



# Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. *Corso di Laurea in Fisica.*

Tesi di Laurea

## Sospensione magnetica di un interferometro per la rivelazione di onde gravitazionali

Relatori:

Chiar.mo Prof. L. Milano

Dott. L. Di Fiore

Candidata:

Monica Varvella

matr. 07/5832

A.A. 1998-1999



*Alla mia famiglia*



# Indice

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Un po' di storia della levitazione</b>	<b>5</b>
1.1 Principi e limitazioni delle tecniche di levitazione . . . . .	5
1.1.1 Il teorema di Earnshaw . . . . .	5
1.1.2 L'analisi di Braunbeck . . . . .	11
1.1.3 Sistemi di levitazione a $\mu$ misti . . . . .	14
1.2 Oltre il teorema di Earnshaw . . . . .	15
1.2.1 Feedback . . . . .	16
1.2.2 Diamagnetismo . . . . .	18
1.2.3 Superconduttori . . . . .	20
1.2.4 Rotazione . . . . .	22
1.2.5 Effetti quantistici . . . . .	24
1.3 Magnet permanenti . . . . .	24
1.3.1 Stabilit� . . . . .	25
1.3.2 Materiali per magnet permanenti . . . . .	26
1.4 Scelta dei materiali per una sospensione magnetica . . . . .	27
<b>2 Il sistema a levitazione magnetica</b>	<b>29</b>
2.1 Descrizione . . . . .	29
2.2 La forza tra dipoli magnetici . . . . .	31
2.3 Bobina percorsa da corrente . . . . .	34

2.3.1	La forza esercitata da una bobina su un magnete . . .	35
2.4	Sospensione magnetica singola . . . . .	38
2.4.1	Compensazione del sistema in controreazione . . . . .	41
2.4.2	Miglioramento della sospensione magnetica singola . .	46
<b>3</b>	<b>Il prototipo di un interferometro levitato</b>	<b>51</b>
3.1	Verifica delle forze agenti in una sospensione magnetica . . .	51
3.1.1	La forza tra i dipoli magnetici . . . . .	53
3.1.2	La forza esercitata dalla bobina . . . . .	58
3.2	Prime sperimentazioni . . . . .	61
3.2.1	Implementazione dei filtri . . . . .	63
3.2.2	Risultati preliminari . . . . .	64
3.2.3	Magneti in attrazione . . . . .	67
3.3	Levitazione di un primo elemento di un interferometro . . . .	68
3.4	Interferometro con uno specchio levitato . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Effetti di rumore</b>	<b>85</b>
4.1	Rumore sismico . . . . .	86
4.1.1	Isolamento orizzontale . . . . .	87
4.1.2	Isolamento verticale . . . . .	89
4.1.3	Effetto del rumore del sensore shadow-meter . . . . .	90
4.1.4	Stabilizzazione della sorgente laser . . . . .	92
4.2	Rumore elettromagnetico . . . . .	94
4.2.1	Rumore elettromagnetico ambientale . . . . .	95
4.3	Rumore acustico . . . . .	97
4.3.1	Deflessione indotta da un'onda sonora . . . . .	97
4.3.2	Rumore acustico ambientale . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Applicazioni al VIRGO</b>	<b>101</b>
5.1	Descrizione dell'antenna VIRGO . . . . .	101
5.2	Utilizzo di un sistema a levitazione magnetica in VIRGO . . .	104
5.3	Confronto con altri tipi di sospensione . . . . .	111

<b>Conclusioni</b>	<b>115</b>
<b>A Sospensione pendolare</b>	<b>117</b>
<b>B Calcolo di campi magnetici</b>	<b>119</b>
B.1 Il campo magnetico di un dipolo magnetico . . . . .	119
B.2 Spira percorsa da corrente . . . . .	124
<b>C Elementi di teoria dei controlli automatici</b>	<b>127</b>
C.1 Introduzione . . . . .	127
C.2 Analisi armonica . . . . .	129
C.3 Controlli ad azione diretta e in retroazione . . . . .	130
C.4 Reti correttrici . . . . .	133
<b>Bibliografia</b>	<b>137</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>139</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>143</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>145</b>



# Introduzione

Negli ultimi anni, l'interesse per applicazioni tecniche inerenti levitazione e sospensione elettromagnetica è andato notevolmente crescendo in molti campi della fisica. L'attenzione degli scienziati si è focalizzata sulla possibilità di ridurre il rumore ed eliminare l'attrito; una tra le applicazioni più importanti è quella a mezzi di trasporto via terra ad alta velocità.

Altri tipi di levitazione stabile includono levitazione aerodinamica, acustica, ottica, elettrica e a radio-frequenza. Alcuni di questi metodi sono usati per la fusione ed il trattamento, in assenza di recipienti, di metalli o materiali ceramici anche a temperature superiori ai 2000  $K$ , per il raffinamento ed il degassamento in vuoto spinto.

Sono in fase di sviluppo, tra le altre, anche tecniche con lo scopo di estendere a più basse frequenze il range di lavoro dei rivelatori di un interferometro laser di onde gravitazionali: tali tecniche applicano la levitazione magnetica attraverso l'uso di magneti permanenti in sistemi d'isolamento sismico.

In questo lavoro di tesi si è curato l'aspetto legato alla levitazione magnetica come sistema di sospensione per gli specchi di un interferometro per la rivelazione di onde gravitazionali e se ne è studiata, in particolare, l'applicazione all'antenna VIRGO.

Al fine di realizzare una sospensione magnetica risulta opportuno esaminare più dettagliatamente i molteplici aspetti inerenti la levitazione magnetica: ciò è stato fatto nei 5 capitoli in cui si articola il lavoro di tesi, la cui descrizione è qui di seguito riportata.

**1<sup>o</sup> Capitolo** Il 1<sup>o</sup> capitolo è dedicato alla storia della levitazione, nonché

ai suoi principi di funzionamento ed alle sue limitazioni: viene enunciato e dimostrato il teorema di Earnshaw e discusse le analisi successive del problema; vengono esaminati diversi metodi per eludere il teorema stesso, tra i quali l'uso di un sistema in controreazione, applicato in questo lavoro di tesi.

**2° Capitolo** Nel 2° capitolo si è curato l'aspetto teorico alla base della realizzazione di una sospensione magnetica: dopo aver richiamato il calcolo del campo generato da un dipolo magnetico e quello generato da una bobina percorsa da corrente stazionaria, sono state esaminate le forze coinvolte nel sistema da realizzare. È stata analizzata la natura del problema del controllo della sospensione magnetica ed è stata ricavata la funzione di trasferimento del sistema in controreazione che si intende realizzare. Sono state, inoltre, esaminate diverse configurazioni della sospensione per valutare quale risultasse più vantaggiosa.

**3° Capitolo** Nel 3° capitolo sono riportati i risultati sperimentali che hanno verificato la realizzabilità della levitazione magnetica: un'analisi preliminare delle forze coinvolte in un sistema a levitazione magnetica è stata necessaria per appurare la fattibilità del modello teorico descritto nel 2° capitolo.

Il passo immediatamente successivo è stato la realizzazione di una sospensione magnetica singola della quale sono riportati il monitoraggio in tempo reale e lo spettro di potenza della posizione del corpo levitato, che rappresentano un indice della stabilità e dell'imperturbabilità della sospensione; è anche mostrata la funzione di trasferimento del sistema in controreazione utilizzato.

L'applicazione della suddetta sospensione a cui si è interessati in questo lavoro di tesi è la realizzazione di un interferometro i cui elementi risultino sospesi magneticamente, pertanto sono mostrate ed analizzate, come prototipo del progetto, le configurazioni inerenti la sospensione di un singolo elemento di un interferometro levitato di cui sono riportati

gli andamenti nel tempo ed in frequenza, nonché le funzioni di trasferimento ad anello aperto del feedback utilizzato.

In ultima analisi è riportato il comportamento di un interferometro Michelson realizzato con uno specchio in sospensione magnetica: sono mostrate le frange d'interferenza ottenute dallo strumento così assemblato e, contemporaneamente, l'oscillazione residua della sospensione magnetica sulla quale è posto lo specchio.

**4<sup>o</sup> Capitolo** Il 4<sup>o</sup> capitolo verte sullo studio degli effetti di rumore: si è stimato il comportamento della sospensione magnetica come isolatore sismico, fissando un valore sul limite di rumore misurabile. Si è analizzato il rumore sismico dovuto all'accoppiamento dei magneti permanenti, nonché quello legato al sistema di misura della posizione della massa sospesa; si è valutato il rumore elettromagnetico dovuto ad un campo perturbativo esterno, che si è supposto essere stato indotto da un fulmine; infine, si è ottenuta una stima del rumore acustico ambientale.

**5<sup>o</sup> Capitolo** Un capitolo a parte è dedicato alla descrizione dell'interferometro VIRGO ed alle eventuali applicazioni dei risultati ottenuti in questo lavoro di tesi all'antenna VIRGO.

È riportato anche un confronto con altri due tipi di sospensione: la sospensione pendolare classica e la sospensione elettrostatica.

**Appendice A** In questa Appendice è riportata la descrizione di una sospensione di tipo pendolare in presenza ed in assenza di effetti dissipativi.

**Appendice B** L'Appendice B riporta in dettaglio il calcolo del campo magnetico generato da un dipolo magnetico e da una spira percorsa da corrente.

**Appendice C** In Appendice C sono riportati i concetti base della teoria dei controlli automatici: sistemi lineari, trasformata di Laplace, diagrammi di Bode, controlli ad azione diretta ed in retroazione.

Sono descritti, inoltre, diversi tipi di reti correttrici tra cui il sistema **PID** utilizzato in questo lavoro.

# Capitolo 1

## Un po' di storia della levitazione

### 1.1 Principi e limitazioni delle tecniche di levitazione

Il problema principale nella fisica della levitazione è la stabilità: il corpo levitato non sfugge lateralmente, ma è soggetto a forze che lo riportano nelle direzioni orizzontale e verticale quando è leggermente spostato dalla sua posizione d'equilibrio.

Le difficoltà nel realizzare sospensione o levitazione stabile sono evidenziate da un esame della natura delle forze in gioco: trattandosi di sistemi in cui possono agire forze tra cariche elettriche, o tra dipoli magnetici o tra masse gravitanti, la legge che relaziona tra loro forza e distanza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. In tutti i casi il sistema in esame è un campo di forze ad azione a distanza.

#### 1.1.1 Il teorema di Earnshaw

La ricerca di sistemi che forniscano sospensione o levitazione stabile sollevò, verso la metà del *XIX* secolo, un interessante problema fisico.

Nel 1839, nel suo articolo

*“Sulla Natura delle Forze Molecolari che regolano  
la Costituzione dell’Etere Luminoso”*

il Reverendo Samuel Earnshaw si chiedeva se la forza di richiamo che permette alle particelle dell’etere di oscillare, quando propagano un’onda luminosa, possa obbedire ad una legge inversamente quadratica con la distanza, come la gravità. Egli concluse che non è possibile essendo nulla la divergenza di una tale forza. Siccome la loro somma è nulla ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_r = dF_r/dx + dF_r/dy + dF_r/dz = 0$ ), le forze di richiamo nelle tre direzioni ortogonali non possono avere tutte lo stesso segno: esse non possono avere minimi o massimi di energia se seguono una legge inversamente quadratica. Pertanto, con una forza di questo tipo, l’oscillazione intorno ad un punto di equilibrio stabile è impossibile.

Successivamente Earnshaw applicò queste considerazioni anche alla legge di Coulomb, supponendo che l’etere fosse un mezzo comprendente un sistema strutturato di cariche elettriche, separato da quello che potrebbe essere considerato uno stato libero del vuoto.

Nel 1842, infatti, Earnshaw dimostrò matematicamente che è impossibile per un oggetto posto in un campo elettrostatico avere una posizione di equilibrio stabile considerando la legge di forza agente: questo calcolo fondamentale è noto come teorema di Earnshaw [5] ed è una stretta conseguenza del teorema di Gauss.

Prima di dimostrare questo importante teorema, è opportuno valutare le condizioni a cui deve sottostare un corpo affinché si trovi in una posizione di equilibrio stabile.

Un corpo è in equilibrio quando la risultante delle forze agenti su esso è nulla. Inoltre, lo stato d’equilibrio è stabile, instabile o indifferente a seconda se il corpo, quando leggermente spostato, tende a ritornare nella posizione di equilibrio, tende ad allontanarsi ulteriormente da essa o non tende a muoversi affatto.

Per esprimere ciò in termini di teoria dei campi si può considerare inizialmente una particella, cioè un corpo di dimensioni trascurabili, posta in

un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  in un campo statico di forze  $\vec{F}(x, y, z)$ . La forza sulla particella è così  $\vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ .

Affinché  $(x_0, y_0, z_0)$  sia una posizione di equilibrio stabile devono essere soddisfatte le due condizioni seguenti:

$$\vec{F}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x_0, y_0, z_0) < 0 . \quad (1.1)$$

La prima è una condizione di equilibrio e la seconda, una condizione di stabilità. Inoltre, se  $\vec{F}$  è un campo irrotazionale la forza agente sulla particella può essere espressa come

$$\vec{F}(x, y, z) = - \vec{\nabla} U(x, y, z) \quad (1.2)$$

dove  $U(\vec{r})$ , con  $\vec{r}(x, y, z)$ , rappresenta il potenziale della forza vettoriale, il quale deve avere un minimo locale nella posizione di equilibrio. La particella, pertanto, può rimanere ferma oppure oscillare in una buca di potenziale.

In termini di  $U$  le condizioni necessarie per l'equilibrio stabile sono

$$\vec{\nabla} U(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \nabla^2 U(x_0, y_0, z_0) > 0 . \quad (1.3)$$

Il teorema di Earnshaw è fondamentalmente un'estensione a campi elettromagnetici delle condizioni (1.1) o equivalentemente (1.3), che possono essere rigorosamente dimostrate con la teoria del potenziale.

In una regione  $R$ , in assenza di cariche, il campo elettrostatico  $\vec{E}(x, y, z)$  è solenoidale e irrotazionale, cioè

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x, y, z) = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(x, y, z) = 0 . \quad (1.4)$$

Dalla seconda di queste equazioni segue

$$\vec{E}(x, y, z) = - \vec{\nabla} \varphi(x, y, z) \quad (1.5)$$

dove  $\varphi$  è il potenziale elettrostatico; l'energia potenziale  $U_e$  è invece

$$U_e(x, y, z) = -q \varphi(x, y, z) . \quad (1.6)$$

La forza sulla particella di carica  $q$  posta nel campo è

$$\vec{F}(x, y, z) = q \vec{E}(x, y, z) . \quad (1.7)$$

Prendendo la divergenza di questa equazione e considerando la prima delle equazioni (1.4) si ottiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = 0 \quad (1.8)$$

per tutti i punti in  $\mathbb{R}$ .

Così, nonostante l'equazione (1.7) possa soddisfare la prima delle due condizioni necessarie per l'equilibrio stabile, la (1.8) viola la seconda.

Affinché l'equilibrio sia stabile la forza deve orientarsi verso il punto di equilibrio, distribuendosi su una piccola sfera intorno al punto.

Dal teorema di Gauss si ha, però,

$$\int \vec{F} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) dV , \quad (1.9)$$

cioè l'integrale della componente radiale della forza sulla superficie della sfera che circonda il punto di equilibrio deve essere uguale all'integrale della divergenza della forza sul volume incluso nell'intorno del punto di equilibrio. Essendo nullo il secondo integrale per la (1.8), la conseguenza immediata è che la stabilità non è possibile.

Il teorema può essere applicato anche a corpi estesi di qualunque forma e che siano conduttori: essi risulteranno sempre instabili se sottoposti a spostamenti rigidi laterali intorno alla posizione di equilibrio.

Generalizziamo ora il teorema ad un corpo rigido.

Un oggetto libero nello spazio presenta 6 gradi di libertà , 3 associati al moto traslazionale, gli altri 3 a quello rotazionale. Note tutte le forze esterne agenti sull'oggetto, i principi della quantità di moto e del momento angolare portano a 6 equazioni differenziali non lineari. Queste ultime contengono parametri comuni che legano tra loro le variabili.

Supponiamo che un corpo sospeso sia rappresentato da un oggetto uniforme a forma di parallelepipedo con il centro di massa coincidente con il centro

geometrico e il sistema di riferimento e gli assi principali come mostrato in Fig. 1.1.

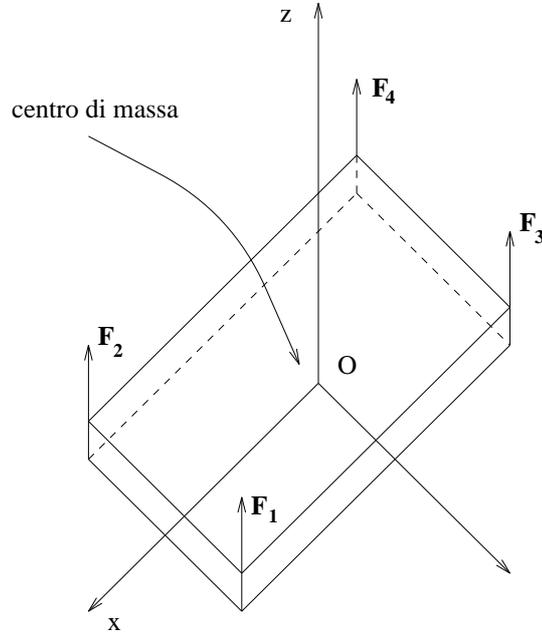


Figura 1.1: Oggetto a forma di parallelepipedo sospeso

Il II principio della dinamica fornisce le seguenti equazioni

$$m\ddot{x} = F_x \quad m\ddot{y} = F_y \quad m\ddot{z} = F_z \quad (1.10)$$

dove  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  sono le forze risultanti che agiscono lungo gli assi inerziali  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ .

Alle (1.10) vanno aggiunte altre tre equazioni per le coordinate rotazionali. Dalle equazioni di Eulero, dopo opportuna sostituzione degli angoli di Eulero appropriati, si ottiene

$$\begin{aligned} T_x &= I_{xx} \dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_y \omega_z \\ T_y &= I_{yy} \dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_z \omega_x \\ T_z &= I_{zz} \dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_x \omega_y \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  sono i momenti torcenti delle forze esterne agenti,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  ed  $\omega_z$  rappresentano le velocità angolari e  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  i momenti d'inerzia.

Se sull'oggetto agisce lo stesso campo statico di forze, le condizioni (1.1) diventano

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(x_1, y_1, z_1) &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x_1, y_1, z_1) &< 0 \\
 \vec{F}(x_2, y_2, z_2) &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x_2, y_2, z_2) &< 0 \\
 \vec{F}(x_3, y_3, z_3) &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x_3, y_3, z_3) &< 0 \\
 \vec{F}(x_4, y_4, z_4) &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x_4, y_4, z_4) &< 0
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

dove sono esplicitate le posizioni dei 4 spigoli superiori dell'oggetto.

Se sull'oggetto agiscono, invece, 4 campi diversi, invece, diventano

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 &< 0 \\
 \vec{F}_2 &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 &< 0 \\
 \vec{F}_3 &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_3 &< 0 \\
 \vec{F}_4 &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_4 &< 0
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

con la condizione di essere verificate contemporaneamente, al fine di ovviare ad eventuali traslazioni e rotazioni, e ciascuna lungo il lato che identifica lo spigolo sul quale agisce la rispettiva forza.

In entrambi i casi, se il campo statico di forze è un campo elettrostatico, la divergenza di  $\vec{E}$  risulterebbe sempre nulla, non verificando la condizione di stabilità.

Quindi un corpo carico posto in un campo elettrostatico non può rimanere in equilibrio stabile se è soggetto all'azione delle sole forze elettriche.

Il teorema può essere applicato oltre che ai campi elettrostatici, anche ai campi magnetostatici ed al campo gravitazionale, in quanto le forze corrispondenti obbediscono anch'esse ad una legge inversamente quadratica con la distanza.

Qualunque sia il campo preso in esame, il teorema afferma che la levitazione stabile di un corpo non è realizzabile: tutti e tre i campi (elettrico, magnetico e gravitazionale) soddisfano l'equazione di Laplace nel vuoto ( $\nabla^2\varphi = 0$  essendo  $\varphi$ , a seconda del campo, il potenziale elettrostatico, magnetostatico o gravitazionale). Ciò implica l'assenza di massimi o di minimi

isolati, sebbene possano esserci *punti sella* che rappresentano gli unici punti critici. Comunque, un esame più attento, mostra che l'intensità dei campi, nel vuoto, può avere minimi isolati, perché, a differenza del campo, che è un vettore, l'intensità non soddisfa l'equazione di Laplace.

### 1.1.2 L'analisi di Braunbeck

Braunbeck [5] estese l'analisi a corpi dielettrici, non carichi, in campi elettrostatici e corpi magnetici in campi magnetostatici e dedusse che la sospensione o la levitazione è possibile quando si utilizzano materiali con  $\epsilon_r < 1$  e  $\mu_r < 1$ , essendo  $\epsilon_r$  la costante dielettrica del materiale polarizzabile e  $\mu_r$  la permeabilità magnetica del materiale magnetico.

La caratteristica che distingue le due analisi è che quella di Braunbeck coinvolge dipoli, mentre il teorema di Earnshaw si applica a particelle singole (l'estensione al corpo rigido applica le condizioni (1.1) a ciascuno spigolo del parallelepipedo preso in esame nel Par. 1.1.1, così il ragionamento fatto per la particella singola viene ripetuto singolarmente per ciascuno di essi).

Quando un dielettrico è posto in un campo elettrostatico, la polarizzazione  $\vec{P}$  è legata al campo elettrico dalla relazione

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad (1.14)$$

dove  $\chi_e$  è la suscettività elettrica del dielettrico.

Il momento di dipolo indotto  $\vec{p}$  del dielettrico, se il campo elettrico  $\vec{E}$  è uniforme nel volume  $V$ , è

$$\vec{p} = \int \vec{P} dV = \int \chi_e \vec{E} dV = \chi_e \vec{E} V . \quad (1.15)$$

La forza esercitata sul dielettrico è

$$\vec{F}_e = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \chi_e V (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} . \quad (1.16)$$

Essendo  $\chi_e = (\epsilon - \epsilon_0)$ , dove  $\epsilon$  è la costante dielettrica del mezzo ed  $\epsilon_0$  quella del vuoto, ed essendo  $(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2$ , la (1.16) si può scrivere anche così

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) V \vec{\nabla} E^2. \quad (1.17)$$

L'equazione (1.17) rappresenta la forza che un dielettrico di volume  $V$  e costante dielettrica  $\epsilon$  risente in un campo elettrostatico  $\vec{E}$ .

Dalla (1.17) e, ricordando la (1.2), si deduce che l'energia potenziale di un corpo polarizzabile, con costante dielettrica  $\epsilon$ , posto in un campo elettrostatico  $H$ , in un mezzo in cui non esistono cariche, è

$$U_e = -\frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) V E^2. \quad (1.18)$$

Applicando le equazioni di Maxwell (1.4) e, ricordando la (1.5) e le (1.3), si ha che  $\nabla^2 \varphi = 0$  e  $\nabla^2 E^2 \geq 0$ . La disuguaglianza stretta implica che campi elettrostatici non possono avere massimi isolati. Essi possono, però, avere minimi isolati.

Siccome  $\epsilon \geq \epsilon_0$ , non essendo mai state osservate polarizzabilità negative, si può concludere che corpi carichi presentano  $\nabla^2 U_e = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$  e corpi dielettrici  $\nabla^2 U_e \leq 0$ . Quindi, in entrambi i casi, almeno una delle tre quantità  $U_{xx}$ ,  $U_{yy}$  o  $U_{zz}$  deve essere negativa ed  $U_e$  non può avere un minimo isolato.

Siccome, inoltre, la divergenza di  $\vec{\nabla} E^2$  non può mai essere negativa ed, inoltre, come è stato già affermato, è fisicamente impossibile che la quantità  $(\epsilon - \epsilon_0)$  sia negativa, avendo tutti i materiali costante dielettrica positiva, la condizione data dalla seconda delle (1.3) non può essere soddisfatta, quindi un dielettrico non può, da nessuna parte, trovarsi in equilibrio stabile in un campo elettrostatico.

La levitazione stabile in un campo elettrostatico, nel vuoto o in aria, non è quindi possibile.

Similmente un materiale magnetico in un campo magnetico  $\vec{H}$  è soggetto ad una forza

$$\vec{F}_m = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) V \vec{\nabla} H^2 \quad (1.19)$$

dove  $\mu$  è la permeabilità del materiale magnetico e  $\mu_0$  quella del vuoto.

Dalla (1.19) e, ricordando la (1.2), si deduce che l'energia potenziale di un corpo magnetizzabile, con permeabilità  $\mu$ , posto in un campo magnetico statico  $\vec{H}$ , in un mezzo non percorso da correnti, è

$$U_m = -\frac{1}{2} (\mu - \mu_0) V H^2 . \quad (1.20)$$

Applicando le condizioni di solenoidalità e di irrotazionalità al campo  $\vec{H}$  e la condizione di stabilità alla (1.20), si verifica che la condizione  $\nabla^2 H^2 \geq 0$  è sempre valida: la disuguaglianza stretta implica, anche in questo caso, che un campo magnetico statico non può avere massimi isolati, mentre può avere minimi isolati.

La stabilità di un materiale magnetico presenta una situazione abbastanza differente.

Siccome la condizione di stabilità richiede che  $\nabla^2 U_m > 0$ , si evince che, in campi magnetici statici, materiali paramagnetici ( $\mu > \mu_0$ ) e ferromagnetici ( $\mu \gg \mu_0$ ) non possono levitare liberamente, ma diamagneti ( $\mu < \mu_0$ ) e superconduttori ( $\mu = 0$ ) possono.

Infatti, nonostante la divergenza di  $\vec{\nabla} H^2$  non possa essere mai negativa, la quantità  $\chi_m = (\mu - \mu_0)$  può esserlo: per materiali diamagnetici e superconduttori, infatti, la suscettività magnetica, legata alla permeabilità magnetica dalla relazione  $\chi_m = \mu_r - 1$ , può anche essere negativa (per i superconduttori  $\chi_m = -1$ ). Pertanto la condizione di stabilità riportata nelle (1.3) può ora essere soddisfatta e la sospensione stabile è possibile per materiali diamagnetici e superconduttori.

In definitiva, il teorema di Earnshaw e l'analisi di Braunbeck implicano che non è possibile ottenere levitazione o sospensione stabile con un sistema di magneti permanenti (o correnti elettriche costanti) eccezion fatta per un sistema che contenga materiali diamagnetici ( $\mu_r < 1$ ) o superconduttori ( $\mu_r = 0$ ), e che è impossibile ottenere allo stesso tempo levitazione in campi elettrostatici in quanto non si conoscono materiali con  $\epsilon_r < 1$ .

### 1.1.3 Sistemi di levitazione a $\mu$ misti

La dimostrazione di Earnshaw sulla stabilità di oggetti in campi che seguono una legge inversamente quadratica mostra che in questi campi un qualunque equilibrio sarebbe instabile. Questo risultato si applica anche a cariche fisse o a distribuzioni di corrente nello spazio vuoto, ma non a sistemi la cui permeabilità differisce da quella del vuoto.

L'estensione di Braunbeck afferma che laddove la permeabilità del sistema è da qualche parte minore di quella del vuoto, quando sono presenti dielettrici o materiali magnetici, la stabilità è possibile.

Tabella 1.1: *Sistemi a  $\mu$  misti*

SISTEMA	PERMEABILITÀ	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	STABILITÀ
<i>Conduttori percorsi da correnti costanti</i>	$\mu = \mu_0$	0	instabile
<i>Bobine percorse da correnti costanti e ferro</i>	$\mu > \mu_0$	$> 0$	instabile
<i>Bobine percorse da correnti costanti e superconduttori</i>	$\mu < \mu_0$	$< 0$	è possibile la stabilità
<i>Sistemi misti di bobine, ferro e superconduttori</i>	$\mu > \mu_0$ e $\mu < \mu_0$	$> 0$ e $< 0$	è possibile la stabilità
		in regioni diverse	

Bevir [5], nel 1976, ha esaminato più in dettaglio sistemi misti dove la permeabilità in alcuni punti fosse minore di quella del vuoto, ma maggiore in altri ed ha mostrato che, in alcuni casi, può essere ottenuta sospensione

stabile.

Una condizione necessaria, ma non sufficiente, per la stabilità è  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$  dove  $\vec{F}$  è la forza agente su un corpo; la tabella (1.1) indica come il segno di  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  possa dipendere solo dalla natura del sistema e non dalla sua geometria.

Questa tabella indica anche che esiste una classe di sistemi misti con materiali sia a  $\mu > \mu_0$  che  $\mu < \mu_0$ , come il ferro e i superconduttori e come i conduttori normali percorsi da correnti dispersive o bobine a flusso costante, che dovrebbero fornire sospensioni stabili.

## 1.2 Oltre il teorema di Earnshaw

Un qualunque teorema non ammette eccezioni, ma è comunque possibile valutare alcuni aspetti per aggirarne le ipotesi.

Anche per il teorema di Earnshaw è valida questa considerazione: è possibile, pertanto, levitare stabilmente eludendo le ipotesi del teorema.

Valendo solo per campi statici, il teorema non è applicabile in presenza di fenomeni dinamici: le sue ipotesi, pertanto, non risultano violate.

Fenomeni dinamici possono stabilizzare la levitazione in campi di forze oscillanti: un campo elettromagnetico oscillante indurrà una corrente alternata in un conduttore generando così una forza che permetta la levitazione.

Inoltre i materiali diamagnetici, i superconduttori e i multipoli non obbediscono ad una legge di forza inversamente quadratica con la distanza, ma, mentre i diamagneti ed i superconduttori possono avere minimi di energia, il teorema proibisce minimi di energia per i multipoli permanenti, anche se obbediscono ad una legge di forza del tipo  $r^n$  con  $n \geq 4$ . Per multipoli con orientazione fissa la divergenza delle forze di componenti polo - polo è nulla; se avviene riorientazione spontanea, l'allontanamento da un eventuale minimo locale diventa anche più facile .

Esaminiamo, più in dettaglio, alcuni tipi di levitazione.

### 1.2.1 Feedback

Un modo per superare le limitazioni del teorema di Earnshaw è quello di utilizzare campi elettrici o magnetici dipendenti dal tempo per i quali sono soddisfatte le condizioni

$$\frac{dE}{dt} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{dB}{dt} \neq 0 \quad (1.21)$$

Esiste infatti un corollario del teorema e del successivo lavoro di Braunschweig che afferma che sistemi che utilizzano magneti permanenti o elettromagneti (percorsi da corrente continua o alternata) in cui non esiste controllo della corrente sono instabili. Pertanto, per ottenere una levitazione stabile è necessario escogitare mezzi di regolazione della corrente in un elettromagnete, usando un feedback della posizione dell'oggetto che deve essere sospeso.

Le ipotesi del teorema di Earnshaw, per campi per i quali valgono le (1.21), non sono più verificate, infatti le (1.1) escludono campi solenoidali; inoltre i campi variabili nel tempo non sono irrotazionali, come è facile comprendere osservando le equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.22)$$

e per un mezzo omogeneo ed isotropo

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.23)$$

dove  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  e  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ .

Nel caso di un mezzo qualsiasi le relazioni diventano

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Dalle relazioni (1.22) e (1.23) si evince la non irrotazionalità dei campi elettrico e magnetico e la solenoidalità del campo magnetico.

È proprio la variazione nel tempo dei campi elettrico e magnetico che permette la regolazione della corrente e il bilanciamento della forza di gravità attraverso una forza indotta nel magnete vincolato all'oggetto da levitare.

È possibile, pertanto, levitare un magnete permanente in un campo elettromagnetico variabile nel tempo utilizzando un sistema in controreazione, in cui viene misurata la posizione del magnete stesso e regolata l'intensità del campo per tenere fissa la posizione rispetto ad una posizione di riferimento; a questo scopo, il sistema in controreazione deve essere programmato in modo da indebolire la forza del magnete qualora l'oggetto si avvicini ed aumentarla quando se ne allontani.

È possibile incollare il magnete permanente su un qualunque oggetto che si intende levitare, senza avere limitazioni di sorta sul materiale di cui è composto l'oggetto.

Ad alte frequenze  $\nu$ , inoltre, l'equazione di Laplace,  $\nabla^2 \varphi = 0$ , essendo  $\varphi$  il potenziale elettrostatico o magnetostatico, è sostituita da

$$\nabla^2 \varphi = \left( \frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \varphi\tag{1.25}$$

dove  $c$  è la velocità della luce: la quantità a destra della (1.25) non è mai nulla. La condizione di stabilità, data dalla seconda delle relazioni (1.1) o dalla seconda delle (1.3), risulta quindi verificata e risulta garantita anche la presenza di massimi o minimi isolati.

La sospensione elettromagnetica è un sistema usato anche nella levitazione magnetica dei treni (MAGLEV): un esempio si ha all'aeroporto di Birmingham, in Inghilterra [2], ma i dominatori del settore sono i Tedeschi, che

stanno per cominciare la produzione commerciale del **Transrapid 07**, che utilizza elettromagneti convenzionali e forze di attrazione per la levitazione, ed i Giapponesi che stanno progettando un dispositivo che coinvolga magneti superconduttori per generare forti forze repulsive con cui levitare il treno: il loro **MLU002N** è ancora in fase sperimentale.

La Fig. 1.2 illustra un esempio di treno levitato elettromagneticamente.



Figura 1.2: MAGLEV - *Treno a levitazione magnetica*

### 1.2.2 Diamagnetismo

Levitazione stabile può essere ottenuta in campi magnetici statici usando materiali diamagnetici: siccome il diamagnetismo coinvolge il moto degli elettroni intorno ai nuclei, questo fenomeno non rappresenta una configurazione fissa come richiederebbero le ipotesi del teorema di Earnshaw, pertanto quest'ultimo non risulta violato.

I materiali diamagnetici levitati si magnetizzano in senso opposto al campo magnetico in cui sono posti: ponendo un atomo in un campo magnetico, gli elettroni di cui è costituito modificano il loro moto in direzione opposta a questa sollecitazione esterna. Gli elettroni disturbati creano un loro campo magnetico; di conseguenza, gli atomi si comportano come piccoli magneti che si orientano in direzione opposta al campo applicato. Nei diamagneti, quindi, gli elettroni aggiustano le loro traiettorie per compensare l'influenza del campo magnetico esterno e ciò comporta un campo magnetico indotto

diretto nella direzione opposta: quindi il momento magnetico indotto è antiparallelo al campo esterno.

Tuttavia, anche i due materiali che esibiscono le più pronunciate proprietà magnetiche, cioè il bismuto e la grafite, risultano così debolmente diamagnetici che solo piccole quantità possono essere levitate: nel 1939, infatti, Braunbeck levitò piccoli granelli di grafite in un elettromagnete verticale.

Soltanto 50 anni più tardi, con la possibilità di generare campi magnetici elevati, si è sviluppata la levitazione di materiali diamagnetici: nel 1991 Beaugnon e Tournier sollevarono gocce d'acqua ed altre sostanze organiche e furono ben presto seguiti da altri che levarono idrogeno, elio ed uova di rana.

Al giorno d'oggi, utilizzando forti campi magnetici, è possibile levitare una quantità di altri materiali, dai semplici metalli (bismuto  $Bi$  e antimonio  $Sb$ ), liquidi (propanolo, acetone e azoto liquido) e vari polimeri, a cose quotidiane come piante ed esseri viventi.

Gocce d'acqua, fiori, nocchie, nonché creature viventi come rane, topi e cavallette sono state levitate in questo modo all'Università di Nijmegen in Olanda [4] e all'Università di Nottingham in Gran Bretagna [3].

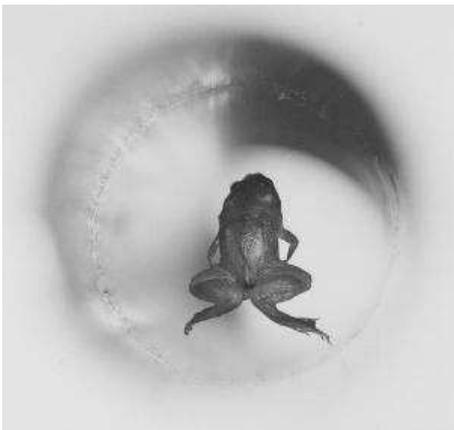


Figura 1.3: *Rana levitata*

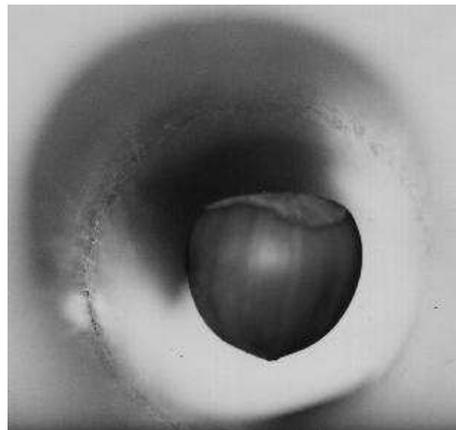


Figura 1.4: *Nocciola sospesa*

Gli oggetti da levitare vengono collocati al centro di un solenoide verticale

di forma cilindrica.

Per la levitazione della rana (Fig. 1.3) è stato usato un magnete capace di creare un campo magnetico di  $20 T$ . In questo campo, tutti gli atomi costituenti la rana agiscono come magneti molto piccoli creando un campo di circa  $2 G$ . Si potrebbe pensare che la rana sia costituita da tutti questi magneti minuscoli che respingono il magnete grande. La forza, che è diretta verso l'alto, è in grado di compensare la forza di gravità, diretta verso il basso, che agisce anche su ogni singolo atomo della rana. Così gli atomi della rana non risentono di alcuna forza e la rana fluttua come se fosse in una navicella spaziale; inoltre la magnetizzazione indotta nella rana è molto piccola, circa  $1.5 G$ , e la rana sembra non subire effetti dannosi in seguito all'esposizione ad un'intensità elevata del campo magnetico.

