(U) \text{Tr}_{R_2}(U) = \text{Tr}_{R_1 \otimes R_2}(U) = \sum_R N_{R_1 R_2}^R \text{Tr}_R(U), \quad (4.89)$$

4.3 Boucles de Wilson et des invariants de noeud : Des Résultats

où $R_1 \otimes R_2$ dénote le produit tensoriel et $N_{R_1 R_2}^R$ sont les coefficients de produit tenseurs. Dans la théorie de Chern-Simons, les opérateurs de boucle de Wilson quantique satisfont une relation très semblable à la seule différence que les coefficients $N_{R_1 R_2}^R$ deviennent les coefficients de fusion pour les représentations intégrables du modèle de WZW. Ceci se comprend facilement en sachant que les représentations admissibles qui apparaissent dans la théorie sont les intégrables. Ainsi on doit tronquer la liste de représentations ‘classiques’, et ceci implique en particulier que les règles de produit des traces classiques doivent être modifiées. Cependant, dans le calcul des noeuds invariants dans la théorie de Chern-Simons $U(N)$ il est normal de travailler dans un ensemble dans lequel k et N sont beaucoup plus grands que n’importe quelle représentation impliquée. Dans ce cas, les valeurs moyennes dans le vide de la théorie satisfont

$$\langle Tr_{R_1}(U) Tr_{R_2}(U) \rangle = \sum_R N_{R_1 R_2}^R \langle Tr_R(U) \rangle, \quad (4.90)$$

où $N_{R_1 R_2}^R$ sont les coefficients de Littlewood-Richardson $U(N)$.

Comme application simple de la règle de fusion, imaginons que nous voulons calculer

$$\langle Tr_{R_1}(U_1) Tr_{R_2}(U_2) \rangle,$$

où $U_{1,2}$ sont les holonomies autour des noeuds triviaux disjoints avec zéro ‘framing’. On peut étudier ces noeuds triviaux de près, de telle manière que les chemins le long desquels on calcule l’holonomie sont les mêmes. Dans ce cas, cette valeur moyenne dans le vide devient exactement (4.90). En utilisant également la propriété de factorisation (4.85), nous déduisons la règle de fusion suivante :

$$\dim_q R_1 \dim_q R_2 = \sum_R N_{R_1 R_2}^R \dim_q R. \quad (4.91)$$

(4) *Somme directe* $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$: Une autre propriété importante est le comportement des fonctions de corrélation sous la *somme directe*. Cette opération est définie comme suit. Considérons deux entrelacs \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 avec les composants $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}$, respectivement, c’est-à-dire la composante de noeud \mathcal{K} est la même dans \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 . La somme directe

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$$

qui est un entrelacs de trois composantes, est obtenue en joignant \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 par \mathcal{K} . On peut démontrer que l’invariant de Chern-Simons de \mathcal{L} est donné par [4]

$$W_{R_1 R_2 R}(\mathcal{L}) = \frac{W_{R_1 R}(\mathcal{L}_1) W_{R_2 R}(\mathcal{L}_2)}{W_R(\mathcal{K})}. \quad (4.92)$$

Comme application de cette règle, on considère l’entrelacs de trois composantes comme dans la figure 4.15. Cet entrelacs est une somme directe de deux entrelacs de Hopf dont le composant commun est un noeud trivial dans la représentation R , et les noeuds $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ sont des noeuds triviaux dans les représentations R_1, R_2 . L’équation (4.92) exprime l’invariant de Chern-Simons de \mathcal{L} en termes d’invariants des entrelacs de Hopf et des dimensions quantiques. L’invariant d’entrelacs dans la figure 4.15 se calcule également en employant les règles de fusion. Si on fusionne les deux noeuds triviaux parallèles avec des représentations R_1, R_2 , on trouve

$$W_{R_1 R_2 R}(\mathcal{L}) = \sum_{R'} N_{R_1 R_2}^{R'} \langle Tr_{R'}(U') Tr_R(U) \rangle, \quad (4.93)$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

où U est l'holonomie autour du noeud trivial dans la représentation R et U' est l'holonomie autour du noeud trivial qui est obtenu en fusionnant les deux noeuds triviaux parallèles comme dans la figure 4.15. L'équation (4.93) exprime l'invariant (4.92) en termes d'invariants d'entrelacs de Hopf avec les représentations R', R .

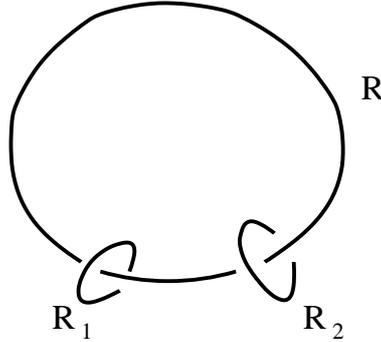


FIG. 4.15 – un'entrelac avec deux dénoue disjoint

(5) *Règles de 'skein'* : Ces règles donnent des relations entre les valeurs moyennes dans le vide des boucles de Wilson. La forme de ces relations dépend du choix de la représentation du groupe. Le cas le plus simple correspond à $G = U(N)$ avec toutes les représentations étant fondamentales. Dans ce cas, la relation de 'skein' est réalisée comme suit :

Soit un'entrelacs \mathcal{L} dans \mathbf{S}^3 , et concentrons-nous sur un des croisements dans sa projection plate. Le croisement peut être un surcroisement, comme celui représenté en L_+ dans la figure 4.16, ou un souscroisement, comme celui représenté dans L_- . Si le croisement est L_+ , on peut former deux autres entrelacs, soit en détruisant le croisement (et produisant L_0 de la figure 4.16), soit en changeant L_+ en L_- . Dans les deux cas le reste d'entrelacs reste inchangé.

De même, si le croisement est L_- , nous formons deux entrelacs en changeant L_- en L_+ ou en L_0 .

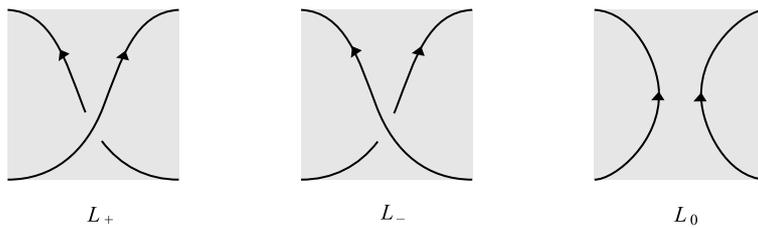


FIG. 4.16 – Relations de 'Skein' pour le polynôme de HOMFLY

Les entrelacs produits de cette façon seront en général topologiquement inéquivalents aux originaux (ils peuvent même avoir un nombre différent de composants). La relation de 'skein' indique que

$$\lambda^{\frac{1}{2}} W_{\square, \dots, \square}(L_+) - \lambda^{-\frac{1}{2}} W_{\square, \dots, \square}(L_-) = \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} \right) W_{\square, \dots, \square}(L_0) \quad (4.94)$$

et exprime l'invariant de Chern-Simons d'entrelacs original en termes des entrelacs qui sont obtenus en changeant le croisement. En utilisant cette relation récursivement, on peut détruire tous les croisements dans l'entrelacs original et exprimer $W_{\square, \dots, \square}(\mathcal{L})$ en termes de l'invariant de Chern-Simons du noeud trivial dans la représentation fondamentale.

Finalement, il faut mentionner que les invariants d'entrelacs de la théorie de Chern-Simons ne distinguent pas tous les entrelacs possibles. En particulier, ils ne distinguent pas topologiquement les entrelacs inéquivalents qui peuvent être reliés par l'opération de *mutation* [74].

4.3.2 Noeuds des tores

Bien que la théorie de Chern-Simons est exactement soluble, en pratique le calcul des valeurs moyennes dans le vide pour des noeuds et des entrelacs est compliqué. Pour la représentation fondamentale, la relation de 'skein' (4.94) donne, en principe, la réponse finale après plusieurs étapes. Toutefois cette procédure devient encombrante si le nombre d'étapes devient très grand. D'une manière primordiale, bien qu'on puisse écrire les relations de 'skein' pour des représentations arbitraires, elles ne déterminent pas uniquement la valeur des invariants, ainsi il est nécessaire de faire recours à d'autres techniques.

Le formalisme des opérateurs de noeud est un cadre particulièrement utile dans le calcul des invariants de noeud [75]. Dans ce formalisme, on construit les opérateurs qui 'créent' des noeuds enroulés autour d'une surface de Riemann dans la représentation R du groupe de jauge associé au plus haut poids Λ :

$$W_{\Lambda}^{\mathcal{K}} \mathcal{H}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}(\Sigma). \tag{4.95}$$

Notons que la topologie de Σ limite le type de noeuds considéré. Jusqu'ici, ces opérateurs ont été construits seulement dans le cas où

$$\Sigma = \mathbf{T}^2.$$

Les noeuds qui peuvent être mis sur la surface d'un tore sont appelés *noeuds des tores*, et ils sont indexés par deux nombres entiers copremiers (n, m) qui indiquent le nombre de fois qu'ils enveloppent les deux cycles des tores. Ici, n est le nombre d'enroulement autour du cycle non-contractible des tores solides, alors que m se réfère au contractible. Le noeud du trèfle

$$3_1$$

dans la figure 4.1 n'est autre que le noeud $(2, 3)$ du tore, et le noeud

$$5_1$$

est le noeud $(2, 5)$ du tore. L'opérateur qui crée le noeud (n, m) des tores dans la représentation associée à Λ sera dénoté par $W_{\Lambda}^{(n,m)}$ [75], et son expression est :

$$W_{\Lambda}^{(n,m)} |p\rangle = e^{2\pi i n m h_{\rho+\Lambda}} \sum_{\mu \in M_{\Lambda}} \exp \left[i\pi \mu^2 \frac{nm}{k+N} + 2\pi i \frac{m}{k+N} p \cdot \mu \right] |p + n\mu\rangle. \tag{4.96}$$

Dans cette équation, $|p\rangle$ est un état arbitraire dans $\mathcal{H}(\mathbf{T}^2)$, et M_{Λ} est l'ensemble de poids correspondant à la représentation irréductible avec le plus haut poids Λ . Le facteur impliquant le poids conforme $h_{\rho+\Lambda}$ est introduit afin d'obtenir l'invariance dans le 'framing' standard. L'équation (4.96) permet de calculer la valeur moyenne dans le vide de la boucle de Wilson autour d'un noeud de tore dans \mathbf{S}^3 comme suit :

- D'abord, on fait un dédoublement de Heegaard de \mathbf{S}^3 en deux tores solides, comme expliqué auparavant.

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

- Puis, on met le noeud du tore sur la surface d'un des tores solides en agissant avec l'opérateur de noeud (4.96) sur l'état de vide $|\rho\rangle$.
- Finalement, on colle ensemble les tores en exécutant une transformation- S . La valeur moyenne dans le vide normalisée de la boucle de Wilson est alors donnée par :

$$\left\langle W_{\Lambda}^{(n,m)} \right\rangle = \frac{\langle \rho | W_{\Lambda}^{(n,m)} | \rho \rangle}{\langle \rho | S | \rho \rangle}. \quad (4.97)$$

On peut écrire (4.97) d'une manière plus compacte comme suit. Quand l'opérateur $W_{\Lambda}^{(n,m)}$ agit sur l'état de vide $|\rho\rangle$, (4.96) est une combinaison linéaire des états de la forme

$$|\rho + n\mu\rangle, \quad \mu \in M_{\Lambda}.$$

Les poids correspondants ont des représentants dans la chambre de Weyl \mathcal{F}_l qui peuvent être obtenu par une série de réflexions de Weyl. En d'autres termes, étant donné n et μ , il y a un poids $\rho + \xi$ dans \mathcal{F}_l et une réflexion de Weyl $w_{\xi} \in \mathcal{W}$ tel que

$$\rho + n\mu = w_{\xi}(\rho + \xi).$$

L'ensemble de représentants des poids $\rho + n\mu$ dans \mathcal{F}_l sont dénotés par $\mathcal{M}(n, \Lambda)$. Nous concluons alors que l'invariant de Chern-Simons d'un noeud de tore (n, m) s'écrit comme :

$$e^{2\pi i n m h_{\rho+\Lambda}} \sum_{\rho+\xi \in \mathcal{M}(n, \Lambda)} \epsilon(w_{\xi}) \exp \left[\frac{i\pi m}{n(k+N)} \xi \cdot (\xi + 2\rho) \right] ch_{\xi} \left[-\frac{2\pi i}{k+N} \rho \right]. \quad (4.98)$$

Notons que, puisque les représentants $\rho + \xi$ vivent en \mathcal{F}_l , les poids ξ peuvent être considérés en tant que les plus hauts poids pour une représentation ; par conséquent le caractère dans (4.98) a un sens. Comme un exemple de cette procédure, on peut calculer l'invariance d'un noeud de tore (n, m) dans la représentation fondamentale, où $\Lambda = \lambda_1$. En appliquant des réflexions de Weyl, on peut prouver que $\mathcal{M}(n, \lambda_1)$ est donné par les poids suivants [76] :

$$\rho + (n-i)\lambda_1 + \lambda_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.99)$$

Le calcul des caractères est maintenant direct. Ce sont juste les dimensions quantiques des poids (4.99). On obtient finalement :

$$\begin{aligned} W_{\square}^{(n,m)} &= q^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \frac{(\lambda q^{-1})^{\frac{(m-1)(n-1)}{2}}}{q^n - 1} \\ &\times \sum_{\substack{p+i+1=n \\ p, i \geq 0}} (-1)^i q^{mi + \frac{1}{4}(p(p+1) - i(i+1))} \frac{\prod_{j=-p}^i (\lambda - q^j)}{[i]! [p]!}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Si on divise par la valeur moyenne dans le vide du noeud trivial, on trouve l'expression pour le polynôme de HOMFLY[4]. Pour le trèfle on a, par exemple :

$$W_{\square}^{(2,3)} = \frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \left(-2\lambda^{\frac{1}{2}} + 3\lambda^{\frac{3}{2}} - \lambda^{\frac{5}{2}} \right) + \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} \right) \left(-\lambda^{\frac{1}{2}} + \lambda^{-\frac{3}{2}} \right). \quad (4.101)$$

Avec plus d'effort on peut trouver des formules pour les invariants des noeuds et des entrelacs de tore dans des représentations arbitraires [76, 77], bien qu'ils soient plutôt compliqués. Par exemple, pour le trèfle dans des représentations avec deux boîtes, on trouve :

$$\begin{aligned}
 W_{\square} &= \frac{(\lambda - 1)(\lambda q - 1)}{\lambda \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 (1 + q)} \left((\lambda q^{-1})^2 (1 - \lambda q^2 + q^3 \right. \\
 &\quad \left. - \lambda q^3 + q^4 - \lambda q^5 + \lambda^2 q^5 + q^6 - \lambda q^6) \right), \\
 W_{\boxplus} &= \frac{(\lambda - 1)(\lambda - q)}{\lambda \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 (1 + q)} \left((\lambda q^{-2})^2 (1 - \lambda - \lambda q \right. \\
 &\quad \left. + \lambda^2 q + q^2 + q^3 - \lambda q^3 - \lambda q^4 + q^6) \right). \tag{4.102}
 \end{aligned}$$

4.3.3 Théorie de représentation $U(\infty)$

Comme nous le constaterons plus tard, la relation entre la théorie de Chern-Simons et la théorie de corde *implique* les valeurs moyennes dans le vide des opérateurs de boucle de Wilson pour les représentations irréductibles arbitraires $U(N)$. Ceci signifie que N doit être plus grand que le nombre de boîtes de n'importe quelle représentation.

Formellement, on considère la théorie de représentation $U(\infty)$, et il est commode de développer une structure appropriée pour cette idée. Cette structure est essentiellement la théorie de polynômes symétriques (avec un nombre infini de variables), qui peut être traduit en langage de bosons et fermions à deux dimensions, qui sont apparus auparavant dans l'étude de la théorie de Yang-Mills pour N grande [78, 79] et dans la théorie de systèmes intégrables classiques [80, 81].

Dans cette sous section on va discuter quelques applications de la théorie de Chern-Simons. Les notions de base des polynômes symétriques sont passées en revue dans l'Annexe.

Considérons l'ensemble d'opérateurs de boucle de Wilson associés à un noeud fixe \mathcal{K} . Cet ensemble a deux bases naturelles :

- (1) La base étiquetée par les représentations R , que nous avons déjà traité, et
- (2) La base marquée par les classes conjuguaisons du groupe symétrique.

Les opérateurs de boucle de Wilson dans la base des classes de conjuguaisons sont construits comme suit. Soit

$$U = e^{i \int_{\mathcal{K}} A}$$

l'holonomie de la connexion de jauge autour du noeud \mathcal{K} , et

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots)$$

un vecteur d'entrées infinies, qui sont presque égaux à zéro. Ce vecteur définit une classe de conjugaison $C(\vec{k})$ du groupe symétrique S_l d'éléments l , qui satisfait la formule suivante

$$l = \sum_j j k_j. \tag{4.103}$$

La classe de conjugaison $C(\vec{k})$ est simplement la classe ayant les cycles k_j de longueur j . On utilise aussi la quantité suivante :

$$|\vec{k}| = \sum_j k_j. \tag{4.104}$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

L'opérateur Υ est défini par

$$\Upsilon_{\vec{k}}(U) = \prod_{j=1}^{\infty} (Tr U^j)^{K_j}. \quad (4.105)$$

Ces opérateurs, pour tout \vec{k} , donnent la base des opérateurs de boucle de Wilson marqués par des classes de conjugaisons. La base des représentations et la base des classes de conjugaisons pour des opérateurs de boucle de Wilson correspondent à deux bases bien connues pour des polynômes symétriques. Ceci paraît clair en prenant U une matrice diagonale

$$U = \text{diag}(x_1, \dots, x_N).$$

C'est alors un résultat élémentaire dans la théorie de représentation du groupe unitaire que $Tr_R U$ est le polynôme de Schur en x_i défini dans (6.97) :

$$Tr_R(U) = s_R(x). \quad (4.106)$$

Ce qui donne

$$\Upsilon_{\vec{k}}(U) = P_{\vec{k}}(x), \quad (4.107)$$

où les polynômes de Newton sont définis dans (6.99). Il découle de la formule de Frobenius (6.101) entre les deux bases des polynômes symétriques que les opérateurs (4.105) sont des combinaisons linéaires des opérateurs marqués par des représentations :

$$\Upsilon_{\vec{k}}(U) = \sum_R \chi_R(C(\vec{k})) Tr_R U, \quad (4.108)$$

où $\chi_R(C(\vec{k}))$ sont les caractères du groupe symétrique S_l dans la représentation R évaluée à la classe de conjugaison $C(\vec{k})$. La susdite formule peut être inversée comme suit

$$Tr_R(U) = \sum_{\vec{k}} \frac{\chi_R(C(\vec{k}))}{z_{\vec{k}}} \Upsilon_{\vec{k}}(U), \quad (4.109)$$

avec

$$z_{\vec{k}} = \prod_j k_j! j^{k_j}. \quad (4.110)$$

Dans cette sous section, on va considérer des polynômes symétriques avec un nombre infini de variables [82]. Une manière particulièrement utile de traiter des polynômes symétriques avec un nombre infini de variables est de considérer l'ensemble d'opérateurs

$$\Upsilon_{\vec{k}}(U)$$

comme base pour l'espace de Hilbert de dimension infini associé à un boson chiral à deux dimensions. Dans ce langage, la relation de Frobenius est une manifestation de l'équivalence entre fermions et bosons à deux dimensions. Dans ce qui suit, nous allons expliquer cette idée d'une manière assez détaillée.

4.3 Boucles de Wilson et des invariants de noeud : Des Résultats

Le développement en mode d'un boson chiral à deux dimensions est :

$$\partial\phi = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \alpha_m z^{-m-1}, \quad (4.111)$$

où les modes α_m satisfaisant les relations de commutation :

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m,0}. \quad (4.112)$$

Pour construire l'espace de Hilbert des états, on définit d'abord un vide par

$$\alpha_n |0\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (4.113)$$

Les opérateurs α_{-n} sont appelés des opérateurs de création pour $n > 0$ et des opérateurs d'annihilation pour $n < 0$. On peut également définir les champs fermioniques $\psi(z)$, $\psi^*(z)$ à deux dimensions par

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}+1/2} \psi_n z^{-n-1/2}, \\ \psi^*(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}+1/2} \psi_n^* z^{-n-1/2}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Les modes fermioniques ψ_n , ψ_n^* satisfont les relations d'anti-commutation

$$\begin{aligned} \{\psi_n, \psi_m\} &= \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0, \\ \{\psi_n, \psi_m^*\} &= \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Le vide défini dans (4.113) satisfait

$$\psi_n |0\rangle = \psi_n^* |0\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (4.116)$$

Il est aussi utile de définir un ordre normal des modes fermioniques :

$$:\psi_i \psi_j^* := \psi_i \psi_j^* - \langle 0 | \psi_i \psi_j^* | 0 \rangle. \quad (4.117)$$

L'équivalence entre les fermions et les bosons à deux dimensions peut être énoncée comme la relation suivante :

$$\partial\phi(z) =: \psi^*(z) \psi(z) :, \quad (4.118)$$

qui en termes de modes s'écrit

$$\alpha_n = \sum_{j \in \mathbf{Z}+1/2} :\psi_{-j} \psi_{j+n}^* :. \quad (4.119)$$

L'espace de Hilbert \mathcal{H} est obtenu en agissant avec des opérateurs de création dans le vide. Une base naturelle de cet espace est marquée par des vecteurs de dimension infinie \vec{k} :

$$|\vec{k}\rangle = \prod_{j=1}^{\infty} (\alpha_{-j})^{k_j} |0\rangle. \quad (4.120)$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

$|\vec{k}\rangle$ constitue un vecteur d'une base orthogonale, dont les éléments satisfont

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = z_{\vec{k}} \delta_{\vec{k} \vec{k}'}, \quad (4.121)$$

et aussi la relation

$$\sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}. \quad (4.122)$$

En utilisant des opérateurs fermioniques on peut construire une autre base de \mathcal{H} . Soit R un tableau de Young. Au lieu de le spécifier par des longueurs des lignes, comme nous avons fait jusqu'ici, on peut utiliser la notation de Frobenius. Cette notation fonctionne comme suit :

Coupons le tableau le long de la diagonale, et comptons les boîtes au-dessus et au-dessous de la diagonale, dans les directions horizontales et verticales, respectivement. Ceci mène à deux ensembles de nombres entiers, dénotés par m_i et n_i , respectivement. Le tableau de Young associé à R sera dénoté, dans la notation de Frobenius, par $(m_i | n_i)$. En termes de longueurs des lignes h_i et des colonnes v_i dans le tableau, on a

$$m_i = h_i - i, \quad n_i = v_i - i. \quad (4.123)$$

Par exemple, le tableau



est écrit dans la notation de Frobenius comme $(4, 1 | 2, 1)$. L'état $|R\rangle$ associé au tableau de Young $(m_i | n_i)$, $i = 1, \dots, r$, est défini par

$$|R\rangle = \epsilon(n) \prod_{i=1}^r \psi_{-m_i-1/2} \psi_{-n_i-1/2}^* |0\rangle, \quad (4.124)$$

où $\epsilon(n)$ est un signe donné par

$$\epsilon(n) = (-1)^{\sum_{i=1}^r n_i + r(r-1)/2}. \quad (4.125)$$

Cette base est orthonormale,

$$\langle R | R' \rangle = \delta_{RR'}, \quad (4.126)$$

et on peut montrer qu'elle est liée à la base $|\vec{k}\rangle$ par la relation de Frobenius [80, 81] :

$$|R\rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{\chi_R(C(\vec{k}))}{z_{\vec{k}}} |\vec{k}\rangle. \quad (4.127)$$

Il y a une relation étroite entre l'espace de Hilbert \mathcal{H} et l'espace des polynômes symétriques. Afin de concrétiser cette idée, on définit *un état cohérent* dans \mathcal{H} associé à $\{t_n\}_{n \geq 1}$ par l'équation

$$|t\rangle = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n} \alpha_{-n}\right) |0\rangle. \quad (4.128)$$

4.3 Boucles de Wilson et des invariants de noeud : Des Résultats

Le produit de deux états cohérents est donné par

$$\langle s | t \rangle = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n s_n}{n} \right).$$

Notons que

$$|t\rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{t_{\vec{k}}}{z_{\vec{k}}} \left| \vec{k} \right\rangle, \quad (4.129)$$

où

$$t_{\vec{k}} = \prod_j t_j^{k_j}.$$

On peut maintenant définir une transformation entre l'espace de Hilbert \mathcal{H} et l'espace des polynômes symétriques à un nombre infini de variables \mathcal{P} par

$$|\phi\rangle \rightarrow \langle t | \phi \rangle, \quad (4.130)$$

où $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$. La partie droite est un polynôme en t_n , mais si on identifie

$$t_j = P_j(x), \quad (4.131)$$

où $P_j(x)$ est la série de somme de puissance définie dans (6.100), on trouve un isomorphisme

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}. \quad (4.132)$$

Par exemple, la base $\left| \vec{k} \right\rangle$ correspond aux polynômes de Newton, puisque

$$\langle t | \vec{k} \rangle = P_{\vec{k}}(x). \quad (4.133)$$

En outre, en utilisant (4.127) on trouve

$$\langle t | R \rangle = s_R(t), \quad (4.134)$$

où $s_R(t)$ est le polynôme de Schur exprimé en termes de polynômes de Newton. Le langage des bosons et des fermions s'avère être extrêmement utile pour analyser les divers aspects de la théorie de représentation qui apparaissent dans la théorie de Chern-Simons. Par exemple, le nombre total des boîtes d'une représentation $l(R)$ est la valeur propre de l'opérateur

$$l = \sum_{n \in \mathbf{Z}+1/2} n : \psi_{-n} \psi_n^*, \quad (4.135)$$

en agissant sur l'état $|R\rangle$, et la quantité κ_R définie dans (4.83) est la valeur propre de l'opérateur

$$\kappa = \sum_{n \in \mathbf{Z}+1/2} n^2 : \psi_{-n} \psi_n^*. \quad (4.136)$$

Ceci peut être montré comme suit : en termes des quantités définies dans (4.123), la valeur propre de l'opérateur κ agissant sur $|R\rangle$ est

$$\sum_{i=1}^r \left(m_i + \frac{1}{2} \right)^2 - \sum_{i=1}^r \left(n_i + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (4.137)$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

En utilisant l'identité [79] :

$$\sum_{i=1}^{l(R)} (h_i - i)^2 - i^2 = \sum_{i=1}^r \left((h_i - i)^2 - (v_i - i + 1)^2 \right), \quad (4.138)$$

il s'ensuit que (4.137) est égale à κ_R . Finalement, les opérateurs (4.135) et (4.136) peuvent être écrits en termes des bosons, menant aux expressions

$$l = \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial\phi(z), \quad \kappa = \frac{1}{3} \oint \frac{dz}{2\pi i} : (\partial\phi)^3 : . \quad (4.139)$$

Maintenant on va présenter quelques structures de l'espace de Hilbert \mathcal{H} . D'abord, il a un automorphisme ω qui, dans le langage fermionique, échange ψ avec ψ^* :

$$\omega(\psi_n) = (-1)^n \psi_n^*, \quad \omega(\psi_n^*) = (-1)^n \psi_n. \quad (4.140)$$

Il est facile de voir que ω agit en tant qu'involution sur \mathcal{H} , c'est-à-dire. $\omega^2 = 1$ sur \mathcal{H} . Dans la base de représentation qui transforme

$$|R\rangle \rightarrow |R^t\rangle, \quad (4.141)$$

où R^t est le tableau de Young transposé (où les lignes et les colonnes de R sont échangés). L'involution ω correspond à l'involution dans l'espace des polynômes symétriques qui échange les fonctions complètement symétriques avec les fonctions de symétrie élémentaire [82].

L'espace \mathcal{H} est caractérisé également par une structure d'anneau donnée par le produit tensoriel des représentations et définie dans la base de représentation par

$$|R_1\rangle \otimes |R_2\rangle = \sum_R N_{R_1 R_2}^R |R\rangle, \quad (4.142)$$

où $N_{R_1 R_2}^R$ sont des coefficients de Littlewood-Richardson. Le produit tenseur des états cohérents est :

$$|t_1\rangle \otimes |t_2\rangle = |t_1 + t_2\rangle. \quad (4.143)$$

On a aussi un coproduit

$$\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad (4.144)$$

qui dans la base de représentation se décompose selon

$$\Delta(|R\rangle) = \sum_{R_1 R_2} N_{R_1 R_2}^R |R_1\rangle \otimes |R_2\rangle. \quad (4.145)$$

Par exemple,

$$\Delta(|\square\rangle) = |\square\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |\square\rangle + |\square\rangle \otimes |\square\rangle.$$

Il est crucial de définir l'état

$$|R/R'\rangle = \sum_{R''} N_{R' R''}^R |R''\rangle. \quad (4.146)$$

4.3 Boucles de Wilson et des invariants de noeud : Des Résultats

Conformément à la correspondance (4.130) avec des polynômes symétriques, le susdit état est transformé à la fonction de Schur ‘skew’

$$s_{R/R'}(x)$$

défini dans (6.103). Le coproduit Δ s’avère être simple dans la base de boson, puisqu’il se transforme comme

$$\alpha_{-n} |0\rangle \rightarrow \alpha_{-n}^{(1)} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + |0\rangle_1 \otimes \alpha_n^{(2)} |0\rangle_2, \quad (4.147)$$

où on a ajouté des indices inférieurs et des indices supérieurs pour comprendre la structure du produit tensoriel. De (4.147), on peut déduire que le coproduit Δ agit sur des états cohérents comme

$$\Delta(|t\rangle) = |t\rangle_1 \otimes |t\rangle_2. \quad (4.148)$$

On peut montrer que \mathcal{H} , doté du produit tenseur (4.142) et du coproduit Δ , a la structure d’une algèbre de Hopf dont les éléments primitifs sont $\alpha_{-n} |0\rangle$ [82]. L’équation (4.148) mène à l’identité

$$\sum_{Q,R,R'} N_{RR'}^Q s_Q(t) |R\rangle_1 \otimes |R'\rangle_2 = |t\rangle_1 \otimes |t\rangle_2. \quad (4.149)$$

Il est facile de montrer en utilisant le langage de la théorie conforme à deux dimensions (CFT₂), par exemple, que l’état cohérent

$$|\mathcal{D}\rangle = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{\frac{n}{2}} - \lambda^{-\frac{n}{2}}}{n \left(q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}} \right)} \alpha_{-n} \right) |0\rangle \quad (4.150)$$

satisfait

$$\dim_q R = \langle R | \mathcal{D} \rangle. \quad (4.151)$$

Considérons maintenant la construction des fonctions génératrices pour des invariants de noeud et d’entrelacs. D’abord on définit l’opérateur de Ooguri-Vafa. Soit U une matrice d’holonomie $U(N)$ pour un noeud, et V une matrice $U(M)$ (terme de ‘source’). On suppose formellement que N et M sont très grands. L’opérateur de Ooguri-Vafa [83], est donné par

$$Z(U, V) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}(U^n) \text{Tr}(V^n) \right]. \quad (4.152)$$

Après développement, cet opérateur s’écrit dans la base k comme suit,

$$Z(U, V) = 1 + \sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} \Upsilon_{\vec{k}}(U) \Upsilon_{\vec{k}}(V). \quad (4.153)$$

On voit que $Z(U, V)$ inclut tous les opérateurs de boucle de Wilson possibles $\Upsilon_{\vec{k}}(U)$ associés à un noeud \mathcal{K} . On peut aussi utiliser la formule de Frobenius pour montrer que

$$Z(U, V) = \sum_R \text{Tr}_R(U) \text{Tr}_R(V), \quad (4.154)$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

où la somme sur des représentations à commencer par la triviale. Du point de vue des polynômes symétriques, l'égalité de (4.152) et (4.154) peut être réécrite comme l'identité

$$\sum_R s_R(x) s_R(y) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_n(x) P_n(y)\right). \quad (4.155)$$

Dans $Z(U, V)$, on suppose que U est l'holonomie d'un champ de jauge dynamique et que V est une source. La valeur moyenne dans le vide

$$Z(V) = \langle Z(U, V) \rangle = \sum_R W_R \text{Tr}_R V \quad (4.156)$$

procure des informations sur les valeurs moyennes dans le vide des opérateurs de boucle de Wilson dans toutes les représentations possibles, et son logarithme que nous exprimons par

$$F(V) = \log Z(V) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}!} W_{\vec{k}}^{(c)} \Upsilon_{\vec{k}}(V), \quad (4.157)$$

définit les valeurs moyennes dans le vide connecté $W_{\vec{k}}^{(c)}$.
A titre d'exemple, nous avons :

$$W_{(2,0,\dots)}^{(c)} = \langle (\text{Tr} U)^2 \rangle - \langle \text{Tr}_R U \rangle^2 = W_{\square\square} + W_{\square} - W_{\square}^2.$$

Exemple : Fonctions génératrices pour le noeud trivial.

Dans le cas du noeud trivial à 'framing' zéro, il est facile de calculer les fonctions génératrices $Z(V)$ et $F(V)$ si on tient compte du fait que les dimensions quantiques sont données par les polynômes de Schur évalués à

$$x_i = q^{\frac{1}{2}(N-2i+1)}.$$

On trouve alors

$$Z(V) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\lambda^{\frac{n}{2}} - \lambda^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}} \text{Tr} V^n\right) = \langle t | \mathcal{D} \rangle, \quad (4.158)$$

où on a identifié $t_n = \text{Tr} V^n$.

4.4 Développement en $1/N$

Comme nous l'avons expliqué dans la section 3.2 ; la série perturbative de la théorie de Chern-Simons autour de la connexion triviale peut être re-exprimée en termes de fatgraphs. En particulier, on devrait être capable d'étudier l'énergie libre de la théorie de Chern-Simons sur la trois-sphère S^3 dans l'expansion en $1/N$ [88, 89, 90], c'est-à-dire le développer comme dans (4.32) et sommer sur tous les fatgraphs de genre fixe dans ce développement pour obtenir les quantités $F_g(t)$. Dans cette sous-section on fournira des expressions explicites de $F_{g,h}$ et $F_g(t)$ dans le cas de la théorie de Chern-Simons définie sur \mathbf{S}^3 [12, 13].

4.4.1 Expression de $F_{g,h}$

Signalons qu'un calcul direct de $F_{g,h}$ de la théorie de perturbation est difficile, puisqu'il implique l'évaluation des intégrales des produits des propagateurs sur les 3-sphère. Cependant, dans le cas de \mathbf{S}^3 on a une expression exacte de la fonction de partition et on peut l'étendre en x et N pour obtenir les coefficients de (4.32). La fonction de partition de CS avec le groupe de jauge $U(N)$ sur la 3-sphère peut être obtenue de la formule (4.46) et pour $SU(N)$ après la multiplication par

$$N^{1/2}/(k+N)^{1/2}$$

qui est la fonction de partition du facteur $U(1)$. Le résultat final s'écrit alors

$$Z = \frac{1}{(k+N)^{N/2}} \prod_{\alpha>0} 2 \sin \left(\frac{\pi(\alpha \cdot \rho)}{k+N} \right). \quad (4.159)$$

En utilisant la description explicite des racines positives de $SU(N)$, on obtient $F = \log Z$,

$$F = -\frac{N}{2} \log(k+N) + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \log \left[2 \sin \left(\frac{\pi j}{k+N} \right) \right]. \quad (4.160)$$

D'ailleurs nous avons l'expression

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right). \quad (4.161)$$

On constate donc que l'énergie libre est la somme des deux parties. La première est appelée la partie non-perturbative notée comme suit :

$$F^{np} = -\frac{N^2}{2} \log(k+N) + \frac{1}{2} N(N-1) \log 2\pi + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \log j, \quad (4.162)$$

et l'autre partie est appelée la partie perturbative donnée par :

$$F^p = \sum_{j=1}^N (N-j) \sum_{n=1}^{\infty} \log \left[1 - \frac{j^2 g_s^2}{4\pi^2 n^2} \right], \quad (4.163)$$

où

$$g_s = \frac{2\pi}{k+N}, \quad (4.164)$$

qui, comme nous le verrons plus tard, coïncide avec la constante de couplage de la corde sous la dualité jauge/corde.

Pour voir que (4.162) possède une origine non-perturbative, on la réécrit en utilisant la formule explicite (3.41), sous la forme,

$$F^{np} = \log \frac{(2\pi g_s)^{\frac{N^2}{2}}}{\text{Vol}(U(N))}, \quad (4.165)$$

Ceci correspond en effet au volume du groupe de jauge dans la contribution d'une-boucle (4.18), où $A^{(c)}$ représente la connexion triviale plate pour ce cas. Par conséquent, F^{np} est le log du préfacteur

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

de l'intégrale de chemin, qui n'est pas capturée par des diagrammes de Feynman. Maintenant on va établir la partie perturbative (4.163), d'après [12, 13]. En développant le log, et en utilisant $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = \zeta(2k)$, et la formule

$$\sum_{j=1}^N j^k = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{k-l+1} \binom{k+1}{l} B_{k+1-l} N^l, \quad (4.166)$$

où B_n sont des nombres de Bernoulli, on réalise que (4.163) s'écrit comme

$$F^p = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=2}^{\infty} F_{g,h}^p g_s^{2g-2+h} N^h,$$

où $F_{g,h}^p$ est donné pour $g=0$ et $g=1$ par les formules :

$$\begin{aligned} F_{0,h}^p &= -\frac{|B_{h-2}|}{(h-2)h!}, & h \geq 4, \\ F_{1,h}^p &= \frac{1}{12} \frac{|B_h|}{hh!}. \end{aligned} \quad (4.167)$$

Notons que $F_{0,h}^p$ s'annule pour $h \leq 3$. Pour $g \geq 2$ on obtient

$$F_{g,h}^p = \frac{\zeta(2g-2+h)}{(2\pi)^{2g-3+h}} \binom{2g-3+h}{h} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}. \quad (4.168)$$

Ceci donne la contribution des diagrammes connectés avec $g \geq 2$ à l'énergie libre de la théorie de Chern-Simons sur la sphère. La partie non-perturbative admet également un développement asymptotique qui peut être établi en étendant la fonction de Barnes qui apparaît dans le facteur de volume [89, 39]. En utilisant les résultats de la sous-Section 2.1.1 on trouve :

$$F^{np} = F_G \quad (4.169)$$

où F_G est l'énergie libre du modèle matriciel Gaussien exprimé dans (3.45).

4.4.2 Expression de $F_g(t)$

Pour trouver $F_g(t)$, on doit sommer sur les trous comme dans (3.26). Le paramètre de 't Hooft est donné par $t = xN = ig_s N$, et

$$F_g^p(t) = \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h}^p (-it)^h. \quad (4.170)$$

D'abord on va se concentrer sur le cas $g \geq 2$. Pour calculer la somme explicitement, on écrit de nouveau la fonction ζ comme $\zeta(2g-2+2p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-2g-2p}$, et on utilise la série binomiale,

$$\frac{1}{(1-z)^q} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q+n-1}{n} z^n \quad (4.171)$$

pour obtenir :

$$F_g^p(t) = \frac{(-1)^g |B_{2g} B_{2g-2}|}{2g(2g-2)(2g-2)!} + \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(-it + 2\pi n)^{2g-2}}, \quad (4.172)$$

4.5 Théorie de Chern-Simons comme modèle matriciel

où ' signifie qu'on omet $n = 0$. Notons que, si on écrit

$$F^{np} = \sum_{g=0}^{\infty} F_g^{np}(t) g_s^{2g-2}, \quad (4.173)$$

alors pour, $g \geq 2$, $F_g^{np}(t) = B_{2g}/2g(2g-2)(-it)^{2g-2}$, qui est le terme pour $n = 0$ manquant dans (4.172). On définit alors :

$$F_g(t) = F_g^p(t) + F_g^{np}(t). \quad (4.174)$$

Finalement, puisque

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{n+z} = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i z}}, \quad (4.175)$$

et en considérant des dérivées par rapport à z on peut écrire de nouveau

$$F_g(t) = \frac{(-1)^g |B_{2g} B_{2g-2}|}{2g(2g-2)(2g-2)!} + \frac{|B_{2g}|}{2g(2g-2)!} Li_{3-2g}(e^{-t}), \quad (4.176)$$

pour $g \geq 2$. La fonction Li_j apparaissant dans cette équation est le polylogarithme d'indice j , défini par

$$Li_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^j}. \quad (4.177)$$

Le calcul pour le cas $g = 0, 1$ est très semblable et on obtient :

$$\begin{aligned} F_0(t) &= -\frac{t^3}{12} + \frac{\pi^2 t}{6} + \zeta(3) + Li_3(e^{-t}), \\ F_1(t) &= \frac{t}{24} + \frac{1}{12} \log(1 - e^{-t}). \end{aligned} \quad (4.178)$$

Ceci donne les fonctions $F_g(t)$ pour tout $g \geq 0$. Dans la sous-section suivante, nous employons la technique du modèle matriciel développée dans la section précédente afin de dériver $F_g(t)$.

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré seulement l'expansion en $1/N$ de l'énergie libre. Les valeurs moyennes dans le vide des boucles de Wilson peuvent être également analysées de ce point de vue. En théorie de champ la valeur moyenne dans le vide connecté des h opérateurs invariants de jauge a une expansion en puissances de N^{2-2g+h} [42]. Ceci signifie que les fonctions de corrélation des boucles de Wilson qui ont un comportement bien défini dans l'expansion en $1/N$ sont les valeurs moyennes dans le vide connecté $W_{\vec{k}}^{(c)}$ présentées dans (4.157). Leur expansion est de la forme,

$$W_{\vec{k}}^{(c)} = \sum_{g=0}^{\infty} W_{\vec{k},g}^{(c)}(t) x^{2g-2+\vec{k}}, \quad (4.179)$$

où $W_{\vec{k},g}^{(c)}(t)$ est une fonction du paramètre de 't Hooft et \vec{k} est défini dans (4.104).

4.5 Théorie de Chern-Simons comme modèle matriciel

Rappelons que la théorie de Chern-Simons est exactement soluble et sur certaines variétés tri-dimensionnelles on peut écrire explicitement sa fonction de partition. Il s'avère que pour certaines

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

sphères d'homologie rationnelle (incluant \mathbf{S}^3), cette fonction de partition admet une représentation en modèle matriciel [71, 91, 92, 93]. Dans le cas de \mathbf{S}^3 , la façon la plus simple pour dériver la représentation en modèle matriciel de la fonction de partition de Chern-Simons s'effectue par le calcul direct. Considérons l'intégrale suivante :

$$Z_{CS} = \frac{e^{-\frac{x}{12}N(N^2-1)}}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d\beta_i}{2\pi} e^{-\sum_i \beta_i^2/2x} \prod_{i<j} \left(2 \sinh \frac{\beta_i - \beta_j}{2} \right)^2. \quad (4.180)$$

Ceci reproduit la fonction de partition de la théorie de Chern-Simons $U(N)$ sur \mathbf{S}^3 , donnée dans (4.46). Bien que le facteur de mesure dans (4.180)

$$\prod_{i<j} \left(2 \sinh \frac{\beta_i - \beta_j}{2} \right)^2 \quad (4.181)$$

n'est pas le déterminant de Vandermonde standard, mais il se réduit à lui pour de petites séparations entre les valeurs propres. En fait, pour x très petit, le potentiel gaussien dans (4.180) sera très étroit, forçant les valeurs propres à être près l'une de l'autre, et on peut développer le \sinh de (4.181) en série entière. À l'ordre principal, on trouve le modèle matriciel Gaussien habituel, tandis que les corrections peuvent être évaluées systématiquement en calculant les corrélateurs dans la théorie Gaussienne. De cette façon, on obtient l'expansion perturbative de la théorie de Chern-Simons [91].

Dans ce qui suit, nous analysons le modèle en utilisant la technique développée dans les sections 2.2 et 2.3. D'abord, on va écrire la susdite intégrale comme intégrale standard d'une matrice ayant le discriminant de Vandermonde. Ceci peut être réalisé en appliquant le changement des variables [94]

$$\exp(\beta_i + t) = \lambda_i, \quad (4.182)$$

où $t = Nx$. La susdite intégrale devient, jusqu'à un facteur $\exp(-N^3x/2)$,

$$Z_{SW} = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d\lambda_i}{2\pi} \Delta^2(\lambda) \exp\left(-\sum_{i=1}^N (\log \lambda_i)^2 / 2x\right), \quad (4.183)$$

donc on considère le modèle matriciel

$$Z_{SW} = \frac{1}{\text{Vol}(U(N))} \int dM e^{-\frac{1}{2x} \text{Tr}(\log M)^2}. \quad (4.184)$$

Ce modèle est appelé *le modèle matriciel de Stieltjes-Wigert* puisqu'il peut être exactement résolu avec les polynômes de Stieltjes-Wigert. Maintenant on va analyser l'approximation de point selle à l'intégrale matricielle (4.180), ou d'une manière équivalente à (4.183). Vu que le modèle dans (4.183) a le déterminant usuel de Vandermonde, nous pouvons utiliser les techniques de la section 2.3. En particulier, pour obtenir la résolvante $\omega_0(p)$, on utilise la formule (3.67) avec

$$W'(z) = \frac{\log z}{z}. \quad (4.185)$$

Il est évident que ce potentiel a un minimum à $z = 1$, ainsi on s'attend à une solution à une coupure où les extrémités de l'intervalle $a(t)$, $b(t)$ satisferont $a(0) = b(0) = 1$. Pour calculer l'intégrale (3.67) avec $W'(z)$ donné dans (4.185), on déforme le contour d'intégration. Dans le

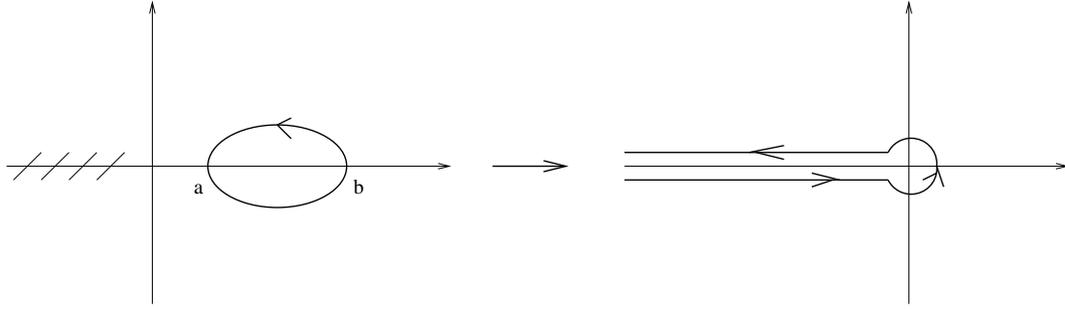


FIG. 4.17 – Déformation du contour requise pour calculer le résolvant planaire de l'intégrale de matrice de Chern-Simons. Nous choisissons un résidu à $z = p$ et nous devons encercler la singularité à l'origine aussi bien que la coupe de branche du logarithme, qui est représenté à gauche par les lignes brisées.

cas des potentiels polynomiaux, on choisi un résidu à $z = p$ et un autre à l'infini. Ici, puisque le logarithme a une coupure, on ne peut pas pousser le contour à l'infini. Au lieu de ça, on déforme le contour comme indiqué dans la figure 4.17 : on choisi le pôle à $z = p$ et ensuite on entoure la coupe du logarithme le long de l'axe réel négatif et la singularité à $z = 0$ avec un petit cercle C_ϵ de rayon ϵ . Ce genre de situation est typique à la solution des modèles matriciels avec l'expansion de caractère [95]. Les intégrales résultantes sont :

$$\frac{1}{2t} \left\{ - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{dz}{z(z-p)\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \oint_{C_\epsilon} \frac{dz \log z}{z(z-p)\sqrt{(z-a)(z-b)}} \right\}. \quad (4.186)$$

Les deux termes de (4.186) sont singuliers quand $\epsilon \rightarrow 0$, mais les singularités s'annulent, et après un simple calcul, on trouve :

$$\begin{aligned} \omega_0(p) = & -\frac{1}{2tp} \log \left[\frac{(\sqrt{a}\sqrt{p-b} - \sqrt{b}\sqrt{p-a})^2}{(\sqrt{(p-a)} - \sqrt{(p-b)})^2 p^2} \right] \\ & + \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{2tp\sqrt{ab}} \log \left[\frac{4ab}{2\sqrt{ab} + a + b} \right]. \end{aligned} \quad (4.187)$$

Afin de satisfaire l'asymptotique (3.64), le deuxième terme doit disparaître, et le premier doit tendre vers $1/p$. Ceci implique

$$\begin{aligned} 4ab &= 2\sqrt{ab} + a + b, \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 2e^t, \end{aligned} \quad (4.188)$$

et d'ici on obtient les positions des extrémités de la coupe a, b en fonction du paramètre de 't Hooft :

$$\begin{aligned} a(t) &= 2e^{2t} - e^t + 2e^{\frac{3t}{2}} \sqrt{e^t - 1}, \\ b(t) &= 2e^{2t} - e^t - 2e^{\frac{3t}{2}} \sqrt{e^t - 1}. \end{aligned} \quad (4.189)$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

Notons que pour $t = 0$, $a(0) = b(0) = 1$, comme prévu. L'expression finale pour la résolvante est alors

$$\omega_0(p) = -\frac{1}{tp} \log \left[\frac{1 + e^{-t}p + \sqrt{(1 + e^{-t}p)^2 - 4p}}{2p} \right], \quad (4.190)$$

et d'ici on peut trouver la densité des valeurs propres

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi t \lambda} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{4\lambda - (1 + e^{-t}\lambda)^2}}{1 + e^{-t}\lambda} \right]. \quad (4.191)$$

Si

$$u(p) = t(1 - p\omega_0(p)) + \pi i, \quad (4.192)$$

alors il résout l'équation

$$e^u + e^v + e^{v-u+t} + 1 = 0, \quad (4.193)$$

où $p = e^{t-v}$ [93]. L'équation (4.193) est l'analogie de (3.77) dans le cas des modèles matriciels polynomial et peut être considérée comme une équation algébrique décrivant une surface de Riemann non-compacte.

Comme on l'a déjà mentionné auparavant, le modèle matriciel (4.184) peut être résolu exactement avec un ensemble de polynômes orthogonaux appelés les polynômes de Stieltjes-Wigert. L'idée de l'équivalence entre le modèle matriciel de Chern-Simons et le modèle matriciel de Stieltjes-Wigert a été étudiée en détail par [94]. Les polynômes de Stieltjes-Wigert sont définis comme suit [96] :

$$p_n(\lambda) = (-1)^n q^{n^2 + \frac{n}{2}} \sum_{\nu=0}^n \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} q^{\frac{\nu(\nu-n)}{2} - \nu^2} \left(-q^{-\frac{1}{2}}\lambda\right)^\nu, \quad (4.194)$$

et satisfont la condition d'orthogonalité (3.95) avec

$$d\mu(\lambda) = e^{-\frac{1}{2x}(\log \lambda)^2} \frac{d\lambda}{2\pi} \quad (4.195)$$

et

$$h_n = q^{\frac{3}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}} [n]! \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}},$$

où $q = e^x$. Dans les susdites équations, le q -nombre est défini comme dans (4.59), et le nombre q -combinatoire est donné par

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[m]! [n-m]!}. \quad (4.196)$$

Les coefficients de récursion apparaissant dans (3.99) sont, dans ce cas,

$$r_n = q^{3n} (q^n - 1), \quad s_n = -q^{\frac{1}{2}+n} (q^{n+1} + q^n - 1).$$

4.5 Théorie de Chern-Simons comme modèle matriciel

On peut vérifier que la valeur moyenne dans le vide normalisée de $Tr_R M$ dans cet ensemble est donnée par

$$\langle Tr_R M \rangle_{SW} = e^{\frac{3tl(R)}{2}} q^{\frac{\kappa_R}{2}} \dim_q R, \quad (4.197)$$

où $l(R)$ est le nombre des boîtes de R , et κ_R est défini dans (4.83). Notons que, pour cet ensemble de polynômes orthogonaux, l'expansion (3.114) est simple puisque

$$\begin{aligned} R_0(\xi) &= e^{4t\xi} (1 - e^{-t\xi}), & R_{2s}(\xi) &= 0, & s > 0, \\ s(\xi) &= e^{t\xi} (1 - 2e^{t\xi}). \end{aligned} \quad (4.198)$$

Comme on l'a déjà précisé dans la sous-section 3.2.3, $R_0(\xi)$ et $s(\xi)$ peuvent être employés pour déterminer les extrémités de la coupure dans la résolvante à travers (3.118). Il est facile de voir que (4.198) conduit en effet à (4.189), et en employant (3.117) on obtient (4.191). En fait, il est bien connu que l'expression (4.191) est la densité des zéros des polynômes de Stieltjes-Wigert [97, 98]. On peut utiliser maintenant la technique développée dans la sous-section 3.2.3 pour calculer $\mathcal{F}_g(t)$. En commençant par l'expression

$$F_{CS} = F_{SW} - \frac{7}{12}t^3 + \frac{1}{12}t, \quad (4.199)$$

la formule (3.115) donne

$$F_0^{CS}(t) = \frac{t^3}{12} - \frac{\pi t}{6} - Li_3(e^{-t}) + \varsigma(3), \quad (4.200)$$

où le polylogarithme d'indice j a été défini dans (4.177). Le résultat ci-dessus est en accord avec le résultat obtenu dans la sous-section précédente en sommant sur la série perturbative. Le signe moins provient du fait que la variable d'expansion ici est x , alors que dans la section 3.4 c'était

$$g_s = -ix.$$

On peut aussi calculer $F_g(t)$, pour tout $g > 0$, à partir de (3.119). On doit juste calculer $f^{(p)}(1) - f^{(p)}(0)$, pour p impair, où

$$f(\xi) = (1 - \xi) \phi(\xi, t), \quad \phi(\xi, t) = \log \frac{1 - e^{-t\xi}}{\xi} + 4t\xi.$$

En montrant que

$$\phi^{(p)}(\xi, t) = (-1)^{p+1} \left\{ Li_{1-p}(e^{-t\xi}) t^p - \frac{(p-1)!}{\xi^p} \right\},$$

et en utilisant le développement

$$\frac{1}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} B_{k+1} \frac{t^k}{(k+1)!}$$

on obtient

$$\phi^{(p)}(0, t) = \frac{(-1)^p B_p}{p} t^p.$$

CHAPITRE 4. THÉORIE DE CHERN-SIMONS ET MODÈLE DE FLUIDE DE CORDES

Avec tous ces résultats, on trouve pour $g > 1$

$$\mathcal{F}_g(t) = \frac{B_{2g}B_{2g-2}}{2g(2g-2)(2g-2)!} + \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} Li_{3-2g}(e^{-t}) - \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} t^{2-2g}.$$

Puisque la dernière partie est l'énergie libre au genre g du modèle gaussien, on conclut que l'énergie libre $F_g^{CS}(t)$ du modèle matriciel de Chern-Simons au genre g est donné par

$$F_g^{CS}(t) = \frac{B_{2g}B_{2g-2}}{2g(2g-2)(2g-2)!} + \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} Li_{3-2g}(e^{-t}), \quad (4.201)$$

qui est conforme avec la sommation de (4.176) jusqu'à un facteur $(-1)^{g-1}$ résultant du fait que la variable d'expansion qu'on a considéré ici est x au lieu de g_s .

Avant de clôturer cette section, il est intéressant de signaler que les techniques des modèles matriciels que nous avons présentées dans cette sous-section peuvent être utilisées pour calculer le développement perturbatif et le comportement, dans la limite N grand, de la fonction de partition de la théorie de Chern-Simons dans des variétés tridimensionnelle plus compliquées [91, 93, 99].

4.6 Contribution : Fluide de D-cordes sur le Conifold : Modèle topologique

Dans cette article, Nous développons une extension, vers des dimensions supérieures à trois, de la proposition de Susskind [84] pour des fluides FQH. Nous étudions la dynamique d'un fluide des D-cordes mouvant dans le conifold et en présence d'un champ B_{rr} fort et constant. Le système de FQH est à trois dimensions complexe et il est lié au système habituel en faisant la correspondance suivante :

- (1) Le rôle des particules habituelles de FQH se déplaçant dans une surface de Riemann M avec les coordonnées z et \bar{z} , est joué par des D-cordes se déplaçant sur la surface $K3$ avec des coordonnées holomorphiques complexes u et v .
- (2) Les coordonnées complexes $z_a(t)$ et $\bar{z}_a(t)$ paramétrisant la dynamique des N particules de Hall quantique seront alors $u_a = u_a(\xi)$ et $v_a = v_a(\xi)$ avec $\xi = t + i\sigma$ étant la coordonnée complexe de la surface d'univers de la corde.
- (3) Les coordonnées locales (t, z, \bar{z}) paramétrisent un espace réel de dimensions trois, $R^{1,2}$. seront remplacer les variables locales (ξ, u, v) paramétrisent un espace complexe de dimensions trois, qui est le conifold T^*S^3 réalisé comme T^*S^1 fibré sur T^*S^2 . La géométrie $R^{1,2}$ utilisée dans la description de Susskind apparaît alors comme la partie réel de notre étude.
- (4) Le rôle du champ magnétique B est joué par un champ constant et fort B_{rr} de la corde type IIB. Comme dans le système de FQH, le champ B_{rr} est normal à la surface $K3$ et supposés assez fort et constant afin de négliger l'énergie cinétique de la corde et des interactions mutuelles entre les D cordes.

Ce système, généralisant l'étude de Susskind pour l'effet de Hall quantique fractionnaire, vit dans un espace à 3d complexes T^*S^3 . Ainsi, la géométrie de $R^{1,2}$ utilisée dans la description de Susskind apparaît alors comme une sous-variété du conifold.

Nous avons dérivé l'action holomorphe non commutative invariante de jauge décrivant sa dynamique dans le conifold. Nous avons également discuté ses aspects quantiques. Plus de détails sont exposés dans l'article reporté ci-après.



D-string fluid in conifold, I: Topological gauge model

R. Ahl Laamara^{a,b}, L.B. Drissi^{a,b}, E.H. Saidi^{a,b,c,*}

^a *Lab/UFR-Physique des Hautes Energies, Faculté des Sciences de Rabat, Morocco*

^b *Groupement National de Physique des Hautes Energies, GNPHE; Siège focal, Lab/UFR-HEP, Rabat, Morocco*

^c *VACBT, Virtual African Centre for Basic Science and Technology, Focal point Lab/UFR-PHE, Fac Sciences, Rabat, Morocco*

Received 7 December 2005; received in revised form 28 December 2005; accepted 22 March 2006

Available online 4 April 2006

Abstract

Motivated by similarities between quantum Hall systems à la Susskind and aspects of topological string theory on conifold as well as results obtained in [E.H. Saidi, Topological $SL(2)$ gauge theory on conifold and noncommutative geometry, hep-th/0601020], we study the dynamics of D-string fluids running in deformed conifold in presence of a strong and constant RR background B-field. We first introduce the basis of D-string system in fluid approximation and then derive the holomorphic noncommutative gauge invariant field action describing its dynamics in conifold. This study may be also viewed as embedding Susskind description for Laughlin liquid in type IIB string theory. FQH systems on real manifolds $R \times S^2$ and S^3 are shown to be recovered by restricting conifold to its Lagrangian sub-manifolds. Aspects of quantum behaviour of the string fluid are discussed.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Quantum Hall fluids; D string in conifold; Topological gauge theory; Noncommutative complex geometry

1. Introduction

Since Susskind proposal on fractional quantum Hall (FQH) fluids in Laughlin state as systems described by $2 + 1$ noncommutative CS gauge theory [1], there has been a great interest for building new solutions extending this idea [2–6]. Motivated by: (a) results concerning attractor

* Corresponding author.

E-mail address: h-saidi@fsr.ac.ma (E.H. Saidi).

mechanism on flux compactification [7,8], in particular the link with noncommutative geometry, and (b) the study of [9] dealing with topological noncommutative gauge theory on conifold, we develop in this paper a new extension of Susskind proposal for FQH fluids to higher dimensions. Our extension deals with modelization of the dynamics of a fluid of D strings running in conifold and in presence of a strong and constant RR background B-field. The extended system lives in complex three (real six) dimensions and is related to the usual FQH system with point like particles by the following correspondence:

(1) The role of the usual FQH particles moving in a real Riemann surface \mathcal{M} with coordinates z and \bar{z} , is played by D strings moving on K3 surface with some complex holomorphic coordinates u and v to be specified later. In this picture, FQH particles may be then viewed as D0 branes coming from D1 strings wrapped on S^1 .

(2) The complex coordinates $z_a(t)$ and $\bar{z}_a(t)$ parameterizing the dynamics of the N fractional quantum Hall particles are then mapped to $u_a = u_a(\xi)$ and $v_a = v_a(\xi)$ with $\xi = t + i\sigma$ being the string world sheet complex coordinate.

(3) The local coordinates (t, z, \bar{z}) parameterize a real three dimension space; say the space $R^{1,2}$. The local variables (ξ, u, v) parameterize a complex three dimension space, which is just the conifold T^*S^3 realized as T^*S^1 fibered on T^*S^2 . The $R^{1,2}$ geometry used in Susskind description appears then as a special real three dimension slice of conifold.

(4) The role of the magnetic field B is now played by a constant and strong RR background field B of type IIB string. Like in FQH system, the B field is supposed normal to K3 surface and strong enough so that one can neglect other possible interactions.

