



Vers une construction microphysique du paradigme cosmologique : prédictions et observations dans un univers quantique

Julien Grain

► To cite this version:

Julien Grain. Vers une construction microphysique du paradigme cosmologique : prédictions et observations dans un univers quantique. General Relativity and Quantum Cosmology. Université Paris Sud, 2014. <tel-01108515>

HAL Id: tel-01108515

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01108515>

Submitted on 22 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE PARTICULES-NOYAUX-COSMOS
INSTITUT D'ASTROPHYSIQUE SPATIALE

DISCIPLINE : COSMOLOGIE ET ASTROPHYSIQUE DES PARTICULES

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Soutenue le 13 juin 2014 par

Dr. Julien Grain

Vers une construction microphysique du paradigme cosmologique :

Prédictions et observations dans un univers quantique

Composition du jury :

Président du jury :	Dr. Nabila Aghanim	Directrice de Recherche (IAS)
Rapporteurs :	Dr. Jean-Michel Alimi Dr. Philippe Brax Pr. Martin Kunz	Directeur de Recherche (LUTH) Physicien (IPhT) Professeur des Universités (Physique Théorique, Genève)
Examineurs :	Dr. Etera Livine Dr. Jean-Philippe Uzan	Chargé de Recherche (ENS) Directeur de Recherche (IAP)

Remerciements

Beaucoup se cache derrière ces recherches. Et je commencerai par la figure la plus obscure. Un personnage multiple auquel je dois beaucoup. La figure de l'*ami*, scientifique et non-scientifique. Parce que ces recherches doivent beaucoup aux différentes collaborations qui se sont tissées durant ces huit années. Mais aussi car ces recherches se sont déployées hors-contexte. Elles ont même trouvé leur place au fond de nombreux bars parisiens.

Je veux donc remercier Aurélien Barrau pour m'avoir suivi dans cette aventure de *loop quantum cosmology*. J'espère croire qu'au-delà d'un intérêt scientifique, il y avait simplement la confiance en l'idée d'un ami. Un grand merci, aussi, à *Magic* Thomas Cailleteau. L'aventure ne serait certainement pas aller aussi loin sans l'habileté que tu as mise en place durant ta thèse. Je remercie aussi Jakub Mielczarek, ultime partenaire de cette *dream team*.

Je veux ensuite remercier Radek Stompor qui m'a tout simplement donné ma chance à un moment clé. Et qui m'a toujours soutenu en bien d'autres moments clé. Je remercie les *purs* CMBistes de la place parisienne : Julien Peloton (et pas seulement pour son prénom) et Giulio Fabbian (et pas seulement parce qu'il écoute de la musique punk). Enfin, surtout : un énoooooooooooooorme merci à Agnès Ferté pour trois grosses années de CMB, pour l'enthousiasme et la fraîcheur que tu as insufflés. Une thèse est tout aussi formateur pour la personne qui la dirige !

Je veux aussi remercier toutes ces personnes rencontrées à l'IAS. Leur soutien, leurs conseils (il y en a eu plusieurs) et leur passion scientifique ont beaucoup compté. Un grand merci à Nico Ponthieu (qui m'a ouvert les portes de l'IAS... et fut mon premier formateur en CMB), à Guilaine Lagache (qui m'a fait découvrir le CIB), à Nabila Aghanim, Marian Douspis et Mathieu Langer (tous ces échanges constants, tous ces soutiens, toute cette entre-aide), sans oublier Hervé Dole (PHD), Alex Beelen et Aurélie Pénin.

Je veux enfin remercier tous ces amis hors-champs, déjà présents, rencontrés ou disparus. Vous m'avez suivi, porté, supporté, soutenu, éprouvé, réprouvé, trimballé d'Orléans à Gare d'Austerlitz à la cantine de Belleville et au point éphémère, accordé votre confiance, vous avez été sans condition, cent fois, mille fois présent. Un grand merci à Bidou K. dit *mon biquet* & So. M., à Laure & Manu & Gab & Léo (aller, aussi Hobbes et Moon), à Gamin K. (qui doit toujours me péter un bras) & Shasha, à Tibal & Anouk, à Jon C., à Dee Dee, à Julien D. & son île !!!!!

Je veux aussi remercier les membres de mon jury. Tout d'abord Jean-Michel Alimi, Philippe Brax et Martin Kunz qui ont accepté de rapporter sur ce manuscrit. Ensuite Nabila Aghanim (encore), Etera Livine et Jean-Pilippe Uzan d'avoir accepté de participer à ce jury. L'intérêt que vous avez porté à ces recherches ainsi que votre curiosité m'ont touché. Et les longues discussions qui ont suivi la soutenance m'ont aussi beaucoup apporté !

Je souhaite remercier, en vrac (car tout ne doit pas être hiérarchisé, en particulier les "remerciements"), ces personnes scientifiques qui ont entouré ces recherches : Mathieu Tristram, Francesca Vidotto, Martin Bojowald, Jibril Ben Achour, Karim Noui, Guillaume Hurier, Davide Poletti, Clément Stahl, Jean-Baptiste Durrive, Clément Martinache, Cedric Collet, Heddy Arab, Vincent Guillet, Stéphane Ilić, Fabien Lacasa, et évidemment toute l'équipe MIC.

Je veux aussi remercier l'ensemble des personnels administratifs qui m'ont aidé, en particulier Véro qui a le droit (enfin, qui se l'est donné) de m'appeler *Juju*, ainsi que les étudiants du master NPAC qui ont contribué à trois années enrichissantes d'enseignement de relativité générale.

Enfin, je voudrais remercier ma famille. Toujours présente. Si présente. Les premiers avec qui l'on est. Les premiers contre qui l'on est. Je vous dois tant ! Ma forme et ses déformations. Mes formes.

Résumé

La cosmologie physique a acquis le statut de science de précision. Elle se base actuellement sur deux théories cadre (la relativité générale et le modèle standard de la physique des particules), un principe fondamentale de symétrie (l'Univers est statistiquement homogène et isotrope), et un ensemble d'observables astronomiques (parmi lesquelles les anisotropies du fond diffus cosmologique jouent un rôle majeur). Le paradigme actuel est incroyablement effectif à un niveau phénoménologique mais manque d'explications microphysiques. En particulier, la question de la singularité de Big Bang pointe vers la nécessité d'une théorie quantique de la gravitation. Dans le cadre de la *cosmologie quantique à boucles* – un modèle de minisuperspace inspiré de la *gravité quantique à boucles* – cette singularité de Big Bang est remplacée par un rebond quantique régulier. De plus, si le contenu en matière pendant la phase pré-rebond et le rebond est dominé par un champ scalaire, alors l'Univers entre naturellement en phase d'inflation primordiale après le rebond ; la cosmologie quantique à boucles offrant ainsi une extension du paradigme inflationnaire standard jusqu'à l'ère de Planck. Par la construction d'un cadre théorique cohérent à un niveau semiclassique traitant des perturbations cosmologiques évoluant dans un Univers quantifié, il est alors possible de prédire les traces que laisserait le rebond quantique dans les anisotropies du fond diffus cosmologique, ouvrant la voie vers une observation possible de la gravité quantique dans le ciel micro-onde. Ce programme n'est toutefois réalisable que dans la mesure où l'information cosmologique contenue dans les anisotropies du fond diffus cosmologique peut être reconstruite avec une très grande précision. Plus précisément, le cas du mode B de polarisation, bien que récemment détecté (au moins sa composante secondaire), reste un défi observationnel compte tenu de la petitesse de son signal affecté par de nombreuses incertitudes statistiques et systématiques. Une reconstruction précise de ce mode partant des cartes du ciel des paramètres de Stokes, suppose de pouvoir le séparer exactement des modes E , bien plus intense que les modes B . Par un estimateurs de pseudospectre spécifique, appelé estimateur de *pseudospectre pur*, pour lequel les modes E sont exactement filtrés et utilisant des fonctions de poids optimisées, le spectre de puissance angulaire de mode B peut être reconstruit avec une grande précision et en un temps de calcul raisonnable. Par simulations numériques, il apparaît que l'utilisation d'une telle méthode est nécessaire pour reconstruire le mode- B partant des données prises par les expériences couvrant une faible portion de la voûte céleste – de l'ordre de quelques pourcents au plus – ainsi que pour une possible future mission satellite dédiée à la mesure du mode- B primordial. Avec une reconstruction par pseudospectre pur du mode B , une valeur de $r \sim 0.001$ du rapport tenseur-sur-scalaire, paramètre cosmologique de l'Univers primordial directement lié à l'échelle d'énergie de l'inflation, pourrait être mesurée à 98% de niveau de confiance d'un strict point de vue statistique partant des données prises par une possible mission satellite.

* * *

Cosmological physics is currently recognized as a high precision branch of science. It is based on two theoretical frameworks (namely general relativity and the standard model of particles physics), on a symmetry principle (stating that our Universe is statistically homogeneous and isotropic), and on a large set of cosmological observables (among which the cosmic microwave background anisotropies play a key role). The current cosmological paradigm is very efficient at a phenomenological level but still lacks of microphysical explanations. More specifically, the initial Big Bang singularity should be viewed as a pathology of general relativity pointing towards the necessity of a quantum theory of gravitation. In the framework of *loop quantum cosmology* – a minisuperspace model of the Universe inspired by *loop quantum gravity* ideas –, this initial singularity is replaced by a regular quantum bounce. Moreover, if the matter content of the loopy universe is dominated by a scalar field during the pre-bounce contracting phase and the bounce, the Universe naturally enters in a phase of cosmological inflation shortly after

the bounce. This means that loop quantum cosmology offers a promising extension of the standard inflationary paradigm backwards to the Planck era. Thanks to a dedicated building of the theory of cosmological perturbations evolving in a quantum background which is fully coherent at the semiclassical level, it is shown that the quantum bounce could leave a typical footprint on the anisotropies of the cosmic microwave background, opening the window for observing in principle quantum gravity in the microwave sky. This tentative proposal is however made possible only if one could extract the cosmological information from the observation of the cosmic microwave background anisotropies with a very high accuracy. Though its secondary component has been recently detected, the case of the B -mode of polarized anisotropies is still particularly challenging due to its minute amplitude signal plagued by many statistical and systematic uncertainties. An accurate enough reconstruction of such a mode from the observed maps of the Stokes parameters requires an exact separation of B -modes from the much larger E -modes. Thanks to a dedicated pseudospectrum estimator filtering out E -modes and using optimized sky apodizations – the so-called *pure pseudospectrum* estimator –, the angular power spectrum of B -mode can be recovered with high precision in a reasonable amount of computational time. Using numerical experiments, it appears that such an approach is mandatory for analyzing forthcoming or ongoing small-scale CMB experiments – covering at most few percents of the celestial sphere – as well as a potential, future satellite mission dedicated to the primordial B -mode. Using such a pseudospectrum based estimation of the B -mode, the fundamental parameters of the primordial Universe such as the tensor-to-scalar ratio (directly proportionnal to the energy scale of inflation) would be constrained with a high accuracy from the statistical viewpoint since *e.g.* for a future satellite mission this would allow for measuring $r \sim 0.001$ at 98% of confidence level.

Avant-propos : guide de lecture

Quelques recommandations générales— Pour chacune des parties, nous proposons une introduction et une conclusion propre au thème abordé dans la partie considérée. En ce sens, une lecture linéaire du manuscrit n'est pas requise (même si cette dernière donne une meilleure vue d'ensemble des résultats ici résumés), et le lecteur, supposé avoir une connaissance minimale en cosmologie, sera libre de permuter l'ordre des parties proposé.

A plusieurs reprises nous passons les détails les plus techniques sous silence. Ils sont toutefois généralement fournis sous forme d'encart que le lecteur peut ne pas lire sans perte de compréhension.

Il ne reste plus qu'à espérer que l'auteur des pages à venir est parvenu à mener à bien ce double niveau de lecture !

Quelques recommandations spécifiques— Comme cela apparaîtra clairement à la lecture du manuscrit, les résultats présentés se concentrent autour d'un objet physique particulier : les perturbations cosmologiques, à la fois dans leurs aspects théoriques (théorie des perturbations cosmologiques dans un univers quantique) et dans leurs aspects observationnels (reconstruction des anisotropies polarisées du fond diffus cosmologique). Ce manuscrit aurait ainsi pu être sous-titré : « *Quelques aspects théoriques et observationnels de physique des inhomogénéités cosmiques* ». Ces inhomogénéités cosmiques jouent un rôle clé en cosmologie qui va au-delà de leur étude pour elles-mêmes (même si cet aspect n'est évidemment pas à négliger). Elles constituent notre moyen observationnel privilégié pour accéder aux paramètres cosmologiques décrivant la dynamique globale de notre Univers. Par ailleurs, le paradigme inflationnaire est le point de départ des résultats présentés dans ce manuscrit : les travaux en modélisation de l'univers primordial dans un cadre de gravitation quantique donné et les méthodes d'analyse de données des anisotropies du fond diffus cosmologique sont en dialogue permanent avec ce cadre inflationnaire.

Ainsi une introduction *ciblée et détaillée* des perturbations cosmologiques et de leur traitement durant la phase d'inflation primordiale (Part. I) a été préférée à une introduction générale à la cosmologie physique. Aucun résultat cosmologique nouveau n'est présenté dans cette première partie mais elle pourra intéresser les lecteurs non familiers du traitement des perturbations cosmologiques. Elle fournit aussi le cadre scientifique dont nous partons. Le lecteur déjà familier d'avec ce traitement pourra passer directement à la deuxième partie (Part. II) de ce manuscrit sans perte de compréhension.

Concernant la seconde partie (Part. II) portant sur la modélisation de l'univers primordial dans le cadre de la cosmologie quantique à boucles, nous proposons deux chapitres d'introduction à la théorie de la gravité quantique à boucles ainsi qu'à son inspiration cosmologique, la cosmologie quantique à boucles (respectivement Chaps. 3 et 4). Le lecteur désireux de se focaliser sur la phénoménologie de l'univers primordial dans ce cadre spécifique de gravité quantique peut passer ces chapitres, et directement commencer au chapitre 5, sans perte de compréhension.

La dernière partie (Part. III) porte sur quelques points d'analyse de données des anisotropies en polarisation du fond diffus cosmologique et nous n'avons aucune « recommandation » de lecture à donner ici. Enfin...

Une rumeur s'est confirmée— Cela était avant le 10 mars 2014. Manuscrit pour l'essentiel achevé. Seul ce petit bout d'avant-propos manquait. Une dernière partie (Part. III) jalonnée de : « *Le mode B, qui n'a toujours pas été directement détecté [...]* ».

10 mars 2014 : la collaboration POLARBEAR déclare la première détection *directe* du mode *B* secondaire, due au lentillage gravitationnel. Une partie à amender, et alors jalonnée de : « *Le mode B, dont la composante secondaire vient d'être directement détectée par POLARBEAR mais dont la partie primordiale reste encore à détecter [...]* ».

17 mars 2014 : conférence de presse de la collaboration BICEP2. Le mode *B* primordial semble détecté : 4 points entre $\ell \sim 30$ et $\ell \sim 150$ sur lequel un pic de recombinaison pour un rapport tenseur-sur-scalaire de 0.2 (à 0.002 Mpc^{-1}) semble très bien s'ajuster. Une confirmation de cette détection reste encore à faire. Cela n'invalide

évidemment pas les travaux développés dans cette partie III du manuscrit. Mais ils s'inscrivaient dans un contexte d'ignorance, le mode B primordial comme lentillé, étant non détecté. En particulier, le niveau de mode B primordial était inconnue et nombre des raisonnements et des méthodes développées avaient pour objectif d'atteindre un niveau aussi bas que possible. Si les travaux mentionnés dans cette partie restent pertinents, en particulier dans l'optique non plus d'une détection mais aussi d'une reconstruction la plus précise possible du mode B , certains raisonnements et choix de présentation semblent avoir pris « un coup de vieux ».

Evidemment, cette détection mérite confirmation avant toute conclusion définitive. Nous tenterons donc à travers ce manuscrit de dresser quelques unes de nos conclusions à la lumière de cette découverte mais uniquement de façon qualitative et dans l'optique où cela se confirmerait.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Avant-propos	vii
Introduction	xi
I Préliminaires : inflation primordiale et inhomogénéités cosmiques	1
1 Inhomogénéités cosmologiques	7
1.1 Quantités géométriques perturbées	7
1.1.1 Tenseur métrique perturbé	7
1.1.2 Tenseur d'Einstein perturbé	11
1.1.3 Tenseur impulsion-énergie perturbé	11
1.2 Dynamique des perturbations	13
1.2.1 Equation du mouvement	13
1.2.2 Quelques généralités quant à l'évolution des perturbations	14
1.2.3 Modes super-Hubble et sub-Hubble et modes oscillants et gelés	16
2 L'Univers primordial : inflation cosmique	19
2.1 Limites du « vieux » modèle de Big Bang	19
2.2 Inflation cosmique	22
2.2.1 Résoudre les problèmes	22
2.2.2 L'inflation dans ses grandes lignes et l'approximation de roulement lent	24
2.2.3 Deux modèles concrets pour fixer les idées	28
2.3 Inhomogénéités primordiales	30
2.3.1 Action perturbée	30
2.3.2 Spectres de puissance primordiaux : définition	31
2.3.3 Conditions initiales de théorie quantique des champs	33
2.3.4 Quantification des perturbations	36
2.3.5 Spectres de puissance primordiaux : prédiction de l'inflation	44
2.3.6 Spectres de puissance primordiaux : paramétrisation phénoménologique	47
II Modélisation en cosmologie quantique à boucles	53
3 Les idées de la gravité quantique à boucles	61
3.1 Formalisme hamiltonien	61
3.2 Relativité générale et variable de Ashtekar	64
3.3 Quantification par les boucles	66

4 Les idées de la cosmologie quantiques à boucles	69
4.1 Quantification de l'espace FLRW	69
4.1.1 Cosmologie classique dans le formalisme hamiltonien	69
4.1.2 Dynamique quantique	70
4.1.3 Dynamique effective	71
4.2 Equation effective : construction phénoménologique	72
5 Dynamique effective du fond	75
5.1 Equation effective semiclassique	75
5.2 Un univers en rebond	76
5.3 Un univers en rebond et inflationnaire	76
6 Premiers pas vers des traces observationnelles	79
6.1 Impact de la LQC sur le spectre inflationnaire des modes tensoriels	80
6.2 Impact du rebond sur la polarisation du fond diffus cosmologique	82
7 Inhomogénéités cosmiques en cosmologie quantique à boucles	87
7.1 Algèbre des contraintes semiclassiques	87
7.2 Propagation des inhomogénéités cosmiques dans un fond quantique	90
III Observer l'univers primordial avec le fond diffus cosmologique	101
8 Analyse spectrale et reconstruction du mode B	109
8.1 La fuite des modes E dans les modes B	109
8.2 Estimation sans mélange des modes B	112
8.2.1 Construction d'un estimateur sans mélange	112
8.2.2 Optimisation des fonctions de masque	115
8.2.3 Efficacité de l'estimation pure	120
8.3 Extension aux corrélations croisées TB et EB	121
8.4 Efficacité des méthodes de pseudospectre pour l'estimation du mode B	123
8.4.1 Efficacité comparée des différents estimateurs	123
8.4.2 Estimation pure pour les expériences satellite	125
9 Paramètres cosmologiques avec le mode B	127
9.1 Contrainte sur le rapport tenseur-sur-scalaire	127
9.1.1 Analyse de Fisher	127
9.1.2 Détection du rapport tenseur-sur-scalaire	128
9.1.3 Impact des émissions astrophysiques d'avant-plan	129
9.2 Violation de parité dans l'univers primordial	132
9.2.1 Anisotropies du CMB	132
9.2.2 Erreur statistique et effet systématique	134
9.2.3 Détecter la violation de parité avec les corrélations TB et EB	137
9.2.4 Contrainte sur les modèles de violation de parité	142
Conclusion	149

Introduction

Le paradigme cosmologique actuel peut se résumer ainsi : un Univers Λ CDM-inflationnaire ; c'est-à-dire contenant 68.3 % d'énergie noire, 26.8 % de matière noire, 4.9 % d'atomes, et ayant subi une phase d'expansion accélérée (*i.e.* l'inflation) dans ses tout premiers instants, phase à l'origine des surdensités initiales (les perturbations cosmologiques) nécessaires à la formation des galaxies et structures cosmiques par effondrement gravitationnel [1, 2]. (Ce scénario inflationnaire se trouve de nouveau corroboré par l'annonce récente de la détection du mode B à des échelles de l'ordre du degré, d'origine probablement primordiale [3].) Ce paradigme se fonde sur deux théories "cadre" (la relativité générale et la physique des particules), sur un principe de symétrie (le système UNIVERSE est *statistiquement* homogène et isotrope) et sur un ensemble de faits observationnels : les trois piliers observationnels de la cosmologie d'abord (éloignement des galaxies, abondance des éléments légers et fond diffus cosmologique (noté CMB dans la suite pour l'acronyme anglais *cosmic microwave background*)), et un ensemble de sondes cosmologiques ensuite (Supernovæ comme chandelle standard, oscillations acoustiques de baryons, etc.).

Ce modèle cosmologique est particulièrement effectif à un niveau phénoménologique, permettant de rendre compte de façon précise de l'ensemble des observables cosmologiques. Pourtant, il manque singulièrement d'une explication microphysique. Il ne serait qu'un supplétif provisoire palliant notre manque de connaissance de certains phénomènes cosmiques, symbolisé (entre autre) par trois questions majeures que les observations cosmologiques posent. Quelle est la nature de l'énergie noire ? Un nouveau constituant sous forme de champ scalaire, une modification de la relativité générale aux échelles cosmologiques, une rétroaction gravitationnelle des structures aux petites échelles sur la dynamique globale de l'Univers, ou encore l'énergie d'un vide métastable dans l'insondable paysage des cordes. Quelle est la nature de la matière noire ? Un nouveau type de matière (*e.g.* particules supersymétriques, particules de Kaluza-Klein, etc.) ou une nouvelle loi de la dynamique newtonienne (*e.g.* théorie MOND). Enfin, quel mécanisme est à l'origine de la phase d'inflation dans l'Univers primordial ? Un nouveau champ scalaire fondamental gouvernant la dynamique globale de notre Univers quelques 10^{-35} seconde après le Big Bang, un rebond quantique en lieu et place du Big Bang en théorie de la gravité quantique à boucles ou encore une transition de phase d'un gaz de cordes fondamentales. A cela s'ajoute (au moins) une quatrième aporie : l'espace-temps UNIVERSE est singulier (la singularité initiale de Big Bang), c'est-à-dire qu'il présente une frontière temporelle dans le passé. Les théorèmes de singularité de Penrose-Hawking [4] montre le caractère inévitable de ce point d'arrêt de l'espace-temps apparaissant dans une région où les effets quantiques ne peuvent plus être négligés. Une théorie quantique de la gravitation est *nécessaire* si l'on entend décrire physiquement notre Univers jusque dans ses tout premiers instants. Ces questions sont des questions de physiques fondamentales et si une description de l'Univers reconduit des questions de physiques fondamentales, réciproquement, l'Univers devient un laboratoire pour tester ces théories. Faire de la cosmologie c'est, au même titre que la physique des particules, faire de la physique fondamentale, mais à l'aide d'observations astronomiques.

Ces questions fondamentales de la cosmologie nécessitent des avancées théoriques qui pour la plupart, si ce n'est toutes, s'inspirent de la physique des hautes énergies et/ou de la physique de la gravitation. Par ailleurs, discriminer entre les différents modèles proposés nécessitent des avancées observationnelles et par-là, de se demander ce que *sont* les observables en cosmologie. Observer l'Univers c'est être capable d'en "mesurer" la géométrie pseudoriemannienne. Mais nous sommes contraints à vivre *dans* l'Univers. Nous ne pouvons pas nous en extraire pour "regarder" sa géométrie. Comme Gauss l'avait déjà compris, mesurer la géométrie d'un espace tout en étant confiné dans cet espace est possible : il faut tester les théorèmes de la géométrie à l'œuvre dans l'Univers, ce qui est faisable tout en restant *dans* l'Univers. Pourtant, nous ne sommes pas des arpenteurs cosmiques capables de tracer des triangles spatiotemporels de plusieurs gigaparsecs de périmètre : il nous faut des traceurs internes déjà présents ! Ces traceurs internes ne sont rien d'autre que les inhomogénéités cosmiques (usuellement traitées dans un cadre perturbatif), comme les anisotropies du CMB ou la distribution des galaxies et grandes structures. La

question des perturbations (leur évolution *et* leur production) est donc cruciale à plus d'un titre : comprendre l'origine et la formation des galaxies et des grandes structures cosmiques, évidemment, mais aussi être tout simplement capable d'observer l'Univers, car la question de l'observation cosmologique est conditionnée par la présence de ces perturbations cosmologiques. C'est par les perturbations cosmologiques que le lien entre observation et théorie se noue. Cela implique deux choses. D'abord, comment observer et analyser le plus finement possible ces perturbations, par exemple les anisotropies de température et de polarisation du CMB ? Ensuite, quel est l'impact sur ces perturbations de tout modèle dont le but est de résoudre les apories cosmologiques mentionnées ci-dessus, afin de pouvoir confronter ce modèle aux observations ?