La Fig. 1.4 mostra una nocciola sospesa: quest'ultima è stata posta in un campo di  $20 T$ ; il procedimento è analogo a quello descritto per la rana. Si potrebbe pensare che il campo indotto generi una corrente sorprendentemente elevata ( $\sim 1 A$ ) nel guscio della nocciola, ma la corrente rappresenta la somma di correnti microscopiche non dissipative indotte negli atomi; pertanto, le creature viventi, quando levitano, non rimangono folgorate.

Uno svantaggio che presenta questa tecnica di levitazione è che un oggetto diamagnetico può levitare solo in un intorno di un punto di flesso della componente verticale del campo magnetico applicato, dove  $d^2B_z/dz^2 = 0$ : questa è una condizione puramente geometrica, che non dipende dalla forza del campo. Di conseguenza, la forza del campo deve essere attentamente regolata per compensare la gravità in quel particolare punto.

### 1.2.3 Superconduttori

Alcuni metalli ed alcune leghe, se raffreddati ad una temperatura prossima a  $0 K$ , diventano superconduttori. Lo stato di superconduttività è indicato da una completa assenza di resistenza elettrica ed, una volta indotta una corrente, quest'ultima continuerà a fluire anche in assenza di una sorgente di tensione nel circuito. Questo fenomeno è accompagnato da un altro fenomeno

noto come *effetto Meissner*: il superconduttore respinge il flusso magnetico e ciò induce in esso un comportamento perfettamente diamagnetico ( $\mu_r = 0$ ).

La superconduttività è una proprietà che può essere distrutta quando è presente un forte campo magnetico. Il campo necessario a distruggere la superconduttività, detto *campo critico o di soglia*, dipende dalla temperatura e scompare alla temperatura di transizione. La transizione tra stato di superconduttività e stato normale è reversibile se provocata dalla variazione dell'intensità del campo o della temperatura ambiente.

I materiali che perdono facilmente la proprietà di essere superconduttori, di cui fanno parte anche i metalli puri, sono detti superconduttori ideali o *deboli*. In pratica, la transizione per questi materiali e l'espulsione del flusso magnetico, escludendo la condizione di flusso nullo, è improvvisa e completa.

Esistono anche leghe e composti superconduttori non ideali o *forti* che restano parzialmente superconduttori anche quando sono soggetti a forti campi magnetici. Tra i superconduttori *forti* si annoverano metalli quali il niobio ed il vanadio, ed anche nuovi ossidi appartenenti a questa categoria. Questi superconduttori sono in uno stato *Meissner* per campi molto bassi e diventano conduttori normali per campi abbastanza elevati.

Superconduttori *deboli* e *forti* differiscono nel modo di trasportare correnti elettriche. In un superconduttore *debole* la corrente è trasportata solo in un sottile strato superficiale. In uno *forte*, invece, è come se la corrente fosse trasportata attraverso filamenti all'interno del materiale.

L'effetto del campo magnetico è differente nei due casi. Quando il campo è basso, sotto  $0.1 \text{ kG}$ , entrambi i tipi di superconduttori conducono corrente in un sottile strato superficiale ed il campo è espulso dall'interno del materiale. Se un campo moderato di  $1 \div 10 \text{ kG}$  è applicato ad un superconduttore *debole* ne distrugge la superconduttività. In uno *forte*, il flusso superconduttivo sembra essere trasferito a sottili filamenti ed in certi superconduttori *forti* il flusso filamentoso persiste anche in campi ad alta intensità dell'ordine di  $10 \div 100 \text{ kG}$  ed oltre.

La levitazione stabile di un superconduttore su un magnete permanente

o di un magnete su un superconduttore piano (Fig. 1.5) ha affascinato i fisici dalla scoperta del fenomeno della superconduttività. Forti forze repulsive danno luogo ad una levitazione molto stabile e silenziosa, che, a parte, il raffreddamento, non richiede immissione di energia.

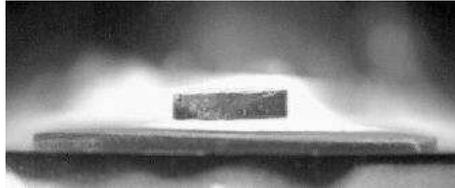


Figura 1.5: *Superconduttore ad alta temperatura (con  $T_c$  anche fino a 200 K) in sospensione magnetica*

In genere, la levitazione osservata per i superconduttori *deboli* si attribuisce ad un perfetto diamagnetismo: ciò è vero per i metalli puri, come piombo o stagno. A temperature  $T < T_c$ , essendo  $T_c$  la temperatura critica o di transizione, al di sotto della quale si verifica il fenomeno della superconduttività, questi superconduttori respingono tutto il flusso magnetico al loro interno; le correnti di schermaggio scorrono in uno strato sottile della superficie. Questo tipo di superconduttori levitati presenta una sola posizione di equilibrio stabile, attorno alla quale possono oscillare, ruotare o orbitare senza quasi nessuno smorzamento.

Un superconduttore *forte* levitato può assumere molteplici posizioni e direzioni stabili che gli permettono di levitare immobile, senza rotazioni o oscillazioni. L'invisibile forza d'attrito che lo tiene fermo è originata dall'intrappolamento del flusso magnetico all'interno del superconduttore.

I magneti superconduttori hanno campi magnetici massimi dell'ordine di  $5 \div 10 T$ .

#### 1.2.4 Rotazione

Il *levitrone*, mostrato in Fig. 1.6, è una trottola levitante che realizza la levitazione usando magneti permanenti in configurazione repulsiva.

La forza magnetica è quella che respinge verso l'alto la trottola dalla base di appoggio. Sia la trottola che la base sono magnetizzate, ma in senso opposto: si può immaginare la base come un magnete con il polo nord diretto verso l'alto, e la trottola come un magnete con il polo nord diretto verso il basso. A causa della relazione che lega le forze alla distanza, la repulsione nord-nord domina, e la trottola è magneticamente respinta, rimanendo sospesa nel punto in cui la repulsione verso l'alto bilancia la forza di gravità, cioè nel punto di equilibrio dove la forza è nulla.



Figura 1.6: *Levitrone*

La rotazione avviene affinché la trottola non si ribalti. Nell'esercitare una forza sull'intera trottola, il campo magnetico della base provoca una torsione che tende a girare l'asse di rotazione della trottola. Se quest'ultima non ruotasse, questa torsione magnetica la ribalterebbe. Quando la trottola ruota, la torsione agisce giroscopicamente e l'asse non si rigira, ma ruota intorno alla direzione, quasi verticale, del campo magnetico. Questa rotazione è detta precessione.

Affinché la trottola rimanga sospesa, il solo equilibrio non è sufficiente. L'equilibrio deve anche essere stabile, al punto che un leggero spostamento orizzontale o verticale riesca a produrre una forza che spinga indietro la trottola verso il punto di equilibrio. Per il levitrone la stabilità è difficile da ottenere: ciò dipende dal fatto che, non appena la trottola si sposta lateralmente, lontano dall'asse del magnete della base, il campo magnetico della base, intorno a cui l'asse della trottola compie la precessione, devia leggermente dalla verticale. Se la trottola precedesse intorno alla verticale esatta,

si avrebbe un equilibrio instabile.

Il teorema di Earnshaw, però, non è violato dal comportamento del *levitron*: infatti per quest'ultimo il magnete della trottola ruota e in tal modo risponde dinamicamente al campo della base d'appoggio.

Preferibilmente vengono usati per la realizzazione materiali ceramici e non i metalli. In una trottola di metallo, che conduce elettricità, gli elettroni condurranno correnti dissipative; la resistenza nel metallo smorza queste ultime e dissipa l'energia rotazionale della trottola, provocandone il rallentamento e l'eventuale caduta. La trottola realizzata in materiale ceramico è, invece, un isolatore, in tal modo le correnti dissipative non possono fluire.

### 1.2.5 Effetti quantistici

Effetti quantistici permettono la levitazione stabile di elettroni e di atomi che trasportano un momento magnetico in campi elettrici e magnetici.

Ad esempio elettroni sono stati levitati stabilmente su una superficie di elio liquido ad una distanza di  $\sim 10^{-8}$  m: gli elettroni possono muoversi liberamente parallelamente a questa superficie e formare un reticolo bidimensionale (cristallizzazione di Wigner), che esibisce nuove proprietà fisiche e fornisce la stabilità laterale.

Tecnicamente un qualsiasi corpo posto su una superficie è levitato ad una distanza microscopica da essa. Questo fenomeno è dovuto alle forze elettromagnetiche intermolecolari e non a ciò che significa il termine levitazione.

A causa delle piccole distanze, gli effetti quantistici sono significativi e non violano il teorema di Earnshaw in quanto esso vale solo dal punto di vista classico.

## 1.3 Magnet permanenti

Un magnete permanente è un elemento passivo usato per generare un campo magnetico per mantenere il quale non è necessaria una corrente che fluisca in una bobina o in solenoide: infatti, l'energia necessaria è stata imma-

gazzinata precedentemente quando il magnete permanente è stato “caricato”, cioè quando è stato inizialmente magnetizzato con un campo di forte intensità che, dopo essere stato rimosso, lascia un’induzione magnetica residua.

### 1.3.1 Stabilità

È importante sapere sotto quali condizioni un magnete permanente si comporterà secondo le caratteristiche progettuali.

Possono presentarsi due principali problemi:

- a) effetti temporanei dovuti al funzionamento a temperature superiori a quelle per le quali il materiale è stato progettato;
- b) deterioramento permanente delle proprietà magnetiche provocato dall’esposizione ad alti campi magnetici (*smagnetizzazione*) oppure dalla modifica di microstrutture provocata dall’esposizione ad elevate temperature (*invecchiamento*).

Le temporanee o reversibili variazioni con la temperatura delle proprietà magnetiche sono provocate dalla riduzione della magnetizzazione spontanea nei domini in cui la temperatura è aumentata. La riduzione è tanto più significativa quanto più la temperatura si avvicina alla temperatura di Curie, cioè alla temperatura al di sopra della quale il materiale assume le caratteristiche di un paramagnete.

Le variazioni permanenti che avvengono come risultato dell’esposizione ad elevate temperature sono provocate dall’accelerazione del processo di invecchiamento. Per molti materiali per magneti permanenti la trasformazione di fase avviene, a temperatura ambiente, molto lentamente; a temperature più alte la trasformazione procede più rapidamente.

Altri fattori come il trattamento meccanico, la corrosione e gli effetti radiativi possono alterare le proprietà dei magneti permanenti.

### 1.3.2 Materiali per magneti permanenti

La Tab. 1.2 illustra la composizione, i valori dell'induzione magnetica residua e la densità di alcuni tipi di magneti permanenti.

<i>Materiale</i>	<i>Composizione</i>		$B_r$ (T)	$\rho$ ( $g/cm^3$ )
Al-Ni-Co 2	12 % <i>Al</i>	26 % <i>Ni</i>	0.7	
	3% <i>Cu</i>	63 % <i>Fe</i>		
Al-Ni-Co 5	8% <i>Al</i>	15 % <i>Ni</i>	1.2	
	24 % <i>Co</i>	3 % <i>Cu</i>		
		50 % <i>Fe</i>		
Ba Ferrite	$BaO \cdot 6Fe_2O_3$		0.395	
Pt-Co	77 % <i>Pt</i>	23 % <i>Co</i>	0.645	
Sm-Co	$SmCO_5$		0.85	8.3
Nd-Fe-B	$Nd_2Fe_{14}B$		1.3	7.4

Tabella 1.2: Proprietà di alcuni magneti permanenti

**ALNICO** Le leghe di ALNICO si svilupparono negli anni '30. Sono costituite, principalmente, da ferro, cobalto, nichel ed alluminio con piccole quantità di altri materiali come il rame. Le proprietà magnetiche di queste leghe sono migliorate per mezzo di un trattamento con un calore adeguato e sono superiori a quelle di altri materiali disponibili in quel periodo. Uno svantaggio di queste leghe è che sono molto dure e fragili e quindi possono essere solo modellate per colata o per schiacciamento e sintesi di polvere metallica.

**Ferrite di Bario** Questi materiali, noti come magneti ceramici, si sono sviluppati negli anni '50, sono relativamente economici da produrre e commercialmente restano i più importanti tra i materiali per magneti permanenti.

**Platino-Cobalto** Questo materiale per magneti permanenti si è sviluppato verso la fine degli anni '50. Sebbene le sue proprietà magnetiche fossero migliori rispetto a quelle di altri materiali disponibili nello stesso periodo, il suo costo lo rese inutilizzabile, fatta eccezione per magneti molto piccoli.

**Samarium-Cobalto** I materiali per magneti permanenti al *Sm-Co* si sono sviluppati alla fine degli anni '60, come risultato di uno sforzo di ricerca volto ad identificare materiali innovativi per magneti permanenti basati su leghe di terre rare con righe della transizione 3d di ferromagneti, ferro, cobalto e nichel.

**Neodimio-Ferro-Boro** Questo materiale fu scoperto nei primi anni '80, principalmente a causa di circostanze economiche.

Il principale vantaggio di queste leghe rispetto a quelle in *Sm-Co* è che i costituenti, ferro e neodimio, sono più economici del samario e del cobalto.

Uno svantaggio è il suo piuttosto basso punto di Curie intorno ai 300 – 500° C. Questo significa che le proprietà magnetiche sono abbastanza più sensibili rispetto alla temperatura di quelle del samario-cobalto e non sono utilizzabili per applicazioni a più alte temperature.

## 1.4 Scelta dei materiali per una sospensione magnetica

Dopo aver esaminato diverse tecniche applicabili per ottenere levitazione stabile, è opportuno stimare quelle più facilmente realizzabili dal punto di vista pratico e soprattutto economico.

La realizzazione di un sistema in controreazione è facilmente attuabile usando bobine o attuatori elettrostatici che forniscano corrente o tensione e siano legate alla posizione dell'oggetto da levitare.

L'uso dei materiali diamagnetici è limitato in quanto richiede l'applicazione di campi magnetici elevati, come illustrato nel Par. 1.2.2.

L'elevato costo dei materiali superconduttori e il relativo controllo della temperatura a cui sono soggetti rende l'uso di questi ultimi non molto frequente, escluso il caso in cui siano strettamente necessari.

Un'alternativa ai due tipi di materiali sopra citati è rappresentata dai magneti permanenti, il cui costo varia in base all'intensità del campo magnetico che producono: una descrizione storica dei magneti permanenti più importanti è stata riportata nel Par. 1.3.2, mentre la Tab. 1.2 fornisce un'indicazione di quale, tra quelli descritti, presenta induzione magnetica residua maggiore.

In questo lavoro di tesi si è scelto di realizzare una sospensione magnetica utilizzando un sistema in controreazione realizzato con bobine e facendo uso di magneti permanenti in samario-cobalto, entrambi già in uso in laboratorio, come verrà descritto nei capitoli che seguono.

# Capitolo 2

## Il sistema a levitazione magnetica

### 2.1 Descrizione

Una sospensione magnetica, come isolatore, può essere paragonata, in prima approssimazione, ad un oscillatore armonico meccanico.

Nel 1° capitolo sono stati esaminati vari modi per realizzare una sospensione magnetica; tra essi c'è quello di usare un sistema in controreazione: in questo lavoro di tesi si è adoperato proprio questo metodo per raggiungere lo scopo.

Una possibile configurazione per una sospensione magnetica può essere pensata come in Fig. 2.1: la bobina è utilizzata per ottenere la stabilità, mentre il magnete in attrazione con quello levitato per ottenere l'equilibrio.

La possibilità di un oggetto di levitare, cioè fluttuare stabilmente, in un campo magnetico è definita dal bilanciamento tra la forza magnetica  $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$ , dove  $\vec{m}$  rappresenta il momento di dipolo magnetico dell'oggetto e  $\vec{B}$  il campo magnetico, e la forza di gravità  $M\vec{g} = \rho V\vec{g}$ , dove  $\rho$  è la densità del materiale,  $V$  il volume e  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  l'accelerazione di gravità,

considerata costante <sup>1</sup>.

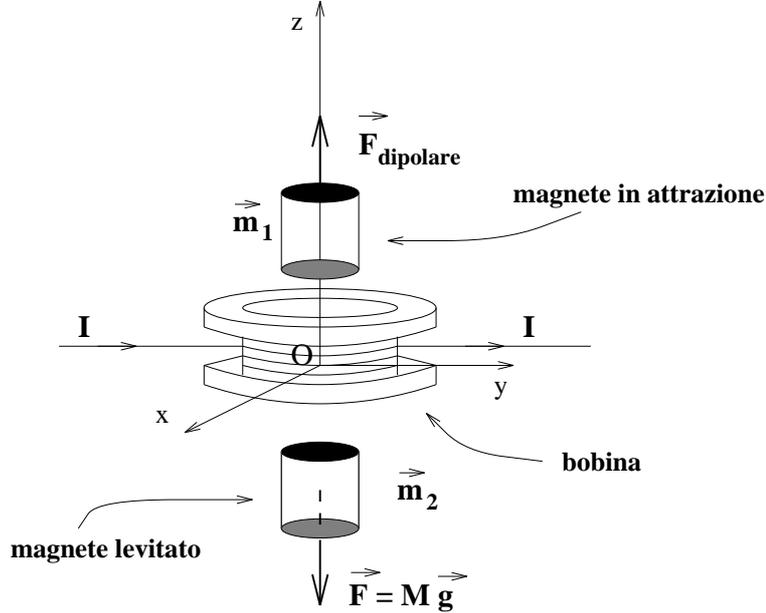


Figura 2.1: *Sospensione magnetica*

Affinché l'oggetto si sollevi deve essere verificata la condizione

$$\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \geq \rho V \vec{g} \quad (2.1)$$

dove l'uguaglianza indica il bilanciamento tra le forze.

La stabilità dell'oggetto sollevato, ottenuta con un sistema in controreazione, permette di realizzare la levitazione.

Analizziamo, dal punto di vista teorico, le diverse forze coinvolte nella realizzazione di una sospensione magnetica.

<sup>1</sup>In realtà  $g = \frac{GM_T}{R_T^2} \sim 9.81 \text{ m/s}^2$  essendo  $M_T = 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  la massa della Terra,  $R_T = 6378 \cdot 10^3 \text{ m}$  il suo raggio e  $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ kg}$  la costante di gravitazione universale; la variazione lungo la verticale, considerando  $R_T \sim z$  è  $\Delta g = \frac{2GM_T}{R_T^3} \Delta z = 6.1 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$  se lo spostamento  $\Delta z$  è di  $2 \text{ cm}$ . I microgravimetri in uso attualmente presentano una sensibilità rispetto all'accelerazione di gravità superficiale di  $1 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$ , quindi, a rigore,  $g$  non è costante.

## 2.2 La forza tra dipoli magnetici

Il campo magnetico  $\vec{B}_d$  generato da un dipolo magnetico di momento  $\vec{m}$  (vedi App. B) risulta

$$\begin{aligned}
 B_x &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{mx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3mxz}{r^5} \\
 B_y &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{-my}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3myz}{r^5} \\
 B_z &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} m \left[ \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m(3z^2 - r^2)}{r^5}. \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

pertanto, la forza magnetica esercitata su un dipolo di momento  $\vec{m}$  in presenza del campo  $\vec{B}_d$  di un altro dipolo risulta

$$\vec{F}_d = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}_d) \quad (\vec{m} = \text{costante}) \tag{2.3}$$

mentre il momento meccanico risultante è

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_d. \tag{2.4}$$

Consideriamo un sistema costituito da un magnete permanente fisso che esercita una forza attrattiva o repulsiva su un altro magnete permanente non vincolato.

Il sistema di riferimento, come mostrato in Fig. 2.2, è scelto in modo che l'origine coincida con il centro del magnete fisso e l'asse  $z$  sia orientato in direzione opposta alla forza peso.

I magneti sono considerati puntiformi, in tal modo, utilizzando l'approssimazione di dipolo, la relazione tra forza e distanza viene sviluppata al primo ordine e la forza risulta inversamente proporzionale alla quarta potenza della distanza.

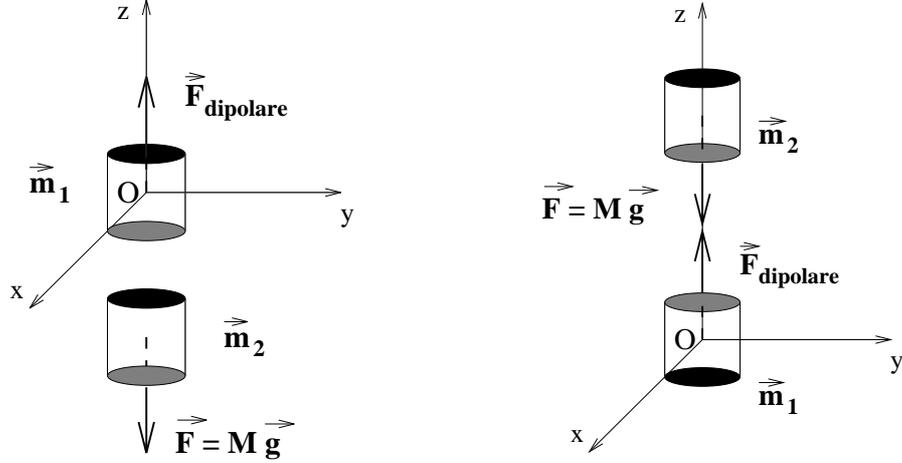


Figura 2.2: Sistema di magneti in attrazione (a sinistra) ed in repulsione (a destra)

Detto  $\vec{m}_1$  il momento di dipolo magnetico del magnete fisso ed  $\vec{m}_2$  quello del magnete non vincolato, la forza attrattiva o repulsiva che il magnete di momento dipolare  $\vec{m}_1$  esercita sul magnete di momento dipolare  $\vec{m}_2$  è

$$\vec{F}_d = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_d) \quad (2.5)$$

dove l'espressione del campo  $\vec{B}_d$  è data dalle (2.2), o dalla (B.14) se il mezzo non è il vuoto, sostituendo  $\vec{m}$  con  $\vec{m}_1$ .

Per la scelta del sistema di riferimento si è invertito il segno delle componenti del campo  $\vec{B}_d$ ; pertanto, nelle sue componenti, la forza risulta

$$\begin{aligned} F_{x_d} &= \frac{3}{4\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \left[ \frac{5z^2 - r^2}{r^7} \right] x \\ F_{y_d} &= \frac{3}{4\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \left[ \frac{5z^2 - r^2}{r^7} \right] y \\ F_{z_d} &= \frac{3}{4\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \left[ \frac{5z^2 - 3r^2}{r^7} \right] z, \end{aligned} \quad (2.6)$$

essendo  $r$  la distanza del dipolo levitato dall'origine del sistema di riferimento.

Per garantire equilibrio e stabilità alle configurazioni di Fig. 2.2 occorre applicare la condizione di equilibrio e la condizione di stabilità, enunciate

nelle relazioni (1.1), alla forza totale agente sul sistema.

Essendo la forza totale agente sul sistema

$$\vec{F}_{tot} = M\vec{g} + \vec{F}_d \quad (2.7)$$

le condizioni (1.1) diventano

$$\begin{aligned} \vec{F}_{tot} &= 0 \quad \text{e} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{tot} &= \frac{\partial F_{x_{tot}}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y_{tot}}}{\partial y} + \frac{\partial F_{z_{tot}}}{\partial z} < 0 . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Per verificare le condizioni (2.8) si possono sviluppare al primo ordine le componenti della forza tra i dipoli magnetici in un punto dell'asse  $z$  di coordinate  $\vec{r}_0(0, 0, z_0)$ , tale che in questo punto la componente  $z$  della forza tra i dipoli uguagli la forza peso

$$|Mg| = |F_{z_{tot}}(0, 0, z_0)| = \left| \frac{3}{2\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{1}{z_0^4} \right| . \quad (2.9)$$

La coordinata  $z_0$  è negativa per la configurazione attrattiva e positiva per quella repulsiva, mentre i momenti di dipolo magnetici risultano positivi se diretti entrambi lungo la direzione dell'asse  $z$ , pertanto il prodotto  $m_1 \cdot m_2$  è positivo se i segni di  $m_1$  e di  $m_2$  sono concordi e negativo se sono discordi.

Con l'approssimazione usata le componenti della forza totale diventano

$$\begin{aligned} F_{x_{tot}} &= F_{x_d}(\vec{r}_0) + \frac{\partial F_{x_d}}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} x = -\frac{3}{\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{z_0}{|z_0|^6} x \\ F_{y_{tot}} &= F_{y_d}(\vec{r}_0) + \frac{\partial F_{y_d}}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} y = -\frac{3}{\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{z_0}{|z_0|^6} y \\ F_{z_{tot}} &= -Mg + F_{z_d}(\vec{r}_0) + \frac{\partial F_{z_d}}{\partial z} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} (z - |z_0|) = \\ &= -Mg + \frac{3}{2\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \left[ \frac{z_0}{|z_0|^4} + \frac{4z_0}{|z_0|^6} (z - |z_0|) \right] . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il punto  $\vec{r}_0(0, 0, z_0)$  soddisfa la condizione di equilibrio, mentre quella di stabilità non è soddisfatta, infatti, in questa approssimazione, sommando le derivate parziali delle componenti della forza totale

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial F_{x_{tot}}}{\partial x} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} &= -\frac{3}{\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{z_0}{|z_0|^6} \\
\left. \frac{\partial F_{y_{tot}}}{\partial y} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} &= -\frac{3}{\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{z_0}{|z_0|^6} \\
\left. \frac{\partial F_{z_{tot}}}{\partial z} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} &= \frac{3}{\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{2z_0}{|z_0|^6}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

la seconda delle (2.8) risulta nulla.

Non esiste, pertanto, una posizione di equilibrio stabile per il magnete non vincolato in presenza del solo magnete, né nel caso di magneti in attrazione, cioè con  $m_1 m_2 < 0$ , per i quali si ha stabilità lungo le direzioni  $x$  e  $y$ , ma la posizione  $z$  è instabile, né in quello dei magneti in repulsione, cioè con  $m_1 m_2 > 0$ , per i quali si ha stabilità lungo la direzione  $z$  ed instabilità lungo le altre due direzioni.

## 2.3 Bobina percorsa da corrente

Stimiamo, ora, il campo magnetico prodotto da una bobina percorsa da corrente.

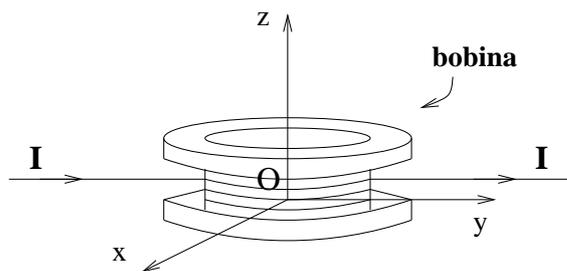


Figura 2.3: Bobina costituita da  $N$  avvolgimenti

Il sistema di riferimento è scelto in modo che il centro della bobina coincida con l'origine e l'asse  $z$  rappresenti l'asse della bobina, come illustra la Fig. 2.3.

Avendo calcolato il campo magnetico generato da una spira circolare percorsa da corrente (vedi App. B), il campo generato nel punto  $\vec{r}_b$  da una bobina percorsa da corrente costituita da  $N$  spire di forma circolare risulta

$$\vec{B}_{0_b} = N\vec{B}_0(\vec{r}_b) = \frac{\mu_0 N I R_b}{2} \frac{\sin \beta}{|\Delta\vec{r}_b|^2} \quad (2.12)$$

con l'ipotesi di trascurare la dimensione finita delle spire ed essendo  $\vec{r}_b$  la distanza di un punto dal centro della bobina e  $\Delta\vec{r}_b$  la distanza dello stesso punto dal bordo della bobina.

Per punti appartenenti all'asse  $z$  l'espressione del campo generato dalla bobina risulta

$$\vec{B}_0(z) = \frac{\mu_0 N I R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{3/2}} \hat{n} \quad (2.13)$$

con  $\hat{n}$  versore normale alla spira, coincidente con il versore  $\hat{k}$  dell'asse  $z$ .

Se la bobina è posta in un mezzo materiale il campo in tale mezzo sarà

$$\vec{B}_b = \mu_r \vec{B}_{0_b} . \quad (2.14)$$

### 2.3.1 La forza esercitata da una bobina su un magnete

Scelto un sistema di riferimento con l'origine nel centro di una bobina di  $N$  avvolgimenti, come mostra la Fig. 2.4, la forza esercitata dalla bobina su un magnete di momento dipolare magnetico  $\vec{m}_2$  vale

$$\vec{F}_b = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_b) \quad (2.15)$$

che, sostituendo per il campo  $\vec{B}_b(\vec{r}_b)$  la relazione (2.12), moltiplicata per  $\mu_r$ , nelle sue componenti diventa

$$\begin{aligned}
F_{x_b} &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_b) = -\frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{2} \cos \delta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{|\Delta \vec{r}_b|^2} \right) = \\
&= \frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{|\Delta \vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] x \cos \delta \\
F_{y_b} &= \frac{\partial}{\partial y}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_b) = -\frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{2} \cos \delta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{|\Delta \vec{r}_b|^2} \right) = \\
&= \frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{|\Delta \vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] y \cos \delta \\
F_{z_b} &= \frac{\partial}{\partial z}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_b) = -\frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{2} \cos \delta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{|\Delta \vec{r}_b|^2} \right) = \\
&= \frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{|\Delta \vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] z \cos \delta \quad (2.16)
\end{aligned}$$

essendo  $\delta$  l'angolo compreso tra la direzione di  $\vec{m}_2$ , che per la disposizione della spira coincide con quella dell'asse  $z$ , e la direzione del campo magnetico  $\vec{B}_b(\vec{r}_b)$  (Fig. B.2).

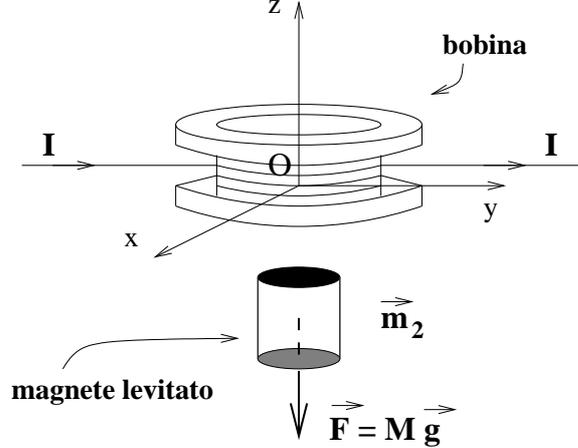


Figura 2.4: Sistema costituito da una bobina che esercita una forza su un magnete permanente

In forma vettoriale l'espressione della forza diventa

$$\vec{F}_b = \frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{|\Delta \vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \cos \delta \quad (2.17)$$

mentre il modulo è

$$|\vec{F}_b| = \frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{|\Delta \vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] r_b \cos \delta . \quad (2.18)$$

La forza assume massimi e minimi relativi quando sono soddisfatte le condizioni

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_b = 0 \quad H(x, y) = \begin{vmatrix} F_{b_{xx}} & F_{b_{xy}} \\ F_{b_{yx}} & F_{b_{yy}} \end{vmatrix} > 0 \quad (2.19)$$

essendo  $H(x, y, z)$  l'Hessiano della funzione  $\vec{F}_b$ .

La prima delle (2.19) è verificata per  $r_b = R_b \cos \gamma \pm \frac{R_b}{\sqrt{3}} \sin \gamma$  per tutte e tre le componenti.

Il valore assunto dalla forza in questi punti è

$$|\vec{F}_b| \left( R_b \cos \gamma \pm \frac{R_b}{\sqrt{3}} \sin \gamma \right) = \pm \frac{3\sqrt{3}}{16} \mu_0 \mu_r m_2 N I \frac{\sin \beta \cos \delta}{R_b^2 \sin^3 \gamma} . \quad (2.20)$$

Considerando solo punti lungo l'asse  $z$  la forza assume l'espressione

$$\vec{F}_b = -\frac{3}{2} \mu_0 \mu_r m_2 N I R_b^2 \frac{z}{(z^2 + R_b^2)^{5/2}} \hat{n} \quad (2.21)$$

ottenuta applicando la (2.15) all'espressione (2.13) del campo magnetico lungo l'asse  $z$ .

Dalla prima delle (2.19) si evince che la forza massima, in questo caso, si ottiene per  $z = \pm R_b/2$  e vale

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{max}| &= |\vec{F}_b| \left( \pm \frac{R_b}{2} \right) = \\ &= \pm \frac{3}{4} \mu_0 \mu_r m_2 N I \left( \frac{4}{5} \right)^{5/2} \frac{1}{R_b^2} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

## 2.4 Sospensione magnetica singola

Una sospensione magnetica singola può essere pensata come in Fig. 2.4, supponendo che il mezzo in cui è posta la sospensione sia l'aria, che presenta una permeabilità magnetica  $\mu_r \simeq 1$ .

Il valore teorico del momento di dipolo  $\vec{m}_2$  del magnete permanente si è ottenuto utilizzando per il campo  $\vec{B}$  generato dal magnete il valore nominale dell'induzione magnetica residua  $B_r = 0.85 T$  di un magnete permanente (vedi Tab. 1.2) di forma cilindrica del tipo utilizzato sperimentalmente; la magnetizzazione residua del magnete si è calcolata utilizzando la relazione  $B_r = \mu_0 M_r$ , essendo  $M_r$  la magnetizzazione residua per unità di volume.

Per il momento di dipolo magnetico si è usata la relazione

$$\vec{m} = I\vec{S} = \vec{M}_r V . \quad (2.23)$$

Il magnete è stato ipotizzato di forma cilindrica con un raggio  $R = 7 mm$  ed un'altezza  $h = 4 mm$ , e con un volume  $V = Sh = \pi R^2 h$ , essendo  $S = \pi R^2$  l'area di base.

Da queste considerazioni è stato ottenuto per il momento magnetico dipolare un valore di  $0.42 Am^2$ .

L'equazione della dinamica per la configurazione in esame è

$$M\vec{a} = \vec{F}_b + \vec{F}_{peso} . \quad (2.24)$$

Utilizzando le espressioni (2.16) si può esprimere la (2.24) in termini di componenti, ottenendo

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= \frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{|\Delta \vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] x \cos \delta \\ M\ddot{y} &= \frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{|\Delta \vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] y \cos \delta \\ M\ddot{z} &= \frac{\mu_0 \mu_r m_2 N I R_b \sin \beta}{|\Delta \vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] z \cos \delta - Mg \end{aligned} \quad (2.25)$$

da cui è possibile ricavare una legge del moto per il magnete sospeso.

Per ottenere una posizione di equilibrio stabile occorre realizzare un sistema in feedback regolando la corrente  $I$ , e quindi la forza che agisce sul

magnete levitato, al variare della sua posizione: ciò viene ottenuto mediante un opportuno sistema di misura della posizione ed un opportuno amplificatore di corrente. Siccome si riesce a controllare un solo grado di libertà, corrispondente alla posizione lungo la verticale, la relazione tra la corrente e la posizione si può scrivere  $I = I(z)$ : la funzione che lega  $I$  ad  $z$  dipende dal progetto del sistema di reazione.

Risalta immediatamente, dalle (2.25), che il sistema è fortemente non lineare. Un adeguato quadro della natura del problema del controllo della sospensione può, comunque, essere ottenuto cercando un modello linearizzato.

La corrente  $I$  nella bobina genera nel magnete una forza che lo attrae o lo respinge in base al verso della corrente ed è tale da poter uguagliare il peso dell'oggetto che deve essere sospeso, sia esso il singolo magnete permanente oppure un magnete permanente incollato su una massa di prova. Un qualunque spostamento nella posizione dell'oggetto da levitare corrisponde ad una variazione  $I$  in corrente. Si suppone, in prima analisi, che la variazione della forza attrattiva o repulsiva sia data da una funzione proporzionale alla variazione della corrente con la posizione  $I(z)$ : in questo modo la forza esercitata dalla bobina può essere paragonata ad una forza di richiamo la cui costante elastica è calcolata nel punto in cui la bobina esercita la sua massima forza.

L'equazione linearizzata è pertanto

$$F_b = k_b I(z) \quad (2.26)$$

per piccole variazioni intorno alla posizione di equilibrio, dove  $k_b$  è la forza per unità di corrente al variare della distanza.

Essendo  $z$  funzione del tempo, la relazione che lega la corrente alla posizione non è banale. Nel caso di corrente continua si può ipotizzare per la relazione  $I(z)$  un andamento lineare con la posizione; lungo la direzione dell'asse  $z$ , a meno di un fattore moltiplicativo, la relazione diventa

$$I(z) = az \quad (2.27)$$

dove  $a$  è un fattore amplificativo; il bilanciamento delle forze consente di scrivere

$$k_b (az) - Mg = 0 \quad (2.28)$$

dove  $M$  è la massa dell'oggetto sospeso ed il cambiamento di segno della forza di richiamo dipende dal sistema di riferimento scelto (Fig. 2.4).

Dalla (2.28) si ricava che il valore della costante  $a$  per  $z = R_b/2$ , posizione a riposo della forza di richiamo, è

$$a = \frac{2Mg}{k_b R_b} \quad (2.29)$$

Considerando l'equazione (2.22) si ha che  $k_b$  vale

$$k_b = \frac{3}{4} \mu_0 \mu_r m_2 N \left( \frac{4}{5} \right)^{5/2} \frac{1}{R_b^2} \quad (2.30)$$

ed il suo valore rappresenta la forza massima della bobina (vedi eq. 2.22) per unità di corrente.