From this naive and rapid presentation of the higher-dimensional extended FQH system, to which we refer here below as a D-string fluid (DSF for short), one notes some specific properties among which the three following: first, Susskind proposal may be recovered from DSF by taking appropriate parameter limits of DSF moduli space to be described later. Second, the real geometry of FQH system is contained in conifold; the present study may be then thought of as embedding Susskind field theoretical model for Laughlin state with filling factor $\nu = \frac{1}{k}$ into type IIB superstring theory on conifold. This property offers one more argument for embedding FQH systems in supersymmetric theories; others arguments have been discussed in [10,11]. Finally, in DSF model, the complex holomorphy property plays a basic role; reality is recovered by restricting conifold to its half dimension Lagrangian sub-manifold. This involution has the effect of projecting DSF into the usual FQH system opening the way for links between real 3D physics and type II superstrings on Calabi–Yau threefolds.

The presentation of this paper is as follows: In Section 2, we introduce the basis of fluid approximation of D-strings running in conifold. To build this system, we use special properties of K3 complex surface and conifold geometry. We also take advantage of Susskind model for Laughlin liquid which we use as a reference to make comparisons and physical interpretations. In Section 3, we study the classical dynamics of the interaction between D strings and the RR magnetic background field. We suppose that B is strong enough so that one can neglect string kinetic energy and mutual energy interactions between the D strings. We also suppose that the number of D strings per volume unit is high and uniform. Then use the fluid approximation to derive the effective field theory extending Susskind model. In this section, we also study some special limits such as real projection. In Section 4, we discuss quantum aspects of the D-strings fluid, in particular holomorphic property and in Section 5 we give our conclusion and outlook.

2. D fluid model proposal

Like in usual fractional quantum Hall fluids in real three dimensions, the D string system we consider here involves, amongst others, two basic ingredients:

(a) A set of N D strings running in conifold and printing a line trajectory \mathcal{T} on the complex two surface K3. The curve \mathcal{T} is exactly the world line trajectory one gets if the D strings $(u(\xi), v(\xi))$ collapse to point like particles $(z(t), \bar{z}(t))$.

(b) A constant RR background field B , which is taken normal to K3, governs the dynamics of the strings. The magnitude of the B field is supposed strong enough such that one can neglect all other interactions in the same spirit as we do in FQH systems involving point like particles. Nonzero B field induces then a noncommutative geometry on K3 captured by the Poisson bracket $\{\mathcal{X}(\xi, u, v), \mathcal{Y}(\xi, u, v)\}_{u,v} \sim \partial_u \mathcal{X} \partial_v \mathcal{Y} - \partial_v \mathcal{X} \partial_u \mathcal{Y}$ of the dynamical variables $\mathcal{X}(\xi, u, v)$ and $\mathcal{Y}(\xi, u, v)$ of the fluid approximation.

To get the gauge invariant effective field action \mathcal{S}_{DSF} describing the dynamics of fluids of D strings in conifold with analogous conditions as in FQH systems, we need two essential things. First fix the classical field variables $u = u(\xi)$ and $v = v(\xi)$ describing the D string dynamics in conifold and second implement the fluid approximation by using a uniform particle density $\rho = \rho(u, v)$ to deal with the number of D strings per volume unit. We know how this is done in the case of standard FQH fluids in Laughlin state with filling fraction $\nu = \frac{1}{k}$ and we would like to extend this construction for D string fluids taken in similar conditions. Though the geometries involved in the present study are a little bit complicated and the basic objects are one-dimensional extended elements, we will show that the theoretical analysis is quite straightforward.

For the choice of the string variables $u = u(\xi)$ and $v = v(\xi)$; they are given by the geometry of K3 and the fluid description is obtained by extending Susskind analysis for FQH particles. For fluid approximation, we use also properties of holomorphic area preserving diffeomorphisms on K3 demanding a uniform density. Seen that the idea of the general picture has been exposed before and seen that details requires involved tools, we begin the present analysis by describing, in next subsection, the D string dynamical variables. Then come back to the fluid approximation with uniform density. More details on the holomorphic gauge invariant field action and real truncating will be considered in the forthcoming section.

2.1. D string variables

First note that there are various kinds of K3 surfaces; the one we will be using below is a local K3 with a deformed A_1 singularity; that is $T^*P^1 \simeq T^*S^2$. Second note also that the complex surface K3 is a nonflat Kähler manifold and so the natural way to define it is in term of a projective surface embedded in a homogeneous complex three space as given below

$$xy - zw = \mu, \quad x, y, z, w \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

together with the following projective transformations

$$(x, y, z, w) \rightarrow \left(\lambda x, \frac{1}{\lambda} y, \lambda z, \frac{1}{\lambda} w \right), \tag{2.2}$$

and where μ is a complex constant. In these relations, we have four complex holomorphic variables namely x, y, z and w ; but not all of them are free. They are subject to two constraint

relations (2.1)–(2.2) reducing the degrees of freedom down to two. Note in passing that by setting $y = \bar{x}$ and $w = \bar{z}$, the above relations reduce to

$$\begin{aligned} |x|^2 + |z|^2 &= \text{Re } \mu, \\ (x, z) &\rightarrow e^{i\theta}(x, z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

so they define a real two sphere S^2 embedded in complex space \mathbb{C}^2 parameterized by (x, z) . This is an interesting property valid not only for T^*S^2 ; but also for conifold T^*S^3 . This crucial property will be used to recover the hermitian models on real three dimension space; it deals with the derivation of Lagrangian sub-manifold from mother manifold T^*S^3 . As we will see it progressively, this feature is present everywhere along all of this paper. We will then keep it in mind and figure it out only when needed to make comments.

To implement string dynamics, we should add time variable t and the string variable σ parameterizing the one-dimensional D string geometry. If we were dealing with a point like particle moving on this complex surface, the variables would be given by the 1d fields

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad w = w(t). \quad (2.4)$$

For the case of a D string with world sheet variable $\xi = t + i\sigma$ moving on T^*P^1 , the D string variables are then given by the 2d fields

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi), \quad z = z(\xi), \quad w = w(\xi), \quad (2.5)$$

with $|\sigma| \leq l$ and obviously the constraint equations (2.1)–(2.2). In the limit $l \rightarrow 0$, the above 2d fields reduces to the previous one-dimensional variables. Since K3 surface as considered here is a projective algebraic surface using complex holomorphic variables, it is natural to make the two following hypothesis:

(i) *Field holomorphy*. We suppose that the above D-string field variables equations (2.5) have no $\bar{\xi}$ dependence; that is holomorphic functions in ξ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\xi}} = 0, \quad \phi(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\phi \xi^n, \quad \phi = x, y, z, w, \quad (2.6)$$

where $\alpha_n^\phi = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \phi(\xi)$ are string modes. This hypothesis means that the D string we are dealing with is either a one handed mover closed D-string, say a left mover closed string, or an open D-string with free ends. To fix the ideas, we consider here below closed D-strings and think about $\xi = \exp(\tau + i\tilde{\sigma})$ with $0 \leq \sigma = l\tilde{\sigma} \leq 2\pi l$. Holomorphy hypothesis selects one sector; it requires that the variables parameterizing the D-strings are complex holomorphic and same for the field action $\mathcal{S}_{\text{DSF}} = \mathcal{S}_{\text{DSF}}[x, y, z, w]$ that describe their dynamics. Usual hermiticity is recovered by restricting conifold to its Lagrangian sub-manifold obtained by setting $\xi = \bar{\xi}$, $y = \bar{x}$ and $w = \bar{z}$.

(ii) *Induced gauge symmetry*. For later use it is interesting to treat on equal footing the string world sheet variable ξ and those parameterizing K3. This may be done by thinking about the projective transformations (2.2) also as those one gets by performing the change

$$\xi \rightarrow \lambda \xi, \quad (2.7)$$

with λ a nonzero complex parameter. In other words, the string variables obey the following

$$x(\lambda \xi) = \lambda x(\xi), \quad z(\lambda \xi) = \lambda z(\xi),$$

$$y(\lambda\xi) = \frac{1}{\lambda}y(\xi), \quad w(\lambda\xi) = \frac{1}{\lambda}w(\xi), \tag{2.8}$$

together with the local constraint equations

$$x(\xi)y(\xi) - z(\xi)w(\xi) = \mu. \tag{2.9}$$

Note that Eq. (2.9) describes in fact an infinite set of constraint relations since for each value of $\xi \in \mathbb{C}^*$, the D-string fields should obey (2.9). This feature has a nice geometric interpretation. The string dynamics involves five complex holomorphic variables namely (ξ, x, y, z, w) and the two algebraic constraint equations (2.1)–(2.2). Therefore these variables parameterize a complex three dimension projective hypersurface embedded in \mathbb{C}^5 and which is nothing else that the deformed conifold geometry T^*S^3 with the realization

$$T^*S^3 \simeq T^*S^1 \times T^*S^2. \tag{2.10}$$

In this fibration, T^*S^2 is the base sub-manifold and the fiber T^*S^1 describes the D-string world sheet.

To summarize, the variables describing the motion of a D-string in conifold are given by Eqs. (2.7)–(2.9). For a system of N D-strings moving in conifold, we have then

$$x_a(\xi)y_a(\xi) - z_a(\xi)w_a(\xi) = \mu, \quad a = 1, \dots, N, \tag{2.11}$$

where for each value of the index a , we have also Eqs. (2.7)–(2.8). Having fixed the variables, we turn now to describe the fluid approximation of D-strings and implement the constant and strong background RR B-field.

2.2. Fluid approximation

For later analysis, it is convenient to use the usual $SL(2)$ isometry of the conifold to put the above relations into a condensed form. Setting

$$X^i = (x(\xi), z(\xi)), \quad Y_i = (y(\xi), w(\xi)), \tag{2.12}$$

transforming as isodoublets under $SL(2)$ isometry, the coordinates of a given D string moving in conifold is given by the holomorphic field doublets

$$X^i = X^i(\xi), \quad Y_i = Y_i(\xi), \quad i = 1, 2, \tag{2.13}$$

with the local constraint equations

$$\epsilon_{ij}X^i(\xi)Y^j(\xi) = \mu, \tag{2.14}$$

and the projective symmetry

$$\begin{aligned} X^i(\lambda\xi) &= \lambda X^i(\xi), \\ Y_i(\lambda\xi) &= \frac{1}{\lambda}Y_i(\xi). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Using these notations, the system of D string reads then as follows

$$\epsilon_{ij}X_a^i(\xi)Y_a^j(\xi) = \mu, \quad a = 1, \dots, N, \tag{2.16}$$

where ϵ_{ij} is the usual two-dimensional antisymmetric tensor with $\epsilon_{12} = 1$. In the large N limit with density $\rho(\xi, x, y)$; i.e., $N = \int_{T^*S^3} d^3v \rho(\xi, x, y)$, where (x, y) sometimes denoted also as (x^1, x^2, y_1, y_2) stand for the pairs of doublets (X^i, Y^j) , the D-string system may be thought of as a fluid of D1 branes running in conifold. Along with the previous relations, the fluid approximation allows the following substitutions

$$\begin{aligned} \{X_a^i(\xi), 1 \leq a \leq N\} &\rightarrow \mathcal{X}^i(\xi, x, y), \\ \{Y_a^i(\xi), 1 \leq a \leq N\} &\rightarrow \mathcal{Y}^i(\xi, x, y), \end{aligned} \quad (2.17)$$

together with Eqs. (2.16) replaced by

$$\epsilon_{ij} \mathcal{X}^i \mathcal{Y}^j = \mu, \quad \mathcal{X}^i = \mathcal{X}^i(\xi, x, y), \quad \mathcal{Y}^i = \mathcal{Y}^i(\xi, x, y), \quad (2.18)$$

and projective symmetry promoted to

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^i \left(\lambda \xi, \lambda x, \frac{1}{\lambda} y \right) &= \lambda \mathcal{X}^i(\xi, x, y), \\ \mathcal{Y}^i \left(\lambda \xi, \lambda x, \frac{1}{\lambda} y \right) &= \frac{1}{\lambda} \mathcal{Y}^i(\xi, x, y). \end{aligned} \quad (2.19)$$

For physical interpretation, we will also use the splitting

$$\mathcal{X}^i = x^i + \mu \mathcal{C}_+^i, \quad \mathcal{Y}_i = y_i - \mu \mathcal{C}_{-i}, \quad (2.20)$$

where \mathcal{C}_+^i and \mathcal{C}_{-i} are gauge fields constrained as

$$x^i \mathcal{C}_{-i} - y_i \mathcal{C}_+^i + \mu \mathcal{C}_{-i} \mathcal{C}_+^i = 0, \quad (2.21)$$

scaling as the inverse of length and describing fluctuations around the static positions x^i and y_i . From $SL(2)$ representation theory, one may also split the fields \mathcal{X}^i and \mathcal{Y}^i using holomorphic vielbein gauge fields

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^i(\xi, x, y) &= x^i E_{+-} + \epsilon^{ij} y_j A_{++}, \\ \mathcal{Y}_i(\xi, x, y) &= y_i E_{-+} - \epsilon_{ij} x^j A_{--}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

where $E_{\pm\mp}$ should be as $E_{\pm\mp} = (1 + A_{\pm\mp})$. Like for \mathcal{X}^i and \mathcal{Y}^i , the gauge fields \mathcal{C}_+^i and \mathcal{C}_{-i} as well as $E_{\pm\mp}$ and $A_{\pm\pm}$ are homogeneous holomorphic functions subject to the projective transformations $\mathcal{C}_{\pm}^i(\lambda \xi, \lambda x, \frac{1}{\lambda} y) = \lambda^{\pm} \mathcal{C}_{\pm}^i(\xi, x, y)$ and

$$\begin{aligned} E_{+-} \left(\lambda \xi, \lambda x, \frac{1}{\lambda} y \right) &= E_{+-}(\xi, x, y), \\ A_{++} \left(\lambda \xi, \lambda x, \frac{1}{\lambda} y \right) &= \lambda^2 A_{++}(\xi, x, y), \\ E_{-+} \left(\lambda \xi, \lambda x, \frac{1}{\lambda} y \right) &= E_{-+}(\xi, x, y), \\ A_{--} \left(\lambda \xi, \lambda x, \frac{1}{\lambda} y \right) &= \lambda^{-2} A_{--}(\xi, x, y). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Using the conifold defining relation $\epsilon_{ij} \mathcal{X}^i \mathcal{Y}^j = \mu$, we see that, like for \mathcal{C}_{\pm}^i gauge fields, the above holomorphic vielbeins capture two complex degrees of freedom only since in addition to

Eqs. (2.23), they satisfy moreover

$$E_{+-}E_{-+} - A_{++}A_{--} = 1. \tag{2.24}$$

An equivalent relation using $A_{\pm\mp}$ and $A_{\pm\pm}$ may be also written down. As far as the constraint equations (2.21), (2.24) are concerned, there are more than one way to deal with. One way is to solve it perturbatively as $E_{\pm\mp} \simeq (1 + A_{\pm\mp})$ with $A_{\pm\mp} = \pm A_0$ and then substitute $A_0 = i\sqrt{A_{++}A_{--}}$. An other way is to solve Eq. (2.24) exactly as

$$\begin{aligned} E_{+-} &= K\sqrt{1 + A_{++}A_{--}}, \\ E_{-+} &= \frac{1}{K}\sqrt{1 + A_{++}A_{--}}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

where K is an arbitrary nonzero function. In both cases one loses field linearity which we would like to have it. We will then keep the gauge field constraint equations as they are and give the results involving all these components using Lagrange method. Notice that, from physical view, the gauge fields C_{\pm}^i or equivalently $A_{\pm\mp} = A_{\pm\mp}(\xi, x, y)$ and $A_{\pm\pm} = A_{\pm\pm}(\xi, x, y)$ describe gauge fluctuations around the static solution

$$\mathcal{X}^i = x^i, \quad \mathcal{Y}_i = y_i, \quad x^i y_i = \mu, \tag{2.26}$$

preserving conifold volume 3-form. Expressing the field \mathcal{X}^i and \mathcal{Y}_i as $\mathcal{X}^i = x^i + \mu C_+^i$ and $\mathcal{Y}_i = y_i - \mu C_{-i}$, we have $\mu C_+^i = x^i A_{+-} + y^i A_{++}$ and $\mu C_{-i} = -y_i A_{-+} + x_i A_{--}$. Notice also that, as general coordinate transformations, the splitting (2.22) may be also defined as holomorphic diffeomorphisms $\mathcal{X}^i = \mathcal{L}_v x^i$ and $\mathcal{Y}_i = \mathcal{L}_v y_i$ where the vector field \mathcal{L}_v is given by

$$\mathcal{L}_v = V_{++}D_{--} + V_{--}D_{++} + V_0D_0 + V'_0\Delta_0, \tag{2.27}$$

with gauge component fields V_{pq} , $p, q = +, -$ and where the dimensionless derivatives generating the $GL(2)$ group are given by

$$\Delta_0 = \frac{1}{2}\left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right), \tag{2.28}$$

or naively as $\Delta_0 = \frac{\partial}{\partial(x^i y_i)}$, and

$$D_{--} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad D_{++} = x^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad D_0 = \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - y^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right). \tag{2.29}$$

In these equations, we have two charge operators; the operator Δ_0 generates the Abelian scaling factor with the property

$$[\Delta_0, D_{\pm\pm}] = 2D_{\pm\pm}, \quad [\Delta_0, D_0] = 0, \tag{2.30}$$

and $D_0 = [D_{++}, D_{--}]$ generates the Abelian Cartan–Weyl $GL(1)$ subgroup of $SL(2)$. Notice moreover that inverting the decomposition (2.22), we can write the vielbein fields as follows

$$\begin{aligned} E_{+-} &= \frac{1}{\mu} y_i \mathcal{X}^i = 1 + y_i C_+^i, & E_{-+} &= \frac{1}{\mu} \mathcal{Y}_i x^i = 1 - x^i C_{-i}, \\ A_{++} &= \frac{1}{\mu} \epsilon_{ij} x^i \mathcal{X}^j = -x_i C_+^i, & A_{--} &= \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} y_i \mathcal{Y}_j = -y^i C_{-i}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

As one sees, these gauge fluctuations $E_{\pm\mp}$ and $A_{\pm\pm}$ are dimensionless; they let understand that they should appear as gauge fields covariantizing dimensionless linear differential operators.

These are just the $D_{0,\pm\pm}$ operators given above. At the static point equation (2.26), we also see that $E_{+-} = E_{-+} = 1$ and $A_{\pm\pm} = 0$ ($C_{\pm}^i = 0$). With these tools we are now in position to address the building of the effective field action of the D string fluid model in conifold.

3. Field action

To get the gauge invariant effective field action $S_{\text{DSF}} = S_{\text{DSF}}[C_{\pm}^i, C_0]$ describing the dynamics of the D string fluid in the conifold, we borrow ideas from Susskind method used for FQH liquid of point like particles. We first give the classical field action $S_{\text{clas}}[X, Y]$ describing the interaction between a given D string $\{X(\xi), Y(\xi)\}$ moving in the RR background field B . Then we consider the fluid approximation using the field variables $\{\mathcal{X}(\xi, x, y), \mathcal{Y}(\xi, x, y)\}$ instead of the coordinates $\{X_a(\xi), Y_a(\xi), 1 \leq a \leq N\}$. In this limit we suppose that density $\rho(\xi, x, y)$ is large and uniform; i.e., $\rho(\xi, x, y) = \rho_0$. Finally, we derive the effective gauge field action once by using the D-string field variables \mathcal{X} and \mathcal{Y} ; i.e., $S = S_{\text{DSF}}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}, *]$ and an other time by using gauge fields C_{\pm}^i and C_0 describing the fluctuations around the static positions.

3.1. Classical B_{RR} -D string coupling

To start recall that the field action $S_{\text{clas}}[z, \bar{z}] = \int dt \mathcal{L}_{\text{clas}}(z, \bar{z})$ describing the classical dynamics of a charged particle with coordinate positions $z = z(t)$ and $\bar{z} = \bar{z}(t)$, in a constant and strong background magnetic field B , is given by

$$\mathcal{L}_{\text{clas}} = \frac{iB}{2} \left(\bar{z}(t) \frac{dz(t)}{dt} - z(t) \frac{d\bar{z}(t)}{dt} \right). \tag{3.1}$$

For a system of N classical D-strings $\{X_a(\xi), Y_a(\xi), 1 \leq a \leq N\}$ in the RR background magnetic field, one has a quite similar quantity. The above point like particle action extends as follows

$$\mathcal{S}_N[X, Y] = \frac{1}{2} \int_{T^*S^1} d\xi \sum_{a=1}^N B_{ij} \left(Y_a^j(\xi) \frac{\partial X_a^i(\xi)}{\partial \xi} - Y_a^i(\xi) \frac{\partial X_a^j(\xi)}{\partial \xi} \right), \tag{3.2}$$

with $B_{ij} = iB\epsilon_{ij}$ and which, for convenience, we rewrite also as

$$\mathcal{S}_N[X, Y] = \frac{iB}{2} \int_{T^*S^1} d\xi \sum_{a=1}^N \left(Y_{ia} \frac{\partial X_a^i}{\partial \xi} - X_a^i \frac{\partial Y_{ia}}{\partial \xi} \right). \tag{3.3}$$

This field action $\mathcal{S}_N[X, Y]$ exhibits three special and remarkable features; first it is holomorphic and the corresponding hermitian $\mathcal{S}_N^{\text{real}}[X, \bar{X}]$ follows by setting

$$Y_{ia} = \overline{(X_a^i)}, \quad \xi = \bar{\xi} = t, \quad B = \bar{B}. \tag{3.4}$$

As such we have

$$\mathcal{S}_N^{\text{real}}[X, \bar{X}] = \frac{i \text{Re } B}{2} \int dt \sum_{a=1}^N \left(\overline{(X_a^i)} \frac{dX_a^i}{dt} - X_a^i \frac{d\overline{(X_a^i)}}{dt} \right). \tag{3.5}$$

The second feature of $\mathcal{S}_N[X, Y]$ deals with the hypersurface equation (2.16). Since $Y_{ia} X_a^i = \mu$ is a constraint equation on the dynamical field variables, it can be implemented in the action by

using a Lagrange gauge field $\Lambda = \Lambda(\xi)$. So Eq. (3.2) should be read as

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_N[X, Y, \Lambda] = & \frac{iB}{2} \int_{T^*S^1} d\xi \sum_{a=1}^N \left(Y_{ia} \frac{\partial X_a^i}{\partial \xi} - X_a^i \frac{\partial Y_{ia}}{\partial \xi} \right) \\ & + \frac{B}{2} \int_{T^*S^1} d\xi \sum_{a=1}^N \Lambda_a(\xi) (Y_{ia}(\xi) X_a^i(\xi) - \mu). \end{aligned} \tag{3.6}$$

The difference between $\mathcal{S}_N[X, Y]$ of Eq. (3.3) and the above $\mathcal{S}_N[X, Y, \Lambda]$ is that in the second description the field variables $X_a^i(\xi)$ and $Y_a^j(\xi)$ are unconstrained. Conifold target hypersurface is obtained by minimizing $\mathcal{S}_N[X, Y, \Lambda]$ with respect to Λ ,

$$\frac{\delta \mathcal{S}_N[X, Y, \Lambda]}{\delta \Lambda_a} = Y_{ia}(\xi) X_a^i(\xi) - \mu = 0. \tag{3.7}$$

The third feature concerns the computation of the conjugate momentum $\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial X^i / \partial \xi)}$ of the field variable X^i . One discovers that the coordinate variables Y_i and X^i are conjugate fields. This property shows that the underlying conifold geometry with the background field behaves as a non commutative manifold.

Notice that, as required by the construction, Eq. (3.2) is invariant under the global symmetry

$$\begin{aligned} \xi & \rightarrow \lambda \xi, \\ X_a^i & \rightarrow \lambda X_a^i, \\ Y_a^i & \rightarrow \frac{1}{\lambda} Y_a^i, \end{aligned} \tag{3.8}$$

with $\frac{d\lambda}{d\xi} = 0$. This is a crucial point as far as we are thinking about conifold as given by the fibration $T^*S^1 \times T^*S^2$. Now, using the fluid approximation mapping the system $\{X_a^i(\xi), Y_a^j(\xi), \Lambda_a(\xi); 1 \leq a \leq N\}$ into the 3D holomorphic fields $\mathcal{X}^i = \mathcal{X}^i(\xi, x, y)$, $\mathcal{Y}^j = \mathcal{Y}^j(\xi, x, y)$ and $*$ = $*(\xi, x, y)$, we can put Eq. (3.6) as a complex 3D holomorphic field action

$$\mathcal{S}_2[\mathcal{X}, \mathcal{Y}, *] = \int_{T^*S^3} d^3v \mathcal{L}_2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, *), \tag{3.9}$$

with

$$\mathcal{L}_2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, *) = \frac{iB}{2\mu} [(\mathcal{Y}_i \partial_0 \mathcal{X}^i - \mathcal{X}^i \partial_0 \mathcal{Y}_i) - i\Lambda(\mathcal{Y}_i \mathcal{X}^i - \mu)], \tag{3.10}$$

and $\partial_0 = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \ln \xi}$ and where d^3v is the conifold holomorphic volume measure given by

$$d^3v = \frac{d\xi \wedge dx^i \wedge dy_i}{\xi}, \quad x^i y_i = \mu. \tag{3.11}$$

For more details on the specific properties of this complex volume see [12]; for the moment let us push forward this description using the $T^*S^1 \times T^*S^2$ realization of conifold. In this view, notice that on T^*S^1 , the global holomorphic operator $\partial = d\xi \frac{\partial}{\partial \xi}$ may be also written as $\partial = d\zeta_0 \partial_0$ with $d\zeta_0 = \frac{d\xi}{\xi}$ and ∂_0 as before. Notice moreover that one can express the field action $\mathcal{S}_2[\mathcal{X}, \mathcal{Y}, *]$ in term of the \mathcal{C}_\pm gauge field fluctuations. Using the splitting $\mathcal{X}^i = x^i + \mu \mathcal{C}_+^i$ and $\mathcal{Y}_i = y_i - \mu \mathcal{C}_{-i}$,

we obtain

$$\mathcal{L}_2(\mathcal{C}_\pm, A) = \frac{\mathbf{B}\mu}{2i} [(C_{-i}\partial_0 C_+^i - C_+^i\partial_0 C_{-i}) + iA(y_i C_+^i - C_{-i}x^i - C_{-i}C_+^i)], \quad (3.12)$$

where we have dropped out the total derivatives $\frac{d}{d\xi}(y_i C_+^i + x^i C_{-i})$. Doing the same thing for the splitting $\mathcal{X}^i = x^i E_{+-} + y^i A_{++}$ and $\mathcal{Y}_i = y_i E_{-+} - x_i A_{--}$ and substituting these relations back into Eq. (3.10), we get

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2[E, A, \tilde{\Lambda}] &= \frac{\mu^2 \mathbf{B}}{2} (E_{-+}\partial_0 E_{+-} - E_{+-}\partial_0 E_{-+}) + \frac{\mu^2 \mathbf{B}}{2} (A_{--}\partial_0 A_{++} - A_{++}\partial_0 A_{--}) \\ &\quad + \frac{\mu \mathbf{B}}{2} \tilde{\Lambda} (E_{+-}E_{-+} - A_{++}A_{--} - 1), \end{aligned} \quad (3.13)$$

invariant under the projective symmetry with $\tilde{\Lambda}$ a Lagrange gauge field parameter carrying the conifold constraint hypersurface. By using the D_0 charge operator, the transformations (2.23) can be also stated as $D_0 E_{\pm\mp} = 0$, $D_0 A_{\pm\pm} = \pm 2A_{\pm\pm}$; they follow as well from the identities $D_0 \mathcal{X}^i = \mathcal{X}^i$ and $D_0 \mathcal{Y}^i = -\mathcal{Y}^i$. Note that by substituting $E_{+-} = 1 + A_{+-}$ and $E_{-+} = 1 - A_{+-}$, one sees that the term $(E_{-+}\partial_0 E_{+-} - E_{+-}\partial_0 E_{-+})$ reduces to a total derivative $\partial_0(2A_{+-})$ and so can be ignored in such a realization.

3.2. Implementing density constraint equation

First note that to get the density constraint equation in the fluid approximation, one computes the total number N of D strings by using two paths; once by the coordinate frame $\{x, y\}$ and second by using the frame $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$. Then equating the two expressions since this number is invariant under coordinate transformation. Supposing that fluid density is uniform $\rho(\xi, x, y) = \rho_0$, a property implying

$$N = \int_{T^*S^3} \rho d^3v = \rho_0 \int_{T^*S^3} d^3v, \quad (3.14)$$

and using the fact that this number is a constant, one gets a constraint equation on the Jacobian $J(x, y) = \left| \frac{\partial^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\partial^2(x, y)} \right|$ of the general transformation

$$x \rightarrow \mathcal{X} = \mathcal{X}(x, y), \quad y \rightarrow \mathcal{Y} = \mathcal{Y}(x, y). \quad (3.15)$$

Eq. (3.14) requires that $J(x, y) = 1$. Let us give some details on this calculation. Since the density is uniform, we should have

$$\rho_0 \int_{T^*S^3} d^3\mathcal{V} = \rho_0 \int_{T^*S^3} d^3v. \quad (3.16)$$

Using the explicit expressions of the conifold holomorphic volume 3-form which we write first as $d^3\mathcal{V} = \frac{d\xi}{\xi} \wedge d^2S$ and second $d^3v = \frac{dx^i}{\xi} \wedge d^2s$. Then expanding the K3 holomorphic 2-form $d^2S = (d\mathcal{X}^i \wedge d\mathcal{Y}_i)$, we get after some straightforward algebra

$$\mu d^2S = \{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{+-} d^2s + \{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{0-} dx^i \wedge dx_i + \{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{0+} dy^i \wedge dy_i. \quad (3.17)$$

In this relation $d^2s = (dx^i \wedge dy_i)$ and $\{f, g\}_{p,q}$ stand for the Poisson brackets defined as

$$\{f, g\}_{+-} = (D_{++}f)(D_{--}g) - (D_{--}f)(D_{++}g),$$

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{0-} &= (D_0 f)(D_{--} g) - (D_{--} f)(D_0 g), \\ \{f, g\}_{0+} &= (D_0 f)(D_{++} g) - (D_{++} f)(D_0 g), \end{aligned} \tag{3.18}$$

with $D_{\pm\pm,0}$ generating the $SL(2, C)$ isometry equations (2.29). Volume preserving diffeomorphisms require then the following constraint equations to be hold

$$\{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{+-} = (D_{++} \mathcal{X}^i)(D_{--} \mathcal{Y}_i) - (D_{--} \mathcal{X}^i)(D_{++} \mathcal{Y}_i) = \mu, \tag{3.19}$$

and

$$\begin{aligned} \{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{0-} &= (D_0 \mathcal{X}^i)(D_{--} \mathcal{Y}_i) - (D_{--} \mathcal{X}^i)(D_0 \mathcal{Y}_i) = 0, \\ \{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{0+} &= (D_0 \mathcal{X}^i)(D_{++} \mathcal{Y}_i) - (D_{++} \mathcal{X}^i)(D_0 \mathcal{Y}_i) = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

A careful inspection shows that the last two conditions are not really constraint equations. The point is that because of the identities

$$D_0 \mathcal{X}^i = \mathcal{X}^i, \quad D_0 \mathcal{Y}_i = -\mathcal{Y}_i, \tag{3.21}$$

required by K3 geometry, the two last constraint equations can be brought to

$$\{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{0-} = D_{--}(\mathcal{X}^i \mathcal{Y}_i), \quad \{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{0+} = D_{++}(\mathcal{X}^i \mathcal{Y}_i). \tag{3.22}$$

But these relations vanishes identically because of the identity $\mathcal{X}^i \mathcal{Y}_i = \mu = \text{constant}$. Therefore the volume transformation (3.17) becomes $\mu d^2 S = \{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{+-} d^2 s$ and so we are left with one constraint relation; namely $\{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{+-} = \mu$ which can be implemented in the field action (3.10) by help of a Lagrange gauge field \mathcal{C}_0 . To that purpose note that by setting $\mathcal{J}_{\pm\pm} = \pm(\mathcal{C}_0 \mathcal{Y}_i D_{\pm\pm} \mathcal{X}^i)$, one can check that we have

$$\int d^3 v \mathcal{C}_0 [\{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{+-} - \mu] = \int d^3 v (\mathcal{Y}_i \{\mathcal{C}_0, \mathcal{X}^i\}_{+-}) \tag{3.23}$$

where we have dropped out the boundary term $\int d^3 v [D_{--} \mathcal{J}_{++} + D_{++} \mathcal{J}_{--}]$. Implementing this identity in the field action as usual, we get the following holomorphic functional

$$\mathcal{S}_{\text{DSF}}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}_0] = \int_{T^*S^3} d^3 v \mathcal{L}_{\text{DSF}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}_0), \tag{3.24}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DSF}}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}_0] &= \frac{i\mathbf{B}}{2\mu} (\mathcal{Y}_i \partial_0 \mathcal{X}^i - \mathcal{X}^i \partial_0 \mathcal{Y}_i) + \frac{\mathbf{B}}{2\mu} \Lambda (\mathcal{Y}_i \mathcal{X}^i - \mu) \\ &\quad - \frac{\mathbf{B}}{\mu} (\mathcal{Y}_i \{\mathcal{C}_0, \mathcal{X}^i\}_{+-} - \mathcal{X}^i \{\mathcal{C}_0, \mathcal{Y}_i\}_{+-}). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Using the previous splitting of the D string fields \mathcal{X}^i and \mathcal{Y}_i , we can express this field action in terms of the gauge fields either as $\mathcal{S}_{\text{DSF}} = \mathcal{S}_{\text{DSF}}[\mathcal{C}_{\pm i}, \mathcal{C}_0, \Lambda]$ or equivalently as $\mathcal{S}_{\text{DSF}} = \mathcal{S}_{\text{DSF}}[E, A, \mathcal{C}_0, \Lambda]$. Let us do this calculation for the splitting $\mathcal{X}^i = x^i + \mu \mathcal{C}_+^i$ and $\mathcal{Y}_i = y_i - \mu \mathcal{C}_{-i}$. In this case the density constraint equation $\{\mathcal{X}^i, \mathcal{Y}_i\}_{+-} = \mu$ reads in terms of the $\mathcal{C}_{\pm i}$ gauge fields as follows

$$\{x^i, \mathcal{C}_{-i}\}_{-+} - \{\mathcal{C}_+^i, y_i\}_{-+} + i\mu \{\mathcal{C}_+^i, \mathcal{C}_{-i}\}_{-+} = 0. \tag{3.26}$$

This relation can be put into a more interesting way by setting $\{x^i, F\}_{-+} = \partial_+^i F$, $\{F, y_i\}_{-+} = \partial_{-i} F$ with the remarkable properties $\partial_+^i \partial_{-i} = -y_i D_{++} (x^i D_{--}) = -\mu D_{++} D_{--}$ and $\partial_{-i} \partial_+^i = -x^i D_{--} (y_i D_{++}) = -\mu D_{--} D_{++}$. Putting these relations back into (3.26), we obtain

$$\partial_+^i C_{-i} - \partial_{-i} C_+^i - i(\partial_+^k C_+^i \partial_{-k} C_{-i} - \partial_{-k} C_+^i \partial_+^k C_{-i}) = 0, \tag{3.27}$$

or equivalently by introducing Poisson bracket $\{F, G\}_{\text{PB}} \equiv (\partial_{+k} F)(\partial_{-k} G) - (\partial_{-k} F)(\partial_{+k} G)$,

$$\partial_+^i C_{-i} - \partial_{-i} C_+^i - i\{C_+^i, C_{-i}\}_{\text{PB}} = 0. \tag{3.28}$$

Note also that $\{F, G\}_{\text{PB}}$ is just $\mu\{F, G\}_{-+}$. As we see, this is a typical equation of motion of noncommutative gauge theory; it can be then thought of as the minimization of an invariant gauge field $\mathcal{S}_{\text{DSF}}[C_{\pm}, C_0]$ with gauge fields C_{\pm}^i and C_0 . In this view, we have

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\text{DSF}}[C_{\pm}, C_0]}{\delta C_0} = \partial_+^i C_{-i} - \partial_{-i} C_+^i - i\{C_+^i, C_{-i}\}_{\text{PB}} = 0, \tag{3.29}$$

from which we can determine $\mathcal{S}_{\text{DSF}}[C_{\pm}, C_0]$ taking into account equation (3.12). Setting

$$\mathcal{S}_{\text{DSF}}[C_{\pm}, C_0, A] = \frac{iB}{2\mu} \int_{T^*S^3} d^3v \mathcal{L}_{\text{DSF}}[C_{\pm}, C_0, A],$$

we have

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DSF}}[C_{\pm}, C_0, A] &= \frac{iB\mu}{2} (C_+^i \partial_0 C_{-i} - C_{-i} \partial_0 C_+^i) \\ &\quad - \frac{B\mu}{2} [2(C_0 \partial_+^i C_{-i} - C_0 \partial_{-i} C_+^i) - 2C_0 \{C_+^i, C_{-i}\}_{\text{PB}}] \\ &\quad + \frac{B\mu}{2} A (y_i C_+^i - C_{-i} x^i - C_{-i} C_+^i). \end{aligned} \tag{3.30}$$

This holomorphic Lagrangian density may be put into a more convenient way by performing an integration by part and dropping out the total derivatives. Replacing

$$C_0 \{F, G\}_{-+} = -F \{C_0, G\}_{-+} + F C_0 D_0 G + \text{total derivative} \tag{3.31}$$

for holomorphic functions F and G on conifold we have

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DSF}}[C_{\pm}, C_0] &= \frac{iB\mu}{2} \left[C_+^i \partial_0 C_{-i} - C_+^i \partial_{-i} C_0 - \frac{2i}{3} C_+^i \{C_0, C_{-i}\}_{\text{PB}} \right] \\ &\quad + \frac{iB\mu}{2} \left[-C_0 \partial_+^i C_{-i} + C_0 \partial_{-i} C_+^i + \frac{2i}{3} C_0 \{C_+^i, C_{-i}\}_{\text{PB}} \right] \\ &\quad + \frac{iB\mu}{2} \left[C_{-i} \partial_+^i C_0 - C_{-i} \partial_0 C_+^i - \frac{2i}{3} C_{-i} \{C_+^i, C_0\}_{\text{PB}} \right], \end{aligned} \tag{3.32}$$

where we have set $(y_i C_+^i - x^i C_{-i} - C_+^i C_{-i}) = 0$ describing gauge fluctuations restricted to conifold. By substituting $\mu C_+^i = x^i A_{+-} + y^i A_{++}$ and $\mu C_{-i} = -y_i A_{-+} + x_i A_{--}$ in the above gauge field action, one gets the expression of $\mathcal{L}_{\text{DSF}}[A_{+-}, A_{++}, A_{-+}, A_{--}]$ in terms of the gauge fields A_{+-}, A_{++}, A_{-+} and A_{--} .

In the end notice that on the real slice of conifold with parameter $\text{Re } \mu$, background field $\text{Re } B$ and field variables as

$$\mathcal{Y}_i = \overline{(\mathcal{X}^i)} \quad \Leftrightarrow \quad C_{-i} = \overline{(C_+^i)}, \tag{3.33}$$

the previous field action reduces to noncommutative Chern–Simons gauge theory in real three dimensions. In this case $(\text{Re } B) \times (\text{Re } \mu)$ should be equal to Kac–Moody level k .

4. Holomorphy and quantum corrections

Though natural from classical view, the correspondence between FQH systems and fluids of D-strings in conifold described above is however no longer obvious at quantum level. In the D-string fluid proposal, the classical free degrees of freedom of the holomorphic sector

$$\mathcal{S}_N[X, Y] = \frac{iB}{2} \int_{T^*S^1} d\zeta \sum_{a=1}^N \left(Y_{ia} \frac{\partial X_a^i}{\partial \zeta} - X_a^i \frac{\partial Y_{ia}}{\partial \zeta} \right), \tag{4.1}$$

and the corresponding antiholomorphic one

$$\mathcal{S}_N^*[X^*, Y^*] = \frac{-iB}{2} \int_{T^*S^1} d\bar{\zeta} \sum_{a=1}^N \left(Y_{ia}^* \frac{\partial X_a^{*i}}{\partial \bar{\zeta}} - X_a^{*i} \frac{\partial Y_{ia}^*}{\partial \bar{\zeta}} \right), \tag{4.2}$$

may couple quantum mechanically unless this is forbidden by underlying symmetries. Typical examples of these powerful symmetries, one encounters in such kind of situations, are generally given by conformal invariance, supersymmetry and their extensions. In this section, we make general comments on quantum effects in the D string system and give a discussion on how supersymmetry can help to overcome difficulties. Implication of supersymmetry in the game can be motivated from several views starting from complex Kähler geometry of T^*S^3 and ending with topological aspects of 2d fields on conifold. To fix the ideas on the way we will do things, we recall the standard parallel between field holomorphy in conifold geometry and chirality in 2d $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric nonlinear sigma model captured by the usual supersymmetric derivatives $\bar{D}_{\pm 1/2}$. Using this parallel, we shall show that the holomorphic Lagrangian density $L(X, Y) = B \sum_{a=1}^N Y_{ia} (\partial X_a^i / \partial \zeta)$ of the D-string fluid can be thought of as following from the chiral superspace Lagrangian of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric sigma model in large B field

$$L_{\text{chiral}}[\Phi] = \int_{SM_-} d^2\theta \mathcal{W}(\Phi), \tag{4.3}$$

where Φ refers to generic chiral superfields and SM_- to chiral superspace. In this relation, $\mathcal{W}(\Phi) \sim (B \sum_{a=1}^N \Phi_{a1} \Phi_{a2})$ is chiral the superpotential. Substituting the chiral superfields Φ_{ia} by their θ -expansions; i.e.,

$$\Phi_{ia} \sim Y_{ia} + \dots + \theta_{+1/2} \theta_{-1/2} F_{ia}, \quad i = 1, 2, \tag{4.4}$$

where we have dropped out fermions and where F_{ia} are auxiliary fields to be specified in a moment; then integrating with respect to the Grassman variables $\theta_{\pm 1/2}$, gives the following field component product $B(\sum_{a=1}^N Y_{ia} F_{ia})$. By taking the auxiliary fields F_{ia} as

$$F_{ia} = \left(\sqrt{\mu} \epsilon_{ij} X_a^j + \epsilon_{ij} \frac{\partial X_a^j}{\partial \zeta} \right), \tag{4.5}$$

where ϵ_{ij} is the usual spinor metric and μ the conifold complex parameters, one discovers, up to a constant, the above holomorphic Lagrangian density.

Before going ahead, it should be also noted that the comments we shall give below are certainly not final answers; but just a tentative to approach aspects of quantum behaviour of D string fluid in conifold. The discussion presented below relies on path integral method for quantization. But may be the more natural way to do would be extending matrix model approach of Susskind–Polychronakos (SP) for FQH droplets. Recall that SP method uses canonical quantization. We will give a brief comment on this method in the end of this section. More involved details may be found in [15].

This discussion is organized as follows: in Section 4.1, we explore the consequences of quantum effects on conifold geometry and derive the constraint equation on quantum consistency of holomorphy property. Using path integrals quantization method, we show that holomorphy persists as far quantum fluctuations are restricted to complex deformations of conifold. Implementation of Kähler deformations destroys this behaviour since holomorphic and antiholomorphic modes get coupled. In Section 4.2, we study the embedding the D string model in a supersymmetric theory and too particularly in its chiral sectors. The latter seems to be the appropriate theory that governs the quantum fluctuations of the D-string fluid in conifold. As a first step in checking this statement, we start by describing the field theoretic derivation of holomorphy hypothesis considered in Section 2. Then we give a correspondence with $2d \mathcal{N} = 2$ supersymmetric nonlinear sigma model with conifold as a target space; in presence of a background magnetic field B . We end this section by discussing the statistics of the D-string system which requires a filling fraction $\nu = \frac{1}{k}$ with even integer Kac–Moody levels k .

4.1. Quantum effects and conifold deformations

A way¹ to study the quantum effects on the holomorphy feature of the D-string fluid model is to proceed as follows. First think about the D string fluid model as a classical field theory based on the conifold geometry $xy - zw = \mu$. This means that the complex threefold, with its complex modulus μ , can be thought of as a classical geometry. Quantum mechanically, the above fields are subject to fluctuations and so the complex parameter μ gets corrections induced by quantum effects. To have an idea on the nature of these quantum corrections, we consider fluctuations of the D-strings around the classical field configurations x, y, z, w . These field fluctuations can be written as

$$\phi \rightarrow \phi + \delta F_\phi, \quad \phi = x, y, z, w, \quad (4.6)$$

with the generic fields $\phi = \phi(\xi)$ is as in Eq. (2.6) and δF_ϕ describing the perturbations around the classical field ϕ . Notice that these fluctuations are involved in the computation of the partition function $\mathcal{Z}[j]$ of the model

$$\mathcal{Z}[j] = \int (\prod D\phi) \exp \frac{i}{\hbar} \left(S[\phi] + \int j\phi \right), \quad (4.7)$$

where $\prod D\phi$ stays for the usual field path integral measure. As it is known, this quantity generates the Green functions of the quantum model with j being the usual external source. Notice also that the δF_ϕ deformations should a priori depend on both the string fields ϕ and their complex

¹ An other tentative to approach the fluid of D-strings in conifold, by using a generalization of matrix model method based on canonical quantization, has been developed in [15]. There and as a first step in dealing with the problem, one focuses on the study of quantum droplets for the conifold sub-varieties \mathbb{S}^3 and \mathbb{S}^2 .

conjugates $\bar{\phi}$ as shown below

$$\delta F_{\phi} = F(\phi, \bar{\phi}). \tag{4.8}$$

By implementing the fluctuations (4.6) into the D-string fluid model, one discovers that the classical geometry $xy - zw = \mu$ we started with gets now deformed as follows

$$xy - zw = \mu + \mathcal{F}, \tag{4.9}$$

where the functional \mathcal{F} capturing the field fluctuations is given by

$$\mathcal{F} = x\delta F_y + y\delta F_x - z\delta F_w - w\delta F_z. \tag{4.10}$$

Like for Eq. (4.8), one sees that \mathcal{F} depends in general on both the fields x, y, z, w and their complex conjugate \bar{x}

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\phi, \bar{\phi}), \quad \phi = x, y, z, w. \tag{4.11}$$

Thus, quantum mechanical effects encoded in the functional $\mathcal{F}(\phi, \bar{\phi})$ break holomorphy of the classical conifold geometry unless field deformations δF_{ϕ} are restricted to holomorphic perturbations around the classical field configuration. In this special case, we have

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\phi}} = 0, \tag{4.12}$$

and so classical holomorphy is preserved quantum mechanically. This is the condition for quantum decoupling of holomorphic and antiholomorphic degrees of freedom. This property has a geometric interpretation in term of conifold structure deformations; it means that only complex deformations of holomorphic volume that are allowed for having a consistent quantum mechanics. It is also interesting to note that Eq. (4.12) is a strong condition; its solution requires however a strong symmetry which apparently D-string fluid model does not exhibit manifestly; at least not as things have been formulated so far. Note moreover that as far as quantum holomorphy is concerned, to our knowledge only supersymmetry that has the magic power to deal with target space holomorphy. There, quantum corrections are controlled by the so-called nonrenormalization theorem.

The next question is how the string fluid model could be related to 2d $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric nonlinear sigma model with conifold as target space. Thinking about the D-string model as the bosonic part of a supersymmetric theory does not answer exactly the question since there are Kähler deformations induced by quantum effects that destroy the classical holomorphy property. To overcome such difficulty one should then associate the action of the D-string model with chiral superpotentials

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Phi), \tag{4.13}$$

of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric nonlinear sigma model. In what follows, we develop a way to do it. Though not exact and needs more investigations, this approach offers however an important step towards the goal.

4.2. Supersymmetric embedding

To begin recall that there is a closed connection between Kähler geometry and $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in two dimensions. The fact that the fluid of D-strings is described by a topological

holomorphic gauge theory, let understand that this model can be embedded in a $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric theory; from which one can get informations about quantum corrections. In this view holomorphy property is interpreted as the target space manifestation of chirality feature of 2d $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric sigma models with conifold as target space. A close idea is used in building topological string theory by using twist of 2d $N = 2$ superconformal algebra [17] and a correspondence with type II superstrings on Calabi–Yau threefolds [18]. In our concern, we have the following correspondence

$$\begin{aligned} \int d\zeta \dots &\rightarrow \int d^2\theta \dots, \\ \int d\bar{\zeta} \dots &\rightarrow \int d^2\bar{\theta} \dots, \\ \int d^2\zeta \dots &\rightarrow \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \dots, \end{aligned} \tag{4.14}$$

with the $\theta_{\pm 1/2}$'s and $\bar{\theta}_{\pm 1/2}$'s the usual Grassman variables. Similar things may be also written down for $\partial/\partial\zeta$ and supersymmetric derivatives. Before that, let us start by deriving rigorously the holomorphy hypothesis of Section 2 by using a field theoretical method; then come back to the correspondence between target space holomorphy and 2d $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric chirality.

4.2.1. Holomorphy property and boundary QFT₂

Holomorphy is one of the basic ingredients we have used in deriving the D-string model developed in this paper. It has been imposed in order to complete the conifold realization $T^*\mathbb{S}^3$ as a fibration of $T^*\mathbb{S}^1$ over the base $T^*\mathbb{S}^2$. In this study, we first give the field theoretic derivation of this holomorphy hypothesis; it appears as the solution of a constraint equation required by boundary field theory in two dimensions. Then we derive the field action (3.5); its connection with supersymmetric models is considered in the next subsection.

To proceed and seen that the model we are studying involves complex fields, it is then natural to start from the following bosonic QFT₂ field action

$$S[\phi, \bar{\phi}] = \int_M d^2\zeta (G_{\alpha\bar{\beta}} \partial_+ \phi^\alpha \partial_- \bar{\phi}^\beta), \tag{4.15}$$

where M is a real surface parameterized by the local complex coordinates $(\zeta, \bar{\zeta})$. The fields $\phi^\alpha = \phi^\alpha(\zeta, \bar{\zeta})$ form a set of complex 2d scalar fields parameterizing some target Kähler manifold with metric $G_{\alpha\bar{\beta}} = G_{\alpha\bar{\beta}}(\phi, \bar{\phi})$. To make contact with conifold geometry and the fluid of N strings, we think about these field variables as

$$\phi^\alpha(\zeta, \bar{\zeta}) = X_a^i(\zeta, \bar{\zeta}), \quad i = 1, 2, \quad a = 1, \dots, N, \tag{4.16}$$

with X_a^i an $SU(2)$ doublet like in Eq. (2.12) and to fix the ideas the field doublet Y_{ia} are set to \bar{X}_a^i . Once the idea is exhibited, the field \bar{X}_a^i will be promoted to Y_{ia} . In this case, the Kähler metric $G_{\alpha\bar{\beta}}$ may be split as

$$G_{\alpha\bar{\beta}}(\phi, \bar{\phi}) = \delta_{ab}[g_{(ij)} + B\epsilon_{ij}], \tag{4.17}$$

where the $SU(2)$ triplet $g_{(ij)}$ is a function on the target space field coordinates; i.e., $g_{(ij)} = g_{(ij)}(\phi, \bar{\phi})$, and where ϵ_{ij} is the usual antisymmetric $SU(2)$ invariant tensor. In the special case where B is field independent and strong enough so that we can neglect the term $g_{(ij)}$, the metric

$G_{\alpha\bar{\beta}}$ reduces essentially to $B\delta_{ab}\epsilon_{ij}$; and so one is left with the following approximated field action

$$S[X, \bar{X}] \simeq \int_M d^2\zeta \left(B\epsilon_{ij} \sum_{a=1}^N \partial_+ \bar{X}_a^j \partial_- X_a^i \right), \tag{4.18}$$

where we have set $\zeta = \zeta_-$, $\bar{\zeta} = \zeta_+$ and $\partial_+ = \partial_\zeta$, $\partial_- = \partial_{\bar{\zeta}}$. Moreover since B is a constant, one can split this action as follows

$$\begin{aligned} S[X, \bar{X}] \simeq & \frac{B}{2} \int_M d\zeta_- \left[d\zeta_+ \partial_- \left(\sum_{a=1}^N (\partial_+ \bar{X}_{ia}) X_a^i \right) \right] \\ & + \frac{B}{2} \int_M d\zeta_+ \left[d\zeta_- \partial_+ \left(\sum_{a=1}^N \bar{X}_{ia} (\partial_- X_a^i) \right) \right] \\ & - \frac{B}{2} \int_M d^2\zeta \sum_{a=1}^N [(\partial_- \partial_+ \bar{X}_{ia}) X_a^i + \bar{X}_{ia} (\partial_+ \partial_- X_a^i)], \end{aligned} \tag{4.19}$$

where the summation over $SU(2)$ indices is understood. By integrating the two first terms of above relation, one sees that the field action $S[X, \bar{X}]$ decomposes as

$$S \simeq S^{\text{boundary}} + S^{\text{bulk}} \tag{4.20}$$

with two factors for $S^{\text{boundary}} = S^{\text{bound}}$ as given below

$$S^{\text{bound}} = \frac{B}{2} \int_{\partial M_-} d\zeta \left(\sum_{a=1}^N (\partial_+ \bar{X}_{ia}) X_a^i \right) + \frac{B}{2} \int_{\partial M_+} d\bar{\zeta} \left(\sum_{a=1}^N \bar{X}_{ia} (\partial_- X_a^i) \right), \tag{4.21}$$

where ∂M_{\pm} stand for the oriented boundaries of the Riemann surface M and

$$S^{\text{bulk}} = - \int_M d^2\zeta \sum_{a=1}^N \left[\frac{B}{2} (\partial_- \partial_+ \bar{X}_{ia}) X_a^i + \frac{B}{2} \bar{X}_{ia} (\partial_+ \partial_- X_a^i) \right]. \tag{4.22}$$

Equating (4.18) and (4.21), one gets the holomorphy condition of the field variables

$$\left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} X_a^i(\zeta, \bar{\zeta}) \right]_{\partial M} = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \bar{X}_{ia}(\zeta, \bar{\zeta}) \right]_{\partial M} = 0. \tag{4.23}$$

These constraint relations are solved by field holomorphy as shown below

$$\begin{aligned} X_a^i(\zeta, \bar{\zeta}) &= X_a^i(\zeta) + X_a^i(\bar{\zeta}), \\ \bar{X}_{ia}(\zeta, \bar{\zeta}) &= X_{ia}^*(\zeta) + X_{ia}^*(\bar{\zeta}). \end{aligned} \tag{4.24}$$

They tell us that on the boundary ∂M of the Riemann surface, we have two heterotic free field theories; a holomorphic sector with field variables

$$X_a^i(\zeta), \quad X_{ia}^*(\zeta), \tag{4.25}$$

which, for convenience and avoiding confusion we set $X_{ia}^*(\zeta) = Y_{ia}(\zeta)$, and an antiholomorphic one with

$$X_{ia}^*(\bar{\zeta}) = \overline{(X_a^i(\zeta))}, \quad X_a^i(\bar{\zeta}) = \overline{(Y_{ia}(\zeta))}, \tag{4.26}$$

in agreement with the hypothesis on holomorphicity of the string coordinates.

4.2.2. *Supersymmetric interpretation*

The decomposition of the field action $S[\text{QFT}_2]$ equations (4.15)–(4.18) taken in the limit large B field is very suggestive. First, because it explains the origin of holomorphy hypothesis we have used to build the model of the fluid of D strings. As such, one should distinguish between fields in bulk and fields in boundary given by Eqs. (4.25)–(4.26). Second it permits a one to one correspondence with $2d \mathcal{N} = 2$ supersymmetric nonlinear sigma models. More precisely the three terms of the field action of the bosonic QFT_2 in large B limit

$$S[\text{QFT}_2] = - \int_M d^2\zeta \sum_{a=1}^N \left[\frac{B}{2} X_a^i (\partial_- \partial_+ \bar{X}_{ia}) + \frac{B}{2} \bar{X}_{ia} (\partial_+ \partial_- X_a^i) \right] - \int_{\partial M_-} d\zeta \left(\frac{B}{2} \sum_{a=1}^N Y_{ia} (\partial_+ X_a^i) \right) - \int_{\partial M_+} d\bar{\zeta} \left(\frac{B}{2} \sum_{a=1}^N \overline{(Y_{ia})} (\partial_- \overline{(X_a^i)}) \right), \tag{4.27}$$

are in one to one with the usual three blocks of $2d \mathcal{N} = 2$ supersymmetric nonlinear sigma models

$$S_{\mathcal{N}=2}[\Phi, \Phi^+] = \int_{SM} d^2\nu d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{K}(\Phi_i, \Phi_i^+) + \int_{SM_-} d^2\nu d^2\theta \mathcal{W}(\Phi_i) + \int_{SM_+} d^2\nu d^2\bar{\theta} \bar{\mathcal{W}}(\Phi_i^+). \tag{4.28}$$

In this relation, the symbol SM stands for the usual two-dimensional superspace with supercoordinates $(\nu_{\pm}, \theta_{\pm 1/2}, \bar{\theta}_{\pm 1/2})$ and SM_{\pm} stand for the two associated chiral superspaces. The Φ_i 's (respectively Φ_i^+) are chiral (respectively antichiral) superfields living on SM_- (respectively SM_+), $\mathcal{K}(\Phi, \Phi^+)$ is the Kähler superpotential and $\mathcal{W}(\Phi)$ the usual complex chiral superpotential. Like for the holomorphic functions $f = f(\zeta)$ living on ∂M_- and satisfying the holomorphy property

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = 0, \tag{4.29}$$

we have for chiral superfields $\Phi(\tilde{\nu}_{\pm}, \theta_{\pm 1/2})$ living on SM_- , the following chirality property,

$$\bar{D}_{\pm 1/2} \Phi = 0. \tag{4.30}$$

By comparison of the two actions, one sees that the bulk term S^{bulk} of the QFT_2 equation (4.27) is associated with Kähler term of the supersymmetric sigma model

$$S^{\text{bulk}}[\text{QFT}_2] \longleftrightarrow \int_{SM} d^2\nu d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{K}(\Phi_i, \Phi_i^+), \tag{4.31}$$

while the two boundary terms S_{\pm}^{bound} are associated with the chiral superfield actions. More precisely, we have

$$\int_{\partial M_-} d\zeta \left(\sum_{a=1}^N \frac{B}{2} Y_{ia} F_a^i \right) \longleftrightarrow \int_{SM_-} d^2\nu d^2\theta \mathcal{W}(\Phi_i), \tag{4.32}$$

where we have set $F_a^i = (\partial_{\zeta} X_a^i)$ and by putting after setting $\bar{F}_{i\bar{a}} = (\partial_{\bar{\zeta}} \overline{X_a^i})$, we also have

$$\int_{\partial M_+} d\bar{\zeta} \left(\sum_{a=1}^N \frac{B}{2} \overline{(Y_{ia})} \overline{(F_a^i)} \right) \longleftrightarrow \int_{SM_+} d^2\nu d^2\bar{\theta} \bar{\mathcal{W}}(\Phi_i^+). \tag{4.33}$$

Now, considering two chiral superfields $\Phi_1 = \Phi_1(\nu_{\pm}, \theta_{\pm 1/2})$ and $\Phi_2 = \Phi_2(\nu_{\pm}, \theta_{\pm 1/2})$ with θ -expansions

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= Y_1 + \theta_{+1/2} \psi_{-1/2} + \theta_{-1/2} \psi_{+1/2} + \theta_{+1/2} \theta_{-1/2} F_1, \\ \Phi_2 &= Y_2 + \theta_{+1/2} \varphi_{-1/2} + \theta_{-1/2} \varphi_{+1/2} - \theta_{+1/2} \theta_{-1/2} F_2, \end{aligned} \tag{4.34}$$

with Y_i and F_i being the bosonic complex fields, we can build the superpotential associated with the boundary QFT₂. We have

$$\int_{SM_-} d^2\theta \left(\sum_{a=1}^N \frac{B}{2} \Phi_{a1} \Phi_{a2} \right) = - \sum_{a=1}^N \left(\frac{B}{2} Y_{a1} F_{a2} - Y_{a2} F_{a1} \right), \tag{4.35}$$

which can be also written a covariant form as $\frac{B}{2} \sum_{a=1}^N (Y_{ia} F_a^i)$.

In the end of this section, we want to note that it would be interesting to push further the similarity between the fluid of D-strings and the usual FQH systems. As a next step, it is important to build the ground state $|\Phi_0\rangle$ of the quantized D-string model which may be done by extending the matrix model approach of Susskind and Polychronakos. Recall in passing that the fundamental wave function of standard FQH system on plane with filling fraction $\nu = \frac{1}{k}$ is described by the Laughlin wave

$$\Phi_L(x_1, \dots, x_N) \sim \prod_{a < b=1}^N (x_a - x_b)^k e^{-B \sum_{a=1}^N |x_a|^2}. \tag{4.36}$$

This wave function, which has been conjectured long time ago by Laughlin has been recently rederived rigorously in [16] by using matrix model method. Notice that under permutation of particles, the wave function behaves as

$$\Phi_L(x_1, \dots, x_a, \dots, x_b, \dots, x_N) = (-)^k \Phi_L(x_1, \dots, x_b, \dots, x_a, \dots, x_N). \tag{4.37}$$

Symmetry property of this function requires that k should be a positive odd integer for a system of fermions and an even integer for bosons.