* * *

Le principe cosmologique stipule que l'Univers est un espace-temps *statistiquement* homogène et isotrope. Ce principe est d'abord corroboré par les observations. Prenons par exemple le fond diffus cosmologique, une « photographie » de l'Univers alors âgé de $\sim 380\,000$ ans. L'intensité de ce rayonnement fossile est uniforme sur la voûte céleste. Elle présente toutefois de faibles fluctuations d'amplitude 10^{-5} . Cela signifie bien qu'en première approximation, l'Univers est identique partout mais qu'à un niveau plus fin, il présente de faibles variations. Ce principe peut être compris de différentes manières. Une façon naïve serait considérer que l'espace-temps Univers est *strictement* homogène et isotrope et que les faibles inhomogénéités se comportent comme des champs tests. Cela signifie deux choses. D'abord, les variations spatiales de *e.g.* la densité d'énergie de ses constituants n'affectent pas la dynamique globale de l'Univers (seule la densité d'énergie moyennée intervient). Ensuite, l'espace-temps lui-même n'est pas sujet à fluctuation entendu comme le fait que la métrique sera strictement donnée par la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW),

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right).$$

De ce point de vue, le principe cosmologique peut se lire comme le fait qu'il existe un feuilletage de l'espace-temps UNIVERSES tel que les hypersurfaces de type espace sont *strictement* homogène et isotrope. Cette interprétation est évidemment trop simpliste puisque les équations d'Einstein couplent la courbure de l'espace-temps à la densité d'énergie de ses constituants, et chaque variation de la densité d'énergie devrait correspondre en principe une variation de la courbure. De façon diamétralement opposé, on peut interpréter le principe cosmologique comme le fait que des inhomogénéités fortes, de densité et de métrique, sont présentes. Dans cette interprétation, non seulement les moyennes spatiales vont intervenir dans la dynamique globale de l'Univers mais aussi les moments d'ordre supérieur à 1, c'est-à-dire que l'évolution du facteur d'échelle est dynamiquement dépendante de $\langle \rho \rangle$ mais aussi de termes du type $\sqrt{\langle \rho^2 \rangle}$. Entre ces deux interprétations extrêmes nous pouvons considérer le cas d'un Univers statistiquement homogène et isotrope comme étant décrit par un espace-temps FLRW perturbé. Cela signifie qu'il y a effectivement des inhomogénéités de métrique et des inhomogénéités de densité mais qu'elles agissent à un niveau *perturbatif*. Il s'agit donc d'un présupposé dynamique pour implémenter cette idée d'espace-temps *statistiquement* homogène et isotrope. Autrement dit, dynamiquement parlant, les fluctuations de métrique et de densité ne rétroagissent *pas* sur l'évolution globale de l'Univers, qui reste déterminée par les équations de Friedmann usuelle. Relativement au principe cosmologique, considérer notre Univers comme décrit par un espace-temps FLRW perturbé est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour avoir un espace-temps statistiquement homogène et isotrope. C'est dernière interprétation du principe cosmologique que nous considérons ici. Du point de vue de la physique de l'Univers primordial et du fond diffus cosmologique, une telle interprétation semble pertinente car le contraste de densité est faible dans l'Univers primordial. Cependant, ce contraste de densité croît lors de la structuration (bien plus tardive) de l'Univers et une autre interprétation pourrait s'avérer nécessaire, en particulier relativement à la question de l'accélération récente de l'expansion cosmique.

Entendu ainsi, décrire l'Univers en tant qu'espace-temps maximalelement symétrique quoique perturbé, procède d'une double procédure. Il s'agit d'abord de déterminer conjointement l'évolution globale, à grande échelle, de la séparation relative entre deux points des sections spatiales et du contenu en matière et rayonnement de l'espace-temps « Univers ». Il s'agit là de la trame de fond (qui présente une courbure spatio-temporelle) dont la dynamique n'est pas affectée par les faibles inhomogénéités que l'on peut y ajouter. (Ce point est ici à comprendre de manière perturbative : la dynamique globale n'est pas affectée par les moments d'ordre supérieur ou égal à deux de la distribution des constituants de l'Univers.) Dans un deuxième temps, il s'agit d'obtenir la dynamique des perturbations

cosmologiques évoluant sur cette trame de fond, c'est-à-dire l'évolution dans un espace-temps en expansion des inhomogénéités de la métrique et du contenu.

Une telle approche n'est pas anodine. Si, dans le raisonnement perturbatif, l'évolution du fond n'est pas affecté par les inhomogénéités, la dynamique de ces dernières – autrement dit la dynamique dictant l'évolution et la formation des structures cosmiques – est quant à elle dépendante (et parfois de façon déterminante) de la trame de fond. Si la connaissance du fond est indispensable à la détermination de la dynamique des inhomogénéités cosmique, l'étude (en particulier observationnelle) de ces inhomogénéités est donc une source riche d'informations sur l'évolution globale et les constituants de notre Univers.

C'est ce cadre qui de fait sert de fil conducteur à l'ensemble des résultats présentés dans ce manuscrit. Les perturbations cosmologiques seront ici abordées comme traceur de la physique de l'Univers primordial et même comme possible traceur de l'ère de Planck, lorsque l'Univers doit être décrit dans un cadre de gravitation quantique. Ces perturbations cosmologiques seront donc étudiées dans leurs aspects théoriques (comment décrire de telles perturbations se propageant sur un espace-temps de fond *quantique*?) et dans leur dimension observationnelle (comment extraire au mieux l'information contenues dans les anisotropies polarisées du fond diffus cosmologique pour ensuite contraindre la physique en jeu dans les tout premiers instants de notre Cosmos?).

* * *

La première partie de ce manuscrit, Part. I, est justement dédiée à une présentation théorique du traitement des inhomogénéités cosmiques dans le cadre d'un espace-temps FLRW perturbé. Dans le paradigme cosmologique standard, les inhomogénéités primordiales auraient pour origine les fluctuations quantiques du vide amplifiées pendant la phase d'inflation cosmique, quelques 10^{-35} seconde après le Big Bang. Nous portons donc principalement notre attention sur le cas des perturbations cosmologiques durant cette phase d'expansion accélérée.

Si l'inflation cosmique permet de résoudre un certain nombre de problème des « vieux » modèles de Big Bang chaud (*e.g.* problème de l'horizon et problème de la platitude) et fournit un mécanisme de production d'inhomogénéités primordiales, initier une telle phase dans le cadre standard de la relativité générale et des constituants usuels données par le modèle standard de la physique des particules n'est pas aisé. Et une telle phase, aussi nécessaire qu'elle soit, peut apparaître comme peu naturelle. Par ailleurs, l'aporie de la singularité de Big Bang reste entière de ce paradigme de l'inflation cosmique [5], et ce que trace la singularité de Big Bang n'est pas tant un réel arrêt de l'Univers mais bien un incapacité de la relativité générale à décrire l'Univers dans ses tout premiers instants. La seconde partie de ce manuscrit, Part. II, aborde une modélisation quantique de l'Univers durant l'ère de Planck. Nous montrons comment dans le cadre de la *cosmologie quantique à boucles* – une approche de minisuperspace inspirée de la *gravité quantique à boucles* –, la singularité de Big Bang est remplacée par un *rebond quantique* et comment, en sortie de rebond, l'Univers entre naturellement dans une phase d'inflation. Nous montrons alors comment construire la théorie des perturbations cosmologiques évoluant dans un univers quantique et se propageant ainsi à travers le rebond. Finalement, nous montrons que le rebond quantique pourrait laisser son empreinte dans les inhomogénéités cosmiques présentes en fin d'inflation, ce qui se traduirait en d'infimes distorsions des propriétés statistiques des anisotropies du fond diffus cosmologique.

Les observables cosmologiques principales qui permettent de remonter à la physique de l'Univers primordial sont les anisotropies en température et en polarisation du fond diffus cosmologique. (Ces anisotropies de polarisation se divisent en un mode *E* et un mode *B*, ce dernier étant bien plus faible en amplitude.) Elles ne sont évidemment pas les seules (les oscillations acoustiques de baryons, par exemple, apportent aussi leur lot d'information quant-à *e.g.* la nature des inhomogénéités primordiales) mais elle n'en demeure pas moins indispensable pour sonder les inhomogénéités primordiales aux plus grandes échelles de longueur. Plus particulièrement, les anisotropies de polarisation de type *B primordiales*, visible aux plus grandes échelles angulaires, ne seraient générés que par les ondes gravitationnelles primordiales – le mode tensoriel des perturbations cosmologiques –. La puissance de ces anisotropies est alors directement proportionnelle à l'échelle d'énergie de l'inflation et la détection de ce mode permettrait d'établir de fortes contraintes sur les modèles possibles d'inflation cosmique. Un grand nombre d'expériences sol ou ballon sont dédiées à ce signal sont actuellement en cours d'opération ou de déploiement. Les premières détections *directes* du mode *B* ont été annoncées pendant la première quinzaine de mars 2014 : tout d'abord une détection directe du mode *B* secondaire du au lentillage gravitationnel a été annoncée le 10 mars par la collaboration POLARBEAR, ensuite la première détection directe du mode *B* primordiale annoncée par la collaboration BICEP2, le 17 mars. Outre une très grande sensibilité instrumentale, de telles détections ne sont possibles que par la mise en œuvre

d'outils d'analyse statistique corrigeant de nombreux effets systématiques, compte tenu de la petitesse du signal de mode B . La dernière partie de ce manuscrit, Part. III, est dédiée à la présentation d'une méthode efficace de reconstruction du mode B partant des cartes observées des paramètres de Stokes, Q et U dont la précision est le résultat d'une optimisation des fonctions de poids appliquées aux cartes du ciel et de la séparation exacte des mode E et B , évitant toute fuite de l'un dans l'autre. Nous montrons que l'utilisation de cette méthode est indispensable à la reconstruction du mode B pour les expériences sol ou ballon – couvrant une faible portion du ciel –, mais aussi pour une potentiel mission satellite – couvrant une bien plus grande fraction de la voûte céleste –. A titre d'exemple, cette méthode a justement été utilisée dans le cadre de l'analyse des données de POLARBEAR. Nous montrons finalement quelles contraintes pourront être mise sur l'amplitude des ondes gravitationnelles primordiales, mais aussi sur une possible violation de parité dans l'Univers primordial, si le mode B est reconstruit avec une telle approche statistique.

Première partie

Préliminaires : inflation primordiale et inhomogénéités cosmiques

Sommaire

1	Inhomogénéités cosmologiques	7
1.1	Quantités géométriques perturbées	7
1.1.1	Tenseur métrique perturbé	7
1.1.2	Tenseur d'Einstein perturbé	11
1.1.3	Tenseur impulsion-énergie perturbé	11
1.2	Dynamique des perturbations	13
1.2.1	Equation du mouvement	13
1.2.2	Quelques généralités quant à l'évolution des perturbations	14
1.2.3	Modes super-Hubble et sub-Hubble et modes oscillants et gelés	16
2	L'Univers primordial : inflation cosmique	19
2.1	Limites du « vieux » modèle de Big Bang	19
2.2	Inflation cosmique	22
2.2.1	Résoudre les problèmes	22
2.2.2	L'inflation dans ses grandes lignes et l'approximation de roulement lent	24
2.2.3	Deux modèles concrets pour fixer les idées	28
2.3	Inhomogénéités primordiales	30
2.3.1	Action perturbée	30
2.3.2	Spectres de puissance primordiaux : définition	31
2.3.3	Conditions initiales de théorie quantique des champs	33
2.3.4	Quantification des perturbations	36
2.3.5	Spectres de puissance primordiaux : prédiction de l'inflation	44
2.3.6	Spectres de puissance primordiaux : paramétrisation phénoménologique	47

Introduction I

Ce chapitre entend donner de façon pédagogique, mais restreinte, un tour d’horizon de la théorie classique des perturbations cosmologiques. Par l’utilisation du terme PERTURBATION, nous supposons implicitement que les inhomogénéités cosmiques sont décrites par un raisonnement perturbatif autour des solutions homogènes et isotropes des équations d’Einstein. Dans un premier temps, nous abordons la linéarisation des équations d’Einstein autour de l’espace-temps Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker afin d’obtenir les équations d’évolution des perturbations cosmologiques. Dans un second temps, la physique de l’Univers primordial est abordée. Le cas de l’inflation cosmique est plus particulièrement traité, en nous focalisant sur le mécanisme de génération des perturbations cosmiques originelles par amplification gravitationnelle des fluctuations quantiques du vide.

De nombreuses monographies sur le sujet existent. Nous nous référons principalement à *Cosmologie primordiale* de P. Peter et J.-P. Uzan [6], *Cosmological physics* de J. A. Peacock [7], et *Quantum fields in curved space* de N. D. Birrell et P. C. W. Davies [8].

Comme le stipule le principe cosmologique, l’Univers est *statistiquement* homogène et isotrope, et donc rempli de *perturbations*. La description homogène n’est valable qu’aux très grandes échelles de longueur et il est évident de part les observations que notre Univers contient des structures comme les galaxies ou les amas de galaxies. Ces faibles perturbations correspondent donc par exemple à des sous-densités et sur-densités locales qui sont à l’origine des galaxies et grandes structures observées dans notre Cosmos. Une étape cruciale dans la construction du paradigme cosmologique est alors de connaître la dynamique de ces perturbations, moyennant une source initiale qui reste à déterminer. Le mécanisme à l’origine de la formation de ces inhomogénéités primordiales sera abordé dans un second temps et nous nous focaliserons d’abord sur la description du type de perturbations attendues et de leur évolution. Nous nous limiterons au premier ordre dans la série perturbative permettant de décrire un univers « proche » de l’Univers purement homogène et isotrope. Autrement dit, nous ne considérons ici que la partie *linéaire* dans le développement perturbatif des équations d’Einstein et des équations d’évolution des constituants. Une telle approche est largement justifiée tant que les effets de non linéarité inhérents à la théorie gravitationnelle qu’est la relativité générale sont sous-dominants. Les non linéarités concerneront toutefois essentiellement les petites échelles de longueur. (Une composante des perturbations cosmologiques correspond aux sur-densités et sous-densités locales décrites par le contraste de densité : $\delta\rho/\langle\rho\rangle$ où $\langle\rho\rangle$ est la densité moyenne, homogène, du fluide cosmique. Au cours de l’évolution cosmique, les sur-densités vont accrêter de la matière par attraction gravitationnelle. Ainsi, $\delta\rho/\langle\rho\rangle$ va croître jusqu’à potentiellement dépasser l’unité. L’approximation linéaire n’est alors évidemment plus valide. L’instant et les échelles de longueur caractéristiques des sur-densités qui entrent dans la phase non linéaire dépendent de la valeur initiale des inhomogénéités. Avec la normalisation du spectre de puissance initial, il apparaît que le contraste de densité est de l’ordre de 1 sur un rayon de $8h^{-1}\text{Mpc}$.)

Pour développer la théorie des perturbations cosmologiques, il est nécessaire que l’espace-temps $\mathcal{M}$ muni de la métrique $g_{\mu\nu}$ et du tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ décrivant l’Univers *réel*, c’est-à-dire rempli de petites inhomogénéités, soit « proche » de l’espace-temps FLRW $\langle\mathcal{M}\rangle$, muni de la métrique de Robertson-Walker $\langle g_{\mu\nu}\rangle$ et du tenseur impulsion-énergie homogène et isotrope $\langle T_{\mu\nu}\rangle$. Encore faut-il donner un sens à « proche » ? Cette question est loin d’être triviale. Elle suppose implicitement une procédure de *moyenne* qui permet d’approcher $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu})$ par $(\langle\mathcal{M}\rangle, \langle g_{\mu\nu}\rangle, \langle T_{\mu\nu}\rangle)$. Toutefois, cette procédure est difficile en pratique. A titre d’exemple, on notera qu’une moyenne spatiale dépend du choix des hypersurfaces Σ_t et ne commute pas avec l’opération de dérivation par rapport à t . Il en résulte que $(\langle\mathcal{M}\rangle, \langle g_{\mu\nu}\rangle, \langle T_{\mu\nu}\rangle)$ n’est pas solution des équations de Friedmann-Lemaître. Rien n’assure qu’une telle moyenne spatiale soit l’approche à adopter et, en accord avec le point de vue orthodoxe ici choisi, nous considérons qu’il existe une procédure telle que l’espace-temps moyenné $(\langle\mathcal{M}\rangle, \langle g_{\mu\nu}\rangle, \langle T_{\mu\nu}\rangle)$ est bel et bien décrit par le modèle FLRW homogène et isotrope présenté dans le paragraphe précédent. Toute inhomogénéité sera donc décrite par les perturbations d’un tel espace-temps.

De façon plus formelle, supposer l'espace-temps décrivant l'Univers est un espace-temps FLRW *perturbé* assure que l'Univers est en moyenne homogène et isotrope, mais l'inverse n'est pas vrai. Autrement dit, FLRW perturbé est une condition suffisante pour avoir un espace-temps statistiquement homogène et isotrope mais pas une condition nécessaire.

De façon relativement générique, il convient de linéariser les équations d'Einstein ainsi que les équations donnant la dynamique des fluides cosmiques. Supposons notre univers rempli d'un champ scalaire φ . Les variables dynamiques sont alors $\langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}$ et $\langle \varphi \rangle + \delta \varphi$ telles que les quantités $\langle \cdot \rangle$ sont solutions des équations dynamiques non perturbées, c'est-à-dire les équations de Friedmann-Lemaître en cosmologie. La linéarisation se traduit donc par le passage des équations complètes

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} [\langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}] = 8\pi G T_{\mu\nu} [\langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}, \langle \varphi \rangle + \delta \varphi], \\ T^{\mu\nu}_{;\nu} [\langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}, \langle \varphi \rangle + \delta \varphi] = 0, \end{cases}$$

aux équations perturbées

$$\begin{cases} \langle G_{\mu\nu} \rangle [\langle g_{\mu\nu} \rangle] + \delta G_{\mu\nu}^{(\langle g_{\mu\nu} \rangle)} [\delta g_{\mu\nu}] = 8\pi G \left\{ \langle T_{\mu\nu} \rangle [\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle] + \delta T_{\mu\nu}^{(\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle)} [\delta g_{\mu\nu}, \delta \varphi] \right\}, \\ \langle D_\nu \rangle \langle T^{\mu\nu} \rangle [\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle] + \langle D_\nu \rangle \delta T^{\mu\nu}_{(\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle)} [\delta g_{\mu\nu}, \delta \varphi] + \delta D_\nu \langle T^{\mu\nu} \rangle [\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle] = 0. \end{cases}$$

Dans les équations ci-dessus, les quantités entre crochet, *i.e.* $\langle \cdot \rangle$, sont les variables dynamiques (par exemple les variables de l'espace de phase) tandis que les « indices » entre parenthèse, *i.e.* $S^{(\cdot)}$, sont des quantités *paramétrisant* S . Par exemple, $\delta G_{\mu\nu}^{(\langle g_{\mu\nu} \rangle)}$ dépend *dynamiquement* de $\delta g_{\mu\nu}$ mais *paramétriquement* de $\langle g_{\mu\nu} \rangle$ dont la dynamique est déterminée par ailleurs, grâce aux équations de Friedmann-Lemaître. Puisque $\langle g_{\mu\nu} \rangle$ et $\langle \varphi \rangle$ sont solutions des équations d'Einstein non perturbées, nous cherchons donc à déterminer les 2 équations suivantes :

$$\begin{cases} \delta G_{\mu\nu}^{(\langle g_{\mu\nu} \rangle)} [\delta g_{\mu\nu}] = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}^{(\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle)} [\delta g_{\mu\nu}, \delta \varphi], \\ \langle D_\nu \rangle \delta T^{\mu\nu}_{(\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle)} [\delta g_{\mu\nu}, \delta \varphi] + \delta D_\nu \langle T^{\mu\nu} \rangle [\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle] = 0. \end{cases}$$

Les premières étapes consistent donc à déterminer les perturbations de 3 tenseurs fondamentaux : le tenseur métrique, le tenseur d'Einstein et le tenseur impulsion-énergie. S'ajoutent à cela les perturbations des coefficients de connexion, qui interviennent dans le calcul de la dérivation covariante et du tenseur d'Einstein.

Quelques remarques s'imposent. Nous utiliserons le temps conforme, noté η , comme variable de temps, qui se dérive du temps cosmique, t , via $d\eta = dt/a(t)$. Afin de dériver la théorie des perturbations cosmologiques, plusieurs tenseurs et objets courants de la relativité générale doivent être linéarisés et leur comportement vis-à-vis des transformations de jauge étudié. Cela sera fait de façon claire pour le cas du tenseur-métrique mais présenter plus succinctement pour le tenseur d'Einstein et le tenseur impulsion-énergie. Par ailleurs, le membre de droite des équations d'Einstein décrivant les constituants de l'espace-temps comme source de gravitation, il est évident que le comportement spécifique des perturbations cosmologiques dépend du nombre et du type de constituants considérés. Cette monographie portant essentiellement sur l'Univers primordial pour lequel il est communément admis que le constituant dominant est un champ scalaire, nous développerons ici la théorie des perturbations cosmologiques pour un univers rempli de cet unique composant (un traitement plus générique et considérant plusieurs constituants se trouve dans [6]).

Chapitre 1

Inhomogénéités cosmologiques

1.1 Quantités géométriques perturbées

1.1.1 Tenseur métrique perturbé

Pour étudier l'évolution des perturbations cosmologiques, il convient de linéariser les équations d'Einstein ainsi que les équations d'évolution des constituants de l'Univers, autour de la solution FLRW. Il faut donc dans un premier temps perturber le tenseur métrique : $g_{\mu\nu} \rightarrow \langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}$, où $\langle g_{\mu\nu} \rangle$ est le tenseur métrique de la métrique de Robertson-Walker. La métrique inverse est alors $g^{\mu\nu} \rightarrow \langle g^{\mu\nu} \rangle - \delta g^{\mu\nu}$ et les indices μ, ν , etc. des quantités perturbées sont élevés où abaissés par application de $\langle g^{\mu\nu} \rangle$ et $\langle g_{\mu\nu} \rangle$: $\delta g^{\mu\nu} = \langle g^{\mu\lambda} \rangle \langle g^{\nu\rho} \rangle \delta g_{\lambda\rho}$. Si l'on reprend le formalisme {3+1} de la relativité générale, l'écriture la plus générique des perturbations s'obtient en introduisant un scalaire, δN , un 3-vecteur, δN^a et un tenseur 3×3 , δg_{ab} :

$$N \rightarrow \langle N \rangle + \delta N, \quad N^a \rightarrow \langle N^a \rangle + \delta N^a \quad \text{et} \quad g_{ab} \rightarrow \langle g_{ab} \rangle + \delta g_{ab}, \quad (1.1)$$

avec $\langle N \rangle = a(\eta)$, $\langle N^a \rangle = 0$ et $\langle g_{ab} \rangle = \text{diag} [a^2(\eta)/(1 - \kappa r^2), a^2(\eta)r^2, a^2(\eta)r^2 \sin^2 \theta]$ pour un espace-temps FLRW. Dans la suite, nous posons $\delta N = a(\eta)A$ et $a^{-2}\delta N^a \equiv B^a$. De même, nous posons $a^{-2}\delta g_{ab} \equiv h_{ab}$. L'élément de longueur au premier ordre est alors

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2A(\eta, x^c)) d\eta^2 - 2B_a(\eta, x^c) dx^a dt - (\gamma_{ab} + h_{ab}(\eta, x^c)) dx^a dx^b], \quad (1.2)$$

avec $B_a = \gamma_{ab}B^b$. Dans cette décomposition {3+1}, les indices spatiaux a, b , etc. sont élevés et abaissés par application de γ^{ab} et γ_{ab} . Dans l'expression ci-dessus, nous avons explicitement rappelé que les quantités perturbées dépendent du temps *et* de l'espace. Cette dépendance sera implicite dans la suite.

Il est important ici de rappeler quelques éléments de calcul tensoriel sur les métriques perturbées dans une formulation {3+1}. Nous rappelons tout d'abord que si $g_{\mu\nu} = \langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}$ alors son inverse est $g^{\mu\nu} = \langle g^{\mu\nu} \rangle - \delta g^{\mu\nu}$ avec la perturbation contravariante obtenue comme $\delta g^{\mu\nu} = \langle g^{\mu\sigma} \rangle \langle g^{\nu\lambda} \rangle \delta g_{\sigma\lambda}$. On utilise donc la métrique non perturbée pour élever ou abaisser des indices et il est aisé de montrer que $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \langle g_{\mu\alpha} \rangle \langle g^{\alpha\nu} \rangle + \delta g_{\mu\alpha} \langle g^{\alpha\nu} \rangle - \langle g_{\mu\alpha} \rangle \delta g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\nu + \delta g_\mu^\mu - \delta g_\mu^\mu = \delta_\mu^\mu$. Dans la formulation {3+1} de la cosmologie, la métrique peut s'écrire comme

$$ds^2 = N^2(x^0) [dt^2 - \gamma_{ab}(x^c) dx^a dx^b]$$

et, conformément à une décomposition {3+1}, les parties spatiales sont levées et abaissées à l'aide de γ_{ab} : pour un vecteur v^a , nous aurons donc un covecteur $v_a = \gamma_{ab}v^b$. Considérons maintenant un vecteur contravariant $v^\mu = (v^0, v^a)$. Son covecteur associé est alors

$$v_\mu = (N^2 v^0, -N^2 \gamma_{ab} v^b) = (N^2 X^0, -N^2 v_a).$$

Autrement dit, la partie spatiale d'un covecteur quadri-dimensionnel n'est pas égale au covecteur spatial mais à l'opposé du produit de ce covecteur spatial avec la fonction d'intervalle au carré. Considérons maintenant un tenseur de rang 2, $S^{\mu\nu}$ tel que

$$S^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} S^{00} & S^{0a} \\ \hline S^{a0} & S^{ab} \end{array} \right).$$

On définit les parties spatiales covariantes à l'aide de $\gamma_{ab} : S_a^0 = \gamma_{ab} S^{0b}$ et $S_{ab} = \gamma_{ac} \gamma_{bd} S^{cd}$. Avec la métrique précédemment utilisée, le tenseur complètement covariant associé à $S^{\mu\nu}$ est

$$S^{\mu\nu} = N^4 \left(\begin{array}{c|c} S^{00} & -\gamma_{ab} S_0^b \\ \hline -\gamma_{ab} S_0^b & \gamma_{ac} \gamma_{bd} S^{cd} \end{array} \right) = N^4 \left(\begin{array}{c|c} S^{00} & -S_{0a} \\ \hline -S_{a0} & S_{ab} \end{array} \right).$$

Ainsi, le cotenseur spatial S_{ab} est égal (au facteur N^4 près) à la partie purement spatiale du cotenseur quadridimensionnel mais les composantes mixtes ($0a$) se comportant comme la partie spatiale d'un vecteur, vont elle changer de signe.

La description standard des perturbations cosmologiques fait appel à la décomposition Scalaire-Vecteur-Tenseur (SVT dans la suite) [9]. L'avantage essentiel d'une telle décomposition est qu'au premier ordre, ces trois composantes sont découplées et peuvent donc être étudiées séparément. Tout champ vectoriel peut se décomposer comme la somme de la divergence d'un scalaire et d'un vecteur de divergence nulle :

$$B^a = \nabla^a B + \bar{B}^a \text{ avec } \nabla^a \bar{B}_a = 0. \quad (1.3)$$

La variable B est une variable scalaire et $\bar{B}_a$ une variable vecteur de divergence nulle. Puisque $\bar{B}_a$ est de divergence nulle, il comporte $3 - 1 = 2$ degrés de liberté. De façon analogue, un tenseur peut se réécrire comme

$$h_{ab} = 2C\gamma_{ab} + 2\nabla_a \nabla_b E + (\nabla_a \bar{E}_b + \nabla_b \bar{E}_a) + 2\bar{E}_{ab}, \quad (1.4)$$

où C et E sont deux variables scalaires, $\bar{E}_b$ une variable vecteur de divergence nulle et $\bar{E}_{ab}$ une variable tenseur de divergence nulle, $\nabla^a \bar{E}_{ab} = 0$ et de trace nulle $\bar{E}_a^a = 0$. Tout comme $\bar{B}_a$, le vecteur $\bar{E}^a$ contient 2 degrés de liberté. Enfin, le tenseur $\bar{E}_{ab}$ contient 9 composantes. Toutefois, ce tenseur est i) symétrique, ce qui supprime 3 degrés de liberté, ii) de divergence nulle, ce qui supprime 3 autres degrés de liberté et iii) de trace nulle, ce qui supprime 1 degré de liberté. Le tenseur $\bar{E}_{ab}$ ne contient donc que 2 composantes linéairement indépendantes. En conclusion, les perturbations cosmologiques se décomposent suivant :

- 4 degrés de liberté *scalaires* qui sont les fonctions A , B , C et E ,
- 4 degrés de liberté *vecteurs* correspondant aux 2 degrés de liberté du vecteur sans divergence $\bar{B}^a$ et aux 2 degrés de liberté du vecteur sans divergence $\bar{E}^a$,
- 2 degrés de liberté *tenseur* correspondant aux 2 degrés de liberté du tenseur symétrique, sans trace et sans divergence $\bar{E}_{ab}$.