Supponendo di avere una bobina con  $N = 500$  avvolgimenti ed un raggio  $R_b = 1.5 \text{ cm}$ , ed un magnete permanente di momento di dipolo magnetico  $m_2 = 0.42 \text{ Am}^2$ , il valore che si ottiene è  $k_b = 0.5 \text{ N/A}$ .

Assumendo una corrente massima di  $1 \text{ A}$  si ottiene un valore per la forza linearizzata uguale a  $0.5 \text{ N}$ .

Dal bilanciamento delle forze, è possibile valutare il peso della massa che, sotto le ipotesi fatte, potrà essere levitata.

Pertanto dovrà essere verificata la condizione

$$k_b I(z) \geq Mg ; \quad (2.31)$$

considerando l'uguaglianza nella relazione (2.31) si ottiene un valore per la possibile massa da levitare di  $\sim 50 \text{ g}$ .

Una stima dell'intervallo in cui la posizione del magnete può variare senza apprezzabili variazioni della forza per unità di corrente rispetto alla forza massima e quindi dell'intervallo in cui è valida l'approssimazione lineare per la forza della bobina ( $F_b = k_b I(z)$ ) si può ottenere graficando il rapporto tra

la forza esercitata dalla bobina sul magnete e la forza massima: il grafico è riportato in Fig. 2.5; dal grafico si può osservare che considerando accettabile una variazione di  $F_b/F_{max}$  entro il 5% si ottiene un intervallo di variazione della posizione verticale di 3.5 mm.

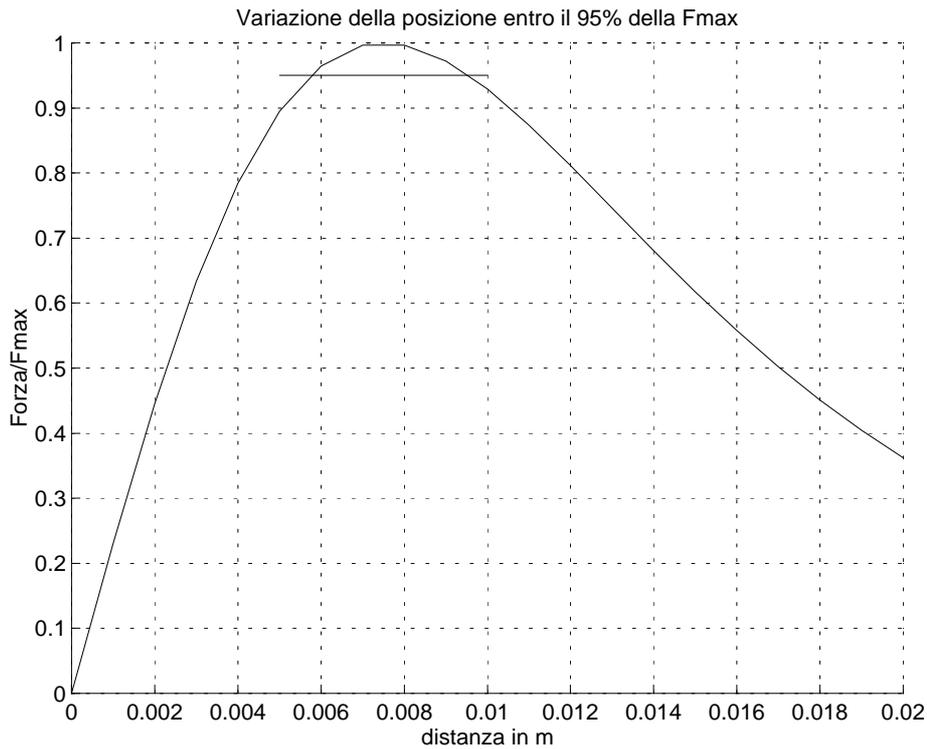


Figura 2.5: Rapporto tra la forza teorica esercitata dalla bobina e quella massima rispetto alla distanza del magnete

Siccome il sistema è un sistema di controllo ad anello chiuso è necessario realizzare il feedback con un opportuno filtro di reazione che garantisca la stabilità.

### 2.4.1 Compensazione del sistema in controreazione

La forma più semplice di compensazione è rappresentata dalla derivata del segnale posizione, ma la rete derivatrice [15], essendo un filtro passa alto non può essere usata da sola in un sistema in controreazione, perché blocca

la componente continua del segnale.

La stabilizzazione di sistemi in retroazione richiede l'uso di una rete anticipatrice [15] che comporta un aumento del margine di fase e del guadagno alle alte frequenze e quindi della larghezza di banda.

L'aggiunta di una rete ritardatrice [15] permette di diminuire il guadagno alle alte frequenze senza influire sulla costante di guadagno.

Pertanto, il tipo di compensazione più frequentemente usato è un **PID** [15], un regolatore proporzionale-integrale-derivativo che rappresenta una rete correttrice a ritardo ed anticipo: questo tipo di rete correttrice riunisce in sé i vantaggi della rete anticipatrice e di quella ritardatrice.

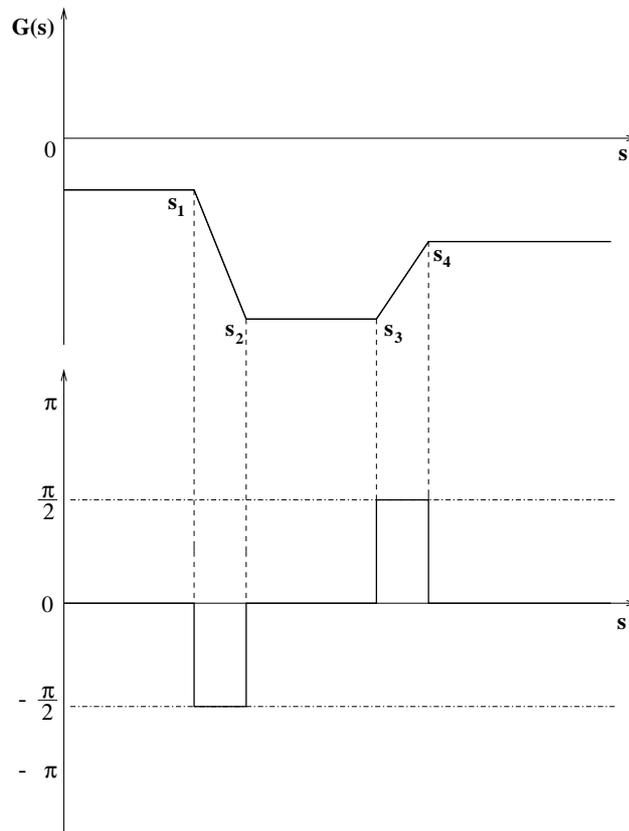


Figura 2.6: Funzione di trasferimento di un PID

La funzione di trasferimento di un **PID** è

$$h(s) = A \frac{\left(1 + \frac{s}{s_2}\right) \left(1 + \frac{s}{s_3}\right)}{\left(1 + \frac{s}{s_1}\right) \left(1 + \frac{s}{s_4}\right)} \quad (2.32)$$

La Fig. 2.6 mostra la funzione di trasferimento tipica di un **PID** schematizzata.

Un buon guadagno in continua per un **PID** si può ottenere scegliendo gli zeri coincidenti, mentre per ottenere un buon anticipo di fase si sceglie di porre il guadagno unitario nell'intervallo di frequenza compreso tra  $s_3$  ed  $s_4$ . La costante  $A$  permette di fissare la larghezza di banda. Per ottenere il guadagno unitario tra  $10 \text{ Hz}$  e  $100 \text{ Hz}$  si sono scelti i seguenti valori

$$s_1 = 1 \text{ mHz} \quad s_2 = s_3 = 1 \text{ Hz} \quad s_4 = 1 \text{ kHz} . \quad (2.33)$$

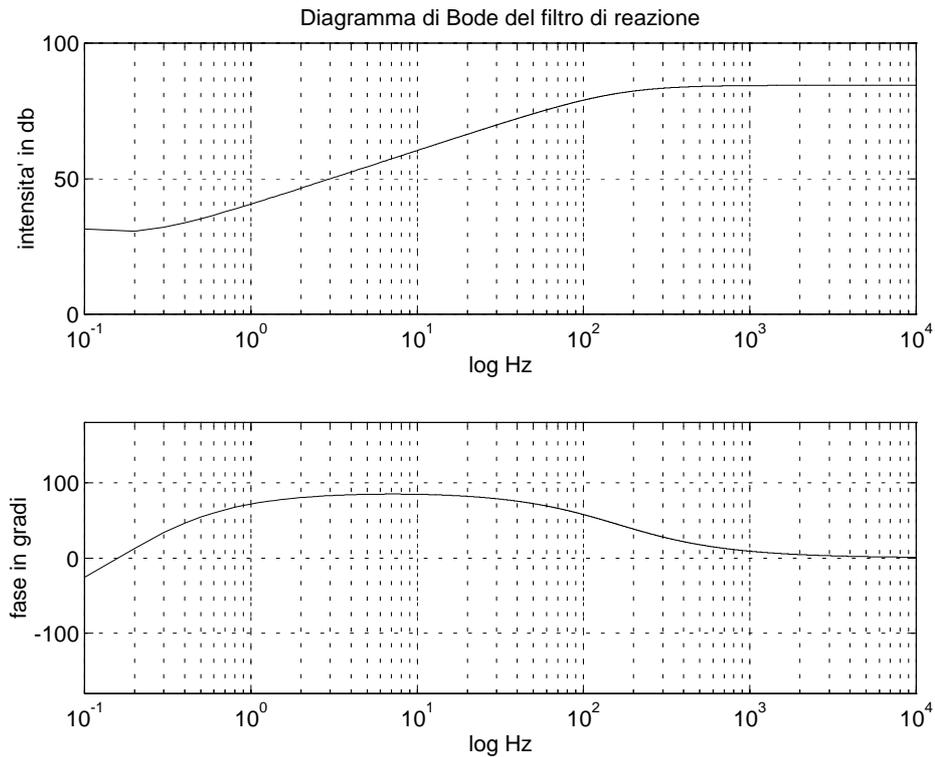


Figura 2.7: *Diagramma di Bode del filtro di reazione*

L'equazione della dinamica per il sistema in esame è

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_r + \vec{F}_a . \quad (2.34)$$

Siccome viene controllato un solo grado di libertà, quello lungo la verticale, la forza di richiamo è  $F_r = k_b I(z, t)$ , mentre  $F_a$  è una forza perturbativa esterna, ad es. una sorgente di rumore.

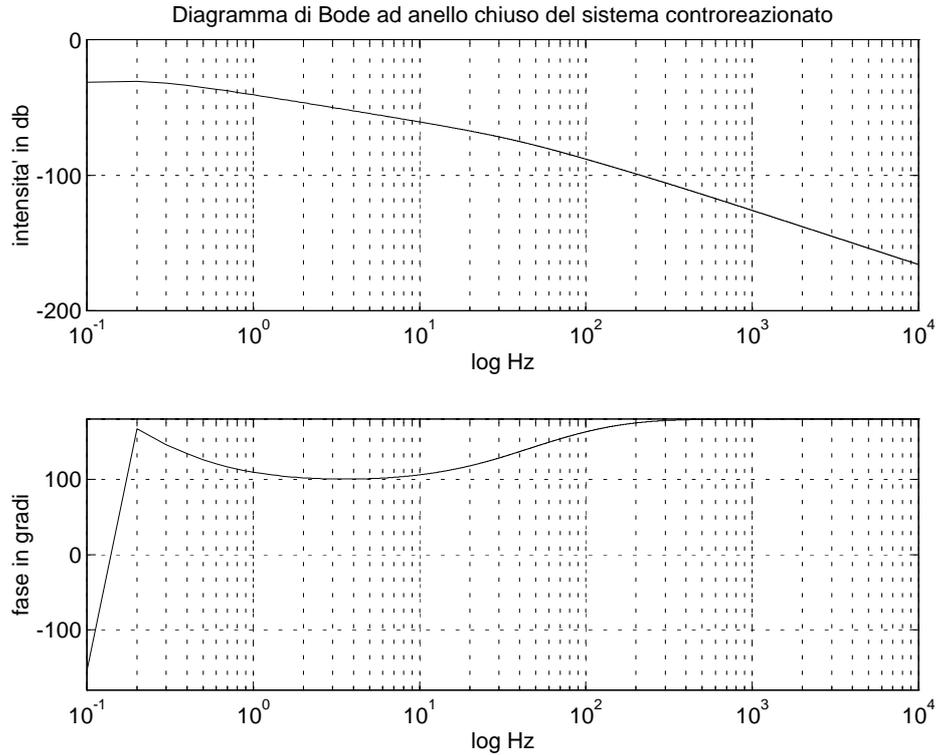


Figura 2.8: Diagramma di Bode del sistema controeazionato

Applicando la trasformata di Laplace all'equazione del moto del sistema controeazionato (2.34) e ricordando che la trasformata di Laplace di  $I(z, t)$  è  $I(s) = h(s)Z(s)$ , con  $h(s)$  espressa dalla relazione (2.32), si ottiene

$$Ms^2Z(s) = -Mg \delta(s) + k_b h(s)Z(s) + F_a(s) . \quad (2.35)$$

La funzione di trasferimento del filtro di reazione è

$$H(s) = k_b h(s) \quad (2.36)$$

il relativo diagramma di Bode è riportato in Fig. 2.7: i parametri utilizzati sono quelli indicati dalla (2.33), mentre è stato posto  $A = 3 \cdot 10^4$  per fissare il guadagno unitario del feedback intorno ai 50 Hz.

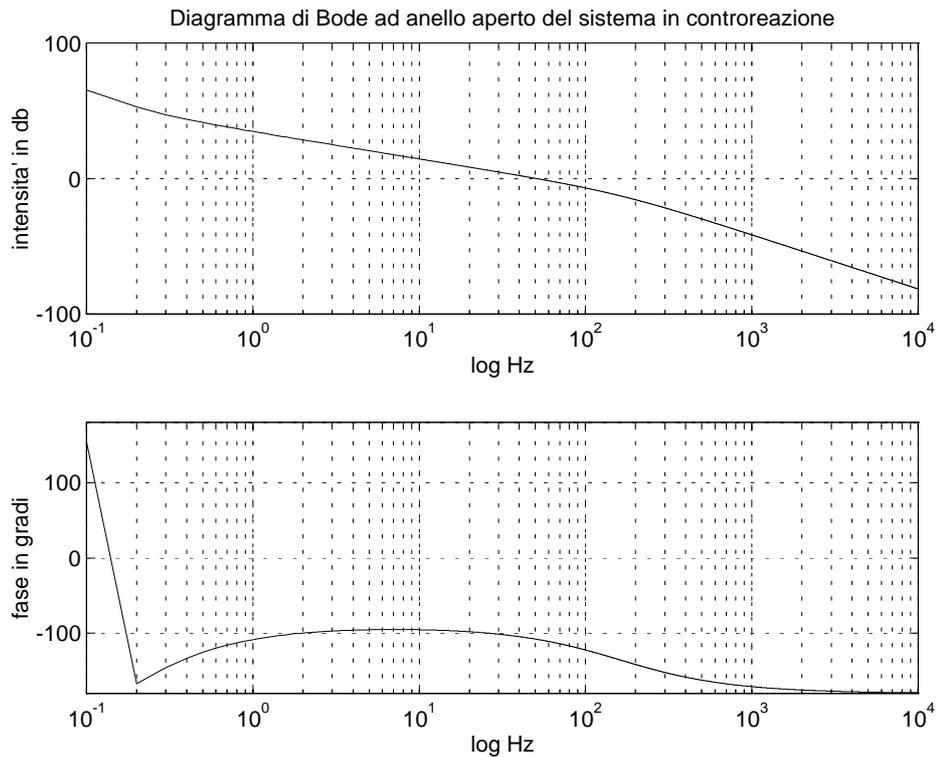


Figura 2.9: *Diagramma di Bode del sistema ad anello aperto*

Dalla relazione (2.35), per tutti i valori di  $s$ , tranne  $s = 0$ , la componente continua  $-Mg$  si annulla e la funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema controeazionato sarà

$$\frac{Z(s)}{F_a(s)} = \frac{1}{Ms^2 - H(s)} \quad (2.37)$$

con  $s = j\omega$ .

Ricordando che per un sistema controeazionato la funzione di trasferimento è (vedi App. C)

$$\frac{Z(s)}{F_a(s)} = \frac{G}{1 + GH} \quad (2.38)$$

si possono uguagliare la (2.37) e la (2.38) ottenendo

$$\frac{G}{1 + GH} = \frac{1}{Ms^2 - H(s)}. \quad (2.39)$$

Il relativo diagramma di Bode è rappresentato in Fig. 2.8, dove si è posto  $M = 50 \text{ g}$ , mentre  $k_b = 0.5 \text{ N/A}$  calcolato con l'espressione (2.30); l'intervallo di frequenza scelto è  $[0.1, 10000] \text{ Hz}$ .

Per determinare la funzione di trasferimento ad anello aperto, cioè  $GH$ , occorre moltiplicare la funzione di trasferimento senza reazione (vedi App. C) per quella del filtro di reazione (2.36) ottenendo, dall'analogia con la (2.38),

$$GH = -\frac{H}{Ms^2}. \quad (2.40)$$

La (2.40) presenta due zeri per  $s = s_2$  ed  $s = s_3$ , un polo doppio per  $s = 0$  e due poli per  $s = s_1$  ed  $s = s_4$ .

Il diagramma di Bode è mostrato in Fig. 2.9, per la quale sono stati assunti gli stessi parametri usati per ottenere la Fig. 2.8.

Dalla Fig. 2.9 si evince quanto il feedback sia stabile, con un margine di fase di  $\sim 70^\circ$  ed un margine di guadagno nominalmente infinito, in quanto la fase di  $GH$  raggiunge  $-180^\circ$  solo asintoticamente.

## 2.4.2 Miglioramento della sospensione magnetica singola

Risulta vantaggioso migliorare la configurazione della sospensione magnetica illustrata in Fig. 2.3 aggiungendo magneti permanenti in attrazione rispetto a quelli da levitare: una tale configurazione è stata anticipata nel Par. 2.1, in cui si è descritta una sospensione magnetica, ed è illustrata in Fig. 2.1.

Il vantaggio consiste nell'utilizzare la bobina per ottenere la stabilità dell'oggetto da levitare ed i magneti in attrazione per ottenerne l'equilibrio: il peso dell'oggetto da levitare potrebbe essere sostenuto completamente dai

soli magneti, mentre la corrente che circola nella bobina avrebbe il solo compito di attivare il feedback.

In tal modo si riesce a limitare la corrente che circola nella bobina fino ad annullarla, riuscendo ad attivare il feedback solo con la componente continua della corrente data da un offset che riporta a zero (cioè nella posizione di equilibrio stabile) l'oggetto.

Scelto il sistema di riferimento come mostrato in Fig. 2.1, cioè con l'origine coincidente con il centro della bobina, l'equazione della dinamica per la configurazione mostrata in questa figura è

$$M\vec{a} = \vec{F}_d + \vec{F}_b + \vec{F}_{peso} \quad (2.41)$$

che, ricordando le relazioni (2.6) e (2.16) e ricordando che nel sistema di riferimento scelto  $\vec{r}_d = \vec{r}_b + \vec{r}_m$ , dove  $\vec{r}_b(x, y, z)$  rappresenta la distanza del magnete da levitare dal centro della bobina e  $\vec{r}_m(x_m, y_m, z_m)$  la distanza del magnete in attrazione dallo stesso punto, diventa nelle sue componenti

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= \mu_0\mu_r m_2 \left( \frac{3m_1}{4\pi} \left[ \frac{(5(z-z_m)^2 - r_d^2)(x-x_m)}{r_d^7} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{NIR_b \sin \beta}{|\Delta\vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] x \cos \delta \right) \\ M\ddot{y} &= \mu_0\mu_r m_2 \left( \frac{3m_1}{4\pi} \left[ \frac{(5(z-z_m)^2 - r_d^2)(y-y_m)}{r_d^7} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{NIR_b \sin \beta}{|\Delta\vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] y \cos \delta \right) \\ M\ddot{z} &= \mu_0\mu_r m_2 \left( \frac{3m_1}{4\pi} \left[ \frac{(5(z-z_m)^2 - 3r_d^2)(z-z_m)}{r_d^7} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{NIR_b \sin \beta}{|\Delta\vec{r}_b|^4} \left[ 1 - \frac{R_b}{r_b} \cos \gamma \right] z \cos \delta \right) - Mg \end{aligned} \quad (2.42)$$

supponendo di avere un solo magnete in attrazione con un momento di dipolo uguale a quello del magnete da levitare.

Nel caso di corrente continua si può ipotizzare, come già fatto nel Par. 2.4, per la relazione  $I(z)$  un andamento lineare con la posizione; lungo la direzione dell'asse  $z$  la relazione è ancora la (2.26), dal bilanciamento delle

forze però si osserva che la costante di richiamo è diversa, agendo ora sulla massa da levitare anche la forza tra i dipoli magnetici.

La forza di richiamo, in questo caso, si ottiene calcolando la forza esercitata dalla bobina in  $z = \pm R_b/2$  e quella dipolare ad una distanza arbitraria del magnete in attrazione da quello levitato,  $z_d = z + z_m$ ; sotto queste ipotesi, la forza per unità di lunghezza sarà

$$\begin{aligned}
 F_r &= F_b \left( \pm \frac{R_b}{2} \right) + F_d(z_d) = k_b I + F_d(z_d) \\
 &= \pm \frac{3}{4} \mu_0 \mu_r m_2 N I \left( \frac{4}{5} \right)^{5/2} \frac{1}{R_b^2} + \frac{3}{2\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{1}{z_d^4} = \\
 &= \frac{3}{2} \mu_0 \mu_r m_2 \left[ \frac{N I}{2 R_b^2} \left( \frac{4}{5} \right)^{5/2} + \frac{m_1}{\pi} \frac{1}{z_d^4} \right]. \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Lungo la direzione  $z$  il bilanciamento delle forze risulta

$$k_b(a z) + F_d(z_d) - M g = 0 \quad (2.44)$$

dove  $M$  è la massa dell'oggetto sospeso,  $a$  un fattore moltiplicativo: anche in questo caso, il cambiamento di segno della forza di richiamo dipende dal sistema di riferimento scelto (Fig. 2.1).

La distanza  $z_d$  scelta per il magnete in attrazione è arbitraria: ovviamente più i dipoli magnetici sono vicini, più grande è la forza dipolare e maggior peso è possibile sostenere, come illustra la Fig. 2.10, in cui è mostrato l'andamento della forza esercitata dal magnete in attrazione su quello levitato al variare della distanza che li separa.

Assumendo per la bobina, il magnete permanente e la permeabilità magnetica gli stessi parametri assunti nel Par. 2.4, e scegliendo, ad esempio,  $z_d = 3 \text{ cm}$ , si ottiene un valore per la forza per unità di lunghezza di  $0.63 \text{ N/m}$ .

Sostituendo il primo membro della (2.31) con la (2.43) si può calcolare il peso della massa che potrà essere levitata che risulta di  $\sim 64 \text{ g}$ .

Confrontando le due situazioni (configurazione con bobina e configurazione con bobina e magneti in attrazione), si deduce che la presenza del

magnete in attrazione, per la distanza scelta, aumenta la costante di richiamo di  $0.13 \text{ N/m}$  e permette di levitare  $\sim 13 \text{ g}$  in più.

Sembrerebbe possibile, in questo modo, levitare una massa di qualunque peso, aggiungendo magneti permanenti di intensità maggiore possibile nella quantità necessaria, ma ci sono delle limitazioni imposte dalla geometria dei magneti e dalla loro effettiva distanza.

Calcolando quest'ultima dai centri dei magneti questa non potrà mai essere nulla. Per magneti del tipo descritto nel Par. 2.4 la distanza minima tra i magneti in attrazione deve essere  $z_d > 4 \text{ mm}$ , essendo l'altezza di ciascun magnete di  $4 \text{ mm}$ , pertanto, ipotizzando una distanza tra i magneti di  $5 \text{ mm}$  il valore teorico massimo della massa che si può levitare è  $\sim 170 \text{ kg}$ .

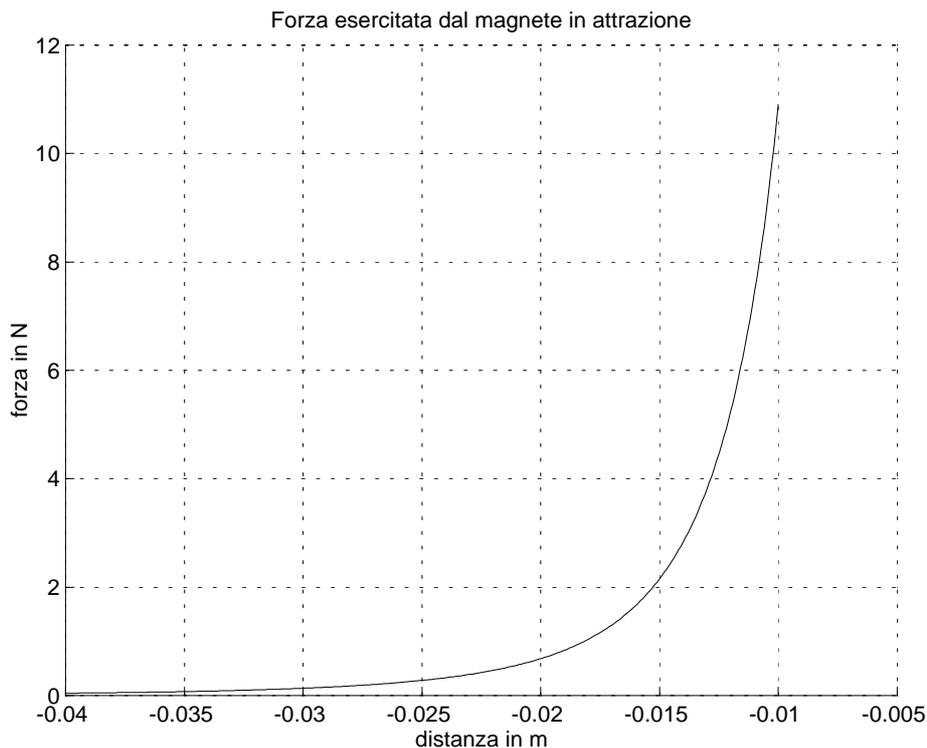


Figura 2.10: Forza esercitata da un magnete al variare della distanza

Un ulteriore miglioramento potrebbe essere ottenuto realizzando una configurazione che utilizzi più sistemi del tipo di Fig. 2.1 posti in parallelo: in questo modo è possibile esercitare una forza maggiore con le bobine ed i

magneti a disposizione per ogni sistema ed arrivare a sostenere un peso maggiore.

Una configurazione che utilizza due sospensioni singole in parallelo sarà esaminata più in dettaglio nel successivo capitolo: questo tipo di configurazione è stato utilizzato per sospendere il supporto di uno dei due specchi che compongono un interferometro Michelson.

# Capitolo 3

## Il prototipo di un interferometro levitato

### 3.1 Verifica delle forze agenti in una sospensione magnetica

La sospensione magnetica realizzata in questo lavoro di tesi presenta una configurazione analoga a quella di Fig. 2.1: una bobina, percorsa da corrente, permette di realizzare il sistema in controreazione, utilizzando per la levitazione magneti permanenti e migliorando le prestazioni del sistema con magneti permanenti in attrazione.

La validità delle ipotesi utilizzate nel progetto della sospensione magnetica è stata verificata misurando le forze a cui il sistema è sottoposto; in particolare

- l'intensità e l'andamento con la distanza della forza tra i dipoli magnetici con la quarta potenza della distanza;
- l'intensità e l'andamento della forza esercitata dalla bobina sul magnete.

Per l'esperimento si sono utilizzate delle bobine già disponibili con un raggio interno  $R_{in} = 15 \pm 0.05 \text{ mm}$  ed un raggio esterno  $R_e = 20 \pm 0.05 \text{ mm}$ .

Il numero di avvolgimenti della bobina è stato ricavato dall' induttanza magnetica  $L$ . Quest'ultima è stata misurata determinando sperimentalmente la funzione di trasferimento del circuito  $RL$  ottenuto ponendo la bobina in serie ad una resistenza di carico  $R_u = 100 \pm 0.1 \Omega$ , come mostrato in Fig. 3.1; la resistenza  $R_b = 15 \pm 0.1 \Omega$ , misurata con un tester, e l'induttanza  $L$  della bobina sono in serie.

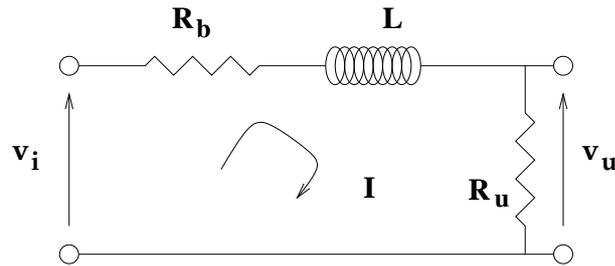


Figura 3.1: Circuito  $RL$  usato per misurare l'induttanza della bobina

Dalla funzione di trasferimento si ricava la frequenza di taglio  $\omega_p$  corrispondente ad una fase di  $45^\circ$ , secondo la relazione

$$\frac{v_u}{v_i} = \frac{R_u}{R_b + R_u + j\omega_p L} \quad (3.1)$$

da cui il valore di  $L$  risulta

$$L = \frac{R_b + R_u}{\omega} = 6.7 \pm 0.3 \text{ mH} . \quad (3.2)$$

Considerando la bobina costituita da  $s$  strati ciascuno contenente  $n$  avvolgimenti, il numero totale di avvolgimenti della bobina sarà  $N = ns$ : ogni strato avrà una sua induttanza magnetica  $L_i = f(R_i)$ , che dipende da  $R_i$ , raggio  $i$ -esimo della bobina secondo la relazione

$$L_i = \frac{\mu_0 \mu_r \pi n^2 R_i^2}{l} , \quad (3.3)$$

pertanto l'induttanza totale risulta  $L_s = \sum_{i=1}^s L_i$ .

Per calcolare il numero di strati è stata usata la relazione

$$s = \frac{R_e - R_{in}}{d} = 17 \pm 3 \quad (3.4)$$

essendo  $R_e$  ed  $R_{in}$  i raggi rispettivamente esterno ed interno della bobina e  $d$  il diametro del filo di rame, il cui valore, misurato con un calibro a cursore, è  $(0.30 \pm 0.05) \text{ mm}$ .

Il numero di avvolgimenti per strato si ottiene dalla relazione

$$n = \sqrt{\frac{lL}{\mu_0 \mu_r \pi \sum_{i=1}^s R_i^2}} = 41 \pm 1 \quad (3.5)$$

avendo la bobina forma circolare ed essendo  $l = 5 \pm 0.05 \text{ mm}$  la lunghezza della bobina; l'induttanza  $L$  è quella riportata dalla (3.2) e  $\sum_{i=1}^s R_i^2$  è la somma dei quadrati dei raggi al variare della loro distanza dal centro della bobina.

L'induttanza totale, calcolata come somma delle induttanze per strato  $L_i$ , utilizzando per  $n$  il valore ottenuto con la relazione (3.4), è  $L_s = 6.7 \pm 0.8 \text{ mH}$ : l'errore di misura è maggiore rispetto a quello calcolato per il valore di  $L$  dato dalla (3.2), ciò è dovuto alla propagazione degli errori corrispondenti alle quantità coinvolte nella relazione (3.3).

In definitiva, il numero di avvolgimenti è

$$N = ns = 687 \pm 117 . \quad (3.6)$$

I magneti permanenti utilizzati sono in *Sm-Co*, hanno forma cilindrica con un raggio  $r = 7 \text{ mm}$  ed un'altezza  $h = 4 \text{ mm}$ , un peso  $M = 5 \text{ g}$  e presentano un'induzione magnetica residua nominale  $B_r = 0.85 \text{ T}$ , dalla quale è stato possibile calcolare, come descritto nel Par. 2.4, il momento di dipolo magnetico, che risulta  $m = 0.42 \text{ Am}^2$ .

### 3.1.1 La forza tra i dipoli magnetici

In Fig. 3.2 è mostrato il setup con il quale è stata misurata la forza tra i due dipoli magnetici al variare della distanza tra i magneti.

Su un banco ottico sono posti, da un lato, un magnete, montato su un blocchetto di alluminio a sua volta vincolato ad un elemento elastico (striscia di vetronite) e, dall'altro, uno o più magneti in configurazione repulsiva, montati su un altro blocchetto di alluminio. Quest'ultimo è, a sua volta, montato su un traslatore che permette di variare la distanza tra i magneti e quindi la forza di repulsione.

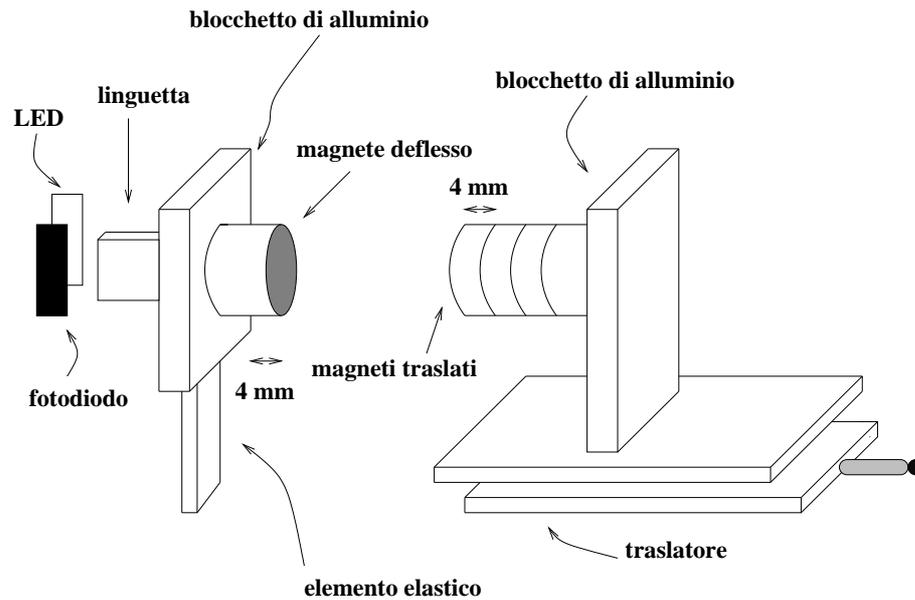


Figura 3.2: Apparato sperimentale usato per misurare la forza tra i magneti

La deflessione del magnete montato sulla molla viene rivelata utilizzando un sensore ad occultazione (shadow meter) composto da un LED e da un fotodiodo fissati al banco ottico: una linguetta (montata sul retro del magnete) permette di variare la luce che arriva al fotodiodo al variare della posizione del magnete.

La calibrazione del sensore ad occultazione è stata effettuata misurando la variazione di tensione letta su un oscilloscopio al variare della luce rivelata dal fotodiodo, con un'escursione di  $7\text{ mm}$  in spostamento, partendo da un massimo in cui il fotodiodo si trova in piena luce e arrivando ad un minimo in cui il fotodiodo risulta completamente oscurato, ed un'escursione di  $\sim 2\text{ V}$  in tensione: attraverso un fit lineare si è ottenuta una sensibilità

$$l_1 = (0.98 \pm 0.05) \text{ mV}/\mu\text{m}.$$

La deflessione del magnete è stata misurata valutando la variazione di tensione  $\Delta V$  letta dal fotodiodo su un oscilloscopio rispetto ad una tensione di riferimento,  $\Delta V_0$ , alla quale la deflessione è nulla, secondo la relazione

$$\delta = \frac{\Delta V - \Delta V_0}{l_1} \quad (3.7)$$

essendo  $l_1$  la risposta dello shadow-meter.

La distanza dei magneti è stata misurata considerando, oltre allo spostamento del traslatore, anche la deflessione subita dal magnete, secondo la relazione

$$d = d_0 - \Delta x + \delta \quad (3.8)$$

dove  $d_0$  rappresenta la distanza iniziale tra il centro del magnete deflesso e quello dei magneti in traslazione e  $\Delta x$  l'avvicinamento di questi ultimi mediante il traslatore.

Una volta misurata la deflessione rispetto alla posizione di riferimento iniziale, al variare della distanza tra i magneti, si può ricavare la forza esercitata sul singolo magnete che risulta

$$F = -k \delta \quad (3.9)$$

essendo  $k$  la costante elastica dell'elemento elastico, valutata misurando la frequenza di risonanza di quest'ultimo che risulta  $\nu = 14 \text{ Hz}$ .

Il blocchetto soggetto a deflessione ha una massa di  $M = 125 \text{ g}$ ; dalla relazione  $\omega^2 = k/M$  e nota quella che lega la pulsazione alla frequenza,  $\omega = 2\pi\nu$ , si ottiene un valore per  $k$  di  $980 \text{ N/m}$ .

In Fig. 3.3 è riportato l'andamento della forza tra i dipoli magnetici al variare della distanza e del numero dei magneti in traslazione: la misura della forza è stata effettuata utilizzando da 1 a 6 magneti in traslazione.

Mediante un fit lineare non pesato, effettuato per ogni insieme di misure, si è riscontrato, dalla pendenza del fit, che la forza risulta inversamente

proporzionale alla quarta potenza della distanza, ottenendo un  $\chi^2$  variabile da 0.06 ad 0.13 con un livello di significatività di 1 in relazione al fit: la non linearità che si riscontra, in maniera sistematica, quanto più la distanza tra i magneti diminuisce è attribuibile all'approssimazione di dipolo utilizzata per descriverli. L'intercetta del fit, invece, permette di calcolare il momento di dipolo magnetico del magnete.