5. Conclusion and outlook

In this paper, we have developed a gauge field theoretical model proposal for a classical fluid of D-strings running in conifold and made comments on its quantum behaviour. The field action S_{DSF} of this classical conifold model, in presence of a strong and constant RR background

magnetic field B , exhibits a set of remarkable features. It is a complex holomorphic functional $\mathcal{S}_{\text{DSF}}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}_0, *] = \int_{T^*S^3} d^3v \mathcal{L}_{\text{DSF}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}_0, *)$ with $\mathcal{L}_{\text{DSF}} = \mathcal{L}_{\text{DSF}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}_0, *)$ given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{DSF}} = & i \frac{\text{BRR}}{2\mu} (\mathcal{Y}_i \partial_0 \mathcal{X}^i - \mathcal{X}^i \partial_0 \mathcal{Y}_i) + \frac{\text{BRR}}{2\mu} * (\mathcal{Y}_i \mathcal{X}^i - \mu) \\ & - \frac{\text{BRR}}{\mu} \mathcal{C}_0 (D_{++} \mathcal{Y}_i D_{--} \mathcal{X}^i - D_{--} \mathcal{Y}_i D_{++} \mathcal{X}^i), \end{aligned} \quad (5.1)$$

where $*$ is a Lagrange gauge field capturing the conifold hypersurface. By setting $\{F, G\}_{+-} = (D_{++}F)(D_{--}G) - (D_{--}F)(D_{++}G)$ and using general properties of the Poisson bracket, in particular antisymmetry and Jacobi identity as well as the property

$$\mathcal{C}_0 \{\mathcal{Y}_i, \mathcal{X}^i\}_{+-} = -\mathcal{Y}_i \{\mathcal{C}_0, \mathcal{X}^i\}_{+-} - \mathcal{C}_0 \mathcal{Y}_i \mathcal{X}^i + (D_{++}J_{--} + D_{--}J_{++}), \quad (5.2)$$

with $J_{\pm\pm} = \pm(\mathcal{C}_0 \mathcal{Y}_i D_{\pm\pm} \mathcal{X}^i)$, the above holomorphic Lagrangian density \mathcal{L}_{DSF} can be also put into a gauge covariant way as follows

$$\mathcal{L}_{\text{DSF}} = i \frac{\text{BRR}}{2\mu} (\mathcal{Y}_i \mathcal{D}_0 \mathcal{X}^i - \mathcal{X}^i \mathcal{D}_0 \mathcal{Y}_i) + \frac{\text{BRR}}{2\mu} \Lambda (\mathcal{Y}_i \mathcal{X}^i - \mu), \quad (5.3)$$

with $\mathcal{D}_0 \mathcal{X}^i = \partial_0 \mathcal{X}^i + i\{\mathcal{C}_0, \mathcal{X}^i\}_{+-}$. The presence of the Poisson bracket $\{\mathcal{C}_0, *\}_{+-}$ in the gauge covariant derivative \mathcal{D}_0 is a signal of noncommutative gauge theory in the same spirit as in Susskind description of Laughlin fluid. The basic difference is that instead of a $U(1)$ gauge group, we have here a holomorphic \mathbb{C}^* gauge symmetry acting on scalar field as $\delta\oplus = \{\lambda, \oplus\}_{+-}$ and $\delta\mathcal{C}_0 = \partial_0 \lambda + i\{\mathcal{C}_0, \lambda\}_{+-}$ with λ being the gauge parameter. Moreover, thinking about the D-string field variables as

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^i &= x^i + \mu C_+^i, \\ \mathcal{Y}_i &= y_i - \mu C_{-i}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

where the gauge fields C_{\pm}^i describe fluctuations around the static solution, \mathcal{L}_{DSF} can be put in the form (3.32) defining a complex holomorphic extension of the usual noncommutative Chern–Simons gauge theory. Notice that the role of the noncommutative parameter θ of usual FQH liquid is now played by the complex modulus μ of the conifold in agreement with the observation of [9]. The topological gauge theory derived in this paper may be then thought of as enveloping Susskind description of fractional quantum Hall fluid in Laughlin state. The latter follows by restricting the conifold analysis to its Lagrangian sub-manifolds by using Eqs. (2.3). From this view the D-strings fluid constitutes a unified description of systems of FQH fluids in real three dimensions, in particular those involving $R \times S^2$ and S^3 geometries recovered as real slices of the conifold. The first geometry is obtained by restricting world sheet variable $\xi = t + i\sigma$ to its real part and the second geometry is recovered by identifying ξ with σ ; that is a periodic time. For instance, the restriction of Eq. (5.1) to the real three sphere reads as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{FQH}}^{\text{real}} = & \frac{\text{Re}(\text{BRR})}{2 \text{Re}(\mu)} [i(\bar{\mathcal{X}}_i \partial_0 \mathcal{X}^i - \mathcal{X}^i \partial_0 \bar{\mathcal{X}}_i) - 2\mathcal{C}_0 D_{++} \bar{\mathcal{X}}_i D_{--} \mathcal{X}^i] \\ & + \frac{\text{Re}(\text{BRR})}{2 \text{Re} \mu} [2\mathcal{C}_0 D_{--} \bar{\mathcal{X}}_i D_{++} \mathcal{X}^i + *(\bar{\mathcal{X}}_i \mathcal{X}^i - \text{Re} \mu)], \end{aligned} \quad (5.5)$$

where $\mathcal{X}^i = \mathcal{X}^i(\sigma, x, \bar{x})$, $\bar{\mathcal{X}}_i = \overline{(\mathcal{X}^i)}$, $\mathcal{C}_0 = \bar{\mathcal{C}}_0$, $*_0 = \bar{*}_0$ and

$$D_{++} = x^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}, \quad D_{--} = \bar{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad D_0 = [D_{++}, D_{--}]. \quad (5.6)$$

This analysis may be also viewed as a link between, on one hand, topological strings on conifold, and, on the other hand, noncommutative Chern–Simons gauge theory as well as FQH systems in real three dimensions. It would be interesting to deeper this relation which may be used to approach attractor mechanism on flux compactification by borrowing FQH ideas. To that purpose, one should first identify the matrix model regularization of the continuous field theory developed in this paper. This may be done by extending the results of [13,14] obtained in the framework of fractional quantum Hall droplets. An attempt using matrix field variables valued in $GL(N, \mathbb{C})$ representations is under study in [15], progress in this direction will be reported elsewhere.

Acknowledgement

This research work is supported by the program Protars III D12/25, CNRST.

References

- [1] L. Susskind, The quantum Hall fluid and non-commutative Chern–Simons theory, hep-th/0101029.
- [2] S. Hellerman, L. Susskind, Realizing the quantum Hall system in string theory, hep-th/0107200.
- [3] D. Karabali, Electromagnetic interactions of higher-dimensional quantum Hall droplets, Nucl. Phys. B 726 (2005) 407–420, hep-th/0507027.
- [4] A.E. Rhalami, E.H. Saidi, NC effective gauge model for multilayer FQH states, hep-th/0208144.
- [5] A.E. Rhalami, E.M. Sahraoui, E.H. Saidi, NC branes and hierarchies in quantum hall fluids, JHEP 0205 (2002) 004, hep-th/0108096.
- [6] S.C. Zhang, Quantum Hall effect in higher dimensions, Talk given at the Conference on Higher-Dimensional Quantum Hall Effect, Chern–Simons Theory and Non-Commutative Geometry in Condensed Matter Physics and Field Theory, AS-ICTP, Trieste, 1–4 March 2005.
- [7] H. Ooguri, A. Strominger, C. Vafa, Black hole attractors and the topological string, Phys. Rev. D 70 (2004) 106007, hep-th/0405146.
- [8] H. Ooguri, C. Vafa, E. Verlinde, Hartle–Hawking wave-function for flux compactifications, hep-th/0502211.
- [9] E.H. Saidi, Topological $SL(2)$ gauge theory on conifold and noncommutative geometry, hep-th/0601020.
- [10] J. Gates Jr., A. Jellal, E.H. Saidi, M. Schreiber, Supersymmetric embedding of the quantum Hall matrix model, JHEP 0411 (2004) 075, hep-th/0410070.
- [11] K. Hasebe, Supersymmetric quantum Hall effect on fuzzy supersphere, Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 206802, hep-th/0411137.
- [12] S. Gukov, K. Saraikin, C. Vafa, A stringy wave function for an S^3 cosmology, hep-th/0505204.
- [13] B. Morariu, A.P. Polychronakos, Fractional quantum Hall effect on the two-sphere: A matrix model proposal, Phys. Rev. D 72 (2005) 125002, hep-th/0510034.
- [14] E.H. Saidi, Topological matrix model proposal for Laughlin wave and cousin state, Lab/UFR-HEP0517/ GNPHE/0519/VACBT/0519.
- [15] R. Ahl Laamara, L.B. Drissi, E.H. Saidi, D-string fluid in conifold, II: Matrix model for D-droplets, in preparation.
- [16] S. Hellerman, M. Van Raamsdonk, Quantum Hall physics = noncommutative field theory, JHEP 0110 (2001) 039, hep-th/0103179.
- [17] E.H. Saidi, M. Zakkari, Superconformal geometry from the Grassmann and harmonic analyticities I: The $N = 2$ superconformal case, Int. J. Mod. Phys. A 6 (1991) 3151–3173;
E.H. Saidi, M. Zakkari, Superconformal geometry from the Grassmann and harmonic analyticities II: The $N = 4$ $SU(2)$ conformal case, Int. J. Mod. Phys. A 6 (1991) 3175–3200.
- [18] M. Marino, Chern–Simons theory and topological strings, Rev. Mod. Phys. 77 (2005) 675–720, hep-th/0406005.

Chapitre 5

Cordes Topologiques sur des Calabi-Yau à trois dimensions

Au niveau algébrique, la théorie de corde peut être considérée comme une théorie des champs conforme bidimensionnelle (CFT₂) couplée à la gravité à deux dimensions [101, 7, 103, 104]. Lorsque la théorie de champ conforme est également une théorie de champ topologique (c-à-d une théorie dont les fonctions de corrélation ne dépendent pas de la métrique $g_{\mu\nu}$ de la surface de Riemann Σ_g), la théorie de corde résultante s'avère être plus simple. Une théorie de corde qui est construite de cette façon s'appelle une *théorie de corde topologique*. Depuis sa formulation, cette théorie forme un champ de recherche très actif et prometteur. Elle constitue un sous-secteur de la théorie de corde et se caractérise par ses différentes applications mathématiques et physiques qui lui procurent un grand intérêt. Dans les mathématiques, elle mène à de nouvelles relations entre la topologie, la géométrie algébrique et autres. En physique, elle permet l'étude des dispositifs de base de la théorie de corde, tel que la dualité de corde ouverte/fermée, entre autres. Notre contribution dans cette matière concerne l'étude de la corde topologique sur des supervariétés de Calabi-Yau locales.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la corde topologique qui est un sujet d'actualité [100]. Pour ce fait, dans la première section, nous décrivons les propriétés de base des modèles sigma topologiques A et B. La seconde section vise à exhiber en détail la formulation des cordes topologiques, avec ses deux types, qui s'obtiennent en couplant les théories sigma topologiques A et B à la gravité. La troisième section traite les variétés de Calabi-Yau toriques non-compactes à trois dimensions qui jouent un rôle fondamental dans la compactification des supercordes type II. Nous présentons dans la dernière partie une de nos publications portant sur la symétrie miroir dans des supervariétés de Calabi-Yau locales.

5.1 Modèles Sigma Topologiques

Une théorie de corde topologique est définie comme étant une théorie de champ conforme avec l'invariance topologique. De telles théories sont appelées des théories des champs topologiques conformes et sont construites à partir des théories des champs superconformes $\mathcal{N} = 2$ à deux dimensions selon une procédure appelée "*twiste*". Dans cette thèse, nous considérerons une classe de théories de corde topologiques dans lesquelles la théorie de champ topologique est un modèle sigma topologique dont l'espace cible est une variétés de Calabi-Yau. Dans cette partie, nous initions le modèle sigma supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ et ensuite nous présentons la procédure du

twiste. Cette dernière s'effectue à deux dimensions via deux possibilités menant respectivement aux modèles sigma topologiques type-A et type-B, que nous étudions en détail dans ce qui suit. Plus de détails sur des modèles sigma topologiques sont fournis dans [9].

5.1.1 Modèle sigma supersymétrique $\mathcal{N} = 2$

Dans cette sous-section, nous donnons un bref résumé du modèle sigma supersymétrique $\mathcal{N} = 2$. Nous suivrons très étroitement la présentation de [101].

Mais avant, nous commençons par donner les notations et conventions. Considérons des théories quantiques de champ à $D = 2$, avec la signature Euclidienne, définis sur une surface de Riemann Σ_g avec les coordonnées x^1, x^2 . En coordonnées complexe, nous écrivons $z = x^1 + ix^2$ et $\bar{z} = x^1 - ix^2$. Localement, nous pouvons toujours trouver une métrique Euclidienne plate dont les composantes sont données en coordonnées complexes par

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (5.1)$$

Le symbole epsilon est $\epsilon^{z\bar{z}} = -\epsilon^{\bar{z}z} = 2i$, et les matrices euclidiennes de Dirac γ^μ sont

$$(\gamma^1)_\alpha{}^\beta = \sigma^1, \quad (\gamma^2)_\alpha{}^\beta = \sigma^2,$$

où σ^1, σ^2 sont les matrices de Pauli. Nous dénoterons les indices spinoriels par $\alpha = (+, -)$, et ils sont baissés et levés par la matrice

$$C_{\alpha\beta} = \sigma^1,$$

de sorte que

$$(\gamma^1)_{\alpha\beta} = 1_{\alpha\beta}, \quad (\gamma^2)_{\alpha\beta} = (\sigma^2)_{\alpha\beta}.$$

Les générateurs de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ sont dénotés par

$$Q_{\alpha a},$$

où $\alpha = +, -$ sont des indices de Lorentz, et $a = +, -$ sont des indices de la R-charge. L'algèbre de supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \{Q_{\alpha+}, Q_{\beta-}\} &= \gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, & \{Q_{\alpha\pm}, Q_{\beta\pm}\} &= 0, \\ \{J, Q_{\pm a}\} &= \pm \frac{1}{2} Q_{\pm a}, \\ [F_L, Q_{+\pm}] &= \pm \frac{1}{2} Q_{+\pm}, & [F_L, Q_{-\pm}] &= 0, \\ [F_R, Q_{+\pm}] &= 0, & [F_R, Q_{-\pm}] &= \pm \frac{1}{2} Q_{-\pm}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nous avons supposé qu'il n'y a aucune charge centrale dans l'algèbre. J est le générateur des transformations de Lorentz $SO(2)$ et $F_{L,R}$ sont les courants internes gauches et droits $U(1)$ respectivement. Ils se combinent dans des courants vectoriel et axial F_V, F_A comme suit :

$$F_V = F_L + F_R, \quad F_A = F_L - F_R. \quad (5.3)$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Nous considérons ici une théorie du multiplet chirale $\mathcal{N} = 2$. La description la plus commode de ce multiplet nous parvient en utilisant le superspace $\mathcal{N} = 2$, $D = 2$, qui est essentiellement identique au superspace habituel $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ [102, 9]. Dans le superspace $\mathcal{N} = 2$ nous avons les dérivés covariants $D_{\alpha a}$ satisfaisant l'algèbre suivante :

$$\{D_{+,+}, D_{+,-}\} = 2\partial_z, \quad \{D_{-,-}, D_{-,+}\} = 2\partial_{\bar{z}}, \quad (5.4)$$

tandis que tous les autres anti-commutateurs sont nuls. Le multiplet chirale est décrit par un superchamp scalaire Φ $\mathcal{N} = 2$ qui satisfait les relations suivantes :

$$D_{+,-}\Phi = D_{-,-}\Phi = 0. \quad (5.5)$$

Les multiplets anti-chiraux $\bar{\Phi}$ satisfont,

$$D_{+,+}\bar{\Phi} = D_{-,+}\bar{\Phi} = 0. \quad (5.6)$$

Soit une collection de d superchamps chiraux Φ^I , et d superchamps anti-chiraux $\bar{\Phi}^{\bar{I}}$, où $I, \bar{I} = 1, \dots, d$. Les champs composants de ces superchamps sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi^I &|_{\theta=0} = x^I, & \bar{\Phi}^{\bar{I}} &|_{\theta=0} = x^{\bar{I}} \\ D_{\alpha,+}\Phi^I &|_{\theta=0} = \psi_{\alpha,+}^I, & D_{\alpha,-}\bar{\Phi}^{\bar{I}} &|_{\theta=0} = \psi_{\alpha,-}^{\bar{I}}, \\ D_{-,+}D_{+,+}\Phi^I &|_{\theta=0} = F_{-,++}^I, & D_{+,-}D_{-,-}\bar{\Phi}^{\bar{I}} &|_{\theta=0} = F_{+,-,-}^{\bar{I}}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ici, $F_{-,++}^I$ et $F_{+,-,-}^{\bar{I}}$ sont des champs auxiliaires.

La transformation supersymétrique pour un superchamp $\mathcal{N} = 2$ est de la forme :

$$\delta\Phi = \eta^{\alpha a} Q_{\alpha a} \Phi, \quad (5.8)$$

où la constante $\eta^{\alpha a}$ est le paramètre de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. En projetant sur les composants de Φ , et en utilisant (5.7), on trouve

$$\begin{aligned} \delta x^I &= \eta^{+,+}\psi_{+,+}^I + \eta^{-,+}\psi_{-,+}^I, \\ \delta\psi_{+,+}^I &= \eta^{-,+}F_{-,++}^I + 2\eta^{+,-}\partial_z x^I, \\ \delta\psi_{-,+}^I &= -\eta^{+,+}F_{-,++}^I + 2\eta^{-,-}\partial_{\bar{z}} x^I, \\ \delta F_{-,++}^I &= 2\eta^{-,-}\partial_{\bar{z}}\psi_{+,+}^I - 2\eta^{+,-}\partial_z\psi_{-,+}^I, \\ \delta x^{\bar{I}} &= \eta^{-,-}\psi_{-,-}^{\bar{I}} + \eta^{+,-}\psi_{+,-}^{\bar{I}}, \\ \delta\psi_{-,-}^{\bar{I}} &= \eta^{+,-}F_{+,-,-}^{\bar{I}} + 2\eta^{-,+}\partial_z x^{\bar{I}}, \\ \delta\psi_{+,-}^{\bar{I}} &= -\eta^{-,-}F_{+,-,-}^{\bar{I}} + 2\eta^{+,+}\partial_{\bar{z}} x^{\bar{I}}, \\ \delta F_{+,-,-}^{\bar{I}} &= 2\eta^{+,+}\partial_{\bar{z}}\psi_{-,-}^{\bar{I}} - 2\eta^{-,+}\partial_z\psi_{+,-}^{\bar{I}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les transformations sous la R-symétrie peuvent être lues des indices $U(1)$ des champs.

Le modèle sigma supersymétrique est défini par le biais de l'action suivante exprimée dans le superspace des superchamps Φ^I , $\bar{\Phi}^{\bar{I}}$, $I, \bar{I} = 1, \dots, d$:

$$S = \int d^2z d^4\theta K(\Phi^I, \bar{\Phi}^{\bar{I}}). \quad (5.10)$$

Géométriquement, c'est un modèle sigma dont l'espace cible est une variété de Kähler de dimension complexe d , avec des coordonnées complexes locales données par $x^I, x^{\bar{I}}$,

$$x^I = \Phi^I|, \quad x^{\bar{I}} = \Phi^{\bar{I}}|.$$

La métrique de Kähler est donnée par

$$G_{I\bar{J}} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^I \partial x^{\bar{J}}}. \quad (5.11)$$

où

$$K(x^I, x^{\bar{I}})$$

est Le potentiel de Kähler. L'éq (5.10) n'est pas l'action la plus générale qui peut être écrite dans le superspace, Puisqu'elle contient seulement les D-termes. Donc on peut ajouter les F-termes, C'est-à-dire un superpotentiel chiral

$$W(X^I).$$

Cela mène aux modèles de Landau-Ginzburg à deux dimensions.

5.1.2 Twiste topologique

Le modèle sigma supersymétrique défini dans ce qui précède peut être twisté de deux façons différentes produisant ainsi deux théories des champs quantiques topologiques non équivalentes à deux dimensions. Ces deux procédures de twisté sont appelées twisté-A et twisté-B et elles mènent au modèles sigma topologique type-A et type-B, respectivement [7, 101, 103, 104].

La procédure de twisté s'élève à une redéfinition du spin des champs en utilisant les courants internes F_V ou F_A . Dans le twisté-A, on redéfinit le courant de spin comme suit [104] :

$$\text{twisté} - A : \quad \tilde{J} = J - F_V, \quad (5.12)$$

Tandis que dans le twisté-B la redéfinition est :

$$\text{twisté} - B : \quad \tilde{J} = J + F_A. \quad (5.13)$$

Cette redéfinition signifie que nous remplaçons la symétrie $U(1)_E$ de Lorentz par la symétrie diagonale

$$U(1)'_E \subset U(1)_E \times U(1)_{V,A}$$

pour le twisté-A et B, respectivement. Dans le tableaux 4.1 nous donnons les nombres quantiques de tout les composants de $Q_{\alpha a}$ sous les différentes symétries impliquées.

Dans les deux cas on obtient deux supercharges scalaires et une supercharge vectorielle. Ceci suggère de définir l'opérateur suivant, appelé la *charge topologique*,

$$\begin{aligned} \text{twisté} - A & : \quad \mathcal{Q} = Q_{+,+} + Q_{-,-} \\ \text{twisté} - B & : \quad \mathcal{Q} = Q_{+,-} + Q_{-,-} \end{aligned} \quad (5.14)$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

	$U(1)_V$	$U(1)_A$	$U(1)_E$	twiste-A	$U(1)'_E$	twiste-B	$U(1)'_E$
$Q_{+,+}$	+1/2	+1/2	+1/2	0		+1	
$Q_{-,+}$	+1/2	-1/2	-1/2	-1		-1	
$Q_{+,-}$	-1/2	-1/2	+1/2	+1		0	
$Q_{-,-}$	-1/2	+1/2	-1/2	0		0	

TAB. 5.1 – Les nombres quantique de $Q_{\alpha\alpha}$ sous les différentes symétries $U(1)$

Notons que c'est un scalaire dans les théories résultantes. \mathcal{Q} est un Grassmannien, donc les théories twistées violent le théorème de spin-statistique. Il faut également définir une charge vectorielle

$$G_\mu,$$

par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{twiste} - A & : & G_z &= Q_{+,-}, & G_{\bar{z}} &= Q_{-,+} \\ \text{twiste} - B & : & G_z &= Q_{+,+}, & G_{\bar{z}} &= Q_{-,-} \end{aligned} \quad (5.15)$$

On peut vérifier que, en conséquence de l'algèbre de supersymétrie, la charge topologique est nilpotente,

$$\mathcal{Q}^2 = 0 \quad (5.16)$$

Et que

$$\{\mathcal{Q}, G_\mu\} = P_\mu \quad (5.17)$$

Ces relations sont importantes puisqu'elles caractérisent l'algèbre topologique obtenue par le twisté de l'algèbre $\mathcal{N} = 2$.

Physiquement, la procédure de twisté peut être interprétée en tant que jauger le courant global $U(1)$. Lors du twisté, on prend un courant global $U(1)$ conservé du modèle et le couplé à la connexion de spin sur la surface de Riemann de dimension deux. Dans les modèles originaux non twistés, nous avons deux courants globaux, les courants $U(1)$ vectoriel et axial, et si on jauge l'un ou l'autre nous obtenons les théories topologiques type-A ou type-B. Pour bien comprendre, on va considérer le modèle sigma supersymétrique $\mathcal{N} = 2$, qui contient d multiplets chiral X^I et d multiplets anti-chiral $X^{\bar{I}}$. En particulier, le modèle contient un champ bosonique x ,

$$x : \Sigma_g \rightarrow X$$

et deux spineurs de Dirac

$$\begin{aligned} \psi_{\pm,+}^I & \in \Gamma(\Sigma_g, S^\pm \otimes \phi^*(TX)), \\ \psi_{\pm,-}^{\bar{I}} & \in \Gamma(\Sigma_g, S^\pm \otimes \phi^*(\overline{TX})), \end{aligned} \quad (5.18)$$

où S^\pm est la fibre spineur (spinor bundles) de chiralité positive et négative, respectivement, et TX est la fibre tangente holomorphe de X . Le terme cinétique fermionique dans l'action (5.10) est

$$S_f = \int_{\Sigma_g} d^2z G_{\bar{I}J} (\psi_{+,-}^{\bar{I}} D_{\bar{z}} \psi_{+,+}^J + \psi_{-,-}^{\bar{I}} D_z \psi_{-,+}^J) \quad (5.19)$$

où les dérivés covariants sont donnés en coordonnées locales par les expressions :

$$\begin{aligned} D_{\bar{z}}\psi_{+,+}^J &= \partial_{\bar{z}}\psi_{+,+}^J + \frac{i}{2}\omega_{\bar{z}}\psi_{+,+}^J + \Gamma_{KL}^J\partial_{\bar{z}}x^K\psi_{+,+}^L, \\ D_z\psi_{-,+}^J &= \partial_z\psi_{-,+}^J - \frac{i}{2}\omega_z\psi_{-,+}^J + \Gamma_{KL}^J\partial_zx^K\psi_{-,+}^L. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dans cette équation, $\omega_{z,\bar{z}}$ sont les composantes de la connexion spin sur Σ_g . Cette théorie a un courant conservé vectoriel sans anomalie avec des composants

$$j_V^{\bar{z}} = G_{\bar{I}J}\psi_{-,-}^{\bar{I}}\psi_{-,+}^J, \quad j_V^z = 2G_{\bar{I}J}\psi_{+,-}^{\bar{I}}\psi_{+,+}^J \quad (5.21)$$

et un courant axial avec anomalie de composants

$$j_A^{\bar{z}} = -G_{\bar{I}J}\psi_{-,-}^{\bar{I}}\psi_{-,+}^J, \quad j_A^z = G_{\bar{I}J}\psi_{+,-}^{\bar{I}}\psi_{+,+}^J. \quad (5.22)$$

L'anomalie dans le courant axial qui est donnée par l'indice de l'opérateur de Dirac s'écrit

$$\int_{\Sigma_g} x^*(c_1(X)), \quad (5.23)$$

où $c_1(X)$ est la première classe de Chern de X . En jaugeant la symétrie globale abélienne, nous parvenons à une symétrie de la surface d'univers de l'espace-temps. Ainsi nous devons ajouter au Lagrangien original le couplage des courants correspondants à la connexion de spin de la surface d'univers. Pour le twisté-A on a

$$\begin{aligned} S_f - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_g} d^2z \omega_{\mu} j_V^{\mu} &= \int_{\Sigma_g} d^2z G_{\bar{I}J} \{ \psi_{+,-}^{\bar{I}} (\partial_z \psi_{+,+}^J + \Gamma_{KL}^J \partial_z x^K \psi_{+,+}^L) \\ &\quad + \psi_{-,-}^{\bar{I}} (\partial_z \psi_{-,+}^J - i \omega_z \psi_{-,+}^J + \Gamma_{KL}^J \partial_z x^K \psi_{-,+}^L) \}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Tandis que pour le twisté-B nous avons

$$\begin{aligned} S_f + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_g} d^2z \omega_{\mu} j_A^{\mu} &= \int_{\Sigma_g} d^2z G_{\bar{I}J} \{ \psi_{+,-}^{\bar{I}} (\partial_{\bar{z}} \psi_{+,+}^J + i \omega_{\bar{z}} \psi_{+,+}^J + \Gamma_{KL}^J \partial_{\bar{z}} x^K \psi_{+,+}^L) \\ &\quad + \psi_{-,-}^{\bar{I}} (\partial_z \psi_{-,+}^J - i \omega_z \psi_{-,+}^J + \Gamma_{KL}^J \partial_z x^K \psi_{-,+}^L) \}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ils s'ensuit alors que dans les modèles twistés, les champs fermioniques ont changé de spin : dans le modèle type-A, $\psi_{+,+}^J$ est un champ scalaire, tandis que $\psi_{-,+}^J$ est une $(0,1)$ -forme.

Dans le modèle type-B, c'est le contraire, $\psi_{+,+}^J$ est une $(1,0)$ -forme, alors que $\psi_{-,+}^J$ est une $(0,1)$ -forme.

Cette analyse de twisté donne des issues importantes. En effet : si on jauge le courant global qui a une anomalie, le modèle résultant l'hériterait aussi comme une anomalie de jauge/ gravitation, menant à un modèle twisté qui n'est pas bien défini. Puisque le courant vectoriel est sans anomalie, le modèle type-A résultant est *bien défini pour une variété de Kähler X arbitraire*. Cependant, dans le cas du modèle type-B le courant axial a une anomalie donnée par (5.23), donc le modèle résultant est mal défini à moins que

$$c_1(X) = 0.$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Les variétés de Kähler satisfaisant cette condition sont appelées des variétés de Calabi-Yau, et elles jouent un rôle crucial comme nous le constaterons dans ce qui suit.

Les théories twistés $\mathcal{N} = 2$ sont des exemples des théories quantiques des champs topologiques à la Witten [48]. Une théorie des champs quantique topologique du type Witten, est une théorie des champs quantique définie sur une variété M qui a une symétrie scalaire δ agissant sur les champs ϕ_i de telle manière que les fonctions de corrélation de la théorie ne dépendent pas de la métrique. Ceci est réalisé comme suit. Puisque δ est une symétrie, l'action de la théorie satisfait

$$\delta S(\phi_i) = 0.$$

Si le tenseur énergie-impulsion de la théorie

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S(\phi_i)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

s'écrit comme

$$T_{\mu\nu} = \delta G_{\mu\nu}, \quad (5.26)$$

où $G_{\mu\nu}$ est un tenseur, l'indépendance de la fonctions de corrélation (4.2) de la métrique reste valable pour n'importe quel opérateur \mathcal{O} qui est invariant par δ . ceci est du au fait que

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \langle \mathcal{O}_{i_1} \mathcal{O}_{i_2} \dots \mathcal{O}_{i_n} \rangle &= \langle \mathcal{O}_{i_1} \mathcal{O}_{i_2} \dots \mathcal{O}_{i_n} T_{\mu\nu} \rangle \\ &= \langle \mathcal{O}_{i_1} \mathcal{O}_{i_2} \dots \mathcal{O}_{i_n} \delta G_{\mu\nu} \rangle \\ &= \pm \langle \delta (\mathcal{O}_{i_1} \mathcal{O}_{i_2} \dots \mathcal{O}_{i_n} G_{\mu\nu}) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

La symétrie δ s'appelle habituellement une *symétrie topologique*. Dans (5.27) nous avons supposé que la symétrie δ n'est pas une anomalie afin qu'elle puisse être une symétrie totale de la théorie quantique. De plus, nous avons 'intégré par parties' dans l'espace de champ; donc nous avons supposé qu'il n'y a aucune contribution venant des termes de bord. Dans certains cas ceci n'est pas vrai, et la théorie n'est pas strictement topologique.

Dans une théorie de cohomologie, les observables sont les opérateurs invariants par δ . D'autre part, les opérateurs qui sont δ -exact se découplent de la théorie puisque leurs fonctions de corrélation sont nulles. On se limitera alors aux observables de cohomologie δ :

$$\mathcal{O} \in \frac{Ker \delta}{Im \delta}. \quad (5.28)$$

Dans tous les exemples connus des théories des champs de cohomologie, δ est une symétrie Grassmannienne, donc elle satisfait

$$\delta^2 = 0. \quad (5.29)$$

En général on peut avoir $\delta^2 = Z$, où Z est une symétrie globale de la théorie [105].

La structure des théories quantiques des champs topologiques du type Witten mène à une procédure pour construire des observables non-locales à partir des observables locales. Supposons que nous avons trouvé un opérateur

$$\phi^{(0)}$$

qui est dans la cohomologie de δ , aussi bien pour une série d'opérateurs

$$\phi^{(n)}, \quad n = 1, \dots, \dim M,$$

qui sont des formes différentielles de degré n sur M tel que,

$$d\phi^{(n)} = \delta\phi^{(n+1)}, \quad n \geq 0. \quad (5.30)$$

Dans cette équation, d dénote la dérivée extérieure sur M . Les opérateurs $\phi^{(n)}$ sont appelés les *descendants topologiques* de $\phi^{(0)}$. Il est facile de voir que l'opérateur

$$W_{\phi^{(0)}}^{(\gamma_n)} = \int_{\gamma_n} \phi^{(n)}, \quad (5.31)$$

où $\gamma_n \in H_n(M)$, est une observable topologique :

$$\delta W_{\phi^{(0)}}^{(\gamma_n)} = \int_{\gamma_n} \delta\phi^{(n)} = \int_{\gamma_n} d\phi^{(n-1)} = \int_{\partial\gamma_n} \phi^{(n-1)} = 0, \quad (5.32)$$

puisque $\partial\gamma_n = 0$. De même, il est facile de montrer que si γ_n est d'homologie triviale (c'est-à-dire il est ∂ -exact), alors $W_{\phi^{(0)}}^{(\gamma_n)} = 0$ est δ -exact. L'équation (5.30) est appelée équations descendantes.

La conclusion de cette analyse est que, étant donné une observable (scalaire) $\phi^{(0)}$ topologique et une solution de l'équation (5.30), on peut construire une famille d'observables topologiques :

$$W_{\phi^{(0)}}^{(\gamma_{i_n})}, \quad i_n = 1, \dots, b_n; \quad n = 1, \dots, \dim M. \quad (5.33)$$

Il est facile de voir que dans n'importe quelle théorie où (5.26) est satisfaite, il y a une procédure simple pour construire une solution de (5.30) qui donne une observable scalaire $\phi^{(0)}$. Si (5.26) est satisfaite, donc on a :

$$P_\mu = T_{0\mu} = \delta G_\mu, \quad (5.34)$$

où

$$G_\mu \equiv G_{0\mu}. \quad (5.35)$$

Puisque δ est une symétrie Grassmannienne, G_μ est un opérateur d'anti-commutation, et une 1-forme dans l'espace-temps. Si on a un opérateur $\phi^{(0)}$ δ -invariant, nous pouvons utiliser (5.35) pour construire

$$\phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}(x) = G_{\mu_1}G_{\mu_2}\dots G_{\mu_n}\phi^{(0)}(x), \quad (5.36)$$

où $n \leq 1, \dots, \dim M$. D'autre part, puisque G_{μ_i} anti-commute, alors

$$\phi^{(n)} = \frac{1}{n!}\phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}, \quad (5.37)$$

est une n -forme sur M . En utilisant (5.34), la δ -invariance de $\phi^{(0)}$, et $P_\mu = \partial_\mu$, on peut facilement vérifier que ces formes satisfont l'équation (5.30). Cette solution de (5.30) s'appelle habituellement la *solution canonique* des équations descendantes.

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Nous pouvons maintenant établir une connexion entre cette structure générale et la procédure du twisté. Le scalaire, nilpotent et Grassmannien δ , est donné par la charge topologique \mathcal{Q} . Afin de montrer que la théorie est en effet topologique de type cohomologique, nous devons prouver que (5.26) est satisfaite et cela dépend du modèle étudié. Notons que, la structure de l'algèbre supersymétrique du twisté donne la relation (5.17), qui fournit une réalisation partielle de (5.26). En effet, l'opérateur défini dans (5.35) apparaît aussi dans l'algèbre supersymétrique du twisté comme un vecteur de charge Grassmannien (5.15).

En conclusion : les théories twistées supersymétriques $\mathcal{N} = 2$ à deux dimensions ont les ingrédients justes pour être des théories des champs topologiques de type cohomologique. Dans les sous-sections suivantes nous constaterons que, la relation (5.26) est satisfaite pour le modèle sigma twisté, donc les théories résultantes sont topologiques.

5.1.3 Modèle topologique de type-A

Le modèle topologique type-A s'obtient en appliquant un twisté-A au modèle sigma supersymétrique $\mathcal{N} = 2$. Après cette procédure, les champs fermioniques et auxiliaires du modèle sigma supersymétrique changent leur spin et nous les renommons comme suit :

$$\begin{aligned}\chi^I &= \psi_{+,+}^I, & \rho_{\bar{z}}^I &= \psi_{-,+}^I, & F_{\bar{z}}^I &= F_{-,++}^I, \\ \bar{\chi}^{\bar{I}} &= \bar{\psi}_{-,-}^{\bar{I}}, & \bar{\rho}_z^{\bar{I}} &= \bar{\psi}_{+,-}^{\bar{I}}, & \bar{F}_z^{\bar{I}} &= \bar{F}_{+,-,-}^{\bar{I}}.\end{aligned}\quad (5.38)$$

Nous dénoterons les indices réels dans l'espace tangent de la variété cible X par i , avec $i = 1, \dots, 2d$. Le modèle sigma topologique type-A contient des champs que nous mentionnons ci-dessous. D'abord, nous avons une transformation

$$x : \Sigma_g \rightarrow X$$

d'une surface de Riemann de genre g vers une variété de Kähler X de dimension complexe d . Nous avons également des champs Grassmanniens

$$\chi \in x^*(TX),$$

qui sont des scalaires sur Σ_g , et une 1-forme Grassmannienne ρ_α à valeurs dans $x^*(TX)$. Ce dernier champ satisfait une condition d'auto dualité qui implique que ses seuls composants différents de zéro sont

$$\rho_{\bar{z}}^I \in x^*(T^{(1,0)}X) \quad \text{et} \quad \bar{\rho}_z^{\bar{I}} \in x^*(T^{(0,1)}X).$$

L'action de la théorie est

$$\begin{aligned}S_A &= \int_{\Sigma_g} d^2z [G_{I\bar{J}} \left(-F_{\bar{z}}^I F_z^{\bar{J}} - 2\rho_{\bar{z}}^I D_z \chi^{\bar{J}} - 2\rho_z^{\bar{J}} D_{\bar{z}} \chi^I + 4\partial_z x^I \partial_{\bar{z}} x^{\bar{J}} \right) \\ &\quad + \partial_K \partial_{\bar{L}} G_{I\bar{J}} \rho_{\bar{z}}^K \bar{\rho}_z^{\bar{L}} \chi^I \chi^{\bar{J}} + \partial_K G_{I\bar{J}} \chi^I F_z^{\bar{J}} \rho_{\bar{z}}^K + \partial_{\bar{K}} G_{I\bar{J}} \bar{\chi}^{\bar{I}} \bar{F}_z^{\bar{J}} \bar{\rho}_z^{\bar{K}}].\end{aligned}\quad (5.39)$$

La charge topologique \mathcal{Q} agit sur les champs comme suit :

$$\begin{aligned}[\mathcal{Q}, x^i] &= \chi^i, & \{\mathcal{Q}, \rho_{\bar{z}}^I\} &= 2\partial_{\bar{z}} x^I - F_{\bar{z}}^I, & [\mathcal{Q}, F_{\bar{z}}^I] &= 2\partial_{\bar{z}} \chi^I, \\ \{\mathcal{Q}, \chi^i\} &= 0, & \{\mathcal{Q}, \bar{\rho}_z^{\bar{I}}\} &= 2\partial_z x^{\bar{I}} - \bar{F}_z^{\bar{I}}, & [\mathcal{Q}, \bar{F}_z^{\bar{I}}] &= 2\partial_z \bar{\chi}^{\bar{I}}.\end{aligned}$$

5.1 Modèles Sigma Topologiques

Dans la théorie twistée nous avons aussi une symétrie $U(1)$ qui donne un nombre fantôme (ghost), cette dernière vient de la symétrie $U(1)_A$ du modèle non twisté. Les nombres fantôme des champs x, χ, ρ et F sont 0, 1, -1 et 0, respectivement. Notons que la charge Grassmannien \mathcal{Q} a le nombre fantôme 1.

La formulation présentée dans (5.39) n'est pas très convenable, puisque l'action et les transformations ne sont pas covariantes par rapport à la métrique cible. Pour l'améliorer nous redéfinissons les champs auxiliaires comme suit :

$$\tilde{F}_z^I = F_z^I - \Gamma_{KJ}^I \chi^J \rho_z^K, \quad \tilde{F}_z^{\bar{I}} = F_z^{\bar{I}} - \Gamma_{\bar{K}\bar{J}}^{\bar{I}} \chi^{\bar{J}} \rho_z^{\bar{K}}. \quad (5.40)$$

L'action (5.39) devient alors,

$$\begin{aligned} S = \int_{\Sigma_g} d^2z & [G_{I\bar{J}} \left(4\partial_z x^I \partial_{\bar{z}} x^{\bar{J}} - 2\rho_z^I D_z \chi^{\bar{J}} - 2\rho_z^{\bar{J}} D_{\bar{z}} \chi^I - \tilde{F}_z^I \tilde{F}_z^{\bar{J}} \right) \\ & + R_{\bar{I}\bar{J}\bar{K}\bar{L}} \rho_z^{\bar{I}} \rho_z^{\bar{J}} \chi^{\bar{K}} \chi^{\bar{L}}]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Les \mathcal{Q} -transformations seront comme suit :

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}, x^i] &= \chi^i, \\ \{\mathcal{Q}, \chi^i\} &= 0, \\ \{\mathcal{Q}, \rho_z^I\} &= 2\partial_{\bar{z}} x^I - \tilde{F}_z^I - \Gamma_{JK}^I \chi^J \rho_z^K, \\ \{\mathcal{Q}, \rho_z^{\bar{I}}\} &= 2\partial_z x^{\bar{I}} - \tilde{F}_z^{\bar{I}} - \Gamma_{\bar{J}\bar{K}}^{\bar{I}} \chi^{\bar{J}} \rho_z^{\bar{K}}, \\ [\mathcal{Q}, \tilde{F}_z^I] &= 2D_{\bar{z}} \chi^I - \Gamma_{JK}^I \chi^J \tilde{F}_z^K + R_{K\bar{J}\bar{L}}^I \chi^{\bar{K}} \chi^{\bar{J}} \rho_z^{\bar{L}}, \\ [\mathcal{Q}, \tilde{F}_z^{\bar{I}}] &= 2D_z \chi^{\bar{I}} + \Gamma_{\bar{J}\bar{K}}^{\bar{I}} \chi^{\bar{J}} \tilde{F}_z^{\bar{K}} - R_{\bar{J}\bar{L}\bar{K}}^{\bar{I}} \chi^{\bar{L}} \chi^{\bar{J}} \rho_z^{\bar{K}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Notons qu'on a $\mathcal{Q}^2 = 0$. Géométriquement, si nous interprétons χ^i comme la base dx^i des formes différentielles sur X , nous voyons que \mathcal{Q} agit sur x^i, χ^i comme l'opérateur différentiel de Rham sur l'espace cible X [79].

Nous montrerons maintenant que l'action (5.41) et les \mathcal{Q} -transformations (5.42) mènent, en fait, à une théorie des champs topologique. D'abord, la covariation par rapport à la métrique bidimensionnelle donne :

$$\begin{aligned} S = \int_{\Sigma_g} d^2z & [G_{I\bar{J}} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu x^I \partial_\nu x^{\bar{J}} + \frac{i\epsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{g}} \partial_\mu x^I \partial_\nu x^{\bar{J}} - g^{\mu\nu} \rho_\mu^I D_\nu \chi^{\bar{J}} - g^{\mu\nu} \rho_\mu^{\bar{J}} D_\nu \chi^I - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \tilde{F}_\mu^I \tilde{F}_\nu^{\bar{J}} \right) \\ & + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\bar{I}\bar{J}\bar{K}\bar{L}} \rho_\mu^{\bar{I}} \rho_\nu^{\bar{J}} \chi^{\bar{K}} \chi^{\bar{L}}]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

On peut aussi covariantiser facilement les \mathcal{Q} -transformations [75] et on vérifie que

$$S_A = \{\mathcal{Q}, V\}, \quad (5.44)$$

où

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_g} d^2z \sqrt{g} g^{\mu\nu} G_{I\bar{J}} \left[\frac{1}{2} \rho_\mu^I \tilde{F}_\nu^{\bar{J}} + \frac{1}{2} \rho_\mu^{\bar{J}} \tilde{F}_\nu^I + \left(\rho_\mu^I \partial_\nu x^{\bar{J}} + \rho_\mu^{\bar{J}} \partial_\nu x^I \right) \right]. \quad (5.45)$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Autrement dit, l'action est \mathcal{Q} -exacte. Puisque l'action de \mathcal{Q} ne dépend pas de la métrique bidimensionnelle du Σ_g , alors, le tenseur énergie-impulsion est également \mathcal{Q} -exact. Par conséquent, le modèle A twisté est une théorie des champs topologique du type cohomologique. La quantité V est parfois appelée le fermion de jauge. 'L'antifantôme' $G_{\mu\nu}$ apparaissant dans (5.26) est donné par

$$G_{\mu\nu} = \frac{\delta V}{\delta g^{\mu\nu}}$$

et il a le nombre fantôme -1 .

Il est intéressant de noter que le deuxième terme dans (5.43) peut être écrit comme

$$\int_{\Sigma_g} x^*(J), \quad (5.46)$$

où

$$J = iG_{I\bar{J}} dx^I \wedge dx^{\bar{J}}$$

est la classe de Kähler de X . Ce terme est un invariant topologique caractérisant le type d'homotopie de la transformation $x : \Sigma_g \rightarrow X$. Nous pouvons aussi ajouter un couplage au champ B (B -champ) dans l'action,

$$\int_{\Sigma_g} x^*(B), \quad (5.47)$$

qui va complexifier la forme de Kähler $\omega = J + iB$.

Rappelons que le modèle-A twisté est une théorie des champs cohomologique dont les opérateurs appropriés, sont les observables, c'est-à-dire les opérateurs qui appartiennent à la \mathcal{Q} -cohomologie. On peut facilement vérifier que la \mathcal{Q} -cohomologie est donnée par des opérateurs de la forme

$$\mathcal{O}_\phi = \phi_{i_1 \dots i_p} \chi^{i_1} \dots \chi^{i_p} \quad (5.48)$$

où

$$\phi = \phi_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

est une p -forme fermée représentant une classe non triviale dans $H^p(X)$. Donc, dans ce cas la \mathcal{Q} -cohomologie est en correspondance avec la cohomologie de Rham de la variété cible X . Ceci est en accord avec le fait que \mathcal{Q} peut être interprété comme une différentielle de Rham sur X . Notons que le degré de la forme différentielle correspond au nombre fantôme de l'opérateur. De plus, on peut déduire une règle de sélection pour des fonctions de corrélation de tels opérateurs : la valeur moyenne dans le vide

$$\langle \mathcal{O}_{\phi_1} \dots \mathcal{O}_{\phi_l} \rangle$$

est nulle à moins que

$$\sum_{k=1}^l \deg(\mathcal{O}_{\phi_k}) = 2d(1-g) + 2 \int_{\Sigma_g} x^*(c_1(X)), \quad (5.49)$$

où

$$\deg(\mathcal{O}_{\phi_k}) = \deg(\phi_k)$$

et $c_1(X)$ est la première classe de Chern de la variété de Kähler X . Cette règle de choix surgit comme suit : la théorie twistée a un courant fantôme $U(1)$, une symétrie globale $U(1)$ qui fait tourner les fermions twistés. Puisque χ et ρ ont des nombres fantôme opposés, cette symétrie est une anomalie, et l'anomalie donnée par la partie droite de (5.49), qui calcule le nombre de modes zéro de l'opérateur de Dirac twisté. Comme d'habitude dans la théorie des champs quantique, les opérateurs avec des valeurs moyennes dans le vide non triviaux doivent absorber les modes zéro associés à l'anomalie. Il est intéressant de noter que, pour un Calabi-Yau tridimensionnel, c'est-à-dire, des variétés de Kähler de dimension 3 complexe, et tel que $c_1(X) = 0$, le dernier terme dans (5.49) disparaît et l'anomalie du nombre fantôme est

$$6 - 6g,$$

comme dans le cas de la corde bosonique. Nous verrons les implications de ce fait dans la prochaine section.

Le but principal dans n'importe quelle théorie quantique des champs est d'évaluer les fonctions de corrélation des observables. Pour cela on va introduire un paramètre t (qui joue le rôle de $1/\hbar$), ainsi la valeur moyenne dans le vide non normalisé est :

$$\langle \mathcal{O} \rangle (t) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} e^{-tS_A(\phi)}, \quad (5.50)$$

où ϕ dénote l'ensemble des champs de la théorie et \mathcal{O} est une observable. Puisque l'action est \mathcal{Q} -exact et \mathcal{O} est \mathcal{Q} -fermé, on a

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{O} \rangle (t) = \pm \langle \{ \mathcal{Q}, \mathcal{O} \} \rangle = 0, \quad (5.51)$$

et (5.50) est indépendante de t . en particulier, nous pouvons l'évaluer dans la limite t grand, qui est l'approximation semi-classique. Ceci signifie que *l'approximation semi classique est exacte*. C'est une propriété générale des théories des champs topologiques de type de cohomologie où l'action est \mathcal{Q} -exacte. Nous pouvons donc calculer les fonctions de corrélation exactement en faisant juste un calcul semi classique. La première étape dans un tel calcul est d'identifier les secteurs d'instanton de la théorie. Dans le modèle A , les instantons sont les transformations holomorphes $x : \Sigma_g \rightarrow X$. Les différents secteurs d'instanton sont classifiés topologiquement par la classe d'homologie

$$\beta = x_* [(\Sigma_g)] \in H_2(X, \mathbb{Z}). \quad (5.52)$$

Il est utile d'introduire une base $[S_i]$ de $H_2(X, \mathbb{Z})$, où $i = 1, \dots, b_2(X)$, d'une telle façon que nous pouvons étendre β à

$$\beta = \sum_i n_i [S_i].$$

Les secteurs d'instanton alors seront étiquetés par des entiers $b_2(X)$. Ces instantons sont aussi appelés les instantons de la surface d'univers. Une analyse simple [7] montre que la contribution d'un secteur d'instanton aux intégrales de chemin se réduit à une intégration sur l'espace de modules des instantons dans ce secteur.

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Cas de la 2-sphère : Maintenant, présentons quelques résultats pour les fonctions de corrélation du modèle A impliquant trois opérateurs \mathcal{O}_{ϕ_i} associés à la 2 formes ϕ_i sur une Calabi-Yau X tridimensionnelle. La règle de sélection (5.49) indique que, dans le cas de $g = 0$ (c'est-à-dire quand la surface de Riemann est une sphère) et sur une Calabi-Yau tridimensionnelle, ces fonctions de corrélation sont différentes de zéro. Le calcul d'une fonction de corrélation donnée implique à faire une sommation sur les différents secteurs topologiques des instantons de la surface d'univers. Dans le secteur trivial, c'est-à-dire quand

$$\beta = 0,$$

l'image de la sphère est un point dans la cible. L'espace de modules des instantons est juste l'espace cible X , et la fonction de corrélation est juste le nombre d'intersection

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3$$

des trois diviseurs D_i , $i = 1, 2, 3$, associé à la 2 forme. Les secteurs d'instanton non triviaux donnent une série infinie. La réponse finale est :

$$\langle \mathcal{O}_{\phi_1} \mathcal{O}_{\phi_2} \mathcal{O}_{\phi_3} \rangle = (D_1 \cap D_2 \cap D_3) \sum_{\beta} I_{0,3,\beta}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) Q^{\beta}. \quad (5.53)$$

La notation est comme suit : nous avons introduit les paramètres de Kähler complexifiés

$$t_i = \int_{S_i} \omega, \quad i = 1, \dots, b_2(X), \quad (5.54)$$

où ω est la forme de Kähler complexifiée de X et S_i est une base de $H_2(X)$. Nous définissons aussi

$$Q_i = e^{-t_i}$$

et si $\beta = \sum_i n_i [S_i]$, alors Q^{β} dénote

$$\prod_i Q_i^{n_i}.$$

Le coefficient $I_{0,3,\beta}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ "comptent" dans un sens approprié le nombre de transformations holomorphes de la sphère au Calabi-Yau qui envoient le point d'insertion de \mathcal{O}_{ϕ_i} au diviseur D_i , les coefficients $I_{0,3,\beta}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ peuvent être écrits comme

$$I_{0,3,\beta}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = N_{0,\beta} \int_{\beta} \phi_1 \int_{\beta} \phi_2 \int_{\beta} \phi_3, \quad (5.55)$$

en termes des invariants $N_{0,\beta}$ qui codent toutes les informations sur les fonctions de trois points (5.53) du modèle sigma topologique. Ces invariants sont notre premier exemple des *invariants* de Gromov-Witten. Il est commode de mettre tous ces invariants ensemble dans une fonction génératrice appelé sur le *prépotentiel* :

$$F_0(t) = \sum_{\beta} N_{0,\beta} Q^{\beta}. \quad (5.56)$$

Ce prépotentiel dépend des paramètres complexifiés de Kähler $h^{1,1}(X)$ du Calabi-Yau X .

Cas d'une surface de Riemann Σ_g : Pour $g = 1$ et $c_1(X) = 0$, la règle de sélection (5.49)

énonce que la seule quantité qui peut mener à une réponse non triviale est la fonction de partition elle-même, tandis que pour $g > 1$ toutes fonctions de corrélation disparaissent. Cela correspond mathématiquement au fait que, pour une métrique générique sur la surface de Riemann Σ_g , il n'y a aucune transformation holomorphe pour $g > 1$. Afin d'éviter ce problème, nous devons considérer la théorie de corde topologique réalisée par le modèle sigma topologique, nous devons coupler la théorie à la gravité bidimensionnelle et pour considérer toutes les métriques possibles sur la surface de Riemann. Nous aborderons ceci dans la prochaine section.

5.1.4 Modèle topologique type-B

Nous analysons maintenant le modèle obtenu après le twisté B. Nous supposons que la variété cible X est une Calabi-Yau. Les champs fermioniques et auxiliaires du modèle sigma supersymétrique changent leur spin comme dans (5.12), et nous obtenons les champs suivants :

$$\begin{aligned}\rho_z^I &= 2\psi_{+,+}^I, & \chi^{\bar{I}} &= \psi_{+,-}^{\bar{I}}, & F^I &= 2F_{-,++}^I, \\ \rho_{\bar{z}}^I &= 2\psi_{-,+}^I, & \bar{\chi}^{\bar{I}} &= \psi_{-,-}^{\bar{I}}, & F^{\bar{I}} &= 2F_{+,-,-}^{\bar{I}}.\end{aligned}\quad (5.57)$$

Il est commode d'effectuer la redéfinition suivante [104] :

$$\begin{aligned}\eta^{\bar{I}} &= \chi^{\bar{I}} + \bar{\chi}^{\bar{I}}, \\ \theta_I &= G_{I\bar{J}} \left(\chi^{\bar{J}} - \bar{\chi}^{\bar{J}} \right).\end{aligned}\quad (5.58)$$

Il découle alors le contenu des champs suivant :

- (i) une transformation $x : \Sigma_g \rightarrow X$, qui est un scalaire, champ commutant,
- (ii) deux ensembles de champs de Grassmannien

$$\eta^{\bar{I}}, \theta^{\bar{I}} \in x^*(TX),$$

qui sont des scalaires sur Σ_g ,

- (iii) ρ_α^I une forme Grassmannienne sur Σ_g , avec des valeurs dans $x^*(TX)$. Nous avons aussi des champs auxiliaires commutants $F^I, F^{\bar{I}}$. Comme dans le cas du modèle type-A, il est commode de redéfinir les champs auxiliaires convenablement [101]. Nous présentons ici les résultats obtenus après cette redéfinition [76]. Les \mathcal{Q} -transformations s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}[\mathcal{Q}, x^I] &= 0, & \{\mathcal{Q}, \eta^{\bar{I}}\} &= 0, \\ [\mathcal{Q}, x^{\bar{I}}] &= \eta^{\bar{I}}, & \{\mathcal{Q}, \theta_I\} &= G_{I\bar{J}} F^{\bar{J}}, \\ \{\mathcal{Q}, \rho_z^I\} &= \partial_z x^I, & [\mathcal{Q}, F^I] &= D_z \rho_z^I - D_{\bar{z}} \rho_z^I + R^I_{J\bar{L}K} \eta^{\bar{L}} \rho_z^J \rho_{\bar{z}}^K, \\ \{\mathcal{Q}, \rho_{\bar{z}}^I\} &= \partial_{\bar{z}} x^I, & [\mathcal{Q}, F^{\bar{I}}] &= -\Gamma^{\bar{I}}_{J\bar{K}} \eta^{\bar{J}} F^{\bar{K}},\end{aligned}\quad (5.59)$$

et satisfont

$$\mathcal{Q}^2 = 0.$$

Notons que \mathcal{Q} agit différemment sur les coordonnées holomorphe et anti-holomorphe contrairement à ce qui se produit dans le modèle type-A. Autrement dit, elle dépend explicitement du choix de la

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

structure complexe de X . Si nous interprétons $\eta^{\bar{I}}$ comme une base pour des formes différentielles anti-holomorphe sur X , l'action de \mathcal{Q} sur x^I , $x^{\bar{I}}$ peut être interprétée comme le différentiel anti-holomorphe de Dolbeault $\bar{\partial}$. L'action de la théorie est

$$\begin{aligned} S_B = & \int_{\Sigma_g} d^2z [G_{I\bar{J}} (\partial_z x^I \partial_{\bar{z}} x^{\bar{J}} + \partial_{\bar{z}} x^I \partial_z x^{\bar{J}}) - \rho_z^I (G_{I\bar{J}} D_{\bar{z}} \eta^{\bar{J}} + D_{\bar{z}} \theta_I) \\ & - \rho_{\bar{z}}^I (G_{I\bar{J}} D_z \eta^{\bar{J}} + D_z \theta_I) - R^I{}_{J\bar{L}K} \eta^{\bar{L}} \rho_z^J \rho_{\bar{z}}^K \theta_I - G_{I\bar{J}} \tilde{F}^I \tilde{F}^{\bar{J}}]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Nous pouvons explicitement introduire la métrique sur Σ_g dans cette action et vérifier qu'elle est \mathcal{Q} -exacte :

$$S_B = \{\mathcal{Q}, V\} \quad (5.61)$$

où V est donné par

$$V = \int_{\Sigma_g} d^2z \sqrt{g} [G_{I\bar{J}} g^{\mu\nu} \rho_\mu^I \partial_\nu x^{\bar{J}} - F^I \theta_I]. \quad (5.62)$$

Finalement, nous avons également une symétrie de nombre fantôme $U(1)$, dans laquelle x , η , θ et ρ ont les nombres fantôme 0, 1, 1 et -1 , respectivement. Puisque l'action est \mathcal{Q} -exacte, la théorie est topologique et l'approximation semi-classique est exacte. Contrairement au modèle type-A, il n'y a aucun instanton non trivial pour cette théorie : les configurations classiques sont juste des transformations constantes $x : \Sigma_g \rightarrow X$. Il s'ensuit que les intégrales de chemin dans le modèle type-B se réduisent aux intégrales sur X [104].

Fonctions de corrélation : Les opérateurs dans la cohomologie \mathcal{Q} ont la forme

$$\mathcal{O}_\phi = \phi_{\bar{I}_1 \dots \bar{I}_p}^{J_1 \dots J_q} \eta^{\bar{I}_1} \dots \eta^{\bar{I}_p} \theta_{J_1} \dots \theta_{J_q}, \quad (5.63)$$

où

$$\phi = \phi_{\bar{I}_1 \dots \bar{I}_p}^{J_1 \dots J_q} dx^{\bar{I}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\bar{I}_p} \frac{\partial}{\partial x^{J_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{J_q}}, \quad (5.64)$$

est un élément de

$$H_{\bar{\partial}}^p(X, \wedge^q TX).$$

On peut considérer les fonctions de corrélation de la forme

$$\langle \prod_a \mathcal{O}_{\phi_a} \rangle. \quad (5.65)$$

Cette fonction de corrélation est nulle à moins que la règle de sélection suivante ne soit satisfaite :

$$\sum_a p_a = \sum_a q_a = d(1-g), \quad (5.66)$$

où g est le genre de la surface Riemann. Cette règle de choix vient du courant global anomal

$$U(1)_L \times U(1)_R.$$

En raison des arguments présentés ci-dessus, cette fonction de corrélation peut être calculée dans la limite semi-classique, où l'intégrale de chemin se réduit à l'intégration sur la cible X . Le produit d'opérateurs dans (5.65) correspond à une forme dans

$$H_{\bar{\partial}}^d(X, \wedge^d TX).$$

Pour intégrer une telle forme sur X on a besoin de la condition de Calabi-Yau. Ceci surgit comme suit. Une des propriétés les plus importantes des variétés de Calabi-Yau est qu'elles ont une section holomorphe Ω non nulle de la fibre canonique

$$K_X = \Omega^{d,0}(X).$$

Puisque Ω est non nulle, la fibre en ligne canonique est triviale et on récupère la condition

$$c_1(K_X) = c_1(X) = 0,$$

Ce qui conduit à la transformation inversible suivante,

$$\begin{aligned} \Omega^{0,p}(\wedge^d TX) &\rightarrow \Omega^{d-q,p}(X) \\ \phi_{\frac{I_1 \dots I_q}{J_1 \dots J_p}} &\rightarrow \Omega_{I_1 \dots I_q I_{q+1} \dots I_d} \phi_{\frac{I_1 \dots I_q}{J_1 \dots J_p}} \end{aligned} \quad (5.67)$$

où la $(d,0)$ -forme Ω est employée pour contracter les indices. Puisque Ω est holomorphe, ceci descend au $\bar{\partial}$ -cohomologie. Il s'ensuit alors qu'un élément dans

$$H_{\bar{\partial}}^d(X, \wedge^d TX)$$

se transforme à un élément dans

$$H_{\bar{\partial}}^{0,d}(X).$$

Après multiplication par Ω , on peut alors intégrer une (d,d) -forme sur X . C'est la prescription pour calculer des fonctions de corrélation comme (5.65).