Comme on pouvait s'y attendre, la perturbation métrique (étant symétrique) contient *a priori* 10 degrés de liberté. Une interprétation intuitive de ces différentes variables n'est pas évidente (elle dépend en particulier du choix de jauge). On peut toutefois noter que, de façon grossière, A et C sont assimilables à des potentiels gravitationnels tandis que $\bar{B}^a$ peut être associée à des mouvements de vorticité. Le cas de $\bar{E}_{ab}$ est quant-à lui beaucoup plus simple : il décrit les ondes gravitationnelles.

Pour étudier l'espace-temps FLRW perturbé, nous émettons l'hypothèse que ce dernier est « proche », mais bel et bien diff rent, de l'espace-temps FLRW *non perturbé*. Cela suppose implicitement que nous pouvons comparer ces deux espace-temps. Autrement dit, si l'on appelle $(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle g_{\mu\nu} \rangle)$ l'espace-temps FLRW et $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ l'espace-temps FLRW perturbé, cela suppose que nous sommes capable de définir la perturbation par $\delta g_{\mu\nu}(t, x^a) = g_{\mu\nu}(t, x^a) - \langle g_{\mu\nu} \rangle(t, x^a)$ en tout point de l'espace-temps et donc de mettre en correspondance les points de $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ avec ceux de $(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle g_{\mu\nu} \rangle)$. Cependant, compte tenu de l'invariance par difféomorphisme de la relativité générale, il y a un arbitraire dans notre façon d'identifier les points d'un espace-temps et il n'existe donc pas d'identification canonique entre les points de $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ et ceux de $(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle g_{\mu\nu} \rangle)$. En effet, il est toujours possible d'effectuer un changement de coordonnées arbitraire sans changer l'espace-temps FLRW. Cela aura pour effet de changer les coefficients de la métrique et certains de ces changements peuvent s'apparenter à un ou plusieurs termes perturbatifs. Si l'on effectue par exemple la simple transformation de jauge $x^a \rightarrow y^a = x^a + \xi^a(\eta, x^b)$, la métrique FLRW devient

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - 2B_a dy^a d\eta - (g_{ab} + h_{ab}) dy^a dy^b],$$

avec $B_a = -2\xi'_a$ et $h_{ab} = 2\nabla_a \xi_b$. Il est évident que ces deux quantités ne sont pas des perturbations physiques de l'espace-temps FLRW, bien qu'elles en aient l'allure, mais simplement des « artefacts mathématiques » liés à un choix spécifique du système de coordonnées. Puisque les perturbations présentées ci-dessus suppose un choix du

système de coordonnées, il est donc indispensable de pouvoir identifier dans $\delta g_{\mu\nu}$ les degrés de liberté physiques –propre à la variété perturbée–, des degrés de jauge –propre à l'arbitraire du choix du système de coordonnées et qui peuvent donc être annulées par un changement de coordonnées–. Puisque fixer la jauge revient à choisir un système de coordonnées, on comprend aisément que parmi les 10 variables de perturbations, uniquement $10 - 4 = 6$ sont indépendantes.

Afin de distinguer les degrés de liberté physiques des degrés de jauge, il faut étudier le comportement des perturbations métriques suivant une transformation de jauge. La relativité générale est invariante sous l'action des difféomorphismes, c'est-à-dire le glissement « doux » de tous les champs sur la variété $\phi \rightarrow \tilde{\phi}$, et cela indépendamment du système de coordonnées. Cela est rendue possible par le fait que la théorie étant invariante par un changement de coordonnées, il est toujours possible, suite à l'action d'un difféomorphisme actif, d'effectuer un changement de coordonnées tel que les champs « glissés » $\tilde{\phi}$ dans le nouveau système de coordonnées sont égaux aux champs « non glissés » dans l'ancien système de coordonnées. Dans le cas des perturbations cosmologiques, nous cherchons les transformations qui laisse la structure moyennées $(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle g_{\mu\nu} \rangle)$ inchangée (dans notre cas, il s'agit d'assurer que le modèle FLRW homogène et isotrope est invariant), c'est-à-dire qui modifie la métrique FLRW non perturbée au *premier ordre uniquement*. Ce point se justifie ainsi : il est exigé que sous l'action d'un difféomorphisme, l'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ reste proche de l'espace-temps non perturbé $(\langle \mathcal{M} \rangle, \langle g_{\mu\nu} \rangle)$. Autrement dit, il est nécessaire que le $|\delta g_{\mu\nu}| \ll 1$ avant comme après application d'un difféomorphisme. Cela est rendue possible par un glissement infinitésimal

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu.$$

Comme tout quadri-vecteur, le déplacement ξ^μ peut se décomposer suivant 2 degrés de liberté scalaires et 2 degrés de liberté vectoriel encodé dans le 3-vecteur $\tilde{\xi}^a$ de divergence nulle, *i.e.* $\nabla^a \tilde{\xi}_a = 0$:

$$\xi^0 = \xi_T \text{ et } \xi^a = \nabla^a \xi_S + \tilde{\xi}^a.$$

Pour un tel changement de coordonnées infinitésimal, les tenseurs se transforment à l'aide de la dérivation de Lie qui, pour un tenseur métrique, s'écrit

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} + \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu,$$

avec $\xi_\mu = (a^2 \xi_T, -a^2 \nabla_a \xi_S - a^2 \tilde{\xi}_a)$. Dans la langage de la théorie des perturbations cosmologiques, un changement de coordonnées infinitésimal est communément appelé *transformation de jauge*. En décomposition scalaire-Vecteur-Tenseur, les perturbations métriques se transforment alors comme :

– modes scalaires

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A + \xi'_T + \frac{a'}{a} \xi_T, \\ B &\rightarrow B - \xi_T + \xi'_S, \\ C &\rightarrow C + \frac{a'}{a} \xi_T, \\ E &\rightarrow E + \xi_S, \end{aligned}$$

– modes vecteurs

$$\begin{aligned} \bar{B}^a &\rightarrow \bar{B}^a + \tilde{\xi}^{a'}, \\ \bar{E}^a &\rightarrow \bar{E}^a + \tilde{\xi}^a \end{aligned}$$

– modes tenseurs

$$\bar{E}^{ab} \rightarrow \bar{E}^{ab}.$$

Grâce à un choix spécifique (et si possible judicieux) des quatres fonctions ξ^μ , 4 des 10 degrés de liberté physiques sont alors supprimés. Il est par ailleurs possible de prendre des combinaisons spécifiques des 10 coefficients de perturbations pour construire 6 variables dites *invariantes de jauge*, c'est-à-dire qu'elles restent inchangées sous n'importe quelle transformation de jauge. Les variables données dans les équations (1.5) à (1.8) en sont un exemple. On notera que le mode tenseur (les ondes gravitationnelles) est par construction invariant de jauge.

Différentes approches peuvent être adoptées. D'une part, on peut fixer la jauge (par exemple telle que $B = E = 0$ et $\bar{B}_a = 0$) et travailler sur les variables propres à une jauge. D'autre part, on peut travailler avec des quantités qui sont dites invariantes de jauge, ce qui veut simplement dire qu'elle ne changent pas par transformation de jauge.

Un exemple de telles quantités invariantes de jauge est le suivant :

$$\Psi \equiv -C - \frac{a'}{a} (B - E'), \quad (1.5)$$

$$\Phi \equiv A + \frac{a'}{a} (B - E') + (B' - E''), \quad (1.6)$$

$$\bar{\Phi}^a \equiv \bar{E}^{a'} - \bar{B}^a, \quad (1.7)$$

$$\bar{E}^{ab} \equiv \bar{E}^{ab}. \quad (1.8)$$

Quelques remarques concernant les quantités invariantes de jauge s'imposent :

- On retrouve bien ici 6 degrés de liberté physiques : 2 sont scalaires, 2 sont vecteurs et 2 sont tenseurs
- Les modes tenseurs sont « naturellement » invariant de jauge. Il y a donc une propagation physique d'un mode tensoriel, c'est-à-dire des ondes gravitationnelles.
- La variable Φ s'apparente à un potentiel gravitationnel. On pourra en effet se rappeler que dans la limite des champs faibles (autour de l'espace-temps de Minkowski) en relativité générale, $g_{00} \simeq 1 + 2\Phi_{\text{flat}}$ et la variable Φ_{flat} s'interprète comme le potentiel newtonien dans l'équation des géodésique. Stricto sensu, Φ n'est toutefois pas le potentiel de Newton mais il correspond à un des deux potentiels de Bardeen.
- Supposons que nous nous plaçons dans une jauge telle que $E = B = 0$ et imposons l'absence de modes vecteurs et tenseurs, *i.e.* $\bar{B}_a = \bar{E}_a = 0$ et $\bar{E}_{ab} = 0$. La métrique perturbée s'écrit alors $ds^2 = (1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Psi) \gamma_{ab} dx^a dx^b$.

Il est toujours possible de choisir d'autres variables invariantes de jauge comme par exemple $X = \Phi + \Psi + (a\Psi/a')'$. L'approche la plus judicieuse consiste donc à se placer dans une jauge de manière à ce que les perturbations cosmologiques coïncident avec des quantités invariantes de jauge. Cela est le cas pour (au moins) deux jauges usuellement utilisées en cosmologie : la jauge de Newton d'une part et la jauge de feuilletage plat d'autre part. De façon intuitive, la différence entre ces deux jauges se comprend ainsi. Dans la jauge de Newton, l'expansion est toujours homogène et isotrope. (Nous soulignons ici que pour bien saisir la différence entre les choix de jauge, il est nécessaire de garder à l'esprit que nous parlons de l'espace-temps FLRW perturbé qui est proche *mais* différent de l'espace-temps FLRW.) Cependant, la 3-courbure des hypersurfaces à temps constant (qui est constante pour l'espace-temps FLRW) présente une dépendance spatiale puisque $\delta R^{(3)} \propto a^{-1}(\Delta + 3\kappa)C(\eta, x^a)$. Cette courbure spatiale des hypersurfaces représente l'effet gravitationnel des perturbations cosmologiques. L'image est cependant bien différente en jauge de feuilletage plat. Comme son nom l'indique, les feuilles tridimensionnelles d'espace ont une 3-courbure scalaire *nulle* dans cette jauge (c'est la définition même de cette jauge) mais les lignes d'Univers $x^a = cste$ ne sont plus perpendiculaires aux hypersurfaces d'espace et l'expansion ne peut plus être vue comme isotrope.

Parmi les différentes jauges couramment utilisées, nous mentionnons la *jauge de Newton* (ou *longitudinale*) pour laquelle $B = E = 0$ et $\bar{B}^a = 0$. Les perturbations restantes coïncident avec certaines variables invariantes de jauge : $A = \Phi$, $C = -\Psi$, $\bar{E}^{a'} = \bar{\Phi}^a$ et $\bar{E}^{ab}$. Dans cette jauge, la fonction Ψ représente la courbure des sections spatiales à temps constant et il jouera le rôle de potentiel dans l'équation de Poisson. Ψ est donc assimilable à un potentiel gravitationnel. Comment interpréter une telle jauge ? Imposer $B = \bar{B}^a = 0$ signifie qu'il n'y a pas de terme du type $N_a d\eta dx^a$ dans la métrique. Ainsi, lorsque l'on passe d'une feuille Σ_η à une feuille $\Sigma_{\eta+\delta\eta}$ de l'espace-temps FLRW *perturbé*, un point p en x^a reste en x^a (les lignes d'Univers $x^a = cste$ sont orthogonales aux hypersurfaces spatiales) : l'expansion est considérée comme isotrope et Ψ représente la 3-courbure spatiale des feuilles à $\eta = cste$.

Une deuxième jauge utilisée en cosmologie est la jauge de feuilletage plat pour laquelle $C = E = 0$ et $\bar{E}^a = 0$. Comme en jauge de Newton, les perturbations restantes sont égales à des quantités invariantes de jauge : $A = X$, $B = -a\Psi/a'$, $\bar{B}^a = -\bar{\Phi}^a$ et $\bar{E}^{ab}$. À l'inverse de la jauge de Newton, le terme $N_a d\eta dx^a = (\nabla_a B + \bar{B}_a) d\eta dx^a$ n'est pas nul et les lignes d'Univers $x^a = cste$ ne sont plus orthogonales aux hypersurfaces Σ_η (rendant l'interprétation en terme de potentiel gravitationnel difficile). Dans une telle jauge (et c'est en fait sa définition), la partie scalaire de la 3-courbure spatiale des hypersurfaces est alors *nulle*.

1.1.2 Tenseur d'Einstein perturbé

Les différentes composantes du tenseur d'Einstein perturbé sont données par les expressions suivantes :

$$\delta G_{00} = \underbrace{6\mathcal{H}C' - 2\Delta C + 6\kappa(A - C) - 2\mathcal{H}\Delta(B - E')}_{\text{Scalaire}}, \quad (1.9)$$

$$\delta G_{0a} = \underbrace{\nabla_a [2\mathcal{H}A - 2C' + 2\kappa E' - (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + 3\kappa)B]}_{\text{Scalaire}} \quad (1.10)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\Delta(\bar{E}'_a - \bar{B}_a) + \kappa\bar{E}'_a - (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + 2\kappa)\bar{B}_a}_{\text{Scalaire}}$$

$$\delta G_{ab} = \underbrace{\nabla_a \nabla_b [E'' + 2\mathcal{H}E' - 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \kappa)E - B' - 2\mathcal{H}B - C - A]}_{\text{Scalaire}} \quad (1.11)$$

$$+ \underbrace{[\Delta(-E'' - 2\mathcal{H}E' + B' + 2\mathcal{H}B + C + A) - 2C'' - 4\mathcal{H}C']\gamma_{ab} + [2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)(A - C) + 2\mathcal{H}A']\gamma_{ab}}_{\text{Scalaire}}$$

$$+ \underbrace{\nabla_{(a} \left[(\bar{E}'_{b)} - \bar{B}_{b)} \right]' + 2\mathcal{H}(\bar{E}'_{b)} - \bar{B}_{b)} - 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \kappa)\bar{E}_{b)}}_{\text{Vecteur}}$$

$$+ \underbrace{\bar{E}''_{ab} + 2\mathcal{H}\bar{E}'_{ab} - 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\bar{E}_{ab} - \Delta\bar{E}_{ab}}_{\text{Tenseur}}.$$

On pourra remarquer les spécificités suivantes :

- la composante (00) ne s'exprime qu'en fonction de perturbations *scalaires*;
- les 3 composantes (0a) s'expriment en fonction de perturbations *scalaires* et de perturbations *vecteurs*;
- les 6 composantes (ab) s'expriment en fonction des trois types de perturbations : *scalaires*, *vecteurs* et *tenseurs*.

1.1.3 Tenseur impulsion-énergie perturbé

La linéarisation des équations d'Einstein autour de l'espace-temps FLRW nécessite aussi de perturber le tenseur impulsion-énergie. Durant la majeure partie de son histoire, l'Univers est supposé rempli d'un ou plusieurs fluides parfaits, homogène et isotrope. En toute généralité, c'est donc le tenseur

$$T_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n [(\rho_i + P_i)u_i^\mu u_i^\nu - P_i g^{\mu\nu}]$$

qu'il convient de perturber. Dans ce paragraphe, nous nous limiterons cependant au cas plus spécifique d'un champ scalaire φ , dont le tenseur impulsion-énergie est

$$T_\varphi^{\mu\nu} = (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - g^{\mu\nu} \left[\frac{g^{\lambda\sigma}}{2} \partial_\lambda \varphi \partial_\sigma \varphi - V(\varphi) \right], \quad (1.12)$$

avec $V(\varphi)$ un potentiel d'auto-interaction. Si le champ est effectivement homogène et isotrope ($\partial_a \varphi = 0$), il se ramène à un fluide parfait dont la densité d'énergie et la pression dans l'espace-temps FLRW sont (en utilisant le temps cosmique t) :

$$\rho_\varphi = T_{00} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi), \quad (1.13)$$

$$P_\varphi = \frac{T_{11}}{a^2 \gamma_{11}} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi). \quad (1.14)$$

On peut facilement se convaincre que si $\dot{\varphi}^2/2 \ll V(\varphi)$, alors $w \simeq -1 + \epsilon$ avec $0 < \epsilon \ll 1$. Le choix de ce type de matière est pertinent pour la physique de l'univers primordial. (Cela sera clarifié dans le chapitre suivant portant sur l'inflation cosmique.)

L'unique degré de liberté pour perturber la « matière » est donc $\varphi \rightarrow \langle \varphi \rangle + \delta\varphi$. Il faut toutefois garder à l'esprit que $T_{\mu\nu}$ comme défini dans l'équation (1.12) implique le tenseur métrique et donc ses perturbations. A l'ordre linéaire, les perturbations du tenseur impulsion-énergie sont alors

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \langle \varphi \rangle \partial_\nu \delta\varphi + \partial_\nu \langle \varphi \rangle \partial_\mu \delta\varphi - \delta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \langle g^{\lambda\sigma} \rangle \partial_\lambda \langle \varphi \rangle \partial_\sigma \langle \varphi \rangle - V(\langle \varphi \rangle) \right] \\ &- \langle g_{\mu\nu} \rangle \left[-\frac{\delta g^{\lambda\sigma}}{2} \partial_\lambda \langle \varphi \rangle \partial_\sigma \langle \varphi \rangle + \langle g^{\lambda\sigma} \rangle \partial_\lambda \langle \varphi \rangle \partial_\sigma \delta\varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \Big|_{\langle \varphi \rangle} \delta\varphi \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pour alléger les notations, nous utiliserons directement la notation φ (et non $\langle \varphi \rangle$) pour désigner la partie homogène du champ scalaire. Dans le cas de l'espace-temps FLRW perturbé, cela donne donc :

$$\delta T_{00} = \underbrace{\varphi' \delta\varphi' + a^2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta\varphi + 2a^2 AV}_{\text{Scalaire}}, \quad (1.16)$$

$$\delta T_{0a} = \underbrace{\left(\frac{(\varphi')^2}{2} - a^2 V \right) \bar{B}_a + \nabla_a \left[\varphi' \delta\varphi + \left(\frac{(\varphi')^2}{2} - a^2 V \right) B \right]}_{\text{Scalaire}}, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \delta T_{ab} &= \underbrace{2 \left(\frac{(\varphi')^2}{2} - a^2 V \right) \bar{E}_{ab}}_{\text{Tenseur}} + \underbrace{\left(\frac{(\varphi')^2}{2} - a^2 V \right) (\nabla_a \bar{E}_b + \nabla_b \bar{E}_a)}_{\text{Vecteur}} \\ &+ \underbrace{\left[\left(\varphi' \delta\varphi' - a^2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta\varphi - (A - C) (\varphi')^2 - 2a^2 CV \right) \gamma_{ab} + 2 \left(\frac{(\varphi')^2}{2} - a^2 V \right) \nabla_a \nabla_b E \right]}_{\text{Scalaire}}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Les résultats ci-dessus ont délibérément été écrits suivant la décomposition SVT. On pourra noter la cohérence des résultats obtenus : en vertu des équations d'Einstein, le tenseur impulsion-énergie est proportionnel au tenseur d'Einstein. Ainsi, compte tenu de la décomposition SVT du tenseur d'Einstein, il est nécessaire que les composantes de $\delta T_{\mu\nu}$ suivent les règles suivantes :

- la composante (00) ne s'exprime qu'en fonction de perturbations *scalaires* ;
- les 3 composantes (0a) s'expriment en fonction de perturbations *scalaires* et de perturbations *vecteurs* ;
- les 6 composantes (ab) s'expriment en fonction des trois types de perturbations : *scalaires*, *vecteurs* et *tenseurs*.

Sous l'action d'une transformation de jauge, les perturbations du champ scalaire se transforment comme $\delta\varphi \rightarrow \delta\varphi + \varphi' \times \xi^0$. A partir de cette loi et des lois de transformations des perturbations métriques, il est possible de définir des quantités invariantes de jauge comme :

$$\chi = \delta\varphi + \varphi' (B - E'), \quad (1.19)$$

ou encore

$$Q = \delta\varphi - C \frac{a\varphi'}{a'}. \quad (1.20)$$

On peut utiliser l'une ou l'autre de ces quantités invariantes de jauge (on rappelle qu'il n'y a qu'un seul degré de liberté pour les perturbations du champ scalaire). On notera toutefois qu'en jauge de Newton, la variable χ donne directement les perturbations du champ scalaire tandis qu'en jauge de feuilletage plat, c'est la variable Q qui donne directement accès à $\delta\varphi$. Cette dernière est communément appelée *variable de Mukhanov-Sasaki* [10]. Finalement, une variable invariante de jauge couramment utilisée en cosmologie primordiale est la variable

$$\mathcal{R} = C - \frac{a'\delta\varphi}{a\varphi'} = \frac{a'}{a\varphi'} \times Q = -\Psi - \left(\frac{\mathcal{H}}{\varphi'} \right) \chi. \quad (1.21)$$

Puisque sous une transformation de jauge $C \rightarrow C + a'\xi^0/a$ et $\delta\varphi \rightarrow \delta\varphi + \varphi'\xi^0$, on vérifie aisément que cette variable est bien invariante de jauge.

1.2 Dynamique des perturbations

1.2.1 Equation du mouvement

L'équation d'évolution des perturbations s'obtient à partir des équations d'Einstein perturbées

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}$$

et de l'équation de conservation perturbée du fluide cosmique

$$\delta (T^{\mu\nu}_{;\nu}) = 0.$$

Ce jeu d'équation va se décomposer suivant un premier ensemble d'équation décrivant les modes scalaires, un deuxième ensemble d'équation décrivant les modes vecteurs et un troisième ensemble d'équation décrivant les modes tenseur. Compte tenu de la décomposition SVT des différentes composantes du tenseur d'Einstein, les équations tenseurs se déduisent des composantes (ab) , les équations vecteurs se déduisent des composantes (ab) et $(0a)$ et les équations scalaires se déduisent des composantes (ab) , $(0a)$ et (00) des équations d'Einstein. Par ailleurs, les perturbations du champ scalaire étant par construction *uniquement* scalaire, l'équation de conservation perturbée donnera une équation scalaire supplémentaire.

Modes scalaires— Pour le cas d'un champ scalaire, l'équation de conservation perturbée revient à perturber au premier ordre l'équation de Klein-Gordon :

$$\chi'' + 2\mathcal{H}\chi' - \Delta\chi + a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi} \chi = \varphi' (\Phi' + 3\Psi') + 2\Phi (\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi'). \quad (1.22)$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette première équation ne fait intervenir que des perturbations scalaires. Pour le cas d'un champ scalaire, il n'y a qu'une seule équation dynamique provenant de l'évolution du fluide. Toutefois, dans le cas plus générique d'un fluide parfait, la dynamique du fluide aboutirait à deux équations dynamiques, l'une étant l'analogue de l'équation d'Euler et la deuxième étant l'analogue de l'équation de conservation.

Pour obtenir l'équation de Klein-Gordon perturbée satisfaite par les variables invariants de jauge, on procède ainsi. De façon générique, l'équation de Klein-Gordon perturbée est

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \Delta\delta\varphi + a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi} \delta\varphi = \varphi' (A' - 3C' - \Delta E') + 2A (\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi') + \varphi' \Delta B.$$

Dans la jauge de Newton pour laquelle $E = B = 0$, elle devient donc

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \Delta\delta\varphi + a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi} \delta\varphi = \varphi' (A' - 3C') + 2A (\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi').$$

Puisque dans la jauge de Newton $A = \Phi$, $C = -\Psi$ et $\delta\varphi = \chi$, l'équation ci-dessus se réécrit

$$\chi'' + 2\mathcal{H}\chi' - \Delta\chi + a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi} \chi = \varphi' (\Phi' + 3\Psi') + 2\Phi (\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi').$$

Or cette dernière équation n'implique que des quantités invariants de jauge. Elle est donc valable dans n'importe quelle jauge.

Les équations d'Einstein perturbées vont alors amené 3 équations dynamiques supplémentaires (les composantes (00) , $(0a)$ et (aa)) ainsi qu'une équation de contrainte (les composantes (ab) avec $a \neq b$) :

$$-3\mathcal{H}\Psi' + \Delta\Psi + 3\kappa(\Phi + \Psi) = 4\pi G \left[\varphi' \chi' + a^2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} \chi + 2a^2 V \Phi \right], \quad (1.23)$$

$$\mathcal{H}\Phi + \Psi' = 4\pi G \varphi' \chi, \quad (1.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Delta (\Phi - \Psi) + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' \\ + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) (\Phi + \Psi) + \mathcal{H}\Phi' \end{array} \right\} = 4\pi G \left\{ \begin{array}{l} \varphi' \chi' - a^2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} \chi + 2a^2 V \Psi \\ - (\Phi + \Psi) (\varphi')^2 \end{array} \right\} \quad (1.25)$$

et

$$\Phi = \Psi. \quad (1.26)$$

Cette dernière équation de contrainte n'est valide que dans la mesure où nous considérons un champ scalaire comme unique constituant de l'Univers. En effet, dans le cas plus générique d'un fluide parfait, des termes sources supplémentaires, dus aux composantes scalaires des perturbations de vitesse et de pression anisotropes du fluide, viennent s'ajouter dans les équations ci-dessus.

Modes vecteurs— Les équations du mouvement pour les modes vecteurs se déduisent des composantes $(0a)$ et des composantes (ab) des équations d'Einstein. Pour un champ scalaire, l'équation de Klein-Gordon ne donne évidemment aucune contribution à ces modes. Mentionnons toutefois que pour un fluide parfait, la conservation du tenseur impulsion-énergie aboutirait à une équation dynamique régissant la conservation de la vorticité du fluide et de sa pression anisotrope.