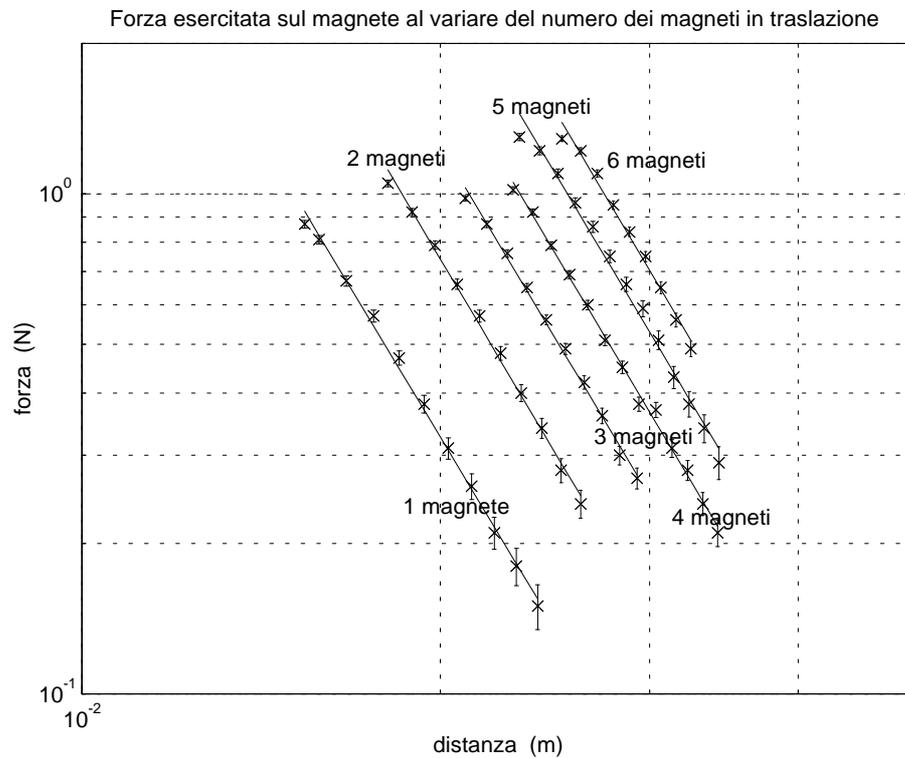


Figura 3.3: Valutazione della forza tra i magneti al variare dei magneti

Considerando il caso unidimensionale e scelta la direzione tra i centri dei dipoli magnetici come asse  $x$ , la forza tra i dipoli magnetici risulta

$$F_d = \frac{3}{2\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{1}{x^4} ; \quad (3.10)$$

occorre prendere il logaritmo della (3.10) per confrontarla con un fit lineare, pertanto si ha

$$\begin{aligned} \log_{10}(F_d) &= \log_{10}\left(\frac{3}{2\pi}\mu_0\mu_r m_1 m_2 \frac{1}{x^4}\right) = \\ &= \log_{10}\left(\frac{3}{2\pi}\mu_0\mu_r m_1 m_2\right) - 4\log_{10} x \end{aligned} \quad (3.11)$$

da cui, confrontando con l'equazione della retta  $y = A + Bx$ , l'intercetta e la pendenza della (3.10) risultano

$$A = \log_{10}\left(\frac{3}{2\pi}\mu_0\mu_r m_1 m_2\right) \quad \text{e} \quad B = -4. \quad (3.12)$$

Nota  $A$  attraverso il fit ed avendo usato magneti permanenti uguali, il valore di  $m_1 = m_2$  ricavato è  $0.32 \pm 0.09 \text{ Am}^2$ : il valore ottenuto discosta da quello nominale (vedi Par. 2.4) di  $0.42 \text{ Am}^2$ , considerando che i magneti usati potevano essere smagnetizzati essendo in uso già da qualche anno.

La Tab. 3.1 riporta l'intercetta e il corrispondente momento di dipolo magnetico con i relativi errori al variare del numero dei magneti: il valore riportato è quello calcolato per il singolo magnete permanente.

$N^\circ$	Intercetta	Momento di dipolo ( $\text{Am}^2$ )
1	$A_1 = -7.2 \pm 0.1$	$m_1 = 0.3 \pm 0.1$
2	$A_2 = -7.0 \pm 0.2$	$m_2 = 0.3 \pm 0.1$
3	$A_3 = -6.7 \pm 0.1$	$m_3 = 0.3 \pm 0.1$
4	$A_4 = -6.5 \pm 0.1$	$m_4 = 0.3 \pm 0.1$
5	$A_5 = -6.4 \pm 0.2$	$m_5 = 0.4 \pm 0.2$
6	$A_6 = -6.3 \pm 0.3$	$m_6 = 0.4 \pm 0.2$

Tabella 3.1: *Intercetta e momento di dipolo magnetico*

Come si può osservare, il momento di dipolo magnetico risulta avere un valor medio di  $0.35 \pm 0.13 \text{ Am}^2$ .

### 3.1.2 La forza esercitata dalla bobina

La forza esercitata da una bobina percorsa da corrente su un magnete è stata misurata con il dispositivo mostrato in Fig. 3.4, che risulta analogo a quello descritto nel Par. 3.1.1 in cui il magnete montato sul traslatore viene sostituito da una bobina percorsa da corrente.

Su un banco ottico sono posti, da un lato, un magnete, montato su un blocchetto di alluminio a sua volta vincolato ad un elemento elastico (striscia di vetronite) e, dall'altro, una bobina con le stesse caratteristiche riportate nel Par. 3.1, posta alla distanza alla quale la forza è massima, cioè  $x = R_b/2$ , (vedi Par. 2.3.1), se il sistema di riferimento scelto è lo stesso del caso unidimensionale precedente. La distanza tra la bobina ed il magnete è calcolata rispetto ai rispettivi centri.

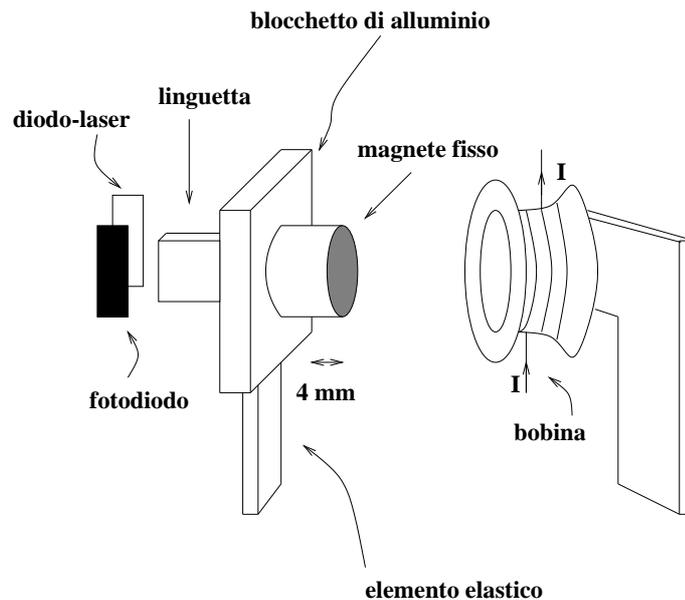


Figura 3.4: Apparato sperimentale usato per misurare la forza esercitata da una bobina su un magnete

La deflessione del magnete montato sulla molla viene rivelata utilizzando un sensore ad occultazione costituito da un diodo-laser e da un fotodiodo con un intervallo più ampio di rivelazione; la calibrazione è stata eseguita in

modo analogo a quella del sensore utilizzato per misurare la forza tra i dipoli magnetici ottenendo una sensibilità  $l_2 = (1.03 \pm 0.01) \text{ mV}/\mu\text{m}$ .

La deflessione del magnete è stata misurata al variare della corrente circolante nella bobina: applicando una tensione in continua da  $-5 \text{ V}$  a  $5 \text{ V}$  all'ingresso dell'amplificatore di corrente è stata misurata, su un oscilloscopio, la variazione di luce rivelata dal fotodiodo.

Dopo aver convertito in corrente la tensione fornita alla bobina dall'amplificatore si è applicato un fit lineare non pesato all'insieme di misure effettuato, dal cui coefficiente angolare è stato ricavato il fattore di conversione  $c$  che presenta le dimensioni di una transresistenza ( $V/A$ ).

La forza esercitata dalla bobina sul magnete è stata calcolata secondo la relazione

$$F_b = k \frac{c}{l_2} \quad (3.13)$$

avendo  $k$  lo stesso valore ottenuto nel Par. 3.1.1.

La misura della forza è stata ripetuta in un intorno del punto in cui la teoria prevede il massimo, in modo da verificare che il valore della forza misurata corrispondesse proprio a quello della forza massima: fissata la posizione della bobina, è stata applicata una tensione in continua da  $-5 \text{ V}$  a  $5 \text{ V}$  all'ingresso dell'amplificatore di corrente e se ne è valutata la deflessione e, quindi la forza, per ogni valore dell'intorno.

La Tab. 3.2 riporta i valori della forza esercitata dalla bobina in un intorno in cui è massima con le corrispondenti distanze alle quali è stata posta: queste ultime rappresentano la distanza tra il centro della bobina ed il centro del magnete su cui essa esercita la forza.

In Tab. 3.2 sono riportati inoltre i fattori di conversione per ogni fit e i valori teorici della forza calcolati secondo la relazione

$$F_t = \frac{3}{2} \mu_0 \mu_r m_2 N I R_b^2 \frac{x}{(x^2 + R_b^2)^{5/2}} \quad (3.14)$$

valida per il caso unidimensionale e scegliendo la direzione tra il centro della bobina e quello del magnete come asse  $x$ ; i parametri scelti per  $\mu_0$ ,  $\mu_r$ ,  $R_b$  ed

Distanza (mm)	$F_b$ (N/A)	$c$ (V/A)	$F_t$ (N/A)
6.5	$0.416 \pm 0.006$	$0.440 \pm 0.004$	0.453
7.0	$0.416 \pm 0.007$	$0.440 \pm 0.005$	0.459
7.5	$0.475 \pm 0.007$	$0.501 \pm 0.005$	0.460
8.0	$0.521 \pm 0.007$	$0.550 \pm 0.003$	0.459
8.5	$0.476 \pm 0.006$	$0.503 \pm 0.003$	0.454
9.0	$0.394 \pm 0.006$	$0.417 \pm 0.004$	0.447

Tabella 3.2: Forza esercitata dalla bobina su un magnete

$I$  sono quelli usati nel Par. 2.4, mentre per  $m_2$  e per  $N$  sono stati utilizzati i valori ottenuti sperimentalmente.

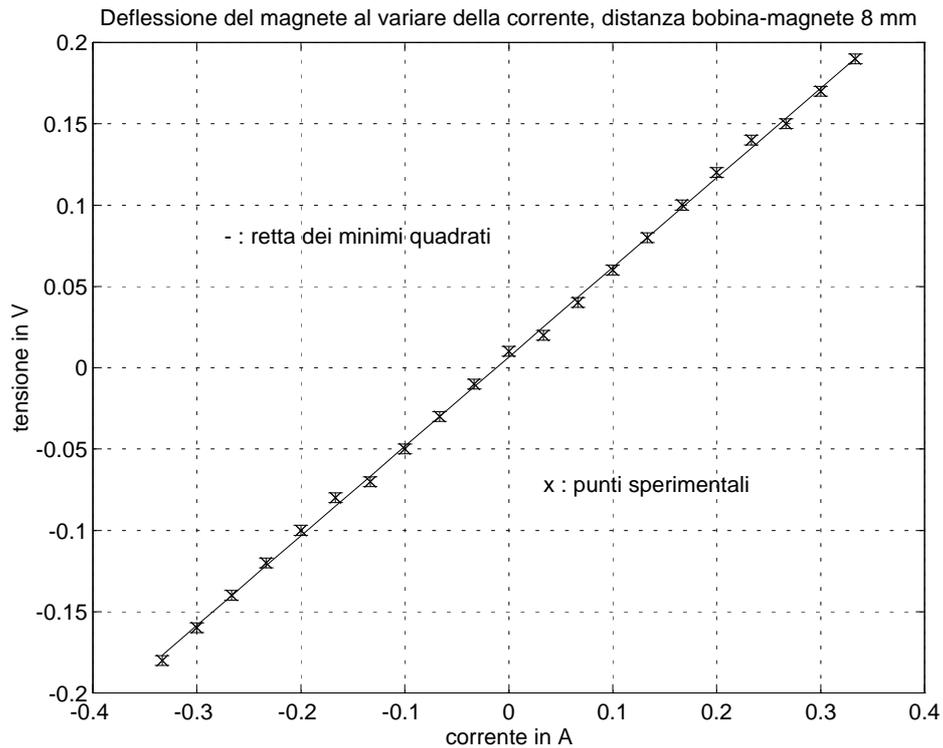


Figura 3.5: Valutazione della forza esercitata dalla bobina su un magnete

Dai dati sperimentali si osserva che la distanza alla quale la forza risulta

massima è  $8 \text{ mm}$  ed il valore della forza corrispondente per unità di corrente è  $0.521 \pm 0.007 \text{ N/A}$  ed è in buon accordo con quello teorico calcolato nel Par. 2.4, che risulta di  $0.5 \text{ N/A}$ . Complessivamente si riscontra un andamento lineare della forza con la corrente.

In Fig. 3.5 è riportato l'andamento della forza esercitata dalla bobina sul magnete alla distanza alla quale è massima.

## 3.2 Prime sperimentazioni

Una volta verificata la stima delle forze in gioco si è passato allo studio del sistema di levitazione in controreazione.

In Fig. 3.6 è riportato il setup realizzato per la levitazione effettuata con la sola bobina.

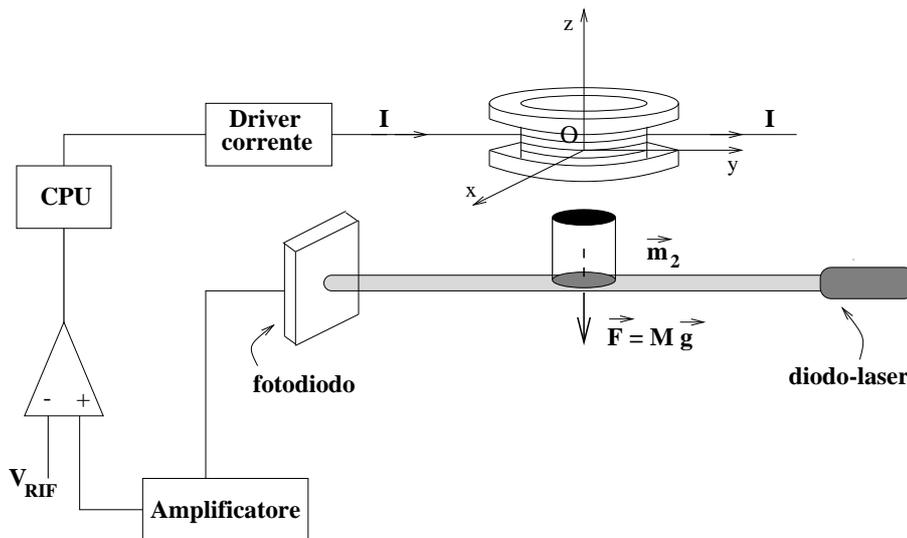


Figura 3.6: *Setup con sensore ad occultazione*

Inizialmente il controllo ha interessato un solo grado di libertà, cioè quello riguardante la posizione verticale della massa di prova: attraverso un'opportuna elettronica di controllo, schematizzata in Fig. 3.7, è stata misurata la variazione di tensione all'uscita dell'amplificatore del fotodiodo rispetto ad

una tensione di riferimento fornita da un generatore di segnali. In questo modo è stato possibile relazionare tra loro la corrente che circola nella bobina e la posizione del blocchetto da levitare, ottenendo una dipendenza del tipo  $I(z)$ : al variare della dipendenza di  $I$  da  $z$  è possibile ottenere per la massa da levitare una configurazione di equilibrio stabile o instabile. La stabilizzazione della massa di prova è stata realizzata utilizzando un sistema di feedback, come è stato descritto nel Cap. 2.

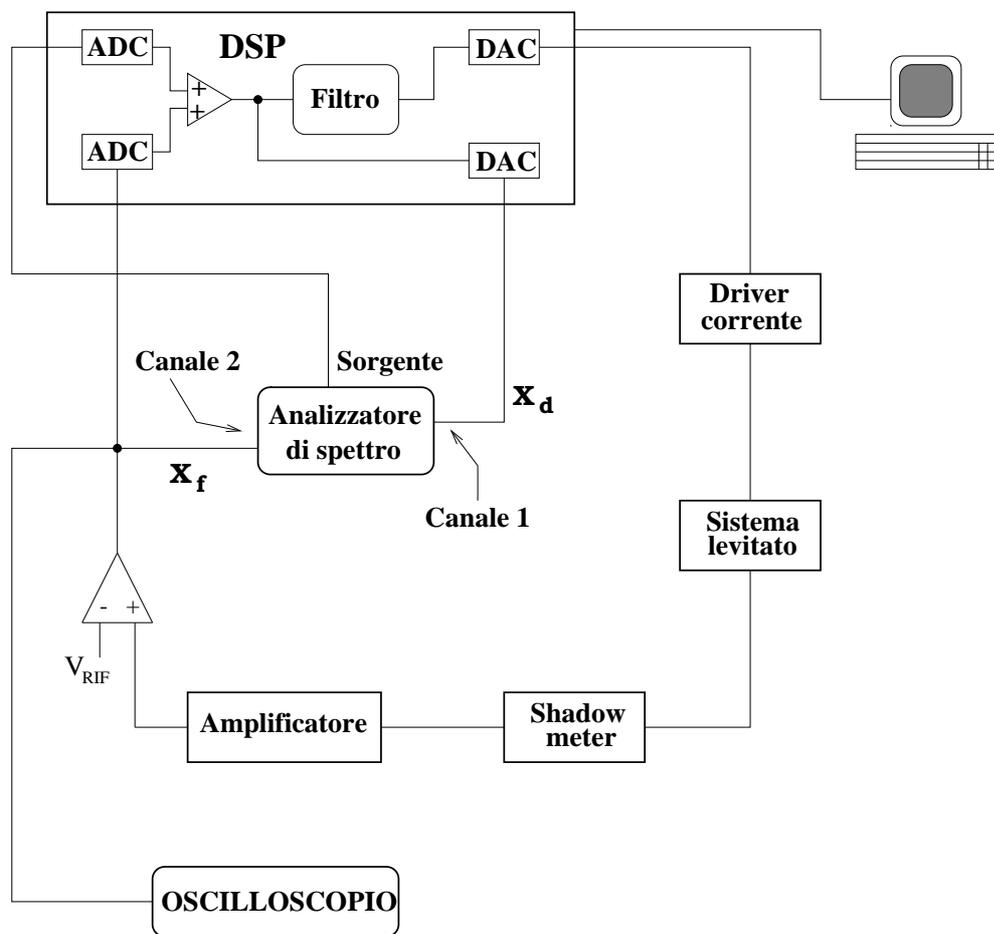


Figura 3.7: Elettronica di controllo del feedback

La stima delle forze in gioco ha portato alla scelta di una configurazione che prevedesse la sospensione di una massa di 20 g, costituita da un blocchetto cilindrico di alluminio su cui sono stati incollati 2 magneti permanenti: per

sospendere un tale peso è necessaria, nella bobina, una corrente di  $\sim 0.2 A$  (vedi Par. 2.4, Eq. 2.30 moltiplicata per due).

La posizione verticale della massa viene misurata con un sensore ad occultazione che utilizza un diodo-laser ed un fotodiodo: la descrizione del sensore è stata riportata nel Par. 3.1.1, mentre la sensibilità è  $l_2$ , cioè quella riportata nel Par. 3.1.2.

### 3.2.1 Implementazione dei filtri

Per poter implementare filtri con poli reali e/o complessi coniugati, è stato utilizzato un programma scritto in linguaggio *C* che gira su una **DSP** (*Digital Signal Processing*), cioè una **CPU Motorola 68040** su scheda *TVM 3038*.

Il filtro di reazione utilizzato per realizzare il feedback è un **PID** (sistema proporzionale-integrale-derivativo).

I parametri del filtro sono riportati nella Tab. 3.3:

$N^\circ$	Tipo		$\nu$ (Hz)	Fattore di merito
1	polo	reale	$5 \cdot 10^{-4}$	$Q = 1$
2	zeri	reali	1	
2	poli	complessi coniugati	50	

Tabella 3.3: *Filtro di reazione 1*

Affinché sia verificato il principio di causalità, il numero totale di zeri del sistema deve essere sempre minore o uguale del numero di poli (App. B); ogni zero infatti comporta un anticipo nella fase: se il numero totale di zeri fosse maggiore del numero di poli si otterrebbe un sistema che anticipa la risposta a qualsiasi frequenza, che non rappresenterebbe un sistema reale. La scelta di implementare filtri i cui poli e zeri siano complessi coniugati è legata alla maggiore velocità che hanno questi ultimi nel modificare la fase intorno alla frequenza di taglio.

### 3.2.2 Risultati preliminari

Con la configurazione di Fig. 3.6 si è ottenuta la levitazione stabile della massa di prova su tempi lunghi (diverse ore) con un'oscillazione residua, rispetto alla posizione di riferimento, di pochi micron.

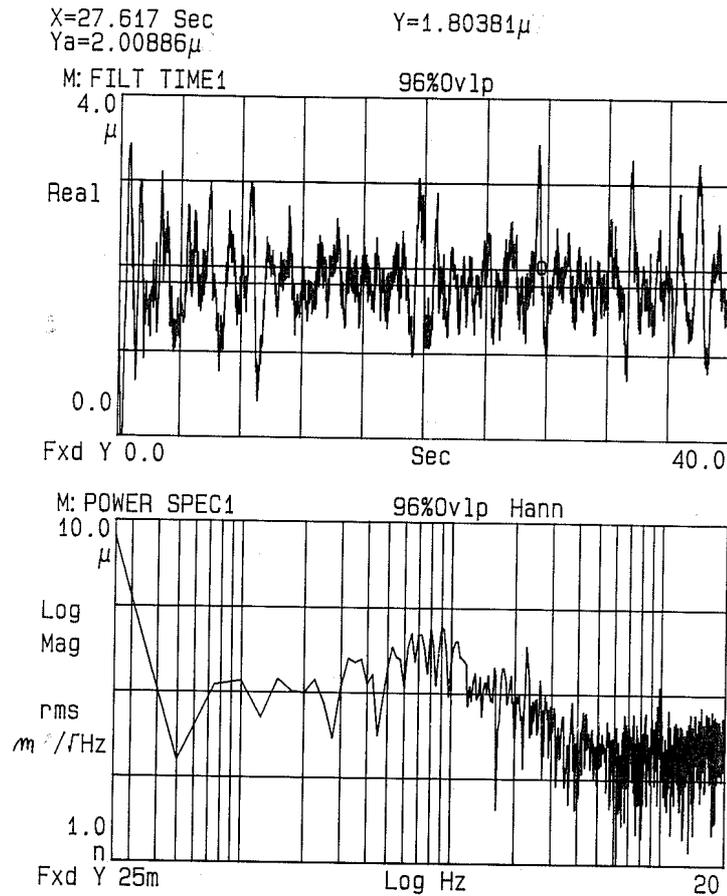


Figura 3.8: Monitoraggio nel tempo e spettro di potenza della posizione del blocchetto di 20 g levitato con il feedback realizzato con il filtro riportato in Tab. (3.3)

In Fig. 3.8 è riportato l'andamento temporale ed il corrispondente spettro di potenza della posizione lungo la verticale del blocchetto levitato. La misura in tempo reale è stata acquisita attraverso un analizzatore di spettro per un intervallo di tempo della durata di 40 s: l'oscillazione residua è dell'ordine di

$\sim \pm 1.8 \mu$  con un bias di  $\sim 1.8 \mu$ .

Detto  $z_0 = 1.8 \mu$  il valore del bias ottenuto graficamente e, sapendo dalla relazione (2.30), che per sospendere due magneti permanenti occorre una corrente  $I_b = 0.2 A$ , combinando la relazione (2.30) con la (2.28) si ha

$$a z_0 = \frac{M g}{k_b} \quad (3.15)$$

dove  $M = 20 g$  e  $k_b = 1$  è quello calcolato per 2 magneti. Dal confronto tra le relazioni si ricava un fattore amplificativo  $a = 10^5$ , corrispondente al guadagno in continua: quindi il bias misurato osservando l'andamento temporale della sospensione magnetica può rappresentare una stima del guadagno in continua del feedback.

Siccome l'analizzatore di spettro fornisce una misura in tensione del segnale, è stato necessario dividere quest'ultimo per il valore della calibrazione dello shadow-meter, riportato nel Par. 3.1.2, in modo da ottenere una misura in spostamento.

Per ottenere la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema in controreazione si è utilizzato un analizzatore di spettro a due canali, tali che, come mostra lo schema a blocchi di Fig. 3.7, il 1° leggesse il segnale d'uscita della **DSP** al quale non è applicato il filtro ed il 2° il segnale differenza o d'errore fornito dal confronto con la tensione di riferimento; il segnale sorgente è invece una sorgente esterna arbitraria corrispondente ad un ingresso della **DSP**. Il rapporto tra il 2° ed il 1° canale, cioè tra l'uscita della **DSP** e il segnale differenza, fornisce la funzione di trasferimento ad anello aperto (vedi App. C).

La Fig. 3.9 mostra tale misura (diagramma di Bode) per il feedback utilizzato: la sorgente applicata è rumore bianco con un'ampiezza di  $100 mv/picco$ . Le informazioni che si possono ricavare dalla funzione di trasferimento sono una larghezza di banda di  $30 Hz$ , un margine di fase di  $30^\circ$  ed un margine di guadagno di  $3 db$ .

Aumentando l'ampiezza della sorgente oltre i  $300 mV/picco$  si osserva l'insorgere di oscillazioni prima inesistenti: queste ultime possono essere at-

tribuite ad effetti non lineari del sistema, se si suppone che il regime lineare permanga fino ad una determinata soglia del valore dell'ampiezza del segnale sorgente.

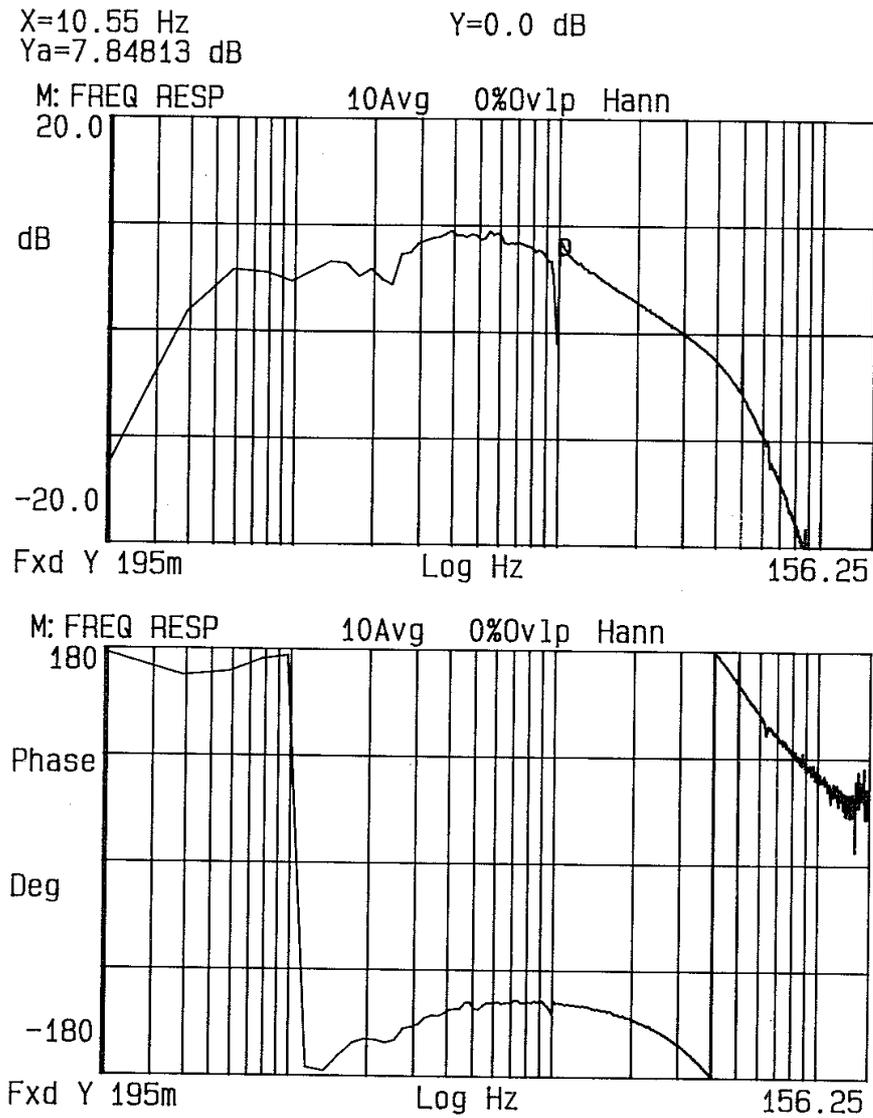


Figura 3.9: Funzione di trasferimento ad anello aperto del feedback realizzato con il filtro riportato in Tab. (3.3)

### 3.2.3 Magneti in attrazione

Una configurazione più vantaggiosa si ottiene aggiungendo alla sospensione magnetica dei magneti in attrazione rispetto a quelli incollati o comunque vincolati all'oggetto da levitare, come è stato già osservato nel Par. 2.4.2.

La configurazione di Fig. 3.6 viene modificata con l'aggiunta di magneti in attrazione; la nuova configurazione è riportata in Fig. 3.10.

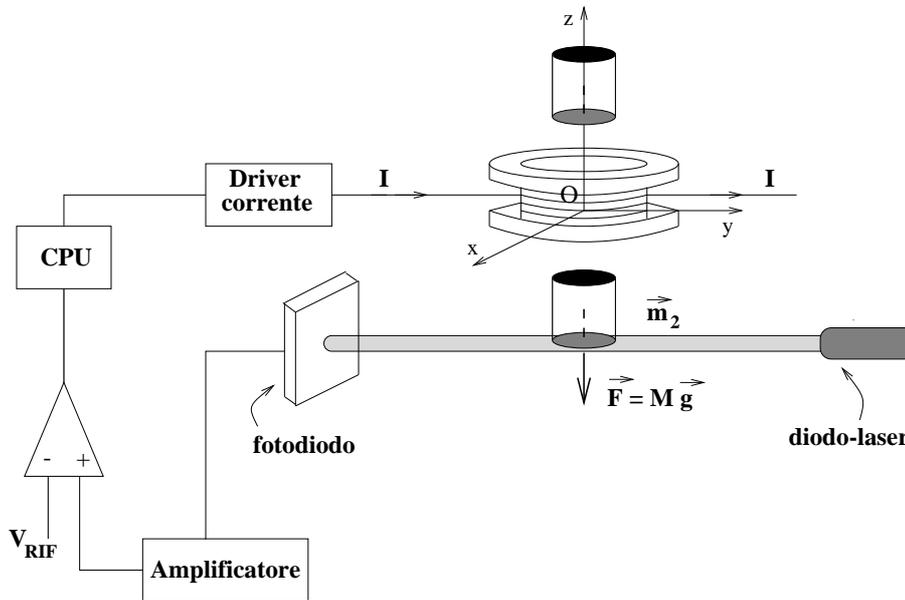


Figura 3.10: *Setup con sensore ad occultazione*

La Fig. 3.11 riporta l'andamento della corrente necessaria per la levitazione al variare della distanza dei magneti in attrazione per la massa di prova di  $20\text{ g}$ , già considerata nel Par. 3.2: la misura è stata effettuata con 3 magneti in attrazione e l'escursione in avvicinamento dei magneti è di  $\sim 3\text{ cm}$ .

Come si può osservare, la corrente che circola nella bobina diminuisce al diminuire della distanza dei magneti in attrazione dall'oggetto da levitare. Quanto più i magneti sono posti in prossimità di quelli su cui la bobina esercita la forza tanto più è limitata la corrente circolante nella bobina, al punto di poter usare la corrente solo per realizzare il feedback e per stabilizzarlo, e sostenere il peso dell'oggetto da levitare con i soli magneti in attrazione.

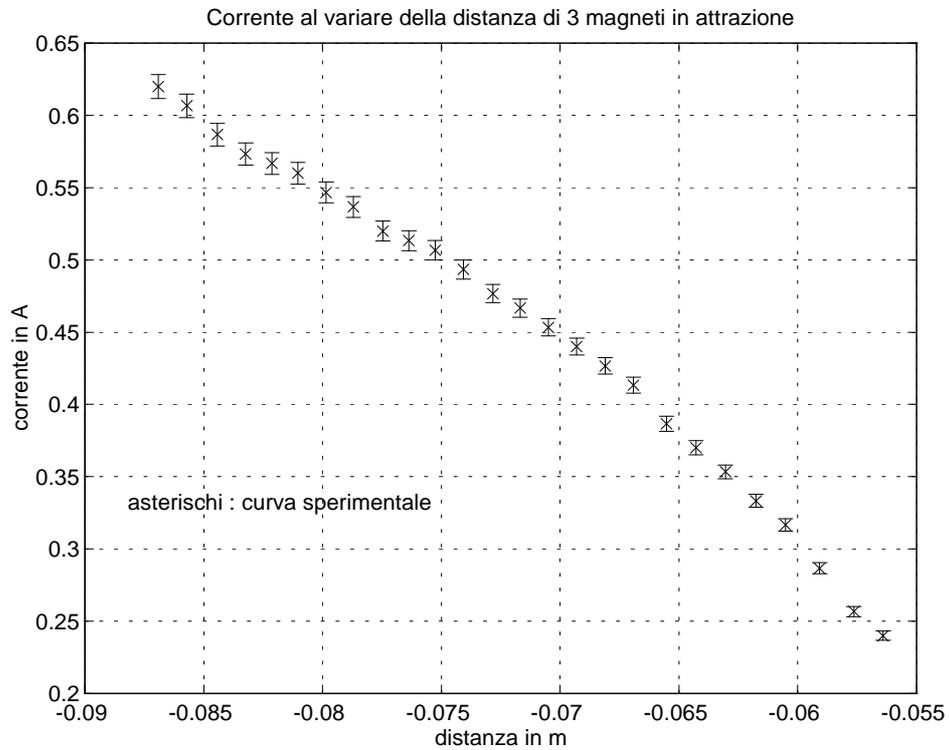


Figura 3.11: *Variazione della corrente con la distanza dei magneti in attrazione*

### 3.3 Levitazione di un primo elemento di un interferometro

L'interesse, in questo lavoro di tesi, nell'applicazione di una sospensione magnetica è rivolto alla realizzazione di un interferometro in cui tutte le sue parti risultino levitate magneticamente: inizialmente si può pensare ad un interferometro in cui un solo elemento, ad es. uno specchio, sia sospeso, poi con accorgimenti e studi più approfonditi è possibile pensare alla realizzazione di un interferometro completamente levitato, con le relative problematiche inerenti l'allineamento.

Una volta verificata la fattibilità di un sistema a levitazione magnetica si è passati alla realizzazione di un primo prototipo di specchio levitato.

Come illustrato in Fig. 3.12, la configurazione realizzata per il nuovo setup

è costituita da due bobine e da magneti permanenti, sistemati in supporti cilindrici in materiale plastico e opportunamente collocati, rispetto ai magneti da levitare, ad una distanza tale da sostenere il peso dell'oggetto da sospendere. I magneti in attrazione sono stati sistemati con polarità opposta rispetto a ciascuna bobina per limitare i disturbi indotti da campi elettromagnetici esterni [1].

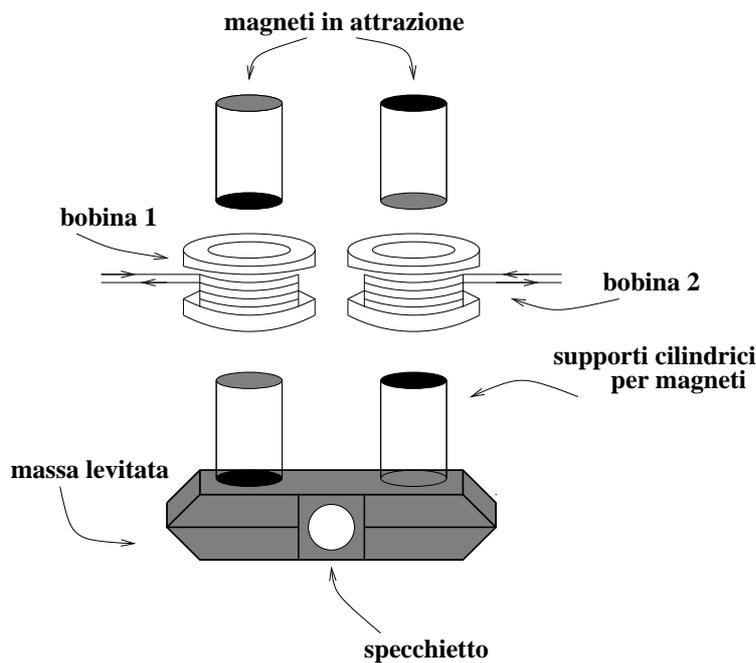


Figura 3.12: Configurazione con due bobine

Lo specchio da levitare è incollato su un supporto in plexiglass. Complessivamente il blocco da levitare ha un peso di  $\sim 100\text{ g}$ , avendo usato 3 magneti in attrazione e 2 da levitare per ciascuna bobina.

La scelta di utilizzare due bobine è legata al fatto che la configurazione di Fig. 3.12, a differenza della sospensione magnetica singola di forma cilindrica, deve risultare sufficientemente stabile per poter inserire lo specchio levitato in un interferometro; è necessario, pertanto, controllare, oltre al grado di libertà che individua la posizione verticale dell'oggetto da levitare,

anche quello lungo l'asse orizzontale ortogonale allo specchio: le bobine sono necessarie per evitare rotazioni indesiderate intorno ad entrambi gli assi.