Exemple : Un exemple important est le cas d'un CY3. Les opérateurs associés aux formes dans $H_{\bar{\partial}}^1(X, TX)$ ou, en utilisant (5.67), aux formes dans $H_{\bar{\partial}}^{2,1}(X)$ sont importants puisqu'ils correspondent aux déformations infinitésimales de la structure complexe de X . La règle de sélection (5.66) indique que nous devons intégrer trois de ces opérateurs. La fonction de corrélation s'écrit alors,

$$\langle \mathcal{O}_{\phi_1} \mathcal{O}_{\phi_2} \mathcal{O}_{\phi_3} \rangle = \int_X (\phi_1)_{\frac{I_1}{J_1}} (\phi_2)_{\frac{I_2}{J_2}} (\phi_3)_{\frac{I_3}{J_3}} \Omega_{I_1 I_2 I_3} dz^{\bar{J}_1} dz^{\bar{J}_2} dz^{\bar{J}_3} \wedge \Omega. \quad (5.68)$$

Il s'avère que les informations complètes du corrélateur (5.68) pour le genre zéro peuvent être codées par un *prépotentiel*.

Géométrie spéciale : Nous donnons brièvement ici certains des résultats de base de la géométrie spéciale et la théorie du prépotentiel pour le modèle B topologique [106, 9]. Vu le rôle important de cette géométrie, nous reprendrons cette étude plus loin et avec des détails. Les fonctions de corrélation dans le modèle B, comme par exemple

$$\langle \mathcal{O}_{\phi_1} \mathcal{O}_{\phi_2} \mathcal{O}_{\phi_3} \rangle,$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

dépendent d'un choix de structure complexe, comme nous l'avons déjà souligné. Les différentes structures complexes forment un espace de modules \mathcal{M} de dimension $h^{2,1}$. Une paramétrisation de \mathcal{M} est la suivante. D'abord on choisit une base symplectique pour $H_3(x)$, dénotée par

$$(A_a, B^a), \quad a = 0, 1, \dots, h^{2,1},$$

tel que

$$A_a \cap B^b = \delta_a^b.$$

On définit alors les périodes de la variété de Calabi-Yau comme

$$z_a = \int_{A_a} \Omega, \quad \mathcal{F}^a = \int_{B^a} \Omega, \quad a = 0, 1, \dots, h^{2,1}. \quad (5.69)$$

Bien sûr, le groupe symplectique

$$Sp(2h^{2,1} + 2, \mathbf{R})$$

agit sur le vecteur (z^a, \mathcal{F}_a) . Un résultat de base de la théorie de déformation des structures complexes indique que z^a sont (localement) des coordonnées projectives complexes de \mathcal{M} . Les coordonnées inhomogènes peuvent être présentées dans un ouvert où l'une des coordonnées projectives, z_0 , est différente de zéro. On pose alors

$$t_a = \frac{z_a}{z_0}, \quad a = 1, \dots, h^{2,1}. \quad (5.70)$$

Les coordonnées z_a sont appelées *des coordonnées projectives spéciales*, et puisqu'elles paramétrisent \mathcal{M} on déduit que l'autre ensemble de périodes doit dépendre d'eux,

$$\mathcal{F}^a = \mathcal{F}^a(z).$$

L'utilisation des périodes (5.69) nous permet de définir une fonction $\mathcal{F}(z)$ par l'équation

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^{h^{2,1}} z_a \mathcal{F}^a. \quad (5.71)$$

Cette fonction satisfait

$$\mathcal{F}^a(z) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_a} \quad (5.72)$$

et s'avère être homogène de degré deux en z_a . Donc, On peut faire un changement 'rescale' pour obtenir une fonction des coordonnées inhomogènes t_a :

$$F_0(t_a) = \frac{1}{z_0^2} \mathcal{F}(z_a). \quad (5.73)$$

$F_0(t_a)$ est appelé le prépotentiel du modèle B, et il dépend des $h^{2,1}$ modules t_a qui paramétrise les modules de la structure complexe de X . Le fait que les coordonnées z_a sont projectives est lié à la liberté dans la normalisation de la 3-forme Ω . Afin d'obtenir des expressions en termes des coordonnées inhomogènes t_a , on doit faire le changement d'échelle,

$$\Omega \rightarrow \frac{1}{z_0} \Omega,$$

et les périodes (z_a, \mathcal{F}^a) deviennent

$$\left(1, t_a, 2F_0 - \sum_{a=1}^{h^{2,1}} t_a \frac{\partial F_0}{\partial t_a}, \frac{\partial F_0}{\partial t_a} \right). \quad (5.74)$$

Un des résultats principaux dans la géométrie spéciale est que les fonctions de corrélation (5.68) peuvent être calculées en termes du prépotentiel $F_0(t_a)$. Etant donné une déformation de la structure complexe paramétrisée par t_a , le vecteur tangent correspondant

$$\partial/\partial t_a$$

est associé à une forme différentielle de type $(2, 1)$. Cette forme mène à un opérateur \mathcal{O}_a , et les fonctions à trois-point impliquant ces opérateurs s'avèrent être données par

$$\langle \mathcal{O}_a \mathcal{O}_b \mathcal{O}_c \rangle = \frac{\partial^3 F_0}{\partial t_a \partial t_b \partial t_c}. \quad (5.75)$$

Le prépotentiel $F_0(t)$ code les informations appropriées du modèle B sur la 3-sphère. Dans la section suivante, nous introduisons les généralisations de $F_0(t)$ pour des genres plus élevés $g \geq 1$.

5.2 Cordes topologiques

5.2.1 Couplage à la gravité

Dans la section précédente on a défini deux théories de champs topologiques à deux dimensions, les modèles sigma topologiques de type-A et les modèles type-B. Bien qu'ils contiennent beaucoup d'informations au genre 0, ils s'avèrent être triviaux pour $g > 1$ en raison des règles de sélection (5.49) et (5.66). Ceci est dû au fait que, pour définir ces théories, on considère une métrique fixée dans la surface de Riemann. Afin d'obtenir une théorie non triviale pour un genre plus grand ($g \geq 1$) nous devons introduire les degrés de liberté de la métrique bidimensionnelle. Ceci signifie que nous devons coupler les théories des champs topologiques considérées dans la dernière section à la gravité bidimensionnelle. Ce couplage à la gravité est obtenu en utilisant le fait que la structure de la théorie twistée est proche de celle de la corde bosonique [107, 21, 108]. Dans la corde bosonique, il y a un opérateur nilpotent BRST, \mathcal{Q}_{BRST} , et le tenseur d'énergie-impulsion est un commutateur \mathcal{Q}_{BRST} qui s'exprime comme suit :

$$T(z) = \{\mathcal{Q}_{BRST}, b(z)\}.$$

De plus, il y a un nombre fantôme avec l'anomalie

$$3\chi(\Sigma_g) = 6 - 6g,$$

de telle manière que \mathcal{Q}_{BRST} et $b(z)$ aient le nombre fantôme 1 et -1 , respectivement. C'est la même structure que nous avons trouvée dans (5.26) tel que le champ composé $G_{\mu\nu}$ joue le rôle d'un anti-fantôme. En outre, les anomalies dans le courant de fantôme sont $6g - 6$ pour une CY3, et donc la symétrie du nombre fantôme dans le modèle sigma twisté joue exactement le même rôle que la symétrie du nombre fantôme dans la corde bosonique. On peut alors suivre la prescription

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

pour le couplage à la gravité de la théorie de corde bosonique [2] et définir l'énergie libre pour $g \geq 1$ comme suit :

$$F_g = \int_{\overline{M}_g} \left\langle \prod_{k=1}^{6g-6} (G, \mu_k) \right\rangle, \quad (5.76)$$

où

$$(G, \mu_k) = \int_{\Sigma_g} d^2z \left(G_{zz} (\mu_k)_{\bar{z}}^z + G_{\bar{z}\bar{z}} (\mu_k)_z^{\bar{z}} \right), \quad (5.77)$$

et μ_k sont les différentiels de Beltrami. La valeur moyenne dans le vide (5.76) se réfère à l'intégrale de chemin sur les champs du modèle sigma topologique, et donne une forme différentielle sur l'espace des modules \overline{M}_g des surfaces de Riemann de genre g . Le modèle obtenu après le couplage entre la gravité et le modèle sigma topologique type-A (B) est appelé la théorie de corde topologique type-A (B). On peut montrer que, comme dans le cas du prépotentiel F_0 , le couplage de F_g défini ci-dessus dépend seulement des modules de Kähler pour le modèle type-A, et des modules de la structure complexe pour le modèle type-B.

5.2.2 Relation avec les compactifications du modèle type II

Les amplitudes de la corde topologique F_g que nous avons considérées auparavant, aussi bien que le prépotentiel F_0 qui apparaît déjà au niveau d'arbre, ont une interprétation en termes de compactifications de la théorie des supercordes type II.

Les supercordes type II à dix dimensions ont le nombre maximum de charge supersymétrique et apparaissent en deux types : types IIA et type IIB. A basse énergie ; ces modèles se réduisent respectivement aux théorie de supergravité type IIA/IIB à dix dimensions [2]. Une fois que cette théorie est compactifiée sur une CY3, la théorie résultante à quatre dimensions admet la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ et elle est, en fait, la supergravité $\mathcal{N} = 2$ à quatre dimensions. Dans cette théorie il y a trois sortes de multiplets.

(i) D'abord, le multiplet de la supergravité, qui inclut le graviton à quatre dimensions, deux gravitinos, et un champ de jauge $U(1)$ appelé le graviphoton,

$$g_{\mu\nu}, \quad \psi_{\mu\alpha}^i, \quad \bar{\psi}_{\mu\dot{\alpha}}^i, \quad A_{\mu}^{graviphoton}$$

(ii) Les multiplets de matière $\mathcal{N} = 2$: le vecteur multiplet $\mathcal{N} = 2$ noté (VM) dont les composantes sont,

$$A_{\mu}, \quad \lambda_{\alpha}^i, \quad \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^i, \quad C, \quad \bar{C}$$

(iii) Les hypermultiplets (HM),

$$\psi_{\alpha}, \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, \quad \phi^i, \quad \bar{\phi}^i$$

Dans ce qui suit, on va se focaliser sur le vecteur multiplets. Rappelons qu'un VM $\mathcal{N} = 2$ contient un multiplet de jauge $\mathcal{N} = 1$

$$V = (A_{\mu}, \lambda_{\alpha})$$

et un multiplet chiral $\mathcal{N} = 1$,

$$\Phi = (C, \chi)$$

c'est-à-dire un champ de jauge A_μ , deux fermions de Weyl, λ_α et χ (soit aussi les λ_α^1 et λ_α^2) et un scalaire complexe.

Le nombre n de VMs dans la théorie effective quadri-dimensionnelle

$$V_a, \Phi_a, \quad a = 1, \dots, n$$

dépend de la géométrie interne du CY3 X à travers ses nombres de Hodge. Dans les compactifications de la théorie type IIA, le nombre des multiplets vectoriels est

$$n = h^{1,1}(X),$$

alors que dans type IIB ce nombre est donné par

$$n = h^{2,1}(X).$$

Notons que ce sont les modules qui déterminent le prépotentiel dans le modèle type-A et type-B, respectivement. Le champ scalaire complexe dans le a-ème VM est dénoté par

$$t_a, \quad \begin{cases} a = 1, \dots, h^{1,1}(X) & \text{cas type IIA} \\ a = 1, \dots, h^{2,1}(X) & \text{cas type IIB} \end{cases}$$

Une valeur moyenne dans le vide pour ce champ scalaire complexe

$$\langle C_a \rangle = t_a$$

peut être interprétée comme un choix des modules du CY3.

L'action effective pour les VMs $\mathcal{N} = 2$ jusqu'au second ordre en dérivées est codée dans une seule fonction holomorphe, appelée le *prépotentiel* $F_0(t_a)$. \mathcal{T}_a et W_a^α dénote, respectivement, les multiplets chiraux et de jauge $\mathcal{N} = 1$ associés au a-ème VM $\mathcal{N} = 2$.

$$\Phi_a, V_a, \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{T}_a, W_a^\alpha,$$

L'action quadri-dimensionnelle peut être écrite, dans le superspace $\mathcal{N} = 1$, comme suit

$$\frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[\int d^4\theta \frac{\partial F_0(\mathcal{T})}{\partial \mathcal{T}_a} \overline{\mathcal{T}}_a + \frac{1}{2} \int d^2\theta \frac{\partial^2 F_0}{\partial \mathcal{T}_a \partial \mathcal{T}_b} W_a^\alpha W_{\alpha b} \right]. \quad (5.78)$$

Le premier terme dans (5.78) mène à un modèle sigma non-linéaire dont l'espace cible qui est Kählerien, avec le potentiel de Kähler donné par

$$K = \text{Im} \left(\overline{\mathcal{T}}_a \frac{\partial F_0(\mathcal{T})}{\partial \mathcal{T}_a} \right). \quad (5.79)$$

La métrique sur l'espace des modules est donnée par

$$ds^2 = g_{a\bar{b}} dt_a dt_{\bar{b}} = \text{Im} \tau_{ab} dt_a dt_{\bar{b}}, \quad (5.80)$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

où,

$$\tau_{ab} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial t_a \partial t_b}. \quad (5.81)$$

De (5.78) on obtient le terme cinétique de jauge pour les champs vectoriels

$$\int d^4x \tau_{ab}(t) F_{\mu\nu}^a F^{b\ \mu\nu}, \quad (5.82)$$

où $F_{\mu\nu}^a$ est le champ de force du champ vectoriel $U(1)$ du a-ème VM. Par conséquent,

$$\tau_{ab}(t)$$

est la matrice des couplages de jauge. Puisque l'action (5.78) est complètement déterminée par le prépotentiel, il est important de déterminer

$$F_0(t_a).$$

Un des résultats de base de la théorie est que le prépotentiel du vecteur multiplet dans les compactifications des supercordes type IIA/IIB est donné par le prépotentiel des modèles topologiques type-A/B que nous avons présenté dans la section précédente.

La théorie effective quadri-dimensionnelle obtenue par la compactification de la supercorde type II sur X contient des couplages plus compliqués. Le champ de force graviphoton

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{graviphoton} - \partial_\nu A_\mu^{graviphoton}$$

est la composante la plus basse dans le développement du multiplet de supergravité $\mathcal{N} = 2$

$$W_{\mu\nu}^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} T_{\mu\nu} - R_{\mu\nu\lambda\rho} \theta^i \sigma^{\lambda\rho} \theta^j + \dots. \quad (5.83)$$

Dans cette équation, $i, j = 1, 2$ sont les indices de la symétrie interne $SU(2)_R$ de $\mathcal{N} = 2$ et les θ^i sont des coordonnées fermioniques du superspace $\mathcal{N} = 2$ [109]. Les couplages auxquels on s'intéresse sont donnés, dans le superspace $\mathcal{N} = 2$, par

$$\int d^4x d^4\theta F_g(t_a) (W^2)^{g-1} = \int d^4x F_g(t_a) (T^2)^{g-1} R^2 + \dots, \quad g \geq 1, \quad (5.84)$$

Il a été montré dans [109] que les $F_g(t_a)$ sont conformes aux amplitudes de la corde topologique de genre $g \geq 1$ définies dans (5.76). Ceci donne une relation importante entre les amplitudes de la corde topologique et les amplitudes de supercorde. Dans ce qui suit, nous étudions la corde topologique type-A.

5.2.3 Corde topologique type-A

Description mathématique

Comme pour le prépotentiel F_0 , les énergies libres F_g , $g \geq 1$, de la corde topologique type-A peuvent également être évaluées comme une somme sur des secteurs d'instantons, c'est-à-dire sur des courbes holomorphes. Ils ont la structure,

$$F_g(t) = \sum_{\beta} N_{g,\beta} Q^{\beta}, \quad (5.85)$$

où $N_{g,\beta}$ 'compte' le nombre des courbes holomorphes de genre g dans la classe β d'homologies deux. Les nombres

$$N_{g,\beta}$$

sont interprétés comme les invariants de Gromov-Witten de la variété de Calabi-Yau X . Ils généralisent les invariants de Gromov-Witten de genre 0 qui ont été présentés dans (5.55). Les invariants de Gromov-Witten apparaissant dans (5.85) peuvent être définis d'une manière mathématique rigoureuse. Ils jouent un rôle important dans la géométrie algébrique et la géométrie symplectique. Dans ce qui suit, nous présentons un résumé d'outils principaux de la théorie de Gromov-Witten.

Espace des modules : Le couplage du modèle type-A à la gravité implique l'espace de modules des surfaces de Riemann,

$$\overline{M}_g.$$

Pour construire les invariants de Gromov-Witten d'une manière générale on a aussi besoin de l'espace des modules de la métrique,

$$\overline{M}_{g,n}.$$

C'est l'espace de *Deligne-Mumford* des structures complexes sur une surface de Riemann avec des trous [110].

Dans le cas de la théorie des cordes topologiques, l'espace des modules approprié est

$$\overline{M}_{g,n}(X, \beta), \quad \beta \in H_2(X),$$

C'est une généralisation de $\overline{M}_{g,n}$, et dépend du choix de la classe d'homologie β dans X . Un point dans $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ peut être écrit comme

$$(f, \Sigma_g, p_1, \dots, p_n)$$

et est donné par

(a) Un point dans $\overline{M}_{g,n}$, c'est-à-dire une surface de Riemann à n trous,

$$(\Sigma_g, p_1, \dots, p_n),$$

avec un choix de structure complexe sur Σ_g , et

(b) Une application

$$f : \Sigma_g \rightarrow X$$

qui est holomorphe en ce qui concerne ce choix de structure complexe et tel que

$$f_*[\Sigma_g] = \beta.$$

L'ensemble de tous ces points forme un bon espace des modules qui satisfait un certain nombre de conditions [111, 9] :

$\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ est l'espace des modules de base dont nous aurons besoin en théorie des cordes topologiques. Sa dimension virtuelle complexe est indiquée par

$$(1-g)(d-3) + n + \int_{\Sigma_g} f^*(c_1(X)), \quad (5.86)$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

est donné par (5.49) plus $3g - 3 + n$, qui est la dimension de $\overline{M}_{g,n}$ et tient compte des modules supplémentaires qui viennent du couplage à la gravité bidimensionnelle.

Nous avons également deux transformations naturelles

$$\begin{aligned}\pi_1 & : \overline{M}_{g,n}(X, \beta) & \rightarrow & X^n, \\ \pi_2 & : \overline{M}_{g,n}(X, \beta) & \rightarrow & \overline{M}_{g,n}.\end{aligned}\tag{5.87}$$

La première transformation est facile à définir : étant donné un point

$$(f, \Sigma_g, p_1, \dots, p_n) \in \overline{M}_{g,n}(X, \beta),$$

on calcule juste

$$(f(p_1), \dots, f(p_n)).$$

La deuxième transformation envoie

$$(f, \Sigma_g, p_1, \dots, p_n) \rightarrow (\Sigma_g, p_1, \dots, p_n),$$

elle ignore l'information sur la transformation f et s'intéresse à l'information sur la courbe trouée.

Invariants de Gromov-Witten : On peut maintenant formellement définir l'invariant de Gromov-Witten, $I_{g,n,\beta}$ comme suit. Considérons les classes de cohomologie ϕ_1, \dots, ϕ_n dans $H^*(X)$. Si nous faisons le 'pull back' de leur produit tensoriel à

$$H^*(\overline{M}_{g,n}(X, \beta))$$

via π_1 , on obtient une forme différentielle sur l'espace de modules des transformations qu'on peut intégrer :

$$I_{g,n,\beta}(\phi_1, \dots, \phi_n) = \int_{\overline{M}_{g,n}(X,\beta)}^* \pi_1^*(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n).\tag{5.88}$$

L'invariant de Gromov-Witten $I_{g,n,\beta}(\phi_1, \dots, \phi_n)$ s'annule à moins que le degré de la forme est égale à la dimension de l'espace de modules. Donc, on a la contrainte suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \deg(\phi_i) = (1-g)(d-3) + n + \int_{\Sigma_g} f^*(c_1(X)).\tag{5.89}$$

Notons que les CY3 jouent un rôle spécial dans la théorie, puisque pour ces variétés la dimension virtuelle dépend seulement du nombre des trous, et donc la condition précédente est toujours satisfaite si les formes ϕ_i sont de degré 2. Ces invariants généralisent les invariants obtenus à partir des modèles sigma topologiques. En particulier, $I_{0,3,\beta}$ sont les invariants impliqués dans l'évaluation des fonctions de corrélation du modèle sigma topologique avec un CY3 comme cible dans (5.53). Quand $n = 0$, on obtient un invariant $I_{g,0,\beta}$ qui n'exige aucune insertion. C'est effectivement l'invariant de Gromov-Witten $N_{g,\beta}$ qui apparaît dans (5.85). Ces invariants sont en général *rationnels*, en raison du caractère d'orbifold des espaces des modules impliqués.

En employant la transformation

$$\pi_2,$$

on peut ramener n'importe quelle intégrale de la forme (5.88) à une intégrale sur l'espace des modules des courbes $\overline{M}_{g,n}$. Les intégrales résultantes impliquent deux types de formes différentielles.

(i) Les premières sont les classes de Mumford

$$\psi_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

qui sont construites comme suit. On définit d'abord la fibré en ligne \mathcal{L}_i sur $\overline{M}_{g,n}$

$$\mathcal{L}_i \rightarrow \overline{M}_{g,n}$$

On a alors,

$$\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.90)$$

(ii) Les deuxièmes formes différentielles sont les classes de Hodge

$$\lambda_j, \quad j = 1, \dots, g,$$

qui sont définies comme suit. Sur $\overline{M}_{g,n}$ il y a une fibre vectorielle complexe \mathbb{E} de rang g , appelée la fibre de Hodge, dont la fibre en un point Σ_g est

$$H^0(\Sigma_g, K_{\Sigma_g}),$$

c'est-à-dire l'espace des sections holomorphes de la fibre ligne canonique K_{Σ_g} de Σ_g . Les classes de Hodge sont simplement les classes de Chern de cette fibre,

$$\lambda_j = c_j(\mathbb{E}). \quad (5.91)$$

Les intégrales des classes ψ sont calculées dans [112], tandis que les intégrales impliquant les classes ψ et λ (appelés les intégrales de Hodge) peuvent, en principe, être calculés en les ramenant aux intégrales pures de ψ [113, 114, 115].

Propriétés d'intégralité et invariants de Gopakumar-Vafa

Les énergies libres F_g de la théorie de corde topologique, qui contiennent des informations sur les invariants de Gromov-Witten de la variété de CY X , jouent un rôle important dans la théorie de corde type IIA. Elles capturent le prépotentiel et les couplages F_g dans la supergravité $\mathcal{N} = 2$ à quatre dimensions qui résulte de la compactification de la théorie type IIA sur X .

La relation entre les supercordes et les cordes topologiques a été une source perspicace pour les deux modèles ; en particulier elle a permis la mise en surface d'une structure d'intégralité cachée portée par les invariants de Gromov-Witten $N_{g,\beta}$. Afin de rendre manifeste cette structure, il est utile d'introduire la fonction génératrice de l'énergie libre :

$$F(g_s, t) = \sum_{g=0}^{\infty} F_g(t) g_s^{2g-2}. \quad (5.92)$$

Le paramètre g_s peut être considéré comme une variable formelle, mais dans le contexte des cordes type II, c'est la constante de couplage de la corde. L'équation (5.92) peut être écrite comme un *indice généralisé* qui compte les états BPS de la théorie de supercorde type IIA compactifiée sur X [12, 9].

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Considérons la compactification de la théorie de corde type IIA sur X en présence du champ $T_{\mu\nu}$ de force graviphotonique auto-dual constant telle que

$$T^2 = g_s^2.$$

En tenant compte de (5.84), on constate que ceci mène au terme suivant dans l'action effective quadridimensionnelle :

$$F(g_s, t) R^2, \quad (5.93)$$

ainsi que sa réalisation supersymétrique. Il s'avère que ce couplage peut être calculé en intégrant, à une boucle, une certaine classe des particules chargées en présence du champ de force graviphotonique auto-dual constant. Ces particules entrent dans les multiplets de spin, c'est-à-dire ils sont indexés par leur représentation de spin du groupe de Lorentz

$$SU(2)_L \times SU(2)_R. \quad (5.94)$$

En raison de l'auto-dualité, cette correction est seulement sensible au spin gauche de la particule, puisque le champ de force graviphotonique auto-dual est couplé seulement au spin $SU(2)_L$ de la particule, indexés par j_L . La contribution des multiplets de masse m et de spin j_L à ce couplage est donnée par la formule de Schwinger,

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \frac{e^{-\tau m}}{(2 \sin \frac{\tau g_s}{2})^2} \text{Tr} (-1)^F e^{2i\tau j_L^3 g_s}, \quad (5.95)$$

où

$$F = 2j_L^3 + 2j_R^3$$

est le nombre total des fermions. Mais, quelles sont les particules qui doivent être prises en considération dans ce calcul ?

Ce sont les particules BPS de la compactification quadridimensionnelle. Puisque la théorie IIA contient des $D2$ et $D0$ branes, on peut obtenir ces particules BPS en enroulant les branes $D2$ liés au $D0$ branes autour des surfaces de Riemann à l'intérieur de X . La masse m d'une particule BPS est donnée par la charge centrale Z correspondante de l'état lié de brane $D2/D0$. Si la $D2$ brane enveloppe une courbe dans la classe d'homologie $\beta \in H_2(X)$, la charge centrale Z donne l'aire de la courbe, qui dépend d'un choix des paramètres de Kähler t et il est donné par le produit

$$t \cdot \beta.$$

Il faut aussi tenir compte que, étant donné une $D2$ brane enroulée, on peut former un état lié avec n'importe quel nombre d de $D0$ branes. La charge centrale d'une particule BPS provenant d'une $D2$ brane enroulant une courbe dans la classe β liée à d $D0$ branes est donnée par

$$m = t \cdot \beta + 2\pi i d. \quad (5.96)$$

Supposons qu'il y a $n_\beta^{(j_L, j_R)}$ particules de spin (j_L, j_R) venant d'une brane $D2$ enroulée autour d'une surface de Riemann dans la classe β . Après avoir sommer sur j_R avec $(-1)^{2j_R^3}$ on obtient

$$n_\beta^{j_L} = \sum_{j_R} (-1)^{2j_R^3} (2j_R + 1) n_\beta^{(j_L, j_R)}. \quad (5.97)$$

Le contenu de $SU(2)_L$ peut être donné dans plusieurs bases. Ci-dessus, on a choisi la base donnée par j_L , mais il existe une autre base importante donnée par

$$I_g = \left[2(0) + \left(\frac{1}{2}\right) \right]^{\otimes g}. \quad (5.98)$$

Notons que I_1 se compose de deux particules de spin 0 et une de spin 1/2. L'ensemble ci-dessus, avec $g = 0, 1, \dots$, donne une base des représentations $SU(2)_L$, et on peut écrire

$$\sum_{j_L} n_{\beta}^{j_L} [j_L] = \sum_{g \geq 0} n_{\beta}^g I_g. \quad (5.99)$$

Ceci définit les nombres entiers n_{β}^g , qui caractérisent l'ensemble des multiplets contribuant au $F(g_s, t)$. Notons que

$$Tr_{I_g} (-1)^F e^{2i\tau j_L^3 g_s} = \left(2 \sin \frac{\tau g_s}{2} \right)^{2g}.$$

On peut maintenant mettre tous ces ingrédients ensemble et calculer l'amplitude totale $F(g_s, t)$. On doit sommer sur tous les états BPS possibles, donc on doit sommer sur toutes les classes d'homologie possibles β , toutes les représentations $SU(2)_L$ marquées par g , et tous les nombres d des $D0$ branes. Le résultat est

$$F(g_s, t) = \sum_{\beta} \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{d=-\infty}^{\infty} n_{\beta}^g \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(t\beta + 2\pi id)} \left(2 \sin \frac{\tau g_s}{2} \right)^{2g-2}. \quad (5.100)$$

Pour procéder, on somme d'abord sur d en employant

$$\sum_{d=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi id\tau} = \sum_{d=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - d). \quad (5.101)$$

En intégrant sur τ , on obtient

$$F(g_s, t) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{\beta} \sum_{d=1}^{\infty} n_{\beta}^g \frac{1}{d} \left(2 \sin \frac{dg_s}{2} \right)^{2g-2} Q^{d\beta}. \quad (5.102)$$

Les nombres entiers n_{β}^g sont connus comme des *invariants de Gopakumar-Vafa*. Ils sont des invariants de la variété de CY X , dans le sens qu'ils ne dépendent pas des déformations régulières de la géométrie cible, ceci est contrairement aux quantités $n_{\beta}^{(j_L, j_R)}$, qui dépendent des déformations. Comme d'habitude, sommer sur une quantité non-invariante avec des signes fournit une quantité invariante.

Le résultat (5.102) implique que les invariants de Gromov-Witten des cordes fermées, qui sont en général rationnels, peuvent être écrits en termes de ces entiers invariants. En fait, en connaissant les invariants de Gromov-Witten $N_{g,\beta}$, on peut calculer les invariants de Gopakumar-Vafa (5.102) [116]. En faisant l'expansion en série de g_s , la formule de Gopakumar-Vafa (5.102) prévoit l'expression suivante pour $F_g(t)$ [117] :

$$F_g(t) = \sum_{\beta} \left(\frac{|B_{2g}| n_{\beta}^0}{2g(2g-2)!} + \frac{2(-1)^g n_{\beta}^2}{(2g-2)!} \pm \dots - \frac{g-2}{12} n_{\beta}^{g-1} + n_{\beta}^g \right) Li_{3-2g}(Q^{\beta}), \quad (5.103)$$

où Li_j est le polylogarithme défini dans (4.177).

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

La structure trouvée par Gopakumar et Vafa résoud quelques questions dans la théorie des invariants de Gromov-Witten, en particulier la signification énumérative des invariants. Pour la découverte de la signification énumérative des invariants de Gromov-Witten on a deux obstructions ; la *multicouverture* et le *bullage*.

Couverture multiple : Elle surgit comme suit : Supposons qu'on a une application holomorphe

$$x : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$$

de genre zéro et de classe β . En composant ceci avec une couverture de degré d $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, on peut trouver une autre transformation holomorphe dans la classe $d\beta$. Donc, à chaque degré, afin de compter le nombre réel des courbes holomorphes ' primitives', il faudrait soustraire de l'invariant de Gromov-Witten correspondant les contributions venant de la multicouverture des courbes à degré inférieur.

Bullage : Un autre effet géométrique qui doit être pris en considération est le *bullage* [118, 108]. Si on trouve une transformation

$$x : \Sigma_g \rightarrow X$$

d'une surface de Riemann de genre g vers une CY3. En collant à Σ_g une petite surface de Riemann de genre h , et en la rendant très petite, on peut trouver une transformation holomorphe approximative d'une surface de Riemann dont le genre est topologiquement $g+h$. Ceci signifie que les transformations ' primitives' à genre g contribuent à tous les genres $g' > g$. Afin de compter les courbes correctement il faudrait prendre cet effet en considération.

La formule (5.103) donne une réponse à ces questions. Considérons, par exemple, la structure de F_0 . Selon cette formule, la contribution d'un état BPS est donnée par la fonction Li_3 , c-à-d. chaque état BPS contribue avec

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{Q^{d\beta}}{d^3}. \quad (5.104)$$

Ceci donne la contribution de toutes les multicouvertures d'une courbe 'primitive' donnée, où d est le degré de la multicouverture. La relation (5.104) indique en outre que chaque couverture a un poids $1/d^3$. Par conséquent, les invariants BPS n_β^0 correspondant aux transformations holomorphes primitives, et la non-intégralité des invariants de Gromov-Witten de genre-zéro est due aux effets de la multicouverture [119, 120]. Le résultat de Gopakumar et Vafa prévoit également que les multicouvertures de degré d d'une courbe de genre g contribue avec un poids d^{3-2g} (venant de Li_{3-2g}). De plus, la formule (5.103) implique que l'état BPS de genre $h < g$ contribue dans $F_g(t)$ avec un poids précis, et ceci correspond aux effets de bullage. Par exemple, un état BPS de genre 0 contribue dans F_g avec un poids

$$\frac{|B_{2g}|}{2g(2g-2)!}.$$

Les invariants de Gopakumar-Vafa peuvent être également calculés dans quelques cas directement en termes de la géométrie des courbes incorporées, et dans de nombreux cas leur calcul implique seulement la géométrie algébrique élémentaire [121]. L'idée fondamentale derrière cette approche est la suivante. Les états BPS associés aux $D2$ branes enroulées autour d'une surface de Riemann Σ_g incorporée sont obtenus par la quantification de l'espace des modules correspondant, comme

dans le cas de la quantification des solitons. L'espace des modules associé à une $D2$ brane, approximativement, est composé de deux parties. Une provenant de la déformation géométrique des modules de la surface de Riemann Σ_g à l'intérieur de la variété de Calabi-Yau X , et on la dénote par

$$\mathcal{M}_{g,\beta}.$$

L'autre partie provient des champs de jauge sur la $D2$ brane, plus précisément des modules des fibres plates $U(1)$ sur Σ_g . Cet espace des modules est simplement le Jacobian de Σ_g , qui est un tore

$$T^{2g}.$$

L'espace de Hilbert résultant est donné par le produit tensoriel de leurs cohomologies :

$$\mathcal{H} = H^*(\mathcal{M}_{g,\beta}) \otimes H^*(T^{2g}). \quad (5.105)$$

Puisque $\mathcal{M}_{g,\beta}$ et T^{2g} sont des variétés de Kähler, leurs cohomologies ont une action $SU(2)$ donnée par leur décomposition de Lefschetz [124]. Il s'avère que les $SU(2)$ s agissant sur les premiers et deuxièmes facteurs dans (5.105) donnent, respectivement, $SU(2)_R$ et $SU(2)_L$ associé aux états BPS [125, 12]. Du point de vue de la décomposition de Lefschetz, on a

$$H^*(T^{2g}) = I_g. \quad (5.106)$$

Sommer sur les états $SU(2)_R$ avec $(-1)^{2j_R^3}$ correspond à calculer la caractéristique d'Euler de $\mathcal{M}_{g,\beta}$. On trouve alors une interprétation géométrique pour l'entier invariant n_β^g :

$$n_\beta^g = (-1)^{\dim(\mathcal{M}_{g,\beta})} \chi(\mathcal{M}_{g,\beta}). \quad (5.107)$$

Dans ce qui précède, on a supposé que le genre de la courbe incorporée Σ_g est constant car on a changé les modules, mais évidemment ce n'est pas le cas en général : puisque si on se déplace le long de l'espace de modules, la surface de Riemann développe des singularités nodales, et on doit corriger (5.107) pour tenir compte de ce fait. Ainsi, la bonne formule exprimant les invariants de Gopakumar-Vafa en termes de la géométrie des surfaces incorporées est [121]

$$n_\beta^{g-\delta} = (-1)^{\dim(\mathcal{M}_{g,\delta,\beta})} \chi(\mathcal{M}_{g,\delta,\beta}), \quad (5.108)$$

où $\mathcal{M}_{g,\delta,\beta}$ est l'espace des modules des courbes irréductibles de genre g avec des noeuds ordinaires δ . Malgré tous ces résultats, une définition mathématique rigoureuse des invariants demeure encore inconnue.

Signalons que pour le cas $g \geq 2$, Il existe une contribution des transformations constantes dans l'expression de F_g qui n'a pas été inclus dans (5.102) et qui est donné par $N_{g,0}$. Cette contribution s'écrit comme une intégrale de Hodge [108, 114]

$$N_{g,0} = (-1)^g \frac{\chi(X)}{2} \int_{M_g} c_{g-1}^3(\mathbb{E}), \quad g \geq 2, \quad (5.109)$$

où $\chi(X)$ est la caractéristique d'Euler de la variété de Calabi-Yau X . Cette intégrale peut être évaluée pour donner [115]

$$N_{g,0} = \frac{(-1)^g \chi(X) |B_{2g} B_{2g-2}|}{4g(2g-2)(2g-2)!}. \quad (5.110)$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Cette expression des invariants de Gromov-Witten de degré zéro peut être également déduite du point de vu physique [12] en termes des D branes de la théorie de corde type IIA. De ce point de vu, la contribution de la transformation constante vient de l'intégration des $D0$ branes. A ce point les surfaces de Riemann incorporées sont des points, et l'espace de modules des déformations géométriques pour les $D0$ branes est l'espace cible X tout entier. La contribution peut être alors obtenue de l'intégral (5.100) avec

$$\beta = 0 \quad \text{et} \quad n_\beta^g = -\delta_{g0}\chi(X)/2,$$

où $\chi(X)$ est la caractéristique d'Euler du CY X . Ceci mène à la fonction génératrice des invariants de Gromov-Witten de degré zéro

$$F_{\beta=0} = -\frac{\chi(X)}{2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d \left(2 \sin \frac{dg_s}{2}\right)^2} \quad (5.111)$$

Le développement asymptotique de cette fonction comme une série en g_s mène à l'expression suivante [126]

$$F_{\beta=0} = -\frac{\chi(X)}{2} \left[g_s^{-2} \zeta(3) + K - \sum_{g=2}^{\infty} g_s^{2g-2} \frac{(-1)^g |B_{2g}| |B_{2g-2}|}{2g(2g-2)(2g-2)!} \right] \quad (5.112)$$

où

$$K = \frac{1}{12} \log \frac{2\pi i}{g_s} - \frac{1}{2\pi^2} \zeta'(2) + \frac{1}{12} \gamma_E, \quad (5.113)$$

et γ_E est la constante d'Euler-Mascheroni. De cette façon, on récupère le résultat (5.110) pour $g \geq 2$. Notons que les termes pour $g \geq 2$ dans l'expansion asymptotique peuvent être obtenus en développant (5.111) en g_s . Par ailleurs, il est intéressant de mentionner que les invariants de Gromov-Witten de degré zéro (5.110) peuvent être également obtenus en faisant recours à la dualité corde type IIA - corde heterotique [117].

5.2.4 Cordes topologiques Ouvertes

Modèle type A

L'étude entretenue dans ce qui précède concerne les modèles sigma topologiques définis sur des surfaces de Riemann fermées et les cordes topologiques fermées, Cependant, ces deux théories peuvent être étendues au cas ouvert. Pour traiter ce dernier, le point de départ naturel est un modèle sigma topologique dans lequel la surface-d'univers est une surface de Riemann $\Sigma_{g,h}$ de genre g avec h trous [21]. Il est crucial de spécifier les conditions de bord pour les transformations holomorphes,

$$f : \Sigma_{g,h} \rightarrow X.$$

Conditions de bord : Ces conditions ne sont autres que celles de Dirichlet et sont données par les sous-variétés Lagrangienne du Calabi-Yau X . En général, une sous-variété Lagrangienne \mathcal{L} est un cycle sur lequel la forme de Kähler s'annule :

$$J|_{\mathcal{L}} = 0. \quad (5.114)$$

Si on dénote par

$$C_i, \quad i = 1, \dots, h,$$

les bords de $\Sigma_{g,h}$, on doit choisir une sous-variété Lagrangienne \mathcal{L} telle que

$$f(C_i) \subset \mathcal{L}. \quad (5.115)$$

Ces conditions de bord sont une conséquence de la \mathcal{Q} -invariance au bord. On a également des conditions de bord pour les champs de Grassmann du modèle sigma topologique, qui exigent que χ et ψ au bord C_i prennent des valeurs dans

$$f^*(T\mathcal{L}).$$

On peut aussi coupler la théorie aux degrés de liberté de Chan-Paton sur les bords, provoquant une symétrie de jauge $U(N)$. Le modèle peut être alors interprété comme une théorie de corde topologique ouverte en présence de N *D-branes* topologiques enveloppant la sous variété Lagrangienne \mathcal{L} . Les facteurs de Chan-Paton provoquent un terme de bord en présence d'une connexion de jauge. Si A est une connexion $U(N)$ sur \mathcal{L} , alors l'intégrale de chemin doit être modifiée en insérant

$$\prod_i Tr P \exp \oint_{C_i} f^*(A), \quad (5.116)$$

où on a fait le 'pull back' de la connexion à C_i par la transformation f , limitée au bord. Contrairement aux *D-branes* physiques dans des variétés de CY, qui enveloppent les sous-variétés Lagrangiennes spéciaux [127, 128].

Couplage gravitationnel : Une fois que les conditions de bord ont été spécifiées, on peut coupler le modèle à la gravité de la même façon à ce qu'on a fait dans le cas fermé. La théorie résultante est la théorie de corde topologique ouverte type-A, et décrit mathématiquement les transformations holomorphes des surfaces de Riemann ouvertes de genre g et avec h trous vers la variété de CY X , avec les conditions de Dirichlet au bord indiquées par \mathcal{L} . Ces transformations holomorphes sont appelées les *instantons de la corde ouverte*, et peuvent être aussi classifiées topologiquement. Le secteur topologique d'un instanton de la corde ouverte est donné par deux types différents de données : la partie de bord et la partie de volume.

Contribution du volume : Pour la partie de volume, le secteur topologique est paramétrisé par des classes d'homologie relatives, puisqu'on exige aux bords de $f_*[\Sigma_{g,h}]$ de se terminer sur \mathcal{L} . Par conséquent,

$$f_*[\Sigma_{g,h}] = \beta \in H_2(X, \mathcal{L}). \quad (5.117)$$

Contribution des bords : Pour indiquer le secteur topologique du bord, nous assumons que

$$b_1(\mathcal{L}) = 1,$$

de sorte que $H_1(\mathcal{L})$ soit généré par un 1-cycle non trivial γ . On a alors

$$f_*[C_i] = w_i \gamma, \quad w_i \in \mathbf{Z}, \quad i = 1, \dots, h, \quad (5.118)$$

autrement dit, w_i est le nombre d'enroulement associé à la transformation f limitée à C_i . Ces nombres entiers se rassemblent dans un h -uplet simple dénoté par

$$w = (w_1, \dots, w_h).$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

L'énergie libre de la théorie de corde topologique ouverte type-A au genre fixé et de bord w , qu'on dénote par $F_{w,g}(t)$, peut être calculée comme une somme d'instantons de la corde ouverte étiqueté par les classes de volume :

$$F_{w,g}(t) = \sum_{\beta} F_{w,g,\beta} Q^{\beta}. \quad (5.119)$$

Dans cette équation, la somme est sur les classes d'homologie relative $\beta \in H_2(X, \mathcal{L})$, et la notation est comme dans (5.53). Les quantités

$$F_{w,g,\beta}$$

sont les *invariants ouverts de Gromov-Witten*. Elles 'comptent', dans un sens, le nombre des surfaces de Riemann de genre g holomorphiquement incorporées dans X avec des conditions de bord Lagrangienne indiqué par \mathcal{L} , et dans la classe est représentée par β et w . Elles sont en général des nombres rationnels. Contrairement aux invariants de Gromov-Witten conventionnels, une théorie rigoureuse d'invariants ouverts de Gromov-Witten n'est pas encore disponible. Cependant, les techniques de localisation permettent de les calculer dans quelques cas spéciaux [129, 130, 131, 132].

Afin de considérer tous les secteurs topologiques, on doit introduire la constante de couplage de la corde g_s , qui tient compte du genre, d'une matrice $M \times M$ hermitienne V , ainsi que des différents nombres d'enroulement w . L'énergie libre totale est définie par

$$F(V) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{w_1, \dots, w_h} \frac{i^h}{h!} g_s^{2g-2+h} F_{w,g}(t) \text{Tr} V^{w_1} \dots \text{Tr} V^{w_h}. \quad (5.120)$$

Le facteur i^h est introduit pour la convenance, alors que $h!$ est un facteur de symétrie qui tient compte du fait que les trous sont indiscernables. Afin de distinguer tous les secteurs topologiques possibles, on doit prendre V de rang infini, et formellement on peut considérer les différentes traces dans (5.120) comme des fonctions symétriques avec un nombre infini de variables, comme on l'a fait dans le chapitre 3.

On a vu précédemment que pour les cordes topologiques fermées, la relation avec les supercordes type IIA permet d'exprimer les énergies libres en termes d'ensemble d'entiers invariants liés à un compte approprié des états BPS. Dans le cas ouvert, une relation de ce type reste valable, et on peut re-exprimer l'amplitude (5.120) en termes d'un autre ensemble d'entiers invariants. L'arrangement approprié dans la théorie de corde type IIA est le suivant. Considérons M $D4$ branes enroulés autour d'une sous-variété Lagrangienne spécial \mathcal{L} . Les deux directions non compactes mènent à une théorie de jauge supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ dans $\mathbf{R}^{1,1}$. Cette théorie a $b_1(\mathcal{L})$ multiplets chiraux Σ_{α} à deux dimensions,

$$\Sigma_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, b_1(\mathcal{L}),$$

correspondant aux déformations géométriques de \mathcal{L} à l'intérieur du Calabi-Yau X , et dans la représentation adjointe $U(M)$. Pour simplifier on suppose que $b_1(\mathcal{L}) = 1$, donc on a juste un multiplet chiral Φ . Le champ

$$V = e^{i\Phi}$$

est alors un champ matriciel $U(M)$. Les couplages $F_{w,g}(t)$ dans (5.120) calculent les termes suivants dans la théorie de jauge supersymétrique sur $\mathbf{R}^{1,1}$ [83] :

$$\int d^2x d^2\theta F_{w,g}(t) Tr V^{w_1} \dots Tr V^{w_h} (W^2)^g (W \cdot v)^{h-1}, \quad (5.121)$$

où W est le multiplet du graviphoton, $v^{\mu\nu}$ est un vecteur orthogonal à $\mathbf{R}^{1,1}$ dans $\mathbf{R}^{3,1}$ et $W \cdot v = W_{\mu\nu} v^{\mu\nu}$. Une fois qu'on a une interprétation de l'espace cible pour les amplitudes de la corde ouverte, on peut suivre les mêmes arguments qu'on a utilisé pour des amplitudes de la corde fermée dans la sous-section précédente. D'abord on donne une valeur moyenne dans le vide constante au champ de force du graviphoton, $T = g_s$. Les couplages (5.121) ajoutent une correction de la forme

$$F(V) \int d^2x R. \quad (5.122)$$

Ceci peut être encore calculé en termes des états BPS, à deux dimensions. Le calcul bidimensionnel de Schwinger est semblable à (5.95), mais il a une puissance simple de sin au dénominateur. Les états BPS qui contribuent à ces couplages sont obtenus à partir des $D2$ branes enroulés autour d'une surface de Riemann de genre g et l trous, $\Sigma_{g,l}$, qui se terminent sur les $D4$ branes. Rappelons que les $D2$ branes sont liés aux $D0$ branes. Ces états BPS sont caractérisés topologiquement par la classe de cohomologie relative de la surface de Riemann incorporée, $\beta \in H_2(X, \mathcal{L})$ et ils ont deux nombres quantiques : le spin $U(1)$ à deux dimensions, noté S , et R qui représente la R -charge $U(1)$ qui apparaît dans l'algèbre de supersymétrie. De ces deux charges, on peut former les nombres quantiques

$$S_{L,R} = S \pm R,$$

qui sont les analogues de $j_{L,R}^3$. Finalement, le fait que nous avons M $D4$ branes signifie que les états BPS formeront les représentations de $U(M)$. La masse d'un état BPS $m_{R,\beta}$ avec ces nombres quantiques, attachés aux d $D0$ branes, est donnée par

$$e^{-m_{R,\beta}} = e^{-(\beta \cdot t + 2\pi i d)} Tr_R V, \quad (5.123)$$

où $V = e^{i\phi}$ et ϕ est la valeur moyenne dans le vide du plus bas composant de Φ . La contribution d'un multiplet des particules BPS à deux dimensions avec des charges R, β s'exprime par

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \frac{e^{-\tau m_{R,\beta}}}{2 \sin \frac{\tau g_s}{2}} Tr_{\mathcal{H}} (-1)^F e^{i\tau s g_s}, \quad (5.124)$$

où $F = S_L + S_R$, $s = 2S_L$ et \mathcal{H} est l'espace de Hilbert des états correspondant. Après la sommation sur β, R et d , la contribution totale à l'énergie libre ouverte peut être alors écrite comme

$$\sum_{\beta, R} \sum_{d=1}^\infty \frac{e^{-d\beta \cdot t}}{2d \sin \frac{d g_s}{2}} Tr_{\mathcal{H}} (-1)^F q^{ds} Tr_R V^d, \quad (5.125)$$

où on a employé (5.101) pour calculer l'intégral sur τ et $q = e^{i g_s}$.

Par ailleurs, pour calculer la trace sur l'espace de Hilbert des états dans (5.125), on utilise la description géométrique de cet espace qui résulte de l'espace des modules des $D2$ branes incorporés qui se terminent sur les $D4$ branes. Cet espace des modules est le produit de trois facteurs : les modules des champs de jauge abéliens sur le volume d'univers de la $D2$ brane, les modules des

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

déformations géométriques des $D2$ dans l'espace ambiant, et finalement les facteurs de Chan-Paton associés aux bords des $D2$, qui mènent aux charges R . Si les $D2$ sont des surfaces de genre g avec l trous dans la classe de cohomologie relative marquée par β , l'espace des modules des champs de jauge abéliens provoque le Jacobien $J_{g,l} = \mathbf{T}^{2g+l-1}$. Ici, on suppose que le genre et le nombre des trous de la surface sont constants le long des modules. Bien que cette supposition ne soit pas vraie géométriquement, elle mène à l'expression correcte des amplitudes, comme c'était le cas pour les invariants de Gopakumar-Vafa dans le cas fermé. On dénote l'espace des modules des déformations géométriques par $\mathcal{M}_{g,l,\beta}$. Finalement, pour les degrés de liberté de Chan-Paton on obtient un facteur de F (la représentation fondamentale de $SU(M)$) de chaque trou. L'espace de Hilbert est obtenu en calculant la cohomologie de ces modules, qui implique

$$F^{\otimes l} \otimes H^*(J_{g,l}) \otimes H^*(\mathcal{M}_{g,l,\beta}). \quad (5.126)$$

Comme dans le cas de la corde fermée, le nombre quantique S_L est identifié avec le degré des formes dans $H^*(J_{g,l})$, et S_R est identifié avec le degré des formes dans $H^*(\mathcal{M}_{g,l,Q})$. Un point important est que cet espace de Hilbert est associé à l'espace des modules des l trous distingués, qui ne sont pas physiques, et on doit 'mod out' par l'action du groupe de permutation S_l . On peut 'factor out' la cohomologie du Jacobien \mathbf{T}^{2g} du 'volume' de la surface de Riemann, $H^*(\mathbf{T}^{2g})$, puisque la permutation des trous n'y agit pas. L'autre facteur de l'espace de Hilbert est l'espace projectif

$$\text{Sym} \left(F^{\otimes l} \otimes H^* \left((\mathbf{S}^1)^{l-1} \right) \otimes H^*(\mathcal{M}_{g,l,Q}) \right). \quad (5.127)$$

Cette projection peut être exprimée en termes des projections des facteurs sur différentes représentations de S_l . En utilisant les résultats de la théorie de représentation du groupe symétrique [69] on constate que (5.127) peut être écrite comme une somme directe :

$$\bigoplus_{RR'R''} C_{RR'R''} \mathbf{S}_R \left(F^{\otimes l} \right) \otimes \mathbf{S}_{R'} \left(H^* \left((\mathbf{S}^1)^{l-1} \right) \right) \otimes \mathbf{S}_{R''} \left(H^*(\mathcal{M}_{g,l,Q}) \right). \quad (5.128)$$

Dans cette équation, \mathbf{S}_R est le functor de Schur qui projette sur le sous-espace correspondant, et $C_{RR'R''}$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan du groupe symétrique, qui peuvent être écrits en termes des caractères comme suit

$$C_{RR'R''} = \sum_{\vec{k}} \frac{|C(\vec{k})|}{l!} \chi_R \left(C(\vec{k}) \right) \chi_{R'} \left(C(\vec{k}) \right) \chi_{R''} \left(C(\vec{k}) \right). \quad (5.129)$$

L'espace $\mathbf{S}_R(F^{\otimes l})$ est l'espace vectoriel sous-jacent de la représentation irréductible R de $U(M)$. On trouve alors que la trace sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{R,g,\beta}$ associé à la représentation R venant de (5.126) est donnée par :

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_{R,g,\beta}} (-1)^F q^s = \left(2 \sin \frac{g_s}{2} \right)^{2g} \sum_{R',R''} C_{RR'R''} N_{R',g,\beta} \text{Tr}_{\mathbf{S}_R(H_l)} (-1)^F q^s, \quad (5.130)$$

où

$$H_l = H^* \left((\mathbf{S}^1)^{l-1} \right)$$

dénote la cohomologie du produit des cercles, et

$$N_{R,g,\beta} = (-1)^n \chi(\mathbf{S}_{R''}(H^*(\mathcal{M}_{g,l,\beta}))) \quad (5.131)$$

est l'analogie de (5.107) pour le cas ouvert. Dans cette équation,

$$n = \dim(\mathbf{S}_{R''}(H^*(\mathcal{M}_{g,l,\beta}))).$$

Calcul de $S_R(q)$: Pour clôturer cette analyse, il reste à calculer la dernière trace dans (5.130), qui est dénoté par

$$S_R(q) = Tr_{\mathbf{S}_R(H_l)}(-1)^F q^s. \quad (5.132)$$

Pour cela, on doit spécifier l'action du groupe de permutation S_l sur les éléments de cohomologie. Bien que S_l agisse d'une manière naturelle sur une surface de Riemann avec l bords, il y a seulement $l - 1$ (1-formes) indépendantes associées au bord. Ceci est dû au fait que les 1-formes

$$d\theta_i, \quad i = 1, \dots, l,$$

qui sont les duaux de Poincaré des trous dans la surface de Riemann, satisfont

$$\sum_i d\theta_i = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

L'espace de Hilbert $\mathbf{S}_R(H_l)$ est construit comme suit. On considère l'espace de Hilbert \mathcal{F}_l généré par l champs fermioniques

$$\psi_i, \quad i = 1, \dots, l$$

agissant sur le vide $|0\rangle$. Puis on le décompose par rapport aux différentes représentations R en utilisant les symétries des tableaux de Young correspondants. Cette procédure doit tenir compte de la nature Grassmanienne des fermions. Ensuite, on impose la contrainte linéaire

$$\sum_i d\psi_i = 0.$$

Prenons à titre d'exemple le cas simple $l = 2$. L'espace \mathcal{F}_2 est engendré par les quatre états

$$|0\rangle, \quad \psi_{1,2}|0\rangle \quad \psi_1\psi_2|0\rangle.$$

Le groupe de permutation S_2 approprié correspond à la permutation $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$. En projetant sur les sous-espaces symétriques et anti-symétriques, on trouve :

$$\square : |0\rangle, \quad (\psi_1 + \psi_2)|0\rangle, \quad \boxminus : (\psi_1 - \psi_2)|0\rangle, \quad \psi_1\psi_2|0\rangle. \quad (5.133)$$

En utilisant $\psi_1 + \psi_2 = 0$, le spectre se réduira à :

$$\square : |0\rangle, \quad \boxminus : \psi_1|0\rangle. \quad (5.134)$$

Pour assigner des spins à ces états, on pose $s = 1$ pour les ψ_i . Cependant, ceci ne fixe pas le spin de tous les états puisqu'il reste à fixer le spin pour l'état fondamental. Il y a, en fait, un choix naturel qui mène à un spin moyen zéro dans un multiplet donné. Dans le cas actuel les deux états diffèrent dans le spin par 1, et ainsi le choix symétrique de spin est

$$-1/2, \quad +1/2.$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Maintenant on peut trouver le spin s des diverses représentations R qui surgissent de cette façon, quand on a plus de trous. La représentation triviale de S_l , correspondant à un tableau de Young avec l boîtes et seulement une ligne,

$$\underbrace{\square \square \cdots \square}_l$$

est donnée par le vide $|0\rangle$, et on lui assigne le spin

$$s = -(l - 1) / 2.$$

En agissant avec un fermion ψ_i sur le vide, on obtient l états, formant une représentation réductible (l) de S_l qui se décompose en représentations réductibles comme suit :

$$(l) = (l - 1) \oplus (1). \quad (5.135)$$

Le premier ‘terme de la somme’ correspond à la représentation standard V de S_l , avec un tableau de Young de la forme

$$\square \square \square \square \square \square \square$$

avec $(l - 1)$ boîtes dans la première ligne. Le deuxième ‘terme de la somme’ correspond à la représentation triviale produite par $(\sum_i \psi_i) |0\rangle$, qu’on met à zéro.

Pour générer le reste du spectre, on doit prendre les produits tenseurs anti-symétrique $\wedge^d V$ puisque V est fermionique. Ce sont des représentations irréductibles de S_l appelées les représentations de ‘crochet’, puisque leur tableau de Young est de la forme

$$\begin{array}{c} \square \square \square \square \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad (5.136)$$

avec $l - d$ boîtes dans la première ligne. On a alors obtenu le contenu de spin/représentation du spectre : les espaces de Hilbert $\mathbf{S}_R(H_l)$ sont non vides seulement pour des représentations de ‘crochet’ de la forme (5.136). Dans ce cas, ils contiennent un état de statistique $(-1)^d$ et de spin total

$$s = -(l - 1) / 2 + d,$$

qui est égale au spin du vide plus d unités des d champs fermioniques qui apparaissent dans $\wedge^d V$.

Avec ces résultats, nous pouvons calculer la trace de (5.132) qui est

$$S_R(q) = \begin{cases} (-1)^d q^{-\frac{l-1}{2}+d}, & \text{si } R \text{ est une représentation de 'crochet'} \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

Dans cette dérivation, on a supposé que les nombres d’enroulement w_i sont tous positifs, de sorte que le produit des traces de V dans (5.120) puisse s’exprimer en termes de $Tr_R \vec{k} V$ avec un nombre restreint de boîtes. Dans ce cas, on peut étiqueter w en termes d’un vecteur \vec{k} d’entrées non-négatives. Etant donné un h -uple

$$w = (w_1, \cdots, w_h),$$

on définit un vecteur \vec{k} dont la i -ème entrée est le nombre de w_j qui prend la valeur i . Par exemple, si

$$w = (1, 1, 2),$$

le \vec{k} correspondant est

$$\vec{k} = (2, 1, 0, \dots).$$

En termes de \vec{k} , le nombre de trous h et le nombre d'enroulement total l sont donnés par

$$h = |\vec{k}|, \quad l = \sum_i w_i = \sum_j j k_j. \quad (5.137)$$

Notons qu'un \vec{k} donné correspond à plusieurs w qui diffèrent par une permutation de leurs entrées. En fait il y a

$$\frac{h!}{\prod_j k_j!}$$

h -uples w qui donnent le même vecteur \vec{k} et la même amplitude. On peut alors écrire l'énergie libre totale pour des nombres d'enroulement positifs comme

$$F(V) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{\vec{k}} \frac{i^{|\vec{k}|}}{\prod_j k_j!} g_s^{2g-2+h} F_{\vec{k},g}(t) \Upsilon_{\vec{k}}(V), \quad (5.138)$$

où $\Upsilon_{\vec{k}}(V)$ est présenté dans (4.105). Maintenant on définit les entiers suivants :

$$n_{\vec{k},g,\beta} = \sum_R \chi_R \left(C \left(\vec{k} \right) \right) N_{R,g,\beta}. \quad (5.139)$$

On peut montrer que

$$\sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2+h} F_{w,g}(t) = \frac{(-1)^{h-1}}{\prod_i w_i} \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{\beta} \sum_{d|w} n_{w/d,g,\beta} d^{h-1} \left(2 \sin \frac{d g_s}{2} \right)^{2g-2} \prod_{i=1}^h \left(2 \sin \frac{w_i g_s}{2} \right) e^{-d\beta \cdot t}. \quad (5.140)$$

Notons si un vecteur \vec{k} avec tous les nombres entiers positifs qui satisfont la condition suivante : $d|w_i$ pour chaque i avec $k_i \neq 0$, alors on dit que d divise \vec{k} , et nous dénoterons ceci comme $d|\vec{k}$ ou $d|w$. Quand c'est le cas, on définit h -uple w/d dont le i -ème composant est w_i/d . L'expression (5.140) s'étend pour donner des formules pour des genres différents. Par exemple, pour $g = 0$ on trouve

$$F_{w,g=0,\beta} = (-1)^{h-1} \sum_{d|w} d^{h-3} n_{w/d,0,\beta/d}, \quad (5.141)$$

où l'entier d doit diviser le vecteur w et $n_{w/d,0,\beta/d}$ est égal a zéro si β/d n'est pas une classe d'homologie relative. Les formules pour des genres plus hauts peuvent être établies de (5.140) [133]. Notons que l'intégralité de $N_{R,g,\beta}$ implique l'intégralité de $n_{\vec{k},g,\beta}$, mais ceci n'est pas vrai dans l'autre sens. Dans ce sens, les entiers invariants $N_{R,g,\beta}$ sont les plus fondamentaux.

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Dans la dérivation de (5.140) on a supposé que tous les nombres d'enroulement sont positifs. Or, lorsque les nombres d'enroulement sont positifs et négatifs alors, on considère que V et V^{-1} sont des matrices indépendantes et on introduit deux ensembles de vecteurs $\vec{k}^{(1)}$, $\vec{k}^{(2)}$ associés aux nombres d'enroulement positif et négatif, respectivement. Ceci mène aux entiers invariants $N_{R_1, R_2, g, \beta}$ indexées par deux représentations, et les résultats précédents peuvent être généralisés. Il est facile de vérifier que la formule (5.140) reste valable pour des nombres d'enroulement arbitraires.