Des équations d'Einstein, il apparaît une équation de contrainte, purement spatiale et issue des composantes $(0a)$:

$$\Delta \bar{\Phi}_a + 2\kappa \bar{\Phi}_a = 0, \quad (1.27)$$

et une équation dynamique, purement temporelle et issue des composantes (ab) :

$$\bar{\Phi}'_a + 2\mathcal{H}\bar{\Phi}_a = 0. \quad (1.28)$$

Ces deux équations déterminent complètement la dynamique des modes vecteurs. L'absence de terme source est une conséquence directe du cas particulier d'un champ scalaire. Pour un fluide parfait, un terme source lié à la vorticité du mouvement du fluide apparaît dans le membre de droite de l'équation de contrainte tandis qu'un terme source du   la vorticité du tenseur de pression anisotrope apparaît dans le membre de droite de l'équation dynamique.

Modes tenseurs— Tout comme pour le cas des modes vecteurs, l'équation de Klein-Gordon n'apporte rien quant aux modes tenseurs. Leur évolution est décrite par une unique équation provenant des composantes (ab) des équations d'Einstein :

$$\bar{E}''_{ab} + 2\mathcal{H}\bar{E}'_{ab} + (2\kappa - \Delta)\bar{E}_{ab} = 0. \quad (1.29)$$

L'absence de terme source provient simplement du cas spécifique d'un champ scalaire. Pour un fluide parfait, un terme source lié à la partie purement tenseur de la décomposition SVT du tenseur de pression anisotrope apparaît dans le membre de droite de l'équation ci-dessus.

1.2.2 Quelques généralités quant à l'évolution des perturbations

Modes scalaires— Les équations dynamiques peuvent se ramener à une équation de Schrödinger :

$$u''_S + \left[k^2 - \underbrace{\left(4\kappa + \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + 2 \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 - \frac{\varphi'''}{\varphi'} \right)}_{V_S(\eta)} \right] u_S = 0, \quad (1.30)$$

avec $u_S = (a/\varphi') \times \Phi_k$. La quantité Φ_k correspond au mode harmonique, dépendant de η mais ne dépendant pas de x^a , associés au potentiel $\Phi(x^a, \eta)$ et la quantité k s'interprète comme le vecteur d'onde associé à ce mode. On notera que cette forme n'est valide que si φ' ne s'annule pas : on ne pourra l'utiliser si le champ scalaire oscille ou dans une phase purement de Sitter. Décrire la dynamique des perturbations scalaires à l'aide permet d'appliquer de simples raisonnements issus de la mécanique quantique pour inférer le comportement des inhomog nit s cosmiques. La quantité k^2 est l'analogie de l'énergie tandis que la quantité V_S est un potentiel effectif, dépendant du temps, qui mesure donc l'impact de l'évolution cosmique sur les perturbations scalaires. Par une simple analyse WKB, on peut aisément comprendre le comportement des perturbations scalaires. Dans un régime adiabatique (au sens de la dynamique de l'équation de Schrödinger, les solutions de l'équation (1.30) sont approchées par

$$u_S(\eta) \approx \begin{cases} A_k e^{i \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{k^2 - V_S(\eta')} d\eta'} + B_k e^{-i \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{k^2 - V_S(\eta')} d\eta'}, & \text{si } k^2 > V_S(\eta') \\ C_k e^{\int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{V_S(\eta') - k^2} d\eta'} + D_k e^{-\int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{V_S(\eta') - k^2} d\eta'}, & \text{si } k^2 < V_S(\eta'). \end{cases}$$

D'après l'approximation précédente, on distingue donc deux cas :

- $k^2 > V_S$: le mode se comporte comme la superposition de deux ondes.
- $k^2 < V_S$: le mode se décompose suivant un mode croissant et un mode décroissant. Une amplification potentielle des perturbations est donc possible dans ce régime via le mode croissant.

Deux remarques s'imposent ici. Premièrement, l'approximation WKB a bien évidemment ses limites. Elles ne s'appliquent par exemple pas au cas des points tournants, points pour lesquels $k^2 = V_S$. Toutefois, une application rigoureuse des méthodes WKB prenant en compte ces points tournants a été adaptée dans le cadre des perturbations cosmologiques durant l'inflation primordiale [11]. Cette méthode est de plus généralisable à n'importe quel type d'espace-temps, en particulier ceux décrivant les trous noirs [12]. Par ailleurs, il est possible de montrer explicitement l'apparition d'un mode croissant et d'un mode décroissant dans le cas $k^2 < V_S$ à l'aide d'une solution intégrale (voir *e.g.* les pages 255 et 456 de [6]). Deuxièmement, l'équation (1.30) est homogène. L'absence de terme source vient ici spécifiquement du fait que nous nous limitons au cas d'un champ scalaire comme unique constituant de l'Univers. Si en lieu et place d'un champ scalaire, l'Univers se trouve composé d'un fluide parfait, un terme source du aux perturbations d'entropie apparaît alors :

$$u_S'' + \left[k^2 - \left(4\kappa + \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + 2 \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 - \frac{\varphi'''}{\varphi'} \right) \right] u_S = S_k(\eta).$$

Une résolution par fonction de Green de cette équation inhomogène donne

$$u_S(\eta) = \int_0^\infty G_k(\eta, s) S_k(s) ds,$$

où la fonction de Green $G_k(\eta, s)$ est la réponse impulsionnelle à l'opérateur $\frac{d^2}{d\eta^2} + [k^2 - V_S(\eta)]$. Dans le cadre de l'approximation WKB, cette fonction de Green aura une forme identique à la solution WKB de l'équation homogène (1.30). Ainsi, dans le régime $k^2 < V_S$, le mode croissant va pouvoir amplifier la source.

Modes vecteurs— En l'absence de terme source, on peut montrer que les perturbations vecteurs de la métrique sont *strictement* nulles et cela même dans le cas où la possible source matérielle des perturbations vecteurs se soit tarie dans un passé proche. En effet, la structure des équations implique que dès que la source matérielle disparaît, les perturbations vecteurs de la métrique disparaissent instantanément. Autrement dit, les perturbations vecteur de la métrique s'annulent en même temps que la source : il ne peut y avoir de décroissance retardé des perturbations métriques une fois la source matérielle tarie. Cela provient de la structure des équations du mouvement : les parties spatiales et temporelles sont découplées et l'équation de contrainte $\Delta \bar{\Phi}_a - 2\kappa \bar{\Phi}_a = 0$ doit être comprise comme valide à tout temps. Compte tenu de cette séparation de l'espace et du temps, des solutions de type potentiel retardé pour $\bar{\Phi}_a$ n'existe pas. On se retrouve ici d'une situation quelque peu similaire à l'équation de Poisson en physique newtonienne¹ : lorsque la source (par exemple une masse ponctuelle) est enlevé alors le champ gravitationnel tombe *instantanément* à zéro.

De façon plus formelle, il peut être montré dans le formalisme Hamiltonien ADM (pour Arnowitt-Deser-Misner) qu'en l'absence de source et pour $\kappa = 0$, l'espace de phase des perturbations vecteurs (qui ne contient donc que les perturbations de la métrique) se réduit à un unique point : il n'y a aucun degré de liberté physique qui correspondent à des perturbations vecteurs [13]. En effet, l'espace de phase contient *a priori* 4 degrés de liberté vecteurs. Cependant, ces degrés de liberté sont confinés sur une surface de contrainte qui est donnée par la partie purement vecteur de la contrainte de difféomorphisme spatiale. Cela impose 2 contraintes et le nombre de degrés de liberté se réduit à 2. Par ailleurs, cette espace de phase à deux dimensions doit encore être *quotienter* par les transformations de jauge. Ces transformations de jauge sur les modes vectoriels sont justement générées par la partie vecteur de la contrainte de difféomorphisme spatiale : les orbites de jauge sont donc bidimensionnelles. En prenant le quotient de l'espace de phase bidimensionnel avec l'espace des orbites de jauge, lui aussi bidimensionnel, il ne reste plus qu'un point $(\bar{\Phi}_a, p_{\bar{\Phi}_a}) = (0, 0)$ où $p_{\bar{\Phi}_a} = \bar{\Phi}_a'$ est le moment conjugué de $\bar{\Phi}_a$.

Pour étudier la dynamique de $\bar{\Phi}_a$, il est nécessaire d'introduire une source. La partie homogène de l'équation dynamique des perturbations vecteurs de la métrique se formule comme :

$$\frac{\bar{\Phi}_a'}{\bar{\Phi}_a} = -2 \left(\frac{a'}{a} \right), \quad (1.31)$$

1. L'équation de Poisson sans source est même exactement retrouvée dans le cas d'un univers spatialement plat, $\kappa = 0$.

dont la solution générique est

$$\bar{\Phi}_a(\eta) \propto \frac{1}{a^2(\eta)}. \quad (1.32)$$

Notre Univers étant en expansion, les modes vecteurs décroissent nécessairement. En présence d'une source vectorielle $\bar{S}_a^2$, la résolution par fonction de Green de la version inhomogène de l'équation dynamique des modes vecteurs donne :

$$\bar{\Phi}_a(\eta) = \int_0^\infty \left(\frac{a(s)}{a(\eta)} \right)^2 \Theta(\eta - s) \bar{S}_a(s) ds, \quad (1.33)$$

où Θ représente la distribution de Heavyside. Dans un Univers en expansion, $a(s)$ est nécessairement plus petit que $a(\eta)$ si $s < \eta$, condition imposée par la distribution de Heavyside. Ainsi, bien que la dynamique cosmique encodée dans la fonction de Green « dilue » la source de perturbations, cette dilution peut être compensée par l'évolution propre du terme source.

Modes tenseurs— L'équation dynamique des modes tenseurs se reformule aussi comme une équation de Schrödinger :

$$u_T'' + \left[k^2 - \underbrace{\left(\frac{a''}{a} - 2\kappa \right)}_{V_T(\eta)} \right] u_T = 0. \quad (1.34)$$

Cette équation s'obtient en introduisant la variable $u_T = a \times h_{ab,k}$ où $h_{ab,k}$ est la décomposition harmonique de $\bar{E}_{ab}$ et k le vecteur d'onde. La quantité $V_T = \frac{a''}{a} - 2\kappa$ s'interprète comme un potentiel effectif contenant l'effet de la courbure et de la dynamique cosmique. Le raisonnement WKB, et les remarques concomitantes, proposés dans le cadre des perturbations scalaires s'appliquent donc de façon identique au cas des ondes gravitationnelles.

Notons que pour le cas spécifique d'un Univers plat, $\kappa = 0$, il existe une solution intégrale, quoiqu'implicite, à l'équation différentielle ci-dessus :

$$u_T(\eta) = a(\eta) \left[A_k + B_k \int^\eta \frac{d\eta'}{a^2(\eta')} + k^2 \int^\eta \frac{d\eta'}{a^2(\eta')} \int^{\eta'} d\eta'' a^2(\eta'') u_T(\eta'') \right]. \quad (1.35)$$

Dans la limite des très grandes longueurs d'onde (ou de façon équivalente dans la limite d'un très grand potentiel), $k \rightarrow 0$ et le dernier terme est négligeable. Ainsi, la solution à grande longueur d'onde est

$$u_T(\eta) = A_k a(\eta) + B_k a(\eta) \int^\eta \frac{d\eta'}{a^2(\eta')}.$$

Dans un univers en expansion, le premier des deux termes correspond au mode croissant de la description WKB pour $k^2 < V_T$ tandis que le deuxième terme est le mode décroissant.

1.2.3 Modes super-Hubble et sub-Hubble et modes oscillants et gelés

La discussion précédente concernant la dynamique des modes scalaires et des modes tenseurs montre que l'on peut essentiellement distinguer deux régimes. Le premier régime est un régime oscillant pour lequel la solution est oscillante et l'amplitude des modes ne varient pas ou peu. Le second régime est un régime amplificateur pour lequel la solution est la combinaison linéaire d'une exponentielle croissante et d'une exponentielle décroissante. Dans ce régime, l'amplitude des modes peut croître. Ce raisonnement se base sur une analogie formelle avec l'équation de Schrödinger. Il est donc tout à fait légitime d'importer les raisonnements de la mécanique quantique dans ce cadre. Pour effectuer des raisonnements intuitif sur la dynamique des perturbations cosmologiques, il faut donc identifier clairement la dépendance temporelle du potentiel effectif. On peut alors distinguer deux types de modes :

- $k^2 > V_{T/S}$: le mode se comporte comme la superposition de deux ondes. On appellera ces modes des modes *oscillants*.

2. On notera que ce terme source s'écrit comme $\bar{S}_a = 8\pi G a^2 P \bar{\Pi}_a$ où P est la pression (isotrope) du fluide et $\bar{\Pi}_a$ la composante purement vecteur de la décomposition SVT des perturbations de pression anisotrope.

- $k^2 < V_{T/S}$: le mode se décompose suivant un mode croissant et un mode décroissant. Une amplification potentielle des perturbations est donc possible dans ce régime via le mode croissant. On les appellera des modes *gelés*.

Ce critère de classification des modes suit de près leur dynamique dans le sens où il est possible de conclure de façon univoque quant-à la forme générique de la solution (*e.g.* oscillante ou croissante) par une simple comparaison de k à $V_{T/S}$.

Il est possible de classer les modes suivant un deuxième critère. Ce critère consiste à comparer la longueur d'onde comobile des modes, donnée par $\lambda \sim 1/k$ à la distance de Hubble comobile $d_H(\eta) = a/a' = 1/(aH)$. On distingue de nouveau deux types de modes :

- $\lambda < d_H$: le mode est dit *sub-Hubble* dans le sens où sa longueur d'onde comobile est inférieure à la distance de Hubble comobile. En terme de nombre d'onde, cette condition se traduit par $k > aH$.
- $\lambda > d_H$: le mode est dit *super-Hubble* dans le sens où sa longueur d'onde comobile excède la distance de Hubble comobile. Cela se traduit par $k < aH$.

Il est usuel en cosmologie d'identifier les modes *oscillants* aux modes *sub-Hubble* et les modes *gelés* aux modes *super-Hubble*. Avec une telle identification, il est alors possible de conclure que *e.g.* si le mode est super-Hubble, il est potentiellement amplifié. Il faut toutefois se méfier de cette identification qui n'est pas toujours pertinente. Pour comprendre cela, considérons l'exemple des modes tenseurs pour lesquels $V_T = a''/a$ et deux types d'univers : i) un univers *A* en expansion exponentielle pour lequel $a(\eta) = -1/\eta$ avec $\eta \in]-\infty, 0]$ et ii) un univers *B* dominée par de la radiation pour lequel $a(\eta) = \eta$ avec $\eta \in [0, +\infty[$. L'univers *A* est en expansion accélérée tandis que l'univers *B* est, lui, en expansion décélérée. Pour chacun de ces univers, le potentiel effectif est donné par $V_T^{(A)} = 2/\eta^2$ et $V_T^{(B)} = 0$ tandis que la distance de Hubble comobile vaut $d_H^{(A)} = -\eta$ et $d_H^{(B)} = \eta$. On retrouve bien que dans un univers en expansion accélérée la distance de Hubble comobile *diminue* avec le temps alors que cette dernière *augmente* avec le temps pour un univers comme *B* en expansion décélérée. Passons donc en revue les critères de classification des modes pour chacun de ces univers :

- Univers *A* : Considérons un mode de vecteur d'onde k . Le potentiel croît monotoniquement avec le temps. Ainsi, à un instant quelconque η , le mode est oscillant si $k > -\sqrt{2}/\eta$ et il est gelé si $k < -\sqrt{2}/\eta$. D'un point de vue plus dynamique, le mode est d'abord oscillant pour les temps tels que $\eta < -\sqrt{2}/k$ et deviendra ensuite un mode gelé pour les temps tels que $\eta > -\sqrt{2}/k$. Pour un nombre d'onde donné, la traversée du potentiel se fera à $\eta_{V_T}(k) = -\sqrt{2}/k$. De même, la distance de Hubble comobile décroît monotoniquement. A un instant quelconque, le mode est alors sub-Hubble si $k > -1/\eta$ et super-Hubble si $k < -1/\eta$. D'un point de vue dynamique, le mode de vecteur d'onde k sera donc d'abord super-Hubble pour les temps tels que $\eta < -1/k$ pour ensuite devenir sub-Hubble pour les temps tels que $\eta > -1/k$. La traversée de la distance de Hubble comobile a alors lieu au temps $\eta_{d_H} = -1/k$. Ici, à un facteur $\sqrt{2}$ près, il est donc tout à fait légitime pour mener des raisonnements intuitifs d'identifier les modes sub-Hubble aux modes oscillants et les modes super-Hubble aux modes gelés.
- Univers *B* : Dans ce type d'univers, le potentiel effectif est toujours nul. Ainsi, les modes sont *toujours* des modes oscillants. Pourtant, puisque la distance de Hubble comobile croît monotoniquement avec le temps, un mode de vecteur d'onde donné k sera d'abord super-Hubble pour $\eta < 1/k$ pour ensuite devenir sub-Hubble pour les temps tels que $\eta > 1/k$.

L'exemple ci-dessus nous montre que s'il est pertinent d'associer « modes sub-Hubble » à « modes oscillants » ainsi que « modes super-Hubble » à « modes gelés » pour les phases d'expansion *accélérée*, il ne faut toutefois pas le faire dans les phases d'expansion *décélérée*. De façon générique, avant d'effectuer une telle identification, il faut s'assurer qu'il y a bien une correspondance légitime entre ces deux critères de classification des modes.

Chapitre 2

L'Univers primordial : inflation cosmique

Dans ce chapitre à venir, nous allons particulièrement abordé la phase d'inflation cosmique. Il s'agit d'une expansion accélérée de l'Univers dans les tout premiers instants de son histoire qui fournit, entre autre, un mécanisme de production des perturbations cosmologiques. Dans ce cadre et en vertu de la discussion précédente concernant la classification des modes propres des perturbations cosmologiques, nous utiliserons donc régulièrement la classification super-Hubble/sub-Hubble des modes, mais avec toujours comme arrière pensée que cette classification est pertinente d'un point de vue de l'évolution des modes car elle est identifiable à la classification oscillant/gelé.

2.1 Limites du « vieux » modèle de Big Bang

Si nous revenons à la fin des années soixante-dix, l'Univers en expansion était alors supposé rempli de deux types de constituants : la matière et le rayonnement, et la constante cosmologique était supposée de valeur nulle. Compte tenu de l'équation d'état de ces constituants, notre Univers était donc logiquement en expansion *décélérée* depuis la singularité initiale jusqu'à nos jours. Il était premièrement dans une phase de radiation dominante pour ensuite entrer dans une phase de matière dominante. Par ailleurs les mesures du rayonnement de fond diffus cosmologique, détecté depuis une quinzaine d'année, indiquaient que l'Univers était, quelque 380 000 ans après le Big Bang (soit un *redshift* de $z \simeq 1000$), extrêmement homogène et isotrope (les variations relative de l'intensité du fond diffus cosmologique sont de l'ordre de 10^{-5}) et ses sections spatiales de courbure nulle, *i.e.* $\kappa = 0$. Enfin, il était déjà évident que bien que l'Univers était très homogène au moment de la libération des photons du fond diffus cosmologique, il l'est beaucoup moins dans son histoire récente, comme en témoignent les galaxies et grandes structures cosmiques, et il subit donc une évolution structurante et non homogénéisante.

Or cet état de fait passé était paradoxal ! Il était concrètement impossible d'expliquer les observations du fond diffus cosmologique et la mesure du taux logarithmique d'expansion H_0 avec un Univers rempli des constituants standards : tension claire entre théorie et observation. Mentionnons donc ici trois problèmes majeurs de ce « vieux » modèle de Big Bang [7]. Pour simplifier la présentation de ces trois problèmes, nous considérons que la phase de matière dominante a débuté *bien avant* la libération du rayonnement de fond micro-onde. (Ce qui est effectivement le cas. Mais nous admettrons ce fait pour le moment !) Les différents calculs seront donc menés dans une phase de matière dominante uniquement : $a(t) = t^{2/3}$ (la normalisation importe peu ici car le raisonnement se base essentiellement sur des rapports du facteur d'échelle). Les résultats restent toutefois qualitativement valides si l'on ajoute la phase de radiation dominante.

Problème de l'horizon— Le problème de l'horizon touche à la structure causale de l'espace-temps « univers ». L'incroyable isotropie du fond diffus cosmologique montre qu'à un *redshift* d'environ 1000, soit $t_{\text{CMB}} = 380\,000$ ans après le Big Bang, l'Univers était essentiellement homogène. La distance maximale entre deux points présents sur cette sphère « de libération du fond diffus cosmologique » est de l'ordre de la distance comobile parcourue par les

photons fossil :

$$\Delta_\chi(t_{\text{CMB}}, t_0) = \int_{t_{\text{CMB}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = 3 \left[t_0^{1/3} - t_{\text{CMB}}^{1/3} \right].$$

Les mesures cosmologiques indiquent que $t_0 \sim 13.7 \times 10^9$ années : $t_0 \gg t_{\text{CMB}}$ et l'Univers était, 380 000 après le Big Bang, homogène sur des distance comobile de l'ordre de notre horizon cosmologique *aujourd'hui*. Le volume comobile d'Univers homogène est donc de l'ordre de $\Delta_\chi^3(t_{\text{CMB}}, t_0) \sim t_0$. Par ailleurs, l'horizon de particule à cette époque est donnée par l'horizon cosmologique passé *estimée* à t_{CMB} , soit ¹ :

$$\Delta_\chi(0, t_{\text{CMB}}) = \int_0^{t_{\text{CMB}}} \frac{dt}{a(t)} = 3t_{\text{CMB}}^{1/3}.$$

Ainsi, le volume comobile des zones causalement déconnectées² à $z \simeq 1000$ est de l'ordre de $\Delta_\chi^3(0, t_{\text{CMB}}) \sim t_{\text{CMB}}$. On en déduit qu'au moment de la libération des photons du fond diffus cosmologique, le volume comobile d'Univers *homogène* contient environ 3×10^4 cellules qui sont *causalement déconnectées*. Comment plus de 10 000 cellules causalement déconnectées peuvent avoir été homogénéisées ? Puisqu'aucun mécanisme physique *causal* – une considération évidemment légitime puisque l'homogénéisation nécessite interactions et échanges, et donc contact causal – ne peut être invoqué, ne resterait que le hasard ou un ajustement ultra-fin des conditions initiales !

De façon plus intuitive, on peut montrer que dans cet Univers rempli de matière et de radiation, l'horizon cosmologique comobile passé à un instant t est de l'ordre de la distance de Hubble comobile d_H . Puisque dans le cas où $t_0 \gg t_{\text{CMB}}$ le volume comobile d'Univers homogène à $z \simeq 1000$ est donné par l'horizon passé à t_0 , ce volume est de l'ordre de $d_H^3(t_0)$. De façon similaire, le volume comobile des zones causalement connectées est de l'ordre de $d_H^3(t_{\text{CMB}})$. Or dans un Univers en expansion décélérée – ce qui est nécessairement le cas avec de la matière et du rayonnement standard –, la distance de Hubble comobile *ne peut qu'augmenter*. Ainsi, $d_H^3(t_0)$ est nécessairement plus grand que $d_H^3(t_{\text{CMB}})$. Autrement dit, tant que $t_0 \gg t_{\text{CMB}}$ et que le fond diffus cosmologique est incroyablement isotrope, le problème de l'horizon est nécessairement présent dans un Univers continuellement en expansion décélérée !

Le nombre de *e-fold* entre t et $t' > t$ est défini comme

$$N(t, t') = \ln \left(\frac{a(t')}{a(t)} \right). \quad (2.1)$$

Il donne une mesure du facteur d'expansion de l'Univers entre deux instants. Lorsqu'évalué de t_{CMB} à aujourd'hui, il donne une première mesure de l'ampleur du problème de l'horizon. A l'aide des valeurs numériques de t_0 et t_{CMB} données précédemment et le *toy-model* ici considéré, le nombre de *e-fold* est de l'ordre de 10. Mais cela n'est que la partie émergée du problème. Notre Univers étant supposé en expansion décélérée continue, la taille des zones causalement connectées augmentent au cours de l'histoire cosmique. Autrement dit, si on remonte dans le passé avant l'émission du fond diffus cosmologique, ces zones sont encore plus petites et le problème de l'horizon ne fait qu'empirer ! En supposant que notre modèle classique puisse être extrapolé jusqu'à l'échelle de grande unification, il apparaît que l'horizon causale à cette époque (qui détermine la taille des cellules d'Univers causalement connectées et donc *homogénéisables*) est $\exp(60)$ fois plus petite que l'horizon causale aujourd'hui³, *i.e.* $d_{\text{homogene}} \sim \exp(60) \times d_{\text{causal}}(t_{\text{GUT}})$. Un nombre de *e-fold* de 60 serait donc la mesure appropriée de l'ampleur du problème de l'horizon.

1. On peut facilement s'assurer qu'en ajoutant une phase de radiation dominante s'étendant de $t = 0$ à $t = t_\gamma < t_{\text{CMB}}$, l'horizon cosmologique passée reste bien défini et de valeur fini puisque :

$$\Delta_\chi(0, t_{\text{CMB}}) = \int_0^{t_\gamma} \frac{dt}{a_\gamma(t)} + \int_{t_\gamma}^{t_{\text{CMB}}} \frac{dt}{a_{\text{matiere}}(t)}.$$

Puisque lors d'une phase de radiation dominante $a_\gamma(t) \propto \sqrt{t}$, la première des deux intégrales converge bien en $t = 0$ et est à valeur finie.

2. Nous rappelons que ce caractère causalement déconnecté prend bien ici en compte la cumulation sur toute l'histoire de l'Univers depuis la singularité initiale jusqu'au temps t auquel nous estimons l'horizon de particule.

3. On montre ce résultat de la façon suivante. La brisure de grande unification a lieu environ $t_{\text{GUT}} = 10^{-30}$ seconde après le Big Bang. En supposant en première approximation, un univers rempli de matière uniquement, le rapport entre l'horizon cosmologique aujourd'hui et celui à t_{GUT} est $(t_0/t_{\text{GUT}})^{1/3}$. Ce rapport mesurant le rapport entre la taille minimale d'Univers homogène sur la taille des zones causales à la brisure de grande unification, il se relie au nombre de *e-fold* via $N(t_{\text{GUT}}, t_0) \simeq 2 \ln(t_0/t_{\text{GUT}})^{1/3}$. On trouve alors $N(t_{\text{GUT}}, t_0) \sim 60$.