Il sistema riesce a controllare due gradi di libertà, una traslazione lungo la verticale ed una rotazione intorno ad un asse orizzontale, pertanto, per ottenere la levitazione, occorre eseguire due misure indipendenti: la presenza delle due bobine e dei magneti in attrazione permette inoltre di stabilizzare anche la rotazione intorno all'asse verticale, in tal modo il sistema presenta tre gradi di libertà vincolati.

Per il monitoraggio in tempo reale della posizione lungo la verticale dell'elemento in plexiglass, si è provveduto ad utilizzare due sensori di posizione ad occultazione, la cui sensibilità del fotodiodo, ottenuta calibrando il sensore con la stessa procedura seguita nel Par. 3.1.1, risulta di  $1.15 \pm 0.01 \text{ mV}/\mu\text{m}$ ; alle bobine sono stati applicati due feedback separati, sebbene uguali in quanto le bobine presentano lo stesso numero di avvolgimenti.

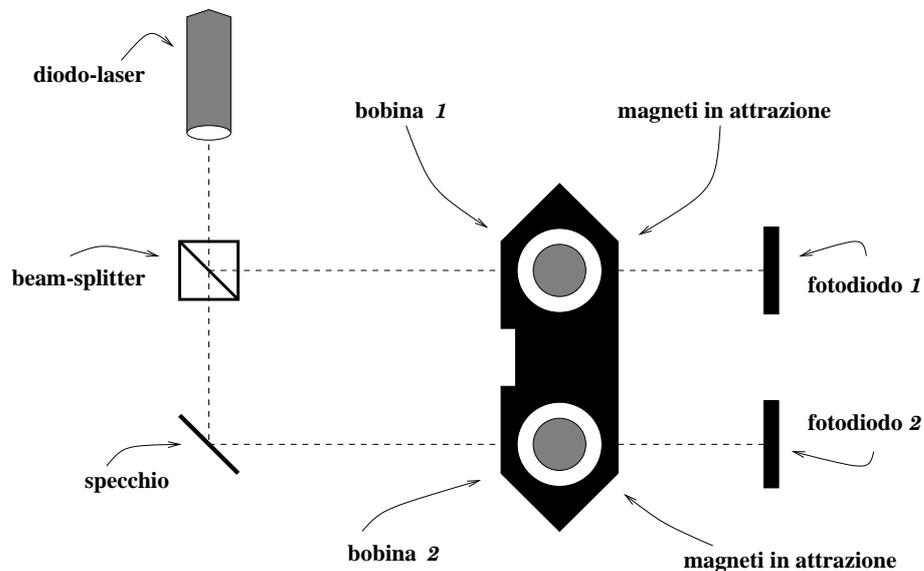


Figura 3.13: Configurazione con 2 raggi laser e 2 sensori di posizione

La configurazione realizzata è mostrata in Fig. 3.13, dove si può osservare che per dividere il raggio laser e collimarlo sul blocco si è fatto uso di un beam-splitter per il primo fotodiodo e di uno specchio posto a  $45^\circ$  per il

secondo.

Il filtro implementato per la realizzazione di entrambi i feedback è quello riportato in Tab. 3.4: si tratta ancora di un **PID**, ma, a differenza del filtro di Tab. 3.3, i poli complessi coniugati sono ad  $1\text{ kHz}$  ed il  $Q$  corrispondente è un po' più alto.

$N^\circ$	Tipo		$\nu$ (Hz)	Fattore di merito
1	polo	reale	$5 \cdot 10^{-4}$	$Q = 2$
2	zeri	reali	1	
2	poli	complessi coniugati	1000	

Tabella 3.4: *Filtro di reazione 2*

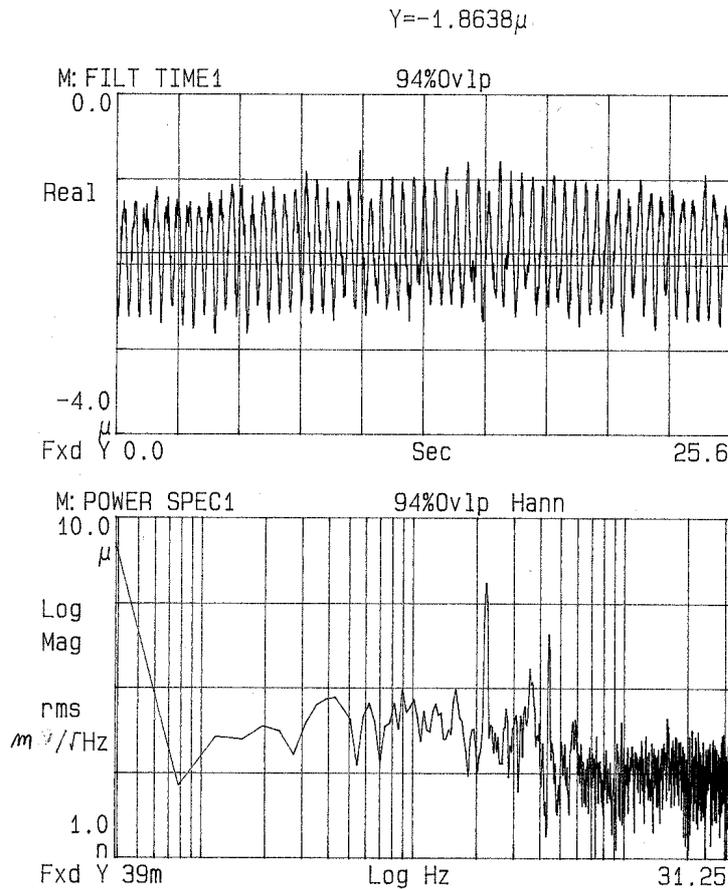


Figura 3.14: Monitoraggio nel tempo e spettro di potenza del blocchetto levitato di  $100\text{ g}$  per il  $1^\circ$  sensore di posizione

Con la configurazione di Fig. 3.13 si è ottenuta una levitazione stabile di diverse ore. Si è osservato l'andamento temporale e lo spettro di potenza della sospensione per ciascun sensore di posizione.

In Fig. 3.14 è riportato, ad esempio, l'andamento temporale ed il corrispondente spettro di potenza della posizione lungo la verticale della massa levitata di 100 g, monitorando il 1° sensore di posizione per una misura della durata di  $\sim 25$  s: l'oscillazione residua è dell'ordine di  $\sim \pm 0.9 \mu\text{m}$  con un bias di  $\sim -1.9 \mu\text{m}$ .

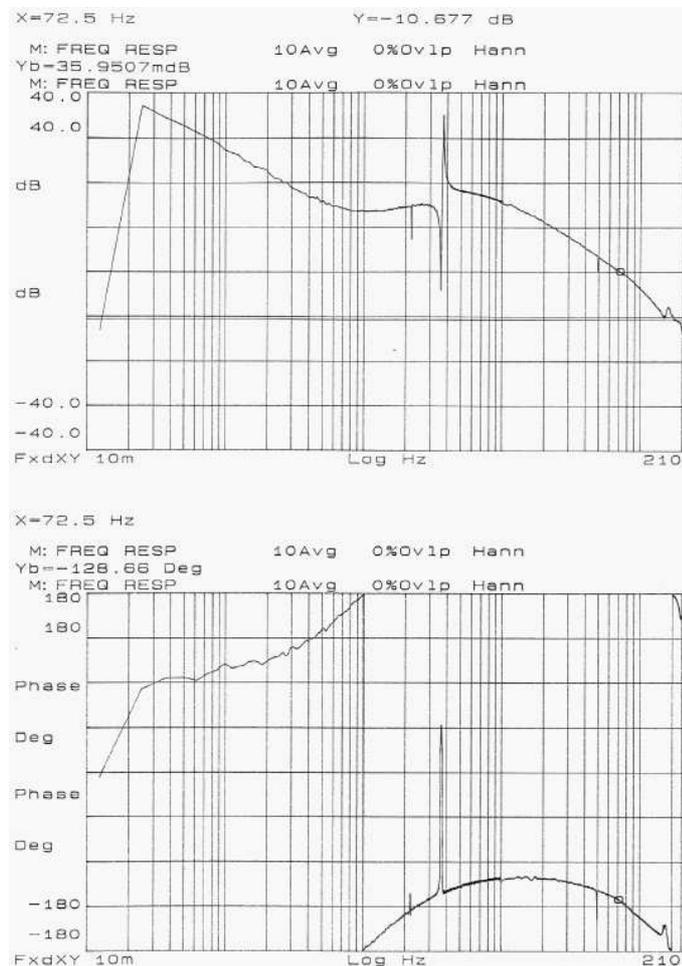


Figura 3.15: Funzione di trasferimento del feedback applicato alla 1° bobina

La Fig. 3.15 illustra, invece, la funzione di trasferimento ad anello aperto

del feedback applicato alla 1° bobina, sotto forma di diagramma di Bode, per una banda di frequenza compresa tra 10 Hz e 210 Hz: si può osservare una larghezza di banda di 72.5 Hz, un margine di fase di  $\sim 56^\circ$  ed un margine di guadagno di 10.7 db.

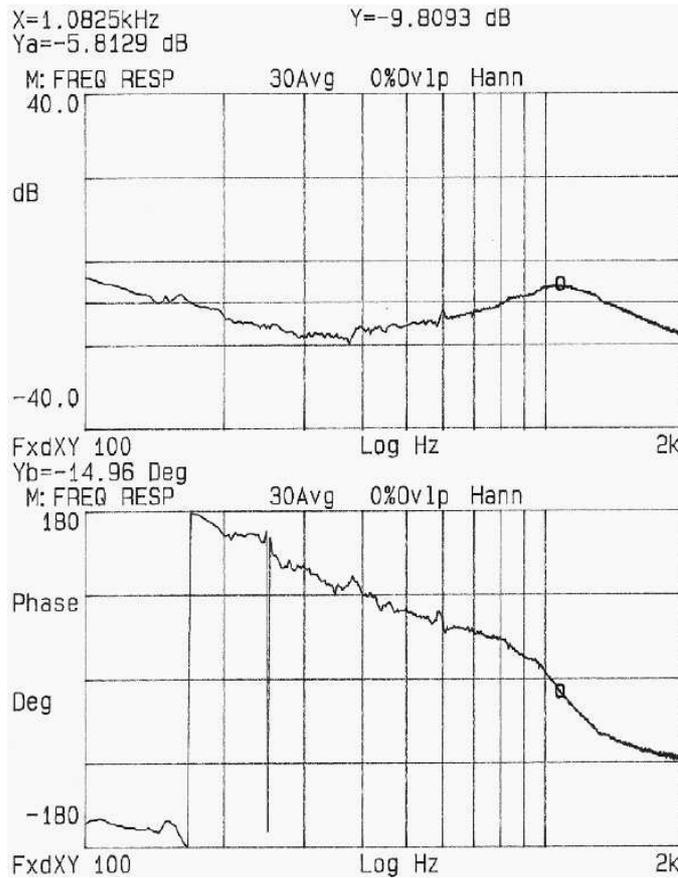


Figura 3.16: Funzione di trasferimento del feedback applicato alla 1° bobina ad alte frequenze

La funzione di trasferimento ad anello aperto per una banda di frequenza compresa tra 100 Hz e 2 kHz è mostrata, invece, in Fig. 3.16: si può osservare che a 180° si ha un margine di guadagno di 9.8 db.

In maniera analoga, la Fig. 3.17 mostra l'andamento temporale ed il corrispondente spettro di potenza della posizione lungo la verticale del blocchetto levitato di 100 g, monitorando il 2° sensore di posizione, per una misura della

durata di  $\sim 25$  s: l'oscillazione residua è dell'ordine di  $\sim \pm 1.3 \mu$  con un bias di  $\sim 2.3 \mu$ .

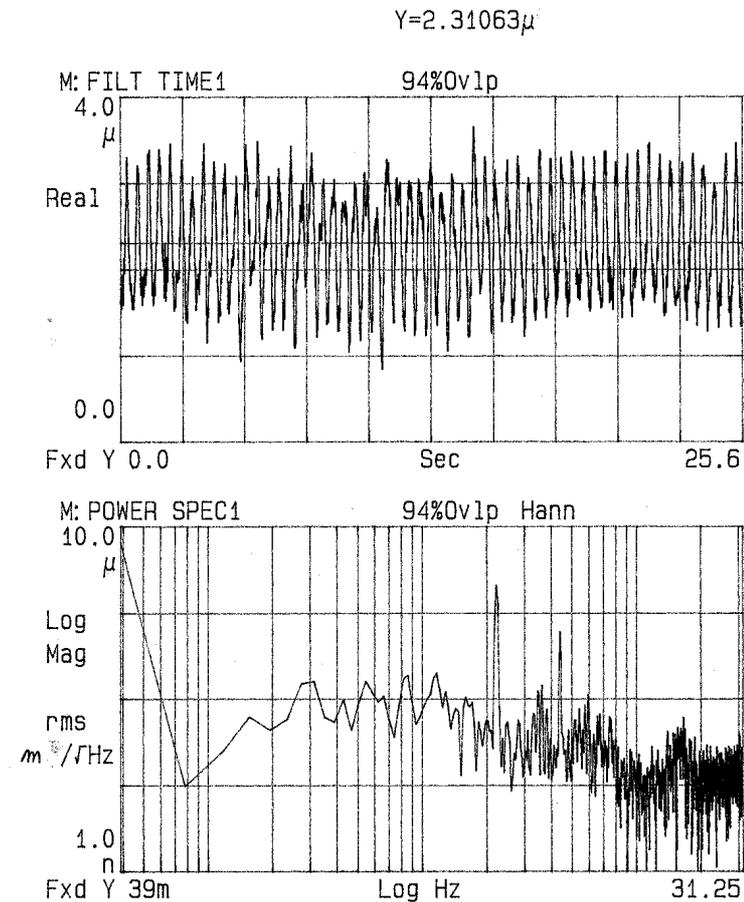


Figura 3.17: Monitoraggio nel tempo e spettro di potenza del blocchetto levitato di 100 g per il 2° sensore di posizione

In Fig. 3.18 è riportata, invece, la funzione di trasferimento ad anello aperto del feedback applicato alla 2° bobina, sotto forma di diagramma di Bode, per una banda di frequenza di 200 Hz: le informazioni che se ne possono ricavare sono una larghezza di banda di  $\sim 68$  Hz, un margine di fase di  $31^\circ$  ed un margine di guadagno di 9 db.

La funzione di trasferimento ad anello aperto per una banda di frequenza

compresa tra 100 Hz e 2.1 kHz è mostrata, invece, in Fig. 3.19: si può osservare che a 180° si ha un margine di guadagno di 9.5 db.

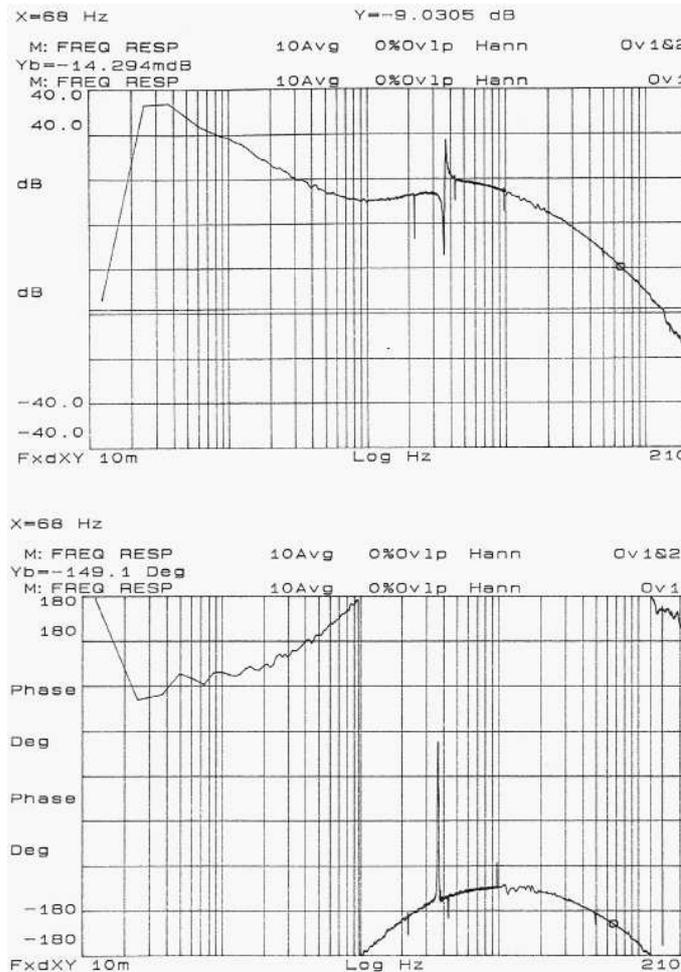


Figura 3.18: Funzione di trasferimento del feedback applicato alla 2° bobina

Dalle Fig. 3.14 e 3.17 si osserva un'oscillazione residua differente della sospensione magnetica rivelata dai 2 sensori di posizione, e dalle funzioni di trasferimento corrispondenti, riportate nelle Fig. 3.15 ed 3.18, margini di fase e di guadagno un po' diversi: il 1° sensore rivela una maggiore stabilità della sospensione e ciò può essere dovuto ai diversi guadagni degli amplificatori di tensione nonché alla diversa lettura dei fotodiodi. Il guadagno implementato

analogicamente è lo stesso per entrambi, ma quello digitale è 350 per il 1° e 200 per il 2°.

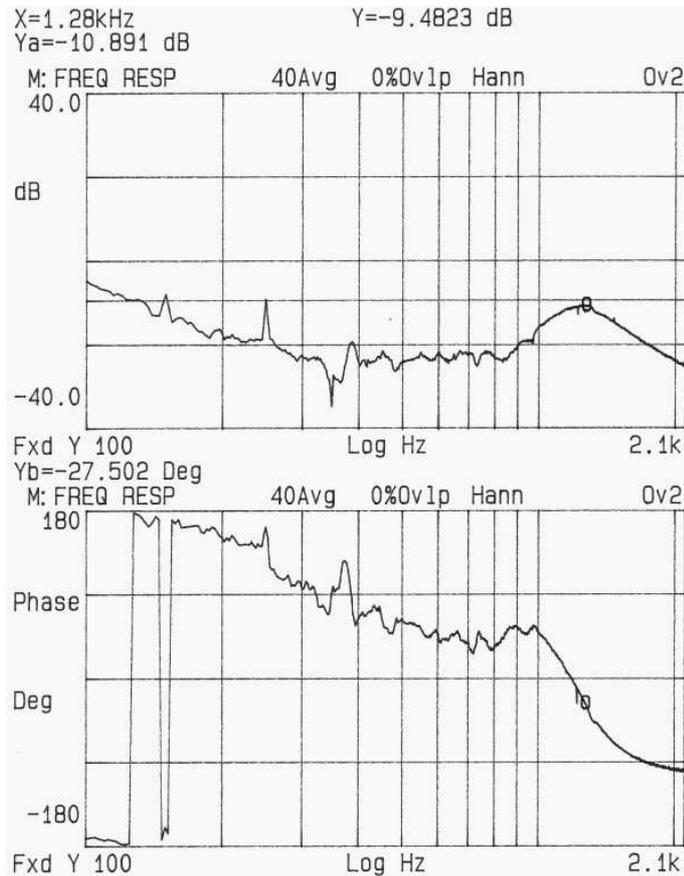


Figura 3.19: Funzione di trasferimento del feedback applicato alla 2° bobina ad alte frequenze

Come si può notare ancora dalle Fig. 3.14 e 3.17, gli spettri di potenza presentano una frequenza di risonanza intorno ai  $2\text{ Hz}$  (nonché le corrispondenti armoniche), che può innescare vibrazioni indesiderate nel blocchetto legate a gradi di libertà diversi da quelli corretti dal feedback: il controllo della sospensione avviene su due gradi di libertà ed il sistema oscilla sui rimanenti quattro. Pertanto, comunque si progettasse il filtro di reazione, non si riuscirebbe ad eliminare le frequenze di risonanza.

Essendo, inoltre, il sistema quasi privo d'attrito, queste oscillazioni pre-

sentano ampiezze elevate. Per ovviare a tale problema si è ricorso ad uno smorzamento passivo mediante correnti di Foucault.

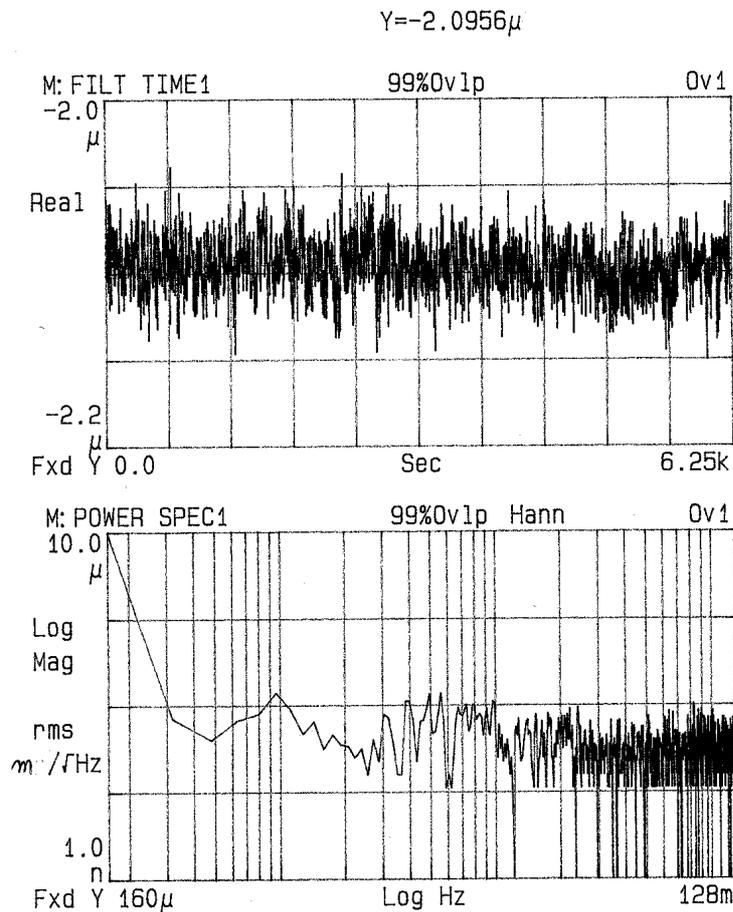


Figura 3.20: Monitoraggio nel tempo e spettro di potenza del blocchetto di 100 g levitato solo con il I feedback su tempi lunghi

Avvicinando ai magneti levitati dei blocchetti di alluminio si osserva che la frequenza di disturbo si smorza fino a scomparire: il campo generato dai magneti induce nel metallo delle correnti di Foucault o correnti parassite, che, circolando internamente al metallo, dissipano energia per effetto Joule sottraendola al campo magnetico; la sottrazione di energia al campo generato dai magneti consente, pertanto, lo smorzamento delle vibrazioni.

Lo smorzamento della frequenza di risonanza permette di ottenere una

levitazione con oscillazioni residue minori, utilizzando il filtro riportato in Tab. 3.4.

In Fig. 3.20 è riportato un monitoraggio nel tempo ed il rispettivo spettro di potenza della sospensione magnetica realizzata, per un intervallo di tempo di  $\sim 2$  ore: si può osservare un'oscillazione residua di  $\pm 0.13 \mu$  con un bias di  $-2.1 \mu$ .

È interessante osservare che, come previsto, la presenza di magneti in attrazione permette di ottenere una diminuzione della corrente media che circola nelle bobine, come mostrato in Fig. 3.21.

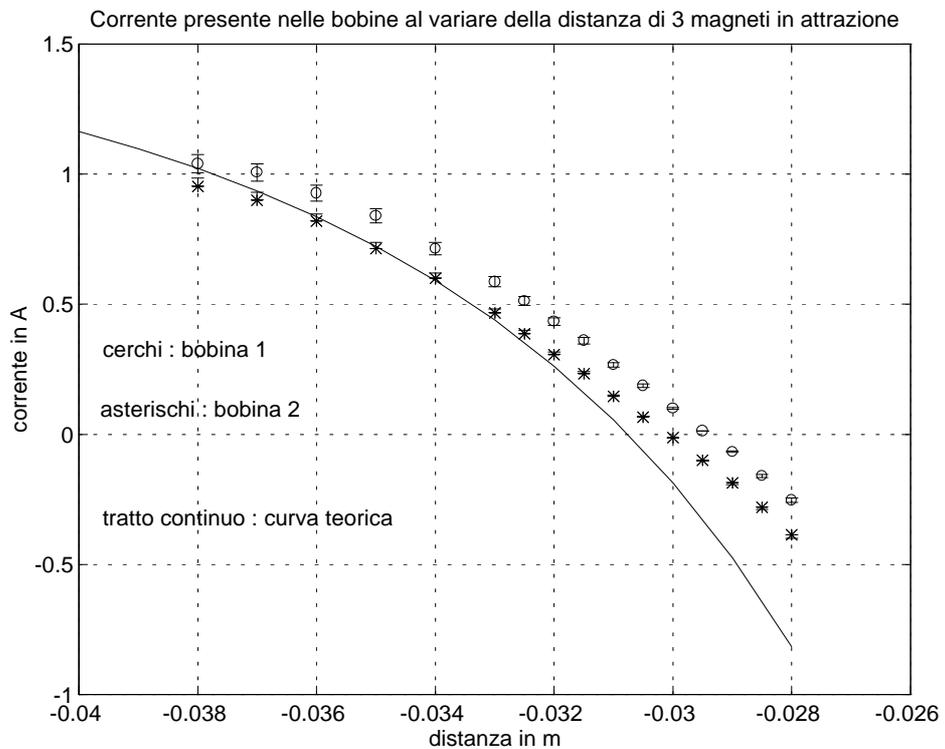


Figura 3.21: *Variazione della corrente con la distanza dei magneti in attrazione per una massa di 100 g*

L'avvicinamento dei magneti permette alla corrente di annullarsi ed, addirittura, di diventare negativa, contrastando la forza tra i dipoli magnetici e respingendo il blocco sospeso; lo spostamento dei magneti ricopre una distanza di 1 cm da 3.8 cm a 2.8 cm. La differenza che si riscontra tra le correnti

che fluiscono nelle due bobine dipende dalla posizione iniziale arbitraria dei magneti rispetto al blocco da levitare.

La Fig. 3.21 riporta anche la curva che descrive l'andamento teorico della corrente  $I(z_d)$  al variare della distanza dei magneti in attrazione, essendo  $z_d$  la distanza del magnete in attrazione dal magnete levitato. Dalla relazione (2.42), considerando il caso unidimensionale lungo l'asse  $z$  e fissata la distanza della massa di prova da levitare a  $z = R_b/2$  dall'origine del sistema di riferimento di Fig. 3.10, si ottiene una dipendenza  $I(z_d)$  del tipo

$$I(z_d) = 5^{5/2} \frac{4R_b^2}{N} \left[ \frac{1}{24} \frac{Mg}{\mu_0 \mu_r 2m_2} - \frac{3m_1}{2^4 \pi} \frac{1}{z_d^4} \right]. \quad (3.16)$$

dove si è supposto che ciascun lato della sospensione riesca a sostenere  $\sim 40 g$ .

Dalla Fig. 3.21 si può notare un discreto accordo con le previsioni del modello descritto nel Cap. 2: la discrepanza che si osserva all'avvicinarsi dei magneti si può attribuire al fatto di aver considerato i magneti permanenti in approssimazione di dipolo.

### 3.4 Interferometro con uno specchio levitato

Il passo successivo è stato quello di realizzare un interferometro Michelson [9] in cui uno specchio fosse sospeso magneticamente mediante il sistema in controreazione.

Il Michelson è stato realizzato come mostrato in Fig. 3.22: la sorgente è un laser *He-Ne* diretto verso uno specchio  $S_1$  che orienta il fascio verso un beam-splitter; da quest'ultimo il fascio è diviso in due fasci coerenti (cioè la loro differenza di fase ha un valore ben definito e costante), uno riflesso, diretto verso lo specchio levitato  $S_2$  e l'altro trasmesso, diretto verso un altro specchio  $S_3$  posto ortogonalmente a quello levitato.

Il beam-splitter è inclinato di  $45^\circ$  rispetto alle direzioni dei fasci.

I fasci riflessi dagli specchi  $S_2$  ed  $S_3$  tornano ad interferire sul beam-splitter. L'interferenza viene osservata tramite oscilloscopio oppure analizza-

tore di spettro ed è costruttiva o distruttiva a seconda della differenza di fase dei due fasci: se i due specchi sono quasi ortogonali tra loro si osserva un sistema di frange costituito da linee approssimativamente parallele.

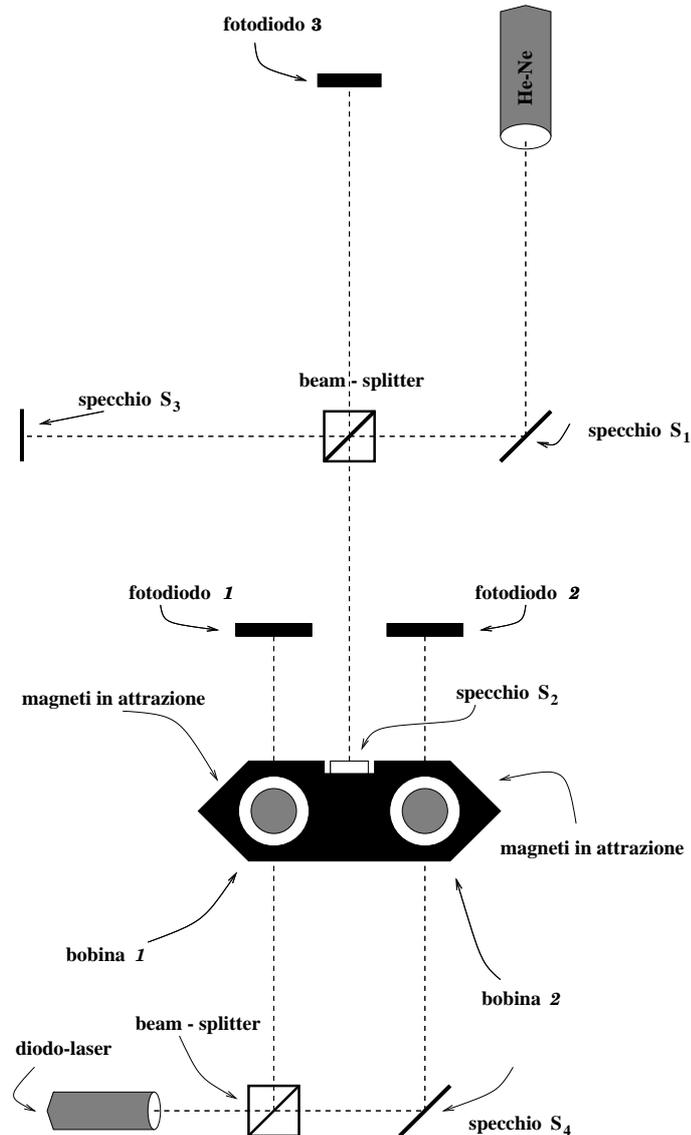


Figura 3.22: *Interferometro Michelson con uno specchio levitato*

La figura d'interferenza acquisita tramite analizzatore di spettro è stata graficata e riportata in Fig. 3.24 e mostra 19 frange per un periodo di  $\sim 0.4$  s con un contrasto di  $\frac{V_{max}-V_{min}}{V_{max}+V_{min}} = \sim 0.6$ : la lunghezza d'onda dell' *He-Ne* è

633 nm, dalla relazione  $N\lambda/2$  si ottiene un'ampiezza di oscillazione orizzontale di 6  $\mu m$ .

Contemporaneamente è mostrato anche l'andamento nel tempo della sospensione magnetica durante il funzionamento dell'interferometro: si osserva un'oscillazione residua verticale di  $\pm 1.4 \mu m$  con un bias di  $-1.6 \mu m$ .

Per ottenere maggiore stabilità si è smorzata la frequenza di risonanza della sospensione facendo uso del damping di Foucault descritto nel Par. 3.3.

La Fig. 3.23 mostra una fotografia della sospensione magnetica realizzata in laboratorio.

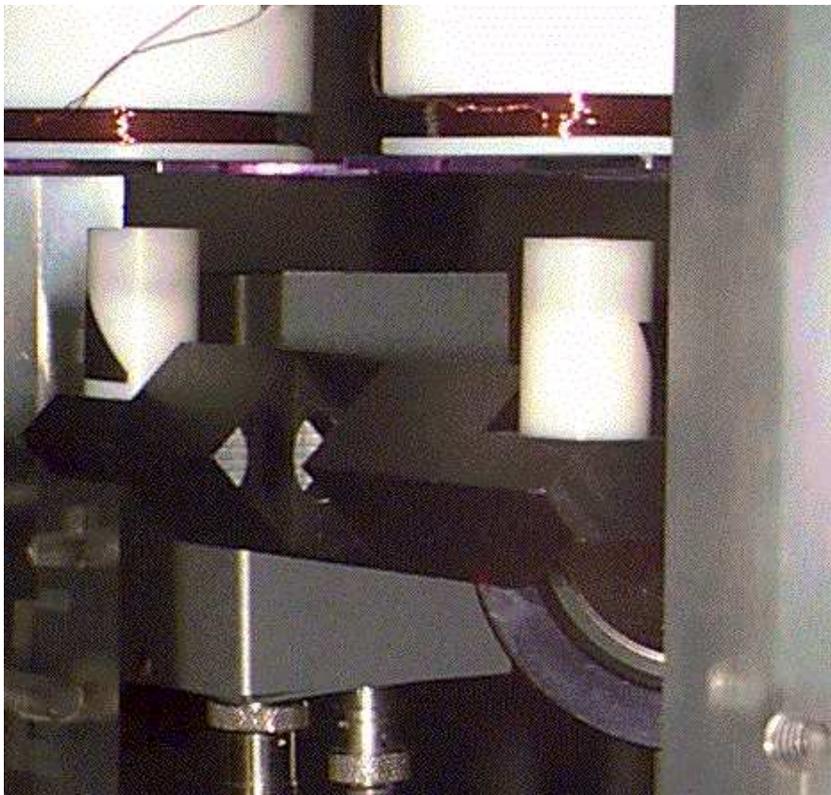


Figura 3.23: *Sospensione magnetica con specchio*

La differenza di fase fra i fasci può derivare dai diversi cammini ottici percorsi secondo la relazione

$$\delta = n(r_{s_1} - r_{s_2}) ; \quad (3.17)$$

essendo i cammini ottici in aria per entrambi i fasci, l'indice di rifrazione è lo stesso e la differenza di cammino ottico diventa una differenza di lunghezza tra i bracci dell'interferometro; la lunghezza di ciascun braccio è stata presa uguale a  $\sim 26 \text{ cm}$ .

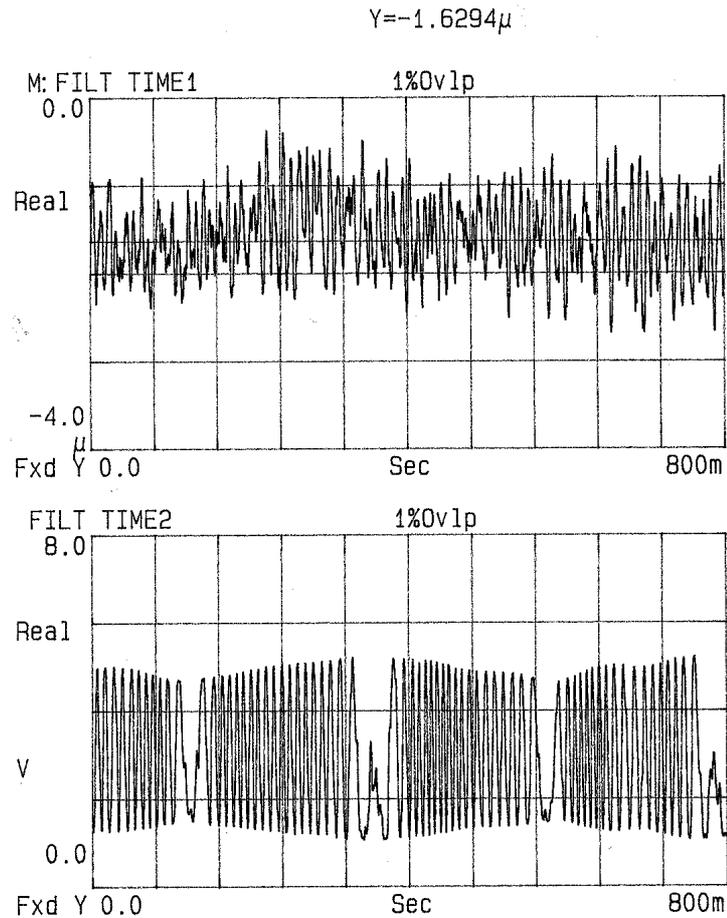


Figura 3.24: Monitoraggio nel tempo della sospensione magnetica e frange di interferenza

Altre informazioni che si possono estrapolare dalla Fig. 3.24 è la presenza di un moto pendolare legato all'oscillazione residua della sospensione magnetica e di una rotazione intorno all'asse di allineamento degli specchi dell'interferometro, osservabile dalla variazione d'ampiezza del contrasto.

La Fig. 3.25 mostra l'apparato completo utilizzato per la realizzazione della sospensione magnetica di un oggetto di  $\sim 100\text{ g}$ .