On a également supposé que les conditions de bord sont indiquées par une seule sous-variété Lagrangienne ayant un seul 1-cycle non trivial. Quand il y a plus d'1-cycle dans la géométrie, L , fournissant des conditions de bord pour les cordes ouvertes, le formalisme précédent se généralise d'une manière évidente : on doit spécifier L ensembles de nombres d'enroulement $w^{(\alpha)}$, et la fonction génératrice (5.138) dépend de L matrices différentes V_α , $\alpha = 1, \dots, L$. La fonction de partition totale a la structure

$$Z(V_i) = \sum_{R_1, \dots, R_{2L}} Z_{R_1, \dots, R_{2L}}(g_s, t) \prod_{\alpha=1}^{2L} \text{Tr}_{R_\alpha} V_\alpha, \quad (5.142)$$

où $R_{2\alpha-1}$, $R_{2\alpha}$ correspondent aux nombres d'enroulement positifs et négatifs, respectivement, pour le α -ème cycle

Modèle Type-B

Le modèle topologique B peut être également formulé pour les cordes ouvertes, C'est-à-dire quand la surface-d'univers est une surface de Riemann ouverte avec des bords $\Sigma_{g,h}$ [21, 128]. Il s'avère que les conditions de bord appropriées au modèle type-B sont de Dirichlet le long des cycles holomorphe de X , dénotés par S , et de Neumann dans les directions restantes. De plus, on peut ajouter des facteurs de Chan-Paton au modèle, en considérant une fibre holomorphe $U(N)$ sur le cycle holomorphe S . La théorie résultante s'interprète alors comme un modèle topologique B en présence de N D -branes topologiques enroulant S . Dans le cas de N branes remplissant l'espace-temps, c'est-à-dire $S = X$, les conditions de bord pour les champs sont $\theta = 0$ le long de $\partial\Sigma_{g,h}$ et que le 'pullback' à $\partial\Sigma_{g,h}$ de $*\rho$ s'annule, où $*$ est l'opérateur de Hodge [21].

Le modèle topologique B ouvert peut être également couplé à la gravité de la même manière employée dans le cas fermé, et on obtient de cette façon la corde topologique ouverte type-B qui se propage le long de la variété de Calabi-Yau X .

5.3 Géométrie des CY3 toriques

Dans tout ce qui précède, on a considéré la théorie de la corde topologique sur les variétés de CY3 quelconques. Dans cette section, on fixe notre intérêt sur une classe particulière de CY3 non-compactes à savoir les *CY3 toriques* non-compactes. Ce sont des variétés qui ont la structure d'une fibration,

$$CY3 \sim F \times B.$$

dont les fibres F sont essentiellement des tores à l'instar de $CY3 \sim T^3 \times B_3$, $B_3 \subset \mathbb{R}^3$. Les variétés *CY3* toriques ayant la fibration,

$$B = \mathbb{R}^3, \quad F = \mathbf{T}^2 \times \mathbb{R},$$

constituent un exemple qui nous intéresse. La géométrie de ces variétés complexes tri-dimensionnelles est donnée dans un graphe bidimensionnel qui code les informations sur le lieu de dégénérescence de la fibration. Ces graphes sont appelés *diagrammes toriques* des variétés de Calabi-Yau correspondantes [111, 9, 134, 135, 136]. Avant de présenter cette approche torique, il sera plus fondamental de donner tout d'abord une introduction générale à la construction des géométries de Calabi-Yau non-compactes.

5.3.1 CY3 non-compactes

Une des perspicacités principales dans l'étude de la théorie de corde topologique sur des CY3 est que les modèles les plus simples à étudier sont associés aux géométries des CY3 non-compactes basées sur les variétés de dimensions inférieures. Construire ces géométries \mathcal{V}_3 est une tâche possible en procédant comme suit :

(1) On commence par les variétés complexes V_n avec

$$\dim_{\mathbb{C}} V_n = n \quad \text{et} \quad n = 1, 2,$$

qui auront en général une première classe de Chern différente de zéro

$$c_1(V_n) \neq 0.$$

(2) On considère alors des fibrés vectoriels F sur V_n ,

$$\mathcal{V}_3 = F_{3-n} \rightarrow V_n,$$

avec le rang et la courbure appropriés qui donne un espace tridimensionnel total \mathcal{V}_3 dont la première classe de Chern est nulle.

$$c_1(\mathcal{V}_3) = 0.$$

Cette méthode fournit les CY3 dont la géométrie non triviale est *codée* dans une variété de dimension inférieure V_n . Ce fait les rend plus faciles à étudier.

Courbes complexes locale : De façon plus explicite, pour le cas des variétés de CY3 non-compactes dont la partie compacte est une variété unidimensionnelle ($\dim_{\mathbb{C}} V_1 = 1$), ces variétés sont constituées d'une surface de Riemann Σ_g avec un fibré \mathcal{N}_g approprié,

$$\mathcal{N}_g \rightarrow \Sigma_g, \quad g = 0, 1, \dots$$

Géométriquement elles sont considérées comme la géométrie locale d'une surface de Riemann Σ_g incorporée à l'intérieur d'un espace de Calabi-Yau plus général. En effet, pour un CY3 X , le fibré *holomorphe* tangent de X rétrécit à Σ_g est donné par

$$TX|_{\Sigma_g} = T_{\Sigma_g} \oplus \mathcal{N}_{\Sigma_g}, \quad \dim \mathcal{N}_{\Sigma_g} = \dim X - \dim T_{\Sigma_g}, \quad (5.143)$$

où \mathcal{N}_{Σ_g} est un fibré vectoriel complexe holomorphe sur Σ_g de rang deux, appelé le fibré normal de Σ_g . La condition de Calabi-Yau $c_1(X) = 0$ permet d'écrire

$$c_1(\mathcal{N}_{\Sigma_g}) = 2g - 2. \quad (5.144)$$

Près de Σ_g , la variété X ressemble alors à l'espace total qui s'exprime par

$$\mathcal{N}_g \rightarrow \Sigma_g, \quad \dim \mathcal{N}_{\Sigma_g} = 2, \quad (5.145)$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

où \mathcal{N}_g est le fibré de rang deux sur Σ_g satisfaisant (5.144). L'espace non-compacte (5.145) est un exemple d'un CY3 *locale*.

Théorème de Grothendieck

Lorsque $g = 0$ et $\Sigma_g = \mathbb{P}^1$, la structure explicite du fibré \mathcal{N} est précisée comme suit : Le théorème de Grothendieck indique que n'importe quel fibré holomorphe sur \mathbb{P}^1 se décompose en somme directe de fibrés en lignes [124]. Ces fibrés en lignes sur \mathbb{P}^1 sont tous de la forme

$$\mathcal{O}(n), \quad n \in \mathbf{Z},$$

et se décrivent en termes de deux diagrammes sur \mathbb{P}^1 . Notons que $c_1(\mathcal{O}(n)) = n$. Le diagramme du CY3 local au pôle nord de $\mathbb{P}^1 = \mathcal{U}_{nord} \cup \mathcal{U}_{sud}$ peut être vu comme $F \rightarrow \mathcal{U}_{nord}$ où \mathcal{U}_{nord} est un ouvert de \mathbb{P}^1 , $F = \mathcal{N}_0$ (5.145) et ayant pour coordonnées (z, Φ) ,

$$z \in \mathcal{U}_{nord}, \quad \Phi \in F.$$

De façon similaire, le diagramme du CY3 local au pôle sud de \mathbb{P}^1 a pour coordonnées (z', Φ') dont le changement de coordonnées est donné par,

$$z' = 1/z, \quad \Phi' = z^{-n}\Phi. \quad (5.146)$$

On constate alors que les variétés de Calabi-Yau locales qui sont construites à partir d'une 2-sphère et des fibrés sur cette dernière sont tous de la forme

$$\mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(a-2) \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (5.147)$$

puisque la somme des degrés des fibrés doit être -2 à cause de (5.144).

Un cas important se produit quand $a = 1$. La variété non-compacte résultante,

$$\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (5.148)$$

est appelée le *conifold résolu*.

Surfaces complexes locales : On peut également considérer les CY3 non-compactes basés sur des surfaces complexes compactes S . De même qu'auparavant, le CY3 locale X construit à partir d'une surface complexe S peut être divisé comme

$$TX|_S = T_S \oplus \mathcal{N}_S, \quad (5.149)$$

où T_S est le fibré tangent de rang 2 et \mathcal{N}_S le fibré normal est de rang 1. La condition de Calabi-Yau mène à

$$c_1(\mathcal{N}_S) = c_1(K_S), \quad (5.150)$$

où K_S est le fibré en ligne canonique sur S , avec $c_1(T_S) = -c_1(K_S)$. Par conséquent, on a $\mathcal{N}_S = K_S$. La variété de Calabi-Yau X 'près de S ' ressemble à l'espace total du fibré

$$K_S \rightarrow S. \quad (5.151)$$

Cette construction donne une famille de variétés de CY3 non-compactes qui sont connus également sous le nom de variétés de CY3 locales.

Exemples : Un exemple bien connu correspond au cas où $S = \mathbb{P}^2$, l'espace complexe projectif bidimensionnel, qui mène à la variété de Calabi-Yau

$$\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad (5.152)$$

connue aussi sous le nom de \mathbb{P}^2 *local*. Un autre exemple important est $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, qui mène à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *local* $\mathcal{O}(-2, -2) \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

5.3.2 Construction des variétés de Calabi-Yau torique

La plupart des exemples de CY3 non-compactes considérées ci-dessus sont *toriques* et peuvent être construits d'une manière systématique via la procédure de découpage et collage. Dans cette sous section, nous développons cette technique à travers des exemples ; plus de détails peuvent être trouvés dans [136].

Exemple 1 : Tri-Vertex \mathbf{C}^3

Le tri-Vertex \mathbf{C}^3 est un CY3 non-compacte ayant une fibration $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ sur \mathbb{R}^3 . Les données toriques de ce vertex sont codées dans un graphe planaire trivial. Soient : (1) les coordonnées complexes locales $\{z_i, i = 1, 2, 3\}$ sur \mathbf{C}^3 et (2) les trois fonctions appelées aussi hamiltoniens,

$$\begin{aligned} r_\alpha(z) &= |z_1|^2 - |z_3|^2, \\ r_\beta(z) &= |z_2|^2 - |z_3|^2, \\ r_\gamma(z) &= \text{Im}(z_1 z_2 z_3). \end{aligned} \quad (5.153)$$

Ces hamiltoniens génèrent trois 'flows' sur \mathbf{C}^3 via la forme symplectique standard

$$\omega = i \sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

sur \mathbf{C}^3 et les crochets de Poisson,

$$\partial_\epsilon z_i = \{\epsilon \cdot r, z_i\}_\omega. \quad (5.154)$$

Ceci donne la structure de fibration qu'on cherche : (a) La base de la fibration, \mathbb{R}^3 , est paramétrée par les Hamiltoniens (5.153)

$$r_\alpha(z), \quad r_\beta(z), \quad r_\gamma(z),$$

(b) La fibre $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ est paramétrée par les 'flows' associés aux Hamiltoniens. En particulier, la fibre \mathbf{T}^2 est générée par les actions du cercle

$$e^{\alpha r_\alpha + \beta r_\beta} : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow \left(e^{i\alpha} z_1, e^{i\beta} z_2, e^{-i(\alpha+\beta)} z_3 \right), \quad (5.155)$$

alors que r_γ génère la ligne réelle \mathbb{R} .

On appelle le cycle généré par r_α le cycle $(0, 1)$ et le cycle généré par r_β le cycle $(1, 0)$, soit :

$$r_\alpha \leftrightarrow (0, 1), \quad r_\beta \leftrightarrow (1, 0)$$

Notons que le cycle $(0, 1)$ dégénère sur le sous-espace de \mathbf{C}^3 décrit par $z_1 = 0 = z_3$ puisque,

$$e^{\alpha r_\alpha} : (0, z_2, 0) \rightarrow (0, z_2, 0),$$

qui est le sous-espace de la base \mathbb{R}^3 donné par

$$r_\alpha = r_\gamma = 0, \quad r_\beta \geq 0.$$

De même, sur $z_2 = 0 = z_3$, nous avons $e^{\beta r_\beta} : (z_1, 0, 0) \rightarrow (z_1, 0, 0)$; donc le cycle $(1, 0)$ dégénère sur le sous-espace

$$r_\beta = r_\gamma = 0, \quad r_\alpha \geq 0.$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Finalement, le 1-cycle paramétré par $\alpha + \beta$,

$$e^{\alpha r_\alpha + \beta r_\beta} : (0, 0, z_3) \rightarrow (0, 0, e^{-i(\alpha + \beta)} z_3);$$

dégénère sur $z_1 = 0 = z_2$, $\alpha + \beta = 0$ où

$$r_\alpha - r_\beta = 0 = r_\gamma, \quad r_\alpha \leq 0.$$

On représente la géométrie de \mathbf{C}^3 par un graphe qui code les lieux de dégénérescence dans la base \mathbb{R}^3 . En fait, il est utile d'avoir un graphe planaire en prenant $r_\gamma = 0$ et dessinant les lignes dans le plan $r_\alpha - r_\beta$. Le lieu de dégénérescence sera alors des lignes droites décrites par l'équation

$$pr_\alpha + qr_\beta = cte.$$

Sur cette ligne le cycle $(-q, p)$ du \mathbf{T}^2 dégénère. Donc en reliant les cycles dégénérés avec les lignes dans le graphe (jusqu'à $(q, p) \rightarrow (-q, -p)$), on obtient le graphe 17, dessiné dans le plan $r_\gamma = 0$.

Symétrie du graphe de \mathbf{C}^3 : Il y a une symétrie dans la géométrie \mathbf{C}^3 qui permet de trouver d'autres représentations par différents graphes toriques. Ces graphes sont caractérisés par trois vecteurs v_i qui sont obtenus de ceux de la figure 5.1 par une transformation $SL(2, \mathbf{Z})$. Les vecteurs doivent satisfaire

$$\sum_i v_i = 0. \tag{5.156}$$

La symétrie $SL(2, \mathbf{Z})$ provient de la symétrie $SL(2, \mathbf{Z})$ de \mathbf{T}^2 rencontrée au chapitre 3. Dans

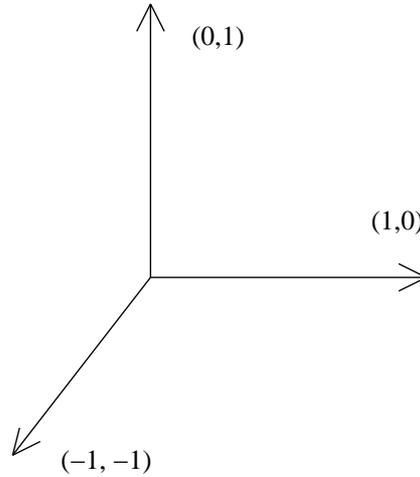


FIG. 5.1 – Ce graphe représente le lieu de dégénérescence de la fibration $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ de \mathbf{C}^3 dans la base \mathbb{R}^3 paramétrisée par $(r_\alpha, r_\beta, r_\gamma)$

cette discussion, les générateurs $H_1(\mathbf{T}^2)$ ont été choisis pour être des 1-cycles associés à r_α et r_β . Il existe cependant d'autres choix qui diffèrent par une transformation $SL(2, \mathbf{Z})$ sur \mathbf{T}^2 . Par exemple, on peut choisir r_α pour générer un (p, q) 1-cycle et r_β un (t, s) 1-cycle, à condition que

$$ps - qt = 1.$$

Ces différents choix donnent différents graphes triviaux donnés par les solutions de cette relation. Comme on va le voir, la construction des géométries toriques générales exige des graphes représentant \mathbf{C}^3 plus généraux.

Cas général

Les CY3 toriques non-compactes que nous utilisons en pratique sont décrites comme des quotients symplectiques. Pour cela, considérons l'espace linéaire complexe \mathbf{C}^{N+3} paramétrisé par $N + 3$ coordonnées z_1, \dots, z_{N+3} contraints par les N équations réelles,

$$\mu_A = \sum_{j=1}^{N+3} Q_A^j |z_j|^2 = t_A, \quad A = 1, \dots, N. \quad (5.157)$$

Dans ces équations, les Q_A^j sont des nombres entiers satisfaisant

$$\sum_{j=1}^{N+3} Q_A^j = 0. \quad (5.158)$$

Cette condition est équivalente à $c_1(X) = 0$, c'est-à-dire à la condition de Calabi-Yau. On considère l'action du groupe $G_N = U(1)^N$ sur les z_i de telle sorte que le A -ème $U(1)$ agit sur z_j par

$$z_j \rightarrow \exp\left(iQ_A^j \alpha_A\right) z_j.$$

L'espace (5.157) quotienté par l'action groupe de jauge G_N ,

$$X = \bigcap_{A=1}^N \mu_A^{-1}(t_A) / G_N \quad (5.159)$$

s'avère être une variété de Calabi-Yau. Les N paramètres t_A sont les modules de Kähler du Calabi-Yau. Cette description mathématique de X apparaît dans l'étude du modèle sigma linéaire bidimensionnel couplé avec la supersymétrie $\mathcal{N} = (2, 2)$ [137]. La théorie a $(N + 3)$ champs chiraux dont les plus bas composants sont les z_i qui sont chargés sous N multiplets vectoriels avec des charges Q_A^j . En supersymétrie, les équations (5.157) ne sont autres que les D-termes ; après division par le groupe de jauge $U(1)^N$ on obtient la branche de Higgs de la théorie.

La variété de Calabi-Yau X définie dans (5.159) est décrite par des géométries \mathbf{C}^3 collés ensemble dans une manière appropriée. Puisque chacune de ces \mathbf{C}^3 est représenté par le vertex trivial de la figure 5.1, la géométrie de (5.159) est codée dans un graphe trivial. Pour le voir, on doit tout d'abord décomposer les coordonnées $\{z_j\}_{j=1}^{N+3}$ dans des triplets

$$U_a = (z_{i_a}, z_{j_a}, z_{k_a}), \quad a = 1, \dots$$

qui correspond à la décomposition de X en termes de 3-vertex \mathbf{C}^3 . Ensuite, on choisit un 3-vertex et on lui associe deux hamiltoniens r_α, r_β comme déjà fait pour \mathbf{C}^3 . Ces deux coordonnées seront des coordonnées globales dans la base \mathbb{R}^3 , générant une fibre \mathbf{T}^2 globalement définie. La troisième coordonnée est

$$r_\gamma = \text{Im} \left(\prod_{j=1}^{N+3} z_j \right),$$

qui est invariante de jauge. Elle peut être identifiée avec la coordonnée utilisée dans l'exemple de \mathbf{C}^3 . L'équation (5.157) permet alors de trouver l'action de $r_{\alpha,\beta}$ sur les autres 3-vertex.

Exemples : On illustrera cette procédure par deux exemples importants : (a) le conifold résolu et (b) la géométrie \mathbb{P}^2 locale rencontrée auparavant.

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

(a) **Conifold résolu :** Le conifold résolu (5.148) a une description de la forme (5.159) avec $N = 1$. L'unique contrainte est donnée par

$$|z_1|^2 + |z_4|^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2 = t, \quad (5.160)$$

et le groupe $U(1)$ agit comme

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \quad \rightarrow \quad e^{i\alpha} z_1, e^{-i\alpha} z_2, e^{-i\alpha} z_3, e^{i\alpha} z_4. \quad (5.161)$$

Notons que, pour $z_2 = z_3 = 0$, (5.160) décrit un \mathbb{P}^1 dont l'aire est proportionnelle à t . Donc,

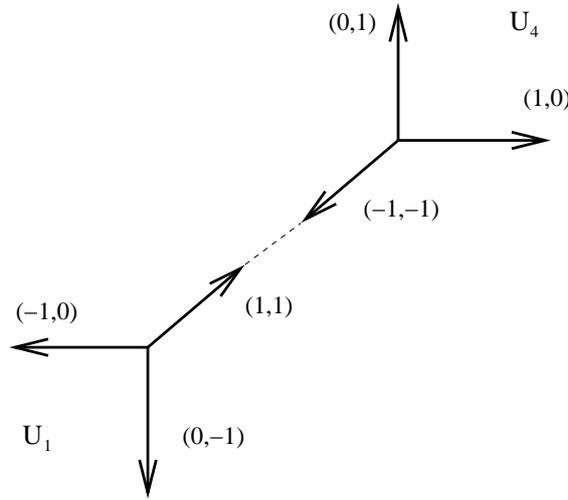


FIG. 5.2 – Graphe associé au conifold résolu $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$.

(z_1, z_4) sont prises comme des coordonnées homogènes de \mathbb{P}^1 qui est la base de la fibration, tandis que z_2, z_3 sont des coordonnées des fibres.

Maintenant on donne une description en termes des ouverts collés de 3-vertex \mathbf{C}^3 . Le premier ouvert est définie par

$$z_4 \neq 0.$$

En utilisant (5.160) on peut résoudre pour le module de z_4 en termes des autres coordonnées,

$$z_4 = z_4(z_1, z_2, z_3), \quad \text{puisque} \quad |z_4|^2 = t + |z_2|^2 + |z_3|^2 - |z_1|^2.$$

En utilisant l'action de $U(1)$, on peut jauger sa phase. Par conséquent, l'ouvert est paramétrée par $U_4 = (z_1, z_2, z_3)$. Les hamiltoniens s'écrivent pour ce cas-ci,

$$\begin{aligned} r_\alpha(z) &= |z_2|^2 - |z_1|^2, \\ r_\beta(z) &= |z_3|^2 - |z_1|^2, \end{aligned} \quad (5.162)$$

qui génèrent les actions

$$e^{\alpha r_\alpha + \beta r_\beta} : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow \left(e^{-i(\alpha+\beta)} z_1, e^{i\alpha} z_2, e^{i\beta} z_3 \right). \quad (5.163)$$

Cet ouvert est représentée par le même graphe que celui que nous avons trouvé pour \mathbf{C}^3 . L'autre ouvert sera définie par

$$z_1 \neq 0, \quad U_1 = (z_4, z_2, z_3)$$

Cependant, dans cet ouvert z_1 n'est plus une coordonnée naturelle. Alors on peut utiliser (5.160) pour récrire les hamiltoniens comme

$$\begin{aligned} r_\alpha(z) &= |z_4|^2 - |z_3|^2 - t, \\ r_\beta(z) &= |z_4|^2 - |z_2|^2 - t, \end{aligned} \quad (5.164)$$

généralant l'action

$$e^{\alpha r_\alpha + \beta r_\beta} : (z_4, z_2, z_3) \rightarrow \left(e^{i(\alpha+\beta)} z_4, e^{-i\beta} z_2, e^{-i\alpha} z_3 \right). \quad (5.165)$$

Les lieux de dégénérescence dans cet ouvert sont les suivants :

- (i) $z_4 = 0 = z_2$, correspondant à la ligne $r_\beta = -t$ où le cycle $(-1, 0)$ dégénère ;
- (ii) $z_4 = 0 = z_3$, correspondant à la ligne $r_\alpha = -t$, avec un cycle $(0, 1)$ dégénérant ;
- (iii) finalement, $z_2 = 0 = z_3$, où $r_\alpha - r_\beta = 0$, et un cycle $(1, 1)$ dégénère.

Cet ouvert est identique au premier, et ils sont jointes ensemble par le bord commun où

$$z_2 = 0 = z_3.$$

La construction totale est représentée dans la figure 5.2. Notons que le bord commun des graphes représente \mathbb{P}^1 du conifold résolu : le long de ce bord, l'un des \mathbf{S}^1 s du \mathbf{T}^2 dégénère, alors que l'autre dégénère seulement aux extrémités. Une fibration \mathbf{S}^1 d'un intervalle qui dégénère aux extrémités est simplement une 2-sphère. La longueur du bord n'est autre que t : le paramètre de Kähler associé à \mathbb{P}^1 .

(b) Géométrie \mathbb{P}^2 locale : Considérons maintenant l'exemple de la surface locale : \mathbb{P}^2 qui est l'espace total du fibré (5.152). On peut le décrire de nouveau comme dans (5.159) avec $N = 1$. Dans ce cas, on a affaire à quatre variables complexes, z_0, \dots, z_3 satisfaisant,

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - 3|z_0|^2 = t. \quad (5.166)$$

L'action de $U(1)$ sur les z est :

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) \rightarrow (e^{-3i\alpha} z_0, e^{i\alpha} z_1, e^{i\alpha} z_2, e^{i\alpha} z_3). \quad (5.167)$$

Notons que $z_{1,2,3}$ décrivent la base \mathbb{P}^2 alors que z_0 paramétrise la direction complexe de la fibre. Donnons maintenant une description en termes des ouverts collée de \mathbf{C}^3 . Il y a trois ouverts

$$U_i \quad z_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

puisque'au moins une des trois coordonnées z_i doit être différente de zéro dans X . Toutes ces trois ouverts ressemblent à \mathbf{C}^3 . Par exemple, pour $z_3 \neq 0$, on peut 'résoudre' de nouveau z_3 en termes des autres trois coordonnées qui paramétrisent alors \mathbf{C}^3 :

$$U_3 = (z_0, z_1, z_2).$$

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Les mêmes étapes restent valables pour les deux autres ouverts. Maintenant on va essayer de construire le graphe de dégénérescence correspondant. Dans l'ouvert $U_3 = (z_0, z_1, z_2)$ on prend les hamiltoniens

$$\begin{aligned} r_\alpha &= |z_1|^2 - |z_0|^2, \\ r_\beta &= |z_2|^2 - |z_0|^2. \end{aligned} \quad (5.168)$$

Le graphe des fibres dégénérées dans le plan $r_\alpha - r_\beta$ est le même que dans l'exemple \mathbf{C}^3 , figure 5.1. La troisième direction dans la base, r_γ est maintenant donnée par le produit invariant de jauge $r_\gamma = \text{Im}(z_0 z_1 z_2 z_3)$.

Les mêmes deux hamiltoniens $r_{\alpha,\beta}$ génèrent l'action dans l'ouvert $U_2 = (z_0, z_1, z_3)$, et on emploie

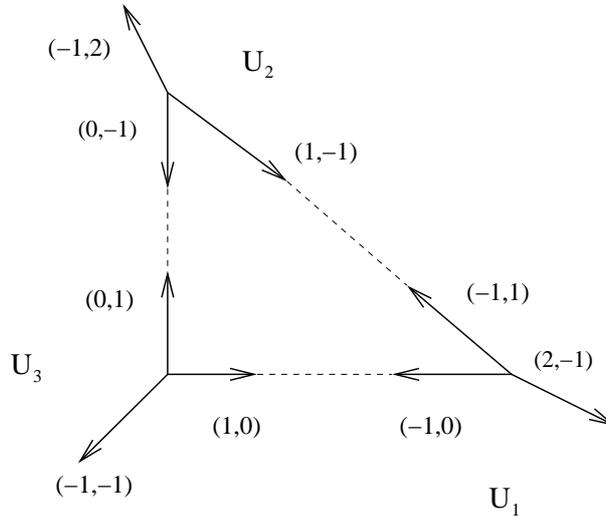


FIG. 5.3 – Graphe associé à $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$

la contrainte (5.166) pour les récrire comme suit : (i) Puisque z_0 et z_1 sont les coordonnées de cet ouvert, r_α ne change pas. D'autre part, r_β doit être réécrit puisque z_2 n'est pas une coordonnée naturelle ici. On trouve alors :

$$\begin{aligned} r_\alpha &= |z_1|^2 - |z_0|^2, \\ r_\beta &= t + 2|z_0|^2 - |z_1|^2 - |z_3|^2, \end{aligned} \quad (5.169)$$

et par conséquent

$$e^{\alpha r_\alpha + \beta r_\beta} : (z_0, z_1, z_3) \rightarrow \left(e^{i(-\alpha+2\beta)} z_0, e^{i(\alpha-\beta)} z_1, e^{-i\beta} z_3 \right).$$

Il découle que les fibres dégénèrent sur trois lignes :

- (i) $r_\alpha + r_\beta = t$, correspondant à $z_0 = 0 = z_3$, et où le cycle $(-1, 1)$ se dégénère ;
- (ii) il y a une ligne sur laquelle le cycle $(-1, 2)$ dégénère pour $z_1 = 0 = z_3$, $2r_\alpha + r_\beta = t$ et finalement,
- (iii) il y a une ligne sur laquelle $r_\alpha = 0$, et le cycle $(0, 1)$ dégénère.

L'ouvert U_1 est semblable, ce qui mène au graphe de $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ montré dans la figure 5.3.

Sous-variétés Lagrangienne.

Afin de considérer les amplitudes de la corde ouverte dans les différentes géométries de Calabi-Yau précitées, on doit construire les sous-variétés Lagrangiennes fournissant des conditions de bord, comme déjà expliqué dans la sous-section 4.2.4.

Sous-variétés Lagrangienne de \mathbf{C}^3 : Commençons par reconsidérer la géométrie \mathbf{C}^3 . Dans ce cas-ci, on peut construire les sous-variétés Lagrangiennes [138]. En termes des hamiltoniens de (5.153), on a trois types :

$$\begin{aligned} L_1 & : & r_\alpha = 0, & & r_\beta = r_1, & & r_\gamma \geq 0. \\ L_2 & : & r_\alpha = r_2, & & r_\beta = 0, & & r_\gamma \geq 0. \\ L_3 & : & r_\alpha = r_\beta = r_3, & & r_\gamma \geq 0. \end{aligned} \tag{5.170}$$

où $r_i, i = 1, 2, 3$, sont des constantes. En terme de la description du graphe qu'on a développé ci-dessus, ils correspondent a des points sur les côtés du graphe torique planaire engendré par (r_α, r_β) , et elles projettent aux lignes droites semi-infinies sur la base de fibration \mathbf{R}^3 paramétrée par $r_\gamma \geq 0$. Puisqu'ils ont situés sur les cotés, où l'un des cercles de fibration se dégénère, elles ont la topologie de

$$\mathbf{C} \times \mathbf{S}^1.$$

Il est facile de généraliser la construction à d'autres géométries toriques, comme le conifold résolu ou \mathbb{P}^2 local : Les sous-variétés Lagrangiennes avec la topologie $\mathbf{C} \times \mathbf{S}^1$ sont donnés par des points sur les cotés des graphes planaires [139, 140].

5.3.3 Transition du conifold

Dans cette section, on discutera la géométrie du conifold ainsi que sa transition qui jouera un rôle crucial dans les sections suivantes.

Considérons l'équation algébrique suivante :

$$\sum_{\mu=1}^4 \eta_\mu^2 = a. \tag{5.171}$$

Tant que $a \neq 0$, l'eq (5.171) présente une variété complexe triple appelée le *conifold déformé*. Cette variété a la topologie de $T^*\mathbf{S}^3$. Pour voir ceci, on pose

$$\eta_\mu = x_\mu + iv_\mu,$$

où x_μ, v_μ sont des coordonnées réelles, on suppose que a est réel. On trouve

$$\sum_{\mu=1}^4 (x_\mu^2 - v_\mu^2) = a, \quad \sum_{\mu=1}^4 x_\mu v_\mu = 0. \tag{5.172}$$

La première équation indique que le lieu $v_\mu = 0, \mu = 1, \dots, 4$, décrit une sphère \mathbf{S}^3 de rayon $R^2 = a$, et la deuxième équation décrit l'espace cotangent de \mathbf{S}^3 au point x_μ . Donc, l'eq(5.171) est bien l'espace cotangeant $T^*\mathbf{S}^3$.

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Le conifold déformé a également la structure d'une fibration torique, et il peut être représenté d'une manière très utile comme suit. D'abord on introduit les coordonnées complexes suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \eta_1 + i\eta_2, & v &= i(\eta_3 - i\eta_4), \\ u &= i(\eta_3 + i\eta_4), & y &= \eta_1 - i\eta_2. \end{aligned} \quad (5.173)$$

Le conifold déformé peut être maintenant écrit comme

$$xy = uv + a. \quad (5.174)$$

Dans cette paramétrisation, la géométrie a une fibration \mathbf{T}^2

$$(x, y, u, v) \rightarrow (e^{-i\alpha}x, e^{i\alpha}y, e^{-i\beta}u, e^{i\beta}v), \quad (5.175)$$

où les actions de α et β sont considérées pour générer les cycles $(0, 1)$ et $(1, 0)$ du \mathbf{T}^2 , respectivement. La fibre \mathbf{T}^2 peut se dégénérer à \mathbf{S}^1 quand l'une de ses 1-cycles s'effondre. Dans (5.175),

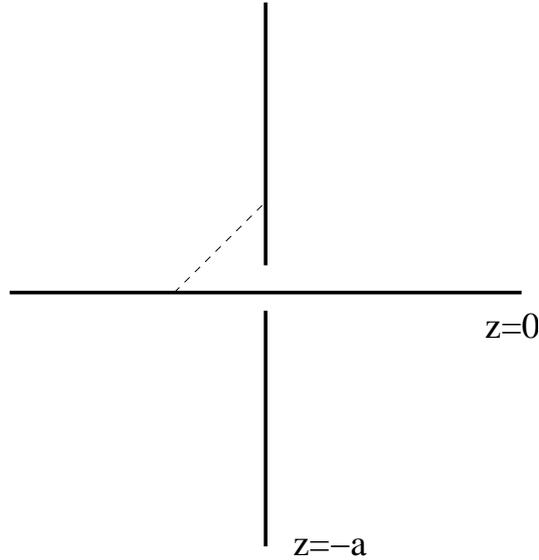


FIG. 5.4 – Cette figure représente $T^*\mathbf{S}^3$, considéré comme un fibration $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^3 . Deux des directions représentent les axes des deux cylindres et la troisième direction représente l'axe réel du plan z . La ligne brisée représente \mathbf{S}^3 qui est incorporé

par exemple, l'action de $U(1)_\alpha$ fixe $x = 0 = y$ et échoue donc à générer un cercle. Dans l'espace total, le lieu où ceci se produit, c'est-à-dire le sous-espace $x = 0 = y$ de X , est un cylindre

$$uv = -a.$$

De même, le lieu où l'autre cercle s'effondre, $u = 0 = v$, donne un autre cylindre

$$xy = a.$$

Par conséquent, on peut assimiler la géométrie entière à une fibration $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ sur \mathbb{R}^3 : En effet si on définit

$$z = uv,$$

la base \mathbb{R}^3 est donnée par $\operatorname{Re}(z)$ et les axes des deux cylindres. La fibre est donnée par les cercles des deux cylindres, et par $\operatorname{Im}(z)$. La fibration $U(1)_\alpha$ dégénère à

$$z = -a,$$

alors que la fibration $U(1)_\beta$ dégénère à

$$z = 0.$$

C'est le même genre de structure de fibration qu'on a trouvé en discutant les géométries de la forme (5.159).

Comme on a déjà fait dans les précédents exemples, il est très utile de représenter la susdite géométrie en dépeignant les lieux singuliers de l'action du tore dans la base \mathbb{R}^3 . Les lieux où les cycles du tore s'effondrent, qui sont des cylindres, se projettent aux lignes dans l'espace de base. Ceci est montré dans la figure 5.4. Notons que le \mathbf{S}^3 de la géométrie du conifold déformé est réalisé dans cette image comme une fibration \mathbf{T}^2 sur un intervalle I .

$$\mathbf{S}^3 \sim \mathbf{T}^2 \times I.$$

Cet intervalle est représenté dans la figure 5.4 par une ligne brisée dans le plan z entre $z = -a$ (où le cycle $(0, 1)$ s'effondre) et le $z = 0$ (où le cycle $(1, 0)$ s'effondre). La description géométrique de \mathbf{S}^3 obtenue de cette façon est en fait, équivalente à la description donnée au chapitre 3 en termes du dédoublement de Heegaard le long des tores solides. Pour voir ceci, on va couper la 3-sphère en deux morceaux en coupant l'intervalle I en son milieu en deux petits intervalles $I_{1,2}$. Chacun des moitiés est une fibration

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^2 \times I_1 &= \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}_c^1 \times I_1 \\ \mathbf{T}^2 \times I_2 &= \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}_c^1 \times I_2 \end{aligned}$$

où \mathbf{S}_c^1 dénote le cycle effondré. Bien sûr, la partie non triviale de la fibration vient du cycle effondré, ainsi on peut voir chacune des moitiés comme \mathbf{S}^1 fois la fibration du cycle effondré sur I_i , qui est simplement un disque. En d'autres termes, on a construit la 3-sphère en collant deux variétés de la forme

$$\mathbf{S}^1 \times D.$$

Ce sont bien sûr deux tores solides, qui sont collés après avoir échangé les deux cycles, c.-à-d. après exécution d'une transformation S . Ceci est montré dans la figure 5.5. Quand $a = 0$ dans (5.171) ou dans (5.174), la géométrie devient singulière. Ceci s'avère clair quand on considère le conifold déformé comme $T^*\mathbf{S}^3$ en $a = 0$ où la 3-sphère s'effondre. La géométrie singulière décrite par l'équation

$$xy = uv \tag{5.176}$$

s'appelle la *singularité conique* ou simplement le conifold.

En géométrie algébrique, les singularités peuvent être évitées de deux façons, en général. La première manière est de déformer la géométrie complexe ; ceci mène au conifold déformé (5.171). L'autre manière est de résoudre la singularité, par exemple en faisant un gonflement menant à

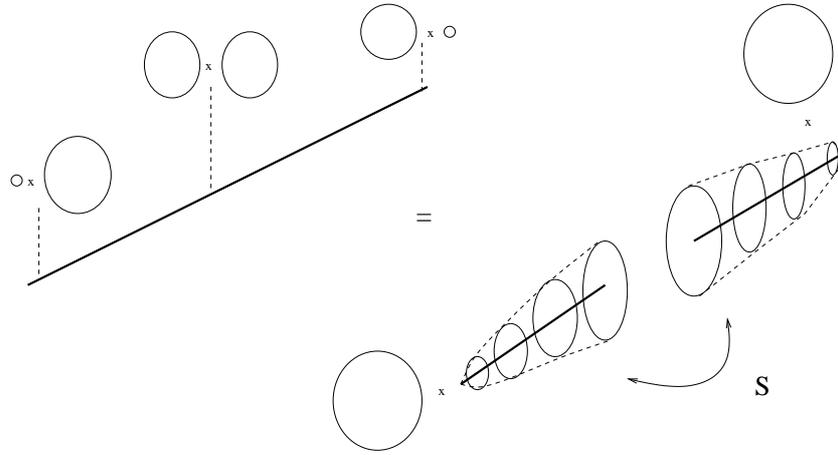


FIG. 5.5 – À gauche, nous représentons \mathbf{S}^3 comme un \mathbf{T}^2 fibration sur l'intervalle. Un des cercles du torus dégénère sur une extrémité, tandis que l'autre cercle dégénère sur l'extrémité opposé.

la géométrie résolue du conifold (5.148) qui a été déjà étudié. La résolution de la géométrie peut être expliquée comme suit ; Posons

$$x = \lambda v, \quad u = \lambda y, \quad (5.177)$$

où λ est une coordonnée inhomogène dans \mathbb{P}^1 . Ceci résout (5.176). D'autre part, on peut interpréter (v, y) et (x, u) comme les coordonnées du diagramme de pôle nord et du diagramme de pôle sud, respectivement pour le fibré,

$$\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

L'équation (5.177) est simplement le changement de coordonnées entre ces deux diagrammes comme dans (5.146). Par conséquent, en introduisant un \mathbb{P}^1 , on a transformé la singularité (5.176) en variété de Calabi-Yau non-compacte régulière (5.148). Pour faire le contact avec la description torique donnée dans (5.160), on pose

$$x = z_1 z_3, \quad y = z_2 z_4, \quad u = z_1 z_2 \quad v = z_3 z_4.$$

Il s'ensuit alors que $\lambda = \frac{z_1}{z_4}$ est la coordonnée inhomogène pour \mathbb{P}^1 décrit dans (5.160) par

$$|z_1|^2 + |z_4|^2 = t.$$

On a donc une *transition du conifold* [141] dans laquelle la 3-sphère du conifold déformé se réduit à la taille zéro quand a tend vers zéro, et ensuite une 2-sphères de taille t se développe, donnant le conifold résolu. En termes des coordonnées z_1, \dots, z_4 , l'action de \mathbf{T}^2 (5.175) devient

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow \left(e^{-i(\alpha+\beta)} z_1, e^{i\alpha} z_2, e^{i\beta} z_3, z_4 \right). \quad (5.178)$$

Cette fibration \mathbf{T}^2 est précisément (5.163). Notons que le lieu singulier de la fibration du conifold résolu est codé dans le graphe triviale de la figure 5.2 ; il est hérité des lieux singuliers représentés dans la figure 5.4. La transition du conifold déformé vers le cas résolu peut être alors représentée par la figure 5.6.

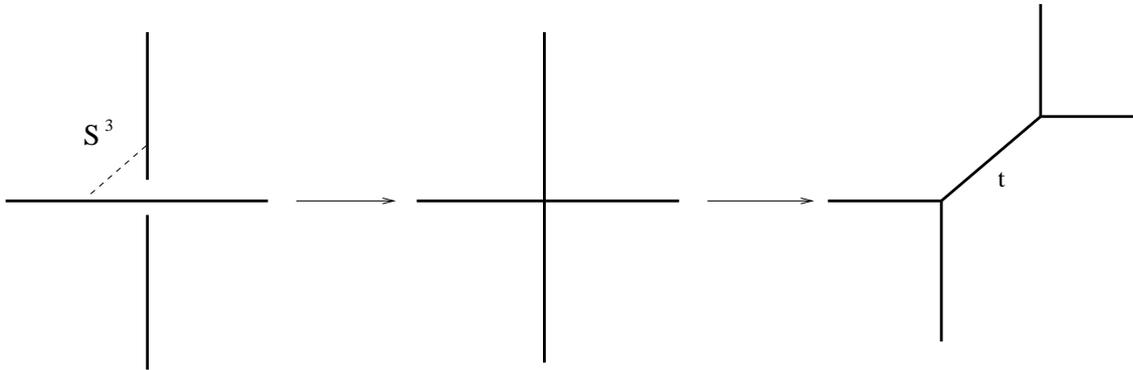


FIG. 5.6 – Une représentation illustrée de la transition du conifold. La figure à gauche représente le conifold déformé avec un S^3 , la figure au centre est la singularité du conifold et la figure à droite est le conifold résolu.

5.3.4 Exemples d'amplitudes de la corde fermée

Maintenant que nous avons présenté quelques constructions détaillées des CY3, on peut revenir aux calculs des amplitudes de la corde topologique type-A, ou d'une manière équivalente aux invariants de Gromov-Witten. Les invariants de Gromov-Witten des CY3 peuvent être calculés de différentes façons. Une technique puissante qui peut être rendue mathématiquement rigoureuse est la technique de *localisation* de Kontsevich [142]. Pour les variétés de Calabi-Yau compactes, seulement

$$N_{g=0,\beta}$$

ont été calculés en détail. Mais pour le cas non-compactes, des techniques de localisation des variétés de CY toriques permettent de calculer

$$N_{g,\beta}$$

pour des genres arbitraires. On présentera dans ce qui suit quelques résultats pour les amplitudes F_g de la corde topologique des géométries que nous avons décrit ci-dessus.

Cas de $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$: Le conifold résolu a un seul paramètre de Kähler t qui correspond à la base \mathbb{P}^1 . Son énergie libre totale est donnée par [115]

$$F(g_s, t) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d \left(2 \sin \frac{dg_s}{2}\right)^2} Q^d, \quad \text{où} \quad Q = e^{-t}. \quad (5.179)$$

Le seul invariant de Gopakumar-Vafa différent de zéro se produit alors au degré un et au genre zéro et il est donné par

$$n_1^0 = 1.$$

D'autre part, ce modèle a déjà un nombre infini d'invariants non triviaux $N_{g,\beta}$, qui s'obtiennent en étendant (5.179) en puissance de g_s .

CHAPITRE 5. CORDES TOPOLOGIQUES SUR DES CALABI-YAU À TROIS DIMENSIONS

Cas de $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$: Cet espace a aussi un seul paramètre de Kähler, correspondant à la classe de l'hyperplan de \mathbb{P}^2 . En utilisant les techniques de localisation de Kontsevich, adaptées au cas non-compact, on trouve [143, 144]

$$\begin{aligned} F_0(t) &= -\frac{t^3}{18} + 3Q - \frac{45Q^2}{8} + \frac{244Q^3}{9} - \frac{12333Q^4}{64} \dots \\ F_1(t) &= -\frac{t}{12} + \frac{Q}{4} - \frac{3Q^2}{8} - \frac{23Q^3}{3} + \frac{3437Q^4}{16} \dots \\ F_2(t) &= \frac{\chi(X)}{5720} + \frac{Q}{80} + \frac{3Q^3}{20} + \frac{514Q^4}{5} \dots \end{aligned} \quad (5.180)$$

et ainsi de suite. Dans (5.180), t est la classe de Kähler de la variété, $Q = e^{-t}$, et $\chi(X) = 2$ est le caractère d'Euler de \mathbb{P}^2 local. Le premier terme dans F_0 est proportionnel au nombre d'intersection

$$H^3$$

de la classe de l'hyperplan, tandis que le premier terme dans F_1 est proportionnel au nombre d'intersection

$$H \cdot c_2(X).$$

Le premier terme dans F_2 est la contribution des transformations constantes. Comme déjà mentionné, on peut exprimer les amplitudes de la corde fermée en terme d'invariants de Gopakumar-Vafa. On donne la fonction génératrice pour des invariants entiers par :

$$f(z, Q) = \sum_{g, \beta} n_{g, \beta}^g z^g Q^\beta, \quad (5.181)$$

où z est un paramètre formel. Pour \mathbb{P}^2 local, on trouve

$$f(z, Q) = 3Q - 6Q^2 + (27 - 10z)Q^3 - (192 - 231z + 102z^2 - 15z^3)Q^4 + \mathcal{O}(Q^5). \quad (5.182)$$

Certains de ces invariants de Gopakumar-Vafa peuvent s'obtenir par la méthode géométrique décrite dans la sous-section 4.2.3. Selon (5.107), on doit considérer l'espace des modules géométriques des déformations de la surface de Riemann incorporée à l'intérieur de \mathbb{P}^2 local. Considérons alors une courbe de degré d dans la base de la fibration à savoir \mathbb{P}^2 . Si on dénote par x, y, z les coordonnées homogènes sur \mathbb{P}^2 , cette courbe est décrite par un polynôme de la forme

$$\sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0,$$

où a_{ijk} sont des coefficients complexes. L'espace des modules des courbes incorporées est décrit par ces coefficients, modulo une transformation d'échelle par \mathbf{C}^* . Il y a au total

$$\binom{d+2}{d} = \frac{d(d+3)}{2} + 1$$

coefficients a_{ijk} ; donc l'espace des modules est l'espace projectif $\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$. Par la formule de genre-degré, ces courbes ont le genre

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

En utilisant (5.107), on trouve

$$n_d^{(d-1)(d-2)/2} = (-1)^{\frac{d(d+3)}{2}} \frac{(d+1)(d+2)}{2}. \quad (5.183)$$

Ceci donne en effet

$$n_1^0 = 3, \quad n_2^0 = -6, \quad n_3^1 = -10, \quad n_4^3 = 15,$$

en accord avec (5.182) [121].

Il est nécessaire de mentionner qu'il y a une méthode très puissante pour calculer les amplitudes F_g , à savoir la symétrie miroir. Dans le calcul de la symétrie miroir, les amplitudes F_g sont profondément liées à la variation des structures complexes sur la variété de Calabi-Yau [118, 108]. Les invariants de Gromov-Witten des CY3 toriques non-compactes ont été calculés avec la symétrie miroir [143, 144, 121].

5.4 Contribution : Symétrie miroir dans les supervariétés de Calabi-Yau locales

Dans cette publication, nous étudions la symétrie miroir qui joue un rôle crucial l'échange des structures de Kahler et complexe ; et dans les dualités de supercordes ; en particulier les supercordes IIA et IIB. Elle fournit une connexion entre les variétés de Calabi-Yau (CY) utilisées dans la compactification des modèles de supercordes à $10D$ et la théorie de corde topologique. En particulier, les modèles topologiques A et B sont reliés par la symétrie miroir. Il a été montré, que le modèle A défini sur la supervariété de CY $\mathbf{CP}^{3|4}$ est le miroir du modèle B sur une hypersurface quadrique $\mathbf{CP}^{3|3} \times \mathbf{CP}^{3|3}$ [17, 18]. Un intérêt spécial a été donné à la construction des supervariétés miroir aux Calabi-Yau dont les parties bosoniques sont des variétés toriques compactes [19]. Un des objectifs de ce travail est de prolonger le résultat de [19] en considérant les variétés de Calabi-Yau locaux qui ont été utilisées dans les compactifications de supecordes type II en présence de D-branes. En particulier, nous avons discuté la symétrie miroir du modèle A topologique sur les supervariétés dont la partie bosonique est une variété de CY locale. La théorie correspondante est un modèle sigma linéaire $U(1)^p$ supersymétrique avec $(n+p)$ superchamps chiraux avec la charge q_i^a et $2p$ superchamps fermioniques avec la charge donnée par Q_α^a qui est une matrice $p \times 2p$. Ces charges satisfont la condition de super CY local (SLCY)

$$\sum_{i=1}^{p+n} q_i^a - \sum_{\alpha=1}^{2p} Q_\alpha^a = 0$$

exigeant l'égalité entre la charge des bosons et des fantômes. Nous avons montré que les supervariétés de CY locales sont décrites par des équations de la géométrie algébrique homologue à celles du cas bosonique puisque ces dernières s'obtiennent facilement en annulant les directions fermioniques. Finalement nous avons montré que cette approche s'applique aussi bien aux miroirs des supergéométries à hautes dimensions notamment au miroir du modèle A sur une superligne fibre sur \mathbf{CP}^n . Plus de détails sont présentés dans l'article reporté ci-après.

5.4 Contribution : Symétrie miroir dans les supervariétés de Calabi-Yau locales

On local Calabi–Yau supermanifolds and their mirrors

R Ahl Laamara^{1,2}, A Belhaj³, L B Drissi^{1,2} and E H Saidi^{1,2}

¹ Lab/UFR de Physique des Hautes Energies, Faculté des Sciences, Rabat, Morocco

² Virtual African Center for Basic Sciences and Technology (VACBT), Groupement National de Physique des Hautes Energies (GNPHE), Faculté des Sciences, Rabat, Morocco

³ Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 585 King Edward Ave., Ottawa, ON, K1N 6N5, Canada

E-mail: abelhaj@uottawa.ca and esaidi@ictp.it

Received 8 February 2006, in final form 28 March 2006

Published 3 May 2006

Online at stacks.iop.org/JPhysA/39/5965

Abstract

We use local mirror symmetry to study a class of local Calabi–Yau supermanifolds with bosonic sub-variety V_b having a vanishing first Chern class. Solving the usual super-CY condition, requiring the equality of the total $U(1)$ gauge charges of bosons Φ_b and the ghost-like fields Ψ_f one $\sum_b q_b = \sum_f Q_f$, as $\sum_b q_b = 0$ and $\sum_f Q_f = 0$, several examples are studied and explicit results are given for local A_r supergeometries. A comment on purely fermionic super-CY manifolds corresponding to the special case where $q_b = 0, \forall b$ and $\sum_f Q_f = 0$ is also made.

PACS numbers: 02.40.–k, 11.25.Wx, 11.30.–j

1. Introduction

Mirror symmetry has played a crucial role in superstring dualities. It provides a map between Calabi–Yau (CY) manifolds used in the compactification of 10D superstring models and topological string theory. In particular, the topological A- and B-models are connected by mirror symmetry, as discussed below. However, it has been realized, though, that rigid CY manifolds can have mirror manifolds which are not themselves CY geometries. An intriguing remedy is the introduction of CY *supermanifolds* in these considerations [1, 2]. It has thus been suggested that mirror symmetry is between supermanifolds and manifolds alike, and not just between bosonic manifolds.

On the other hand, it has been found that there is a correspondence between the moduli space of holomorphic Chern–Simons theory on the CY supermanifold $\mathbf{CP}^{3|4}$ and the self-dual, four-dimensional $N = 4$ Yang–Mills theory [3, 4]. This may also be related to the B-model of an open topological string theory having $\mathbf{CP}^{3|4}$ as target space. Partly based on this work,

CY supermanifolds and their mirrors have subsequently attracted a great deal of attention [5–16]. It has been found, for instance, that an A-model defined on the CY supermanifold $\mathbf{CP}^{3|4}$ is a mirror of a B-model on a quadric hypersurface in $\mathbf{CP}^{3|3} \times \mathbf{CP}^{3|3}$, provided the Kähler parameter of $\mathbf{CP}^{3|4}$ approaches infinity [5, 6].

Following this observation, an effort has been devoted to go beyond these particular geometries. A special interest has been given to construct the mirror of Calabi–Yau supermanifolds whose bosonic parts are compact toric varieties [17]. One of the objectives of the present work is to extend the result of [17] by considering local Calabi–Yau manifolds which have been used in type II superstring compactifications in the presence of D-branes. In particular, we discuss the mirror symmetry of the topological A-model on supermanifolds whose bosonic part is a local CY variety. The corresponding theory is a supersymmetric $U(1)^p$ linear sigma model with $(n + p)$ chiral superfields with charge q_i^a and $2p$ fermionic superfields with charge given by Q_α^a which is a $p \times 2p$ matrix. These charges satisfy the superlocal CY (SLCY) condition $\sum_{i=1}^{p+n} q_i^a - \sum_{\alpha=1}^{2p} Q_\alpha^a = 0$ requiring equality between the total charge of bosons and the ghost-like fields.

In this paper, we shall focus on the mirror supergeometry obtained by first choosing a special form of the full spectrum of $U(1)^p$ gauge charges and integrating out some fermionic fields in the topological B-model. In this way, the mirror B-models will still have some fermionic directions. Our interest will be on the mirror of ADE supergeometries and mainly on the fermionic extension of the ordinary A_r class. First, we study the case of A_1 supergeometry, which is found to be closely related to the equation of the bosonic case in agreement with the analysis using Landau–Ginzburg (LG) models. Ordinary A_1 geometry is recovered by cancelling the fermionic directions. Then we work out the mirror of a class of A_r local super-CY manifold extending the A_1 supergeometry. Finally, we discuss the mirror symmetry of local higher dimensional super-CY geometries. In particular, we specialize on the mirror symmetry of the topological A-model using a fermionic extension of a line bundle over \mathbf{CP}^n .

The organization of this paper is as follows. In section 2, we review mirror symmetry of local super-CY manifolds. In section 3, we study the mirror of ADE supergeometries by exhibiting the method on the ordinary A_r series. In section 4, we consider mirror supergeometries beyond ADE and in section 5, we give a conclusion.

2. Mirror symmetry of local super-CY manifolds

In this section, we review mirror symmetry for local (bosonic) CY manifolds [18, 19], then we give the extension to the supercase.

2.1. Bosonic CY

To begin with, let us consider a two-dimensional $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric linear sigma model described in terms of $n + p$ chiral superfields Φ_i with charge q_i^a , $i = 1, \dots, n + p$, $a = 1, \dots, p$ under $U(1)^{\otimes p}$ gauge symmetry [20]. The geometry of the topological A-model can be analysed by solving the D-term potential ($D^a = 0$) of the $\mathcal{N} = 2$ linear sigma model; that is

$$\sum_{i=1}^{n+p} q_i^a |\phi_i|^2 = r^a, \quad a = 1, \dots, p, \quad (2.1)$$

where the r^a 's are FI coupling parameters and the ϕ_i 's are the leading scalar fields of the chiral superfield Φ_i . Dividing by $U(1)^{\otimes p}$ gauge symmetry, one gets an n -dimensional toric variety⁴

$$\mathbf{V}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+p} \setminus S}{\mathbb{C}^{*p}}, \tag{2.2}$$

where the p copies of \mathbb{C}^* actions indexed by $a = 1, \dots, p$, are given by

$$\mathbb{C}^{*p} : \phi_i \rightarrow \lambda^{q_i^a} \phi_i, \quad i = 1, \dots, n + p, \tag{2.3}$$

with λ a non-zero complex number. The requirement for \mathbf{V}^n to be a local CY manifold is to impose the condition

$$\sum_{i=1}^{n+p} q_i^a = 0. \tag{2.4}$$

On the supersymmetric field theoretic level, this relation implies that the underlying linear sigma model flows in infrared to a conformal field theory.

Following [18–22], the mirror B-model is an LG model with periodic fields $\{Y_i\}$ dual to $\{\Phi_i\}$ and connected as

$$\text{Re}(Y_i) = |\Phi_i|^2, \quad i = 1, \dots, n + p, \tag{2.5}$$

where $\text{Re}(Y_i)$ denotes the real part of Y_i . Under mirror transformation, equation (2.1) is mapped to

$$\sum_i q_i^a Y_i = t^a, \quad a = 1, \dots, p, \tag{2.6}$$

with $r^a = \text{Re}(t^a)$. Moreover, the LG superpotential of the topological B-model reads as

$$W(Y_1, \dots, Y_{n+p}) = \sum_{i=1}^{n+p} e^{-Y_i}. \tag{2.7}$$

For convenience, it is useful to use the following field redefinitions:

$$\hat{y}_i = e^{-Y_i}, \quad i = 1, \dots, n + p, \tag{2.8}$$

Then the superpotential $W = W(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n+p})$ reads as

$$W = \sum_{i=1}^{n+p} \hat{y}_i, \tag{2.9}$$

and so equation (2.6) translates into the following projective hypersurface:

$$\prod_{i=1}^{n+p} \hat{y}_i^{q_i^a} = e^{-t^a}, \quad a = 1, \dots, p, \tag{2.10}$$

with the manifest projective symmetry $\hat{y}_i \rightarrow \lambda \hat{y}_i$ following from the CY condition (2.4). The solution of the constraint equation (2.10) and projective symmetry defines a $(n + p) - p - 1 - 1 = n - 2$ dimensional toric manifold given by a holomorphic hypersurface in \mathbb{C}^{n-1} :

$$F(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0. \tag{2.11}$$

To recover the right dimension of the original manifold, that is a complex dimension n local CY manifold, we generally use an ad hoc trick which consists of adding by hand two extra

⁴ Note that this geometry can be represented by a toric diagram $\Delta(\mathbf{V}^n)$ spanned by $k = n + p$ vertices v_i in a \mathbb{Z}^n lattice satisfying $\sum_{i=1}^{n+p} q_i^a v_i = 0, \quad a = 1, \dots, p$.

holomorphic variables u and v combined in a quadratic form uv and modifying the previous equation as

$$F(y_1, \dots, y_{n-1}) = uv. \quad (2.12)$$

The main objective in what follows is to extend this analysis to a linear A-model with fermionic (ghosts) fields and study the resulting mirror B-model. Besides the generalization of the above results to local super-CY manifolds, one of the results following from this fermionic extension is the re-derivation of equation (2.12) without the need of adding by hand of the term uv of right-hand aide. As we will show later, the new manifold is given by a hypersurface of type

$$G(y_1, \dots, y_{n-1}) = \chi\eta, \quad (2.13)$$

where, instead of u and v variables, we have now the variables χ and η which are ghost-like fields. As we will see, this relation defines an even complex n dimension hypersurface of the complex superspace $\mathbb{C}^{(n-1)|2}$. This geometry may then be viewed as an alternative elevation of (2.11). The standard elevation equation (2.12) is given by the purely bosonic hypersurface in $\mathbb{C}^{(n+1)|0}$.

2.2. Mirror of local super-CY

Here, we want to study the mirror of the fermionic extension of the topological A-model on local toric CY manifolds discussed in the previous subsection. Actually, this may be viewed as an extension of the paper [17] which has dealt with the case of compact bosonic toric manifolds. Important examples of that work have been projective spaces and products thereof.

2.2.1. Extended A-model. Roughly, the extension corresponds to adding, to the usual bosonic superfield Φ_j , a set of f -fermionic chiral superfields Ψ_α with Q_f^a charge under $U(1)^{\otimes p}$ gauge symmetry. We then have

$$\begin{aligned} \Phi_j &\rightarrow e^{i\sum_a \vartheta_a q_j^a} \Phi_j, & j = 1, \dots, n+p, \\ \Psi_\alpha &\rightarrow e^{i\sum_a \vartheta_a Q_\alpha^a} \Psi_\alpha, & \alpha = 1, \dots, f, \end{aligned} \quad (2.14)$$

with the same transformations for the leading component fields ϕ_j and ψ_α respectively and where ϑ_a 's are the gauge group parameters. The full spectrum of $U(1)^{\otimes p}$ charge vectors $q^a = (q^a | Q^a)$ thus takes the form

$$(q^a | Q^a) = (q_1^a, \dots, q_{p+n}^a | Q_1^a, \dots, Q_f^a), \quad a = 1, \dots, p. \quad (2.15)$$

The extended D^a -term equations resulting from the above generalized A-model are given by minimizing the Kahler potential of the $2\mathcal{DN} = 2$ generalized superfield action:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}=2} = \int d^2\sigma d^4\theta \mathcal{K} + \left(\int d^2\sigma d^2\theta W + \text{cc} \right), \quad (2.16)$$

with respect to the gauge superfields V_a . In the above relation, \mathcal{K} is the usual gauge invariant Kahler term and W is a chiral superpotential with the superfield dependence as,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{K}[\Phi_1, \dots, \Phi_{n+p}^+; \Psi_1, \dots, \Psi_f^+; V_1, \dots, V_p], \\ W &= W[\Phi_1, \dots, \Phi_{n+p}; \Psi_1, \dots, \Psi_f], \end{aligned} \quad (2.17)$$

as well as coupling constant moduli which have not been specified. Using the explicit expression of \mathcal{K} and putting back into

$$D^a = \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial V_a} \right|_{\theta=0} = 0, \quad (2.18)$$

we get the following D^a -term equations:

$$\sum_{i=1}^{p+n} q_i^a |\phi_i|^2 + \sum_{\alpha=1}^f Q_\alpha^a |\psi_\alpha|^2 = \text{Re}(t^a), \quad a = 1, \dots, p, \tag{2.19}$$

where $\text{Re}(t^a)$ stands for the FI coupling constant. Strictly speaking, this is an even hypersurface embedded in the complex supermanifold $\mathbb{C}^{p+n|f}$ with dimension $(p+n|f)$. Therefore, the space of vacua of the above generalized supersymmetric action is a toric supermanifold \mathcal{V}^n obtained by dividing $\mathbb{C}^{p+n|f}$ by $U(1)^{\otimes p}$ gauge symmetry group in the same logic as in equation (2.2). Thus we have

$$\mathcal{V}^n = \frac{\mathbb{C}^{p+n|f} \setminus \mathcal{S}}{\mathbb{C}^{*p}}. \tag{2.20}$$

With this relation at hand, one can go ahead and try to develop the toric supergeometry of these local supermanifolds by mimicking the standard toric geometry analysis of toric varieties. We shall not do this here; what we will do rather is to study some specific examples with a direct link to type II superstring theory compactifications. The first class of these examples concerns specific fermionic extensions of ADE geometries. The local super-CY (LSCY) condition reads as follows:

$$\sum_{i=1}^{p+n} q_i^a - \sum_{\alpha=1}^f Q_\alpha^a = 0. \tag{2.21}$$

This constraint equation is required by the invariance of holomorphic measure $\Omega^{(p+n|f)}$ of the complex superspace $\mathbb{C}^{p+n|f}$,

$$\Omega^{(p+n|f)} = \binom{n+p}{i=1} d\phi_i \binom{f}{\alpha=1} d\psi_\alpha, \tag{2.22}$$

under \mathbb{C}^{*p} toric symmetry. In what follows, we shall fix our attention on those local CY supermanifolds \mathcal{V}^n obeying the following special solution:

$$\sum_{i=1}^{p+n} q_i^a = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^f Q_\alpha^a = 0, \quad a = 1, \dots, p. \tag{2.23}$$

In this particular class of solutions of equation (2.21), we have taken the bosonic sub-variety as a local CY manifold. This is the case for bosonic sub-varieties given by the fermionic extensions of ADE geometries we are interested in here. It is also remarkable that fermionic directions obey as well a CY condition for the bosonic manifold. In section 5, we will make a comment on this issue.