Considérons un univers rempli d'un fluide tel que $a(t) = t^p$ avec $0 < p < 1$, assurant un univers en expansion décélérée. La distance de Hubble comobile est donnée par

$$d_{\mathcal{H}}(t) = \frac{t^{1-p}}{p}.$$

tandis que la distance comobile entre t_i et t vaut

$$\Delta_{\mathcal{H}}(t_i, t) = \frac{t^{1-p} - t_i^{1-p}}{1-p}.$$

Dans un tel univers, les distance comobile parcourue par les photons sont donc simplement données par des différences entre les distances de Hubble comobiles estimées entre l'instant de reception et l'instant d'émission. Si nous sommes un observateur en t_0 observant le fond diffus cosmologique (homogène), libéré à $t_{\text{CMB}} < t_0$, nous pouvons déduire que l'Univers est homogène à t_{CMB} sur une distance comobile au minimum de l'ordre de :

$$d_{\text{homogene}}(t_{\text{CMB}}) \simeq \Delta_{\mathcal{H}}(t_{\text{CMB}}, t_0) = \frac{p}{1-p} \left[d_{\mathcal{H}}(t_0) - d_{\mathcal{H}}(t_{\text{CMB}}) \right].$$

Par ailleurs, les points causalement connectés à t_{CMB} sont nécessairement distant au maximum de

$$d_{\text{causal}}(t_{\text{CMB}}) \simeq \frac{p}{1-p} d_{\mathcal{H}}(t_{\text{CMB}}).$$

Le problème de l'horizon apparaît dès-que $d_{\text{homogene}}(t_{\text{CMB}}) > d_{\text{causal}}(t_{\text{CMB}})$. Autrement dit, dans un Univers continuellement en expansion décélérée et présentant un rayonnement de fond homogène, le problème de l'horizon émergera dès-que

$$d_{\mathcal{H}}(t_0) > 2 \times d_{\mathcal{H}}(t_{\text{CMB}}).$$

Il est possible de caractériser l'ampleur de ce problème à l'aide du nombre de *e-fold*. Il vaut, entre t_{CMB} et t_0 :

$$N(t_{\text{CMB}}, t_0) = p \ln \left(\frac{t_0}{t_{\text{CMB}}} \right) = \frac{p}{1-p} \ln \left(\frac{d_{\mathcal{H}}(t_0)}{d_{\mathcal{H}}(t_{\text{CMB}})} \right).$$

Dans le cas où $t_{\text{CMB}} \ll t_0$, nous avons $d_{\mathcal{H}}(t_0) \gg d_{\mathcal{H}}(t_{\text{CMB}})$. Ainsi, le rapport entre taille caractéristique de l'Univers *observationnellement* homogène à t_{CMB} et taille caractéristique des zones causalement connectées, toujours à t_{CMB} , s'exprime aisément en fonction du nombre de *e-fold* :

$$\frac{d_{\text{homogene}}(t_{\text{CMB}})}{d_{\text{causal}}(t_{\text{CMB}})} = \frac{d_{\mathcal{H}}(t_0)}{d_{\mathcal{H}}(t_{\text{CMB}})} = \exp \left[\frac{1-p}{p} \times N(t_{\text{CMB}}, t_0) \right].$$

Le rapport entre « taille d'homogénéité » et « taille des cellules causales » est directement relié au nombre de *e-fold* $N(t_{\text{CMB}}, t_0)$, c'est-à-dire (à un logarithme près) le facteur multiplicatif d'expansion de l'Univers de t_{CMB} à aujourd'hui.

Problème de la platitude— Le problème de la platitude traite de la géométrie des hypersurfaces à temps constant. En fonction des paramètres cosmologiques, la première équation de Friedmann s'écrit :

$$\Omega_{\kappa} = \Omega_{\text{tot}} - 1,$$

avec

$$\Omega_{\kappa} = \frac{\kappa}{a^2 H^2}.$$

Pour un Univers tel que $a(t) = t^p$ (avec $p = 1/2$ pour la phase de radiation et $p = 2/3$ pour la phase de matière), la « densité d'énergie normalisée » de la courbure des hypersurfaces varient comme $\Omega_{\kappa} \propto t^{2(1-p)}$. Puisque $p < 1$, l'amplitude de ce terme *ne peut qu'augmenter* au cours de l'histoire cosmique, à moins que κ ne soit de valeur *strictement nulle*. Si initialement l'Univers présente un niveau de courbure non nul (aussi petit soit il), il évoluera nécessairement vers un état de plus grande courbure spatiale. Plus précisément encore, un Univers avec $\Omega_{\kappa} = 0$ est instable puisque le moindre petit écart sera amplifié par l'expansion cosmique. Or nous observons qu'aujourd'hui, la densité d'énergie de courbure Ω_{κ} est pratiquement nulle, ce qui nécessite qu'initialement l'Univers était dans un état de courbure nulle quasi-parfait ! On montre en effet que pour que l'univers soit de courbure nulle aujourd'hui, aux incertitudes observationnelles près, il est nécessaire que Ω_{κ} au temps de Planck ne diffère pas de zéro à plus de 10^{-60} près. Le problème de la platitude est donc un problème d'ajustement fin de l'état primordial de l'Univers.

On notera que ce problème est inhérent à tout univers en expansion décélérée. En effet, $\Omega_{\kappa} = \kappa/(a^2 H^2) = \kappa/(\dot{a})^2$. Lors d'une expansion décélérée, $\dot{a}$ ne peut que diminuer et Ω_{κ} croît nécessairement. Le problème de la platitude est donc qualitativement manifeste dès-lors que l'univers construit est en expansion décélérée !

Problème des inhomogénéités— Les deux problèmes précédents traitent de la partie homogène de l'Univers. Ce dernier problème porte quant à lui sur la dimension inhomogène du cosmos. L'Univers récent est clairement structuré (rempli de galaxies et d'amas de galaxies) alors que l'Univers jeune (typiquement à t_{CMB}) est beaucoup plus homogène. Cette évolution vers la structuration peut se comprendre ainsi : les grandes structures de l'Univers ont cru, au cours de l'histoire de cosmique, par effondrement gravitationnel autour de très faibles inhomogénéités. Mais l'effondrement gravitationnel nécessite, de nouveau, le contact causal. L'échelle de longueur comobile caractéristique d'une perturbations vouée à effondrement gravitationnel est donné par la longueur des modes de Fourier : $\lambda \sim k^{-1}$. La distance causale est quant à elle quantifier par la distance de Hubble comobile : $d_{\mathcal{H}}(t) = t^{1-p}/p$. Cette dernière croît de 0 à $t = 0$ jusqu'à $d_{\mathcal{H}}(t_0)$ aujourd'hui tandis que la longueur d'onde comobile des perturbations est constante. L'effondrement gravitationnel à une longueur caractéristique λ ne débutera qu'à partir d'un temps précis dans l'histoire cosmique donné par $t_k = (p/k)^{1/(1-p)}$. Avant cet instant, la perturbation est nécessairement acausale. Sur cette base, on peut alors montré que si les perturbations se sont nécessairement formées à l'intérieur de l'horizon cosmologique, elles n'ont pas eu suffisamment de temps pour s'effondrer.

On pourrait toutefois invoquer un mécanisme permettant de former des graines initiales tôt dans l'histoire cosmique. Les scenarii envisagés à la fin des années soixante-dix se basaient sur l'apparition de défauts topologique concomitants aux transition de phase. Or ces modèles ne permettent non seulement pas d'expliquer la distribution des inhomogénéités cosmiques mais posent aussi de nombreux problèmes. Et particulier, l'essentiel de la masse de l'Univers serait contenu dans des défauts topologique de dimension nul, les *monopôles*.

Par ailleurs, l'apparition d'inhomogénéités primordiales d'une taille caractéristique supérieure à la distance de Hubble semble nécessaire. La cartographie précise du fond diffus cosmologique montre de très faible variation d'intensité, trace des perturbations cosmiques au moment de la recombinaison. Plus important encore, l'analyse des propriétés statistiques de ces anisotropies montrent une corrélation non nulle correspondant à des échelles de longueur *supérieures* à $d_{\mathcal{H}}(t_{\text{CMB}})$. Il existerait donc, au moment du découplage matière/rayonnement, des perturbations cosmiques plus grande que la distance de Hubble (évaluée à t_{CMB}).

2.2 Inflation cosmique

2.2.1 Résoudre les problèmes

Il est manifeste dans l'énonciation des trois problèmes précédents que le caractère *décéléré* de l'expansion joue un rôle clé, puisqu'il conduit nécessairement à un accroissement de la distance de Hubble comobile. Avant de montrer en quoi l'existence d'une phase d'expansion *accélérée* dans l'Univers primordial permet de résoudre ces problèmes, rappelons que la distance de Hubble comobile se définit comme

$$d_{\mathcal{H}}(t) = \left(\frac{a}{a'} \right) = \left(\frac{1}{\dot{a}} \right).$$

Ainsi, lors d'une phase d'expansion accélérée, la distance de Hubble comobile *diminue* au cours de cette expansion spécifique. Supposons maintenant qu'une telle phase ait bel et bien eu lieu lors des tout premiers instants de l'histoire cosmique, bien avant la phase d'égalité matière-radiation à t_{eq} , et examinons en quoi elle offre une solution aux problèmes ci-dessus. Nous appellerons t_i et $t_f \ll t_{\text{eq}}$ les instants initial et final de cette période. Une telle phase est dénotée *inflation*.

Problème de l'horizon— Pour résoudre le problème de l'horizon, il faut s'intéresser à l'horizon cosmologique comme mesure des zones causalement connectée qui, comme nous l'avons vu précédemment est bien approché par la distance de Hubble comobile. Notre but est de montrer que la taille des zones causalement connectées en début d'inflation (donnée par $d_{\mathcal{H}}(t_i)$) est supérieure ou égale à la taille typique de l'Univers homogène au moment de la libération des photons du fond diffus micro-onde (donnée par $d_{\mathcal{H}}(t_0)$). Pour avoir

$$\frac{d_{\mathcal{H}}(t_i)}{d_{\mathcal{H}}(t_0)} \geq 1,$$

on note que

$$\frac{d_{\mathcal{H}}(t_i)}{d_{\mathcal{H}}(t_0)} = \frac{d_{\mathcal{H}}(t_i)}{d_{\mathcal{H}}(t_f)} \times \frac{d_{\mathcal{H}}(t_f)}{d_{\mathcal{H}}(t_0)}.$$

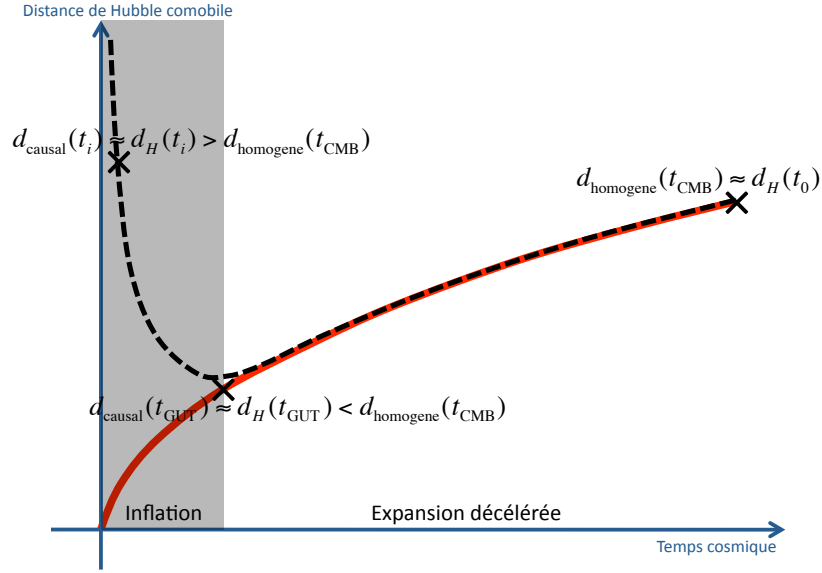


FIGURE 2.1 – Représentation schématique de l'évolution de la distance de Hubble comobile $d_{\mathcal{H}}$, en fonction du temps cosmique t pour un univers en expansion décélérée continue (courbe rouge), et pour un univers passant par une phase d'inflation avant d'entrer dans une période d'expansion décélérée (courbe noire). S'il est possible pour un univers *inflationnaire* que la distance de Hubble comobile soit au début plus grande qu'elle ne l'est aujourd'hui (résolvant ainsi le problème de l'horizon), tel n'est pas le cas d'un univers en expansion décélérée continue.

Entre t_f et t_0 , l'expansion est décélérée aboutissant à $\frac{d_{\mathcal{H}}(t_f)}{d_{\mathcal{H}}(t_0)} < 1$. (C'est l'essence même du problème de l'horizon.) Mais entre t_i et t_f , l'expansion est accélérée : la quantité $d_{\mathcal{H}}$ diminue et $\frac{d_{\mathcal{H}}(t_i)}{d_{\mathcal{H}}(t_f)} > 1$. Ce dernier terme peut donc compenser le premier et si

$$\frac{d_{\mathcal{H}}(t_i)}{d_{\mathcal{H}}(t_f)} > \left(\frac{d_{\mathcal{H}}(t_0)}{d_{\mathcal{H}}(t_f)} \right)^{-1},$$

on obtient bien

$$\frac{d_{\mathcal{H}}(t_i)}{d_{\mathcal{H}}(t_0)} \geq 1.$$

Le problème de l'horizon est bien résolu ! Ce point est schématiquement illustré sur la figure 2.1.

De façon qualitative, bien que la taille des zones causalement connectées *en fin d'inflation* est bien plus petites que la taille caractéristique de l'Univers homogénéisé au moment de la recombinaison, cette taille était bien plus grande en début d'inflation puisque cette dernière phase fait décroître la distance de Hubble comobile. Ainsi, l'ensemble de l'univers observable aujourd'hui était, grâce à l'inflation, bel et bien compris dans une unique cellule causale dans ses tout premiers instants. De façon quantitative, la phase d'inflation doit compenser les 60 *e-fold* d'expansion décélérée qui ont lieu à partir de t_f . Il est donc nécessaire, pour résoudre en pratique le problème de l'horizon, que l'inflation dure suffisamment longtemps pour que $N(t_i, t_f) \geq 60$.

Problème de la platitude— D'un point de vue mathématique, le problème de la platitude vient du fait que Ω_{κ} ne cesse d'augmenter lors d'une expansion décélérée. Or, puisque $\Omega_{\kappa} = \kappa/(\dot{a})^2$ et que $\dot{a}$ augmente durant l'inflation, il est évident que durant une phase d'expansion accélérée, la densité d'énergie de courbure va cette fois-ci *diminuer*. Il est ainsi possible de « diluer » la courbure pour obtenir $\Omega_{\kappa}(t_f) < \Omega_{\kappa}(t_i)$. Nous insistons ici sur le fait que seule une expansion accélérée offre cet effet de dilution de la courbure. De façon plus rigoureuse, l'inflation permet une augmentation (jusqu'à des valeurs arbitrairement élevées) du rayon de courbure des hypersurfaces spatiales mais n'annule pas *stricto sensu* la courbure.

Pour résoudre quantitativement le problème de la platitude, une dilution extrême de la courbure est nécessaire : $\Omega_{\kappa}(t_f) \sim 10^{-60}$. Il est alors possible de montrer qu'une phase d'inflation suffisamment longue pour que 60 *e-*

fold soient couverts permet d'obtenir une valeur aussi faible de la densité d'énergie associée à la courbure des hypersurfaces spatiales.

Problème des inhomogénéités— Le résolution du problème des inhomogénéités par l'inflation cosmique sera abordé en détail dans le chapitre suivant. Nous en donnons toutefois ici les gros traits afin de fixer les idées.

L'inflation résoud le problème des inhomogénéités car il est possible de produire des perturbations cosmologiques qui seront les graines primordiales nécessaire à la formation, ultérieure, des galaxies et grandes structures par effondrement gravitationnel, et cela avec les bonnes propriétés statistiques pour expliquer la distribution de matière dans l'Univers. Ce mécanisme consiste en une amplification des perturbations cosmiques. Prenons pour cela l'exemple des ondes gravitationnelles –les perturbations tenseurs– dans un Univers plat et dont la dynamique est régie par

$$u''_T + \left[k^2 - \frac{a''}{a} \right] u_T = 0.$$

Pour qu'il y ait amplification, il est nécessaire que $k^2 < a''/a$. Or durant l'inflation, le facteur d'échelle évolue pratiquement de manière exponentielle avec le temps cosmique. Si $a(t) \propto e^{Ht}$, on montre facilement que $a''/a \propto e^{2Ht}$. Le terme de type potentiel dans l'équation de Schrödinger ci-dessus croît très rapidement durant l'inflation et devient nécessairement supérieur à k^2 : l'amplification est alors possible –un mode exponentiellement croissant apparaît comme solution de l'équation d'évolution ci-dessus– et des ondes gravitationnelles primordiales sont alors « produites » durant l'inflation ! Le même type de raisonnement s'applique aux perturbations scalaires, produisant alors des inhomogénéités du potentiel gravitationnel Φ , auxquelles sont évidemment associées des inhomogénéités de densité. Il est important de réaliser que l'amplification ne peut avoir lieu dans un Univers en expansion décélérée. En effet, a'' est toujours négatif dans un tel Univers : la quantité $k^2 - a''/a$ est donc toujours à valeur positive et le mode croissant ne peut apparaître : il ne peut donc pas y avoir amplification des perturbations à partir de fluctuations extrêmement faible.

Si l'inflation permet d'amplifier les perturbations cosmologiques, encore faut-il une source de production. Comme il le sera expliqué dans la suite, les sources sont dans cette approche *les fluctuations quantiques du vide* dont l'amplitude est accrue, dont la taille *physique* initialement microscopique (voire *planckoscopique*) est étirée jusqu'à des valeurs astronomiques, et qui transitent d'un état virtuel à une état réel.

Par ailleurs, ce mécanisme est *acausal*. Durant l'inflation, la distance de Hubble comobile diminue et les perturbations cosmologiques, pour lesquelles la longueur d'onde comobile est constante, vont rapidement sortir de l'horizon. Ainsi, les inhomogénéités primordiales amplifiées durant l'inflation sont de plus *super-hubble*. C'est d'ailleurs lorsqu'elle deviennent *super-hubble* que les perturbations sont amplifiées ! Une fois l'inflation terminée, d_H se remet à croître et les perturbations cosmologiques entrent de nouveau dans l'horizon cosmologique, permettant donc *e.g.* des mécanismes d'effondrement gravitationnel, mais en ayant été au préalable amplifiées. Ces petites inhomogénéités cosmiques laissent évidemment leur empreinte sur le fond diffus cosmologique sous la forme d'anisotropie d'intensité. Toutefois, au moment du découplage matière/rayonnement, les perturbations aux plus grandes longueur d'onde ne sont toujours pas rentré dans l'horizon cosmologique à t_{CMB} , expliquant pourquoi on trouve dans le fond diffus cosmologiques, des anisotropies corrélées correspondant à des échelles de longueur supérieures à $d_H(t_{\text{CMB}})$.

Pour résumer, le vide quantique offre une source de perturbations tandis que l'inflation permet d'amplifier et étirer jusqu'à des échelles acausales cette source ! Et de façon étonnante, l'inflation qui fut initialement introduite pour résoudre le problème de l'horizon et de la platitude, offre une réponse aux problèmes des inhomogénéités.

2.2.2 L'inflation dans ses grandes lignes et l'approximation de roulement lent

L'idée de l'inflation consiste à générer une phase durant laquelle d_H diminue. On montre alors facilement que :

$$\frac{d}{dt}(d_H) < 0 \iff \ddot{a} > 0, \quad (2.2)$$

c'est-à-dire une expansion accélérée. Une phase d'expansion accélérée a lieu si l'équation d'état du fluide cosmique est $w < -1/3$. Une possibilité évidente pour obtenir une période d'inflation primordiale serait de considérer que dans les tout premiers instants de l'histoire de l'Univers, seule la constante cosmologique importe dans la dynamique. Toutefois, nous avons vu que la densité d'énergie associée à Λ n'est pas « diluée » par l'expansion et l'Univers serait alors *continuellement* en inflation. Ce qui n'est évidemment pas le cas !

Pour pouvoir construire un modèle d'Univers primordial contenant une phase d'inflation mais avec la possibilité de stopper cette phase, on fait usuellement appel à un champ scalaire. Considérons donc que le fluide cosmique primordial est dominé par un tel champ. Puisque

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + V(\varphi) \quad \text{et} \quad P_\varphi = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 - V(\varphi),$$

il est évident que $w_\varphi < -1/3$ si $(\dot{\varphi})^2 < V(\varphi)$. Un modèle d'inflation consistera alors à choisir un potentiel en forme de puits. En plaçant initialement le champ dans une configuration assurant $w_\varphi < -1/3$, la phase d'inflation pourra débuter. Cette phase durera tant que la condition $w_\varphi < -1/3$ est conservée au cours de l'évolution cosmique. Toutefois, le champ va tomber le long de son potentiel jusqu'à atteindre une configuration telle que $w_\varphi > -1/3$: l'Univers quitte alors sa période inflationnaire. Il s'agit ici d'une description qualitative de l'approche. D'un point de vue plus quantitatif, il faudra que le potentiel et/ou les conditions initiales choisis soient tels que l'inflation dure suffisamment longtemps pour que le nombre de *e-fold* durant cette période soit au minimum égal à 60 et ainsi résoudre en pratique les problèmes de l'horizon et de la platitude.

Pour étudier la dynamique inflationnaire en présence d'un champ scalaire, il est commode de reformuler les équations de Friedmann avec φ comme paramètre d'évolution. On obtient alors les équations suivantes (parfois appelées *équations de Hamilton-Jacobi*) :

$$H_{,\varphi} = \frac{dH}{d\varphi} = -4\pi G\dot{\varphi}, \quad (2.3)$$

et

$$(H_{,\varphi})^2 - 12\pi G H^2 = -32\pi^2 G^2 V(\varphi). \quad (2.4)$$

Une troisième équation s'avérera utile pour comprendre cette dynamique inflationnaire (elle se déduit de l'équation de Klein-Gordon et de la dérivée de la première équation de Friedmann) :

$$\dot{H} = -4\pi G (\dot{\varphi})^2, \quad (2.5)$$

signifiant que le paramètre de Hubble décroît nécessairement.

Dans ce schéma, construire un modèle d'inflation c'est choisir un potentiel. Il est toutefois possible de mener des prédictions sans connaître la forme exacte de ce potentiel en se basant sur un scénario dit de *roulement lent*, c'est-à-dire que le champ varie peu pendant la période d'expansion accélérée. On peut comprendre aisément que le roulement lent soit propice à l'inflation : si le champ scalaire évolue peu, $\dot{\varphi}$ est très petit et la condition $(\dot{\varphi})^2 < V(\varphi)$ est plus facilement satisfaite. On déduit par ailleurs de l'équation (2.5) que H est pratiquement constante et qu'ainsi $a(t) \simeq e^{Ht}$. Le régime de roulement lent se traduit par deux conditions :

$$(\dot{\varphi})^2 \ll V(\varphi) \quad \text{et} \quad \ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi}. \quad (2.6)$$

La première de ces contraintes permet de négliger le terme dynamique en $H_{,\varphi}$ dans l'équation (2.4). Ainsi :

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\varphi). \quad (2.7)$$

Cette condition est aussi nécessaire à ce que $\ddot{a} > 0$. Toutefois cela n'assure pas que la solution reste dynamiquement sur une trajectoire inflationnaire. En effet, pour que le champ scalaire évolue peu, il est nécessaire que $\dot{\varphi}$ soit petit et qu'il le reste. Autrement dit que $\ddot{\varphi}$ soit aussi petit. La deuxième contrainte permet justement cela et l'équation de Klein-Gordon se simplifie en :

$$3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} \simeq 0. \quad (2.8)$$

D'un autre point de vue, cette deuxième condition assure que $H_{,\varphi\varphi}$ — c'est-à-dire la dérivée du terme dynamique de l'équation (2.4) — est lui aussi très petit⁴. En d'autres termes, la première condition assure l'expansion accélérée tandis que la seconde permet à l'Univers de s'installer durablement sur une solution inflationnaire.

4. On montre facilement en dérivant l'équation (2.4) que

$$H_{,\varphi\varphi} - 12\pi G H = -\frac{4\pi G}{\dot{\varphi}} (\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}).$$

En négligeant $\ddot{\varphi}$ devant $3H\dot{\varphi}$, on obtient $H_{,\varphi\varphi} \simeq 0$.

Sous les hypothèses de roulement lent citées ci-dessous, la solution inflationnaire devient un attracteur [14]. On peut s'en convaincre de la manière suivante. Considérons une petite perturbations δH autour d'une solution *quelconque* $\bar{H}$. En linéarisant l'équation (2.4), on trouve que $\bar{H}_{,\varphi}\delta H_{,\varphi} = 12\pi G\bar{H}\delta H$ dont la solution est

$$\delta H(\varphi) = \delta H(\varphi_i) \exp \left(12\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi} \frac{\bar{H}}{\bar{H}_{,\varphi}} d\varphi \right). \quad (2.9)$$

Or l'équation (2.3) implique que $H_{,\varphi}$ et $d\varphi$ sont de signe opposé. L'intégrant est donc toujours négatif et on en déduit les perturbations linéaires sont effacées. Par ailleurs, en injectant l'équation (2.3) dans l'expression de δH , on trouve :

$$\delta H(\varphi) = \delta H(\varphi_i) \exp \left(-3 \left| \int_{t_i}^t \bar{H} dt \right| \right) = \delta H(\varphi_i) \exp (-3 |N(t_i, t)|). \quad (2.10)$$

Si l'Univers entre dans une phase d'inflation, le nombre d'*e-fold* évolue linéairement et toute perturbation linéaire sera exponentiellement supprimée : toutes les solutions inflationnaires convergeront donc vers une trajectoire commune. Par ailleurs, la solution de l'équation (2.3) dépend du choix de la valeur initiale de H pour une valeur initiale de φ . Pour que l'inflation soit prédictive, il est nécessaire que la solution $H(\varphi)$ évolue rapidement vers une solution indépendante de ce choix initial. Or $\delta H(\varphi_i)$ représente précisément un choix de condition initiale différent en φ_i . Puisque $\delta H(\varphi)$ tend exponentiellement rapidement vers 0, le choix de la condition initiale est extrêmement rapidement effacé.