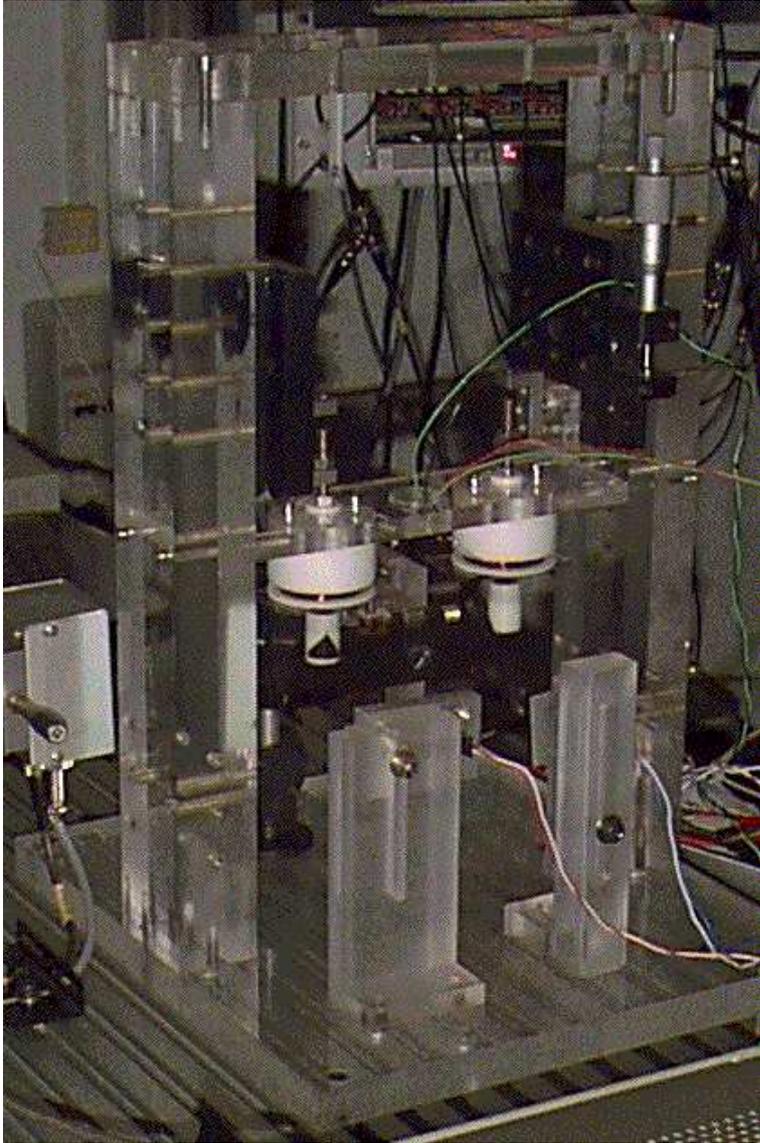


Figura 3.25: *Veduta d'insieme dell'apparato usato per la sospensione magnetica*

La progettazione e la realizzazione di un prototipo di interferometro con uno specchio sospeso magneticamente, descritte in questo capitolo, rappresentano i presupposti per la realizzazione di un interferometro in cui tutti gli

elementi risultino tali: questo nuovo progetto richiederà la realizzazione di una configurazione adeguata che preveda anche l'uso di sensori di posizione per il controllo dei gradi di libertà non controllati nel dispositivo già realizzato.

Le problematiche essenziali di un tale prototipo e del progetto ad esso legato riguardano, una volta appuratane la fattibilità, il rumore introdotto nella realizzazione di un sistema a levitazione magnetica: il prossimo capitolo è, pertanto, incentrato sullo studio degli effetti di rumore che compaiono in un tale progetto e possono limitarne la sensibilità.

Una sensibilità adeguata permetterà al dispositivo che si intende progettare di essere applicato all'antenna VIRGO, come verrà più in dettaglio esplicitato nell'ultimo capitolo di questo lavoro di tesi.

# Capitolo 4

## Effetti di rumore

La realizzabilità di un sistema a levitazione magnetica è stata verificata sia per una massa di prova di forma cilindrica tale che la sua geometria fosse la più simmetrica possibile (vedi Par. 3.2), sia per un elemento a forma di parallelepipedo (vedi Par. 3.3), opportunamente modellato per consentire il passaggio del fascio laser, il posizionamento dei magneti permanenti e l'alloggiamento dello specchio, inserito nell'interferometro descritto nel Par. 3.4.

In entrambi i casi, per valutare l'efficienza di un tale dispositivo come sistema di isolamento sismico, bisogna stimare quanto piccolo è il rumore introdotto dalla sospensione della massa: il limite oltre il quale è possibile trascurare il rumore è, nel nostro caso, dell'ordine di  $1.6 \cdot 10^{-13} \text{ m}/\sqrt{Hz}$ , come verrà illustrato in seguito.

Perturbazioni della posizione di equilibrio stabile possono essere dovute a varie cause, ad esempio oscillazioni nel sistema fisso in cui sono alloggiati i magneti, rumore introdotto dal sensore di posizione oppure correnti d'aria sulla massa sospesa. L'uscita del segnale proveniente da ciascun sensore ad occultazione può essere analizzata per determinare la natura dei disturbi in termini qualitativi e quantitativi.

Diversi sono i tipi di rumore che intervengono in un dispositivo a levitazione magnetica: scopo di questo capitolo è la loro analisi e la possibile riduzione.

## 4.1 Rumore sismico

L'uso di una sospensione magnetica comporta almeno due potenziali maggiori vantaggi: è possibile escogitare configurazioni che diano, in un modo semplice, basse frequenze di risonanza; inoltre si possono eludere i seri problemi di risonanza negli indesiderati modi di vibrazione dovuti a fili di sospensione e a molle meccaniche.

Essendo, come verrà descritto in seguito, una sospensione magnetica paragonabile ad un sistema meccanico massa-molla o ad un pendolo senza fili, per analogia, si ha che il rumore sismico viene trasmesso al sistema dalla forza esercitata dalla bobina e dai magneti posti in attrazione: la molla o i fili sono invisibili e sono rappresentati dal feedback che relaziona corrente e posizione nella sospensione magnetica.

Come illustra la Fig. 3.25 a pag. 83, il setup è realizzato in modo che gli elementi costituenti la sospensione magnetica restino vincolati al banco ottico, di conseguenza risentono del moto sismico; anche il sensore di posizione, nelle configurazioni realizzate, è vincolato a terra, pertanto una qualunque vibrazione del banco ottico viene trasmessa alla sospensione: una configurazione più vantaggiosa si otterrebbe sospendendo anche gli elementi che permettono di realizzare la sospensione, magari utilizzando un pendolo invertito.

Analizziamo il comportamento come isolatore sismico di un sistema levitato magneticamente. Scelto il sistema di riferimento mostrato in Fig. 2.1 a pag. 30, assumiamo che il magnete fisso si trovi nel punto di coordinate  $\vec{r}_m(x_m, y_m, z_m)$  e che il magnete levitato sia nel punto generico di coordinate  $\vec{r}(x, y, z)$ .

Supponendo che il bilanciamento tra la forza peso e la forza esercitata dai dipoli magnetici avvenga quando la distanza tra i centri dei dipoli magnetici è  $d_0 = z - z_m$ , cioè quando il magnete levitato si trova nella posizione d'equilibrio, risulta valida l'espressione

$$|Mg| = \frac{3\mu_0\mu_r m_1 m_2}{2\pi} \frac{1}{d_0^4} \quad (4.1)$$

dove  $M$  è la massa sospesa ed  $m_1$  ed  $m_2$  sono i momenti di dipolo magnetico;  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto e  $\mu_r$  quella del mezzo.

#### 4.1.1 Isolamento orizzontale

Analizziamo, dapprima, il comportamento della sospensione magnetica come isolatore sismico lungo le direzioni orizzontali.

Come è stato descritto nel Par. 2.2, lungo le direzioni  $x$  ed  $y$ , il sistema sospeso è soggetto, per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio, ad una forza di richiamo, le cui componenti sono state ottenute con uno sviluppo al primo ordine intorno alla posizione di equilibrio (vedi Eq. 2.10 a pag. 33). Adattando le relazioni ottenute nel Par. 2.2 alle componenti della forza nel sistema di riferimento ora in uso si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{3}{\pi}\mu_0\mu_r m_1 m_2 \frac{1}{d_0^5} (x - x_m) \\ F_y &= -\frac{3}{\pi}\mu_0\mu_r m_1 m_2 \frac{1}{d_0^5} (y - y_m) . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sostituendo l'espressione (4.1) nelle componenti della forza (4.2), queste ultime si possono riscrivere in termini della massa sospesa in questo modo

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{2Mg}{d_0} (x - x_m) \\ F_y &= -\frac{2Mg}{d_0} (y - y_m) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'equazione del moto per la massa levitata è, per entrambe le direzioni, <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} -M\omega^2 X(\omega) &= -\frac{2Mg}{d_0} (X(\omega) - X_m(\omega)) \\ -M\omega^2 Y(\omega) &= -\frac{2Mg}{d_0} (Y(\omega) - Y_m(\omega)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

da cui la funzione di trasferimento orizzontale (trascurando gli attriti) risulta

---

<sup>1</sup>Un piccolo spostamento orizzontale non influisce (in prima approssimazione) sul segnale del sistema in controreazione, pertanto la presenza del feedback in questo caso può essere trascurata.

$$\begin{aligned} HTF_x &= \frac{X(\omega)}{X_m(\omega)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2} \\ HTF_y &= \frac{Y(\omega)}{Y_m(\omega)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_y}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove si sono assunte le seguenti posizioni

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{2g/d_0}. \quad (4.6)$$

Essendo il periodo di un pendolo semplice uguale a  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  da cui la pulsazione è  $\omega = \sqrt{g/l}$ , uguagliando quest'ultima alla pulsazione orizzontale lungo  $x$  e lungo  $y$  si scopre che il sistema si comporta come un pendolo di lunghezza  $l = d_0/2$  in entrambe le direzioni.

Scelto  $d_0 = 3 \text{ cm}$ , cioè il valore usato nel Par. 2.4 per valutare il contributo apportato dalla presenza di magneti in attrazione e che corrisponde anche alla distanza alla quale la corrente è nulla (vedi Fig. 3.21 a pag. 78), si ottiene una lunghezza  $l = 1.5 \text{ cm}$  ed un'oscillazione orizzontale di  $\nu_x = \omega_x/(2\pi) \simeq 4 \text{ Hz}$ .

Assumendo che per frequenze  $\nu \gg 1$  il rumore sismico residuo vale

$$\tilde{X}_s(\nu) = \frac{10^{-6}}{\nu^2} \quad (4.7)$$

la funzione di trasferimento (4.5) risulta

$$HTF_x(\nu \gg 1) \simeq \left(\frac{\nu_x}{\nu}\right)^2. \quad (4.8)$$

Pertanto il limite sul rumore misurabile risulta

$$\tilde{X}(\omega) = HTF(\omega) \tilde{X}_s(\omega). \quad (4.9)$$

Una stima di tale rumore a  $\nu = 100 \text{ Hz}$  è  $\tilde{X} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

Tale valore verrà assunto come riferimento per valutare l'effetto di altre sorgenti di rumore.

### 4.1.2 Isolamento verticale

Nelle stesse condizioni assunte nel caso di spostamento orizzontale, lungo la direzione verticale  $z$  la forza di richiamo risulta

$$F_z = \frac{6}{\pi} \mu_0 \mu_r m_1 m_2 \frac{1}{d_0^5} (z - z_m) + F_{fb}(z - z_m). \quad (4.10)$$

essendo  $F_{fb}$  la forza esercitata dal sistema in controreazione: lungo la direzione verticale, infatti, l'effetto di quest'ultimo, usato per stabilizzare la posizione della sospensione non può più essere trascurato.

In questo caso, sostituendo l'espressione (4.1), si ottiene

$$F_z = \frac{4Mg}{d_0} (z - z_m) + F_{fb}(z - z_m). \quad (4.11)$$

L'equazione del moto per la massa levitata, pertanto, diventa

$$-M\omega^2 Z(\omega) = \left( \frac{4Mg}{d_0} + A(\omega) \right) (Z(\omega) - Z_m(\omega)) \quad (4.12)$$

essendo  $A(\omega)(Z(\omega) - Z_m(\omega))$  la forza esercitata dal sistema in controreazione sul magnete levitato; essa è legata alla funzione di trasferimento ad anello aperto del feedback dalla relazione

$$H(\omega) = -\frac{A(\omega)}{M\omega^2}. \quad (4.13)$$

Definendo  $\omega_z^2 = 4g/d_0$  e riarrangiando l'equazione (4.12) si ottiene la funzione di trasferimento per le oscillazioni verticali

$$VTF = \frac{Z(\omega)}{Z_m(\omega)} = \frac{1 - H(\omega) \left( \frac{\omega}{\omega_z} \right)^2}{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_z} \right)^2 (1 - H(\omega))}. \quad (4.14)$$

La funzione di trasferimento verticale dipende, pertanto, dall'implementazione del sistema in controreazione. Osservando l'espressione (4.14) si possono ricavare alcune informazioni sull'andamento generale della funzione di trasferimento: entro la larghezza di banda del feedback, ( $|H(\omega)| > 1$ ), cioè dalla

componente continua alla frequenza corrispondente al guadagno unitario, vale  $VTF \sim 1$ ; al di fuori della larghezza di banda del feedback, ( $|H(\omega)| < 1$ ), essendo in questo caso  $\omega > \omega_z$ , si ha

$$VTF = \frac{Z(\omega)}{Z_m(\omega)} \simeq \begin{cases} H(\omega) & \text{se } |H(\omega)| \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2 > 1 \\ \left(\frac{\omega_z}{\omega}\right)^2 & \text{se } |H(\omega)| \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2 < 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Al di sopra della frequenza corrispondente al guadagno unitario, la funzione di trasferimento si comporta come un filtro passa-basso che riproduce  $H(\omega)$ . Se  $H(\omega)$  cala abbastanza rapidamente (più di  $-40 \text{ dB/ottava}$ ) ci sarà una frequenza tale che  $\left|H(\omega) \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2\right| = 1$ ; al di sopra di questa frequenza la funzione di trasferimento diventa  $(\omega_z/\omega)^2$  e riproduce la funzione di trasferimento di un pendolo semplice di lunghezza  $l = d_0/4$  e pulsazione  $\omega_z = \sqrt{4g/d_0}$ .

Pertanto, per frequenze elevate, scegliendo  $d_0 = 3 \text{ cm}$ , come è stato fatto per la trattazione dell'isolamento orizzontale, si ottiene una lunghezza  $l = 7.5 \text{ mm}$ .

In particolare, si può ricavare la relazione che lega la frequenza verticale a quella orizzontale: sostituendo, infatti, la relazione (4.6) nell'espressione della pulsazione, si ottiene una frequenza verticale di  $\nu_z = \nu_x \sqrt{2} \simeq 6 \text{ Hz}$ .

### 4.1.3 Effetto del rumore del sensore shadow-meter

La valutazione del rumore sismico è stata fatta confrontando l'oscillazione residua a cui è soggetta la sospensione magnetica, cioè le vibrazioni sismiche misurate dallo shadow-meter, ed il sisma misurato da un accelerometro piezoelettrico.

Per poter confrontare i due segnali è stato necessario convertirli in metri: il segnale rivelato dallo shadow-meter è stato diviso per la sensibilità dello stesso, cioè  $1.15 \pm 0.01 \text{ mV}/\mu\text{m}$ , mentre quello dell'accelerometro è stato prima diviso per  $\omega^2$  e poi per  $0.32 \text{ V}/\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ , valore della sua sensibilità.

La Fig. 4.1 mostra il confronto tra gli spettri di potenza dei due segnali

nella banda di frequenza compresa tra  $10\text{ Hz}$  e  $110\text{ Hz}$ : si può osservare una buona correlazione tra i due segnali nella banda di frequenza compresa tra  $10\text{ Hz}$  e  $16\text{ Hz}$ . L'oscillazione residua della sospensione magnetica, nella banda di frequenza del feedback, segue il segnale dello shadow-meter, essendo unitario il guadagno del feedback in questo intervallo: a  $20\text{ Hz}$  il valore del segnale è di  $2 \cdot 10^{-8}\text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

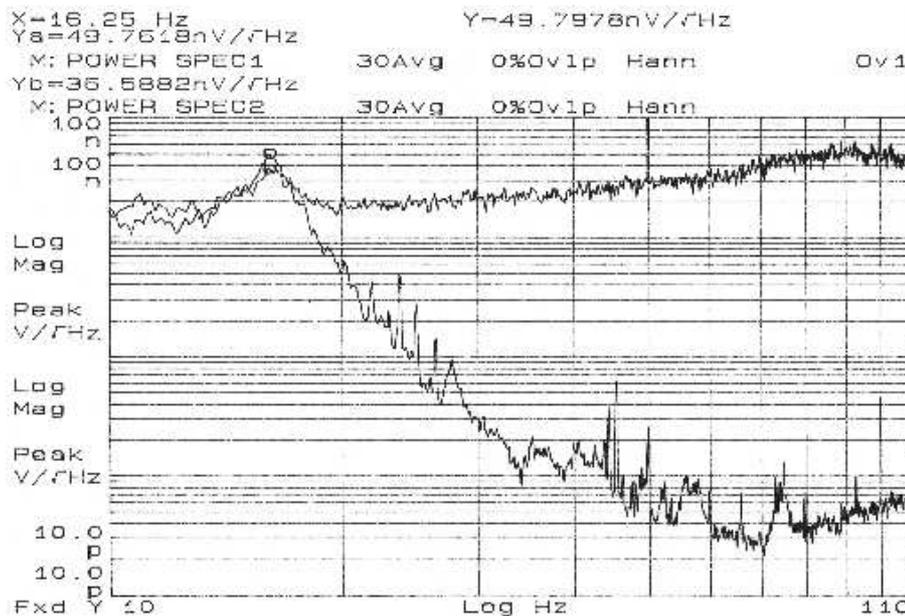


Figura 4.1: Confronto tra lo spettro di potenza dell'oscillazione residua della sospensione magnetica ed il sisma misurato da un accelerometro piezoelettrico

Il confronto permette di riconoscere il rumore sismico fino a  $16 \div 17\text{ Hz}$ : i due segnali risultano identici fino a tali frequenze, oltre le quali prevale il rumore introdotto dallo shadow-meter.

Intorno ai  $16\text{ Hz}$  si nota, inoltre, un picco nel rumore sismico dovuto ad una risonanza del banco ottico.

La Fig. 4.2 mostra la funzione di trasferimento del banco ottico, ottenuta confrontando il sisma verticale misurato da due accelerometri, di cui uno posto a terra e l'altro sul dispositivo realizzato per la sospensione magnetica,

solidale al piano del banco: si può osservare un picco di risonanza a  $16.6 \text{ Hz}$  che permette di attribuire al sisma del banco ottico il picco che compare nella Fig. 4.1.

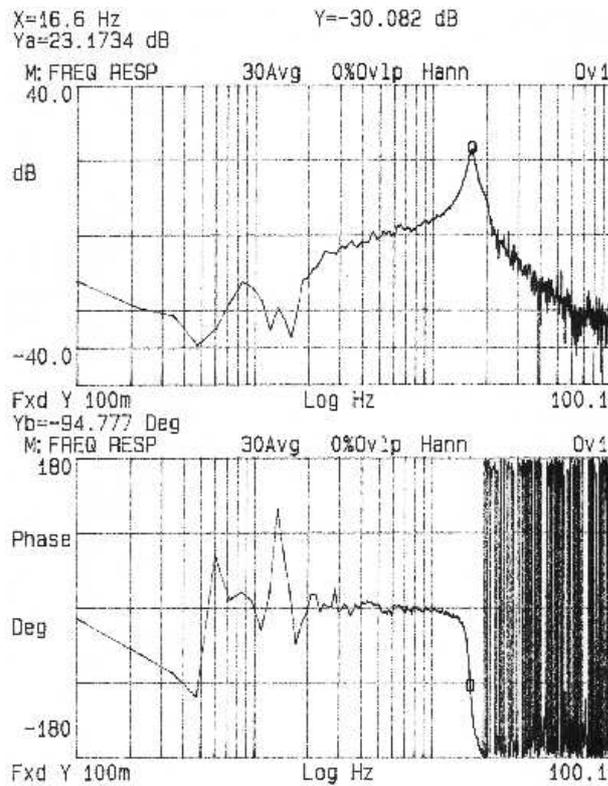


Figura 4.2: Funzione di trasferimento del banco ottico

Per ridurre l'effetto del rumore dello shadow-meter e valutare il rumore sismico a frequenza più elevate occorre ridurre il rumore introdotto dal diodo-laser, stabilizzando la sorgente mediante un feedback oppure utilizzando una sorgente laser più stabile.

#### 4.1.4 Stabilizzazione della sorgente laser

Per la stabilizzazione del diodo-laser si è realizzato un feedback sulla corrente implementando il filtro riportato in Tab. 4.1 ed imponendo un guadagno in continua di 1600.

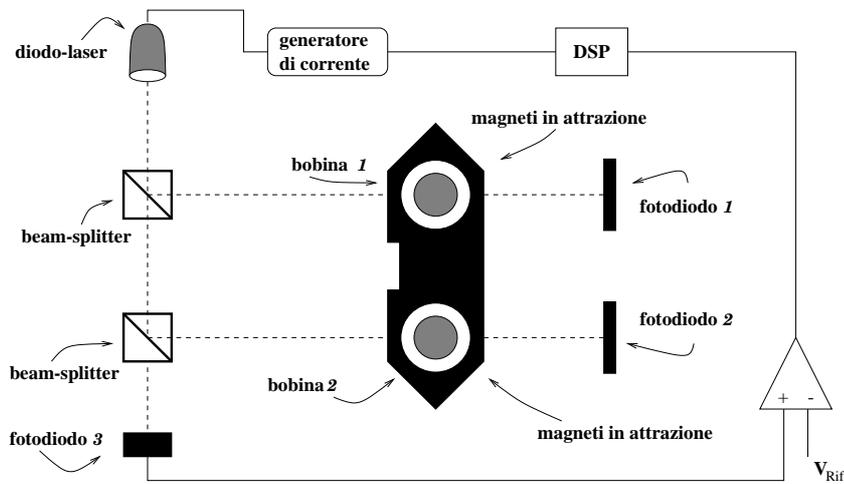


Figura 4.3: Configurazione per la stabilizzazione del diodo-laser

Per pilotare la corrente del diodo-laser si è utilizzato un generatore di corrente di precisione; inoltre è stato necessario introdurre un ulteriore fotodiodo che leggesse il rumore in intensità del diodo-laser, pertanto la configurazione riportata in Fig. 3.13 a pag. 70 è stata modificata come in Fig. 4.3, dove si può osservare che lo specchio a  $45^\circ$  è stato sostituito da un beam-splitter in modo da ripartire il fascio sia sul fotodiodo necessario per operare la stabilizzazione sia su quello del 2° sensore ad occultazione.

$N^\circ$	Tipo		$\nu$ (Hz)
1	polo	reale	1
2	zeri	reali	200
1	polo	reale	4000

Tabella 4.1: Filtro stabilizzante la sorgente laser

La Fig. 4.4 illustra il segnale rivelato dal fotodiodo per la stabilizzazione in assenza ed in presenza del feedback: si può osservare che in presenza del feedback, in bassa frequenza, il segnale è ridotto di oltre 1 ordine di grandezza.

Il miglioramento apportato con la stabilizzazione della sorgente è rison-

trabile anche dal confronto con il sisma prodotto dall'accelerometro: la Fig. 4.5 mostra nuovamente tale confronto e permette di riconoscere il sisma fino a  $\sim 20 \text{ Hz}$ ; a questa frequenza il segnale dello shadow-meter risulta di  $4 \cdot 10^{-9} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ , la presenza del feedback lo ha ridotto di un fattore 5.

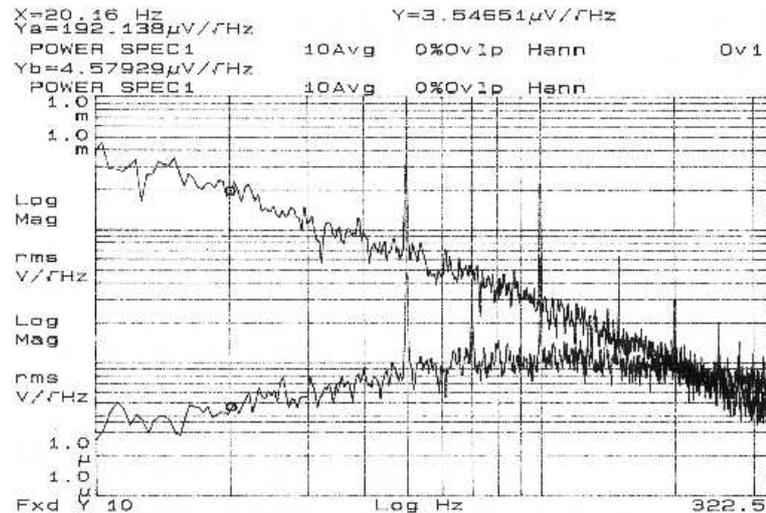


Figura 4.4: Confronto tra lo spettro di potenza delle fluttuazioni di intensità del diodo-laser, in presenza ed in assenza del feedback stabilizzante

Individuata la fonte di rumore, il passo successivo sarà cercare di ottimizzare il sistema al fine di ottenere un abbattimento ulteriore del rumore introdotto dal diodo-laser.

## 4.2 Rumore elettromagnetico

La riduzione del rumore dovuto all'accoppiamento tra i campi magnetici variabili esterni può essere ottenuta usando due o tre magneti sulla massa da levitare, posti in modo che ci sia compensazione con il momento di dipolo, e possibilmente anche con quello di quadropolo del sistema sospeso. In questo modo l'accoppiamento residuo riguarderebbe solo componenti del campo esterno di ordine superiore, e potrebbe essere significativamente ridotto: tale accorgimento è stato adottato per la sospensione a levitazione magnetica

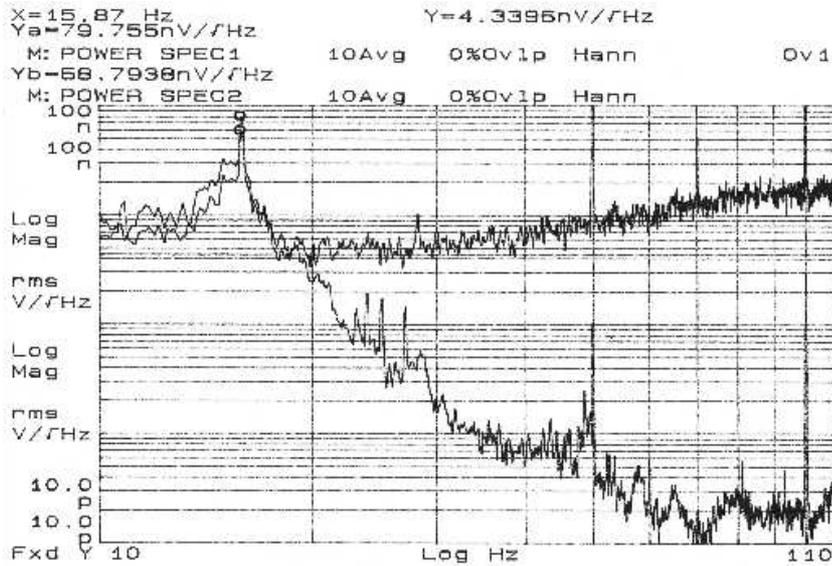


Figura 4.5: Confronto tra lo spettro di potenza dell'oscillazione residua della sospensione magnetica ed il sisma misurato da un accelerometro piezoelettrico in presenza del feedback stabilizzante

realizzata in laboratorio, come già descritto nel Par. 3.3 ed illustrato in Fig. 3.12 a pag. 69.

### 4.2.1 Rumore elettromagnetico ambientale

Stimiamo la perturbazione indotta da un fulmine a distanza  $r = 1 \text{ km}$  dal laboratorio: il fulmine può essere schematizzato come un filo rettilineo percorso da corrente inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto alla verticale.

Il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente in un punto  $P$  a distanza  $r$  da esso risulta

$$\vec{B}_f = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \sin \alpha \hat{t} \quad (4.16)$$

essendo  $\hat{t}$  il versore della tangente alla circonferenza di raggio  $r$ . Scelto il sistema di riferimento con l'origine nel punto di incidenza del fulmine, e supposto che il filo giaccia nel piano  $xz$ , formando un angolo  $\alpha$  con la verticale, mentre il dipolo magnetico del magnete levitato si trova, come mostrato in

Fig. 4.7, lungo l'asse  $y$  a distanza  $d$ , il valore del campo magnetico generato dal filo, nelle componenti cartesiane, risulta

$$\begin{aligned} B_x &= |\vec{B}_f| \cos \alpha = -\frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi} \frac{1}{r} \cos \alpha \\ B_y &= 0 \\ B_z &= |\vec{B}_f| \sin \alpha = -\frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi} \frac{1}{r} \sin \alpha . \end{aligned} \quad (4.17)$$



Figura 4.6: *Fulmine*

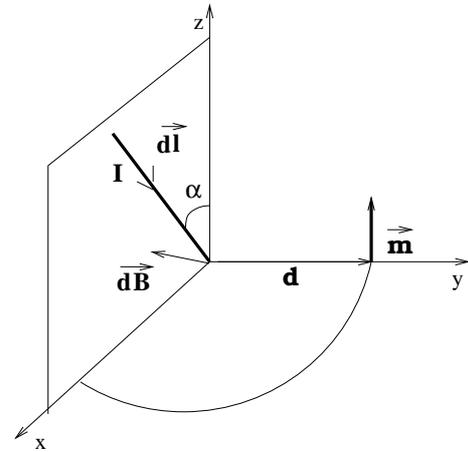


Figura 4.7: *Filo rettilineo percorso da corrente*

La forza indotta dal filo sul dipolo magnetico risulta  $\vec{F}_f = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}_f)$ , che nelle sue componenti, nel sistema del magnete, diventa

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= -\frac{\mu_0 \mu_r m I}{2\pi} \frac{y}{r^3} \sin \alpha \\ F_z &= 0 . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Supponendo che il dipolo si trovi a distanza  $y$  dall'origine del riferimento e scegliendo  $\alpha = \pi/2$  si ottiene un limite superiore per la forza indotta dal filo, cioè

$$F_{max} = -\frac{\mu_0 \mu_r m I}{2\pi} \frac{1}{r^2} . \quad (4.19)$$

Nota l'equazione di un moto accelerato, lo spostamento indotto sul magnete risulta

$$\Delta y = \frac{1}{2} \frac{F_{max}}{M} (\Delta t)^2 \quad (4.20)$$

La corrente trasportata da un fulmine ha un valore medio di  $10 \text{ kA}$  ed un valore limite di  $200 \text{ kA}$ ; la durata del fenomeno varia tra  $10 \text{ }\mu\text{s}$  e  $100 \text{ }\mu\text{s}$ , ma la corrente raggiunge il suo picco massimo in qualche microsecondo.

Il percorso che il fulmine effettua con maggiore probabilità è quello più breve possibile: è per tale motivo che lo si è approssimato con un filo rettilineo.

La forza perturbativa del fulmine risulta  $F_{max} = 8.3 \cdot 10^{-10} \text{ N}$ , corrispondente ad uno spostamento di  $\Delta y = 4.2 \cdot 10^{-19} \text{ m}$ , che espresso in  $m/\sqrt{\text{Hz}}$  diventa  $\tilde{Y} = 1.3 \cdot 10^{-21} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ : i valori utilizzati sono  $m = 0.42 \text{ Am}^2$  per il momento di dipolo, determinato nel Par. 2.4 per magneti permanenti al *Sm-Co*,  $M = 100 \text{ g}$  per la massa,  $I = 10 \text{ kA}$  per la corrente trasportata dal fulmine e  $\Delta t = 10 \text{ }\mu\text{s}$ .

La perturbazione indotta da un eventuale fulmine è trascurabile se confrontata con il limite sul rumore riportato ad inizio del capitolo.

## 4.3 Rumore acustico

Il dispositivo realizzato, nelle sue future applicazioni, lavorerà sotto vuoto: le considerazioni qui riportate sul rumore acustico sono preliminari per un eventuale applicazione in aria.

### 4.3.1 Deflessione indotta da un'onda sonora

Valutiamo la deflessione indotta da un'onda acustica che viaggia in aria su un fascio che si propaga in tale mezzo.

Nota la relazione [14] che sussiste tra la variazione di indice di rifrazione del mezzo in cui il fascio si propaga e la variazione di pressione indotta dall'onda sonora, cioè

$$\frac{dn}{n} = \frac{(n^2 + 2)(n^2 - 1)}{6n^2} \frac{dP}{P} \quad (4.21)$$

dove  $P$  è la pressione nel volume considerato ed  $n$  l'indice di rifrazione che per l'aria vale  $n_{aria} = 1.000265$ , si ricava che il fattore di proporzionalità vale  $2.65 \cdot 10^{-4}$ .

Un fascio che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione non omogeneo subirà una deflessione  $\Theta$ , indotta da un'onda sonora propagantesi in direzione ortogonale al fascio, espressa dalla relazione

$$\Theta = \int_0^L \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} dy = L \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \quad (4.22)$$

essendo  $n$  l'indice di rifrazione del mezzo,  $y$  la coordinata lungo la direzione del fascio e  $z$  quella lungo la direzione dell'onda sonora,  $L$  la lunghezza di interazione tra onde acustiche ed ottiche.

L'onda acustica genera una pressione aggiuntiva

$$dP = p \cos\left(\frac{2\pi\nu}{v_s} z\right) \quad (4.23)$$

che fa variare l'indice di rifrazione; nella (4.23)  $p$  rappresenta l'ampiezza della pressione,  $v_s = 340 \text{ m/s}$  la velocità del suono in aria e  $\nu$  la frequenza dell'onda emessa.

Confrontando le relazioni (4.21) e (4.22) si ottiene un valore per la deflessione indotta a *T.P.S.* di

$$\Theta = 2.65 \cdot 10^{-4} \frac{2\pi}{v_s} L \nu p. \quad (4.24)$$

### 4.3.2 Rumore acustico ambientale

Per valutare questo tipo di rumore occorre caratterizzare il livello acustico del laboratorio in cui è stata realizzata la sospensione magnetica.

Il livello di rumore tipico in un laboratorio [14] è  $\tilde{p} \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}^2 \sqrt{Hz}$  intorno ai 100 *Hz*.

Nella sospensione magnetica realizzata è presente un fascio laser, proveniente dal diodo-laser che costituisce parte del sensore ad occultazione, che si propaga in aria fino a raggiungere la massa sospesa per un percorso di  $\sim 10 \text{ cm}$ .

La deflessione subita da tale fascio, assumendo una lunghezza di interazione  $L = 10 \text{ cm}$ , e supponendo che l'interazione tra onde acustiche ed ottiche avvenga per tutta la lunghezza del percorso in aria, per una frequenza  $\nu = 100 \text{ Hz}$  risulta, dalla relazione (4.22),  $\tilde{\Theta} = 10^{-12} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ , corrispondenti in spostamento ad  $\tilde{X} = L \tilde{\Theta} = 10^{-13} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

Pertanto, dalle stime riportate, si può dedurre che il contributo di questo tipo di rumore alla levitazione può non essere trascurabile se confrontato con il valore della soglia di rumore stimata nel Par. 4.1.1.



# Capitolo 5

## Applicazioni al VIRGO

### 5.1 Descrizione dell'antenna VIRGO

L'obiettivo del progetto VIRGO [11] è quello di realizzare un'antenna interferometrica per la rivelazione di onde gravitazionali: la Fig. 5.1 mostra uno schema dell'antenna interferometrica, ubicata a Cascina, in provincia di Pisa.

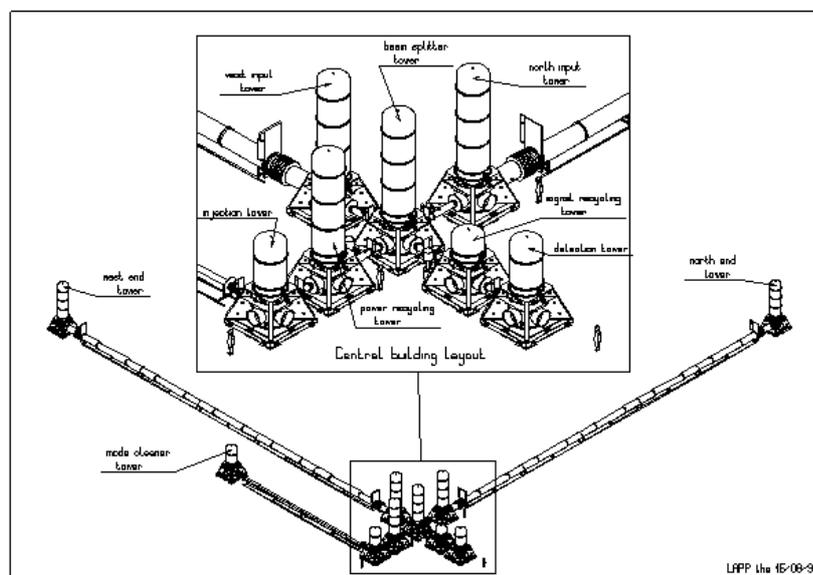


Figura 5.1: Schema della configurazione finale dell'antenna VIRGO

L'esistenza delle onde gravitazionali è prevista da molte teorie gravitazionali, a partire da quella della Relatività Generale formulata da A.Einstein.

Indirettamente è stata dimostrata attraverso lo studio del periodo della pulsar *PSR 1913+16*, ma la rivelazione diretta non è ancora avvenuta.