2.2.2. Extended B-model The dual extended B-model geometries were derived in [6] by using the T-duality in the linear sigma model describing the A-model. The result of [6] is as follows. Consider a $U(1)$ gauge linear sigma model with fermionic fields Φ_α . As in the bosonic model, a fermionic superfield Φ is dualized by a triplet (X, η, χ) . These fields are related by

$$\text{Re}(X) = -|\Psi|^2. \tag{2.24}$$

The ghost fields (η, χ) have been added to guarantee the same superdimension in the mirror geometry. This supersymmetric extension gives a contribution, in the superpotential for the mirror theory, of the form

$$e^{-X} (1 + \eta\chi). \tag{2.25}$$

Using this technique, let us review briefly the mirror of CY supermanifold $\mathbf{CP}^{3|4}$ [6]. The manifold has a linear sigma model description in terms of 4 bosonic and 4 fermionic fields with charge $(1, 1, 1, 1|1, 1, 1, 1)$. In this way, equation (2.19) reduces to

$$\sum_{i=1}^4 |\phi_i|^2 + \sum_{\alpha=1}^4 |\psi_\alpha|^2 = \text{Re}(t). \tag{2.26}$$

The mirror theory is given in terms of the following patch integral:

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{i,\alpha=1}^4 dY_i dX_\alpha d\eta_\alpha d\chi_\alpha \delta\left(\sum_{i=1}^4 Y_i - \sum_{\alpha=1}^4 X_\alpha - t\right) \exp\left(\sum_{i=1}^4 e^{-Y_i} + \sum_{\alpha=1}^4 e^{-X_\alpha}(1 + \eta_\alpha \chi_\alpha)\right) \tag{2.27}$$

After field redefinitions $(x_i = e^{-X_i}, Y_i = e^{-Y_i})$, and integrating the delta function, the mirror geometry takes the form

$$\sum_{i=1}^3 x_i y_i + x_i + 1 + e^t y_1 y_2 y_3 + \eta_i \chi_i = 0. \tag{2.28}$$

If we take the limit $t \rightarrow -\infty$, one gets a quadric hypersurface in $\mathbf{CP}^{3|3} \times \mathbf{CP}^{3|3}$.

In what follows, we follow the same line to study a class of supermanifolds with local toric CY geometries in the bosonic part involving more than one $U(1)$ gauge symmetries (2.19). Under T-duality, the bosonic superfield Φ_i of the linear supertoric sigma model is replaced by a dual superfield Y_i as before, while the fermionic superfield Ψ_α is dualized by the triplet $(X_\alpha, \eta_\alpha, \chi_\alpha)$ [6]. The bosonic superfields X_α are related to Ψ_α as

$$\text{Re}(X_\alpha) = -|\Psi_\alpha|^2, \quad \alpha = 1, \dots, f, \tag{2.29}$$

and the accompanying pair of chiral superfields $\{\eta_\alpha\}$ and $\{\chi_\alpha\}$ is fermionic superfields required by the preservation of the superdimension and hence the total central charge. Under this dualization, the original complex superspace $\mathbb{C}^{p+n|f}$ gets mapped to

$$\mathbb{C}^{p+n+f|2f}. \tag{2.30}$$

The extended B-model, mirror to the above fermionic extended A-model with the superfield action $\mathcal{S}_{N=2}$, is given in terms of the following path integral, see also [17]:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}F \left[\prod_{a=1}^p \delta(F_a - t_a) \right] \exp\left[\int \mathcal{W}(Y, X, \eta, \chi) \right], \tag{2.31}$$

where we have set $\mathcal{D}F = (\prod_i dY_i)(\prod_\alpha dX_\alpha d\eta_\alpha d\chi_\alpha)$. In this relation, the F_a 's are the D-terms of the extended A-model and $\mathcal{W} = \mathcal{W}(Y, X, \eta, \chi)$ is the extended LG superpotential of the topological B-model. They are as follows:

$$F_a = \sum_{i=1}^{n+p} q_i^a Y_i - \sum_{\alpha=1}^f Q_\alpha^a X_\alpha, \quad a = 1, \dots, p, \tag{2.32}$$

$$\mathcal{W} = \left(\sum_{i=1}^{n+p} e^{-Y_i} + \sum_{\alpha=1}^f e^{-X_\alpha}(1 + \eta_\alpha \chi_\alpha) \right).$$

To extract information on the local supergeometry of the B-model, we need to integrate out the delta functions. Below, we shall focus our attention on the special case where $f = 2p$ and exemplify with models which have been used in type II superstring theory compactifications. This choice appears naturally in the study of ALE space with A_r supergeometries. In the case of $r = 1$, the minimal number of the fermionic fields, satisfying the local CY condition (2.22), is 2. We intend to address elsewhere the situation where $f \neq 2p$.

3. Mirror of A_r supergeometries

Here, we focus on the supergeometry extending the usual ordinary A_r geometries. A quite similar analysis is *a priori* possible for the DE, affine and indefinite extensions.

3.1. Local super A_1 geometry

To illustrate the construction, we initially consider the example of the model A_1 . This is a supersymmetric gauge theory with a $U(1)$ gauge symmetry and three chiral superfields Φ_i with charge $(1, -2, 1)$ together with a real gauge superfield V . The D-term constraint (equation of motion of V) reads as

$$|\Phi_1|^2 - 2|\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 = \text{Re}(t). \tag{3.1}$$

This geometry describes the Kahler deformation of the A_1 singularity of the ALE spaces

$$uv = z^2, \tag{3.2}$$

where u, v and z are the generators of gauge invariants. They are realized in terms of the scalar fields as follows:

$$u = \Phi_1^2 \Phi_2, \quad v = \Phi_3^2 \Phi_2, \quad z = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3. \tag{3.3}$$

For generalizations to rank $r \geq 2$ ordinary ADE geometries as well as affine extensions and beyond see [23].

3.1.1. Extended model. Basically, there is an abundance of possible fermionic extensions of the above model. It may be limited by imposing the LSCY condition (2.21). Since we are interested in the case $f = 2p = 2$, the full spectrum of $U(1)$ charge that one can have is given by the vector

$$q' = (q|Q) = (1, -2, 1|1, -1). \tag{3.4}$$

In this construction, A_1 model appears as a sub-system while, as noted before and as far as the super-CY condition is concerned, there are several solutions of equation (2.21). Using extension (3.4), the D-term for the A_1 supergeometry becomes

$$|\Phi_1|^2 - 2|\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 + |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 = \text{Re}(t), \tag{3.5}$$

where $\text{Re}(t)$ is the unique Kahler parameter of the model.

3.1.2. Mirror of the extended model. Applying mirror transformation to the above extended A-model with A_1 supergeometry, the associated mirror B-model is obtained in the same way as presented in the previous subsection. The corresponding extended LG path integral equations (2.31, 2.32) takes the following form:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}F \delta[Y_1 - 2Y_2 + Y_3 - X_1 + X_2 - t] \exp \left(\sum_{i=1}^3 e^{-Y_i} + \sum_{\alpha=1}^2 e^{-X_\alpha} (1 + \eta_\alpha \chi_\alpha) \right), \tag{3.6}$$

with $\mathcal{D}F = (\prod_{i=1}^3 dY_i) (\prod_{\alpha=1}^2 dX_\alpha d\eta_\alpha d\chi_\alpha)$. As usual, to extract information on the mirror supergeometry of the B-model, we integrate out the fermionic fields η_1, χ_1 . Then, solving the delta function constraint by integrating out X_1 yields

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\tilde{F} (e^{-Y_1+2Y_2-Y_3} e^{-X_2}) \exp \left(\sum_{i=1}^3 e^{-Y_i} + e^{-X_2} [1 + \eta_2 \chi_2 + e^t e^{-Y_1+2Y_2-Y_3}] \right), \tag{3.7}$$

where $\mathcal{D}\tilde{F} = (\prod_{i=1}^3 dY_i)(dX_2 d\eta_2 d\chi_2)$. Now, introducing the new complex variables x_i and y_i such that

$$x = e^{-X_2}, \quad y_i = e^{-Y_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

the above partition function becomes

$$\mathcal{Z} = \int (dx d\eta_2 d\chi_2) \prod_{i=1}^3 \left(\frac{dy_i}{y_i^3} \right) \exp \left(\sum_{i=1}^3 y_i + x \left[1 + \eta_2 \chi_2 + e^t \frac{y_1 y_3}{y_2^2} \right] \right). \quad (3.9)$$

The rescaling $\tilde{x} = (x/y_2^3)$ allows us to rewrite the above path integral as follows:

$$\mathcal{Z} = \int dy_1 dy_2 dy_3 d\tilde{x} d\eta_2 d\chi_2 \exp \left(\sum_{i=1}^3 y_i + \tilde{x} y_2^3 \left[1 + \eta_2 \chi_2 + e^t \frac{y_1 y_3}{y_2^2} \right] \right). \quad (3.10)$$

In order to get the mirror of the local supergeometry A_1 , we can see \tilde{x} as a Lagrange multiplier; integrating it out one gets the following equation of motion:

$$1 + \eta_2 \chi_2 + \frac{y_1 y_3}{y_2^2} e^t = 0. \quad (3.11)$$

The objective now is to interpret this equation as the mirror constraint equation of the topological A-model on A_1 supergeometry. In fact, we can solve (3.11) as

$$\frac{y_1 y_3}{y_2^2} = -(1 + \eta_2 \chi_2) e^{-t}. \quad (3.12)$$

Replacing now t by $t' = t + i\pi$, one absorbs the minus sign

$$\frac{y_1 y_3}{y_2^2} = e^{-t'} + \eta_2 \chi_2 e^{-t'}. \quad (3.13)$$

Actually, this equation is quite similar to the bosonic one except that now we have the presence of the additional contribution $\eta_2 \chi_2 e^{-t'}$, induced by the fermionic fields. It is easy to see that in the patch $\eta_2 = \chi_2 = 0$, we recover the bosonic mirror constraint equation of the ALE space with A_1 singularity, namely

$$\frac{y_1 y_3}{y_2^2} = e^{-t'}. \quad (3.14)$$

Return to equation (3.13); a straightforward computation reveals that this equation can be solved by taking the following parameterization:

$$y_1 = y, \quad y_3 = \frac{1}{y}, \quad y_2 = (1 + \eta_2 \chi_2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t'}{2}}, \quad (3.15)$$

where we have set $t' = t$. We thus end with the following LG potential:

$$y + \frac{1}{y} + (1 + \eta_2 \chi_2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}} = 0, \quad (3.16)$$

which is a mirror to the sigma model on A_1 supergeometry. This equation has three following remarkable features:

- (1) For $\eta_2 = \chi_2$, we recover the usual bosonic LG superpotential mirror to the bosonic A_1 geometry

$$y + \frac{1}{y} + e^{\frac{t}{2}} = 0. \quad (3.17)$$

- (2) In the case $t \rightarrow 0$, one discovers the rule to define the superextension of the A_1 singularity with $U(1)$ charges as in equation (3.4). The mirror of the super A_1 singularity can then be defined as follows:

$$y_1 y_3 = y_2^2(1 + \eta_2 \chi_2), \tag{3.18}$$

in agreement with an indication from conformal LG field models where adjunction of quadratic terms does not modify the total central charge. Moreover, by using fermionic statistics which forbids higher powers in η_2 and χ_2 , one may define extensions of the above A_1 singularity.

- (3) In the limit where the condensate modulus $\eta_2 \chi_2$ is small, equation (3.16) reduces to

$$y + \frac{1}{y} + e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \eta_2 \chi_2 e^{\frac{t}{2}} = 0. \tag{3.19}$$

By making the identification $\frac{1}{2} \eta_2 \chi_2 e^{-\frac{t}{2}}$ with the uv of the relation (2.11–2.12), one discovers that the uv term added by hand in the bosonic case to recover the right dimension of the mirror manifold is generated in a natural way in supergeometry. In the limit $t \rightarrow 0$, we have

$$y + \frac{1}{y} + 1 = \eta'_2 \chi'_2, \tag{3.20}$$

where we have set $\eta'_2 \chi'_2 = \frac{1}{2} \eta_2 \chi_2$. This is a complex two dimensions even hypersurface of $\mathbb{C}^{1|2}$.

3.2. Super A_p

Now, we would like to push further the above results on super A_1 to the class of A_p supergeometry series having usual A_p geometry as local bosonic Calabi–Yau sub-manifolds. To start with, recall that A_p geometry has a description in terms of the $U(1)^{\otimes p}$ sigma model involving $(p + 2)$ chiral fields with the bosonic charge $p \times (p + 2)$ matrix:

$$q_i^a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Basically, there are several fermionic extensions of the above A-model. However as we mentioned before, we consider a model with $2p$ fermionic fields. In this way, the SLCY condition may limit the choice of the charge matrix. For a reason to be specified later on, we propose the following $U(1)^{\otimes p}$ charge spectrum for ghost-like superfields:

$$Q_\alpha^a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

This representation constitutes a simple and natural extension of equation (3.4) recovering A_1 supergeometry as a leading example; other representations are obviously possible. This choice of $U(1)^{\otimes p}$ charge matrix for ghost-like fields allows us to handle each line as an individual

A_1 supergeometry. In this way, we can easily repeat the same lines that we have done for the super A_1 case. Let us give some details below.

Roughly, the LG mirror superpotential is given in terms of the following path integral:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}F \left[\prod_{a=1}^p \delta(F_a - t_a) \right] \exp \left(\sum_i e^{-Y_i} + \sum_\alpha e^{-X_\alpha} (1 + \eta_\alpha \chi_\alpha) \right), \tag{3.23}$$

where now $\mathcal{D}F = (\prod_{i=1}^{p+2} dY_i) (\prod_{\alpha=1}^{2p} dX_\alpha d\eta_\alpha d\chi_\alpha)$ and where we have set

$$F_a = Y_a - 2Y_{a+1} + Y_{a+2} - X_{2a-1} + X_{2a}. \tag{3.24}$$

This partition function \mathcal{Z} has p delta functions $\delta(F_a - t_a)$. To get the mirror supergeometry, we first integrate out the fermionic field variables $(\eta_{1a}\chi_{1a})$ leaving only a dependence on $(\eta_{2a}\chi_{2a}), a = 1, 2, \dots, p$, and then we use delta functions to eliminate the field variables X_{2a-1} . In doing so and following the same way as before, we get p equations of motion,

$$1 + \eta_{2a}\chi_{2a} = \prod_i y_i^{q_i^a}, \quad a = 1, \dots, p. \tag{3.25}$$

To see how to obtain these equations, let us consider the case of A_2 supergeometry. This is a $U(1)^2$ gauge theory with four chiral superfields $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)$ and four ghost-like ones $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$. The full spectrum of $U(1)^2$ gauge charges is given by

$$q'^1 = (1, -2, 1, 0 | 1, -1, 0, 0), \quad q'^2 = (0, 1, -2, 1 | 0, 0, 1, -1). \tag{3.26}$$

The above path integral reduces, in the present case, to

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}F \delta(F_1 - t_1) \delta(F_2 - t_2) \exp \left(\sum_{i=1}^4 e^{-Y_i} + \sum_{\alpha=1}^4 e^{-X_\alpha} (1 + \eta_\alpha \chi_\alpha) \right), \tag{3.27}$$

with field measure $\mathcal{D}F = (\prod_{i=1}^4 dY_i) (\prod_{\alpha=1}^4 dX_\alpha d\eta_\alpha d\chi_\alpha)$ and D-terms as

$$F_1 = Y_1 - 2Y_2 + Y_3 - X_1 + X_2, \quad F_2 = Y_2 - 2Y_3 + Y_4 - X_3 + X_4. \tag{3.28}$$

Integrating in a similar way as we have done for A_1 supergeometry and making the same variable changes, we get

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}F' \exp \left[\sum_{i=1}^4 y_i + \tilde{x}_1 y_2^2 \left(1 + \eta_2 \chi_2 + \frac{e^{t_1} y_1 y_3}{y_2^2} \right) \right] \exp \left[\tilde{x}_2 y_3^2 \left(1 + \eta_4 \chi_4 + \frac{e^{t_2} y_2 y_4}{y_3^2} \right) \right], \tag{3.29}$$

with $\mathcal{D}F' = (\prod_{i=1}^4 dy_i) (d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 d\eta_2 d\chi_2 d\eta_4 d\chi_4)$. In this case, we have two equations of motion which are given by

$$\frac{y_1 y_3}{y_2^2} = (1 + \eta_2 \chi_2) e^{-t'_1}, \quad \frac{y_2 y_4}{y_3^2} = (1 + \eta_4 \chi_4) e^{-t'_2}, \tag{3.30}$$

with $t'_a = t_a + i\pi$. After solving these two equations, we come up with the following mirror relation:

$$\frac{1}{y} + \left(e^{\frac{t'_1}{2}} (1 + \eta_2 \chi_2) \right) + y + y^2 \left(e^{-t'_2} e^{-\frac{t'_1}{2}} (1 + \eta_4 \chi_4) (1 + \eta_2 \chi_2)^{\frac{1}{2}} \right) = 0, \tag{3.31}$$

which should be compared with the usual mirror relation of ordinary A_2 geometry $\frac{1}{y} + 1 + y + y^2 = 0$ associated with the limit $t'_a = 0$ and $\eta_2 = \chi_2 = 0$.

4. More on mirror supergeometry

The method developed so far can also be used to build other local super-CY manifolds. A simple extension of the above A_1 supergeometry analysis is given by a sigma model with the target space involving a fermionic extension of a line bundle over \mathbf{CP}^p with $p \geq 2$. The case $p = 1$ corresponds exactly to the A_1 supergeometry studied previously. Let us analyse the case $p = 2$, that is, the line bundle $\mathcal{O}(-3)$ over \mathbf{CP}^2 . It admits a $U(1)$ sigma model description in terms of four bosonic chiral fields with charge vector $(1, 1, 1, -3)$, and the corresponding D-term equation is given by

$$|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 - 3|\Phi_4|^2 = \text{Re}(t). \tag{4.1}$$

Adding now two ghost-like field variables Ψ_1 and Ψ_2 with vector charge $(1, -1)$, as required by the SLCY condition, the D-term constraint equation of the extended A-model is given by

$$|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 - 3|\Phi_4|^2 + |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 = \text{Re}(t). \tag{4.2}$$

The corresponding mirror supergeometry is given in terms of the following path integral:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}F \delta(F - t) \exp\left(\sum_{i=1}^4 e^{-Y_i} + \sum_{\alpha=1}^2 e^{-X_\alpha}(1 + \eta_\alpha \chi_\alpha)\right) \tag{4.3}$$

with $\mathcal{D}F = (\prod_{i=1}^4 dY_i)(\prod_{\alpha=1}^2 dX_\alpha d\eta_\alpha d\chi_\alpha)$ and

$$F = Y_1 + Y_2 + Y_3 - 3Y_4 - X_1 + X_2. \tag{4.4}$$

Now integrating out the fermionic fields η_1, χ_1 and solving the delta function constraint by eliminating X_1 , we get

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}F (e^{-Y_1 - Y_2 - Y_3 + 3Y_4} e^{-X_2}) \exp\left(\sum_{i=1}^4 e^{-Y_i} + e^{-X_2}(1 + \eta_2 \chi_2 + e^t e^{-Y_1 - Y_2 - Y_3 + 3Y_4})\right), \tag{4.5}$$

with $\mathcal{D}F = (\prod_{i=1}^4 dY_i)(dX_2 d\eta_2 d\chi_2)$. Using the following field re-definition:

$$y_i = e^{-Y_i}, \quad x = e^{-X_2} \tag{4.6}$$

the above equation becomes

$$\mathcal{Z} = \int \left(\prod_{i=1}^4 \frac{dy_i}{y_i^4}\right) (dx d\eta_2 d\chi_2) \exp\left[\sum_{i=1}^4 y_i + x \left(1 + \eta_2 \chi_2 + \frac{e^t y_1 y_2 y_3}{y_4^3}\right)\right]. \tag{4.7}$$

With the help of the following rescaling $\tilde{x} = \frac{x}{y_4^4}$, the mirror geometry becomes

$$\mathcal{Z} = \int d\tilde{x} d\eta_2 d\chi_2 \prod_{i=1}^4 dy_i \exp\left[\sum_{i=1}^4 y_i + \tilde{x} y_4^4 \left(1 + \eta_2 \chi_2 + \frac{e^t y_1 y_2 y_3}{y_4^3}\right)\right]. \tag{4.8}$$

In this case, the equation of motion reads as

$$\frac{y_1 y_2 y_3}{y_4^3} = -(1 + \eta_2 \chi_2) e^{-t}. \tag{4.9}$$

Absorbing the minus sign by replacing t by $t + i\pi$, the above equation becomes

$$\frac{y_1 y_2 y_3}{y_4^3} = e^{-t'} + \eta_2 \chi_2 e^{-t'}. \tag{4.10}$$

This can be easily solved by the following parameterization:

$$y_1 = x, \quad y_2 = y, \quad y_3 = \frac{1}{xy} \quad y_4 = (1 + \eta_2 \chi_2)^{\frac{-1}{3}} e^{\frac{t'}{3}}. \tag{4.11}$$

The superpotential describing the mirror of the supergeometry reads as

$$x + y + \frac{1}{xy} + (1 + \eta_2 \chi_2)^{\frac{-1}{3}} e^{\frac{\zeta}{3}} = 0. \quad (4.12)$$

For $\eta_2 \chi_2 = 0$, we rediscover the usual bosonic relation.

5. Conclusion

In this paper, we have studied mirror symmetry of A-model on Calabi–Yau supermanifolds constructed as fermionic extensions of local toric CY satisfying the SLCY condition $\sum_{i=1}^{p+n} q_i^a = \sum_{\alpha=1}^{2p} Q_\alpha^a$. By solving this condition as $\sum_{i=1}^{p+n} q_i^a = 0$ and $\sum_{\alpha=1}^{2p} Q_\alpha^a = 0$ separately, we have considered two classes of mirror supergeometries. The first class deals with a special fermionic extension of ordinary geometries and the second class concerns a set of sigma models with the target space involving a fermionic extension of a line bundle over \mathbf{CP}^n with $n \geq 2$. The representations studied here are not the general ones since the bosonic sub-variety of a supermanifold considered here is taken as a Calabi–Yau manifold. This condition is obviously not a necessary condition for building Calabi–Yau supermanifolds. This work may be viewed as an extension of [17] which has dealt with bosonic compact toric varieties. The mirror geometries studied in that paper have dealt only with bosonic variables. However, here the mirror B-models involve fermionic directions captured by the ghost-like fields. In dealing with the mirror of A_r supergeometries, we have shown that these local CY supermanifolds are described by algebraic geometry equations quite similar to the bosonic case. The later can be obtained by cancelling fermionic directions. Moreover, we have found that in supergeometry, the right dimension of the bosonic CY sub-variety is recovered in a natural way as shown in (3.20). Finally, we have shown that this approach applies as well to higher dimensional mirror supergeometries; the mirror of the A-model on the superline bundle over \mathbf{CP}^n studied in section 4 is an example amongst others.

In the end of this study, we would like to add that along with ordinary CY manifolds embedded in $\mathbb{C}^{n|0}$ and super-CY manifolds embedded in complex space $\mathbb{C}^{n|m}$, we may also have super-CY manifolds embedded in the purely fermionic space $\mathbb{C}^{0|m}$ without basic bosonic coordinates. These special super-CY varieties are then hypersurfaces in $\mathbb{C}^{0|m}$ involving ghost-like fields only.

Our work opens up for further studies. A natural extension of the present work includes the case $p \neq 2f$. Another interesting problem is to give the general solution for the mirror super-CY manifolds. This may generalize [18]. We hope to report elsewhere on these open questions.

Acknowledgments

AB would like to thank C Vafa for kind hospitality at Harvard University, where a part of this work is done. We thank J Rasmussen and A Sebbar for collaborations related to this work. This research work is supported by the program Protars III D12/25, CNRST.

References

- [1] Sethi S 1994 Super-manifolds, rigid manifolds and mirror symmetry *Nucl. Phys. B* **430** 31 (Preprint [hep-th/9404186](#))
- [2] Schwarz A 1996 Sigma-models having super-manifolds as target spaces *Lett. Math. Phys.* **38** 91 (Preprint [hep-th/9506070](#))
- [3] Witten E 2003 Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space *Preprint* [hep-th/0312171](#)

- [4] Popov A D and Sämann C 2004 On supertwistors, the Penrose–Ward transform and $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills theory *Preprint* [hep-th/0405123](#)
- [5] Neitzke A and Vafa C 2004 $N = 2$ strings and the twistorial Calabi–Yau *Preprint* [hep-th/0402128](#)
- [6] Aganagic M and Vafa C 2004 Mirror symmetry and super-manifolds *Preprint* [hep-th/0403192](#)
- [7] Kumar S P and Policastro G 2004 Strings in twistor superspace and mirror symmetry *Preprint* [hep-th/0405236](#)
- [8] Popov A D and Wolf M 2004 Topological B-model on weighted projective spaces and self-dual models in four dimensions *Preprint* [hep-th/0406224](#)
- [9] Ahn C 2004 Mirror symmetry of Calabi–Yau super-manifolds *Preprint* [hep-th/0407009](#)
- [10] Rocek M and Wadhwa N 2004 On Calabi–Yau super-manifolds *Preprint* [hep-th/0408188](#)
Rocek M and Wadhwa N 2004 On Calabi–Yau super-manifolds II *Preprint* [hep-th/0410081](#)
- [11] Zhou C 2004 On Ricci flat super-manifolds *Preprint* [hep-th/0410047](#)
- [12] Wolf M 2005 On hidden symmetries of a super gauge theory and twistor string theory *J. High Energy Phys.* JHEP02(2005)018 (*Preprint* [hep-th/0412163](#))
- [13] Seki S and Sugiyama K 2005 Gauged Linear Sigma Model on super-manifold *Preprint* [hep-th/0503074](#)
- [14] Popov A D, Saemann C and Wolf M 2005 The topological B-model on a mini-supertwistor space and supersymmetric Bogomolny monopole equations *J. High Energy Phys.* JHEP10(2005)058 (*Preprint* [hep-th/0505161](#))
- [15] Tokunaga T 2005 String Theories on flat super-manifolds *Preprint* [hep-th/0509198](#)
- [16] Ricci R 2005 Super Calabi–Yau’s and special Lagrangians *Preprint* [hep-th/0511284](#)
- [17] Belhaj A, Drissi L B, Rasmussen J, Saidi E H and Sebbar A 2005 Toric Calabi–Yau super-manifolds and mirror symmetry *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 6405–18 (*Preprint* [hep-th/0410291](#))
- [18] Hori K and Vafa C 2000 Mirror symmetry *Preprint* [hep-th/0002222](#)
- [19] Hori K, Iqbal A and Vafa C 2000 D-Branes and mirror symmetry *Preprint* [hep-th/0005247](#)
- [20] Witten E 1993 Phases of $N = 2$ theories in two dimensions *Nucl. Phys. B* **403** 159 (*Preprint* [hep-th/9301042](#))
- [21] Aganagic M and Vafa C 2000 Mirror symmetry, D-branes and counting holomorphic discs *Preprint* [hep-th/0012041](#)
- [22] Belhaj A 2002 Mirror symmetry and Landau–Ginzburg Calabi–Yau superpotentials in F-theory compactifications *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 965 (*Preprint* [hep-th/0112005](#))
- [23] Ait Ben Haddou M, Belhaj A and Saidi E H 2003 Geometric engineering of $N = 2$ CFT₄s based on indefinite singularities: hyperbolic case *Nucl. Phys. B* **674** 593–614 (*Preprint* [hep-th/0307244](#))
Ait Ben Haddou M, Belhaj A and Saidi E H 2005 Classification of $N = 2$ supersymmetric CFT₄s: indefinite series *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 1793–806 (*Preprint* [hep-th/0308005](#))
Belhaj A and Saidi E H 2004 Non simply laced quiver gauge theories in superstring compactifications *Afr. J. Math. Phys.* **1** 29–51

Chapitre 6

Dualité entre Théorie de Jauge $U(N)$ et Cordes Topologiques

Depuis son introduction en 1974 par 't Hooft [10], la limite N grand des théories de jauge $U(N)$ a constitué une source inépuisable d'inspiration en physique des hautes énergies. Parmi les multiples résultats obtenus, nous citons l'équivalence entre la limite N grand des théories de jauge et quelques cas de la théorie de cordes fermées. En effet, ce premier contact avec la théorie de cordes fut élaboré dans le contexte des cordes bosoniques non critiques résultantes du couplage entre les théories des champs conformes $c \leq 1$ à la gravité à deux dimensions [22, 122]. Cependant, la relation entre les systèmes de jauge et les cordes va au delà de l'idée originale suggérée par 't Hooft pour l'expansion N grand, puisque cette dualité fait recours à de nouvelles notions. En particulier, la limite à double échelle ("double scaling limit") du modèle matriciel $N \times N$ associé où N tend vers l'infini tout en allant en même temps à un point critique. Cette correspondance, qui utilise la formulation à deux lignes des propagateurs de la théorie de perturbation (chapitre 2), a permis de développer la théorie des supercordes type II et la théorie des cordes topologiques, attribuant ainsi un regain d'intérêt capital à ces deux domaines.

Les exemples de dualité N grand ne se sont pas arrêtés à ce niveau puisque récemment elles sont réapparues sous dans d'autres domaines. Dans le contexte de la théorie-M, par exemple, une formulation matricielle pour N grand a été fournie [123]. Depuis, d'autres dualités ont vu le jour à l'instar de la correspondance AdS/CFT [145], la relation entre la théorie de jauge de Chern-Simons et les cordes topologiques modèle A [13]. Contrairement aux exemples précédents, dans ces deux derniers travaux ; l'équivalence est permise en se restreignant complètement à l'esprit de l'idée de 't Hooft sans avoir besoin de limite particulière. Profitant des différentes idées présentées dans les chapitres précédents, l'objectif majeur de ce chapitre est d'exhiber explicitement la relation entre :

- (1) Les théories de jauge y compris les modèles matriciels et la théorie de Chern-Simons élaborées au 1^{er} et 2^{ème} chapitres de ce mémoire de thèse.
- (2) Les théories de cordes topologiques ouvertes et fermées traitées dans le 3^{ème} chapitre.

Cette étude constitue également le support de notre contribution sur les trous noirs microscopiques en connexion avec les cordes topologiques et la conjecture OSV de Ooguri, Strominger et Vafa. Nous donnons un bref résumé de ce travail [33] à la fin de ce chapitre.

Scindé en trois sections, l'organisation de chapitre est comme suit. La première section traite un aspect fondamental de la dualité entre la théorie de jauge $U(N)$ et les cordes topologiques. En d'autre terme, cette partie visualise la manière avec laquelle se manifeste cette dualité au

niveau de l'énergie libre. Dans la deuxième section, nous démontrons que les théories de jauge de Chern-Simons et les modèles matriciels avec des potentiels polynomiaux peuvent être tous deux considérés comme des théories de corde ouverte. Dans la troisième section, nous discutons la transition géométrique et le lien avec la dualité N grand. Nous terminons ce chapitre par une présentation résumée de la contribution [33].

6.1 Amplitudes F_g en théorie de jauge et théorie des cordes

6.1.1 Energies libres F_g en théorie de jauge

Comme déjà exposé dans le 2ème et 3ème chapitre, le développement perturbatif d'une théorie de jauge $U(N)$ peut être réécrite en terme d'expansion des diagrammes de Feynman à deux lignes. Bien que nous l'avons illustré sur les modèles matriciels et de la théorie de Chern-Simons, une telle étude peut être faite pour n'importe quelle théorie de jauge $U(N)$. Ce fait est dû à la représentation à deux lignes des graphes qui exploite seulement la symétrie de jauge sous-jacente. Si on dénote par $g_s = g_{YM}^2$ où g_{YM} est la constante de couplage de la théorie de jauge, on peut réécrire l'énergie libre comme

$$F(g_s, N) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} g_s^{2g-2+h} N^h, \quad (6.1)$$

Rappelons que cette énergie est notée dans le cas des modèles matriciels par (3.25) et dans le cas de la théorie de Chern-Simons par (4.32). La série (6.1) porte sur les diagrammes à deux lignes avec la topologie d'une surface de Riemann ouverte $\Sigma_{g,h}$, de genre g et h trous. Les coefficients $F_{g,h}$ peuvent être calculés en termes des règles de Feynman associées au diagramme.

6.1.2 Amplitudes F_g en théorie de corde ouverte

L'eq (6.1) peut être aussi vue comme une amplitude de la corde ouverte dans laquelle on somme sur toutes les topologies possibles de la surface d'univers $\Sigma_{g,h}$. Les facteurs N^h peuvent être interprétés comme facteurs de Chan-Paton associés au bord de la corde ouverte, portant une symétrie de jauge $U(N)$. Le couplage g_s est la constante de couplage de la corde, qui donne la contribution de $\Sigma_{g,h}$ avec un facteur g_s^{2g-2+h} . Les quantités $F_{g,h}$ sont donc interprétées comme des amplitudes de la corde ouverte sur $\Sigma_{g,h}$.

Vu ce lien, une question fondamentale s'impose :

Question : Est-il possible de formaliser de façon précise ce lien apparent entre les théories de jauge $U(N)$ et les théories de corde ouverte? Autrement dit, étant donné une théorie de jauge $U(N)$, est-il possible de trouver une théorie de corde ouverte de telle manière que les quantités $F_{g,h}$ qui apparaissent dans (6.1) puissent être également interprétées comme amplitudes de corde ouverte sur une classe de variétés cibles?

Réponse : Comme nous le constaterons sur quelques exemples, la réponse est oui. Elle implique les cordes topologiques ouvertes dont l'espace cible est une variété de Calabi-Yau à trois dimensions complexes et dont les conditions de bord sont spécifiées par des D-branes topologiques¹.

L'outil principal pour faire cette identification est la théorie de champ de corde. Autrement dit, une théorie des champs définie sur l'espace cible de la corde qui décrit sa dynamique d'espace-temps. Plutôt, nous allons avoir besoin de la théorie de champ de la corde ouverte dont l'action

¹Le modèle A est sensible à la géométrie symplectique (via des D-branes lagrangiennes ou coisotropes), et le modèle B à la géométrie complexe (via des D-branes équipées de fibrés holomorphes).

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

est (6.8). Pour le moment, il est intéressant de noter que bien qu'elle a été à l'origine de la construction de la théorie de corde bosonique ouverte, elle est également appliquée à la théorie de corde topologique. Il s'avère que pour une classe particulière de variétés de Calabi-Yau à trois dimensions complexes, la théorie de champ de la corde topologique se réduit à une théorie de jauge $U(N)$ avec g_s jouant le rôle de la constante de couplage de jauge.

Nous distinguons deux théories de corde topologiques différentes :

(1) Corde topologique type A

Le modèle type A est une théorie de corde topologique sur un Calabi-Yau à trois dimensions complexes de la forme

$$X = T^*M,$$

où M est une variété réelle de dimension trois enveloppée par N D-branes topologique. Dans ce cas-ci, la théorie de jauge n'est autre que la théorie de Chern-Simons à 3D sur M dont l'action [21].

$$S_{cs}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M Tr \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

où k est la constante de couplage et A est la connexion de jauge.

(2) Corde topologique type B

Le modèle B est une théorie de corde topologique sur une variété de Calabi-Yau X à trois dimensions complexes obtenue comme *petite* résolution de la singularité

$$(W'(x))^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 0, \quad (6.2)$$

où $W(x)$ est une fonction holomorphe polynomiale. Si $W'(x)$ est un polynôme de degré n , la petite résolution produit n 2-sphères $\{S_1^2, \dots, S_n^2\}$. Dans ce cas, on peut envelopper N_i D-branes topologiques autour de chaque 2-sphères, avec $i = 1, \dots, n$. La théorie de jauge résultante est un modèle matriciel avec multicoupure et de potentiel $W(x)$ [14]. Ce cas une situation plus générale que celle considérée dans (6.1), Puisqu'on a affaire à n 2-sphères, les extrémités des cordes ouvertes peuvent également finir ces S_i^2 . D'une manière équivalente, il y a N_i branes enveloppant les S_i^2 , pour $i = 1, \dots, n$. Dans ce cas-ci, l'amplitude de la corde ouverte prend la forme

$$F_{g, h_1, \dots, h_n}$$

et l'énergie libre totale est donnée par le développement,

$$F(g_s, N_i) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h_1, \dots, h_n=1}^{\infty} F_{g, h_1, \dots, h_n} g_s^{2g-2+h} N_1^{h_1} \dots N_n^{h_n}, \quad (6.3)$$

où $h = \sum_i h_i$.

6.1.3 Lien entre les F_g de la théorie de jauge et de la théorie de corde

La relation entre les théories de jauge $U(N)$ et les théories de corde est loin d'être complètement déterminée. Comme on a vu en détail dans le cas des modèles matriciels et de la théorie de Chern-Simons sur \mathbf{S}^3 , l'expansion d'un fat-graphe d'une théorie de jauge $U(N)$ peut être resommée en introduisant le paramètre de 't Hooft $t = g_s N$.

Resommation de 't Hooft

L'eq(6.1) est donnée par une double sommation ; une série sur g et une autre sur h . La resommation sur h conduit à une interprétation remarquable. L'énergie libre $F(g_s, t)$, peut être réécrit sous la forme

$$F(g_s, t) = \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} F_g(t) \tag{6.4}$$

en définissant

$$F_g(t) = \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} t^h. \tag{6.5}$$

Notons que dans l'expansion (6.4), le paramètre h , portant l'information sur des états de la corde ouverte, n'apparaît plus. C'est donc est une expression typique d'une théorie de corde fermée. Le couplage de jauge g_s dans (6.4) joue maintenant le rôle d'une constante de couplage de la corde fermée. Ceci mène à l'idée suggérée par [10] : la resommation eq(6.5) décrivant l'expansion des fat-graphes d'une théorie de jauge $U(N)$ peut être interprétée comme théorie de corde fermée.

Pour élaborer cette idée, il faudrait commencer par répondre aux questions suivantes :

Question 1 : Pouvons-nous donner une interprétation de corde fermée aux quantités résommées dans l'eq (6.5) vu que la théorie de jauge $U(N)$ peut être interprétée en termes d'une théorie de corde ouverte ?

Question 2 : Si la réponse est positive, quelle est alors la relation entre la théorie de corde ouverte et la théorie de corde fermée ?

Question 3 : Quelle est l'interprétation que procure la théorie de corde (fermée et ouverte) au paramètre de 't Hooft t qui apparaît comme un module dans (6.5) ?

Dualité N grand et dualité de corde ouverte/fermée

La réponse aux questions posées ci-dessus est la partie la plus difficile dans l'établissement de la correspondance entre la théorie de corde fermée et la théorie de jauge. Il y a très peu d'exemples où ceci a été effectué en détail [13, 15, 150].

Dualité N grand : C'est une correspondance entre une théorie de jauge $U(N)$ et une théorie de corde fermée basées sur l'expansion en $1/N$.

Dualité de corde ouverte/fermée : La procédure de resommation (6.5) est une relation conjecturale entre une théorie de corde ouverte et fermée, indépendamment de l'interprétation de la théorie de jauge. Une relation de ce type est souvent appelée *dualité de corde ouverte/fermée*.

Correspondance AdS/CFT

L'exemple le plus important décrivant la correspondance de théorie de corde fermée/théorie de jauge dans le sens défini ci-dessus est la correspondance AdS/CFT de [11, 145].

Dans cette correspondance, la théorie de jauge est une théorie super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$, $U(N)$ sur $\mathbf{R}^{3,1}$. Dans ce cas, trouver une réalisation de corde ouverte de l'expansion du fat-graphe est facile : c'est la limite théorie de jauge de la corde type IIB sur $\mathbf{R}^{9,1}$ avec N D3-branes enroulées autour de $\mathbf{R}^{3,1}$. Ce schéma correspond à la limite où la tension de la corde α' tend à zéro.

La théorie de Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ surgit comme théorie du volume d'univers des D-branes quand $\alpha' \rightarrow 0$. Selon Maldacena, la resommation des fat-graphes à la 't Hooft mène à une théorie de

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

corde fermée, à savoir la théorie de supercorde type IIB sur

$$AdS_5 \times S^5.$$

En effet, pour N grand, la présence des D3-branes est vue comme une déformation de la géométrie du *background*.

En d'autres termes, on peut faire disparaître les branes si on change la géométrie du *background* en même temps. Il découle alors que la correspondance AdS/CFT suggère que les dualités de corde ouverte/ fermée devraient être associées aux *transitions géométriques* reliant différents milieux géométriques pour des théories de corde ouvertes et fermées [13]. Comme nous le constaterons par la suite, l'idée de transition géométrique permet de trouver une description de la théorie de corde fermée pour la théorie de Chern-Simons sur S^3 et pour des modèles matriciels avec des potentiels polynomiaux. En employant la théorie de champ de corde, nous prouverons que ces théories de jauge peuvent être interprétées comme des théories de corde topologique ouverte sur certaines variétés de Calabi-Yau. Nous démontrerons en outre que c'est possible de trouver des dualités N grand qui fournissent une description de la théorie de corde topologique fermée de l'expansion en $1/N$ (6.5). Ces dualités sont basées sur des transitions géométriques reliant le *background* du Calabi-Yau X pour les cordes topologiques ouvertes au *background* du Calabi-Yau X' différent pour les cordes topologiques fermées. La structure des rapports entre ces théories de jauge et les cordes topologiques ouvertes et fermées est représentée dans la figure 6.1.

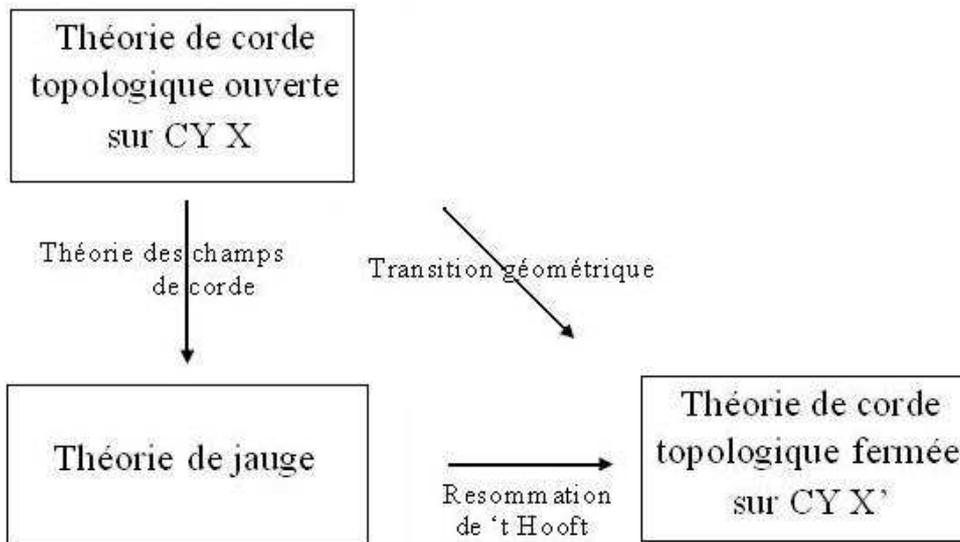


FIG. 6.1 – Ce diagramme récapitule les différentes relations entre les cordes topologiques fermées, les cordes topologiques ouvertes et les théories de jauge

6.2 Théorie des Champs de Corde et Théories de Jauge

Dans cette section, on montre que les théories de jauge de Chern-Simons et les modèles matriciels avec des potentiels polynomiaux peuvent être réalisés comme des théories de corde ouverte.

6.2.1 Théorie de champ de corde ouverte

Rappelons que la théorie de Chern-Simons et les modèles matriciels avec des potentiels polynomiaux sont des limites des théories de corde ouverte. Ces théories de jauge décrivent la dynamique d'espace-temps des cordes topologiques ouvertes sur certains variétés.

Pour exhiber ce lien, nous utiliserons la théorie de champ de corde cubique [20], voir aussi [146], que nous récapitulons brièvement ci dessous. Nous considérons d'abord la dynamique d'espace-temps des cordes bosonique ouvertes. Ensuite, nous emploierons le même modèle pour décrire les cordes topologiques.

Théorie de champ de corde cubique

En théorie de champ de corde bosonique ouverte, nous considérons la surface d'univers Σ de la corde comme étant une *bande infinie* paramétrée par une coordonnée spatiale σ ,

$$0 \leq \sigma \leq \pi$$

et une coordonnée temporelle τ ,

$$-\infty < \tau < \infty.$$

La métrique de Σ est plate, et est de la forme

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\tau^2$$

Nous considérons alors les transformations

$$\begin{aligned} x &: I \quad \rightarrow \quad X, \quad I = [0, \pi], \\ x &: (\tau, \sigma) \quad \rightarrow \quad x(\tau, \sigma) \in X, \end{aligned}$$

où X est l'espace cible de la corde. Le champ de corde Ψ est donc une fonctionnelle des configurations de la corde ouverte

$$\Psi = \Psi[x(\tau, \sigma)],$$

avec le nombre fantôme un.

Deux opérations fonctionnelles : Pour obtenir l'action décrivant la théorie des champs de corde, Witten définit deux opérations sur l'espace de corde fonctionnelle [20].

(i) Intégrale du champ de corde Ψ . Elle définit formellement en pliant la corde autour de son milieu

$$x(\sigma) \rightarrow x(\pi - \sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \pi$$

et en collant les deux moitiés :

$$x(\sigma) = x(\pi - \sigma).$$

L'intégrale fonctionnelle est donnée par la somme sur toutes les configurations des cordes comme exhibé dans la relation ci dessous ;

$$\int \Psi = \int \mathcal{D}[x(\sigma)] \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi/2} \delta[x(\sigma) - x(\pi - \sigma)] \Psi[x(\sigma)], \quad (6.6)$$

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

où $\mathcal{D}[x(\sigma)] = \Pi_\sigma dx(\sigma)$. Cette intégrale a le nombre fantôme -3 , qui est le nombre fantôme du vide. Ceci correspond au fait que dans la théorie de corde ouverte sur le disque on doit absorber trois modes zéro.

(ii) Le produit star $*$: c'est un produit associatif mais non-commutatif. Il est défini par la fonctionnelle suivante :

$$\int \Psi_1 * \dots * \Psi_N = \int \prod_{i=1}^N [\mathcal{D}x_i(\sigma)] \prod_{i=1}^N \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi/2} \delta[x_i(\sigma) - x_{i+1}(\pi - \sigma)] \Psi_i[x_i(\sigma)], \quad (6.7)$$

où $x_{N+1} \equiv x_1$. Le produit star colle les cordes en les pliant autour de leurs milieux [146], et cela ne change pas le nombre fantôme.

Action

En termes de ces opérations géométriques, l'action de champ de corde est donnée par

$$S = \frac{1}{g_s} \int \left(\frac{1}{2} \Psi * Q_{BRST} \Psi + \frac{1}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right). \quad (6.8)$$

Notons que la fonction à intégrer a le nombre fantôme 3 , alors que l'intégration a le nombre fantôme -3 . Il se déduit que l'action (6.8) a le nombre fantôme zéro. Si nous ajoutons des facteurs de Chan-Paton, le champ de corde devient une matrice $U(N)$ des champs de corde, et l'intégration dans (6.8) inclut une trace. L'action (6.8) a toutes les informations sur la dynamique de l'espace-temps des cordes bosoniques ouvertes, avec ou sans D-branes. En particulier, on peut dériver de (6.8) l'action de Born-Infeld décrivant la dynamique des D-branes [147]. Nous n'aurons pas besoin de toutes les techniques de la théorie de champ de corde pour comprendre les cordes topologiques ouvertes. Le plus intéressant pour nous est que : la corde fonctionnelle est une fonction du mode zéro de la corde (qui correspond à la position du point médian de la corde), et des oscillateurs les plus hauts. Si on découple tous les oscillateurs, la corde fonctionnel devient une fonction ordinaire de l'espace-temps, le produit $*$ devient produit habituel des fonctions, et l'intégral est l'intégration habituelle des fonctions. Le découplage des oscillateurs est, en fait, la limite de la théorie de corde. Comme nous verrons, c'est la limite appropriée pour les cordes topologiques ouvertes.

6.2.2 Théorie de Chern-Simons comme théorie de corde ouverte

Cordes topologiques ouvertes sur T^*M

Soit M une variété tridimensionnelle (réelle) arbitraire et considérons l'espace six dimensionnel donné par le fibré cotangent T^*M de M . Cet espace est une variété symplectique. Si on choisit q_a coordonnées locales sur M , $a = 1, 2, 3$, et p_a coordonnées locales pour la fibre, la forme symplectique s'écrit comme

$$J = \sum_{a=1}^3 dp_a \wedge dq_a. \quad (6.9)$$

On peut trouver une structure complexe sur T^*M tel que J soit une forme de Kähler. Par conséquent, T^*M peut être considéré comme une variété de Kähler qui est Ricci-plate, puisque la courbure du fibré cotangent annule la courbure de M . Donc c'est une variété de Calabi-Yau. Dans ce contexte, un exemple important est le fibré cotangent de la trois-sphère, $T^*\mathbf{S}^3$ peut être décrit comme le conifold déformé (5.171).

D'autre part, puisque J s'annule le long de $p_a = cte$, il s'ensuit que M est une sous-variété Lagrangienne dans T^*M , Par ailleurs, le fait d'avoir une variété de Calabi-Yau ainsi qu'une

6.2 Théorie des Champs de Corde et Théories de Jauge

sous-variété Lagrangienne à l'intérieure d'elle, nous permet de considérer un système de N D-branes topologiques enveloppant M , ce qui donne les conditions de bord de Dirichlet des cordes topologiques ouvertes sur T^*M . Notre but maintenant est de trouver l'action de l'espace-temps qui décrit la dynamique de ces D-branes topologiques, et qui n'est autre, comme nous le constaterons, que l'action de la théorie de Chern-Simons sur M . Cela s'avérera être la réalisation cherchée de la théorie de Chern-Simons en termes de cordes ouvertes.

Afin de trouver l'action de l'espace-temps, on va utiliser de nouveau l'analogie entre les cordes topologiques ouvertes et la corde bosonique ouverte que nous avons utilisé pour définir le couplage des modèles sigma topologiques à la gravité (c.-à-d. que les deux ont un opérateur nilpotent de $BRST$ et un tenseur d'énergie-impulsion qui est \mathcal{Q}_{BRST} -exact). Puisque les deux théories ont une structure similaire, la dynamique de l'espace-temps des D-branes topologique dans T^*M est également régie par (6.8), où \mathcal{Q}_{BRST} est donné dans ce cas-ci par la charge topologique définie dans (5.40), et où le produit star et l'opération d'intégration sont comme dans la corde bosonique. La construction de la théorie de champ de corde cubique exige aussi l'existence d'une symétrie du nombre fantôme qui est aussi présente dans le modèle sigma topologique comme nous l'avons discuté au chapitre 3. Parfois il est commode de redéfinir le nombre fantôme en le décalant par $-d/2$ (ici, d est la dimension de la cible). Quand $d = 3$ ceci correspond à la normalisation employée par [20] dans lequel le vide de fantôme du système bc est assigné le nombre fantôme $-1/2$.

Afin de fournir la description de la théorie de champ des cordes topologiques ouvertes sur T^*M , nous devons déterminer le spectre précis du champ de corde, l'algèbre \star et l'intégration de corde fonctionnelle pour ce modèle particulier. Comme dans la théorie de champ de la corde bosonique, nous devons considérer la description hamiltonienne des cordes topologiques ouvertes. On considère alors Σ comme une bande infinie et les transformations $x : I \rightarrow T^*M$, avec $I = [0, \pi]$, tel que ∂I est transformé à M . Le champ de Grassmann ψ , qui est une 1-forme sur Σ , peut être décomposé en $\psi = \psi_\sigma d\sigma + \psi_\tau d\tau$, mais en raison de la condition d'auto-dualité seulement une d'entre eux, ψ_τ , est indépendant. L'action est prise comme tS_A , où S_A est donné dans (5.43). Comme nous l'avons déjà montré au chapitre 4, la \mathcal{Q} -exactitude de l'action implique que, le calcul semi-classique est exact et on peut prendre la limite $t \rightarrow \infty$ pour extraire les résultats. Les relations de commutation canoniques déduites de cette action sont comme suit :

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx^i}{d\tau}(\sigma), x^j(\sigma') \right] &= -\frac{i}{t} G^{ij} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{\psi_\tau(\sigma), \chi(\sigma')\} &= \frac{1}{t} \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (6.10)$$

L'espace de Hilbert est composé des fonctionnels $\Psi[x(\sigma), \dots]$, où x est une transformation de l'intervalle comme nous venons de le décrire, et \dots se réfère aux champs de Grassmann (qui jouent ici le rôle des champs de fantôme). L'Hamiltonien est obtenu, comme d'habitude dans la théorie de corde, par

$$H = \int_0^\pi d\sigma T_{00}. \quad (6.11)$$

La partie bosonique de T_{00} est

$$tG_{ij} \left(\frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right). \quad (6.12)$$

En utilisant les relations canoniques de commutation nous trouvons alors :

$$H = \int_0^\pi d\sigma \left(-\frac{i}{t} G^{ij} \frac{\delta^2}{\delta x^i(\sigma) \delta x^j(\sigma)} + tG_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma} \right). \quad (6.13)$$

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

Nous déduisons alors que les cordes fonctionnelles avec $dx^i/d\sigma \neq 0$ ne peuvent pas contribuer : quand $t \rightarrow \infty$, ils deviennent infiniment massives et découplent du spectre. Par conséquent, la transformation $x : I \rightarrow T^*M$ doit être constante et en particulier elle doit être un point dans M . Une analyse semblable reste valable pour les champs de Grassmann. Ainsi on conclut que les cordes fonctionnelles sont des fonctions de commutation et d'anti-commutation des modes zéro que sont dénoter par q^a , χ^a , la corde fonctionnelle se réduit à

$$\Psi = A^{(0)}(q) \sum_{p=1}^3 \chi^{a_1} \cdots \chi^{a_p} A_{a_1 \dots a_p}^{(p)}. \quad (6.14)$$

Ces fonctionnelles peuvent être interprétés comme des formes différentielles sur M . Une forme différentielle de degré p aura le nombre fantôme p . Si nous avons N D-branes qui enveloppent M , les susdites formes différentielles prennent des valeurs dans la représentation adjointe du groupe de jauge (c.-à-d. ils sont évalués dans l'algèbre de Lie $U(N)$). Sur ces fonctionnelles, la \mathcal{Q} symétrie agit comme une différentielle extérieure, et $\{\mathcal{Q}, \Psi\} = 0$ si les formes différentielles sont fermées. Or, dans la théorie de champ de corde on ne se limite pas aux fonctionnels de cohomologie \mathcal{Q} . Nous calculons plutôt l'action de champ de corde pour des fonctionnels arbitraires, et alors la condition d'être dans la cohomologie \mathcal{Q} surgit comme équation de mouvement linéaire.

Maintenant on peut écrire l'action de champ de corde pour les cordes topologiques ouvertes sur T^*M avec des conditions de bord Lagrangiennes spécifiées par M . On a vu que les cordes fonctionnelles appropriées sont de la forme (6.14). Puisque dans la théorie de champ de corde le champ de corde a le nombre fantôme un, on voit que

$$\Psi = \chi^a A_a(q), \quad (6.15)$$

où $A_a(q)$ est une matrice hermitienne. En d'autres termes, le champ de corde n'est autre qu'une connexion de jauge $U(N)$ sur M . Puisque le champ de corde dépend seulement du commutation et d'anti-commutation des modes zéro, l'intégration des cordes fonctionnelles deviennent intégration ordinaire des formes sur M , et le produit star devient produits vectoriels des formes. Ceci signifie que :

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow A, & \mathcal{Q}_{BRST} &\rightarrow d \\ \star &\rightarrow \wedge, & \int &\rightarrow \int_M. \end{aligned} \quad (6.16)$$

L'action de champ de corde (6.8) est alors l'action de Chern-Simons de A , et en comparant avec (4.1) on a la relation suivante entre la constante de couplage de la corde et le couplage de Chern-Simons :

$$g_s = \frac{2\pi}{k + N}, \quad (6.17)$$

en tenant en considération le changement $k \rightarrow k + N$.

Ce résultat est certainement remarquable. Dans la corde bosonique ouverte, le champ de corde implique une infinité d'excitations de corde. Pour la corde topologique ouverte, le caractère topologique du modèle implique que toutes les excitations découplent, excepté pour le plus bas. En d'autres termes, la réduction à un nombre fini de degrés de liberté qui se produit dans les théories topologiques réduit le champ de corde à une seule excitation. Physiquement, cette théorie de corde se réduit dans ce contexte à sa limite semblable au point, puisque le seul degré de liberté approprié de la corde est son mode zéro, qui décrit le mouvement d'une particule semblable au point. La

6.2 Théorie des Champs de Corde et Théories de Jauge

théorie de champ de corde devient une théorie de champ quantique impliquant un nombre fini de champs. Cependant, comme expliqué par [21], puisque la théorie de corde topologique ouverte est une théorie qui décrit des instantons de la corde ouverte avec des conditions de bord Lagrangiennes, on doit s'attendre à avoir des corrections au résultat précité dû aux instantons non triviaux de la surface d'univers. On peut voir que les instantons $x : \Sigma \rightarrow T^*M$ tels que $x(\partial\Sigma) \subset M$ sont constants. Notons d'abord que $J = d\rho$, où

$$\rho = \sum_{a=1}^3 p_a dq_a, \quad (6.18)$$

et p_a s'annule sur M . Du fait que x est une transformation holomorphe, l'action d'instanton est alors égale à la partie topologique $-\int_{\Sigma} x^*(J)$. On écrit donc

$$\int_{\Sigma} x^*(J) = \int_{\partial\Sigma} x^*(\rho) = 0, \quad (6.19)$$

puisque $x(\partial\Sigma) \subset M$. Les transformations holomorphes avec les conditions de bord précitées sont nécessairement constantes, et il n'y a aucun instantons de la surface d'univers dans la géométrie. Par conséquent, il n'y a aucune correction d'instanton à l'action de Chern-Simons que nous avons dérivée auparavant.

l'une des conséquences immédiates de la description d'espace-temps de Chern-Simons des cordes topologiques ouvertes sur T^*M est que : le coefficient $F_{g,h}$ dans l'expansion perturbative (3.25) de la théorie de Chern-Simons sur M est donné par l'énergie libre de la théorie de corde topologique. Quelle est alors l'interprétation du fatgraph associé à $F_{g,h}$ du point de vue de la théorie de corde topologique sur T^*M ? En dépit, quoiqu'il n'existe aucun instantons de la surface d'univers dans cette géométrie, il y a des instantons dégénérés de l'aire nul dans lesquels la surface de Riemann se dégénère à un graphe dans M . Il est bien connu que l'espace des modules des surfaces de Riemann ouvertes contient ce type de configurations. Dans le cas actuel, les fatgraphs apparaissant dans les expansions en $1/N$ de la théorie de Chern-Simons sur M sont les graphes qui décrivent les instantons dégénérés de la géométrie. Ce modèle donne alors une réalisation très concrète de l'image de la corde de l'expansion en $1/N$ discutée dans la section 3.4.

Variétés de Calabi-Yau plus générales

Dans la sous-section précédente, nous avons présenté une description explicite des cordes topologiques ouvertes sur T^*M [21]. Mais il sera intéressant de traiter également le cas où l'espace cible est une variété de Calabi-Yau quelconque.