Les conditions de roulements lents sont usuellement décrites à l'aide des *paramètres* de roulements lents [15]. Il existe plusieurs manières de définir ces paramètres et nous les listons ici :

– définition selon le potentiel :

$$\epsilon_V = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2 \quad \text{et} \quad \delta_V = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V_{,\varphi,\varphi}}{V} \right). \quad (2.11)$$

– définition selon le champs :

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{(\dot{\varphi})^2/2}{(\dot{\varphi})^2/2 + V} \quad \text{et} \quad \delta_{\varphi} = -\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}}. \quad (2.12)$$

– définition selon le paramètre de Hubble :

$$\epsilon_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{H_{,\varphi}}{H} \right)^2 = -\frac{(\ln H)_{,t}}{H} \quad \text{et} \quad \delta_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{H_{,\varphi,\varphi}}{H} \right) = \epsilon_H - \frac{(\ln \epsilon_H)_{,t}}{2H}. \quad (2.13)$$

Les conditions de roulement lents se traduisent par $\epsilon_i \ll 1$ et $\delta_i \ll 1$. Par ailleurs, $w_{\varphi} = -1 + 2\epsilon_H/3$ et $\ddot{a} > 0$ s'obtient si $\epsilon_H < 1$. Le premier jeu de ces paramètres révèle que les conditions de roulement nécessite un potentiel extrêmement plat. Toutefois, ce jeu de paramètres n'assure pas nécessairement la condition $\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi}$ qui doit donc être ajoutée. Les deux autres jeux de paramètres de roulement lent assure quant-à eux que les deux conditions de roulement lent citées précédemment soient satisfaites. Ces différents jeux de paramètres peuvent être reliés les uns aux autres par [15] :

$$\epsilon_H = 3\epsilon_{\varphi} \quad \text{et} \quad \delta_H = 3\delta_{\varphi}, \quad (2.14)$$

$$\epsilon_V = \epsilon_H \left(\frac{3 - \delta_H}{3 - \epsilon_H} \right)^2 \quad \text{et} \quad \delta_V = \sqrt{\frac{\epsilon_H}{4\pi G}} \frac{\eta'_H}{3 - \epsilon_H} + \left(\frac{3 - \delta_H}{3 - \epsilon_H} \right) (\epsilon_H + \delta_H). \quad (2.15)$$

Il est possible, à partir d'un développement limité suivant les paramètres de roulement lent, de déterminer des solutions inflationnaires analytiques approchées [15]. Nous n'aborderons pas ce point ici mais mentionnons tout de même que le nombre de *e-fold* durant l'inflation se déduit directement de la forme explicite du potentiel choisi :

$$N(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt = \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{H(\varphi)}{\dot{\varphi}} d\varphi = -4\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{H(\varphi)}{H_{,\varphi}} d\varphi = -\sqrt{4\pi G} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{d\varphi}{\sqrt{\epsilon_H(\varphi)}}. \quad (2.16)$$

Le paramètre ϵ_H peut s'écrire formellement comme un développement de Taylor en fonction des paramètres de roulement lent ϵ_V , δ_V etc. En se limitant au premier ordre, on trouve $\epsilon_H = \epsilon_V$. Ainsi

$$N(t_i, t_f) = -8\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \left(\frac{V}{V_{,\varphi}} \right) d\varphi. \quad (2.17)$$

Pour un potentiel polynomial $V(\varphi) = \lambda\varphi^\alpha$, le nombre de e -fold est alors $N(t_i, t_f) = 4\pi G(\varphi_i^2 - \varphi_f^2)/\alpha$ et les 60 e -fold sont atteints si $\varphi_i^2 - \varphi_f^2 \sim 60\alpha/4\pi G$. Puisque φ_f^2 est nécessairement positif ou nul, on obtient une limite inférieure sur la valeur initiale du champ :

$$\varphi_i \geq 2.1\sqrt{\alpha} \times M_{\text{Pl}}. \quad (2.18)$$

Ce dernier résultat souligne un point délicat inhérent à l'inflation. Puisque $\alpha \geq 1$, la valeur initiale du champ est nécessairement *transplanckienne* et il devient légitime de s'interroger sur la validité des raisonnements ci-dessus dans la mesure où la physique transplanckienne n'est pas encore connue. De façon plus générique, s'il est évident qu'une phase d'inflation primordiale résout l'essentiel des difficultés des « vieux » modèle de Big Bang, il n'existe toujours pas un mécanisme univoque et entièrement satisfaisant pour initier une telle phase.

Dans cette approximation de roulement, il est possible de déterminer l'évolution du facteur d'échelle en fonction du paramètre ϵ_H . On notera tout d'abord que, par définition du temps conforme :

$$\eta = \int \frac{dt}{a} = \int \frac{da}{a \times \dot{a}} = \int \frac{da}{aH}.$$

Nous pouvons alors effectuer une intégration par partie qui permettra *in fine* d'exprimer le temps conforme en fonction du premier paramètre de roulement lent ϵ_H :

$$\eta = - \int \frac{da^{-1}}{H} = - \frac{1}{aH} + \int \frac{dH^{-1}}{a} = - \frac{1}{aH} - \int \frac{dH}{aH^2}.$$

En notant que $dH = \dot{H} \times (\dot{a})^{-1} \times da$ et que, par définition, $\epsilon_H = -\dot{H}/H^2$, nous obtenons l'équation

$$\eta = - \frac{1}{aH} + \int \frac{\epsilon_H}{a^2 H} da. \quad (2.19)$$

Cette équation est *exacte* et ne présuppose en aucun cas l'approximation de roulement lent, la quantité ϵ_H devant ici être considérée comme une variable dépendant du temps sans aucune approximation quant à cette dépendance. Il ne s'agit que d'un jeu d'écriture qui découle des définitions du temps conforme, du paramètre de Hubble et de ϵ_H . Ce jeu d'écriture devient toutefois pertinent lorsque que l'on implémente l'approximation de roulement lent. En supposant que $\epsilon_H \ll 1$ et ne dépend pas du temps, l'équation ci-dessus conduit à

$$\begin{aligned} \eta = - \frac{1}{aH} + \int \frac{\epsilon_H}{a^2 H} da &\Rightarrow \eta \simeq - \frac{1}{aH} + \epsilon_H \int \frac{da}{a \times \dot{a}} \\ &\Rightarrow \eta \simeq - \frac{1}{aH} + \epsilon_H \underbrace{\int \frac{dt}{a}}_{=\eta} \\ &\Rightarrow aH \simeq - \frac{1 + \epsilon_H}{\eta}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La fonction aH est nécessairement positive dans un univers en expansion et $\epsilon_H \ll 1$. Ainsi, il est nécessaire que le temps conforme soit à valeur négative ! Par ailleurs, comme $aH = \dot{a}$, une phase inflationnaire (*i.e.* $\ddot{a} > 0$) implique que aH augmente. Ainsi, η va nécessairement varier dans la 'direction' $(-\infty) \rightarrow 0$. Puisque $aH = \mathcal{H} = a'/a$, on déduit aisément l'expression du facteur d'échelle en fonction du temps conforme dans l'approximation de roulement lent :

$$a(\eta) = a_\star \left| \frac{\eta_\star}{\eta} \right|^{1+\epsilon_H}, \quad (2.21)$$

où $a_\star$ est la valeur du facteur d'échelle à un instant pivot $\eta_\star$ durant l'inflation. On se rappellera alors que dans l'approximation de roulement lent, le paramètre de Hubble est proportionnelle (à l'ordre 0) à la valeur de l'énergie potentiel du champ scalaire. Si choisir un modèle d'inflation c'est choisir un potentiel d'auto-interaction pour le champ scalaire, le paramètre physique pertinent est donc $V(\varphi)$ ou, alternativement, H . Ce paramètre est, nous semble-t-il, doublement pertinent. Il est pertinent du point de vue du modèle microphysique, c'est-à-dire du potentiel $V(\varphi)$, et du point de vue de la dynamique cosmique car H fournit le taux d'expansion de l'Univers durant l'inflation. Nous allons donc exprimer le facteur d'échelle en fonction du paramètre de Hubble. On montre facilement que

$$H(\eta) = \frac{1 + \epsilon_H}{a_\star |\eta_\star|^{1+\epsilon_H}} \times |\eta|^{\epsilon_H} = H_\star \left(\frac{\eta}{\eta_\star} \right)^{\epsilon_H},$$

avec $H_\star = (1 + \epsilon_H)/(a_\star |\eta_\star|^{1+\epsilon_H})$. Nous obtenons donc le facteur d'échelle en fonction du paramètre de Hubble, évalué à un temps $\eta_\star$ durant l'inflation :

$$a(\eta) = (1 + \epsilon_H)H_\star^{-1} \times |\eta|^{-1-\epsilon_H}. \quad (2.22)$$

On peut facilement se convaincre que cette évolution est quasiment exponentielle. Rappelons tout d'abord qu'une évolution purement exponentielle est donnée par

$$a(t) = a_\star e^{H(t-t_\star)} \implies a(\eta) = -\frac{1}{H\eta},$$

avec $H = \text{constante}$. Puisque $\epsilon_H \ll 1$, il évident qu'à l'ordre dominant dans l'approximation de roulement lent

$$a(\eta) = -\frac{1}{H_\star \eta} + \mathcal{O}(\epsilon_H),$$

avec $H = H_\star + \mathcal{O}(\epsilon_H) = \text{constante} + \mathcal{O}(\epsilon_H)$.

2.2.3 Deux modèles concrets pour fixer les idées

Univers de de Sitter— Une première modélisation très simple d'un Univers en expansion consiste à considérer que durant l'inflation, l'Univers est bien décrit par l'espace de de Sitter. Ce dernier peut être vu comme un hyperboloïde de dimension 4 plongé dans un espace minkowskien de dimension 5. L'espace de de Sitter est maximalement symétrique mais de courbure non nulle : $R = 12H^2$ où H est une constante. En effectuant un feuilletage dit euclidien de cet espace, la métrique prend la forme d'une métrique de Robertson-Walker avec $\kappa = 0$:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} \delta_{ab} dx^a dx^b. \quad (2.23)$$

On interprète alors t comme le temps cosmique et le facteur d'échelle est alors $a(t) = \exp(Ht)$. On peut facilement noter qu'un tel univers est bien en expansion accélérée puisque $\ddot{a} = H^2 \exp(Ht)$ est positif. Le paramètre H s'interprète comme le paramètre de Hubble, qui est donc constant dans un tel univers.

En temps conforme, cela aboutit à

$$ds^2 = \frac{1}{(H\eta)^2} [d\eta^2 - \delta_{ab} dx^a dx^b], \quad (2.24)$$

avec

$$\eta = -\frac{e^{-Ht}}{H}. \quad (2.25)$$

Dans cette modélisation de l'inflation, le temps conforme varie de $-\infty$ en début d'inflation à 0 en fin d'inflation et $a(\eta) = -1/H\eta$.

Champs scalaire massif— Pour fixer les idées concernant l'inflation générée par un champ scalaire, considérons l'exemple simple d'un champ scalaire massif : $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$. Par ailleurs, nous allons mener les calculs à l'ordre zéro en paramètre de roulement lent. Les équations dynamiques sont alors :

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\varphi), \quad (2.26)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{V_{,\varphi}}{3H}. \quad (2.27)$$

Pour qu'il y ait expansion accélérée, il est nécessaire d'avoir $(\dot{\varphi})^2 < V(\varphi)$. A partir des deux équations dynamiques simplifiées, cette condition se traduit par $V_{,\varphi}^2 < 24\pi G V^2(\varphi)$. Pour un champ massif, il est donc nécessaire d'avoir comme condition initiale $|\varphi| > 1/\sqrt{6\pi G}$, ce qui, en unité de Planck, donne $|\varphi| > 0.23 \times M_{\text{Pl}}$.

Pour obtenir la dynamique complète, il nous faut résoudre les équations

$$H^2 \simeq \frac{4\pi G}{3} m^2 \varphi^2, \quad (2.28)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{m^2 \varphi}{3H}, \quad (2.29)$$

dont les solutions sont

$$\varphi(t) = \varphi_i - \frac{m}{\sqrt{12\pi G}} t, \quad (2.30)$$

$$a(t) = a_i \exp \left[\sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m \left(\varphi_i t - \frac{m}{\sqrt{48\pi G}} t^2 \right) \right]. \quad (2.31)$$

Nous avons ici fixer $t_i = 0$. Le champ scalaire décroît avec le temps tandis que le facteur d'échelle croît exponentiellement. Pour s'assurer que les 60 *e-fold* sont bel et bien atteints, il est commode d'exprimer le facteur d'échelle en fonction du champ scalaire (gardant à l'esprit que le champ scalaire diminue linéairement avec le temps cosmique) :

$$a(\varphi) = a_i \exp [2\pi G (\varphi_i^2 - \varphi^2)]. \quad (2.32)$$

Le nombre de *e-fold* est alors $N(t_i, t_f) = 2\pi G (\varphi_i^2 - \varphi_f^2)$. (On peut facilement vérifier que la même expression pour le nombre d'*e-fold* se déduit de l'équation (2.17).) Pour obtenir les soixante *e-fold*, il faut alors $\varphi_i \sim \sqrt{\frac{60}{2\pi G} + \varphi_f^2}$. L'expansion accélérée cessant aux alentours de $\varphi \sim 0.23 \times M_{\text{Pl}}$, on peut choisir φ_f de l'ordre de cette dernière valeur. On trouve alors la contrainte suivante sur la condition initiale que doit satisfaire φ pour que l'inflation soit suffisamment longue et ainsi résoudre les problèmes de l'horizon et de la platitude :

$$\varphi_i \geq 3.1 \times M_{\text{Pl}}. \quad (2.33)$$

Pour mesurer l'ampleur du phénomène inflationnaire, considérons une masse du champ scalaire allant de $10^{-9} M_{\text{Pl}}$ à $10^{-6} M_{\text{Pl}}$. Nous considérerons de plus que $\varphi_i \sim 3.1 \times M_{\text{Pl}}$. On peut s'intéresser dans un premier temps à la densité d'énergie du champ qui, dominée par le potentiel d'auto-interaction, est alors initialement de l'ordre de $\rho_i \sim 4.5 \times m^2 \times M_{\text{Pl}}^2$. La densité d'énergie en début d'inflation varie de $\rho_i \sim 4.5 \times 10^{-18} M_{\text{Pl}}^4 = 9.3 \times 10^{58} \text{ GeV}^4$ à $\rho_i \sim 4.5 \times 10^{-12} M_{\text{Pl}}^4 = 9.3 \times 10^{64} \text{ GeV}^4$. Dans un deuxième temps, on peut s'intéresser à la durée de l'inflation. En imposant que l'Univers quitte sa trajectoire inflationnaire une fois les soixante *e-fold* atteints, la durée de l'inflation est alors $(t_f - t_i) \sim 3.1 \times \sqrt{12\pi}/m$. La durée de l'inflation variera de $(t_f - t_i) \sim 9.8 \times 10^{-37} \text{ s}$ pour $m = 10^{-6} M_{\text{Pl}}$ à $(t_f - t_i) \sim 9.8 \times 10^{-34} \text{ s}$ pour $m = 10^{-9} M_{\text{Pl}}$. Finalement, on peut caractériser l'inflation par son échelle d'énergie E_{inf} . Cette dernière est simplement donnée par le paramètre de Hubble initial⁵ : $H_i \sim 6.3 \times m$. Pour les valeurs considérées de la masse du champ, l'échelle d'énergie de l'inflation varie de $E_{\text{inf}} \sim 7.5 \times 10^{10} \text{ GeV}$ pour $m = 10^{-9} M_{\text{Pl}}$ à $E_{\text{inf}} \sim 7.5 \times 10^{13} \text{ GeV}$ pour $m = 10^{-6} M_{\text{Pl}}$. Ces valeurs numériques parlent d'elles-mêmes. L'inflation est tout d'abord une phase extrêmement brève : en 10^{-35} s , l'Univers est étiré d'un facteur e^{60} ! Ce qui est grossièrement le même facteur d'étirement de l'Univers durant les quelques 13.7 milliards d'années qui suivent l'ère d'inflation. Deuxièmement, l'inflation est un phénomène de ultra haute énergie, convoquant donc la physique des particules élémentaires, la théorie des champs, voir des idées de gravité quantique !

Autres modèles— Nous avons volontairement ici limité notre discussion au cas des modèles d'inflation dit les plus simples. Tout d'abord, la valeur du modèle basé sur l'univers dS est heuristique et non réaliste. En effet, dans un univers dS, la sortie d'inflation n'est pas faisable, or l'inflation n'est qu'une étape de l'histoire cosmique et non toute son histoire. Le modèle à un champ dans les conditions de roulement lent constitue la classe de modèle le plus simple dans le sens où seul un champ, qui plus est scalaire, est ajouté. Il s'avère en plus être particulièrement prédictif. Cette classe de modèles souffre toutefois de certains problèmes de naturalité, mentionné dans la suite de ce mémoire. Pour pallier cela, des modèles à deux champs ont alors été proposés et une discrimination entre les modèles à plusieurs champs et ceux à un champ est possible sur la base de la non-gaussianité des perturbations produites ou de leur nature adiabatique/isocourbe. Nous ne souhaitons ici entrer dans les détails des différents scénarios inflationnaires mais il ne faut pas non plus perdre de vue que :

- si les modèles à un champ sont les plus simples, ils souffrent encore de certains problèmes de naturalités,
- les modèles d'inflation ne se réduisent donc pas aux modèles à un champ.

Nous nous focalisons donc ici sur les modèles à un champ pour les raisons suivantes :

- ils ont une valeur 'pédagogiques' car ils sont les plus simples et tout en gardant un fort pouvoir prédictif : ils sont donc une entrée en matière idéale pour l'inflation.

5. On peut facilement se convaincre qu'en unité naturelle, la paramètre de Hubble est bien homogène à une énergie. Par ailleurs, l'étude des perturbations cosmologiques durant l'inflation montre que la puissance des modes tenseur est directement proportionnelle au carré de cette quantité qui apparaît comme une caractéristique potentiellement observable de l'inflation.

- Ce type de modèles n'est pas exclu par les données actuelles (qui toutefois ne discrimine encore que très partiellement entre différents modèles à un champ). Autrement dit, la classe de modèles les plus simples suffit à expliquer les données cosmologiques.
- Comme nous le montrerons dans la suite, le problème de naturalité de l'inflation dans les modèles à un champ peut être résolu dans le cadre de la cosmologie quantique à boucle, initialement introduite pour résoudre le problème de la singularité de Big Bang.

2.3 Inhomogénéités primordiales

Un des points essentiels de l'inflation cosmique concerne la génération de perturbations cosmologiques primordiales. Ce dernier phénomène est intéressant à plus d'un titre. D'un point de vue observationnel tout d'abord, les perturbations cosmologiques produites durant cette phase d'expansion accélérée possèdent les « bonnes » propriétés statistiques pour expliquer les observations actuelles des anisotropies du fond diffus cosmologique et de la distribution de matière dans l'Univers. (Comme nous le verrons ultérieurement, le spectre de puissance primordial du mode scalaire est quasi-invariant d'échelle.) De plus, les détails microphysiques précis du mécanisme d'inflation comme *e.g.* la forme du potentiel, laissent leur empreinte sur les propriétés statistiques des inhomogénéités primordiales. Il est alors possible, du moins en principe, de « reconstruire » le processus inflationnaire à partir des observations [16].

D'un point de vue plus théorique, obtenir les bonnes propriétés statistiques –c'est-à-dire un spectre de puissance quasi-invariant d'échelle– est relativement générique dans le sens où le formalisme de roulement lent, indépendamment de la forme précise du potentiel, conduit à une telle forme du spectre⁶. Ce sont toutefois les faibles écarts à l'invariance d'échelle qui déterminent partiellement les détails microphysiques du potentiel. Par ailleurs, ce mécanisme consiste en une amplification gravitationnelle des fluctuations quantiques du vide : l'origine des perturbations cosmiques et donc, de façon quelque peu raccourcie, des galaxies et grandes structures seraient les fluctuations quantiques qui durant l'inflation ont transité d'un état virtuel vers un état réel. Ce processus, identique au phénomène d'évaporation des trous noirs, n'est pas seulement digne d'intérêt cosmologique. Il interroge aussi la physique fondamentale comme une possible voie d'attaque de la quantification en espace-temps courbe !

2.3.1 Action perturbée

Pour déterminer l'évolution des perturbations cosmologiques durant l'inflation, nous devons utiliser les équations déterminées précédemment. Il est aussi possible de développer l'action jusqu'au deuxième ordre en perturbations pour ensuite dériver les équations du mouvement à l'aide du principe de moindre action. Cette deuxième, développée dans les références [10], est strictement équivalente à la première. Elle permet toutefois une lecture plus claire de la théorie sous-jacente, en particulier en vue de la quantification des perturbations. De façon formelle, l'action perturbée s'écrit :

$$S[g_{\mu\nu}, \varphi] = S^{(0)}[\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle] + \delta^{(2)} S_{(\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle)}[\delta g_{\mu\nu}, \delta \varphi].$$

Le terme du premier ordre peut facilement être omis car il tombera nécessairement à zéro en vertu du principe de moindre action imposant que la trajectoire du fond est telle que $\delta^{(1)} S = 0$ [10]. L'ordre zéro est simplement donné par la somme de l'action d'Einstein-Hilbert et de l'action d'un champ scalaire minimalement couplé à la gravité, pris sur la trajectoire du fond $(\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle)$:

$$S^{(0)} = \frac{1}{4\pi G} \int d^4x \sqrt{-\langle g \rangle} \left\{ \langle R \rangle + \frac{1}{2} \langle g^{\mu\nu} \rangle \partial_\mu \langle \varphi \rangle \partial_\nu \langle \varphi \rangle - V(\langle \varphi \rangle) \right\}. \quad (2.34)$$

Le calcul de la perturbation au deuxième ordre est long et technique [10] et nous ne fournirons ici que le résultat final. Avant cela, notons que nous ne considérerons pas ici les perturbations vecteurs. Comme il l'a été mentionné précédemment, il n'a aucun degrés de liberté physique de type vecteur lorsque les constituants de l'Univers ne possèdent aucune perturbations vecteurs. Or tel est le cas pour un champ scalaire et il n'y aura donc aucune perturbations vecteurs durant l'inflation. De plus, un champ scalaire ne fournit aucune source vecteur alimentant ce mode

6. Ce caractère générique de la prédiction inflationnaire doit évidemment être temporisé dans la mesure où l'on se limite à une unique classe de modèle. D'un certain point de vue, ces modèles à un champ scalaire constitue au moins l'approche phénoménologique la plus simple. Mais d'un autre point de vue, ils manquent de justifications microphysiques et nécessitent pour la plupart quelques ajustements fins ou des conditions initiales transplanckiennes.

durant l'inflation. On peut donc le considérer comme négligeable. En se limitant aux modes scalaires et tenseurs, l'action perturbée au deuxième ordre est, dans un Univers plat :

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} S_{(\langle g_{\mu\nu} \rangle, \langle \varphi \rangle)} &= \underbrace{\frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left\{ (v'_S)^2 - \delta^{ab} \partial_a v_S \partial_b v_S + \frac{z''}{z} v_S^2 \right\}}_{\text{Scalaire}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2} \sum_s \int d\eta d^3x \left\{ (v'_{s,T})^2 - \delta^{ab} \partial_a v_{s,T} \partial_b v_{s,T} + \frac{a''}{a} v_{s,T}^2 \right\}}_{\text{Tenseur}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pour la composante scalaire, les quantités v_S et z représentent respectivement l'unique degré de liberté scalaire et l'effet de l'expansion cosmique sur ce degré de liberté. Il s'exprime comme

$$z \equiv \frac{a\varphi'}{\mathcal{H}} = \frac{a\dot{\varphi}}{H}, \quad (2.36)$$

$$v_S \equiv -z\mathcal{R} = a\chi + \left(\frac{a\varphi'}{\mathcal{H}} \right) \Psi, \quad (2.37)$$

où v_S , souvent appelé variable de Mukhanov-Sasaki, est bien invariante de jauge. Pour la composante tenseur, l'indice s correspond aux 2 degrés d'hélicité des ondes gravitationnelles. La variable $v_{s,T}$ est elle aussi invariante de jauge et diffère de u_T par sa normalisation :

$$v_{s,T} = \frac{a(\eta) \bar{E}_s}{\sqrt{32\pi G}} = \frac{u_T}{\sqrt{32\pi G}}. \quad (2.38)$$

Que ce soit pour les modes scalaires ou tenseurs, l'action au deuxième ordre prend une forme identique à l'action d'un champ scalaire se propageant dans un espace de Minkowski mais possédant une masse *dépendant du temps*. On pourra donc utiliser les techniques de théorie des champs en espace de Minkowski pour étudier ces perturbations.

2.3.2 Spectres de puissance primordiaux : définition

Le cadre standard pour la production d'inhomogénéités primordiales durant l'inflation est un cadre stochastique. En effet, notre modèle d'Univers consiste en un espace-temps *statistiquement* homogène et isotrope. Pour satisfaire à cela, les perturbations cosmologiques doivent être envisagées comme la réalisation d'un processus stochastique sous contrainte d'isotropie statistique. Le schéma standard est donc le suivant : des perturbations issues d'une source stochastique sont amplifiées par l'expansion exponentielle de l'Univers primordial. Les variables $v_{S(T)}$ sont donc des champs stochastiques homogènes et isotropes et ce que l'on prédit quant aux inhomogénéités primordiales sont leurs *propriétés statistiques*.

De façon très génériques, la statistique des perturbations est entièrement connue si l'on est en mesure de déterminer tous les moments de sa distribution, c'est-à-dire si l'on est capable de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$M_v^{(n)} \equiv \langle v(\eta_f, x_1^a) \cdots v(\eta_f, x_n^a) \rangle$$

à partir des propriétés statistiques de la source. La notation $\langle \cdot \rangle$ est à comprendre ici comme une moyenne d'ensemble. D'un point de vue dynamique, les perturbations sont plus facilement décrites dans la base de Fourier. Les moments se récrivent alors :

$$M_v^{(n)} \equiv \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{3/2}} \cdots \int \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^{3/2}} \langle v_{k_1^a}(\eta_f) \cdots v_{k_n^a}(\eta_f) \rangle f_{k_1^a}(x_1^b) \cdots f_{k_n^a}(x_n^b),$$

avec $f_{k^a}(x^b)$ les fonctions propres de l'opérateur Laplacien associées aux valeurs propres k^a . Il est évident que le moment d'ordre 1 doit être nul car les variables de perturbations sont par construction des écarts à la moyenne :

$$\langle v_{k^a}(\eta_f) \rangle = 0.$$

Par ailleurs, l'homogénéité et l'isotropie statistique implique que

$$\langle v_{k_1^a}(\eta_f) \cdots v_{k_n^a}(\eta_f) \rangle = \delta^3 \left(\sum_{i=1}^n k_i^a \right) \times P_v^{(n)}(S_{1\dots n}, \eta_f),$$

avec $\delta^3(k^a)$ la distribution de Dirac et $S_{1\dots n}$ correspond à l'ensemble des paramètres permettant de décrire la figure géométrique que « tracent » l'ensemble des n 3-vecteurs $\{k_i^a\}$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^n k_i^a = 0$. Par exemple, pour $n = 2$, $k_1^a = -k_2^a$ et la figure tracée sera un segment de longueur k_1 : la fonction $P_v^{(2)}$ ne dépend que d'un paramètre qui est la norme du vecteur d'onde k_1^a . Pour $n = 3$, la figure sera un triangle et $P_v^{(3)}$ dépendra de 3 paramètres qui seront *e.g.* les normes des trois vecteurs d'ondes k_1^a , k_2^a , k_3^a . Enfin, on supposera aussi que les champs stochastiques de perturbation sont *indépendants* d'un point de vue temporelle :

$$\langle v(\eta_1, x_1^a) \cdots v(\eta_n, x_n^a) \rangle \neq 0 \text{ si et seulement si } \eta_1 = \cdots = \eta_n.$$

En appelant $P_v^{(n)}(S_{1\dots n}, \eta)$ les propriétés statistiques de la source à n'importe quel instant, une résolution en fonction de Green des équations d'évolution des perturbations dans la *base de Fourier*, aboutit à

$$P_v^{(n)}(S_{1\dots n}, \eta_f) = \int_{\eta_i}^{\eta_f} G_{k_1^a}(\eta_f, s) \cdots G_{k_n^a}(\eta_f, s) P_v^{(n)}(S_{1\dots n}, s) ds.$$

Comme nous l'avons vu, les fonctions de Green possèdent un mode croissant dans un Univers inflationnaire qui va donc « servir » à amplifier les propriétés statistiques initiales des champs de perturbations.