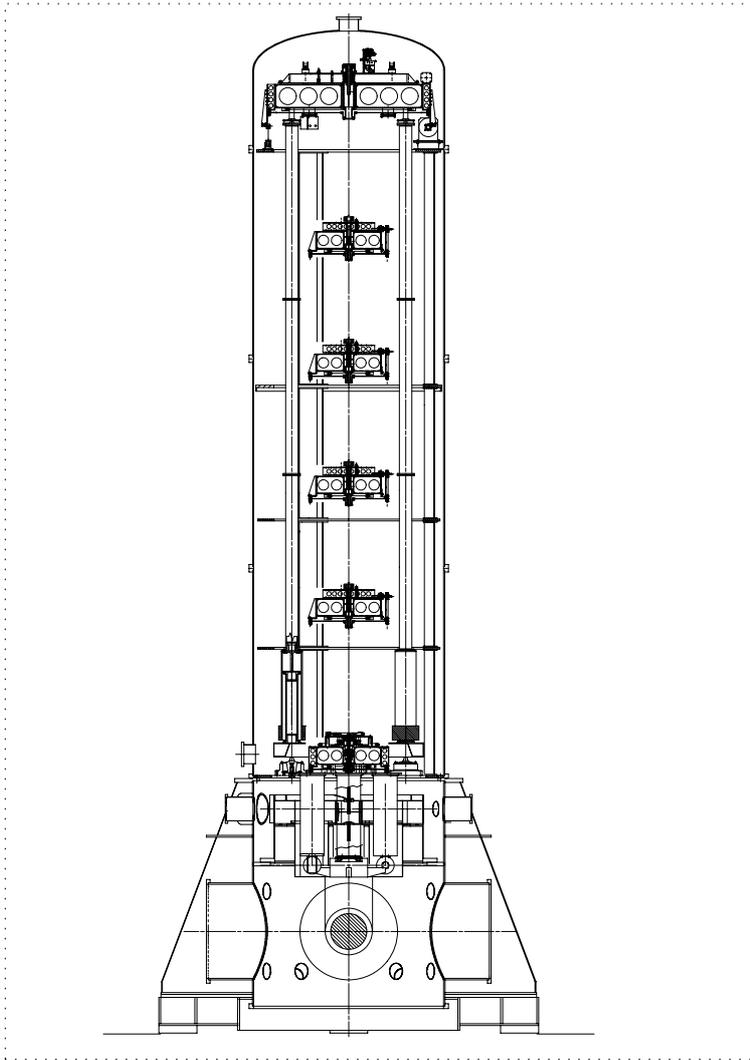


Figura 5.2: SA pendolare attuale

Lo scopo del progetto VIRGO è quello di rivelare direttamente radiazione gravitazionale da oggetti massivi, veloci, presenti nella nostra galassia o in quelle vicine. È progettato per una rivelazione a larga banda (da  $10\text{ Hz}$  a  $3\text{ kHz}$ ), in modo da avere la migliore opportunità di rivelare diversi tipi di

sorgenti, dalle pulsar alle supernovae.

VIRGO è un interferometro Michelson con due bracci perpendicolari simmetrici di lunghezza  $l = 3 \text{ km}$ . L'uso di una cavità Fabry-Perot in ciascun braccio porta la lunghezza ottica dei bracci a  $120 \text{ km}$ . Le componenti ottiche dell'interferometro sono poste in camere sotto vuoto connesse da un tubo, anch'esso sotto vuoto, del diametro di  $1.2 \text{ m}$ . Tutte le componenti ottiche sono isolate dal rumore sismico attraverso un filtro meccanico multidimensionale, multistadio, chiamato superattenuatore (**SA**), mostrato in Fig. 5.2.

Il suddetto filtro meccanico è realizzato mediante una serie di pendoli, sospesi mediante fili di acciaio, con molle meccaniche per l'isolamento sismico verticale. Il **SA** è molto efficace nella soppressione del rumore sismico che risulta trascurabile in tutta la banda di funzionamento di VIRGO al di sopra di  $\sim 4 \text{ Hz}$ ; al sistema meccanico sono però associate altre fonti di rumore ed, in particolare, il rumore termico associato alla sospensione stessa, che è dominante fino a qualche centinaio di Hz, ed il rumore termico associato ai modi di violino dei fili di sospensione, che determinano la presenza di una serie di picchi nello spettro di rumore dell'interferometro.

Il rumore ottico è portato ad un livello molto basso con l'uso di un laser *Nd-Yag* ultrastabile ad alta potenza e di una tecnica di rivelazione ottimizzata che coinvolge il riciclaggio della luce.

La Tab. 5.1 riporta il peso di alcuni elementi costituenti il **SA** dell'antenna VIRGO.

ELEMENTO	PESO
<b>SA</b>	$1 \text{ T}$
marionetta	$80 \text{ kg}$
specchio	$20 \text{ kg}$

Tabella 5.1: *Specifiche del SA*

La frequenza di lavoro più bassa dei rivelatori interferometrici di onde gravitazionali è solitamente determinata dal rumore sismico trasmesso alle masse di prova attraverso i fili di sospensione associati. Non appena viene

ridotta la frequenza di lavoro aumenta il moto sismico residuo e l'attenuazione di ogni stadio d'isolamento passivo diminuisce di un fattore che dipende dal rapporto tra la frequenza di lavoro e la frequenza di risonanza dello stadio. Ciò fornisce un rapido aumento nel rumore dello strumento al di sotto di una certa frequenza, determinando il limite inferiore della banda di misura.

La Fig. 5.3 riporta la curva di sensibilità dell'antenna VIRGO espressa in funzione della frequenza.

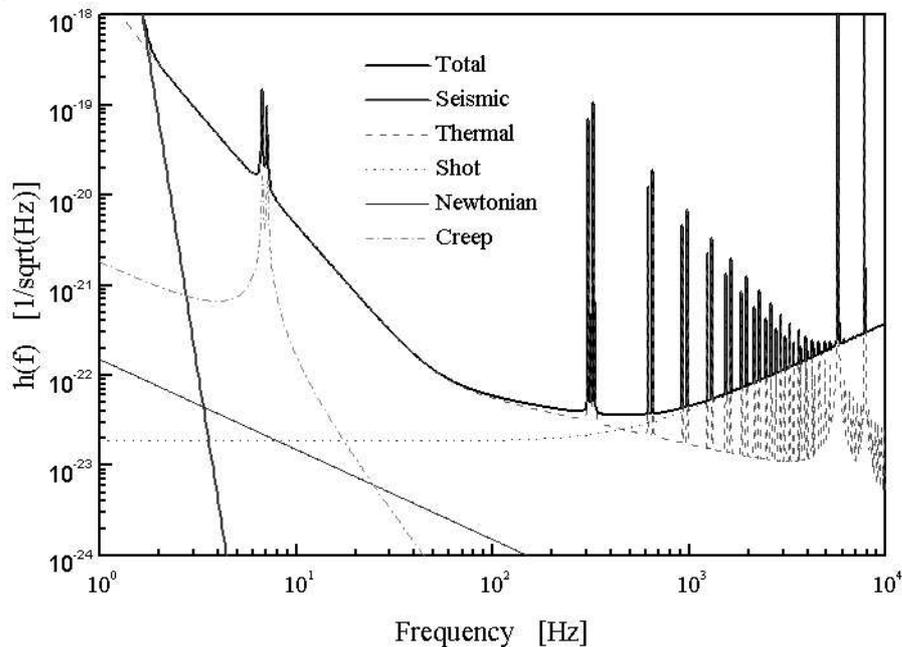


Figura 5.3: Curva di sensibilità dell'antenna VIRGO

## 5.2 Utilizzo di un sistema a levitazione magnetica in VIRGO

Scopo di questa sezione è valutare la possibilità di utilizzare un sistema a levitazione magnetica nella sospensione di VIRGO, e di esaminarne vantaggi e svantaggi.

Un'eventuale modifica apportabile al SA è quella di sostituire del tutto

## 5.2 Utilizzo di un sistema a levitazione magnetica in VIRGO 105

---

o in parte il filtro meccanico con una sospensione magnetica.

Una prima possibilità è levitare direttamente lo specchio rispetto al penultimo stadio della sospensione (detto “marionetta”): in questo caso la massa da levitare è relativamente modesta (vedi Tab. 5.1). Il principale vantaggio sarebbe l’eliminazione del rumore termico associato ai modi di violino dei fili di sospensione. Tuttavia, questa soluzione presenta lo svantaggio che un magnete con elevato momento di dipolo deve essere attaccato direttamente alla massa di test di VIRGO, accoppiandolo direttamente con le perturbazioni elettromagnetiche esterne (vedi Par. 4.2); inoltre la colla e l’elevata massa del magnete degraderebbero il fattore di merito  $Q$  per i moti interni dello specchio, aumentandone il rumore termico ad essi associato.

Una soluzione che presenterebbe minori problemi di rumore elettromagnetico esterno è la levitazione della “marionetta” rispetto allo stadio precedente del **SA** (detto “filtro 7”).

Attualmente, come illustra la Fig. 5.2, le due parti sono collegate mediante un piccolo foro (di limitata conduttanza) attraverso il quale passa il filo di sospensione della “marionetta”.

Con la configurazione di Fig. 5.4 l’eventuale rumore dovuto a campi magnetici esterni verrebbe filtrato dall’ultimo stadio di attenuazione, costituito dal pendolo con cui lo specchio è sospeso alla “marionetta”. Il principale vantaggio in questo caso è legato alla possibilità di isolare completamente, mediante un diaframma dielettrico trasparente, la parte superiore del **SA**, che si trova in regime di alto vuoto ( $10^{-6}$  mbar) da quella inferiore che deve essere in vuoto ultra-alto ( $2 \cdot 10^{-7}$  mbar).

Con questa configurazione la massa da levitare risulta di 100 kg (specchio + “marionetta”): occorre quindi una forza tra i magneti di  $\sim 1000$  N.

Per la levitazione di masse di grandi dimensioni occorre usare magneti estesi ed abbandonare l’approssimazione di dipolo, valida solo per magneti puntiformi, tali cioè che le loro dimensioni siano trascurabili rispetto alla loro distanza.

Nelle nuove condizioni la relazione (2.23) utilizzata per valutare il mo-

mento di dipolo magnetico, si può riscrivere nella forma

$$\vec{m} = Id\vec{S}dz = M_r d\vec{S}dz = \frac{B_r}{\mu_0} d\vec{S}dz \quad (5.1)$$

essendo  $I$  la corrente che attraversa lo strato di superficie infinitesima  $d\vec{S}$  di spessore  $dz$ ,  $M_r$  la magnetizzazione residua per unità di volume,  $B_r$  l'induzione magnetica residua e  $\mu_0$  la permeabilità magnetica del vuoto.

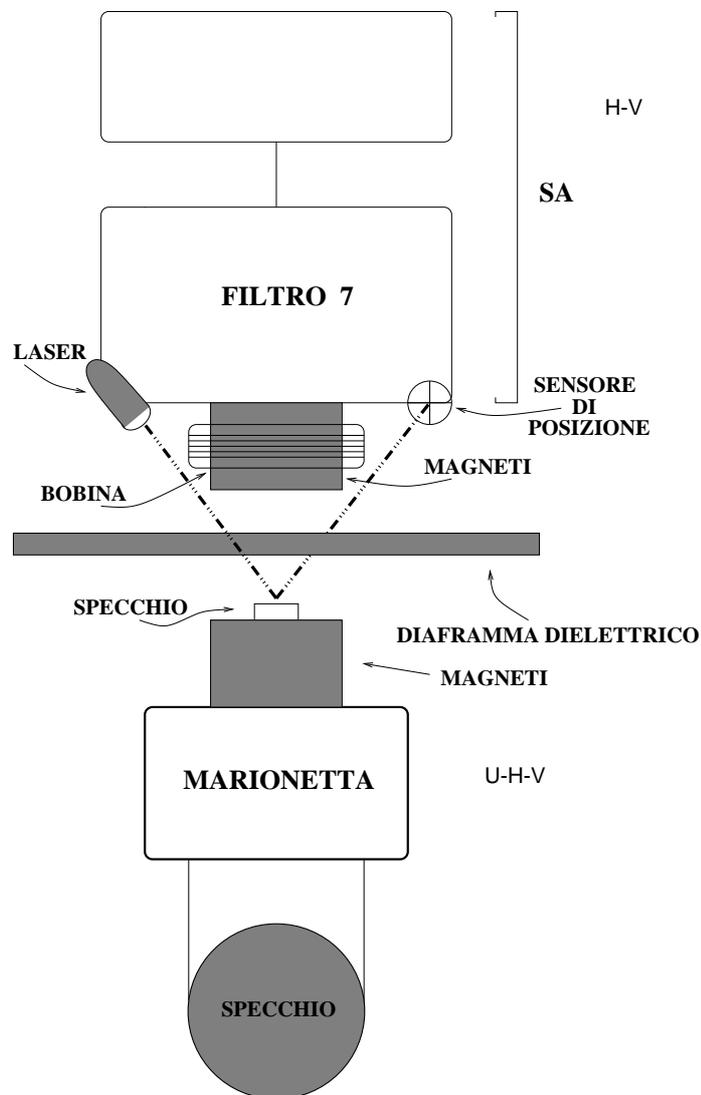


Figura 5.4: SA con sospensione a levitazione magnetica

## 5.2 Utilizzo di un sistema a levitazione magnetica in VIRGO 107

Per un magnete permanente al *Sm-Co* di forma cubica e lato  $l = 20 \text{ cm}$  il momento di dipolo magnetico risulta  $m = \frac{B_r}{\mu_0} l^3 \approx 5 \text{ kA/m}^2$ . Calcolando la forza tra due magneti, posti alla distanza di  $22 \text{ cm}$ , lungo la verticale in approssimazione di dipolo si ottiene un valore di  $6400 \text{ N}$ , che rappresenta una sovrastima della forza effettiva calcolata per magneti estesi, come verrà dimostrato nel corso di questa sezione.

Il calcolo del campo magnetico indotto da un magnete permanente esteso è più complicato.

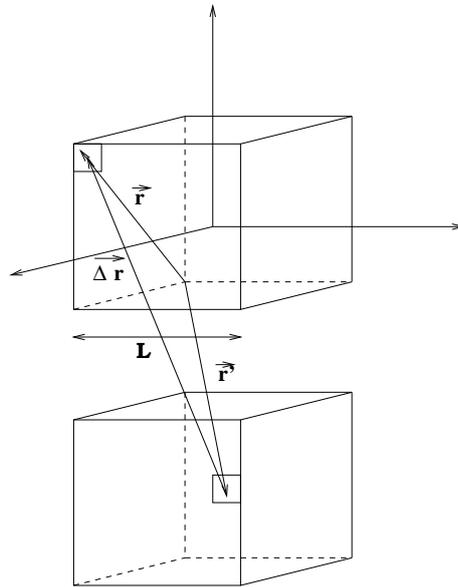


Figura 5.5: *Magneti permanenti estesi*

Per valutare il campo magnetico in un punto esterno ad un magnete esteso (seppure molto vicino ad esso) è possibile, però, suddividere il magnete in volumetti infinitesimi, come mostrato in Fig. 5.5, per i quali si ha una magnetizzazione riferita ad una regione infinitesima. In tal modo si riesce, per la quasi totalità dei volumetti, tranne cioè quelli prossimi alla posizione del punto in cui si calcola il campo, ad applicare l'approssimazione di dipolo.

La coordinata  $\vec{r}$  individua la posizione di un volumetto del magnete fisso rispetto all'origine del riferimento, mentre  $\vec{r}'$  individua la posizione di un volumetto in cui si suddivide il magnete levitato, mentre  $\Delta \vec{r}$  è la distanza

tra i volumetti.

Detta  $M$  la magnetizzazione, il potenziale vettore  $\vec{A}$  risulta

$$\vec{A} = \int_V \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}(r')}{\Delta \vec{r}} dV \quad (5.2)$$

da cui il campo magnetico in un punto esterno al magnete a distanza  $\vec{r}'$  vale

$$\vec{B} = \int_V \frac{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(r)) - \nabla^2 \vec{M}}{\Delta \vec{r}} dV . \quad (5.3)$$

Se si schematizza ogni volumetto con un dipolo magnetico, la magnetizzazione  $M$  che compare nell'espressione (5.3) del campo del magnete esteso può essere sostituita dalle componenti del campo magnetico del dipolo, riportate nelle relazioni (2.2) e (B.13).

L'integrale riportato nella (5.3) è di difficile risoluzione analitica, pertanto il calcolo del campo e della forza tra magneti estesi è stato effettuato numericamente.

Implementando in MATLAB il calcolo delle componenti della forza del dipolo magnetico ed eseguendo una somma discreta lungo le coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$  sia per il magnete fisso, al cui centro è stata scelta l'origine (vedi Fig. 5.6), sia per quello levitato, si ottiene il valore della forza esercitata dal magnete esteso fisso sul magnete esteso levitato: i momenti di dipolo magnetico sono stati espressi per unità di volume nelle relazioni per le componenti della forza.

Per il calcolo di tale forza, come si osserva in Fig. 5.6, è stata scelta una geometria cubica per il magnete fisso con dimensioni di 20 cm per lato ed una a forma di parallelepipedo per quello levitato con dimensioni  $(20 \times 20 \times 4)$  cm<sup>3</sup>: la distanza tra i centri dei magneti è di  $d = 22$  cm, in modo da lasciare uno spazio di 10 cm tra le facce dei magneti.

Il motivo dell'asimmetria dei magneti risiede nell'esigenza di limitare il contributo dei magneti necessari alla levitazione al peso complessivo da levitare; infatti per magneti al *Sm-Co* la densità risulta, secondo le specifiche della casa costruttrice, 8.3 g/cm<sup>3</sup>, pertanto la massa del magnete levitato per la geometria scelta in Fig. 5.6 è di  $\sim 13$  kg.

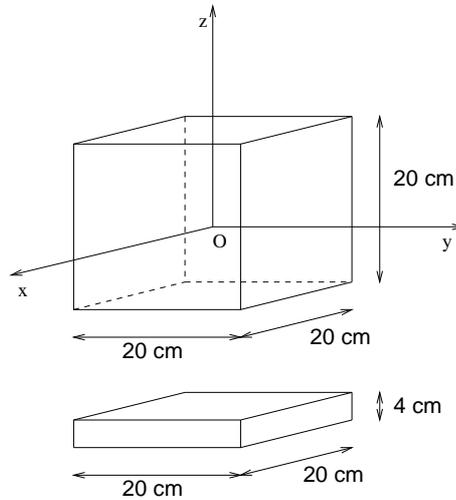


Figura 5.6: Configurazione per la stima delle forze

La forza tra i magneti lungo la direzione verticale, nella configurazione scelta, risulta di  $839\text{ N}$ ; uguagliando tale valore alla forza peso si ottiene un valore per la massa complessiva di  $\sim 85\text{ kg}$ , dei quali  $\sim 13\text{ kg}$  rappresentano il peso del magnete levitato: è possibile levitare quindi, oltre al magnete,  $\sim 72\text{ kg}$ .

Al fine di esercitare una forza maggiore tra i magneti possono essere utilizzati magneti permanenti con un'induzione magnetica residua  $B_r$  maggiore di quella dei magneti in *Sm-Co* usati per la realizzazione della sospensione magnetica descritta nel Cap. 3.

Come si può riscontrare dalla Tab. 1.2, i magneti con induzione magnetica più intensa sono quelli al *Nd-Fe-B* che presentano  $B_r = 1.3\text{ T}$ ; la loro densità è di  $7.4\text{ g/cm}^3$  dalle specifiche di costruzione.

Se nel calcolo della forza che si esercita tra magneti estesi si utilizza la magnetizzazione residua di tali magneti, nelle stesse condizioni geometriche di Fig. 5.6, si ottiene un valore della forza di  $1814\text{ N}$ , corrispondenti a  $185\text{ kg}$ , di cui  $\sim 12\text{ kg}$  rappresentano il peso del magnete levitato: il peso sostenibile è, in questo caso,  $173\text{ kg}$ .

Osservando la Tab. 5.1, che riporta il peso delle componenti del **SA**, si può dedurre che la levitazione dello specchio del VIRGO, con la forza che si

riesce ad esercitare con la configurazione scelta in Fig. 5.6 già con magneti al *Sm-Co*, è realizzabile. La levitazione del sistema “*marionetta*”- *specchio* richiede una forza maggiore che con magneti al *Nd-Fe-B* è perfettamente raggiungibile, mentre con magneti al *Sm-Co* occorre migliorare la configurazione di Fig. 5.6, ad esempio utilizzando la configurazione riportata in Fig. 5.7.

Tale configurazione [1], inoltre, risulta più vantaggiosa al fine di ottenere un lungo periodo di oscillazione. Come si può osservare, il magnete fisso presenta una lunghezza maggiore sia della sua altezza che della sua larghezza; in queste condizioni il campo sperimentato dal magnete levitato risulta, al primo ordine, indipendente dalla sua posizione nella direzione longitudinale, quando è in prossimità del centro del sistema e ciò fornisce un periodo più lungo.

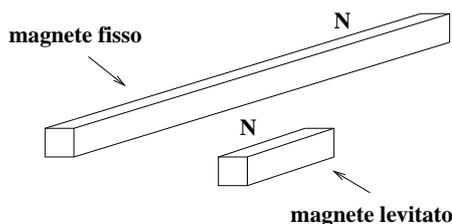


Figura 5.7: Configurazione per un periodo di oscillazione più lungo

Per un magnete fisso al *Sm-Co* a forma di parallelepipedo di lati  $(20 \times 45 \times 20) \text{ cm}^3$  ed un magnete levitato dello stesso materiale di dimensioni  $(20 \times 20 \times 4) \text{ cm}^3$ , spostato rispetto all'asse di simmetria  $z$  di  $d_x = 1 \text{ cm}$  lungo l'asse  $x$  e  $d_y = 1 \text{ cm}$  lungo l'asse  $y$ , le componenti della forza tra i magneti risultano

$$F_x = 76 \text{ N} \quad F_y = 27 \text{ N} \quad F_z = 940 \text{ N} \quad (5.4)$$

da cui, determinate le costanti di richiamo  $k_x = 7600 \text{ N/m}$  e  $k_y = 2700 \text{ N/m}$ , le frequenze per la massa di  $100 \text{ kg}$  risultano

$$\nu_x = 1.4 \text{ Hz} \quad \nu_y = 0.8 \text{ Hz} . \quad (5.5)$$

La configurazione di Fig. 5.7 permette, pertanto, di avere un gradiente del campo minore lungo la direzione longitudinale; la componente verticale della forza permette di ottenere un valore per la massa di  $96 \text{ kg}$ , dei quali  $13 \text{ kg}$  rappresentano il peso dei magneti: la massa da levitare risulta di  $83 \text{ kg}$ .

Un ulteriore accorgimento potrebbe essere quello di variare la distanza tra i centri dei magneti che per le configurazioni prese in esame è stata mantenuta fissa a  $22 \text{ cm}$ .

### 5.3 Confronto con altri tipi di sospensione

Confrontiamo la sospensione magnetica con altri due tipi di sospensione: la prima è una sospensione classica, mentre la seconda è innovativa, anche se è stata studiata solo dal punto di vista teorico.

**Sospensione pendolare** Richiamando i risultati riportati in App. A per la funzione di trasferimento di un pendolo semplice senza effetti dissipativi, si può scrivere

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \quad (5.6)$$

essendo  $\omega_0$  la pulsazione di risonanza del pendolo.

Considerando un pendolo di lunghezza  $l = 1 \text{ m}$ , dalla pulsazione si ottiene una frequenza di risonanza di  $\nu \sim 0.5 \text{ Hz}$ , corrispondente ad un periodo di oscillazione di  $2 \text{ s}$ , che risulta più lungo di quello stimato per la sospensione magnetica nel Par. 4.1.2 a proposito dell'isolamento verticale della sospensione, che risulta di  $\sim 0.17 \text{ s}$ .

Il **SA** attuale (vedi Fig. 5.2) di VIRGO, come isolatore sismico a più stadi, garantisce già un buon funzionamento.

La sospensione pendolare è senza dubbio la più vantaggiosa essendo una sospensione passiva e consentendo la sospensione di masse di grosse dimensioni.

L'unico svantaggio è la presenza dei modi di violino dei fili di sospensione, come mostra la curva di sensibilità dell'antenna VIRGO riportata in Fig. 5.3, che non compaiono utilizzando la sospensione magnetica oppure quella elettrostatica, che verrà trattata a breve. Inoltre i fili di sospensione dissipano energia e contribuiscono al rumore termico.

**Sospensione elettrostatica** Un altro tipo di sospensione si basa sull'uso di forze elettrostatiche.

Un condensatore piano [12] di area  $S = L b$  e distanza  $2 D$  può essere posto in una configurazione che permette allo specchio di essere attratto senza alcun filo di sospensione, come illustra la Fig. 5.8.

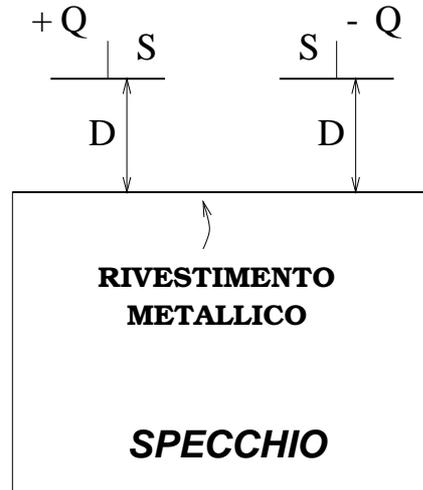


Figura 5.8: *Sospensione elettrostatica*

L'energia è  $E = (1/2)2Q^2/C$ , essendo  $C = \epsilon_0 S/D$  la capacità del condensatore e  $Q$  la carica su esso. A carica  $Q$  costante la forza di attrazione totale risulta  $F = \partial E/\partial D = Q^2/\epsilon_0 S$ , quindi la forza per ogni superficie  $S$  è

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} . \quad (5.7)$$

La carica che si ottiene utilizzando un campo elettrico di  $10^7$  V/m e con  $S = 10^{-2}$  m<sup>2</sup>, è  $Q = CV = \epsilon_0 S(V/D) = 10^{-6}$  C, da cui il valore

della forza espressa dalla (5.7) è  $5 N$  per ogni superficie  $S$ : tale forza permetterebbe di sospendere  $\sim 510 g$ .

La figura Fig. 5.9 mostra un monoblocco di silicio di dimensioni  $(0.3 \times 0.3 \times 0.1) m^3$  opportunamente modellato; la vista laterale mostra che lo specchio presenta due superfici per un duplice motivo: permettere allo specchio di essere usato come specchio lontano, cioè in modo che rifletta i fasci con un diametro di  $\sim 30 cm$  e rendere molto rigida la struttura a dente dello specchio con lo scopo di ottenere modi di vibrazione interni a frequenza molto alta.

Con questa configurazione, svuotando il monoblocco del materiale presente nelle zone segnate con  $A$  in Fig. 5.9, risulterebbe possibile levitare  $\sim 10 kg$ .

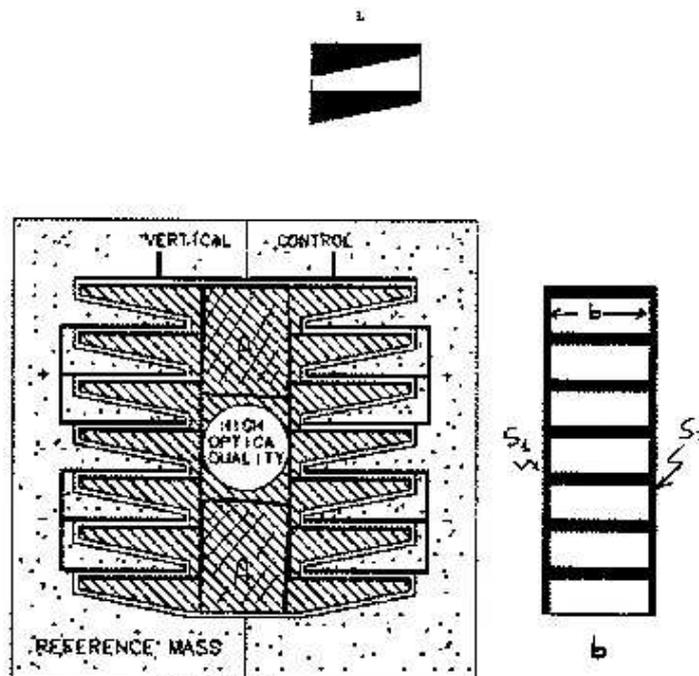


Figura 5.9: Vista frontale e laterale della sospensione elettrostatica

Il vantaggio sostanziale rispetto alla sospensione magnetica è che quest'ultima richiede una connessione magnete-specchio, che degrada il

fattore di qualità dello specchio, mentre la sospensione elettrostatica può essere realizzata depositando sullo specchio un rivestimento metallico molto sottile.

Uno svantaggio evidente è che, pur utilizzando campi elettrici elevati, non si riesce a levitare una massa di grosse dimensioni.

# Conclusioni

Il modello teorico di una sospensione a levitazione magnetica descritto nel Cap. 2 è stato realizzato sperimentalmente per un sistema ad un grado di libertà, con il quale è stata levitata una massa di 20 *g* e, successivamente, per un sistema a due gradi di libertà, con il quale la massa sospesa ha raggiunto il valore di  $\sim 100$  *g*.

Il primo sistema presenta le caratteristiche di un prototipo di sospensione magnetica, il secondo è un dispositivo finalizzato alla realizzazione di un interferometro con uno specchio sospeso magneticamente: il sistema ad un grado di libertà non è adatto a supportare un elemento di un interferometro, in quanto è soggetto a rotazioni libere intorno all'asse ottico dell'interferometro, mentre il sistema a due gradi di libertà risulta più vantaggioso, perché vincola la massa sospesa nel piano ortogonale all'asse dello strumento.

La sospensione a levitazione magnetica si comporta come un discreto isolatore sismico: la soglia di rumore è stata stimata, alla frequenza  $\nu = 100$  *Hz*, di  $1.6 \cdot 10^{-13}$  *m*/ $\sqrt{Hz}$ : la principale fonte di rumore è stata individuata nel sensore di posizione che non riesce a leggere oltre i  $2 \cdot 10^{-8}$  *m*/ $\sqrt{Hz}$  alla stessa frequenza; il miglioramento di quest'ultimo è un possibile traguardo da raggiungere per poter stimare in maniera adeguata le altre fonti di rumore.

Il passo immediatamente successivo potrebbe essere la progettazione e la realizzazione di un dispositivo in grado di controllare tutti i gradi di libertà della sospensione magnetica: attualmente si riescono a controllare del prototipo soltanto due gradi di libertà, quello traslazionale lungo la verticale ed uno rotazionale intorno ad un asse orizzontale.

Le stime riportate per il modello teorico sono state ottenute utilizzando per i magneti permanenti l'approssimazione di dipolo; l'estensione del modello a magneti permanenti estesi richiede una stima dettagliata del campo magnetico e della forza tra i magneti che non può essere effettuata analiticamente; si è ricorso, pertanto, ad un'integrazione numerica sul volume dei magneti.

Queste stime preliminari prevedono la possibilità di levitare masse dell'ordine di centinaia di chili.

Un'immediata conseguenza della realizzazione di un interferometro con un elemento sospeso magneticamente potrebbe essere la realizzazione di un interferometro in cui tutti gli elementi risultino tali. Tuttavia, sembra più interessante studiare l'applicabilità della sospensione a levitazione magnetica all'antenna VIRGO.

La sospensione con magneti estesi potrebbe essere utilizzata come elemento intermedio del filtro meccanico a più stadi dell'antenna VIRGO, detto **SA**: la configurazione più vantaggiosa risulta quella che colloca la sospensione tra il penultimo stadio del **SA** ( detto "filtro 7") dell'antenna VIRGO e la "marionetta" (vedi Fig. 5.4) in modo da eliminare la conduttanza dovuta alla presenza dei fili di sospensione e separare le due camere da vuoto al fine di non avere contaminazione.

Il dispositivo andrebbe posto sotto vuoto, così da eliminare il rumore acustico ambientale stimato teoricamente nel Par. 4.3.2.

Un ulteriore vantaggio, infine, proveniente dall'applicazione della sospensione magnetica all'antenna interferometrica sarebbe quello di avere un offset verticale per il controllo del sistema "*marionetta*"- *specchio*, in modo da compensare le variazioni termiche e di lunghezza a cui sono soggetti i fili di sospensione e regolare lo specchio anche lungo la verticale sul punto di lavoro fissato.

# Appendice A

## Sospensione pendolare

Una tipica sospensione pendolare è mostrata in Fig. A.1: un oggetto puntiforme  $P$  di massa  $M$  è sospeso ad un punto fisso  $O$  mediante un filo inestensibile, di massa trascurabile e flessibile, di lunghezza  $l$ .

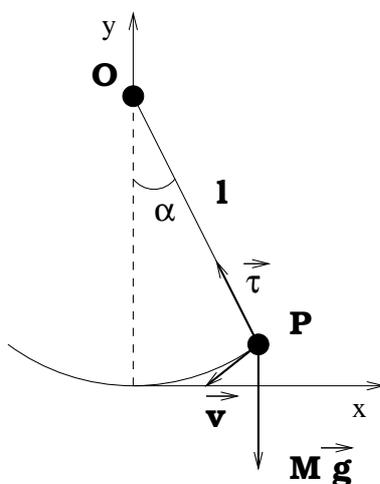


Figura A.1: *Sospensione pendolare*

Spostando l'oggetto dalla posizione verticale di equilibrio e lasciandolo libero, esso viene richiamato verso la posizione di equilibrio dalla forza peso, e comincia ad oscillare. Nel caso di piccole oscillazioni, (se il valore di  $\alpha$  espresso in *rad* è molto minore di  $l$ ) le oscillazioni risultano isocrone, cioè hanno tutte la stessa durata.

Per le sue caratteristiche meccaniche (completa flessibilità) il filo non può esercitare forze trasverse alla sua direzione: la reazione  $\vec{\tau}$  ha necessariamente la direzione da  $P$  ad  $O$ .

Se il punto di sospensione non è fisso, ed è soggetto ad attriti dipendenti dalla sua velocità, l'equazione del moto del pendolo, per piccoli spostamenti intorno alla posizione di equilibrio, è

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{d(x - x_0)}{dt} + k(x - x_0) = 0 \quad (\text{A.1})$$

che in termini di frequenza si può riscrivere

$$-M\omega^2x + i\omega\beta(x - x_0) + k(x - x_0) = 0 . \quad (\text{A.2})$$

La funzione di trasferimento risulta

$$X(\omega) = \frac{x}{x_0} = \frac{k + i\omega\beta}{k + i\omega\beta - M\omega^2} . \quad (\text{A.3})$$

Il fattore di qualità è definito come  $Q = M\omega_0/\beta$ : esso misura quanto è piccola la dissipazione del pendolo alla frequenza di risonanza legata a  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , pulsazione del moto.

Sostituendo  $Q$  ed  $\omega_0$  nella (A.3), la funzione di trasferimento diventa

$$X(\omega) = \frac{x}{x_0} = \frac{1 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} . \quad (\text{A.4})$$

Nel caso di  $Q$  elevato si possono trascurare gli effetti dissipativi al numeratore, importanti solo ad alte frequenze; pertanto la funzione di trasferimento assume la forma (A.5)

$$X(\omega) = \frac{x}{x_0} = \frac{1}{1 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} . \quad (\text{A.5})$$

Il pendolo si comporta come un filtro passa basso del secondo ordine per le vibrazioni meccaniche del suo punto di sospensione.

# Appendice B

## Calcolo di campi magnetici

### B.1 Il campo magnetico di un dipolo magnetico

Consideriamo [7] una spira conduttrice chiusa, con la quale il dipolo viene schematizzato, giacente nel piano  $xy$  e includente l'origine del sistema di riferimento, percorsa da corrente di intensità costante  $I$ .

Valutiamo il campo magnetico in punti non appartenenti all'asse della spira, come  $P_1$  in Fig. B.1, definendo un potenziale vettore  $\vec{A}$ ; il campo magnetico  $\vec{B}$  è legato al potenziale vettore dalla relazione

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{B.1})$$

Supponiamo che  $r_1$ , la distanza del punto  $P_1$  dall'origine, sia molto maggiore delle dimensioni della spira. Per comodità si è posto  $P_1$  nel piano  $yz$ .

Occorre calcolare il potenziale vettore  $\vec{A}$  in  $P_1$ , cioè  $\vec{A}(0, y_1, z_1)$ . È necessario, pertanto, operare un'integrazione lungo l'intera spira; nota l'espressione che lega il potenziale vettore alla corrente si ha

$$\vec{A}(0, y_1, z_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_2}{r_{12}} \quad (\text{B.2})$$

essendo  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2$  la permeabilità magnetica del vuoto,  $r_{12}$  la distanza di  $P_1$  dalla spira e  $d\vec{l}_2$  l'elemento di spira.