De ce fait, considérons une variété de Calabi-Yau X ainsi que quelques sous-variétés Lagrangiennes $M_i \subset X$, avec N_i D-branes enveloppées sur M_i . Dans ce cas, la description de l'espace-temps des cordes topologiques ouvertes aura deux contributions. D'abord, on a les contributions des courbes holomorphes dégénérées. Elles sont capturées par les théories de Chern-Simons sur les variétés M_i , en suivant le même mécanisme utilisé pour T^*M . Or, pour un Calabi-Yau général X [21], nous pouvons également avoir des instantons 'honest' de la corde ouverte qui contribuent à la description de l'espace-temps, qui sera des surfaces de Riemann holomorphe incorporées avec des bords finissant sur les sous-variétés Lagrangiennes M_i . Un instanton β de la corde ouverte intersectera M_i le long des courbes unidimensionnelles $\mathcal{K}_i(\beta)$ qui sont en général des noeuds à l'intérieur de M_i . L'éq (5.116) nous apprend que le bord d'un tel instanton donnera l'insertion de boucle de Wilson dans l'action de l'espace-temps de la forme $\prod_i Tr U_{\mathcal{K}_i(\beta)}$, où $U_{\mathcal{K}_i(\beta)}$ est l'holonomie de la connexion de Chern-Simons sur M_i le long du noeud $\mathcal{K}_i(\beta)$. En outre, cet instanton sera

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

mesuré par son aire (qui correspond au background de la corde fermée). On peut alors prendre en considération les contributions de tout les instantons en incluant les théories de Chern-Simons correspondantes $S_{CS}(A_i)$, qui expliquent les instantons dégénérés, couplés d'une manière appropriée aux instantons holomorphe 'honest'. L'action de l'espace-temps est alors de la forme suivante

$$S(A_i) = \sum_i S_{CS}(A_i) + \sum_\beta e^{-\int_\beta \omega} \prod_i Tr U_{\mathcal{K}_i(\beta)}, \quad (6.20)$$

où ω est la forme de Kähler complexifiée. La deuxième somme s'effectue sur les instantons holomorphe 'honest' β . Notons que toutes les théories de Chern-Simons $S_{CS}(A_i)$ ont la même constante de couplage qui est égale à la constante de couplage de la corde. Plus précisément,

$$\frac{2\pi}{k_i + N_i} = g_s. \quad (6.21)$$

Dans l'action (6.20), les instantons holomorphes 'honest' sont introduits 'à la main' et en principe on doit résoudre un problème énumératif non trivial pour les trouver. Une fois qu'ils sont inclus dans l'action, l'intégrale de chemin sur les connexions de Chern-Simons joindra les instantons dégénérés à ces instantons de la surface d'univers 'honest' : dans le cas où un instanton de la surface d'univers 'honest' finit sur un noeud \mathcal{K} , il donnera un opérateur de boucle de Wilson dans (6.20), et l'évaluation en $1/N$ de la valeur moyenne dans le vide produira tout les fatgraphs possibles Γ jointifs au noeud \mathcal{K} , produisant de cette façon les instantons partiellement dégénérés de la surface d'univers (les fatgraphs sont interprétés, comme avant, en tant qu'instantons dégénérés). Un exemple de cette situation est représenté dans la figure 6.2 [93, 135, 148, 149]. Des exemples de (6.20) seront illustrés dans les sections suivantes.

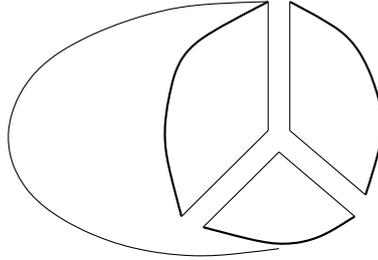


FIG. 6.2 – Cette figure montre un instanton de la surface-d'univers partiellement dégénéré de genre $g = 0$ et $h = 3$. L'instanton est fabriqué à partir d'un disque holomorphe et la partie dégénérée, qui est un fatgraph.

6.2.3 Modèle matriciel comme une théorie de corde ouverte

Théorie de Chern-Simons holomorphe

L'analyse de la théorie de champ de corde du modèle B est très semblable à celle du modèle A. De manière similaire qu'auparavant, nous devons déterminer le contenu du champ de corde, l'algèbre \star et l'intégration des cordes fonctionnelles. En analysant l'Hamiltonien, comme nous l'avons fait avec (6.13), nous trouvons encore que les cordes fonctionnelles avec $dx^i/d\sigma \neq 0$ ne

6.2 Théorie des Champs de Corde et Théories de Jauge

peuvent pas contribuer. Par conséquent, la transformation $x : I \rightarrow X$ doit être constante et, en particulier, elle doit être un point dans X . Une analyse semblable reste aussi valable pour les champs de Grassmann. Puisque $\theta = 0$ au bord, il s'ensuit que les cordes fonctionnelles sont des fonctions de commutation des modes zéro de x^i et $\eta^{\bar{I}}$, et peuvent être écrites comme

$$\Psi = A^{(0)}(x) + \sum_{p \geq 1} \eta^{\bar{I}_1} \cdots \eta^{\bar{I}_p} A_{\bar{I}_1 \cdots \bar{I}_p}^{(p)}(x). \quad (6.22)$$

Ces fonctionnelles s'interprètent comme une somme des $(0, p)$ -formes sur X . Si nous avons N D-branes qui enveloppent X , ces formes seront évaluées dans $End(E)$ (où E est un fibré holomorphe $U(N)$). La symétrie \mathcal{Q} agit sur ces fonctionnelles en tant qu'opérateur $\bar{\partial}$ de Dolbeault avec des valeurs dans $End(E)$. Notons qu'une forme différentielle de degré p aura le nombre fantôme p .

On peut maintenant écrire l'action de champ de corde pour la corde topologique ouverte type-B sur X avec N branes remplissant l'espace-temps. La corde fonctionnelle a la forme (6.22), et puisque le champ de corde a le nombre fantôme 1, nous devons avoir

$$\Psi = \eta^{\bar{I}} A_{\bar{I}}(x), \quad (6.23)$$

où $A_{\bar{I}}(x)$ est une $(0, 1)$ -forme qui prend des valeurs dans les endomorphismes d'un certain fibré vectoriel holomorphe E . En d'autres termes, le champ de corde est juste la partie $(0, 1)$ de la connexion de jauge sur E . Puisque le champ de corde dépend seulement des commutations et des anti-commutations des modes zéro, le produit star devient produit vectoriel des formes dans $\Omega^{(0,p)}(End(E))$, et l'intégration des cordes fonctionnelles devient intégration ordinaire des formes sur le produit vectoriel de X et Ω . En d'autres termes :

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow A, & \mathcal{Q}_{BRST} &\rightarrow \bar{\partial} \\ \star &\rightarrow \wedge, & \int &\rightarrow \int_X \Omega \wedge. \end{aligned} \quad (6.24)$$

L'action de champ de corde (6.8) est alors donnée par

$$S = \frac{1}{2g_s} \int_X \Omega \wedge Tr \left(A \wedge \bar{\partial} A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (6.25)$$

C'est l'action *holomorphe de Chern-Simons*. D'ailleurs, c'est une théorie de champ quantique particulière à six dimensions, mais plu tard en considérant des D-branes de dimension inférieure, nous obtiendrons des théories plus conventionnelles par le biais de la réduction dimensionnelle (6.25).

Cordes topologiques type B et modèles matriciels

Nous avons vu que la description de l'espace-temps du modèle B ouvert rempli par les branes se réduit à une théorie six-dimensionnelle (6.25). Nous verrons maintenant que, dans quelques circonstances, cette théorie se réduit à un modèle matriciel.

Considérons la théorie de champ des cordes topologiques ouvertes type-B sur la variété de Calabi-Yau (5.147). Concentrons notre intérêt à une situation où les conditions de bord de Dirichlet sont associées à \mathbb{P}^1 , en d'autres termes, il y a N D-branes topologiques enveloppant \mathbb{P}^1 . Puisque les directions normales au volume d'univers de D-brane sont non-compactes, la description de l'espace-temps peut être obtenue en considérant la réduction dimensionnelle de l'action originale de la théorie de champ de corde (6.25). Comme d'habitude dans la physique de D-brane, le

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

potentiel de jauge A se divise en potentiel de jauge sur le volume d'univers de la brane et des champs de Higgs décrivant le mouvement le long des directions non-compactes et transverses. Dans une situation géométrique non triviale comme la notre, les champs de Higgs sont des sections du fibré normal. On obtient alors trois champs différents :

$$A, \quad \Phi_0, \quad \Phi_1, \quad (6.26)$$

où A est un potentiel de jauge $(0,1)$ $U(N)$ sur \mathbb{P}^1 , Φ_0 est une section de $\mathcal{O}(-a)$, et Φ_1 est une section de $\mathcal{O}(a-2)$. Les deux champs, Φ_0 et Φ_1 , prennent des valeurs dans la représentation adjointe de $U(N)$.

Il s'avère que l'action (6.25) devient

$$S = \frac{1}{g_s} \int_{\mathbb{P}^1} Tr(\Phi_0 \bar{D}_A \Phi_1), \quad (6.27)$$

où $\bar{D}_A = \bar{\partial} + [A, \cdot]$ est la dérivé covariante anti-holomorphe. Notons que cette théorie est essentiellement un système β_γ jaugé, puisque Φ_0, Φ_1 sont des champs conformes quasi-primaires de dimensions $a/2, 1 - a/2$, respectivement.

Considérons maintenant une géométrie plus compliquée. Pour cela on commence par la variété de Calabi-Yau (5.147) avec $a = 0$, c.-à-d.

$$\mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1. \quad (6.28)$$

Dans ce cas-ci, Φ_0 est un champ scalaire sur \mathbb{P}^1 , alors que Φ_1 est une $(1,0)$ forme (puisque $K_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(-2)$). Si nous couvrons \mathbb{P}^1 avec deux ouverts de coordonnées locales z, z' reliés par $z' = 1/z$, les champs dans les deux différentes ouverts, Φ_0, Φ_1 , et Φ'_0, Φ'_1 seront reliés par

$$\Phi'_0 = \Phi_0, \quad \Phi'_1 = z^2 \Phi_1. \quad (6.29)$$

On peut considérer cette géométrie comme une famille de \mathbb{P}^1 s localisée à $\Phi'_1 = 0$ (la section zéro de la fibre ligne non triviale $\mathcal{O}(-2)$) paramétrée par $\Phi_0 = \Phi'_0 = x \in \mathbf{C}$. L'idée est d'obtenir une géométrie où nous obtenons n \mathbb{P}^1 isolés aux positions fixes de x . Pour faire ceci, nous introduisons un polynôme arbitraire de degré $n+1$ sur $\Phi_0, W(\Phi_0)$, et nous modifions les règles de collage comme suit [150] :

$$z' = 1/z, \quad \Phi'_0 = \Phi_0, \quad \Phi'_1 = z^2 \Phi_1 + W'(\Phi_0) z. \quad (6.30)$$

Avant, \mathbb{P}^1 était dans une famille paramétrée par $\Phi_0 \in \mathbf{C}$. Maintenant, on voit qu'il y a n \mathbb{P}^1 isolés localisés aux positions fixes de Φ_0 données par $W'(\Phi_0) = 0$, puisque c'est la seule manière d'avoir $\Phi_1 = \Phi'_1 = 0$.

La géométrie obtenue en imposant les règles de collage (6.30) s'interprète d'une autre façon. On pose $\Phi_0 = x$ et on définit les coordonnées

$$u = \Phi'_1, \quad v = 2\Phi_1, \quad y = i(2z'\Phi'_1 - W'(x)). \quad (6.31)$$

La dernière équation dans (6.30) s'écrit alors sous la forme

$$uv + y^2 + W'(x)^2 = 0. \quad (6.32)$$

6.2 Théorie des Champs de Corde et Théories de Jauge

C'est une géométrie singulière puisqu'il y a des singularités le long de la ligne $u = v = y = 0$ pour chaque x_* tels que $W'(x_*) = 0$. Par exemple, si $W'(x_*) = x$, (6.32) devient, après le changement $u, v \rightarrow u - iv, u + iv$.

$$u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 0. \quad (6.33)$$

C'est une autre façon d'écrire la singularité du conifold (5.176). Pour les polynômes arbitraires $W(x)$, (6.32) décrit des variétés plus générales et plus singulières de Calabi-Yau. Notons que localement, autour des points singuliers $u = v = y = 0, x = x_*$, la géométrie décrite par (6.32) ressemble à un conifold (lorsque $W''(x_*) = 0$). De même que pour le conifold résolu, la variété décrite par (6.30) est obtenue par le gonflement des singularités dans (6.32). Puisque c'est une géométrie résolue, nous la dénoterons par X_{res}^W . Dans le cas où $W'(x) = x$, la variété (6.30) est, en fait, le conifold résolu.

Dans ce qui suit, considérons la dynamique des cordes topologiques ouvertes type-B sur X_{res}^W . En particulier, on s'intéresse à une situation dans laquelle nous avons au total N D-branes de telle manière que N_i D-branes soient enroulées autour du i -ème \mathbb{P}^1 , avec $i = 1, \dots, n$. Comme auparavant, nous avons trois champs dans la représentation adjointe $U(N)$, Φ_0, Φ_1 et la connexion de jauge A . L'action décrivant la dynamique des D-branes est donnée par [151, 14]

$$S = \frac{1}{g_s} \int_{\mathbb{P}^1} Tr (\Phi_1 \bar{D}_A \Phi_0 + \omega W(\Phi_0)), \quad (6.34)$$

où ω est une forme de Kähler sur \mathbb{P}^1 avec le volume unité. Une manière rapide de constater que la modification des règles de collage dues à l'ajout du polynôme $W'(\Phi_0)$, mène au terme supplémentaire dans (6.34) est d'employer des techniques standard dans la CFT [14]. Les champs Φ_0, Φ_1 sont canoniquement conjugués et sur le plan conforme ils satisfont l'OPE

$$\Phi_0(z) \Phi_1(w) \sim \frac{g_s}{z - w}. \quad (6.35)$$

Maintenant considérons la géométrie décrite dans (6.30) en tant que deux disques (ou plans conformes) collés à travers un cylindre. Dans le cylindre, les facteurs de z sont absorbés dans la dernière équation de (6.30). L'opérateur qui met en application la transformation de Φ est

$$U = \exp \frac{1}{g_s} \oint Tr W(\Phi_0(z)) dz, \quad (6.36)$$

puisque à partir de (6.35) on obtient

$$\Phi'_1 = U \Phi_1 U^{-1}. \quad (6.37)$$

On peut également écrire

$$U = \exp \frac{1}{g_s} \int_{\mathbb{P}^1} Tr W(\Phi_0(z)) \omega, \quad (6.38)$$

où ω est localisé à une bande autour de l'équateur de \mathbb{P}^1 (comme nous le verrons immédiatement, les détails de ω sont sans importance, tant qu'il s'intègre à 1 sur la deux-sphère).

Un teste simple de l'action précitée est que les équations de mouvement mènent à l'image géométrique des D-branes enveloppants n \mathbb{P}^1 holomorphes dans la géométrie. La connexion de jauge est juste un multiplicateur de Lagrange imposant la condition

$$[\Phi_0, \Phi_1] = 0, \quad (6.39)$$

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

donc nous pouvons diagonaliser Φ_0 et Φ_1 simultanément. L'équation de mouvement de Φ_0 est simplement

$$\bar{\partial}\Phi_0 = 0, \quad (6.40)$$

et puisque nous sommes sur \mathbb{P}^1 ; alors Φ_0 est une matrice constante et diagonale. Finalement, l'équation de mouvement de Φ_1 est

$$\bar{\partial}\Phi_1 = W'(\Phi_0)\omega, \quad (6.41)$$

et pour des configurations de Φ_1 non singulière les deux côtés de l'équation doivent s'annuler simultanément, comme nous pouvons le réaliser en intégrant les deux côtés de l'équation sur \mathbb{P}^1 . Par conséquent, $\Phi_1 = 0$ et les valeurs propres constantes de Φ_0 satisfont

$$W'(\Phi_0) = 0, \quad (6.42)$$

ce qui signifie qu'ils doivent être localisés aux points critiques de $W(x)$. Généralement, nous aurons N_i valeurs propres de Φ_0 au i -ème point critique, $i = 1, \dots, n$, et c'est avec précision la configuration de D-brane que nous considérons.

Qu'est-ce qui se passe dans la théorie quantique? Pour l'analyser, nous utiliserons l'approche développée par [152] pour étudier des théories de jauge à deux dimensions. D'abord, nous choisissons la jauge abélienne maximale de Φ_0 . Autrement, nous écrivons

$$\Phi_0 = \Phi_0^{\mathbf{k}} + \Phi_0^{\mathbf{t}}$$

où $\Phi_0^{\mathbf{t}}$ est la projection sur la sous-algèbre de Cartan \mathbf{t} , et $\Phi_0^{\mathbf{k}}$ est la projection sur la partie complémentaire \mathbf{k} . La jauge abélienne maximale est définie par la condition

$$\Phi_0^{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.43)$$

qui signifie que les entrées non-diagonales de Φ_0 sont nulles. C'est en fait la même jauge déjà utilisée pour le modèle matriciel dans la base des valeurs propres. Après la fixation de jauge, les techniques habituelles de Faddeev-Popov mènent à un déterminant fonctionnelle de fantôme donné par

$$\frac{1}{N!} \text{Det}_{\mathbf{K}} (\text{ad}(\Phi_0^{\mathbf{t}}))_{\Omega^0(\mathbb{P}^1)}, \quad (6.44)$$

où l'indice inférieur \mathbf{k} signifie que l'opérateur $\Phi_0^{\mathbf{t}}$ agit sur l'espace \mathbf{k} , et le facteur de normalisation $1/N!$ est l'inverse de l'ordre du groupe de la symétrie résiduelle, à savoir le groupe de Weyl qui permute les N entrées de $\Phi_0^{\mathbf{t}}$. Après la fixation de jauge, la partie à intégrer de l'éq (6.34) s'écrit alors,

$$\text{Tr} (\Phi_1^{\mathbf{t}} \bar{\partial}\Phi_0^{\mathbf{t}} + W(\Phi_0^{\mathbf{t}})) + 2 \sum_{\alpha} A^{\alpha} \Phi_1^{-\alpha} \alpha(\Phi_0^{\mathbf{t}}), \quad (6.45)$$

où les α sont des racines, E_{α} est une base de \mathbf{k} . Nous avons utilisé l'extension suivante $\Phi_1^{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha} \Phi_1^{\alpha} E_{\alpha}$ et $A^{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha} A^{\alpha} E_{\alpha}$. On peut maintenant intégrer dehors A^{α} pour obtenir

$$\frac{1}{\text{Det}_{\mathbf{K}} (\text{ad}(\Phi_0^{\mathbf{t}}))_{\Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)}} \prod_{\alpha>0} \delta(\Phi_1^{\alpha}). \quad (6.46)$$

6.2 Théorie des Champs de Corde et Théories de Jauge

Notons que, nous avons employé la généralisation fonctionnelle de la formule standard $\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x)$. L'intégrale sur Φ_1^k est triviale. De plus en combinant l'inverse du déterminant dans (6.46) avec (6.44), on obtient

$$\frac{Det_{\mathbf{K}}(ad(\Phi_0^t))_{H^0(\mathbb{P}^1)}}{Det_{\mathbf{K}}(ad(\Phi_0^t))_{H^{1,0}(\mathbb{P}^1)}}, \quad (6.47)$$

où (comme d'habitude) les modes non-zéro s'annulent. De même, intégrant dehors Φ_1^t dans (6.45) fournit $\bar{\partial}\Phi_0^t = 0$, donc Φ_0^t doit être constante. Il est facile d'évaluer dans ce cas-ci le quotient des déterminants, d'où

$$\left[\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \right]^{h^0(\mathbb{P}^1) - h^{1,0}(\mathbb{P}^1)}, \quad (6.48)$$

où λ_i sont les valeurs propres constantes de Φ_0^t . Puisque $h^0(\mathbb{P}^1) = 1$, $h^{1,0}(\mathbb{P}^1) = 0$, nous obtenons juste le carré du déterminant de Vandermonde et la fonction de partition s'écrit comme :

$$Z = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-\frac{1}{g_s} \sum_{i=1}^N W(\lambda_i)}. \quad (6.49)$$

En principe, on doit inclure les secteurs topologiques non triviaux du champ de jauge abélien A^t afin de mettre en application la fixation de jauge (6.43) correctement [152]. Heureusement, dans ce cas-ci l'action de jauge-fixe ne dépend pas de A^t , et l'inclusion des secteurs topologiques est non pertinente. L'expression (6.49) est (jusqu'à un facteur $(2\pi)^N$) la version de jauge-fixe du modèle matriciel

$$Z = \frac{1}{vol(U(N))} \int d\Phi e^{-\frac{1}{g_s} Tr W(\Phi)}. \quad (6.50)$$

Nous avons alors dérivé un résultat étonnant [14] : l'action de la théorie de champ de corde pour les cordes topologiques B ouvertes sur la variété de Calabi-Yau décrite par (6.30) est un modèle matriciel avec le potentiel $W(\Phi)$. Comme dans le cas de la théorie de Chern-Simons, nous avons trouvé une réalisation topologique de la théorie de corde ouverte des modèles matriciels avec des potentiels polynomiales. Ce résultat peut être généralisé à des variétés plus compliquées de corde ouverte, qui s'avèrent être aussi bien décrits par des modèles matriciels [15, 16].

Amplitudes de la corde ouverte et solutions à plusieurs coupures

L'énergie libre totale $F(N_i, g_s)$ des cordes topologiques B sur le Calabi-Yau (6.30) avec $N = \sum_i N_i$ branes enroulés autour de $n \mathbb{P}^1$ est de la forme (6.3), et comme nous avons vu elle est donnée par l'énergie libre du modèle matriciel (6.50). En particulier, les coefficients F_{g, h_1, \dots, h_n} peuvent être calculés perturbativement dans le modèle matriciel. Nous devons faire attention, cependant, pour spécifier les vides classiques autour desquels on fait la théorie perturbative. Rappelons à partir de l'analyse du modèle matriciel que la solution classique qui décrit la configuration de brane est caractérisée par N_i valeurs propres de la matrice localisée au i -ème point critique du potentiel $W(x)$. Dans l'approximation de point-selle, ceci signifie que nous devons considérer une *solution de multi-coupure*, avec les valeurs propres 'condensé' autour des extremum du potentiel. Par conséquent, contrairement à la solution de multi-coupure discutée dans la section 3.2, nous avons

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

que (1) tous les points critiques de $W(x)$ doivent être considérés, et non seulement les minimum, et (2) le nombre de valeurs propres dans chaque coupure n'est pas déterminé dynamiquement comme dans (3.90), mais il est plutôt fixé pour être N_i dans la i -ème coupure, où i prend les valeurs de 1 au nombre de minimum n . En d'autres termes, l'intégrale de la densité des valeurs propres $\rho(\lambda)$ le long de chaque coupure égale un facteur de remplissage fixe $\nu_i = N_i/N$:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i-1}} d\lambda \rho(\lambda) = \nu_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.51)$$

où $N = \sum_{i=1}^n N_i$ est le nombre total de valeurs propres. Maintenant on va introduire les couplages partiels de 't Hooft

$$t_i = g_s N_i = t\nu_i. \quad (6.52)$$

Tenant compte de (3.65) et (3.75), on peut écrire (6.51) comme

$$t_i = \frac{1}{4\pi i} \oint_{A_i} y(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.53)$$

où A_i est le cycle fermé de la courbe hyperelliptique (3.77) qui entoure la coupure C_i . Pour la simplicité, supposant que toutes les t_i sont différentes de zéro, et tenant compte que $\sum_i t_i = t$, nous voyons que (6.53) donne $n - 1$ conditions indépendantes, où n est le nombre de points critiques de $W(x)$. Ces conditions, ainsi que les $n + 1$ conditions (3.88) (où s est maintenant égal à n), déterminent les positions des extrémités x_i comme fonctions des t_i et les constantes de couplages dans $W(x)$. Il est clair que la solution obtenue de cette façon n'est pas une solution d'équilibre du modèle matriciel, puisque les coupures peuvent être centrées autour des maximums locaux et les différentes coupures auront différentes valeurs du potentiel effectif. Ceci n'est pas surprenant, puisque nous ne considérons pas le modèle matriciel comme un système de mécanique quantique, mais comme une description effective du système original de brane. Les différents choix des facteurs de remplissages correspondent à différents choix des vides classiques du système de brane.

Une question subtile à propos du modèle matriciel précité est la suivante. Le champ de matrice Φ dans (6.50) vient du champ Φ_0 de modèle B, qui est un champ holomorphe. Par conséquent, l'intégrale de matrice (6.49) devrait être pris comme une intégrale contour, et afin de définir la théorie un choix de contour devrait être fait. Ceci peut être fait dans la théorie de perturbation, en choisissant par exemple un contour qui mène aux résultats habituels pour l'intégration gaussienne, et donc à ce niveau le modèle matriciel n'est pas différent du modèle matriciel hermitien habituel [14, 153]. Dans certains cas, on peut considérer (6.50) comme un modèle matriciel holomorphe [154].

La susdite description de la solution de multi-coupure fait référence à l'approximation de point-selle. Quelle est la signification des solutions de multi-coupure du point de vue de la théorie de perturbation? Pour aborder cette question, on considère le cas simple du potentiel cubique [155] :

$$\frac{1}{g_s} W(\Phi) = \frac{1}{2g_s} Tr \Phi^2 + \frac{1}{3} \frac{\beta}{g_s} Tr \Phi^3. \quad (6.54)$$

Ce potentiel a deux points critiques, $a_1 = 0$ et $a_2 = -1/\beta$. La solution de multi-coupure la plus générale aura deux coupures. Il y aura N_1 valeurs propres à $\Phi = 0$, et N_2 valeurs propres à

6.2 Théorie des Champs de Corde et Théories de Jauge

$\Phi = -1/\beta$. La fonction de partition Z du modèle matriciel est

$$Z = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d\lambda_i}{2\pi} \Delta^2(\lambda) e^{-\frac{1}{2g_s} \sum_i \lambda_i^2 - \frac{\beta}{3g_s} \sum_i \lambda_i^3}, \quad (6.55)$$

où $\Delta(\lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$ est le déterminant de Vandermonde. On peut maintenant étendre la fonction à intégrer autour du vide avec $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \dots, N_1$, et $\lambda_i = -1/\beta$ pour $i = N_1 + 1, \dots, N$. Les fluctuations sont dénotées par μ_i et ν_j , le déterminant de Vandermonde devient

$$\Delta^2(\lambda) = \prod_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq N_1} (\mu_{i_1} - \mu_{i_2})^2 \prod_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq N_2} (\nu_{j_1} - \nu_{j_2})^2 \prod_{\substack{1 \leq i \leq N_1 \\ 1 \leq j \leq N_2}} \left(\mu_i - \nu_j + \frac{1}{\beta} \right)^2. \quad (6.56)$$

Nous développons aussi le potentiel autour de ce vide et on obtient

$$W = \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{1}{2g_s} \mu_i^2 + \frac{\beta}{3g_s} \mu_i^3 \right) - \sum_{i=1}^{N_2} \left(\frac{1}{2g_s} \nu_i^2 - \frac{\beta}{3g_s} \nu_i^3 \right) + \frac{1}{6\beta^2 g_s} N_2. \quad (6.57)$$

Notons que le propagateur des fluctuations autour de $-1/\beta$ a le mauvais signe, puisque nous développons autour d'un maximum local. L'interaction entre les deux ensembles de valeurs propres, qui est donnée par le dernier facteur dans (6.56), peut être aussi inclus dans l'action. Ceci génère un terme d'interaction entre les deux bandes de valeur propre

$$W_{int} = 2N_1 N_2 \log \beta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \beta^k \sum_{i,j} \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} \mu_i^p \nu_j^{k-p}. \quad (6.58)$$

En réécrivant la fonction de partition en termes de matrices au lieu de leurs valeurs propres, nous pouvons représenter ce modèle comme modèle effective de deux matrices, impliquant une matrice Φ_1 de $N_1 \times N_1$, et une matrice Φ_2 de $N_2 \times N_2$:

$$Z = \frac{1}{\text{vol}(U(N_1)) \times \text{vol}(U(N_2))} \int d\Phi_1 d\Phi_2 e^{-W_1(\Phi_1) - W_2(\Phi_2) - W_{int}(\Phi_1, \Phi_2)}, \quad (6.59)$$

où

$$\begin{aligned} W_1(\Phi_1) &= +Tr \left(\frac{1}{2g_s} \Phi_1^2 + \frac{\beta}{3g_s} \Phi_1^3 \right), \\ W_2(\Phi_2) &= -Tr \left(\frac{1}{2g_s} \Phi_2^2 - \frac{\beta}{3g_s} \Phi_2^3 \right), \\ W_{int}(\Phi_1, \Phi_2) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} Tr \Phi_1^p Tr \Phi_2^{k-p} \\ &\quad + N_2 W(a_2) + N_1 W(a_1) - 2N_1 N_2 \ln \beta. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Ici, $Tr \Phi_1^0 = N_1$, $Tr \Phi_2^0 = N_2$, $W(a_1) = 0$ et $W(a_2) = 1/(6g_s \beta^2)$. Bien que le terme cinétique de Φ_2 ait le mauvais signe, on peut trouver une signification du model dans la théorie de perturbation en employant l'intégration gaussienne formelle, et ceci peut être justifié en fait dans le cadre des modèles matriciels holomorphe [154]. Par conséquent, la solution à deux-coupeure du modèle matriciel cubique peut être représenté formellement en termes d'un modèle effectif de deux matrices.

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

Il est simple maintenant de calculer l'énergie libre $F_{pert} = \log(Z(\beta)/Z(\beta=0))$ dans la théorie de perturbation. Elle peut être étendu comme

$$F_{pert} = -N_1 W(a_1) - N_2 W(a_2) - 2N_1 N_2 \ln \beta + \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{g \geq 0} (g_s \beta^2)^{2g-2+h} F_{g,h}(N_1, N_2), \quad (6.61)$$

où

$$F_{g,h} = \sum_{h=h_1+h_2}^{\infty} F_{g,h_1,h_2} N_1^{h_1} N_2^{h_2}$$

est un polynôme homogène en N_1 et N_2 du degré h . On trouve, jusqu'au quatrième ordre de la constant de couplage β , le résultat suivant [155] :

$$\begin{aligned} F_{pert} = & -N_1 W(a_1) - N_2 W(a_2) - 2N_1 N_2 \ln \beta \\ & + g_s \beta^2 \left[\left(\frac{2}{3} N_1^3 - 5N_1^2 N_2 + 5N_1 N_2^2 - \frac{2}{3} N_2^3 \right) + \frac{1}{6} (N_1 - N_2) \right] \\ & + g_s^2 \beta^4 \left(\frac{8}{3} N_1^4 - \frac{91}{3} N_1^3 N_2 + 59N_1^2 N_2^2 - \frac{91}{3} N_1 N_2^3 + \frac{8}{3} N_2^4 \right) \\ & + \left(\frac{7}{3} N_1^2 - \frac{31}{3} N_1 N_2 + \frac{7}{3} N_2^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.62)$$

De ce calcul perturbative on peut lire quelques premiers coefficients F_{g,h_1,h_2} . Bien sûr, cette procédure peut être généralisée, et la solution à n -coupure peut être représentée par un modèle effectif à n matrice avec les interactions entre les différentes matrices qui viennent de l'expansion du déterminant de Vandermonde. Ces interactions peuvent être également incorporées en termes de champs fantôme, comme expliqué dans [156]. Ceci permet de calculer des corrections à l'approximation de point-selle dans la théorie de perturbation. On peut aussi utiliser la solution de multi-coupure aux équations de boucle [45, 157], avec des modifications mineures, pour calculer la correction de genre 1 [155, 158, 159].

6.3 Transition Géométrique

6.3.1 Transition du conifold et dualité N grand

Après l'analyse de la dernière section, nous savons que la théorie de Chern-Simons sur \mathbf{S}^3 est une théorie de corde topologique ouverte sur $T^*\mathbf{S}^3$. Selon la procédure présentée dans la section 5.1 pour relier la théorie de corde à la théorie de jauge, la prochaine étape est de voir s'il y a une théorie de corde fermée qui mène aux (4.176) et (4.178). Comme montré par [13], la réponse est oui. L'intuition derrière le résultat de Gopakumar et Vafa est que, comme suggéré par la correspondance AdS/CFT, et comme nous avons discuté dans la section 5.1, les dualités de corde ouverte/fermée, sont liés aux transitions géométriques. Ceci suggère que nous recherchions une transition impliquant $T^*\mathbf{S}^3$. Mais on a étudié une telle transition dans la section 4.3 : dans la transition du conifold, on commence par le conifold déformé, on fait tendre le volume de \mathbf{S}^3 à zéro afin d'obtenir la singularité de conifold, après la résolutions on obtient alors le conifold résolu. Ceci a été représenté dans la figure 5.6. Puisque la théorie de Chern-Simons est une corde topologique ouverte sur la géométrie de conifold déformée avec N D-branes topologique enveloppant la trois-sphère, il est normal de conjecturer que pour N grand les D-branes induisent une transition de conifold dans la géométrie background, comme dans la correspondance AdS/CFT. On finit alors avec le conifold résolu et aucun D-branes. Mais en absence de D-branes qui imposent les conditions de bord nous avons juste une théorie de cordes topologiques fermées. Suivant ce raisonnement,

Gopakumar et Vafa ont conjecturé que *la théorie de Chern-Simons sur S^3 est équivalente à la théorie de corde topologique fermée sur le conifold résolu.*

Quelle est la relation entre les différents paramètres de la théorie de jauge et de la théorie de corde ? D'après les discussions présentées dans la section 5.1, la constante de couplage de la corde fermée est identifiée avec la constante de couplage de la corde ouverte, ou d'une manière équivalente avec la constante de couplage effective de Chern-Simons (4.164). L'autre paramètre du côté de Chern-Simons est le couplage de 't Hooft

$$t = ig_s N = xN. \tag{6.63}$$

Du côté de la corde topologique fermée, le seul paramètre qui entre dans l'écriture des amplitudes F_g est le paramètre de Kähler qui mesure la taille du \mathbb{P}^1 dans la géométrie résolue. Il est normal d'identifier les deux paramètres. Il est intéressant de noter que cette identification est également normale en raison de la correspondance AdS/CFT, où le paramètre de 't Hooft de la théorie de jauge est identifié avec un module géométrique de la cible de la corde fermée, à savoir le rayon de S^5 .

Un test non trivial de la dualité préconisée par Gopakumar et Vafa est de vérifier que l'énergie libre de la théorie de Chern-Simons $U(N)$ sur la trois-sphère est conforme à l'énergie libre des cordes topologiques fermées sur le conifold résolu. Si nous comparons le résultat pour l'amplitude $F_g(t)$ obtenu dans (4.176) avec (5.103), on voit que les amplitudes de Chern-Simons ont la forme de l'énergie libre d'une corde topologique fermée, avec $n_1^0 = 1$, avec les autres invariants de Gopakumar-Vafa sont zéro. En outre, à partir du premier terme, qui donne la contribution des transformations constantes, on trouve que $\chi(X) = 2$. C'est en effet la structure de l'énergie libre des cordes topologiques fermées sur le conifold résolu, comme montré dans (5.179), et on confirme que le paramètre de 't Hooft (6.63) est identifié avec le paramètre de Kähler. C'est un chèque remarquable de la conjecture. Une autre preuve pour la conjecture vient de l'analyse du modèle matriciel de la théorie de Chern-Simons sur S^3 de la section 3.5. Où, nous avons trouvé que le résolvant est codé dans la courbe algébrique (4.193). Cette courbe s'avère décrire la géométrie miroir du conifold résolu [160, 140], où t est de nouveau identifié avec le paramètre de Kähler. Nous voyons alors que le champ principal de la formulation du modèle matriciel de la théorie de jauge code des informations sur la géométrie cible de la description de la corde fermée. C'est l'une des nouvelles perspicacités qui apparaissent dans l'étude des dualités N grand impliquant les cordes topologiques. La conjecture de Gopakumar et Vafa peut être justifiée physiquement en faisant une analyse soigneuse de la description de la surface d'univers des cordes topologiques impliquées dans la dualité [39]. Elle peut être également prouvée en considérant la transition géométrique dans le contexte de la théorie de supercorde type II [161] et en la soulevant à la théorie M [162, 163].

6.3.2 Incorporation des boucles de Wilson

Comme nous avons discuté en détail au chapitre 3, la richesse de la théorie de Chern-Simons sur S^3 est due aux opérateurs de boucle de Wilson le long des noeuds. Comment incorporons-nous des boucles de Wilson dans l'image de la corde fermée que nous avons développée ? Considérons l'expansion en $1/N$ (4.179) des valeurs moyennes dans le vide des boucles de Wilson liées. Formellement, elle peut être considéré comme une expansion de la corde ouverte, et $W_{\vec{k},g}(t)$ peut être interprété comme amplitudes dans une théorie de corde ouverte de genre g et avec $h = |\vec{k}|$ trous (sommé sur toutes les classes de volume possibles). Selon cette interprétation, la boucle de Wilson

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

crée un 1-cycle dans l'espace cible où les bords des surfaces de Riemann peuvent finir. Le vecteur \vec{k} indique les nombres d'enroulement des bords comme suit : il y a k_j bords enveloppant j fois le 1-cycle associé à la boucle de Wilson. La fonction génératrice pour les valeurs moyenne dans le vide liées (4.157) est interprétée comme l'énergie libre totale d'une corde ouverte. Les cordes ouvertes qui sont appropriées à l'interprétation de la corde des amplitudes de boucle de Wilson ne devraient pas être confondues avec les cordes ouvertes que nous avons associées à l'expansion (6.1). Les cordes ouvertes (4.179) devraient être considérées comme un secteur de la corde ouverte dans la théorie de la corde fermée associée à l'expansion (6.5). Cette interprétation de la corde ouverte des boucles de Wilson est, en fait, valide pour n'importe quelle théorie de jauge $U(N)$ avec une description de la corde fermée.

Dans le cas de la théorie de Chern-Simons sur \mathbf{S}^3 , puisque la description de corde implique les cordes topologiques, il est normal de supposer que les boucles de Wilson vont être décrites par les cordes topologiques ouvertes dans le conifold résolu, et ceci signifie que nous avons besoin d'une sous-variété Lagrangienne qui spécifie les conditions de bord pour les cordes [83]. Afin de donner des conditions de bord pour les cordes ouvertes dans le conifold résolu, Ooguri et Vafa ont construit une sous-variété Lagrangienne naturelle $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ dans $T^*\mathbf{S}^3$ pour n'importe quel noeud \mathcal{K} dans \mathbf{S}^3 . Cette construction est plutôt canonique, et elle s'appelle le fibré conormal du \mathcal{K} . Les détails sont comme suit : supposons qu'un noeud \mathcal{K} est paramétrisé par une courbe $q(s)$, où $s \in [0, 2\pi]$. Le fibré conormal de \mathcal{K} est l'espace

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}} = \left\{ (q(s), p) \in T^*\mathbf{S}^3 \mid \sum_a p_a \dot{q}_a = 0, \quad 0 \leq s \leq 2\pi \right\} \quad (6.64)$$

où p_a sont des coordonnées pour le fibré cotangent, et \dot{q}_a dénotent les dérivés par rapport à s . Cet espace est une fibration \mathbb{R}^2 du noeud lui-même, où la fibre sur le point $q(s)$ est donnée par le sous-espace bidimensionnel de $T_{q(s)}^*\mathbf{S}^3$ des plans orthogonaux à $\dot{q}(s)$. $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ a, en fait, la topologie de $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, et intersecte \mathbf{S}^3 le long du noeud \mathcal{K} .

On peut maintenant considérer, en même temps N branes enveloppant \mathbf{S}^3 et un ensemble de M probe branes enveloppant $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$. Comme d'habitude quand nous avons deux ensembles de D-branes, nous avons trois types différents de cordes : les cordes avec les deux extrémités sur les N branes sont décrites par la théorie de Chern-Simons $U(N)$ sur \mathbf{S}^3 , comme nous avons discuté avant. De la même manière, les cordes avec les deux extrémités sur les M branes sont décrites par la théorie de Chern-Simons $U(M)$ sur $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$. Mais il y a un nouveau secteur dû aux cordes étendues entre les N branes et les M branes. Pour étudier ces cordes, on peut faire une analyse semblable à celle qu'on a fait dans la sous-section 5.2.2. D'abord, on impose que $dx^i/d\sigma = 0$. Par conséquent, x^i doit être une constante, et puisque les extrémités de la corde se trouvent sur différentes sous-variétés, la seule possibilité est que $x^i \in \mathbf{S}^3 \cap \tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$. Une analyse semblable se tient pour les champs de Grassmann, et on constate alors que les cordes fonctionnels décrivant le nouveau secteur des cordes sont une fonction d'un seul mode zéro de commutation q qui paramétrise \mathcal{K} , et un seul mode zéro d'anti-commutation χ . En d'autres termes,

$$\mathcal{A} = \phi(q) + \chi\xi(q), \quad (6.65)$$

où ϕ est un champ scalaire complexe dans la représentation bifondamentale (N, \overline{M}) , et vie dans l'intersection des deux branes, \mathcal{K} . Le fait que le scalaire est complexe est dû au fait que nos cordes sont orientées, et nous devons considérer un scalaire réel dans la représentation (N, \overline{M}) ainsi qu'un autre scalaire réel dans la représentation (\overline{N}, M) , que nous pouvons mettre ensemble comme un

scalaire complexe dans une des représentations. L'opérateur de \mathcal{Q} est le différentiel extérieur d sur \mathbf{S}^1 .

Comme nous avons expliqué en haut, le champ de corde est la partie du fonctionnel ci-dessus avec le nombre fantôme décalé par $-1/2$. Cependant, ce nombre fantôme décalé diffère de celle dans \mathbf{S}^3 , et pour une forme différentielle du degré p elle est donnée par $p - 1/2$. Ceci est parce que la cible est maintenant \mathbf{S}^1 avec $d = 1$. Par conséquent, le champ qui survie dans ce cas-ci est le scalaire $\phi(q)$, ce qu'est compatible avec le fait que, puisque la dynamique de l'espace-temps est sur un cercle et puisque $\mathcal{Q} = d$, le terme cinétique de l'action de champ de corde (6.8) est non triviale seulement si le champ de corde est un scalaire. L'action totale pour $\phi(q)$ est $\oint_{\mathcal{K}} \bar{\phi} d\phi$. Cependant, il y a aussi deux champs de jauge fondamentaux qui réagissent réciproquement avec les facteurs de Chan-Paton aux extrémités des cordes. Ce sont la connexion A de jauge $U(N)$ sur \mathbf{S}^3 , et la connexion \tilde{A} de jauge $U(M)$ sur $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$. Les scalaires complexes se couples aux champs de jauge de la manière standard,

$$\oint_{\mathcal{K}} Tr \left(\bar{\phi} A \phi - \phi \tilde{A} \bar{\phi} \right). \quad (6.66)$$

Ici, nous considérons \tilde{A} comme une source. Si nous intégrons dehors ϕ nous obtenons

$$\exp \left[-\log \det \left(\frac{d}{ds} + \sum_a \left(A_a - \tilde{A}_a \right) \frac{dq_a}{ds} \right) \right], \quad (6.67)$$

qui peut être facilement évalué comme

$$\exp [-Tr \log (1 - U \otimes V)] = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Tr U^n Tr V^n \right\}, \quad (6.68)$$

où U, V^{-1} sont les holonomies de A, \tilde{A} autour du noeud \mathcal{K} , et nous avons laissé tomber une constante totale. De cette façon, nous obtenons l'action effective pour le champ A

$$S_{CS}(A) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Tr U^n Tr V^n, \quad (6.69)$$

où $S_{CS}(A)$ est l'action de Chern-Simons pour A . Par conséquent, en présence des M branes, l'action comporte une insertion de l'opérateur d'Ooguri-Vafa qui a été présenté dans (4.152). Puisque nous regardons les M branes comme une probe, l'holonomie V est une source arbitraire. Le terme supplémentaire dans (6.69) peut être interprétée comme venant d'un anneau de longueur zéro interpolant entre les deux ensembles de D-branes. Plus tard, nous considérerons une généralisation simple de ce qui précède pour un anneau de longueur finie.

Maintenant nous allons passer à la transition géométrique de ce système, où les N branes disparaissent, et la géométrie devient le conifold résolu. Cependant, les M branes sont toujours présentes. Il est naturel de conjecturer qu'ils enveloppent maintenant une sous-variété Lagrangienne $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ de $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui peut être obtenu à partir de $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}$ par la transition géométrique. Le résultat final est l'existence d'une transformation entre des noeuds dans \mathbf{S}^3 et des sous-variétés Lagrangiennes dans $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$:

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{K}}. \quad (6.70)$$

De plus, on a $b_1(\mathcal{C}_{\mathcal{K}}) = 1$. Cette conjecture est clairement bien motivée en physique. $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est construit explicitement quand \mathcal{K} est le noeud trivial [83], Labastida et all ont proposés dans

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

[164] des sous-variétés Lagrangiennes pour certains noeuds et entrelacs algébriques (noeuds de tore y compris). Finalement, [165] ont construit une transformation des noeuds aux sous-variétés Lagrangiennes dans le conifold résolu pour une large classe de noeuds.

La sous-variété Lagrangienne $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ dans la géométrie résolue donne avec précision le secteur de la corde ouverte qui est nécessaire afin de prolonger la dualité N grande aux boucles de Wilson. L'énergie libre $F(V)$ des cordes topologiques ouvertes (5.120) avec des conditions de bord indiqués par $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est identique à l'énergie libre de la théorie déformée de Chern-Simons avec l'action (6.69), qui est donnée par (4.157) [83]. Nous avons alors la conjecture suivante :

$$F(V) = F_{CS}(V). \quad (6.71)$$

Dans cette équation, la partie gauche dénote l'énergie libre de la corde topologique ouverte associée à $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, et la partie droite dénote l'énergie libre de Chern-Simons associée à l'opérateur d'Ooguri-Vafa du noeud \mathcal{K} . Notons que, puisque $b_1(\mathcal{C}_{\mathcal{K}}) = 1$, les secteurs topologiques des transformations avec des nombres d'enroulement positifs correspondent aux vecteurs \vec{k} marquant les valeurs moyennes dans le vide connectées, et on trouve

$$i^{|\vec{k}|} \sum_{g=0}^{\infty} F_{g, \vec{k}}(t) g_s^{2g-2+|\vec{k}|} = -\frac{1}{\prod_j j^{k_j}} W_{\vec{k}}^{(c)}. \quad (6.72)$$

Il est supposé en outre qu'il y a une continuation analytique de $F(V)$ de nombres d'enroulement négatifs aux positifs de telle manière que l'égalité (6.71) se tienne en général. Une autre manière utile d'énoncer la correspondance (6.71) est d'employer la fonction de partition totale des cordes topologiques ouvertes (5.142) au lieu de l'énergie libre. La dualité entre les amplitudes de la corde ouverte et les valeurs moyennes de boucle de Wilson s'écrit simplement

$$Z_R = W_R(\mathcal{K}), \quad (6.73)$$

où Z_R a été présenté dans (5.142) et $W_R(\mathcal{K})$ est l'invariant de Chern-Simons du noeud \mathcal{K} dans la représentation R .

Quand \mathcal{K} est le noeud trivial dans la trois-sphère, la conjecture d'Ooguri et Vafa peut être évalué en détail [83, 133]. Pour des noeuds et des entrelacs plus généraux, l'énergie libre de la corde ouverte n'est pas connue, mais on peut tester la dualité indirectement en vérifiant que le côté de Chern-Simons satisfait les propriétés structurelles des amplitudes de la corde ouverte que nous avons expliquées dans la sous-section 4.2.4.

6.3.3 Transitions géométriques pour des variétés toriques plus généraux

La dualité entre Chern-Simons sur \mathbf{S}^3 et les cordes topologiques fermées sur le conifold résolu donne une très bonne réalisation de la dualité de théorie de jauge/corde. Cependant, du point de vue 'gravité' nous n'apprenons pas beaucoup au sujet de la géométrie de la corde fermée, puisque le conifold résolu est tout à fait simple (on rappelle qu'il a seulement un invariant non trivial de Gopakumar-Vafa). Il serait très intéressant de trouver une théorie de jauge topologique dual à des géométries plus compliqués, comme ceux que nous avons discutés dans la section 4.3, de telle manière que nous pourrions utiliser notre connaissance de théorie de jauge pour nous renseigner sur les invariants énumératifs des cordes fermées, et sur des cordes fermées en général. L'idée de prolonger la transition géométrique de Gopakumar et Vafa a été commencé par [135]. Leur idée fondamentale était de construire les géométries qui contiennent localement $T^*\mathbf{S}^3$, et appliquer les transitions géométriques aux géométries duaux où les conifolds déformés sont remplacés par les

conifolds résolus. Remarquablement, une grande classe des variétés toriques non-compactes peut être réalisée de cette façon [93, 149]. Dans cette section nous présenterons quelques exemples où des amplitudes de la corde fermée peuvent être calculées en employant cette idée.

Les géométries que nous avons discutées dans la section 4.2 sont des fibrations $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^3 , qui contiennent des deux-sphères (représentées par les bords compacts de la géométrie). Dans cette section nous construirons les géométries avec la même structure de fibration qui contiennent des trois-sphères, et pouvons être reliés par une transition géométrique à certaines géométries toriques que nous avons analysés dans la section 4.3.

Rappelons de la discussion de la sous-section 4.3.4, que le conifold déformé a la structure d'un fibration $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^3 qui peut être codé dans un graphe non-planaire comme dans la figure 5.4. Les lieux de dégénérescence des cycles de la fibre torique sont représentés dans ce graphe par les lignes droites, alors que \mathbf{S}^3 est représenté par une ligne tirée joignant ces lieux. Cette procédure graphique peut être généralisée, et il est facile de construire des fibrations $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ plus généraux de \mathbb{R}^3 en spécifiant des lieux de dégénérescence dans un diagramme qui représente la base \mathbf{R}^3 . Un exemple simple est montré dans la figure 6.3. Cette géométrie contient deux \mathbf{S}^3 s, représentés par des lignes tirées. Ces trois-sphères sont également construites comme fibrations torique sur l'intervalle, et les cycles qui dégènèrent aux extrémités peuvent être lu du graphe. En fait, tous les deux sont décrits par un fibration \mathbf{T}^2 où les (0.1) cycles s'effondrent à un extrémité, et les (1.0) cycles s'effondrent à l'autre extrémité. Comme nous avons expliqué dans la sous-section 4.3.3, ceci donne un dédoublement de Heegaard de la trois-sphère le long des tores solide. Ces tores sont collés ensemble par la transformation S qui relie un des cycles s'effondrants à l'autre.

Nous pouvons construire aussi des géométries qui contiennent des trois-variétés plus généraux. Si une variété M admet un dédoublement de Heegaard le long des deux tores solides, elle sera indiquée par une matrice V_M de $SL(2, \mathbf{Z})$ transformant le (p_L, q_L) cycle d'un \mathbf{T}^2 au (p_R, q_R) cycle de l'autre \mathbf{T}^2 . D'une manière équivalente, M peut être obtenu comme fibration torique sur un intervalle où les (p_L, q_L) et (p_R, q_R) cycles dégènèrent aux extrémités, comme nous avons expliqué dans la section 4.3 dans le cas simple du (1.0) et (0.1) cycles. La géométrie locale T^*M sera décrite par deux lignes de recouvrement avec les pentes $-p_L/q_L$ et $-p_R/q_R$. La ligne tirée les joignant représentera la trois-variété M .

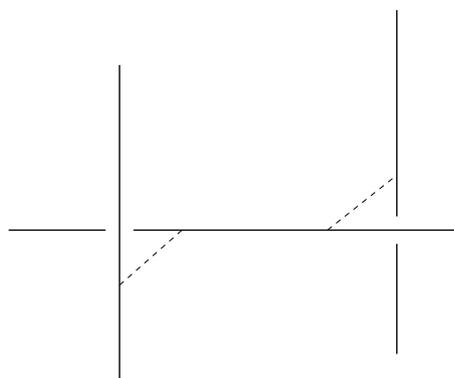


FIG. 6.3 – Une variété de Calabi-Yau qui est une fibration $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^3 . Les lignes tirées représentent \mathbf{S}^3 s.

Étant donné un graphe comme celui dans la figure 6.3, on peut essayer d'utiliser la transition de conifold 'localement', comme a été expliqué par [135]. La susdite géométrie, par exemple, contient

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

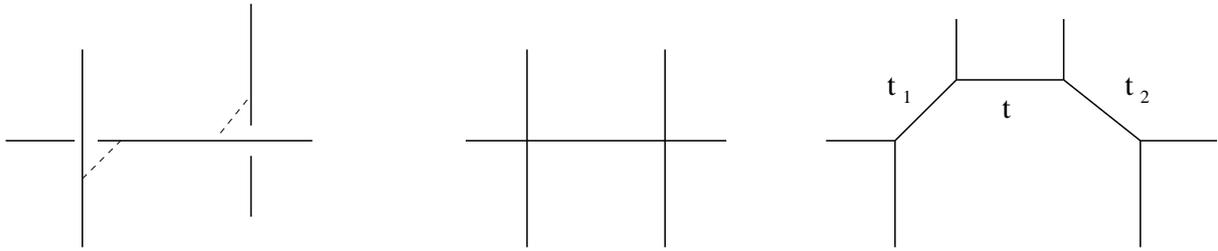


FIG. 6.4 – Cette figure montre la transition géométrique du Calabi-Yau montré dans la figure 6.3. Dans la géométrie à gauche il y a deux 3 sphères, représenté par des lignes brisées. La géométrie intermédiaire est singulière et la figure à droit montre le graphe planaire associé au Calabi-Yau torique après la transition. Il contient trois P^1 s avec des paramètres de Kahler t_1, t_2 et t .

deux conifolds déformés avec leurs trois-sphères correspondantes, donc il y a une transition géométrique où les trois sphères se contractent à un point et alors les singularités correspondantes sont gonflées pour donner une géométrie résolue. Cette transition géométrique est représentée dans la figure 6.4. La géométrie résolue est torique, et elle peut être développée en collant quatre sommets trivalents, comme nous avons expliqué dans la section 4.3. Elle a deux classes de Kähler correspondant aux deux 2-sphères gonflées, dénotées par t_1, t_2 (voir la figure 6.4). Elle contient également une troisième 2-sphère associée aux pattes horizontales intermédiaires, avec le paramètre de Kähler t . Bien que nous nous soyons concentrés sur l'exemple représenté dans la figure 6.3, il est clair que la philosophie générale est : on considère une géométrie 'déformée' et on fait des transitions géométriques 'localement'. La géométrie 'résolue' résultante sera une variété de Calabi-Yau torique du même type que celle discutée dans la section 4.3. Le graphe planaire décrivant la géométrie résolue peut être reconstruit du graphe non-planaire décrivant la géométrie déformée.

Nous utiliserons maintenant la transition géométrique généralisée que nous avons trouvée dans la dernière sous-section afin de calculer les amplitudes de la corde topologiques. D'abord, on enveloppe N_i branes, $i = 1, 2$, autour de deux S^3 s de la géométrie déformée représentée dans la figure 6.3. Quelle est alors l'action topologique effective décrivant les cordes ouvertes résultantes ? Puisque cette géométrie n'est pas globalement de la forme T^*M , alors nous sommes dans la situation décrite dans la section 5.2 : pour les cordes ouvertes avec les deux extrémités sur le même S^3 , la dynamique est décrite par la théorie de Chern-Simons avec le groupe de jauge $U(N_i)$, donc nous aurons deux théories de Chern-Simons avec les groupes $U(N_1)$ et $U(N_2)$. Cependant, il y a un nouveau secteur des cordes ouvertes étirées entre les deux trois-sphères : ce sont les instantons non-dégénérés qui apparaissent dans (6.20).

Au lieu de décrire ces instantons de la corde ouverte en termes géométriques, il vaut mieux d'utiliser la physique d'espace-temps associée à ces cordes. Une situation semblable a été considérée quand nous avons analysé l'incorporation des boucles de Wilson dans la transition géométrique. Là nous avons deux ensembles de D-branes intersectés, donnant un champ scalaire complexe sans masse vivant dans l'intersection et dans la représentation bifondamentale des groupes de jauge. Dans la situation représentée dans la figure 6.3, les mêmes arguments indiquent qu'il y a un scalaire complexe ϕ dans la représentation (N_1, \bar{N}_2) , correspondant aux cordes bifondamentales tendues entre les deux ensembles de D-branes. La différence de la situation que nous avons considérée avant est que ce scalaire complexe est maintenant massif, puisque les cordes ont une longueur finie, et sa masse est proportionnelle à la 'distance' entre les deux trois-sphères. Cette longueur

est mesurée par un paramètre de Kähler complexifié qui sera dénoté par r . Le terme cinétique aura maintenant un terme supplémentaire de la forme

$$-r \oint_{\mathbf{S}^1} \bar{\phi} \phi. \tag{6.74}$$

Nous pouvons maintenant intégrer dehors ce champ scalaire complexe comme nous avons fait dans (6.68) pour obtenir la correction aux actions de Chern-Simons sur les trois-sphères dues à la présence du nouveau secteur des cordes ouvertes :

$$\mathcal{O}(U_1, U_2; r) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nr}}{n} \text{Tr} U_1^n \text{Tr} U_2^n \right\}, \tag{6.75}$$

où $U_{1,2}$ sont les holonomies des champs de jauge autour du \mathbf{S}^1 dans (6.74). L'opérateur \mathcal{O} peut être également interprété comme amplitude pour un anneau primitif d'aire r ainsi que ses multicouvertures, qui sont marqués par n . Cet anneau 'connecte' les deux \mathbf{S}^3 , c.-à-d. une de ses bords est un cercle dans une trois-sphère, et l'autre bord est un cercle dans l'autre sphère. La somme sur n dans (6.75) est précisément la somme sur les instantons de la corde ouverte dans le deuxième terme de (6.20), pour cette géométrie particulière.

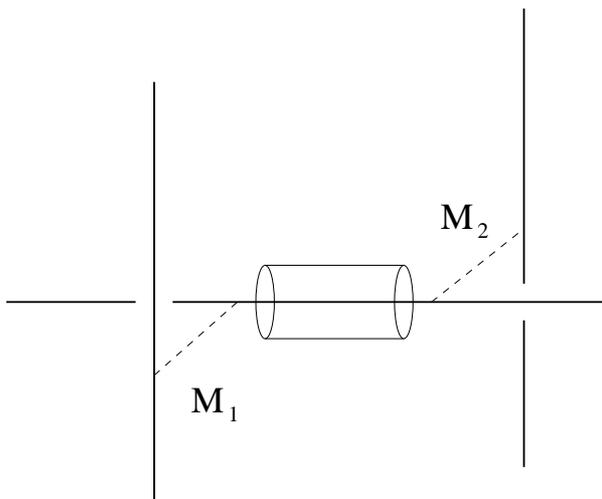


FIG. 6.5 – Seuls les instantons non-dégénéré qui contribuent à la géométrie de la figure 6.3 viennent d'un annulus s'étendant le long du lieu de dégénérescence.