De ce point de vue, prédire les propriétés statistiques des perturbations primordiales s'avèrent *a priori* être, au mieux, une tâche longue et fastidieuse. Toutefois, les observations des anisotropies du fond diffus cosmologique montrent que la statistique des ces inhomogénéités est essentiellement *gaussienne*. En vertu du théorème de Wick, cette statistique est donc entièrement déterminée si l'on connaît ses deux premiers moments. Puisque le moment d'ordre 1 est nécessairement nul, reste donc à calculer le moment d'ordre 2. Dans l'espace réel, ce moment n'est rien d'autre que la fonction de corrélation à 2 points qui, sous hypothèse d'homogénéité et d'isotropie statistique, ne dépend que de la distance entre les deux points $r = \sqrt{r_a r^a}$:

$$\xi_v(r) \equiv \langle v(\eta_f, x^a) \cdots v(\eta_f, x^a + r^a) \rangle.$$

L'analogue dans l'espace de Fourier de la fonction de corrélation à 2 points est le spectre de puissance. L'homogénéité et l'isotropie statistique assure que i) seuls les modes de vecteur d'onde opposé sont corrélés et ii) le spectre de puissance ne dépend que de la norme du vecteur d'onde. Le lien entre fonction de corrélation à 2 points et spectre de puissance est donné par

$$\xi_v(r) = \int_0^\infty \mathcal{P}_v(k) \times \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k}, \quad (2.39)$$

où l'intégration sur l'angle solide a été effectuée. Avec un tel lien, le spectre de puissance mesure la puissance corrélée par bande logarithmique de vecteur d'onde :

$$\mathcal{P}_v(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle v_{k^a} v_{-k^a} \rangle = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle v_{k^a} v_{k^a}^* \rangle, \quad (2.40)$$

où nous avons utilisé le fait que $v(\eta, x^a)$ est un champ à valeur dans $\mathbb{R}$, ce qui implique $v_{k^a}^* = v_{-k^a}$.

De façon plus précise, nous nous intéressons aux perturbations scalaires entendues comme les perturbations de la 3-courbure spatiale –la quantité $\mathcal{R}$ – ainsi qu'aux perturbations tenseurs entendues comme les ondes gravitationnelles –la quantité $\bar{E}_s$ pour les deux valeurs de l'hélicité–. Leur spectres de puissance en fonction des variables $v_{S(T)}$ sont donnés par

$$\mathcal{P}_S(k) \equiv \langle \mathcal{R}(k, \eta_f) \mathcal{R}^*(k, \eta_f) \rangle = \frac{k^3}{2\pi^2} \times \left\langle \left| \frac{v_{k,S}}{z(\eta_f)} \right|^2 \right\rangle, \quad (2.41)$$

$$\mathcal{P}_T(k) \equiv \sum_{s=1}^2 \langle \bar{E}_s(k, \eta_f) \bar{E}_s^*(k, \eta_f) \rangle = (32\pi G) \times \frac{k^3}{2\pi^2} \times \sum_{s=1}^2 \left\langle \left| \frac{v_{k,s,T}}{a(\eta_f)} \right|^2 \right\rangle. \quad (2.42)$$

Pour résumer, « prédire » dans le cadre du scénario inflationnaire c'est donc calculer les propriétés statistiques en fin d'inflation, des perturbations cosmologiques en tant que champ stochastique. Pour cela, il nous faut donc i) connaître la dynamique des perturbations durant l'inflation (cela revient à résoudre les équations d'Einstein linéarisées) et ii) choisir un état initial, c'est-à-dire une source des perturbations, avec des propriétés statistiques connues.

2.3.3 Conditions initiales de théorie quantique des champs

Il ne semble pas *a priori* nécessaire de recourir à la mécanique quantique pour que l'inflation amplifie les perturbations. En effet, nous avons vu que la forme spécifique du terme de type potentiel suffit à faire croître les perturbations. Des perturbations classiques comme *e.g.* des fluctuations thermiques, seraient donc amplifiées pour éventuellement atteindre un état d'amplitude et de distribution en énergie en accord avec les observations. Pourtant une telle approche s'est avérée infructueuse et il est maintenant admis que la source microphysique des perturbations cosmologiques est bel et bien d'origine quantique. Nous rappelons ici deux arguments en faveur d'un tel choix pour les conditions initiales. Le premier argument est d'ordre théorique et a été donné dans [17]. Si cet argument permet d'exclure les fluctuations classiques dans le cadre d'un raisonnement perturbatif, ils nous semblent toutefois qu'il ne valide pas de façon certaine une origine quantique des fluctuations. Le deuxième argument se base quant à lui sur des faits observationnels et permet de constituer un faisceau de preuves en faveur de conditions initiales quantiques.

Premier argument— L'idée générale consiste à soutenir que le niveau des fluctuations en *fin* d'inflation implique nécessairement une densité d'énergie des fluctuations si élevée en *début* d'inflation qu'elle excéderait celle du fond⁷. Si tel est le cas, le raisonnement perturbatif de départ serait lui-même invalidé.

De façon naïve on peut se convaincre de cela de la manière suivante. Durant l'inflation, la densité d'énergie du fond $\langle \rho \rangle$, est celle du champ scalaire : elle est donc quasi-constante et donnée par la valeur du potentiel $V(\varphi)$. Cependant, les fluctuations du champ scalaire étant des bosons, la densité d'énergie $\langle \delta \rho \rangle$ associée à ces dernières évolue donc en a^{-4} . Dit autrement, l'énergie des fluctuations décroît nécessairement durant l'inflation compte tenu de la dilution cosmique. Nous avons donc pour le fond :

$$\langle \rho \rangle(t_f) = \langle \rho \rangle(t_i),$$

et pour les fluctuations

$$\langle \delta \rho \rangle(t_f) = \left(\frac{a(t_i)}{a(t_f)} \right) \langle \delta \rho \rangle(t_i) = e^{-4N(t_i, t_f)} \langle \delta \rho \rangle(t_i).$$

Le rapport de la densité d'énergie des fluctuations divisée par la densité d'énergie du fond est (en utilisant le fait que le nombre d'*e-fold* est au moins égal à 60 durant l'inflation) :

$$\frac{\langle \delta \rho \rangle(t_i)}{\langle \rho \rangle(t_i)} \sim e^{240} \times \frac{\langle \delta \rho \rangle(t_f)}{\langle \rho \rangle(t_f)}.$$

Un raisonnement perturbatif valable tout le long de la phase inflationnaire implique $\frac{\langle \delta \rho \rangle(t_f)}{\langle \rho \rangle(t_f)} \ll e^{-240}$. Or l'amplitude *observée* des perturbations implique $\frac{\langle \delta \rho \rangle(t_f)}{\langle \rho \rangle(t_f)} \gg e^{-240}$. Autrement dit, l'amplification des fluctuations *classiques* du champ, dans un raisonnement perturbatif, aboutit à une impasse⁸ !

En quoi, un état initial quantique permettrait-il de résoudre ce problème ? Dans une approche de type théorie des champs, les perturbations cosmologiques sont vues comme un champ qu'il faut quantifier. En utilisation une quantification se basant sur les espaces de Fock, la densité d'énergie d'un état propre de l'Hamiltonien s'exprime à l'aide du nombre d'occupation N_k :

$$\langle \delta \rho \rangle \propto \int d^3k \frac{k^4}{a^4} \left[N_k + \frac{1}{2} \right].$$

Si l'on choisit l'état vide $N_k = 0$ comme état initial et que l'on suppose une régularisation parfaite de l'énergie du vide, il est alors possible de contourner l'impasse inhérentes aux cas des fluctuations classiques : la densité d'énergie

7. Ce raisonnement peut paraître contradictoire. Toutefois, ce que l'argument affirme est le point suivant : la densité d'énergie d'énergie associées aux perturbations décroît bien que l'amplitude des perturbations croît.

8. De façon plus rigoureuse, les fluctuations de champ se comporte comme des bosons tant qu'elles sont sub-hubble. Ce point n'invalidé toutefois pas l'argument : la relation $\langle \delta \rho \rangle(t_f) = e^{-4N(t_i, t_f)} \langle \delta \rho \rangle(t_i)$ est alors à remplacer par $\delta \rho_k(t_k) \sim e^{-4N(t_i, t_k)} \delta \rho_k(t_i)$ où $\delta \rho_k$ est la densité d'énergie contenu dans le mode k et t_k l'instant où ce mode passe d'un sub-hubble à un état super-hubble. Or pour que l'inflation « fonctionne », il est nécessaire que l'ensemble de l'Univers observable aujourd'hui (et donc toutes les perturbations qui si trouvent) soit contenu dans une unique zone causale en début d'inflation. Par ailleurs, durant l'inflation, les modes de petites longueurs d'onde deviennent super-hubble plus tard que les grandes longueurs. Autrement dit, les perturbations possédant les plus petites longueurs d'onde sortiront de l'horizon pour t_k légèrement inférieur à t_i . Ainsi, l'argument ci-dessus s'appliquent au moins aux perturbations cosmologiques de petite longueur d'onde.

ne varie pas au cours de l'expansion accélérée mais une source de perturbation serait toujours présente compte tenu des fluctuations quantiques.

Si le cas de conditions initiales classiques fait bel et bien face à une impasse, des conditions initiales quantiques sont loin d'être exemptes de problèmes ! Tout d'abord, cela requiert d'annuler *toutes* les énergies de point zéro pour chaque mode k d'intérêt cosmologique, et pas uniquement de régulariser la divergence ultraviolette ($k \rightarrow \infty$). Avec 60 *e-fold*, il est donc nécessaire d'annuler strictement l'énergie de point de zéro sur une trentaine de décade. Si des conditions initiales de type *théorie quantique des champs* permettent donc de fournir une « source » des perturbations cosmologiques, cela implique implicitement que les pathologies de cette théorie (ici le problème de la régularisation de l'énergie du vide) sont introduites dans le champ de la cosmologie !

L'argument ci-dessus permettant d'exclure les fluctuations *classiques* comme source des inhomogénéités cosmique amplifiées par l'inflation repose sur le fait qu'une densité d'énergie décroissant très rapidement durant l'inflation est associée au perturbations. Tâchons d'étayer l'argument dans le cas type des perturbations tenseurs. Nous considérerons de plus que l'univers inflationnaire est bien modélisable par un espace de de Sitter : $a(\eta) = -1/H\eta$ avec $H = \text{cste}$ le paramètre de Hubble.

Si l'on réécrit l'action des modes tenseurs en fonction des variables $\bar{E}_s$, cette dernière prend la forme de l'action de deux champs scalaires (correspondant aux 2 états d'hélicité) non-couplés se propageant dans un espace courbe, *i.e.*

$$\delta^2 S_T = \frac{1}{32\pi G} \sum_s \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{1}{2} \langle g^{\mu\nu} \rangle \partial_\mu \bar{E}_s \partial_\nu \bar{E}_s \right].$$

Le tenseur impulsion-énergie des modes tenseurs est donc

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi G} \sum_s \left[\partial_\mu \bar{E}_s \partial_\nu \bar{E}_s - \frac{1}{2} \langle g_{\mu\nu} \rangle \langle g^{\lambda\sigma} \rangle \partial_\lambda \bar{E}_s \partial_\sigma \bar{E}_s \right].$$

La densité d'énergie des ondes gravitationnelles en fonction de la variable $u_T(\eta)$, est alors :

$$\tau_{00}(x^a, \eta) = \frac{1}{16\pi G} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{a^2} \left[|u'_T - a' u_T|^2 + k_c q^c |u_T|^2 \right] \times \exp[i(k_c - q_c)x^c].$$

Supposons une source classique, stochastique et statistiquement isotrope de fluctuation. La densité d'énergie sera alors entièrement décrite par le spectre de puissance initial de ces fluctuations classiques : $\langle u_T(\eta_i, k^c) u_T^*(\eta_i, q^c) \rangle = (2\pi)^3 \mathcal{P}_T(k, \eta_i) \delta(k_c - q_c)$ avec $k \equiv \sqrt{|k_c k^c|}$. En notant $u_T(\eta > \eta_i) = T(\eta) \times u_T(\eta_i)$ avec T solution de l'équation du mouvement du mode tenseur, la densité d'énergie est donc

$$\langle \tau_{00}(x^a, \eta) \rangle = \frac{1}{16\pi G} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \left(\frac{k}{a} \right)^2 \left[|T'(\eta) - aH \times T(\eta)|^2 + k^2 |T(\eta)|^2 \right] \mathcal{P}_T(k, \eta_i),$$

où nous avons volontairement réintroduit le paramètre de Hubble H qui est constant. Dans un univers de de Sitter, il est aisé de déterminer les solutions de l'équation du mode tenseur à l'aide des fonctions de Bessel d'indice 3/2 :

$$\begin{aligned} T(\eta) &= \frac{\alpha}{H} \left(1 + i \frac{aH}{k} \right) e^{ik/aH}, \\ T'(\eta) &= \frac{\alpha}{H} \left(-aH - ik + i \frac{a^2 H^2}{k} \right) e^{ik/aH} \end{aligned}$$

La densité d'énergie contenue dans un mode k est alors :

$$\frac{d\rho_k(\eta)}{d \ln k} \propto \left(\frac{H^2}{G} \right) k^3 \left[\frac{5}{2} + \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \right] \mathcal{P}_T(k, \eta_i),$$

tandis que l'évolution de la puissance de la perturbation de mode k est :

$$\mathcal{P}_T(k, \eta > \eta_i) \propto \left(\frac{k^3}{G} \right) \left[1 + \left(\frac{aH}{k} \right)^2 \right] \mathcal{P}_T(k, \eta_i).$$

En début d'inflation, toutes les perturbations sont nécessairement sub-hubble : $k/aH \gg 1$, tandis qu'elles deviennent toutes super-hubble en fin d'inflation : $k/aH \ll 1$. Avec les formules ci-dessus, il est évident que bien que la puissance des perturbations augmentent durant l'inflation, leur densité d'énergie diminue. Plus précisément encore, la dilution de l'énergie est proportionnel à l'amplification des perturbations. Autrement dit, une forte amplification de l'amplitude des perturbations implique une forte dilution de leur densité d'énergie.

Il convient maintenant d'appliquer le même raisonnement dans un cadre quantique et d'assurer que la densité d'énergie évolue différemment que dans le cas classique. Une quantification cohérente à la Fock pour un champ dont la masse dépend du temps peut s'effectuer à l'aide du cadre théorique développé dans la référence [18]. Nous ne décrivons pas ici ce cadre et nous nous limiterons au résultat qui concerne précisément notre argumentation. Quand $\eta \rightarrow -\infty$, la masse effective des ondes gravitationnelles tend vers zéro. Il est alors possible de définir des états à N_k particules pour chaque mode k en début d'inflation (du moins tant que $k \gg aH$, c'est-à-dire pour les modes sub-hubble). Un résultat essentiel de l'approche de [18] donne l'expression de l'opérateur hamiltonien associé à un état initial $|N_k(\eta_i)\rangle$ à n'importe quel instant ultérieur. En partant de cette expression, on peut montrer que la densité d'énergie par mode est

$$\rho_k(\eta > \eta_i) = \langle N_k(\eta_i) | \frac{d\hat{H}}{d \ln k} | N_k(\eta_i) \rangle \propto k^3 F_k(\eta) \left[N_k(\eta_i) + \frac{1}{2} \right],$$

où la fonction $F_k(\eta)$ encode toute l'information liée à l'évolution de la masse effective. (On notera toutefois que dans cette approche, l'opérateur hamiltonien pris en $\eta > \eta_i$ n'est plus diagonal suivant la base $|N_k(\eta_i)\rangle$.) Il est donc évident que si i) on choisit l'état vide comme état initial et ii) l'énergie du vide est régularisée, alors la densité d'énergie des perturbations reste nulle. Le spectre de puissance est quant-à lui donné par la fonction de corrélation à deux points du champs de perturbations tensorielles. Il s'écrit :

$$\mathcal{P}(k) = \langle N_k(\eta_i) | \hat{u}_k^\dagger \hat{u}_k | N_k(\eta_i) \rangle \propto k^3 G(\eta) \left[N_k(\eta_i) + \frac{1}{2} \right].$$

En choisissant le vide comme état initial, on obtient donc un spectre de puissance *non nul*, $\mathcal{P}(k) \propto k^3 G(\eta)/2$. C'est bien évidemment l'essence même de l'inflation comme mécanisme à l'origine des perturbations cosmologiques : les fluctuations quantiques du vide sont amplifiées par la dynamique extrême de l'Univers. Toutefois, si la densité d'énergie de ces fluctuations est proprement régularisées, alors cete densité d'énergie reste de moyenne nulle (pour un exemple d'une telle régularisation, voir *e.g.* [19]).

Il est toutefois important de garder à l'esprit que cela injecte de fait les questions standards de régularisation de l'énergie quantique du vide dans le cadre cosmologique.

Les arguments théoriques ci-dessus procèdent de deux manières. La nécessité de conditions initiales provenant de la théorie quantique des champs procède d'abord par la négative : c'est la contradiction inhérente à un choix de conditions initiales *classiques* qui invite à se tourner vers un choix *quantique*. Ensuite, cette nécessité semble se justifier de façon plus positive : le vide quantique comme état initial ne souffrirait d'aucune contradiction. Toutefois, cette seconde justification, positive, convoque aussi de nouvelles problématiques, en particulier la régularisation de l'énergie quantique du vide. Ainsi, il nous semble que c'est essentiellement l'impossibilité de conditions initiales classiques qui justifie *théoriquement* le recours à la théorie quantique des champs.

Deuxième argument— Il existe une deuxième classe d'arguments, d'ordre *observationnel*, en faveur d'un tel choix. Les anisotropies du fond diffus cosmologique sont une empreinte des perturbations cosmologiques générées durant l'inflation et leur observation permet donc de remonter (du moins en partie) aux propriétés statistiques de ces perturbations. Ces observations montrent que la statistique des perturbations scalaires est principalement gaussienne, dans le sens où aucun écart à la gaussianité primordiale n'a été jusqu'à présent observé [20], et que son spectre de puissance associé est presque invariant d'échelle dans le sens où le spectre de puissance par bande logarithmique de nombre d'onde, $\mathcal{P}_S$, est donné par une loi de puissance avec un indice spectral très proche de zéro. Le vide quantique comme état initial rend naturellement compte de ces faits d'observation⁹. Une compréhension intuitive de ces faits n'est pas évidente. Proposons tout de même ici une première approche en considérant que les perturbations cosmologiques sont décrites par un champ scalaire ϕ évoluant dans un espace de Sitter (ce champ ne doit pas être confondu avec le champ d'inflaton φ).

Premièrement, l'état vide (à comprendre donc comme l'état vide de particules *en moyenne* mais constamment animé de fluctuations quantiques) est un état cohérent. En effet, un champ scalaire dans un espace-temps de de Sitter peut être vu comme la collection infini d'oscillateurs harmoniques dont la fréquence dépend du temps. La théorie de l'oscillateur harmonique montre que l'état vide, entendu comme état fondamental, est un état cohérent. Or les états cohérents sont des paquets d'ondes *gaussiens* centrés autour des trajectoires classiques. Leur statistique est donc gaussienne dans le sens où les fluctuations incessantes de la configuration du champ autour de sa valeur

9. Plus rigoureusement, la gaussianité des inhomogénéités cosmiques vient d'un état initial gaussien, comme l'état vide, et d'une évolution linéaire des inhomogénéités. Observer des non-gaussianités n'exclue donc pas de fait l'état vide mais peut aussi être attribué à une évolution non-linéaire, par ailleurs attendue à l'ordre 2 en perturbation.

moyenne suivent une statistique gaussienne. En effet, on peut montrer que la fonctionnelle d'onde, qui décrit la densité de probabilité de configuration du champ, est pour l'état vide [21] :

$$\Psi[\phi, \eta] = \prod_k N_k(\eta_i, \eta) \times \exp\left(-\frac{|\phi_k|^2}{4\sigma_k^2(\eta_i, \eta)}\right) \times \exp\left(iF_k(\eta_i, \eta)|\phi_k|^2 - ik\eta_i/2\right), \quad (2.43)$$

avec les fonctions N_k , F_k et σ_k des fonctions dépendantes du temps et du nombre d'onde k . La distribution de probabilité des configurations du champ donnée par $|\Psi|^2$ est donc bien une gaussienne centrée en $\langle\phi_k\rangle = 0$ et donnant des fluctuations de configuration avec une puissance $\langle\phi_k^2\rangle = \sigma_k^2(\eta_i, \eta)$.

Deuxièmement, le calcul explicite du spectre de puissance en fin d'inflation avec comme état initial le vide conduit naturellement à un spectre presque invariant d'échelle. En effet, la fonctionnelle d'onde en début d'inflation décrivant le vide de Bunch-Davies est simplement donné par une collection d'oscillateurs harmoniques de fréquence k^2

$$\Psi[\phi, \eta] = \prod_k N_k \times \exp\left(-\frac{k|\phi_k|^2}{2} - ik\eta_i/2\right). \quad (2.44)$$

Le spectre de puissance initial par bande logarithmique est donné par

$$\mathcal{P}_\phi(k, \eta_i) = 2k^3 \langle\phi_k^2(\eta_i)\rangle / (2\pi)^2 \propto k^2.$$

Cependant, dans un espace de de Sitter, l'amplitude des modes est justement amplifiée par un facteur $\sim H/k$. Le spectre de puissance final est donc multiplié par un facteur $(H/k)^2$ et vaut $\mathcal{P}_\phi(k, \eta_f) \propto H^2$. On trouve un spectre de puissance invariant d'échelle en fin d'inflation. Par ailleurs, le facteur d'amplification, H/k , est complètement fixé par la dynamique inflationnaire. Il est donc indépendant du choix de l'état initial. Il est donc nécessaire que le spectre de puissance de l'état initial en début d'inflation soit proportionnel à k^2 pour avoir un spectre invariant d'échelle en fin d'inflation. L'état vide fournit naturellement un tel spectre initial.

Actuellement, il semble que ce soit ces arguments d'ordre observationnel qui justifient de se placer dans le cadre de la théorie quantique des champs pour choisir des conditions initiales quant aux inhomogénéités cosmiques. En effet, cette théorie fournit naturellement des fluctuations qui sont de plus gaussiennes et qui, pour une dynamique inflationnaire quasi-exponentielle, conduit à un spectre de puissance invariant d'échelle. Ce choix quantique apparaît ainsi comme une condition suffisante.

2.3.4 Quantification des perturbations

Pour calculer les spectres de puissance des perturbations cosmologiques, il nous faut quantifier ces champs. Nous donnons ici l'exemple de la quantification à la Fock pour le cas des perturbations scalaires. Cette approche se généralise facilement au cas des ondes gravitationnelles. Nous noterons $[\cdot, \cdot]$ le crochet de commutation.

Quantification de v_S — Pour ces perturbations, nous rappelons que la densité lagrangienne est ¹⁰

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((v'_S)^2 - \delta^{ab} (\partial_a v_S) (\partial_b v_S) + \frac{z''}{z} (v_{k,S})^2 \right). \quad (2.45)$$

La variable de configuration est donc $v_{k,S}$ et la variable de moment conjugué est

$$\pi_{k,S} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta v'_S} = v'_S. \quad (2.46)$$

On en déduit l'Hamiltonien sur les hypersurfaces par la transformation de Legendre

$$H_S(\eta) = \int d^3x (\pi_S v'_S - \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int d^3x \left((v'_S)^2 + \delta^{ab} \partial_a v_S \partial_b v_S - \frac{z''}{z} (v_{k,S})^2 \right). \quad (2.47)$$

10. Nous considérons volontairement le cas simplifié, mais relativement réaliste (le "relativement" ne sera pas discuté ici), d'un univers dont les sections spatiales sont euclidiennes. Les cas $\kappa = \pm 1$ sont toutefois traités de façon similaire en utilisant la décomposition harmonique des modes propres appropriée au cas de sections spatiales non plates [22].

Nous avons donc à traiter le cas d'un champ scalaire dont la fréquence dépend du temps. Le champ et son moment conjugué sont alors promus au rang d'opérateur, $v_S \rightarrow \hat{v}_S$ et $\pi_{k,S} \rightarrow \hat{\pi}_{k,S}$. La dynamique est alors obtenue en remplaçant les crochets de Poisson par des crochets de commutations :

$$\begin{aligned} [\hat{v}_S(\eta, x^a), \hat{v}_S(\eta, y^a)] &= 0, \\ [\hat{\pi}_S(\eta, x^a), \hat{\pi}_S(\eta, y^a)] &= 0, \\ [\hat{v}_S(\eta, x^a), \hat{\pi}_S(\eta, y^a)] &= i\delta^{(3)}(x^a - y^a). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Les équations du mouvement sont obtenues par les équations de Heisenberg $\hat{X} = i[H, \hat{X}]$ avec $\hat{X} = \hat{v}_S, \hat{\pi}_S$; ces deux équations se ramenant à l'équation de Klein-Gordon pour la variable v_S :

$$\hat{v}_S'' - \left(\Delta + \frac{z''}{z} \right) \hat{v}_S = 0. \quad (2.49)$$

Dans l'espace de Fourier, cette équation de Klein-Gordon devient une équation de Schrödinger car $\Delta \hat{v}_S \rightarrow (-k^2) \times \hat{v}_{k,S}$.