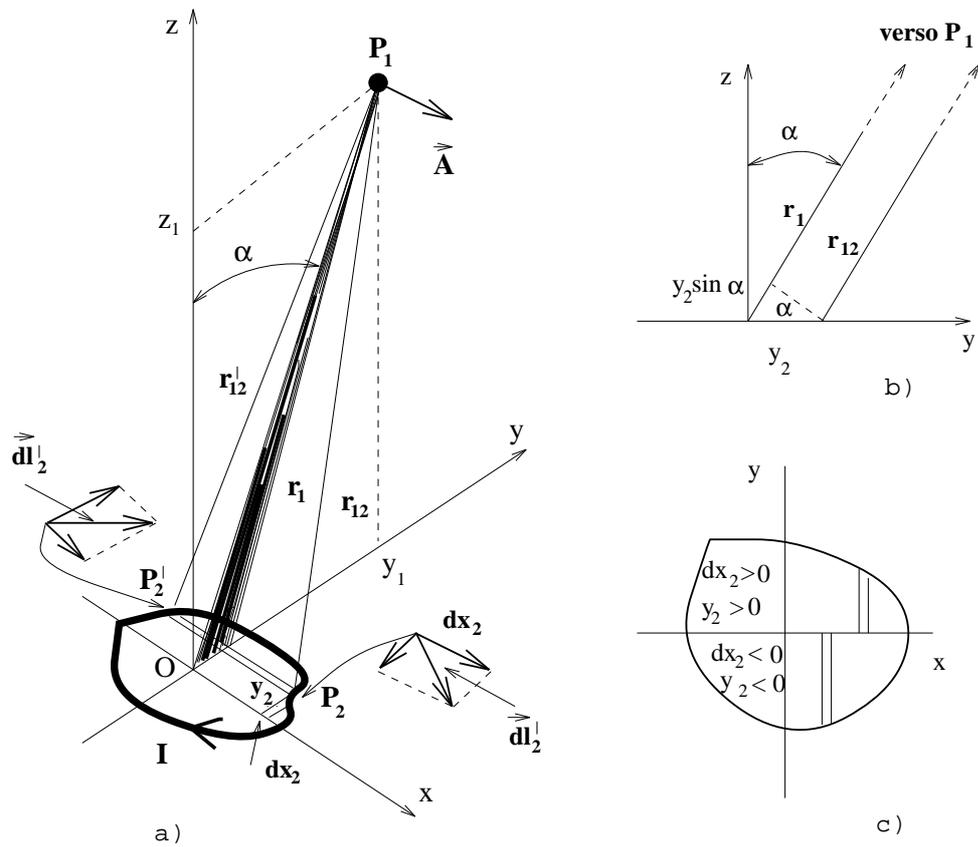


Figura B.1: Spira di forma arbitraria percorsa da corrente  $I$

- a) Potenziale vettore  $\vec{A}$  in un punto lontano dalla spira.
- b) Vista laterale, con direzione di osservazione parallela all'asse  $x$ .
- c) Vista dall'alto, da cui appare che  $\oint y_2 dx_2$  è l'area racchiusa dalla spira.

Consideriamo come varia  $r_{12}$  quando procediamo lungo la spira. Se  $P_1$  è distante, la variazione del primo ordine in  $r_{12}$  dipende solamente dalle coordinate  $y_2$  dell'elemento  $d\vec{l}_2$  e non da  $x_2$ , come risulta chiaro dalla Fig. B.1. Quindi, trascurando le quantità proporzionali a  $(x_2/r_{12})^2$ , possiamo considerare uguali  $r_{12}$  e  $r'_{12}$ , che si trovano, nella vista laterale (Fig. B.1 (b)), entrambi nella parte superiore.

In generale, approssimando al primo ordine per il rapporto (dimensione della spira / distanza da  $P_1$ ), si ottiene

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin \theta . \quad (\text{B.3})$$

Consideriamo, a questo punto, i due elementi della spira  $d\vec{l}_2$  e  $d\vec{l}'_2$ , indicati nella Fig. B.1 (a): per essi i  $dy_2$  sono uguali ed opposti e gli  $r_{12}$  sono uguali in prima approssimazione. In quest'ultima i loro contributi all'integrale di linea si annullano e ciò è valido per l'intera spira. Dunque, nel punto  $P_1$ ,  $\vec{A}$  non possiede una componente lungo l'asse  $y$  e neanche lungo l'asse  $z$ , poiché il percorso stesso della corrente è privo di una componente lungo  $z$ . La componente lungo  $x$  del potenziale vettore deriva dalla parte dell'integrale relativa al percorso  $dx$ , per cui si ottiene

$$\vec{A}(0, y_1, z_1) = \hat{i} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dx_2}{r_{12}} . \quad (\text{B.4})$$

essendo  $\hat{i}$  il versore dell'asse  $x$ .

Ferma restando l'approssimazione fatta, possiamo esprimere il termine  $1/r_{12}$  nella forma

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1} \left( 1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right) \quad (\text{B.5})$$

e, sostituendo questa espressione, nella funzione integranda, ottenere

$$\vec{A}(0, y_1, z_1) = \hat{i} \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1} \int \left( 1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right) dx_2 \quad (\text{B.6})$$

dove  $r_1$  e  $\theta$  sono costanti. L'integrale  $\int dx_2$  esteso alla spira risulta nullo, mentre l'integrale  $\int y_2 dx_2$  è esattamente uguale all'area della spira, indipendentemente dalla forma che questa può avere.

La relazione più generale per il potenziale vettore è pertanto

$$\vec{A}(0, y_1, z_1) = \hat{i} \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r_1^2} \times (\text{area della spira}) \quad (\text{B.7})$$

che, nel caso di una spira circolare, diventa

$$\vec{A}(0, y_1, z_1) = \hat{i} \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r_1^2} \pi R^2 \quad (\text{B.8})$$

dove  $R$  è il raggio della spira.

Dal momento che la *forma* della spira non ha importanza, la restrizione che deriva dall'aver scelto  $P_1$  sul piano  $yz$  non può determinare alcuna differenza sostanziale, perciò l'equazione (B.7) fornisce un risultato generale.

Il potenziale vettore prodotto da una spira di forma qualsiasi, percorsa da corrente, in un punto a distanza  $\vec{r}$  dalla spira molto maggiore delle dimensioni della spira stessa, è un vettore normale al piano che contiene  $\vec{r}$  e la perpendicolare al piano della spira, il cui modulo è

$$A = \frac{\mu_0 I S \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (\text{B.9})$$

dove  $S$  rappresenta l'area racchiusa dalla spira.

Il potenziale vettore è simmetrico rispetto all'asse della spira, quindi è simmetrico anche il campo  $\vec{B}$ .

Definita la quantità  $\vec{m} = I\vec{S}$  come *momento di dipolo magnetico* della spira di area  $S$  percorsa dalla corrente  $I$ , il potenziale vettore per il campo di un dipolo magnetico può essere espresso in forma vettoriale, cioè

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{B.10})$$

dove  $\hat{r}$  è un versore rivolto dal piano della spira verso il punto in cui si deve calcolare  $\vec{A}$ . La direzione di  $\vec{m}$  coincide con quella della normale alla spira, ovvero con quella di  $\vec{S}$ , che rappresenta l'area della superficie orientata delimitata dalla spira; il verso di  $\vec{m}$  e quello positivo della corrente che percorre la spira devono essere tali da soddisfare la regola della vite destrorsa (da cui il momento di dipolo della spira è rivolto verso il basso in Fig. B.1 (a)).

Per esprimere il potenziale vettore in un qualsiasi punto  $(x, y, z)$ , osserviamo che  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  e che  $\sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}/r$ .

Il modulo del potenziale vettore nel punto  $(x, y, z)$  è

$$A = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 m \sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi r^3}, \quad (\text{B.11})$$

poiché  $\vec{A}$  è tangente ad una circonferenza orizzontale il cui centro giace sull'asse  $z$ , le sue componenti sono

$$\begin{aligned} A_x &= -A \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -\frac{\mu_0 m y}{4\pi r^3} \\ A_y &= A \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\mu_0 m x}{4\pi r^3} \\ A_z &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Per valutare  $\vec{B}$  occorre calcolare le componenti di  $\text{rot} \vec{A}$

$$\begin{aligned} B_x &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m x z}{r^5} \\ B_y &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{-m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m y z}{r^5} \\ B_z &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} m \left[ \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 m (3z^2 - r^2)}{4\pi r^5}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Se il mezzo in cui si trova la spira non è il vuoto il campo magnetico sarà

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 \quad (\text{B.14})$$

dove  $\mu_r$  rappresenta la permeabilità magnetica relativa al mezzo; pertanto le componenti del campo magnetico espresse dalle (B.13) devono essere moltiplicate per  $\mu_r$ .

## B.2 Spira percorsa da corrente

Consideriamo, per semplicità, una spira circolare di raggio  $R$ , giacente nel piano  $xy$  percorsa da corrente stazionaria  $I$ : il sistema di riferimento é scelto in modo che l'asse  $z$  coincida con l'asse della spira circolare e con l'origine nel centro della spira stessa, come illustrato in Fig. B.2.

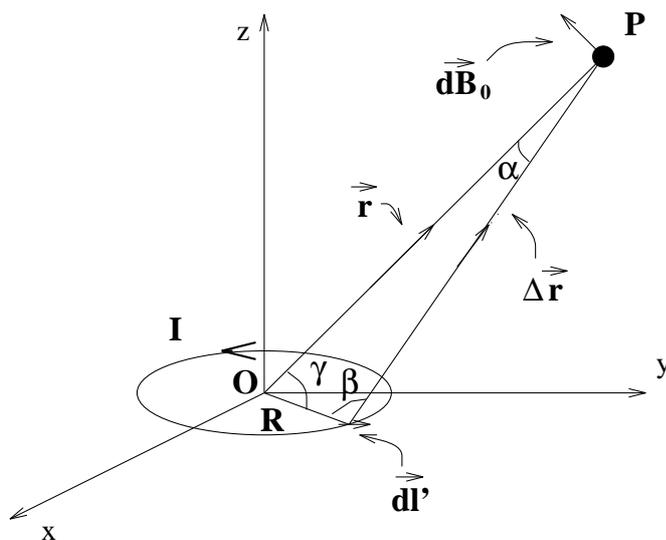


Figura B.2: Spira percorsa da corrente

Valutiamo il campo  $\vec{B}_0$  generato nel vuoto dalla spira.

Nel punto  $P$  a distanza  $\vec{r}$  dall'origine, il contributo  $d\vec{B}_0$  dell'elemento infinitesimo  $d\vec{l}'$  della spira vale [8]

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}' \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} . \quad (\text{B.15})$$

essendo  $|\Delta\vec{r}|$  la distanza dell'elemento di spira dal punto; applicando il teorema di Carnot al triangolo di lati  $\vec{r}$ ,  $R$  e  $|\Delta\vec{r}|$  si ottiene per  $|\Delta\vec{r}|$  il valore

$$\begin{aligned} |\Delta\vec{r}| &= \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

essendo  $\gamma$  l'angolo compreso tra il lato che individua il vettore posizione  $\vec{r}$  del punto  $P$  e quello che individua il raggio  $R$  della spira.

Il valore del campo  $\vec{B}_0$  è dato dalla somma dei contributi di tutti gli elementi costituenti la spira; pertanto, sostituendo la B.15, si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{B}_0(\vec{r}) &= \oint d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{|\Delta\vec{r}|^2} \sin\beta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin\beta}{|\Delta\vec{r}|^2} \oint d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin\beta}{|\Delta\vec{r}|^2} 2\pi R \\ &= \frac{\mu_0 I R}{2} \frac{\sin\beta}{|\Delta\vec{r}|^2}\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

dove  $\beta$  rappresenta l'angolo formato da  $d\vec{l}'$  e da  $|\Delta\vec{r}|$  quando non sono ortogonali.

Al centro della spira ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ) il campo  $\vec{B}_0(\vec{r})$  vale

$$B_0(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} . \quad (\text{B.18})$$

Per punti appartenenti all'asse  $z$  l'elemento  $d\vec{l}'$  della spira è sempre ortogonale a  $\Delta\vec{r}$  e per ogni  $d\vec{l}'$  ne esiste sempre un altro diametralmente opposto che dà un contributo  $d\vec{B}_0$  uguale in modulo al precedente, ma con componente ortogonale a  $z$  opposta. Pertanto, in questo caso,  $\vec{B}_0$  sarà diretto lungo l'asse  $z$  ed il suo valore sarà dato dalla somma delle sole componenti  $dB_{0z}$  della (B.15), essendo  $dB_{0z} = dB_0 \sin\alpha$ .

In questo caso particolare valgono le relazioni

$$\sin\alpha = \frac{R}{|\Delta\vec{r}|} \quad |\Delta\vec{r}| = \sqrt{z^2 + R^2} \quad (\text{B.19})$$

e l'espressione del campo risulta

$$\vec{B}_0(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{n} \quad (\text{B.20})$$

con  $\hat{n}$  versore normale alla spira, coincidente con il versore  $\hat{k}$  dell'asse  $z$ .

Moltiplicando e dividendo per  $\pi$  la relazione (B.20) si può esprimere quest'ultima in termini di momento di dipolo magnetico della spira, definito come  $\vec{m} = I\pi R^2 \hat{n} = I\vec{S}$ .

La relazione (B.20) diventa pertanto

$$\vec{B}_0(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} . \quad (\text{B.21})$$

Al di fuori dell'asse  $z$  le linee di forza del campo sono chiuse. A grandi distanze (  $|\vec{r}| \gg R$  ) la spira percorsa da corrente si comporta come un dipolo magnetico di momento dipolare  $\vec{m} = I\vec{S}$ .

# Appendice C

## Elementi di teoria dei controlli automatici

### C.1 Introduzione

La teoria dei *controlli automatici* si riferisce allo studio dei dispositivi (detti regolatori, controllori o dispositivi di controllo), mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*) in modo che subisca l'evoluzione nel tempo tale da riprodurre quella desiderata.

Il termine sistema di controllo si riferisce ad un dispositivo la cui uscita segue un ingresso che si vuole controllare.

Un *sistema* è un apparato in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo; le funzioni che rappresentano l'andamento nel tempo delle variabili nel tempo si dicono *segnali*. Nei sistemi l'evoluzione di alcune variabili è conseguenza di quella di altre : si definiscono pertanto *variabili di ingresso* o *indipendenti* e *variabili d'uscita* o *dipendenti*.

La variabile indipendente della rappresentazione matematica di un segnale può essere continua o discreta; anche il segnale può assumere un valore continuo o discreto.

Matematicamente un sistema è definito come una trasformazione univo-

ca o un operatore che mappa una variabile di ingresso  $x(t)$  in una di uscita  $y(t)$ , dove  $t$  rappresenta il tempo, ma ci si può riferire anche a qualche altra grandezza fisica.

$$y(t) = T[x(t)] \quad (\text{C.1})$$

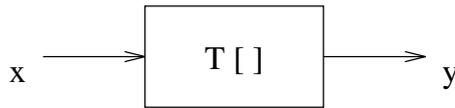


Figura C.1: Rappresentazione di uno schema a blocchi

È utile rappresentare i sistemi come blocchi e le loro variabili come collegamento dei blocchi con l'ambiente esterno o con altri sistemi, come mostrato in Fig. C.1.

**Sistemi lineari.** Una classe importante di sistemi è rappresentata dai *sistemi lineari* [16] definita dal principio di sovrapposizione : dette  $y_1$  e  $y_2$  le risposte agli ingressi  $x_1$  e  $x_2$ , un sistema è lineare se e solo se

$$T[ax_1 + bx_2] = aT[x_1] + bT[x_2] = y_1 + y_2 \quad (\text{C.2})$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti arbitrarie.

Se la relazione tra ingresso e uscita non varia nel tempo i sistemi sono detti *invarianti nel tempo*. La caratteristica di un tale tipo di sistema può essere specificata attraverso la risposta all'impulso  $g(\tau)$ , cioè l'uscita è dovuta ad un ingresso consistente in un singolo impulso unitario applicato a  $\tau = 0$ .

La risposta impulsiva è soggetta alla limitazione

$$g(\tau) = 0 \quad \text{per} \quad \tau < 0 ; \quad (\text{C.3})$$

se la limitazione (C.3) non è rispettata, il sistema risponderà all'ingresso prima che venga applicato il segnale, in questo modo viene violato il principio di causalità.

**Trasformata di Laplace.** La trasformata di Laplace [15] associa in modo biunivoco ad una generica funzione del tempo  $f(t)$  a valori reali o complessi una funzione  $F(s)$  a valori in genere complessi e definita per valori complessi di  $s$ .

La *trasformata* e l'*antitrasformata* di Laplace sono date dalle relazioni

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st} ds. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

La funzione definita dalla prima delle (C.4) è una funzione di variabile complessa definita in un dominio che consiste in un semipiano del piano complesso  $s$  posto a destra di una retta parallela all'asse immaginario la cui posizione dipende dalla funzione  $f(t)$ , mentre l'integrale dell'antitrasformata si intende eseguito lungo una qualsiasi retta parallela all'asse immaginario e appartenente al dominio della funzione  $F(s)$ .

## C.2 Analisi armonica

L'analisi armonica o nel dominio della frequenza si basa su un modello matematico per i sistemi lineari che è rappresentato dalla funzione di risposta armonica, strettamente legata alla funzione di trasferimento di un sistema.

**Diagramma di Bode.** La risposta in frequenza di un sistema viene solitamente graficata attraverso i *diagrammi di Bode*: essendo la funzione di risposta armonica a valori complessi, si impiegano due diversi diagrammi. Il diagramma dei moduli riporta il logaritmo del modulo della risposta armonica in funzione del logaritmo della frequenza  $\nu$ , mentre il diagramma delle fasi riporta l'argomento della risposta armonica, in scala lineare tra  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ , sempre in funzione del logaritmo della frequenza.

I logaritmi si assumono naturali: un cambiamento di base equivale ad un cambiamento di scala.

La scala di intensità è espressa in decibel (dB) definiti come

$$Mag(dB) = 20 \log_{10} g(\nu) \quad (C.5)$$

### C.3 Controlli ad azione diretta e in retroazione

Un controllo ad azione diretta è caratterizzato dal fatto che il valore della variabile manipolabile è indipendente da quello della variabile controllata, cioè non vi sono percorsi di segnali chiusi, mentre in un controllo in retroazione il valore della variabile manipolabile dipende da quello della variabile controllata, per cui è sempre presente almeno un percorso di segnale chiuso, detto *anello di retroazione*.

La retroazione si dice *negativa* quando, immaginando di sezionare in un punto l'anello, una perturbazione del segnale a valle viene riportata sul segnale a monte del sezionamento con segno opposto, *positiva* nel caso contrario. La retroazione positiva non presenta interesse nell'ambito dei controlli perché corrisponde ad un comportamento instabile.

Il termine feedback descrive una strategia di controllo con cui l'uscita del sistema è paragonata con quella desiderata, la differenza essendo usata per aggiustare il sistema nella configurazione scelta.

**Sistemi ad azione diretta.** Lo schema a blocchi di un sistema senza reazione è illustrato in Fig. C.2.



Figura C.2: Schema a blocchi di un sistema senza reazione

La funzione di trasferimento per il sistema è

$$G(s) = \frac{X_o}{X_s} \quad (C.6)$$

All'equazione della dinamica (B.7) del sistema senza reazione

$$m\ddot{x} = \vec{F}_{arbitraria} \quad (C.7)$$

applichiamo la trasformata di Laplace ottenendo

$$ms^2 X_o(s) = X_s(s) . \quad (C.8)$$

Dalla (C.8) si ha che la funzione di trasferimento per il sistema senza reazione è

$$G(s) = \frac{1}{ms^2} \quad (C.9)$$

che presenta 2 poli per  $s = 0$ , dove  $s = j\omega$ .

**Stabilità e sistemi in retroazione.** Lo schema a blocchi di un sistema controreazionato è mostrato in Fig. C.3 [17].

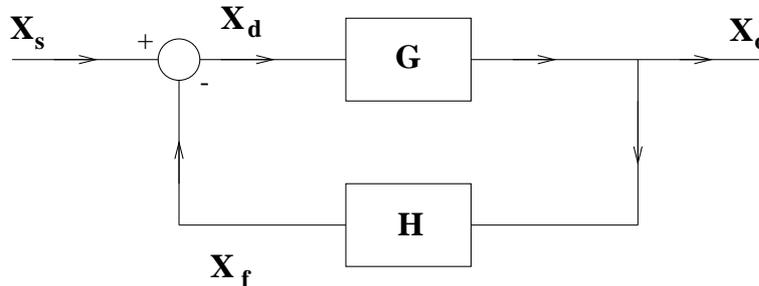


Figura C.3: *Schema a blocchi del sistema in controreazione*

Ecco le relazioni che legano tra loro i vari segnali

$$\begin{aligned} X_f &= HX_o \\ X_d &= X_s - X_f = X_s - HX_o \\ X_o &= G(X_s - X_f) = G(X_s - HX_o) \end{aligned} \quad (C.10)$$

dove il segnale sorgente  $X_s$  è rappresentato da un segnale arbitrario; il segnale di reazione è  $X_f$ , mentre il segnale differenza o d'errore è  $X_d$ ; infine il

segnale di uscita è  $X_o$ .

Inoltre  $G(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta,  $H(s)$  la funzione di trasferimento del trasduttore del segnale di retroazione e  $G(s)H(s)$  il guadagno d'anello.

Dalla 4<sup>a</sup> relazione delle (C.10) si ricava la funzione di trasferimento del sistema in controeazione definita come

$$G_0(s) = \frac{X_o}{X_s} = \frac{G}{1 + GH} . \quad (\text{C.11})$$

Parametri caratteristici di un sistema in retroazione sono

- la pulsazione di risonanza  $\omega_R$  in corrispondenza della quale il modulo di  $G_0$  assume il valore massimo;
- il picco di risonanza  $M_R$ : rapporto fra il massimo modulo di  $G_0(s)$  ed il valore statico  $G_0(0)$ ;
- la larghezza di banda  $\omega_f$ : frequenza alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore a 3 *dB* al valore statico  $G_0(0)$ .

Si definiscono margini di stabilità due parametri che misurano la stabilità relativa del sistema in controeazione

- margine di ampiezza  $M_A$ : è l'inverso del modulo del guadagno d'anello (espresso in *dB*) alla frequenza corrispondente alla fase  $-\pi$ ;
- margine di fase  $M_F$ : è l'angolo che occorre sottrarre alla fase (normalmente negativa) del guadagno d'anello alla frequenza corrispondente al valore unitario del modulo per ottenere il valore  $-\pi$ .

Valori tipici per un buon comportamento di un sistema in retroazione sono un  $M_A$  da 12 *dB* a 16 *dB* ed un  $M_F$  da 45° a 60°.

### Misura della funzione di trasferimento ad anello aperto.

Introducendo una sorgente arbitraria in un punto qualsiasi della rete di reazione, come mostrato in Fig. C.3, si ottiene che la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema è data dal rapporto tra il segnale di reazione  $X_f$  ed il segnale d'errore  $X_d$ , definiti nelle (C.10), secondo la relazione

$$\frac{X_f}{X_d} = \frac{HX_o}{X_s - HX_o} = GH . \quad (\text{C.12})$$

## C.4 Reti correttrici

Il primo parametro che si determina in fase di progetto è la costante di guadagno; determinata questa si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche che riguardano la stabilità e la velocità di risposta, altrimenti si progetta un dispositivo detto *rete correttrice*, che inserito nell'anello modifichi le caratteristiche del sistema.

Esistono vari tipi di reti correttrici: esaminiamone alcune.

**Rete integratrice.** La rete integratrice può essere considerata un sistema integrale **I**, la cui funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{V_u}{V_i} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \text{con} \quad \tau = RC \quad (\text{C.13})$$

Per pulsazioni elevate rispetto ad  $1/\tau$  il segnale di uscita approssima l'integrale nel tempo del segnale di ingresso.

La funzione di trasferimento di un integratore ideale è  $1/(\tau s)$  e la risposta armonica è  $1/(j\omega\tau)$ ; la risposta armonica della rete è

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \simeq \frac{1}{j\omega\tau} \quad \text{per} \quad \omega \gg \frac{1}{\tau} \quad (\text{C.14})$$

La rete integratrice produce un ritardo di fase per tutte le pulsazioni finite.

**Rete derivatrice.** La rete derivatrice può essere considerata un sistema derivativo **D**, la cui funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\tau}{1 + \tau s} \quad \text{con} \quad \tau = RC \quad (\text{C.15})$$

Per piccole pulsazioni rispetto ad  $1/\tau$  il segnale d'uscita approssima la derivata nel tempo del segnale di ingresso.

La funzione di trasferimento di un derivatore ideale è  $\tau s$  e la risposta armonica è  $1/(j\omega\tau)$ ; la risposta armonica della rete è

$$G(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \simeq j\omega\tau \quad \text{per} \quad \omega \ll \frac{1}{\tau} \quad (\text{C.16})$$

La rete derivatrice non può essere usata semplicemente in cascata nell'anello di un sistema in retroazione in quanto è un filtro passa alto e blocca la componente continua del segnale, mentre i sistemi di controllo devono presentare elevato guadagno d'anello principalmente per la componente continua.

**Rete ritardatrice.** La rete ritardatrice può essere considerata un sistema proporzionale-integrale **PI**, la cui funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$$

con  $\tau = (R_1 + R_2)C$  e  $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$ . (C.17)

La rete ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. In corrispondenza della pulsazione nulla non sfasa né attenua, in corrispondenza della pulsazione infinita non sfasa e attenua di  $\alpha$ . Il massimo ritardo di fase che si può ottenere dalla rete è funzione del parametro  $\alpha$  ed è dato dalla relazione

$$\phi_m = - \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \quad (\text{C.18})$$

La pulsazione alla quale tale ritardo di fase si verifica si può ricavare ponendo uguale a zero la derivata della funzione  $\phi(\omega)$ .

Essendo

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg}(\alpha\omega\tau) - \operatorname{arctg}(\omega\tau) . \quad (\text{C.19})$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{\alpha\tau}{1 + \alpha^2\omega_m^2\tau^2} - \frac{\tau}{1 + \omega_m^2\tau^2} = 0 \quad (\text{C.20})$$

da cui risulta  $\omega_m^2 = 1/(\alpha\tau^2)$ , cioè

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} \quad (\text{C.21})$$

**Rete anticipatrice.** La rete anticipatrice è la più impiegata per la stabilizzazione dei sistemi di controllo in retroazione e può essere considerata un sistema proporzionale-derivativo **PD**, la cui funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{(1/R_1)+Cs}} = \frac{R_2(1 + R_1Cs)}{R_1 + R_2 + R_1R_2Cs} = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha\tau s}$$

con  $\tau = R_1C$  e  $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$  . (C.22)

La rete anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite. In corrispondenza della pulsazione nulla non sfasa e attenua di  $\alpha$ ; in corrispondenza della pulsazione infinita non sfasa né attenua.

Procedendo in modo analogo al caso della rete ritardatrice, si può calcolare il massimo anticipo di fase in funzione del parametro  $\alpha$ . Esso risulta

$$\phi_m = \operatorname{arcsin} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} . \quad (\text{C.23})$$

La pulsazione  $\omega_m$  in corrispondenza della quale si verifica tale anticipo di fase è

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} \quad (\text{C.24})$$

**Rete a ritardo e anticipo.** La rete a ritardo e anticipo può essere considerata un sistema proporzionale-integrale-derivativo **PID**, la cui funzione di trasferimento è

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s}} = \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s) + R_1 C_2 s} = \\
 &= \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s} \\
 \text{con } &\tau_1 = R_1 C_1, \tau_2 = R_2 C_2, \tau_{12} = R_1 C_2.
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

In corrispondenza della pulsazione  $\omega_n$  la rete non sfasa e attenua di

$$|G(j\omega_n)| = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}. \tag{C.26}$$

Per  $0 < \omega < \omega_n$  la rete fornisce un ritardo di fase, per  $\omega_n < \omega < \infty$  un anticipo di fase. In corrispondenza della pulsazione nulla e di quella infinita non si ha né sfasamento né attenuazione.

# Bibliografia

- [1] R.W.P.Drever: *Techniques for extending interferometer performance using magnetic levitation and other methods*  
da Proceedings of the International Conference on “Gravitational Waves (Source and Detectors)”  
Editori I.Ciufolini - F.Fidecaro, World Scientific Marzo 1996
- [2] P.Gibbs - A.Geim: *Is magnetic levitation possible ?*  
18 Marzo 1997
- [3] E.H.Brandt: *Levitation in Physics*  
Science vol. 243, pag. 349, Gennaio 1989 e Physics World, Settembre 1997
- [4] A.Geim: *Everyone’s Magnetism*  
Physics Today, Settembre 1998
- [5] B.V.Jayawant: *Electromagnetic suspension and levitation*  
Rep. Prog. Phys. vol. 44, 1981
- [6] D.Jiles: *Introduction to magnetism and magnetic materials*  
Chapman & Hall - 1991
- [7] E.M.Purcell: *La fisica di Berkeley - Elettricità e Magnetismo*  
Zanichelli - Bologna - 1979
- [8] C.Mencuccini - V.Silvestrini: *Fisica II - Elettromagnetismo Ottica*  
Liguori Editore 1988
- [9] R.Resnick: *Introduzione alla relatività ristretta*  
Casa Editrice Ambrosiana 1979 - Milano
- [10] P.R.Saulson: *Interferometric gravitational wave detectors*  
World Scientific Publishing 1994
- [11] A.Brillet - A.Giazotto: *Virgo Project Proposal*

- 
- [12] A.Giazotto: *Mirror electrostatic suspension for interferometric detectors of gravitational waves*  
Physics Letters A 245 (1998) 203-208
- [13] V.B.Braginsky - V.P.Mitrofanov - K.V.Tokmakov: *On the thermal noise from the violin modes of the test mass suspension in gravitational wave antennae*  
Physics Letters A 186 (1994) 18-20
- [14] F.Cleva - J.P.Coulon: *Acousto-optic effects in air*  
28 Marzo 1995
- [15] G.Marro: *Controlli automatici*  
Zanichelli 1992
- [16] A.Oppenheim - R.Schafer: *Elaborazione numerica dei segnali*  
Franco Angeli Editore
- [17] J.Millman: *Circuiti e sistemi microelettronici*  
Bollati Boringhieri Editore 1985 - Torino
- [18] L.Reznik: *Fuzzy controllers*  
Newnes 1997
- [19] J.R.Taylor: *Introduzione all'analisi degli errori*  
Zanichelli
- [20] C.M.R.Fowler: *THE SOLID EARTH - An introduction to global geophysics*  
Cambridge University Press 1990
- [21] S.Mareš: *Introduction to applied geophysics*  
D.Reidel Publishing Company 1984 - Dordrecht/Boston/Lancaster

# Elenco delle figure

1.1	<i>Oggetto a forma di parallelepipedo sospeso</i> . . . . .	9
1.2	<i>MAGLEV - Treno a levitazione magnetica</i> . . . . .	18
1.3	<i>Rana levitata</i> . . . . .	19
1.4	<i>Nocciola sospesa</i> . . . . .	19
1.5	<i>Superconduttore ad alta temperatura (con <math>T_c</math> anche fino a 200 K) in sospensione magnetica</i> . . . . .	22
1.6	<i>Levitrone</i> . . . . .	23
2.1	<i>Sospensione magnetica</i> . . . . .	30
2.2	<i>Sistema di magneti in attrazione (a sinistra) ed in repulsione (a destra)</i> . . . . .	32
2.3	<i>Bobina costituita da <math>N</math> avvolgimenti</i> . . . . .	34
2.4	<i>Sistema costituito da una bobina che esercita una forza su un magnete permanente</i> . . . . .	36
2.5	<i>Rapporto tra la forza teorica esercitata dalla bobina e quella massima rispetto alla distanza del magnete</i> . . . . .	41
2.6	<i>Funzione di trasferimento di un PID</i> . . . . .	42
2.7	<i>Diagramma di Bode del filtro di reazione</i> . . . . .	43
2.8	<i>Diagramma di Bode del sistema controreazionato</i> . . . . .	44
2.9	<i>Diagramma di Bode del sistema ad anello aperto</i> . . . . .	45
2.10	<i>Forza esercitata da un magnete al variare della distanza</i> . . . . .	49
3.1	<i>Circuito RL usato per misurare l'induttanza della bobina</i> . . . . .	52
3.2	<i>Apparato sperimentale usato per misurare la forza tra i magneti</i> . . . . .	54

3.3	<i>Valutazione della forza tra i magneti al variare dei magneti . .</i>	56
3.4	<i>Apparato sperimentale usato per misurare la forza esercitata da una bobina su un magnete . . . . .</i>	58
3.5	<i>Valutazione della forza esercitata dalla bobina su un magnete</i>	60
3.6	<i>Setup con sensore ad occultazione . . . . .</i>	61
3.7	<i>Elettronica di controllo del feedback . . . . .</i>	62
3.8	<i>Monitoraggio nel tempo e spettro di potenza della posizione del blocchetto di 20 g levitato con il feedback realizzato con il filtro riportato in Tab. (3.3) . . . . .</i>	64
3.9	<i>Funzione di trasferimento ad anello aperto del feedback realizzato con il filtro riportato in Tab. (3.3) . . . . .</i>	66
3.10	<i>Setup con sensore ad occultazione . . . . .</i>	67
3.11	<i>Variazione della corrente con la distanza dei magneti in attrazione . . . . .</i>	68
3.12	<i>Configurazione con due bobine . . . . .</i>	69
3.13	<i>Configurazione con 2 raggi laser e 2 sensori di posizione . . . .</i>	70
3.14	<i>Monitoraggio nel tempo e spettro di potenza del blocchetto levitato di 100 g per il 1° sensore di posizione . . . . .</i>	71
3.15	<i>Funzione di trasferimento del feedback applicato alla 1° bobina</i>	72
3.16	<i>Funzione di trasferimento del feedback applicato alla 1° bobina ad alte frequenze . . . . .</i>	73
3.17	<i>Monitoraggio nel tempo e spettro di potenza del blocchetto levitato di 100 g per il 2° sensore di posizione . . . . .</i>	74
3.18	<i>Funzione di trasferimento del feedback applicato alla 2° bobina</i>	75
3.19	<i>Funzione di trasferimento del feedback applicato alla 2° bobina ad alte frequenze . . . . .</i>	76
3.20	<i>Monitoraggio nel tempo e spettro di potenza del blocchetto di 100 g levitato solo con il I feedback su tempi lunghi . . . . .</i>	77
3.21	<i>Variazione della corrente con la distanza dei magneti in attrazione per una massa di 100 g . . . . .</i>	78
3.22	<i>Interferometro Michelson con uno specchio levitato . . . . .</i>	80

3.23	<i>Sospensione magnetica con specchio . . . . .</i>	81
3.24	<i>Monitoraggio nel tempo della sospensione magnetica e frange di interferenza . . . . .</i>	82
3.25	<i>Veduta d'insieme dell'apparato usato per la sospensione magnetica . . . . .</i>	83
4.1	<i>Confronto tra lo spettro di potenza dell'oscillazione residua della sospensione magnetica ed il sisma misurato da un accelerometro piezoelettrico . . . . .</i>	91
4.2	<i>Funzione di trasferimento del banco ottico . . . . .</i>	92
4.3	<i>Configurazione per la stabilizzazione del diodo-laser . . . . .</i>	93
4.4	<i>Confronto tra lo spettro di potenza delle fluttuazioni di intensità del diodo-laser, in presenza ed in assenza del feedback stabilizzante . . . . .</i>	94
4.5	<i>Confronto tra lo spettro di potenza dell'oscillazione residua della sospensione magnetica ed il sisma misurato da un accelerometro piezoelettrico in presenza del feedback stabilizzante . . . . .</i>	95
4.6	<i>Fulmine . . . . .</i>	96
4.7	<i>Filo rettilineo percorso da corrente . . . . .</i>	96
5.1	<i>Schema della configurazione finale dell'antenna VIRGO . . . . .</i>	101
5.2	<b>SA</b> <i>pendolare attuale . . . . .</i>	102
5.3	<i>Curva di sensibilità dell'antenna VIRGO . . . . .</i>	104
5.4	<b>SA</b> <i>con sospensione a levitazione magnetica . . . . .</i>	106
5.5	<i>Magneti permanenti estesi . . . . .</i>	107
5.6	<i>Configurazione per la stima delle forze . . . . .</i>	109
5.7	<i>Configurazione per un periodo di oscillazione più lungo . . . . .</i>	110
5.8	<i>Sospensione elettrostatica . . . . .</i>	112
5.9	<i>Vista frontale e laterale della sospensione elettrostatica . . . . .</i>	113
A.1	<i>Sospensione pendolare . . . . .</i>	117
B.1	<i>Spira di forma arbitraria percorsa da corrente <math>I</math> . . . . .</i>	120

B.2	<i>Spira percorsa da corrente</i>	124
C.1	<i>Rappresentazione di uno schema a blocchi</i>	128
C.2	<i>Schema a blocchi di un sistema senza reazione</i>	130
C.3	<i>Schema a blocchi del sistema in controreazione</i>	131

# Elenco delle tabelle

1.1	<i>Sistemi a <math>\mu</math> misti</i>	14
1.2	<i>Proprietà di alcuni magneti permanenti</i>	26
3.1	<i>Intercetta e momento di dipolo magnetico</i>	57
3.2	<i>Forza esercitata dalla bobina su un magnete</i>	60
3.3	<i>Filtro di reazione 1</i>	63
3.4	<i>Filtro di reazione 2</i>	71
4.1	<i>Filtro stabilizzante la sorgente laser</i>	93
5.1	<i>Specifiche del SA</i>	103



# Ringraziamenti

La conclusione tanto agognata di questo lavoro di tesi rappresenta un traguardo soddisfacente non solo per me che l' ho visto nascere e crescere in maniera esorbitante nel corso di un anno e mezzo, ma, credo soprattutto, per tutte le persone che mi sono state accanto in questa avventura, incredule ed allo stesso tempo fiduciose del mio operato.

Mi sembra doveroso ringraziare il Dott. L. Di Fiore, senza la cui collaborazione i risultati raggiunti non sarebbero stati perseguiti; il Dott. E. Calloni per la meticolosa consulenza sulla **DSP**; il Prof. L. Milano per il suo occhio attento alla tesi sebbene oberato di impegni; il Prof. D. Patella per la sua accesa curiosità circa l'argomento.

Un particolare ringraziamento va alle persone che hanno vissuto più a stretto contatto con me in quest'ultimo periodo e che pazientemente hanno sopportato i miei sbalzi d'umore, tra cui soprattutto la mia famiglia; ancora voglio ringraziare tutte le persone a cui ho parlato del mio lavoro di tesi e che, pur senza capirci nulla, mi hanno ascoltata (i pazzi vanno sempre assecondati ...).

Non potrei non ringraziare Anna e Marino coinvolti come me nella conclusione di questo capitolo della nostra vita e Rossella che ha sopportato tutti e tre.

Infine voglio ringraziare alcuni amici che mi hanno sostenuto anche se fisicamente non presenti, sinceramente interessati all'andamento del mio lavoro di tesi: Raffaella, Mercedes, Daniela, Viviana, Alessandro etc. etc.

Grazie a tutti ... parenti, amici, colleghi.