Le problème maintenant est de déterminer combien de configurations comme celle-ci contribue dans l'amplitude totale. Il s'avère que les seules contributions viennent des cordes ouvertes s'étendant le long du lieu de dégénérescence, c.-à-d. le long des bords du graphe qui représente la géométrie [148, 149, 93]. Ce résultat simplifie énormément le problème, et donne une description précise de tous instantons non-dégénéré contribuant dans cette géométrie : ils sont des anneaux s'étendant le long des lignes fixes de l'action de \mathbf{T}^2 , ainsi que leurs multicouvertures, et \mathbf{S}^1 dans (6.74) est la fibre sur la coté connectant M_1 et M_2 . Ceci est illustré dans la figure 6.5. L'action décrivant la dynamique de D-branes topologique dans l'exemple que nous avons considéré en haut est alors

$$S = S_{CS}(A_1) + S_{CS}(A_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nr}}{n} \text{Tr} U_1^n \text{Tr} U_2^n, \tag{6.76}$$

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

où A_i sont des connexions de jauge $U(N_i)$ sur $M_i = \mathbf{S}^3$, $i = 1, 2$, et U_i sont les holonomies correspondants autour de \mathbf{S}^1 . Il y a une manière très commode d'écrire l'énergie libre de la théorie avec la susdite action. D'abord, notons que, en suivant les mêmes étapes qui ont mené à (4.154), on peut écrire l'opérateur (6.68) comme

$$\mathcal{O}(U_1, U_2; r) = \sum_R \text{Tr}_R U_1 e^{-lr} \text{Tr}_R U_2, \quad (6.77)$$

où l dénote le nombre de boîtes de la représentation R . Dans la situation représentée dans la figure 6.5, nous voyons que les bords de l'anneau donnent un noeud en M_1 , et un autre noeud en M_2 . Par conséquent, l'énergie libre totale peut être écrite comme :

$$F = F_{CS}(N_1, g_s) + F_{CS}(N_2, g_s) + \log \sum_R e^{-lr} W_R(\mathcal{K}_1) W_R(\mathcal{K}_2), \quad (6.78)$$

où $F_{CS}(N_i, g_s)$ dénote l'énergie libre de la théorie de Chern-Simons avec le groupe de jauge $U(N_i)$. Ceux-ci correspondent aux instantons dégénérés qui viennent de chacune des 2-sphères. Bien sûr, afin de calculer (6.78) nous avons besoin de quelque information supplémentaire : nous

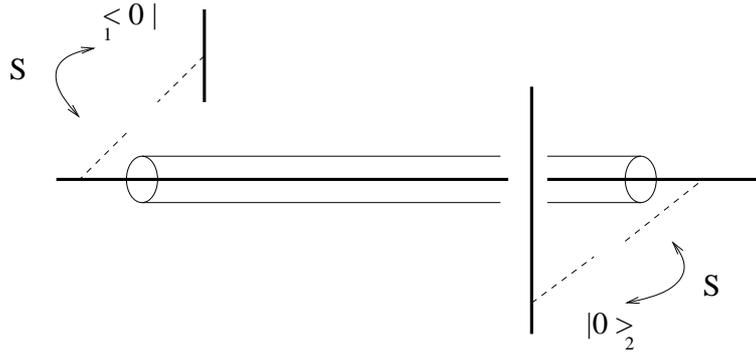


FIG. 6.6 – La géométrie de la figure 6.3 peut être coupée en trois parties.

devons savoir est ce que les noeuds \mathcal{K}_i sont topologique, et aussi s'il y a un 'framing' induit par la géométrie. Il s'avère que l'on peut répondre a ces questions si nous évaluons l'intégrale de chemin par une procédure de découpage-et-collage. La géométrie des noeuds est alors codée dans la géométrie du lieu de dégénérescence. L'évaluation procède comme suit : on coupe la géométrie en trois morceaux, comme indiqué dans la figure 6.6, par le dédoublement des deux 3-sphères du tores solide. Le premier morceau vient des tores incorporés dans la géométrie totale sans l'insertion, obtenue en divisant M_1 . Ceci donne l'état ${}_1\langle 0|$ dans $\mathcal{H}_1^*(\mathbf{T}^2)$, où l'indice 1 fait référence à l'espace de Hilbert de la théorie de Chern-Simons $U(N_1)$ sur M_1 . De même, le troisième morceau est un autre tore solide de la division de M_2 , et donne l'état $|0\rangle_2$. L'intégrale de chemin avec l'insertion de $\mathcal{O}(U_1, U_2; r)$ produit l'opérateur suivant dans le formalisme canonique :

$$\mathcal{O} = \sum_R |R\rangle_1 e^{-lr} {}_2\langle R| \in \mathcal{H}_1(\mathbf{T}^2) \otimes \mathcal{H}_2^*(\mathbf{T}^2), \quad (6.79)$$

où $|R\rangle$ est l'état de Chern-Simons que nous avons construit au chapitre 3, et nous avons introduit des indices pour les différents espaces de Hilbert. Le collage est fait, comme avant, par la transformation S des deux côtés, et la fonction de partition totale est alors donné par ${}_1\langle 0| S \mathcal{O} S |0\rangle_2$

ainsi nous trouvons

$$Z(g_s, N_{1,2}, r) = \sum_R {}_1\langle 0|S|R\rangle_1 e^{-lr} {}_2\langle R|S|0\rangle_2. \quad (6.80)$$

On comparons avec (6.78), nous voyons que

$$W_R(\mathcal{K}_i) = \frac{S_{0R}}{S_{0R}}(g_s, t_i), \quad i = 1, 2, \quad (6.81)$$

où g_s est la constant de couplage de la corde ouverte $2\pi/(k_i + N_i)$ (qui est le même pour les deux théories de Chern-Simons, voir (6.21)) et $t_i = g_s N_i$ sont les paramètres de 't Hooft des théories de Chern-Simons $U(N_i)$. Ceci signifie que $\mathcal{K}_{1,2}$ sont des noeuds triviaux avec 'framing' nul dans les 3-sphères $M_{1,2}$, respectivement. Géométriquement, chacune des bords de l'anneau dans la figure 6.5 crée une ligne de Wilson le long du cycle non-contractible du tore solide le long desquels nous divisons la trois-sphère. Que va-t-il passer maintenant si nous passons par la transition géométrique de la figure 6.4? Comme dans le cas étudié par Gopakumar et Vafa, les paramètres de 't Hooft deviennent les paramètres de Kähler t_1, t_2 dans le diagramme torique de la figure 6.4. Il y a un troisième paramètre de Kähler t dans la géométrie torique après la transition. Il s'avère que ce paramètre est lié au paramètre r apparaissant dans (6.80)[148] comme suit :

$$t = r - \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad (6.82)$$

Cette relation est nécessaire afin d'obtenir une énergie libre de la forme attendue, avec une limite bien définie $t_{1,2} \rightarrow \infty$. L'énergie libre totale de la variété torique résultante peut être obtenue à partir de (6.78) et (6.81), et elle peut s'écrire comme

$$F = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d \left(2 \sin \frac{dg_2}{2}\right)} \left\{ e^{-dt_1} + e^{-dt_2} + e^{-dt} \left(1 - e^{-dt_1}\right) \left(1 - e^{-dt_2}\right) \right\}. \quad (6.83)$$

De cette expression nous pouvons lire les invariants de Gopakumar-Vafa de la variété torique. Notons que (6.83) donne l'énergie libre des cordes topologiques fermées pour tous les genres. En d'autres termes, la solution non-perturbative de la théorie de Chern-Simons (qui nous permet de calculer exactement (6.81)) donne la réponse pour tout-genre à l'amplitude de la corde topologique. C'est l'un des aspects les plus importants de cette approche à la théorie de corde topologique.

On peut considérer d'autres variétés de Calabi-Yau non-compactes et obtenir différentes amplitudes de la corde fermée et ouverte en employant ces transitions géométriques généralisées [93, 149]. Cependant, cette procédure devient gênante, puisque dans certains cas on doit prendre des limites appropriées des amplitudes afin de reproduire les réponses cherchées. Le problème sous-jacent de cette approche est que nous prenons comme composante de base pour la géométrie résolue le vertex tétravalent qui correspond au conifold résolu. Cependant, la vraie composante est le vertex trivalent montré dans la figure 5.1, qui correspond à \mathbf{C}^3 . Dans la prochaine section nous verrons comment on peut définir une amplitude associée à ce vertex trivalent qui à permet de récupérer n'importe quel amplitude de la corde topologique fermée ou ouverte pour les géométries toriques non-compactes.

6.3.4 Modèles Matriciels et transitions géométriques

Jusqu'ici, nous avons analysé des transitions géométriques pour la théorie de Chern-Simons et les cordes topologiques type-A. Retournons maintenant au modèles matriciels et les cordes

CHAPITRE 6. DUALITÉ ENTRE THÉORIE DE JAUGE $U(N)$ ET CORDES TOPOLOGIQUES

topologiques type-B. Dans la section précédente nous avons vu que les amplitudes de la corde topologique ouverte sur la variété de Calabi-Yau X_{res}^W sont calculées par un modèle matriciel de multi-coupure dont la solution planaire (ou, d'une manière équivalente, sa configuration de champ principale) est donné par une courbe hyperelliptique

$$y^2 = W'(x)^2 - R(x). \quad (6.84)$$

D'ailleurs, nous avons aussi vu dans (6.53) que les couplages partiels de 't Hooft peuvent être compris comme intégrales autour des cycles A_i de cette courbe, avec $i = 1, \dots, n$. Maintenant calculons la variation de l'énergie libre $F_0(t_i)$ quand nous varions t_i . La variation par rapport à t_i (gardant $t_j, j \neq i$ fixé) peut être obtenu en calculant la variation de l'énergie libre quand nous déplaçons une valeur propre de la coupure \mathcal{C}_i à l'infini. Cette variation est donnée par (moins) l'intégrale de la force exercée sur une valeur propre, quand nous la déplaçons du point d'extrémité de la coupure à l'infini. Le chemin du point d'extrémité de \mathcal{C}_i à l'infini, qui n'intersecte pas les autres coupures \mathcal{C}_j , sera dénoté par B_i . Tenons compte de (3.76), et le fait que $y(p)$ n'a pas de discontinuité en dehors des coupures \mathcal{C}_j , on trouve

$$\frac{\partial F_0}{\partial t_i} = \int_{B_i} y(x) dx. \quad (6.85)$$

D'habitude, cette intégrale est divergente, mais peut être régularisée facilement en faisons tendre B_i à un point de coupure $x = \Lambda$, et en soustrayant les morceaux divergents car la coupure Λ tend vers l'infini. Par exemple, pour le modèle matriciel Gaussien on a

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \int_{2\sqrt{t}}^{\Lambda} dx \sqrt{x^2 - 4t} = t(\log t - 1) - 2t \log \Lambda + \frac{1}{2}\Lambda^2 + \mathcal{O}(1/\Lambda^2). \quad (6.86)$$

Donc, l'intégrale régularisée donne $t(\log t - 1)$, qui est en effet le bon résultat. Il est maintenant clair que (6.53) et (6.85) ressemblent beaucoup aux relations (5.69) qui définissent les périodes (donc le prépotentiel) dans la géométrie spéciale. Quelle est l'interprétation de l'aspect de la géométrie spéciale ?

Rappelons que notre point de départ était une géométrie de Calabi-Yau obtenue par le gonflement de la singularité indiquée dans (6.32). Cependant, et comme nous avons déjà vu dans le cas du conifold, on peut lever des singularités dans la géométrie algébrique en les déformant plutôt que faire une résolution. Dans la singularité la plus générale (6.32), il y a n points singuliers qui sont localement identiques aux singularités de conifold. Donc on va faire une déformation en gonflant chacune des singularités à un 3-sphères. Il est facile de voir que ceci exige la présence d'un polynôme générique $R(x)$ de degré $n - 1$. De cette façon nous obtenons la variété de Calabi-Yau

$$u^2 + v^2 + y^2 + W'(x)^2 = R(x). \quad (6.87)$$

Nous appellerons cette géométrie la variété déformée X_{def}^W . C'est une variété de Calabi-Yau non-compacte avec la 3-forme holomorphe

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{dx dy du}{v}. \quad (6.88)$$

Les 3-sphères créées par la déformation peuvent être considérées comme des 2-sphères fibré sur un intervalle dans le plan x complexe. Pour voir ceci, considérons pour la simplicité le cas du conifold déformé, avec $W'(x) = x$, $R(x) = \mu$, où μ est un paramètre réel :

$$u^2 + v^2 + y^2 + x^2 = \mu. \quad (6.89)$$

Comme nous avons expliqué dans la section 4.3, lorsqu'on a analysé (5.172), cette géométrie contient une 3-sphère qui est donnée en restreignant les variables aux valeurs réelles. Si nous considérons maintenant une valeur fixe et réelle de x dans l'intervalle $-\sqrt{\mu} < x < \sqrt{\mu}$, nous obtenons une 2-sphère de rayon $\sqrt{\mu - x^2}$. La sphère s'effondre aux extrémités de l'intervalle, $x = \pm\sqrt{\mu}$, et la géométrie totale de la 2-sphère ainsi que l'intervalle $[-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}]$ est une 3-sphère. Dans le cas général, la courbe $W'(x)^2 - R(x)$ a n coupures avec les extrémités x_{2i}, x_{2i-1} , $i = 1, \dots, n$, et les n 3-sphères sont les fibrations \mathbf{S}^2 sur ces coupures. Considérons maintenant les cordes topologiques fermées type-B qui propagent sur X_{res}^W . Comme nous avons vu dans la sous-section 4.1.4, la théorie de genre-zéro est déterminée par les périodes de la 3-forme Ω donnée dans (6.88). Nous choisissons alors une base symplectique des 3-cycles $\widehat{A}_i, \widehat{B}^j$, avec $\widehat{A}_i \cap \widehat{B}^j = \delta_i^j$. Ici, les cycles \widehat{A}_i sont les n 3-sphères, et leurs projection sur le plan x sont des cycles A_i entourant la coupure $\mathcal{C}_i = [x_{2i}, x_{2i-1}]$. Les \widehat{B}^j cycles sont des cycles duaux et leurs projection sur le plan x sont des chemins B_j [150]. Les périodes de Ω sont alors données par

$$t_i = \frac{1}{4\pi} \oint_{\widehat{A}_i} \Omega, \quad \frac{\partial F_0}{\partial t_i} = \int_{\widehat{B}^i} \Omega. \quad (6.90)$$

Il est facile de voir que ces périodes se réduisent aux périodes (6.53) et (6.85) sur la courbe hyperelliptique (6.84), respectivement. Considérons encore le cas du conifold déformé (6.89), qui est plus simple puisqu'il y a seulement une trois-sphère. Calculons la période A au-dessus de cette trois-sphère, qui est un \mathbf{S}^2 fibrer sur la coupure $[-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}]$, en faisant d'abord l'intégrale au-dessus de \mathbf{S}^2 , et en faisant ensuite l'intégrale sur la coupure. Puisque $v = \sqrt{\mu - x^2 - \rho^2}$, où $\rho^2 = y^2 + u^2$, l'intégrale de Ω sur \mathbf{S}^2 est simplement

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{S}^2} \frac{dydz}{\sqrt{\mu - x^2 - \rho^2}} = \sqrt{\mu - x^2}. \quad (6.91)$$

Par conséquent, la période A devient

$$t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{\mu}}^{\sqrt{\mu}} y(x) dx, \quad (6.92)$$

où y est maintenant donné par $y^2 + x^2 = \mu$. C'est simplement la période A de (6.52) (avec $y \rightarrow -iy$). Le cas général est très semblable, et on obtient finalement que la géométrie spéciale (6.90) de la géométrie déformée de Calabi-Yau (6.87) est équivalente à la solution planaire du modèle matriciel, donnée par la courbe hyperelliptique (6.84) et les équations des couplages partiels de 't Hooft (6.53) et l'énergie libre planaire (6.85).

L'interprétation physique de ce résultat est qu'il y a une équivalence entre la théorie de corde topologique ouverte type-B sur la variété X_{res}^W , avec N D-branes enveloppant les n sphères obtenues par le gonflement, et la théorie de corde topologique fermée type-B sur la variété X_{def}^W , où les N D-branes ont disparu. De plus, les couplages de 't Hooft t_i dans la théorie de corde ouverte deviennent des périodes géométriques dans la théorie de corde fermée. C'est un autre exemple d'une dualité corde ouverte/fermée réalisée par une transition géométrique [150]. La transition géométrique fournit aussi une interprétation de théorie de corde fermée pour la resommation de 't Hooft du modèle matriciel : elle correspond à la théorie de corde topologique fermée type-B sur X_{def}^W . Notons que, comme pour le cas de la théorie Chern-Simons sur \mathbf{S}^3 , le champ principal déterminant la limite planaire (qui est codé dans le résolvant planaire, ou d'une manière équivalente dans la quantité $y(\lambda)$) mène à une équation algébrique - la courbe hyperelliptique (6.84)- qui décrit avec précision la cible de la théorie de corde fermée duale. Cette transition géométrique peut être généralisée à des situations plus compliquées [150, 166, 167].

6.4 Résumé de la contribution hep-th/0611289 : Les trous noirs dérivés de la théorie type IIA sur des CY3 avec des géométries ADE affine

Dans cette publication, nous avons traité un sujet très récent qui a attiré beaucoup d'intérêt. En particulier, nous avons étudié les trous noirs à 4 dimensions résultants de la compactification de la théorie des supercordes type IIA sur une classe particulière de variétés de CY3 locales. Ces variétés ont une base Δ_{n+1} construite à partir des intersections des sphères S^2 et on les a noté par $O(m) \oplus O(-m - 2) \rightarrow \Delta_{n+1}$ où m est un vecteur à $(n + 1)$ composantes entières (m_0, \dots, m_n) . Cette contribution qui constitue un nouveau test positif de la conjecture OSV fait appel aux théories de jauge quiver q-déformés à 2 dimensions de symétrie de jauge ayant plusieurs groupe de jauge $U(N_i)$. Parmi les principaux résultats obtenus lors de notre analyse, nous avons réussi à compléter les résultats partiels concernant la réalisation du modèle sigma linéaire $N = 2$, $d = 2$ pour la résolution des singularités affines ainsi que les CY3 locales ayant des fibrations non triviales. En plus, nous avons commenté rigoureusement autres modèles de trous noirs qui sont utilisés dans le teste de la conjecture OSV. Plus précisément, la classe des trous noirs $4d$ avec des D-branes enroulant les cycles des CY3 locales dont les bases de dimension complexe 1 sont classées par le théorème de Vinberg. Finalement, nous avons donné une expression explicite de la fonction de partition de la théorie de jauge quiver $2d$ en terme des matrices d'intersection I_{ij} des sphères S^2 qui constituent la base de CY3.

**6.4 Résumé de la contribution hep-th/0611289 : Les trous noirs dérivés de la
théorie type IIA sur des CY3 avec des géométries ADE affine**

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire de thèse concerne l'étude de certains aspects des supercordes type IIA et IIB compactifiées sur des variétés de Calabi-Yau à six dimensions réelles avec un accent particulier sur leurs secteurs topologiques. Ces aspects s'articulent aussi autour de la correspondance jauge/ gravité et sur le rôle de la théorie des cordes topologiques dans le calcul explicite des énergies libres et le lien avec les prépotentiels des supercordes type IIA et IIB compactifiées sur des variétés de Calabi-Yau tridimensionnels locales. Comme le montre la présentation du manuscrit, qui comporte en plus de cette conclusion, cinq autres chapitres et une annexe, ce travail repose sur deux volets essentiels :

Un volet synthèse exhibant explicitement des outils, des méthodes et des résultats centraux concernant le fondement de la théorie des supercordes avec ses secteurs physique et topologique. Une attention particulière a été adressée à des développements récents en connexion avec la formulation matricielle à la 't Hooft, la théorie de jauge de Chern-Simons en tant que théorie de jauge topologique exactement soluble et la correspondance jauge/gravité ou encore la dualité cordes topologiques ouverte/fermée. Cette synthèse est loin d'être complète ; mais elle contient l'essentiel de méthodes et d'outils nécessaires pour affronter des thématiques récentes telles, que par exemple, la conjecture OSV, la physique des trous noirs microscopiques et le vertex topologiques où la théorie des cordes topologiques joue un rôle déterminant. Dans notre contribution [33], nous avons traité certains propriétés générales des ces thématiques ; mais pour des études plus approfondies et concises, nous nous référons à la littérature spécialisée exhibée dans la section des références. Pour une synthèse récente et exhaustive, nous renvoyons également à [32].

L'autre volet concerne nos contributions dans la matière réalisées durant les années de préparation de ma thèse. Les contributions reportées dans le présent mémoire de thèse ont été motivées par la réalisation de théorie de jauge de CS en tant que corde topologique. Elle concerne entre autres, la construction de deux modèles pour décrire la dynamique de fluide de D-cordes sur le conifold. Le premier modèle utilise une formulation matricielle et le second est décrit par la théorie de jauge topologique sur le conifold. Le fluide de D-corde que nous avons considéré peut être vu également comme une extension du fluide de Laughlin vers des dimensions supérieures.

A travers les nombreuses pages de ce mémoire de thèse, nous avons dédié tout un chapitre au formalisme matriciel des théorie de jauge. Cet outil nous a permis de calculer les amplitudes des cordes topologiques ouverte et fermée sur des variétés de CY3 locales. Plus précisément, nous avons exposé les notions de bases de la théorie matricielle ; y compris la fonction de partition Z du modèle et le développement de l'énergie libre $F(t)$ en série perturbative des coefficients F_g . En rapport avec ce sujet et motivé par le lien entre la théorie de jauge et les cordes ouverte, nous avons développé un modèle matriciel décrivant la propagation du fluide de D-corde sur S^3 et S^2 qui ne sont autres que des sous variétés du conifold. Cette approche nous a permis de fournir exactement la fonction d'onde fondamentale associée au système des gouttelettes FQH.

Intéressés par la dualité entre la théorie de jauge et la gravité, nous avons consacré une

grande partie de cette thèse à l'étude de la théorie de Chern-Simons (CS) à trois dimensions qui constitue l'un des exemples les plus élaborés des théories de jauge dans la limite N grand. Ainsi le développement perturbatif de l'énergie libre de la théorie de CS et la dépendance en "framing" ont été largement discutés. En liaison avec les résultats obtenus au premier point, nous avons évoqué, au sein de cette partie, une autre caractéristique de la théorie de Chern-Simons sur certaines variétés tridimensionnelles qui concerne sa réalisation en tant que modèle matriciel. Dans ce même domaine nous avons contribué par une publication dans laquelle nous avons réalisé un modèle de jauge topologique décrivant un fluide de D-corde sur le conifold en présence d'un champ magnétique fort et constant. Nous avons également étudié en détail ses aspects quantiques.

Nous avons porté une attention particulière à l'étude de la corde topologique et ceci en décrivant en détail les propriétés de base des modèles sigma topologiques menant après la procédure du twist aux modèles A et B , desquels résultent les deux types de la corde topologique, après leur couplage à la gravité bidimensionnelle. Nous avons aussi traité les variétés de Calabi-Yau toriques non-compactes à trois dimensions en raison du rôle fondamental qu'elles jouent dans la compactification des supercordes type II et par conséquent dans la compréhension des différents aspects des cordes topologiques. Au delà de la version bosonique des variétés de CY locales, nous avons construit dans notre papier intitulé (supervariétés de CY locales et symétrie miroirs), leur extension fermionique, les modèles sigma associés ainsi que leur supervariétés miroirs.

Avec tout ces ingrédients en main, nous avons abordé l'étude de la dualité entre la théorie de jauge $U(N)$ et les cordes topologiques fermées. Tout particulièrement, nous avons discuté cette dualité pour les deux exemples des théories de jauge de Chern-Simons ainsi que des modèles matriciels avec des potentiels polynomiaux qui sont tout les deux considérés comme des théories de corde ouverte.

Dans ce même contexte, il est intéressant de noter que la correspondance entre la théorie de Chern-Simons et les cordes topologiques fermées a ouvert la voie pour des applications dans plusieurs disciplines des mathématiques pures ; notamment en ce qui concerne la relation avec la théorie des nœuds et le lien avec les invariants de Gromov-Witten. De point de vue physique, cette correspondance a permis d'obtenir une solution complète de la théorie de corde topologique sur une grande classe de variétés de Calabi-Yau tridimensionnelle locales. En dépit de ces développements spectaculaires, il reste cependant plusieurs questions encore ouvertes dont voici quelques unes :

- a) La correspondance entre les invariants de noeud et les invariants Gromov-Witten associés à la corde ouverte sur le conifold résolu introduite dans [13] et qui demeure encore explorée.
- b) Il serait très intéressant de voir si la théorie de Chern-Simons sur d'autres variétés tridimensionnelles admet aussi une description en théorie de corde ouverte, qui mènerait en toute évidence à une reformulation fascinante de la théorie des invariants qui a été développé ces dernières années. Jusqu'ici, seulement des résultats partiels ont été obtenus dans cette direction.
- c) La correspondance entre les invariants des noeuds et les invariants de Gromov-Witten a été testée seulement pour le noeud trivial. L'étude pour le cas des noeuds non triviaux reste encore à exploré.

Finalement, il est vrai que ce mémoire de thèse a exhibé quelques uns de nos résultats élaborés en différentes collaborations ainsi qu'une synthèse rigoureuse de la correspondance entre corde topologique ouverte et fermée, cependant il reste encore du chemin à parcourir dans l'attente d'un dévoilement complet de cette correspondance.

Annexe A : Polynômes Symétriques

Dans cette brève annexe nous récapitulons quelques ingrédients utiles des fonctions symétriques [82].

Soit x_1, \dots, x_N dénote un ensemble de N variables. Les *polynômes symétriques élémentaires* dans ces variables, $e_m(x)$, sont définis comme :

$$e_m(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_m} x_{i_1}, \dots, x_{i_m}. \quad (6.93)$$

La fonction génératrice de ces polynômes est donnée par

$$E(t) = \sum_{m \geq 0} e_m(x) t^m = \prod_{i=1}^N (1 + x_i t). \quad (6.94)$$

La *fonction complètement symétrique* h_m peut être définie en termes de sa fonction génératrice

$$H(t) = \sum_{m \geq 0} h_m t^m = \prod_{i=1}^N (1 - x_i t)^{-1}, \quad (6.95)$$

et on a

$$E(t) H(-t) = 1. \quad (6.96)$$

Les produits des polynômes symétriques élémentaires et des fonctions complètement symétriques fournissent deux bases différentes pour les fonctions symétriques des N variables.

Une autre base est donnée par les *polynômes de Schur*, $s_R(x)$, qui sont étiquetés par les représentations R . Nous exprimerons toujours ces représentations en termes des tableaux de Young, ainsi R est indiqué par une partition $(l_1, l_2, \dots, l_{c_R})$, où l_i est le nombre de boîtes de la i -ème ligne du tableau, et nous avons $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{c_R}$. Le nombre total de boîtes d'un tableau sera noté par $l(R) = \sum_i l_i$. Les polynômes de Schur sont définis comme quotients de déterminants,

$$s_R(x) = \frac{\det x_j^{l_i + N - i}}{\det x_j^{N - i}}. \quad (6.97)$$

Ils peuvent être écrits en termes de polynômes symétriques $e_i(x_1, \dots, x_N)$, $i \geq 1$, comme suit :

$$s_R = \det M_R, \quad (6.98)$$

où

$$M_R^{ij} = \left(e_{l_i^t + j - i} \right).$$

M_R est une matrice $r \times r$, avec $r = c_{R^t}$, et R^t dénote le transposé du tableau de Young avec les longueurs de lignes l_i^t . Pour évaluer s_R nous avons mis $e_0 = 1$, $e_k = 0$ pour $k < 0$. L'expression (6.98) est connue par l'identité de Jacobi-Trudi.

Un troisième ensemble de fonctions symétriques est donné par les *polynômes de newton* $P_{\vec{k}}(x)$. Ils sont marqués par les vecteurs $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots)$, où k_j sont des nombres entiers non négatifs, et sont définis comme

$$P_{\vec{k}}(x) = \prod_j^p P_j^{k_j}(x), \quad (6.99)$$

où

$$P_j(x) = \sum_{i=1}^N x_i^j, \quad (6.100)$$

sont des sommes de puissance. Les polynômes de newton sont homogènes de degré $l = \sum_j j k_j$ et donnent une base pour les fonctions symétriques dans x_1, \dots, x_N avec des coefficients rationnels. Ils sont liés aux polynômes de Schur par la formule de Frobenius

$$P_{\vec{k}}(x) = \sum_R \chi_R \left(C \left(\vec{k} \right) \right) s_R(x), \quad (6.101)$$

où la somme est sur tous les tableaux telle que $l(R) = l$. En utilisant l'orthogonalité des caractères, nous pouvons inverser la formule précitée comme

$$s_R(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{\chi_R \left(C \left(\vec{k} \right) \right)}{z_{\vec{k}}} P_{\vec{k}}(x), \quad (6.102)$$

où $z_{\vec{k}}$ est donné dans (4.110).

Maintenant nous donnerons quelques formules utiles impliquant des fonctions de Schur. D'abord, on définit la *fonction de skew schur* $s_{R/R'}(x)$ par :

$$s_{R/R'}(x) = \sum_Q N_{R'Q}^R s_Q(x). \quad (6.103)$$

Puis, on a les identités :

$$\begin{aligned} \sum_R s_{R/R_1}(x) s_{R/R_2}(y) &= \prod_{i,j \geq 1} (1 - x_i y_j)^{-1} \sum_Q s_{R_2/Q}(x) s_{R_1/Q}(y), \\ \sum_R s_{R/R_1}(x) s_{R^t/R_2}(y) &= \prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j) \sum_Q s_{R_2^t/Q}(x) s_{R_1^t/Q^t}(y). \end{aligned} \quad (6.104)$$

Bibliographie

- [1] Cumrun Vafa, "Lectures on Strings and Dualities", [arXiv :hep-th/9702201].
- [2] J. Polchinski, "String theory", vol. 1, Cambridge University Press, 1998.
- [3] Adil Belhaj, "Ingénierie Géométrique des Théories Quantiques des Champs dans les Modèles de Supercordes", Thèse de Doctorat, Lab/UFR-PHE, Faculté des Sciences, Rabat.
- [4] E. Witten, "Quantum field theory and the Jones polynomial", Commun. Math. Phys. 121 (1989) 351.
- [5] J. Wess, B. Zumino, "Consequences of anomalous Ward identities", Physics Letters B, 37 (1971) pp. 95-97
- [6] E. Witten, "Global aspects of current algebra", Nuclear Physics B 223 (1983) pp. 422-432.
- [7] E. Witten, "Topological Sigma Models", Commun. Math. Phys. 118, 411 (1988).
- [8] E. Witten, "On The Structure Of The Topological Phase Of Two-Dimensional Gravity ", Nucl. Phys. B 340, 281 (1990).
- [9] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, and E. Zaslow, "Mirror symmetry", American Mathematical Society, 2003.
- [10] G. 't Hooft, "A planar diagram theory for strong interactions", Nucl. Phys. B 72 (1974) 461.
- [11] Juan M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity", published in Adv.Theor.Math.Phys.2 :231-252,1998, Int.J.Theor.Phys.38 :1113-1133,1999. Also in *Buenos Aires 1998, Trends in theoretical physics 2* 51-63, hep-th/9711200.
- [12] R. Gopakumar and C. Vafa, "M-theory and topological strings. I, II", hep-th/9809187, hep-th/9812127.
- [13] R. Gopakumar and C. Vafa, "On the gauge theory/geometry correspondence", hep-th/9811131, Adv. Theor. Math. Phys. 3 (1999) 1415.
- [14] R. Dijkgraaf and C. Vafa, "Matrix models, topological strings, and supersymmetric gauge theories", Nucl. Phys. B 644, 3 (2002), hep-th/0206255.
- [15] R. Dijkgraaf and C. Vafa, "On geometry and matrix models", Nucl. Phys. B 644, 21 (2002), hep-th/0207106.
- [16] R. Dijkgraaf and C. Vafa, "A perturbative window into non-perturbative physics", hep-th/0208048.
- [17] A. Neitzke and C. Vafa, "N = 2 strings and the twistorial Calabi–Yau", hep-th/0402128.
- [18] M. Aganagic and C. Vafa, "Mirror symmetry and super-manifolds", hep-th/0403192.
- [19] A. Belhaj, L. B. Drissi, J. Rasmussen, E. H. Saidi and A. Sebbar, "Toric Calabi–Yau super-manifolds and mirror symmetry", J. Phys. A : Math. Gen. 38 6405–18, hep-th/0410291.

- [20] E. Witten, "Noncommutative geometry and string field theory", Nucl. Phys. B 268(1986) 253.
- [21] E. Witten, "Chern-Simons gauge theory as a string theory", hep-th/9207094, Prog.Math. 133 (1995) 637.
- [22] P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, "2-D Gravity and random matrices", Phys. Rept. 254, 1 (1995) [arXiv :hep-th/9306153].
- [23] P. Di Francesco, "Matrix model combinatorics : Applications to folding and coloring", arXiv :math-ph/9911002.
- [24] Tom Banks, "TASI Lectures on Matrix Theory", hep-th/9911068.
- [25] El Yamani Diaf, "Contribution à l'Étude du Modèle Matriciel de la Théorie M", Thèse de Doctorat, Lab/UFR-PHE, Faculté des Sciences, Rabat (29/09/01).
- [26] Bennai Mohamed, "Etude de la Dynamique des Superconducteurs Ioniques par le Modèle de Diffusion Continu", Thèse de Doctorat, Lab/UFR-PHE, Faculté des Sciences, Rabat.
- [27] Aziz Rhalami, "Modèles effectifs des Systemes de Hall Quantiques Fractionnaires", Thèse de Doctorat, Lab/UFR-PHE, Faculté des Sciences, Rabat.
- [28] Ahmed Jellal, "Effet Hall Quantique Fractionnaire et Symétries Déformées, Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences, Rabat.
- [29] James Gates, Ahmed Jellal, EL Hassan Saidi, Michael Schreiber, "Supersymmetric Embedding of the Quantum Hall Matrix Model", hep-th/0410070.
A. Jellal, E.H. Saidi, H.B. Geyer, R.A. Roemer, "A Matrix Model for Fractional Quantum Hall States", hep-th/0303143.
Ahmed Jellal, El Hassan Saidi, Hendrik B. Geyer, "A Matrix Model for $\nu_{k_1 k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$ Fractional Quantum Hall States", hep-th/0204248.
- [30] Hirosi Ooguri, Andrew Strominger, Cumrun Vafa, "Black Hole Attractors and the Topological String", hep-th/0405146
- [31] M. Aganagic, D. Jafferis, N. Saulina, "Branes, Black Holes and Topological Strings on Toric Calabi-Yau Manifolds", hep-th/0512245
Mina Aganagic, Hirosi Ooguri, Natalia Saulina, Cumrun Vafa, "Black Holes, q-Deformed 2d Yang-Mills, and Non-perturbative Topological Strings", Nucl.Phys. B715 (2005) 304-348, hep-th/0411280.
- [32] L. B. Drissi, "Contributions à l'étude des Branes, Trous Noirs Attracteurs et testes de la Conjecture OSV", Thèse de Doctorat, Lab/UFR-PHE, Faculté des Sciences, Rabat (2006-2007).
- [33] R. Ahl Laamara, A. Belhaj, L.B. Drissi, E.H. Saidi, "Black Holes in type IIA String on Calabi-Yau Threefolds with Affine ADE Geometries and q-Deformed 2-D Quiver Gauge Theories" hep-th/0611289.
- [34] Ilham Benkaddour, "Supersymétries Fractionnaires, Groupes Quantiques et Géométrie non Commutative", Thèse de Doctorat, Lab/UFR-PHE, Faculté des Sciences, Rabat (29/10/01).
- [35] C. Itzykson and J. B. Zuber, "Matrix Integration And Combinatorics Of Modular Groups", Commun. Math. Phys. 134, 197 (1990).
- [36] P. Di Francesco and C. Itzykson, "A Generating function for fatgraphs", Annales Poincare Phys. Theor. 59, 117 (1993) [arXiv :hep-th/9212108].

BIBLIOGRAPHIE

- [37] D. Bessis, C. Itzykson and J. B. Zuber, "Quantum Field Theory Techniques In Graphical Enumeration", *Adv. Appl. Math.* 1, 109 (1980).
- [38] M.L. Mehta, "Random matrices", 2nd edition, Academic Press, 1991.
- [39] H. Ooguri and C. Vafa, "Worldsheet derivation of a large N duality", *Nucl. Phys.B* 641, 3 (2002) [arXiv :hep-th/0205297].
- [40] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, J.B. Zuber, "Planar Diagrams" Published in *Commun.Math.Phys.*59 :35,1978.
- [41] E. Witten, "The $1/N$ Expansion In Atomic And Particle Physics", in G. 't Hooft et al. (eds.), *Recent developments in gauge theories*, Plenum Press, 1980.
- [42] S. Coleman, "1/N, in Aspects of symmetry", Cambridge University Press, 1988.
- [43] N.I. Muskhelishvili, "Singular integral equations", Noordhoff, 1953.
- [44] A. Migdal, "Loop equations and $1/N$ expansion", *Phys. Rept.* 102, 199 (1983).
- [45] G. Akemann, "Higher genus correlators for the Hermitian matrix model with multiple cuts", *Nucl. Phys. B* 482, 403 (1996) [arXiv :hep-th/9606004].
- [46] D. Bessis, "A New Method In The Combinatorics Of The Topological Expansion", *Commun. Math. Phys.* 69, 147 (1979).
- [47] E. Guadagnini, "The universal link polynomial", *Int. J. Mod. Phys. A* 7 (1992) 877.
- [48] Danny Birmingham , Richard Gibbs, Soussan Mokhtari, "The Effective action in (2+1)-dimensional gravity and generalized BF topological field theory", published in *Phys.Lett.B*263 :176-182,1991.
- [49] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, "Conformal field theory", Springer-Verlag,1997.
- [50] M. Atiyah, "On framings of three-manifolds", *Topology* 29 (1990) 1.
- [51] W.B.R. Lickorish, "An introduction to knot theory", Springer-Verlag, 1998.
- [52] V.V. Prasolov and A.B. Sossinsky, "Knots, links, braids and 3-manifolds", American Mathematical Society, 1997.
- [53] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millett and A.A. Ocneanu, "A new polynomial invariant of knots and links", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 12 (1985) 239.
- [54] R. Dijkgraaf, "Perturbative topological field theory", in Trieste 1993, *Proceedings, String theory, gauge theory and quantum gravity '93'* 189-227.
- [55] J.M.F. Labastida, "Chern-Simons theory : ten years after", hep-th/9905057.
- [56] D. Bar-Natan, "Perturbative Chern-Simons theory", published in *J.Knot Theor.Ramifications* 4 :503-547, 1995.
- [57] Luis Alvarez-Gaume, J.M.F. Labastida, A.V. Ramallo, "A Note On Perturbative Chern-Simons Theory", published in *Nucl.Phys.B*334 :103,1990.
- [58] D. S. Freed and R. E. Gompf, "Computer calculation of Witten's three manifold invariant", *Commun. Math. Phys.* 141 (1991) 79.
- [59] L. C. Jeffrey, "Chern-Simons-Witten invariants of lens spaces and torus bundles, and the semiclassical approximation", *Commun. Math. Phys.* 147 (1992) 563.
- [60] L. Rozansky, "A large k asymptotics of Witten's invariant of Seifert manifolds", *Commun. Math. Phys.* 171 (1995) 279, hep-th/9303099.

-
- [61] L. Rozansky and Edward Witten, "HyperKahler geometry and invariants of three manifolds", published in *Selecta Math.*3 :401-458,1997, hep-th/9612216.
- [62] S. Axelrod and I. Singer, "Chern-Simons perturbation theory", *Differential geometric methods in theoretical physics*, p. 3, World Scientific, 1991, hep-th/9110056.
- [63] Justin Sawon, "Perturbative expansion of Chern-Simons theory", Submitted to *Geom.Topol.Monographs*, math.gt/0504495
- [64] T. Q. T. Le, J. Murakami and T. Ohtsuki, "On a universal quantum invariant of 3-manifolds", *Topology* 37-3(1998) 539-574, q-alg/9512002.
- [65] E. Guadagnini, M. Martellini and M.Mintchev, "Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants", *Nucl. Phys. B* 330 (1990) 575.
- [66] Predrag Cvitanovic, "Group Theory For Feynman Diagrams In Nonabelian Gauge Theories : Exceptional Groups", published in *Phys.Rev.D*14 :1536-1553,1976.
- [67] S. Elitzur, G. Moore, A. Schwimmer and N. Seiberg, "Remarks on the canonical quantization of the Chern-Simons-Witten theory", *Nucl. Phys. B* 326 (1989) 108.
- [68] J.M.F. Labastida and A. V. Ramallo, "Operator formalism for Chern-Simons theories", *Phys. Lett. B* 227 (1989) 92. J.M.F. Labastida, P.M. Llatas and A. V. Ramallo, "Knot operators in Chern-Simons gauge theory", *Nucl. Phys. B* 348 (1991) 651.
- [69] W. Fulton and J. Harris, "Representation theory : a first course", Springer-Verlag.
- [70] H.R. Morton and S.G. Lukac, "The HOMFLY polynomial of the decorated Hopf link", math.GT/0108011. S.G. Lukac, "HOMFLY skeins and the Hopf link", Ph.D. Thesis, June 2001, in <http://www.liv.ac.uk/su14/knotgroup.html>.
- [71] L. Rozansky, "A Contribution To The Trivial Connection To Jones Polynomial And Witten's Invariant Of 3-D Manifolds", *Commun. Math. Phys.* 175, 275 (1996), hep-th/9401061.
- [72] A.M. Polyakov, "Fermi-Bose transmutations induced by gauge fields", *Mod. Phys.Lett. A* 3 (1988) 325.
- [73] E. Guadagnini, "The universal link polynomial", *Int. J. Mod. Phys. A* 7 (1992) 877.
- [74] P. Ramadevi, T.R. Govindarajan, R.K. Kaul, "Representations of composite braids and invariants for mutant knots and links in Chern-Simons field theories", published in *Mod.Phys.Lett.A*10 :1635-1658,1995, hep-th/9412084.
- [75] J.M.F. Labastida, P.M. Llatas, "Potentials for topological sigma models", published in *Phys.Lett.B*271 :101-108,1991.
- [76] J. M. F. Labastida and M. Marino, "Type B topological matter, Kodaira-Spencer theory, and mirror symmetry", *Phys. Lett. B* 333, 386 (1994), hep-th/9405151.
- [77] J.M.F. Labastida and Marcos Marino, "Polynomial invariants for torus knots and topological strings", published in *Commun.Math.Phys.*217 :423-449,2001, hep-th/0004196.
- [78] Michael R. Douglas, "Conformal field theory techniques in large N Yang-Mills theory", Presented at Cargese Workshop on Strings, Conformal Models and Topological Field Theories, Cargese, France, May 12-26, 1993, hep-th/9311130.
- [79] Stefan Cordes, Gregory W. Moore, Sanjaye Ramgoolam, "Large N 2-D Yang-Mills theory and topological string theory", published in *Commun.Math.Phys.*185 :543-619,1997, hep-th/9402107.

BIBLIOGRAPHIE

- [80] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, "Solitons : differential equations, symmetries, and infinite-dimensional algebras", Cambridge University Press, 2000.
- [81] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon, "Introduction to classical integrable systems", Cambridge University Press, 2003.
- [82] I.G. MacDonald, "Symmetric functions and Hall polynomials", 2nd edition, Oxford University Press, 1995.
- [83] H. Ooguri and C. Vafa, "Knot invariants and topological strings", Nucl. Phys. B 577(2000) 419, hep-th/9912123.
- [84] L. Susskind, "The Quantum Hall Fluid and Non-Commutative Chern Simons Theory", hep-th/0101029.
- [85] Yves Colin de Verdière, " Une Introduction à la Topologie : Graphes", Surfaces et Noeuds, Institut Fourier, BP 74, F-38402-St Martin d'Hères Cedex
- [86] Rachid Ahl Laamara, Lalla Btissam Drissi, El Hassan Saidi, "D-string fluid in conifold : II. Matrix model for D-droplets on S^3 and S^2 ", Nucl.Phys. B749 (2006) 206-224, hep-th/0605209.
- [87] Rachid Ahl Laamara, Lalla Btissam Drissi, El Hassan Saidi, "D-string fluid in conifold : I. Topological gauge model", Nucl.Phys. B743 (2006) 333-353, hep-th/0604001.
- [88] Marcelo Camperi, Fernando Levstein, Guillermo Zemba, "The Large N Limit Of Chern-Simons Gauge Theory", published in Phys.Lett.B247 :549-554,1990.
- [89] V. Periwal, "Topological closed string interpretation of Chern-Simons theory", hep-th/9305115, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 1295.
- [90] R. Correale and E. Guadagnini, "Large N Chern-Simons field theory", published in Phys.Lett.B337 :80-85,1994.
- [91] M. Marino, "Chern-Simons theory and topological strings", hep-th/0406005.
- [92] R. Lawrence and L. Rozansky, "Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of Seifert manifolds", Commun. Math. Phys.205 (1999) 287.
- [93] M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, "Matrix model as a mirror of Chern-Simons theory", JHEP 0402, 010 (2004), hep-th/0211098.
- [94] M. Tierz, "Soft matrix models and Chern-Simons partition", Lett. A 19, 1365 (2004), hep-th/0212128.
- [95] V. A. Kazakov, M. Staudacher and T. Wynter, "Character expansion methods for matrix models of dually weighted graphs", Commun. Math. Phys. 177, 451 (1996), hep-th/9502132.
- [96] G. Szego, "Orthogonal polynomials", American Mathematical Society, 1959.
- [97] A.B.J. Kuijlaars and W. Van Assche, "The asymptotic zero distribution of orthogonal polynomials with varying recurrence coefficients", J. Approximation Theory 99, No.1, 167-197 (1999).
- [98] Y. Chen and N. Lawrence, "Density of zeros of some orthogonal polynomials", Methods Appl. Anal. 5, No.4, 367-386 (1998)
- [99] N. Halmagyi and V. Yasnov, "Chern-Simons matrix models and unoriented strings", JHEP 0402, 002 (2004), hep-th/0305134.
- [100] El Hassan Saidi, Moulay Brahim Sedra, "Topological string in harmonic space and correlation functions in S^3 stringy cosmology", Published in Nucl.Phys.B748 :380-457,2006. hep-th/0604204

-
- [101] J. M. F. Labastida and P. M. Llatas, "Topological matter in two-dimensions", Nucl. Phys. B 379, 220 (1992) hep-th/9112051.
- [102] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", Princeton University Press 1992.
- [103] Cumrun Vafa, "Topological Landau-Ginzburg models", published in Mod.Phys.Lett.A6 :337-346,1991.
- [104] E.Witten, "Mirror manifolds and topological field theory", hep-th/9112056.
- [105] J.M.F. Labastida, M. Marino, "Duality and topological quantum field theory", Talk given at Workshop on Frontiers in Field Theory, Quantum Gravity and String Theory, Puri, India, 12-21 Dec 1996, published in *Puri 1996, Frontiers of field theory, quantum gravity and strings* 65-82, hep-th/9704032
- [106] P. Candelas and X. C. De La Ossa, "Moduli Space Of Calabi-Yau Manifolds", Nucl. Phys. B 355, 455 (1991).
- [107] R. Dijkgraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, "Notes on topological string theory and two-dimensional topological gravity", in Trieste Spring School 1990.
- [108] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, "Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes", Commun. Math. Phys.165, 311 (1994), hep-th/9309140.
- [109] Ignatios Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain and T.R. Taylor, "Topological amplitudes in string theory", published in Nucl.Phys.B413 :162-184,1994, hep-th/9307158.
- [110] J. Harris and I. Morrison, "Moduli of curves", Springer-Verlag, 1998.
- [111] D. Cox and S. Katz, "Mirror symmetry and algebraic geometry", AMS 1999.
- [112] M. Kontsevich, "Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function", published in Commun.Math.Phys.147 :1-23,1992.
- [113] Manfred Faber, "A Model for Topological Fermions", Few Body Syst. 30 (2001) 149-186, hep-th/9910221.
- [114] E. Getzler and R. Pandharipande, "Virasoro constraints and the Chern classes of the Hodge bundle", math.AG/9805114.
- [115] C. Faber and R. Pandharipande, "Logarithmic series and Hodge integrals in the tautological ring", math.ag/0002112.
- [116] Jim Bryan and Rahul Pandharipande, "BPS states of curves in Calabi-Yau three folds", published in Geom.Topol.5 :287-318,2001, math.ag/0009025.
- [117] Marcos Marino and Gregory Moore, "Counting higher genus curves in a Calabi-Yau manifold", Nucl.Phys. B543 (1999) 592-614, hep-th/9808131.
- [118] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, "Holomorphic anomalies in topological field theories", Nucl. Phys. B 405 (1993) 279, hep-th/9302103.
- [119] P. Candelas, X. C. De La Ossa, P. S. Green and L. Parkes, "A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory", Nucl. Phys. B 359 (1991)21.
- [120] Paul S. Aspinwall and David R. Morrison, "Topological Field Theory and Rational Curves", Commun.Math.Phys. 151 (1993) 245-262, hep-th/9110048.
- [121] S. Katz, A. Klemm and C. Vafa, "M-theory, topological strings and spinning black holes", Adv. Theor. Math. Phys. 3 (1999) 1445, hep-th/9910181.

BIBLIOGRAPHIE

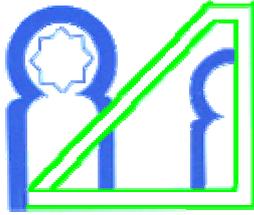
- [122] P. Ginsparg and G. W. Moore, "Lectures On 2-D Gravity And 2-D String Theory", arXiv :hep-th/9304011.
- [123] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, "M theory as a matrix model : A conjecture", Phys. Rev. D 55, 5112 (1997), hep-th/9610043.
- [124] Griffiths, P. A., Harris, J., "Principles of algebraic geometry", Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience, New York, 1978.
- [125] Edward Witten, "Bound States Of Strings And p-Branes", Nucl.Phys. B460 (1996) 335-350, hep-th/9510135.
- [126] Atish Dabholkar, Frederik Denef, Gregory W. Moore and Boris Pioline, "Precision Counting of Small Black Holes", JHEP 0510 (2005) 096, hep-th/0507014
- [127] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, "Fivebranes, membranes, and nonperturbative string theory", Nucl. Phys. B 456 (1995) 130, hep-th/9507158.
- [128] H. Ooguri, Y. Oz and Z. Yin, "D-branes on Calabi-Yau spaces and their mirrors", Nucl. Phys. B 477 (1996) 407, hep-th/9606112.
- [129] S. Katz and C. C. Liu, "Enumerative geometry of stable maps with Lagrangienne ne boundary conditions and multiple covers of the disc", Adv. Theor.Math. Phys. 5 (2002) 1, math.ag/0103074.
- [130] J. Li and Y. S. Song, "Open string instantons and relative stable morphisms", Adv. Theor. Math. Phys. 5 (2002) 67, hep-th/0103100.
- [131] T. Graber and E. Zaslow, "Open string Gromov-Witten invariants : Calculations and a mirror 'theorem'", hep-th/0109075.
- [132] P. Mayr, "N=1 Mirror Symmetry and Open/Closed String Duality", Adv.Theor.Math.Phys. 5 (2002) 213-242, hep-th/0108229.
- [133] M. Marino and C. Vafa, "Framed knots at large N", hep-th/0108064.
- [134] N.C. Leung and C. Vafa, "Branes and toric geometry", Adv. Theor.Math. Phys. 2 (1998) 91, hep-th/9711013.
- [135] M. Aganagic and C. Vafa, "G2 manifolds, mirror symmetry and geometric engineering", hep-th/0110171.
- [136] M. Aganagic, M. Marino and C. Vafa, "All loop topological string amplitudes from Chern-Simons theory", Commun.Math.Phys. 247 (2004) 467-512, hep-th/0206164.
Mina Aganagic, Hiroshi Ooguri, Natalia Saulina, Cumrun Vafa, "Black Holes, q-Deformed 2d Yang-Mills, and Non-perturbative Topological Strings", Nucl.Phys. B715 (2005) 304-348, hep-th/0411280
- [137] E. Witten, "Phases of N = 2 theories in two dimensions", Nucl.Phys. B 403 (1993) 159, hep-th/9301042.
- [138] R. Harvey and H.B. Lawson, "Calibrated geometries", Acta Mathematica, 148 (1982), 47-157.
- [139] Mina Aganagic, Cumrun Vafa, "Mirror symmetry, D-branes and counting holomorphic discs", hep-th/0012041.
- [140] M. Aganagic, A. Klemm and C. Vafa, "Disk instantons, mirror symmetry and the duality web", Z. Naturforsch. A 57, 1 (2002), hep-th/0105045.
- [141] P. Candelas and X. C. De La Ossa, "Comments on conifolds", Nucl. Phys. B 342(1990) 246.

-
- [142] M. Kontsevich, "Enumeration of rational curves via torus actions", hep-th/9405035.
- [143] T. M. Chiang, A. Klemm, S. T. Yau and E. Zaslow, "Local mirror symmetry : Calculations and interpretations", *Adv. Theor. Math. Phys.* 3 (1999)495, hep-th/9903053.
- [144] A. Klemm and E. Zaslow, "Local mirror symmetry at higher genus", in *Winter School on Mirror Symmetry, Vector bundles and Lagrangienne ne Submanifolds*, p. 183, American Mathematical Society 2001, hep-th/9906046.
- [145] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity", *Phys. Rept.* 323 (2000) 183, hep-th/9905111.
- [146] W. Taylor and B. Zwiebach, "D-branes, tachyons, and string field theory", hep-th/0311017.
- [147] W. Taylor, "D-brane effective field theory from string field theory", *Nucl. Phys. B* 585 (2000) 171, hep-th/0001201.
- [148] D. E. Diaconescu, B. Florea and A. Grassi, "Geometric transitions and open string instantons", hep-th/0205234.
- [149] D. E. Diaconescu, B. Florea and A. Grassi, "Geometric transitions, del Pezzo surfaces and open string instantons", hep-th/0206163.
- [150] F. Cachazo, K. A. Intriligator and C. Vafa, "A large N duality via a geometric transition", *Nucl. Phys. B* 603, 3 (2001), hep-th/0103067.
- [151] S. Kachru, S. Katz, A. E. Lawrence and J. McGreevy, "Open string instantons and superpotentials", *Phys. Rev. D* 62, 026001 (2000), hep-th/9912151.
- [152] M. Blau and G. Thompson, "Lectures on 2-d gauge theories : Topological aspects and path integral techniques", hep-th/9310144.
- [153] E. Witten, "Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space", hep-th/0312171.
- [154] C. I. Lazaroiu, "Holomorphic matrix models", *JHEP* 0305, 044 (2003), hep-th/0303008.
- [155] A. Klemm, M. Marino and S. Theisen, "Gravitational corrections in supersymmetric gauge theory and matrix models", *JHEP* 0303, 051 (2003), hep-th/0211216.
- [156] R. Dijkgraaf, S. Gukov, V. A. Kazakov and C. Vafa, "Perturbative analysis of gauged matrix models", *Phys. Rev. D* 68, 045007 (2003), hep-th/0210238.
- [157] I. K. Kostov, "Conformal field theory techniques in random matrix models", hep-th/9907060.
- [158] R. Dijkgraaf, A. Sinkovics and M. Temurhan, "Matrix models and gravitational corrections", *Adv. Theor. Math. Phys.* 7, 1155 (2004), hep-th/0211241.
- [159] L. Chekhov, "Genus one correlation to multi-cut matrix model solutions", hep-th/0401089.
- [160] K. Hori and C. Vafa, "Mirror symmetry", hep-th/0002222.
- [161] C. Vafa, "Superstrings and topological strings at large N", *J. Math.Phys.* 42 (2001) 2798, hep-th/0008142.
- [162] B. S. Acharya, "On realising N = 1 super Yang-Mills in M theory", hep-th/0011089.
- [163] M. Atiyah, J. Maldacena and C. Vafa, "An M-theory flop as a large N duality", *J. Math. Phys.* 42 (2001) 3209, hep-th/0011256.
- [164] J.M.F. Labastida, M. Marino and C. Vafa, "Knots, links and branes at large N", *JHEP* 0011, 007 (2000), hep-th/0010102.

BIBLIOGRAPHIE

- [165] C. H. Taubes, "Lagrangians for the Gopakumar-Vafa conjecture", *Adv. Theor. Math. Phys.* 5 (2001) 139, [math.dg/0201219](#).
- [166] F. Cachazo, B. Fiol, K. A. Intriligator, S. Katz and C. Vafa, "A geometric unification of dualities", *Nucl. Phys. B* 628, 3 (2002), [hep-th/0110028](#).
- [167] F. Ferrari, "Planar diagrams and Calabi-Yau spaces", *Adv. Theor. Math. Phys.* 7, 619 (2004), [hep-th/0309151](#).
- [168] A. Iqbal, "All genus topological string amplitudes and 5-brane webs as Feynman diagrams", [hep-th/0207114](#).
- [169] Mina Aganagic, Albrecht Klemm, Marcos Marino and Cumrun Vafa, "The Topological Vertex", *Commun.Math.Phys.* 254 (2005) 425-478, [hep-th/0305132](#).
- [170] Duiliu-Emanuel Diaconescu and Bogdan Florea, "Localization and Gluing of Topological Amplitudes", *Commun.Math.Phys.* 257 (2005) 119-149, [hep-th/0309143](#)
- [171] C. Vafa, "Brane/anti-brane systems and $U(N|M)$ supergroup", [hep-th/0101218](#).
- [172] Andrei Okounkov, Nikolai Reshetikhin and Cumrun Vafa, "Quantum Calabi-Yau and Classical Crystals", [hep-th/0309208](#).
- [173] J. Zhou, "Some closed formulas and conjectures for Hodge integrals", *Math. Res.Lett.* 10 (2003) 275-286.
- [174] Chiu-Chu Melissa Liu, Kefeng Liu and Jian Zhou, "Marino-Vafa Formula and Hodge Integral Identities", [math.AG/0308015](#).
Chiu-Chu Melissa Liu, Kefeng Liu and Jian Zhou, "A Proof of a Conjecture of Marino-Vafa on Hodge Integrals", *J.Diff.Geom.* 65 (2004) 289-340, [math.AG/0306434](#).
Chiu-Chu Melissa Liu, Kefeng Liu and Jian Zhou, "On a Proof of a Conjecture of Marino-Vafa on Hodge Integrals", *Math. Res. Lett.* 11 (2004), no.2, 259-272, [math.AG/0306257](#).
- [175] Andrei Okounkov and Rahul Pandharipande, "Virasoro constraints for target curves", [math.AG/0308097](#).
Andrei Okounkov and Rahul Pandharipande, "The equivariant Gromov-Witten theory of P^1 ", [math.AG/0207233](#).
- [176] Chiu-Chu Melissa Liu, Kefeng Liu and Jian Zhou, "A Formula of Two-Partition Hodge Integrals", [math.AG/0310272](#).
- [177] Jim Bryan, Dagan Karp, "The closed topological vertex via the Cremona transform", MSC-class : 14J32,14N35, [math.AG/0311208](#).
- [178] Dagan Karp, Chiu-Chu Melissa Liu, Marcos Marino, "The local Gromov-Witten invariants of configurations of rational curves", [math.AG/0506488](#).
- [179] Mina Aganagic, Robbert Dijkgraaf, Albrecht Klemm, Marcos Marino and Cumrun Vafa, "Topological Strings and Integrable Hierarchies", *Commun.Math.Phys.* 261 (2006) 451-516.
- [180] A. Iqbal, N. Nekrasov, A. Okounkov and C. Vafa, "Quantum Foam and Topological Strings", [hep-th/0312022](#).
- [181] Maulik K. Parikh, Ivo Savonije and Erik Verlinde, "Elliptic de Sitter Space : dS/Z_2 ", *Phys.Rev. D* 67 (2003) 064005, [hep-th/0209120](#).
- [182] V.G. Kac and J.W. van de Leur, "The n component of KP hierarchy and representation theory", *J.Math.Phys.* 44 :3245-3293,2003, [hep-th/9308137](#).
- [183] Natalia Saulina and Cumrun Vafa, "D-branes as Defects in the Calabi-Yau Crystal", [hep-th/0404246](#).

-
- [184] Jose M. F. Labastida and Marcos Marino, "A New Point of View in the Theory of Knot and Link Invariants", math.QA/0104180.
- [185] P. Ramadevi and Tapobrata Sarkar, "On link invariants and topological string amplitudes", Nucl.Phys.B600 :487-511,2001, hep-th/0009188.
- [186] N. Seiberg and Edward Witten, "Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory", published in Nucl.Phys.B426 :19-52,1994, Erratum-ibid.B430 :485-486,1994, hep-th/9407087.
N. Seiberg and Edward Witten, "Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N=2$ supersymmetric QCD", published in Nucl.Phys.B431 :484-550,1994, hep-th/9408099.
- [187] Luis Alvarez-Gaume and S.F. Hassan, "Introduction to S duality in $N=2$ supersymmetric gauge theories : A Pedagogical review of the work of Seiberg and Witten", published in Fortsch.Phys.45 :159-236,1997, hep-th/9701069.
- [188] W. Lerche, "Introduction to Seiberg-Witten Theory and its Stringy Origin", Nucl.Phys.Proc.Suppl. 55B (1997) 83-117; Fortsch.Phys. 45 (1997) 293-340, hep-th/9611190.
- [189] N.A. Nekrasov, "Solution of $N=2$ theories via instanton counting", published in Annales Henri Poincare 4 :S129-S145,2003.
Nikita A. Nekrasov, "Noncommutative instantons revisited", published in Commun.Math.Phys.241 :143-160,2003, hep-th/0010017.
- [190] S. Kachru, N. Seiberg and E. Silverstein, "SUSY Gauge Dynamics and Singularities of 4d $N=1$ String Vacua", Nucl.Phys. B480 (1996) 170-184, hep-th/9605036.
- [191] Sheldon Katz, Albrecht Klemm and Cumrun Vafa, "Geometric Engineering of Quantum Field Theories", Nucl.Phys. B497 (1997) 173-195, hep-th/9609239.
- [192] Amer Iqbal and Amir-Kian Kashani-Poor, "Instanton Counting and Chern-Simons Theory", Adv.Theor.Math.Phys. 7 (2004) 457-497, hep-th/0212279.
- [193] Tohru Eguchi and Hiroaki Kanno, "Topological Strings and Nekrasov's formulas", JHEP 0312 (2003) 006, hep-th/0310235.
- [194] Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, "Lectures on Instanton Counting", math.AG/0311058.
- [195] Nikita Nekrasov and Andrei Okounkov, "Seiberg-Witten theory and random partitions", hep-th/0306238.
- [196] Timothy J. Hollowood, Amer Iqbal and Cumrun Vafa, "Matrix Models, Geometric Engineering and Elliptic Genera", hep-th/0310272.
- [197] Takuya Okuda, Hiroshi Ooguri, "D Branes and Phases on String Worldsheet" Journal-ref : Nucl.Phys. B699 (2004) 135-150, hep-th/0404101



UNIVERSITÉ MOHAMMED V - AGDAL
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat



N° d'ordre 2345

DOCTORAT
Résumé de la Thèse

Discipline : **Physique**
Spécialité : **Physique des Hautes Energies**
UFR : **Physique des Hautes Energies**
Responsable de l'UFR : **El Hassan Saidi.**
Période d'accréditation : **2001/2005**

Titre de la thèse : **Correspondance Jauge/Gravité en Théorie des Cordes et
Modèle Topologique de Fluide des cordes**

Prénom, Nom : Ahl Laamara Rachid

Résumé

Dans ce mémoire de thèse, nous étudions la correspondance entre la théorie de jauge et la gravité dans le contexte de la théorie des cordes tout en présentant quelques unes de nos contributions dans ce domaine; notamment celles relatives à la dynamique de fluide de D-cordes sur le conifold. Nous décrivons des résultats de la formulation matricielle de 't Hooft des théorie de jauge $U(N)$ et nous étudions la théorie de jauge de Chern-Simons (CS) à trois dimensions réelles. En particulier le développement en série de puissance de $1/N$ de l'énergie libre de la théorie CS et son lien avec les amplitudes de la théorie de corde topologique. Nous étudions aussi la théorie des cordes topologiques fermée et ouverte sur des variétés de Calabi-Yau toriques à trois dimensions complexes et leur correspondance que nous illustrons à travers l'exemple de la dualité entre la théorie CS sur la 3-sphère et la théorie de corde topologique fermée sur le conifold. Nous exposons également nos résultats concernant le modèle de fluide de corde sur le conifold ainsi que les supervariétés de Calabi-Yau.

Mots-clefs (5) :

Modèle matriciel, Théorie de Chern Simons, Cordes Topologiques, Correspondance Jauge/Gravité, Transition géométrique, Modèle de fluide de corde.