La procédure de quantification va suivre la seconde quantification en décomposant les opérateurs de champ et de moment conjugué suivant les modes propres de l'équation de Klein-Gordon, auxquels sont ensuite associés des opérateurs création et annihilation, respectivement notés $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ et $a_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{v}_S = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left(a_{\mathbf{k}} \times v_{k,S} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger \times v_{k,S}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right), \quad (2.50)$$

$$\hat{\pi}_S = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left(a_{\mathbf{k}} \times (v_{k,S})' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger \times (v_{k,S}^*)' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right), \quad (2.51)$$

avec $v_{k,S}$ une fonction du temps conforme uniquement et paramétrée par la norme du vecteur d'onde uniquement. Conformément à la décomposition entre fréquences positives et fréquences négatives (voir la référence [8]), les modes propres sont normalisés par le produit de Klein-Gordon. Ainsi, les fonctions $v_{k,S}$ sont normalisées par leur Wronskien :

$$v_{k,S} (v_{k,S}^*)' - v_{k,S}^* (v_{k,S})' = i. \quad (2.52)$$

On déduit de cette normalisation et de la décomposition de $\hat{v}_S$ et $\hat{\pi}_S$ que :

$$a_{\mathbf{k}} = -i \int d^3 x \left((v_{k,S}^*)' \hat{v}_S(\eta, \mathbf{x}) - (v_{k,S}) \hat{\pi}_S(\eta, \mathbf{x}) \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.53)$$

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger = i \int d^3 x \left((v_{k,S})' \hat{v}_S(\eta, \mathbf{x}) - (v_{k,S}) \hat{\pi}_S(\eta, \mathbf{x}) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.54)$$

et que la relation de commutation entre les opérateurs création et annihilation est la relation usuelle obtenue en espace-temps de Minkowski :

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= - \iint \left([\hat{v}_S(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}_S(\eta, \mathbf{y})] (v_{k,S}^*)' (v_{k',S}) \right. \\ &\quad \left. + [\hat{\pi}_S(\eta, \mathbf{x}), \hat{v}_S(\eta, \mathbf{y})] (v_{k,S}^*) (v_{k',S})' \right) e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 x d^3 y \\ &= -i \int \left((v_{k,S}^*)' (v_{k',S}) - (v_{k,S}^*) (v_{k',S})' \right) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} d^3 x \\ &= -i \left((v_{k,S}^*)' (v_{k,S}) - (v_{k,S}^*) (v_{k,S})' \right) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Les autres commutateurs sont nuls. On peut alors définir un espace de Fock à partir de ces opérateurs. L'état vide sera donné par $\forall \mathbf{k}, a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0$.

Création de paires particule/antiparticule— L'Hamiltonien prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned}\hat{H}_S(\eta) = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\left(|v'_{k,S}|^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) |v_{k,S}|^2 \right) \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \left((v'_{k,S})^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) (v_{k,S})^2 \right) a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \\ & \left. + \frac{1}{2} \left((v_{k,S}^*)^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) (v_{k,S}^*)^2 \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger \right].\end{aligned}\quad (2.56)$$

Pour comprendre la structure de cet Hamiltonien, retournons à la théorie quantique des champs en espace plat. Dans ce cas, $z''/z' = 0$ et $v_{k,S} = e^{ik\eta}/\sqrt{2k}$. Ainsi, nous obtenons que

$$(v'_{k,S})^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) (v_{k,S})^2 = (v_{k,S}^*)^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) (v_{k,S}^*)^2 = 0$$

et

$$|v'_{k,S}|^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) |v_{k,S}|^2 = k.$$

On retrouve donc l'Hamiltonien usuel pour un champ scalaire sans masse :

$$\hat{H}_S(\eta) = \int k \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Ainsi, le premier terme de l'Hamiltonien donné par l'équation (2.56) est l'analogue de l'Hamiltonien ci-dessus : il décrit une collection d'oscillateurs harmoniques dont la fréquence dépend du temps. Les deux termes suivants correspondent alors à des termes de "couplage" entre le champ de perturbation scalaire quantifié et le champ gravitationnel classique. Ces termes vont en particulier conduire à la création de particules. Considérons que l'état initial à $\eta = \eta_i$, soit le vide défini par les opérateurs $a_{\mathbf{k}}$. Au bout d'un temps $\delta\eta$ suffisamment petit, l'état aura évolué vers l'état $|0(\eta_i + \delta\eta)\rangle$ tel que :

$$\begin{aligned}|0(\eta_i + \delta\eta)\rangle &= |0(\eta_i)\rangle - i\delta\eta \times \hat{H}_S |0(\eta_i)\rangle \\ &= |0(\eta_i)\rangle - i\frac{\delta\eta}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left((v_{k,S}^*)^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) (v_{k,S}^*)^2 \right) |1_{\mathbf{k}}, 1_{-\mathbf{k}}\rangle.\end{aligned}\quad (2.57)$$

Dans l'état final, il y a donc eu création de *paires* de particules de vecteurs d'onde opposés. Pour chaque paire, on vérifie facilement que l'impulsion totale reste nulle. L'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{P}}$ est défini par

$$\hat{\mathbf{P}} \equiv \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \times \mathbf{k}' \times a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'},$$

qui consiste simplement à calculer la somme vectorielle de l'ensemble des impulsions portées par chaque particule présente dans l'état considéré. Pour notre état $|0(\eta_i + \delta\eta)\rangle$, on obtient alors ¹¹

$$\begin{aligned}\langle 0(\eta_i + \delta\eta) | \hat{\mathbf{P}} | 0(\eta_i + \delta\eta) \rangle &= \underbrace{\langle 0(\eta_i) | \hat{\mathbf{P}} | 0(\eta_i) \rangle}_{=0} \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} F(k) \times \underbrace{\langle 1_{-\mathbf{k}} | 1_{-\mathbf{k}} \rangle}_{=1} \times \underbrace{\langle 1_{\mathbf{k}} | \mathbf{k} \times a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | 1_{\mathbf{k}} \rangle}_{=\mathbf{k}} \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} F(k) \times \underbrace{\langle 1_{\mathbf{k}} | 1_{\mathbf{k}} \rangle}_{=1} \times \underbrace{\langle 1_{-\mathbf{k}} | (-\mathbf{k}) \times a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}} | 1_{-\mathbf{k}} \rangle}_{=-\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

11. On notera que les termes croisés du genre $\langle 0(\eta_i) | \hat{\mathbf{P}} | 1_{\mathbf{k}}, 1_{-\mathbf{k}} \rangle$ sont évidemment nuls et que les termes du genre $\langle 1_{\mathbf{k}}, 1_{-\mathbf{k}} | \mathbf{k} \times a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'} | 1_{\mathbf{k}'}, 1_{-\mathbf{k}'} \rangle$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\langle 1_{\mathbf{k}}, 1_{-\mathbf{k}} | \mathbf{k} \times a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'} | 1_{\mathbf{k}'}, 1_{-\mathbf{k}'} \rangle &= \delta^{(3)}(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}') \times \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle 1_{-\mathbf{k}} | 1_{-\mathbf{k}} \rangle \langle 1_{\mathbf{k}} | \mathbf{k} \times a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | 1_{\mathbf{k}} \rangle \\ &+ \delta^{(3)}(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}') \times \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle 1_{\mathbf{k}} | 1_{\mathbf{k}} \rangle \langle 1_{-\mathbf{k}} | (-\mathbf{k}) \times a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}} | 1_{-\mathbf{k}} \rangle,\end{aligned}$$

en limitant les vecteur d'onde $\mathbf{k}$ au demi-espace euclidien $\mathbb{R}_+^3$ nous permettant de scinder entre particule de moment opposé.

Les intégrales ci-dessus sont limitées au demi-espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (dénové $\mathbb{R}_+^3$). Nous avons volontairement scinder l'espace des vecteurs d'ondes de la sorte afin de faire explicitement apparaître les moments de particules *vectoriellement* opposés. La fonction $F(k)$ est simplement définie par

$$F(k) \equiv \left| i \frac{\delta\eta}{2} \left((v_{k,S}^*)^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) (v_{k,S}^*)^2 \right) \right|^2$$

et ne dépend que de la norme de $\mathbf{k}$. Cela montre que $\langle 0(\eta_i + \delta\eta) | \hat{\mathbf{P}} | 0(\eta_i + \delta\eta) \rangle = 0$: l'impulsion globale reste nulle malgré la création de paires de particules.

Dans un espace de Minkowski, l'opérateur de champ agissant sur l'espace de Fock s'écrit comme

$$\hat{\phi} = \int d^3k \left[a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, x^a) + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, x^a) \right],$$

avec $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ et $a_{\mathbf{k}}$ les opérateur de créations et annihilation. Nous noterons ici $\mathbf{k} \equiv k^a$ le 3-vecteur d'onde. L'état vide est donc l'état tel que $a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0$. Les modes propres $u_{\mathbf{k}}(t, x^a)$ ne sont pas choisis au hasard pour construire l'espace de Fock. Ils constituent une base orthonormée des solutions des équations de champ par rapport au produit de Klein-Gordon :

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = -i \int_{\Sigma_t} \left(u_{\mathbf{k}} \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\mathbf{k}'}^* \right) d^3x = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

où l'intégration se fait sur des hypersurfaces à temps constants Σ_t . Le produit de Klein-Gordon est construit à partir du Wronskien des modes propres pris sur une hypersurface. Il satisfait donc la règle de calcul suivante :

$$(g, f) = -(f^*, g) = (f, g)^*$$

Par ailleurs, ces modes sont données par

$$u_{\mathbf{k}}(t, x^a) = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-ik_\mu x^\mu)$$

avec $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ et $\omega^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0$. Ils sont facilement obtenus en résolvant l'équation de Klein-Gordon dans l'espace minkowskien, *i.e.* :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

qui n'est rien d'autre que l'équation d'onde usuelle. Le champ scalaire considéré à valeur dans $\mathbb{R}$, nous avons $u_{\mathbf{k}}^* = u_{-\mathbf{k}}$. Par ailleurs, ces modes sont des fonctions propres du vecteur de Killing ∂_t avec comme valeur propre $(-i\omega)$. Ils permettent donc de définir les fréquences positives. Par ailleurs, ∂_t étant un vecteur de Killing, cela signifie qu'il y a une quantité conservée pour le mouvement des particules. Cette quantité conservée pour le cas spécifique du vecteur de Killing ∂_t s'interprète comme l'énergie. Ainsi, les modes $u_{\mathbf{k}}$ définissent bien les *énergies* positives.

Ci-dessus, nous avons choisi un système de coordonnées spécifique qui toutefois correspond à un référentiel inertiel. Considérons la même procédure pour un autre observateur inertiel auquel on associe le système de coordonnées $y^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$. L'opérateur de champ s'écrit alors

$$\hat{\phi} = \int d^3k \left[b_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(\tau, y^a) + b_{\mathbf{k}}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*(\tau, y^a) \right],$$

avec

$$v_{\mathbf{k}}(\tau, y^a) = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-ik_\mu y^\mu).$$

L'état vide relatif à cet autre observateur inertiel est donc défini par $b_{\mathbf{k}} |\bar{0}\rangle = 0$. Toutefois une transformation de Lorentz satisfait la relation $\Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha$. Ainsi, les modes $v_{\mathbf{k}}$ se ré-expriment en fonction du système de coordonnées x^μ comme :

$$v_{\mathbf{k}}(\tau, y^a) = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-i\Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\beta^\mu k'_\alpha x^\beta) = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-ik'_\mu x^\mu) = \sqrt{\frac{k'}{k}} u_{\mathbf{k}'}(t, x^a).$$

Compte tenu de cette égalité entre les modes propres du champ, il est évident que les opérateurs $a_{\mathbf{k}'}$ et $b_{\mathbf{k}}$ doivent coïncider avec $k_\mu = \Lambda_\mu^\alpha k'_\alpha$. Ainsi, l'état vide du deuxième observateur inertiel (et ici plus généralement l'ensemble de l'espace de Fock) est

égal à l'état vide du premier. L'énergie du mode $v_{\mathbf{k}}$ s'obtient par application du vecteur de Killing $\partial_\tau : \partial_\tau v_{\mathbf{k}}(\tau, y^a) = -i\omega v_{\mathbf{k}}$. Si on applique maintenant le vecteur de Killing ∂_t à ce même mode nous obtenons :

$$\begin{aligned}\partial_t v_{\mathbf{k}} &= \partial_t \left[\frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-ik_\mu y^\mu) \right] = \frac{1}{\sqrt{k}} \partial_t \left[\exp(-i\Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\beta^\mu k'_\alpha x^\beta) \right] \\ &= (-i\Lambda_\mu^\alpha \Lambda_0^\mu k'_\alpha) \times \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-ik_\mu y^\mu) \\ &= (-i\omega') v_{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Autrement dit, les modes propres relatifs aux deuxième observateur et d'énergie (positive) ω sont aussi des modes propres d'énergie (positive) pour le premier observateur avec une énergie ω' qui se déduit de ω par la transformation de Lorentz passant d'un observateur à l'autre. (On peut facilement se convaincre que si $\omega > 0$, alors ω' est aussi nécessairement positive : $\omega' = \gamma(\omega - \beta \cdot \mathbf{k})$. Puisque $|\beta| < 1$ et $|\mathbf{k}| < \omega$, on trouve que nécessairement ω' est une énergie positive si ω est aussi positive.)

Dans cette discussion concernant la théorie quantique des champs en espace plat, nous n'avons considéré que des systèmes de coordonnées cartésiennes, reliés les uns aux autres par des transformations de Lorentz (et plus généralement par des transformation du groupe de Poincaré). Il s'agit mathématiquement d'un choix de coordonnées naturel qui de plus possède une signification physique : ces systèmes correspondent à des référentiels inertiels. Le point cruciale est que l'espace de Minkowski est invariant sous action du groupe de Poincaré et il est alors possible de construire un espace de Fock qui est lui-même invariant par action du groupe de Poincaré.

Lorsque l'on passe à la théorie quantique des champs en espace courbe, il faut prendre pour acquis quelques faits de la relativité générale : le groupe de Poincaré n'est plus un groupe de symétrie laissant invariant l'espace-temps et plus généralement, un système de coordonnées n'a aucune signification physique *a priori*. Considérons donc deux systèmes de coordonnées arbitraire x^μ et y^μ . Pour chacun de ses systèmes de coordonnées, il est possible de trouver une base orthonormée selon le produit de Klein-Gordon. L'opérateur de champ peut donc se décomposer suivant deux bases distinctes de modes propres, $\{u_{\mathbf{k}}(t, x^a)\}_{\mathbf{k}, \omega > 0}$ et $\{v_{\mathbf{k}}(\tau, y^a)\}_{\mathbf{k}, \omega > 0}$:

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \int d^3k \left[a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, x^a) + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, x^a) \right], \\ \hat{\phi} &= \int d^3k \left[b_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(\tau, y^a) + b_{\mathbf{k}}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*(\tau, y^a) \right].\end{aligned}$$

Puisque le changement de coordonnées est arbitraire, nous avons

$$v_{\mathbf{k}} = \int d^3k' \left[\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} + \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}^* \right]$$

avec

$$\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = (v_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) \text{ et } \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = -(v_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^*).$$

(On pourra noter que dans le cas d'un espace minkowskien, ces coefficients définissant la transformation de Bogoljubov sont $\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \sqrt{k'/k} \times \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ et $\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = 0$.) Les modes propres sont cette fois-ci obtenus en résolvant l'équation de Klein-Gordon en espace courbe, *i.e.*

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = 0.$$

On construit alors un espace de Fock $\mathcal{F}\{x^\mu\}$ défini suivant les opérateurs $a_{\mathbf{k}}$ et un deuxième espace de Fock $\mathcal{F}\{y^\mu\}$ défini suivant les opérateurs $b_{\mathbf{k}}$. L'état vide de l'espace $\mathcal{F}\{x^\mu\}$ s'obtient par application de l'opérateur annihilation $a_{\mathbf{k}}$ tel que $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$, tandis que l'état vide dans $\mathcal{F}\{y^\mu\}$ se définit par l'opérateur annihilation $b_{\mathbf{k}}$ tel que $b_{\mathbf{k}}|\bar{0}\rangle = 0$. De façon générique, les états de $\mathcal{F}\{x^\mu\}$ seront notés $|N_{\mathbf{k}}\rangle$ pour l'état à N particules de fréquences propre $\mathbf{k}$ tandis que les états de l'espace $\mathcal{F}\{y^\mu\}$ seront notés $|\bar{N}_{\mathbf{k}}\rangle$.

Les différents opérateurs s'obtiennent à l'aide du produit de Klein-Gordon :

$$\begin{aligned}a_{\mathbf{k}} &= (\hat{\phi}, u_{\mathbf{k}}) \quad \text{et} \quad a_{\mathbf{k}}^\dagger = (\hat{\phi}, u_{\mathbf{k}}^*), \\ b_{\mathbf{k}} &= (\hat{\phi}, v_{\mathbf{k}}) \quad \text{et} \quad b_{\mathbf{k}}^\dagger = (\hat{\phi}, v_{\mathbf{k}}^*).\end{aligned}$$

Ils sont reliés les uns aux autres via une transformation de Bogoljubov

$$\begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \int d^3k' \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* & -\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* \\ -\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} & \alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}'} \\ a_{\mathbf{k}'}^\dagger \end{pmatrix}.$$

La structure canonique de la théorie doit être conservée. Ainsi, si $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, on doit nécessairement trouver $[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Cela conduit à la condition suivante

$$\int d^3 k'' [\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^* \alpha_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} - \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^* \beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

ce qui se ramène, plus simplement, à

$$\begin{aligned} \int d^3 k'' [|\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}|^2 - |\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}|^2] &= 1, \\ \int d^3 k'' [\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^* \alpha_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} - \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^* \beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}] &= 0. \end{aligned}$$

De de façon similaire, puisque $[c_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}'}] = [c_{\mathbf{k}}^\dagger, c_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0$ avec $c = a$ ou b , on obtient aisément que

$$\int d^3 k'' [\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} \beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} - \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} \alpha_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}] = 0.$$

On notera que dans le cas particulier (quoique courant dans les phénomènes d'intérêt cosmologique) où la transformation de Bogoljubov est telle que la couplage entre modes propres est non nul uniquement pour les modes de valeurs propres identiques, *i.e.* $\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \propto \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ et $\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \propto \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, la condition ci-dessus se ramène à dire que la matrice de passage $\mathbf{M}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ est diagonale par bloc avec chaque bloc de déterminant égal à 1, *i.e.*

$$|\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}|^2 - |\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}|^2 = 1.$$

La relation inverse s'obtient aisément en inversant la matrice de passage

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ a_{\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \int d^3 k' \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} & \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* \\ \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} & \alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}} \begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}'} \\ b_{\mathbf{k}'}^\dagger \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de Bogoljubov permettent de passer d'un espace de Fock à l'autre. Puisqu'ils sont définis par le produit de Klein-Gordon des modes $\{u_{\mathbf{k}}\}$ relatifs au premier système de coordonnées x^μ , sur les modes propres $\{v_{\mathbf{k}}\}$ relatifs au deuxième système de coordonnées y^μ , ces coefficients sont donc dépendant des choix de systèmes de coordonnées.

On peut alors s'intéresser à l'état vide suivant les opérateurs $b_{\mathbf{k}}$ et chercher à calculer le nombre de quanta présent dans cet état. Evidemment, si les quanta sont interprété dans l'espace de Fock défini par les opérateurs $b_{\mathbf{k}}$, alors $\langle \bar{0} | b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} | \bar{0} \rangle = 0$. Mais si l'on s'intéresse maintenant au nombre de quanta interprétés dans l'espace de Fock défini par les opérateurs $a_{\mathbf{k}}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \bar{0} | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | \bar{0} \rangle &= \left\langle \bar{0} \left| \int d^3 k' \int d^3 k'' (\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* b_{\mathbf{k}'}^\dagger + \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}) (\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} b_{\mathbf{k}''} + \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^* b_{\mathbf{k}''}^\dagger) \right| \bar{0} \right\rangle \\ &= \int d^3 k' \int d^3 k'' \left[\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^* \underbrace{\langle \bar{0} | b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}''}^\dagger | \bar{0} \rangle}_{\delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')} \right] \\ &= \int |\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}|^2 d^3 k'. \end{aligned}$$

Le nombre de quanta suivant $a_{\mathbf{k}}$ mais comptés dans l'état vide défini suivant $b_{\mathbf{k}}$ n'est donc pas nul ! On pourra d'ailleurs noter que pour que cela soit le cas, il faut que les coefficients de Bogoljubov $\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ soient non nuls. Ces coefficients relient le mode $v_{\mathbf{k}}$ aux modes $u_{\mathbf{k}'}$, c'est-à-dire qu'ils relient les énergies positives suivant $b_{\mathbf{k}}$ aux énergies *négligables* suivants $a_{\mathbf{k}'}$. Autrement dit, les états vide de $\mathcal{F}\{x^\mu\}$ et de $\mathcal{F}\{y^\mu\}$ coïncident si les modes propres choisis dans le système x^μ ne contiennent que des fréquences positives des modes propres choisis dans le système y^μ . De même, pour un état à N particules d'énergie de vecteur d'onde $\mathbf{q}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}_{\mathbf{q}} | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | \bar{N}_{\mathbf{q}} \rangle &= \left\langle \bar{N}_{\mathbf{q}} \left| \int d^3 k' \int d^3 k'' (\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* b_{\mathbf{k}'}^\dagger + \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}) (\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} b_{\mathbf{k}''} + \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^* b_{\mathbf{k}''}^\dagger) \right| \bar{N}_{\mathbf{q}} \right\rangle \\ &= \int d^3 k' \int d^3 k'' [\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* \alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''} \langle \bar{N}_{\mathbf{q}} | b_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{\mathbf{k}''} | \bar{N}_{\mathbf{q}} \rangle + \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}''}^* \langle \bar{N}_{\mathbf{q}} | b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}''}^\dagger | \bar{N}_{\mathbf{q}} \rangle] \\ &= \bar{N}_{\mathbf{q}} (|\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2 + |\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2) + \int |\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}|^2 d^3 k'. \end{aligned}$$

Le dernier terme sous forme d'intégrale dans le résultat ci-dessus s'interprète comme les fluctuations quantiques du vide $|0\rangle$ qui viennent *peupler* l'état $|\bar{N}_{\mathbf{q}}\rangle$.

De façon moins mathématique, on notera que la recherche des modes propres de l'équation de Klein-Gordon suppose une résolution par séparation des variables. Puisque les solutions sont recherchées sur un espace-temps, cette séparation des variables revient à se fixer un système de coordonnées. En particulier, un feuilletage séparant espace et temps est choisi. Pour l'espace de Minkowski, tous les feuilletages correspondant à des observateurs inertiels sont reliés les uns aux autres par une transformation de Lorentz. Or cela n'affecte pas la décomposition en modes propres du champ dans le sens où à une fréquence positive correspondant à un mode dans un feuilletage donné, correspond un unique mode de fréquence positive dans tout autre feuilletage obtenu par application d'une transformation de Lorentz. Ainsi, la notion de particule entendue comme excitation d'un mode propre à une énergie positive donnée ne change pas d'un observateur à l'autre. D'une certaine manière, la structure des modes propres est préservée lors d'une transformation de Lorentz dans le sens où il y a une bijection passant des modes propres d'énergie *positive* $\{u_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k},\omega>0}$ aux modes propres d'énergies *positives* $\{v_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k},\omega>0}$. Mais lorsque sur un espace courbe nous effectuons un changement global de coordonnées (ou un changement de feuilletage), nous appliquons un difféomorphisme passif. Or, l'espace des modes propres d'énergie positive $\{u_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k},\omega>0}$ par action des difféomorphismes passifs peut très bien se projeter de façon non bijective à la fois dans l'espace des modes propres d'énergie positive, $\{v_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k},\omega>0}$, que dans l'espace des modes propres d'énergie *négative* $\{v_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k},\omega<0}$.

Propriété de l'état vide— Comme nous l'avons mentionné précédemment, une prédiction de l'inflation quant aux perturbations cosmologiques consiste à calculer les moments de la statistique de ces perturbations. Puisque ces perturbations sont décrites par un champ libre, évoluant toutefois dans un espace-temps dynamique, l'état vide sera donné par un état gaussien. En effet, la fonctionnelle d'onde décrivant cet état s'obtient par $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$. En remplaçant $\hat{v}_{\mathbf{S}} \rightarrow \times \bar{v}_{\mathbf{S}}$ et $\hat{\pi}_{\mathbf{S}} \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \bar{v}_{\mathbf{S}}}$, il nous faut résoudre :

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left((v_{k,S}^*)' \bar{v}_{\mathbf{S}} + i (v_{k,S}^*) \frac{\delta}{\delta \bar{v}_{\mathbf{S}}} \right) \Psi_0 [\bar{v}_{\mathbf{S}}] = 0. \quad (2.58)$$

Nous avons volontairement mis une barre au dessus de v . En effet, $\bar{v}_{\mathbf{S}}$ ne doit pas être confondu avec $v_{k,S}$. Le premier correspond à une configuration du champ en tant qu'argument de la fonctionnelle d'onde. Cette configuration du champ est indéterminée dans le sens où ce qui fait justement sens, c'est comment la fonctionnelle d'onde dépend de $\bar{v}_{\mathbf{S}}$ en tant qu'argument couvrant l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$. Le deuxième correspond quant à lui à une fonction solution de l'équation de Klein-Gordon permettant de définir l'opérateur de champ en fonction des opérateurs création/annihilation et réciproquement. On peut s'en convaincre de la façon suivante : $\bar{v}_{\mathbf{S}}$ couvre l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$ tandis que $v_{k,S}$ correspond aux modes propres convenablement normalisés, c'est-à-dire les solutions de l'équation de Klein-Gordon normalisées par le Wronskien. En passant dans l'espace de Fourier, l'équation fonctionnelle ci-dessus se ramène à

$$\left((v_{k,S}^*)' \bar{v}_{k,S} + i (v_{k,S}^*) \frac{\delta}{\delta \bar{v}_{k,S}^*} \right) \Psi_0 [\bar{v}_{\mathbf{S}}] = 0, \quad (2.59)$$

dont la résolution nous donnera la fonctionnelle d'onde dépendant des configurations de champ dans l'espace de Fourier plutôt que dans l'espace réel. La fonctionnelle d'onde est donc :

$$\begin{aligned} \Psi_0 [\bar{v}_{\mathbf{S}}] &= \prod_k \mathcal{N} \exp \left(-i \left(\frac{v'_{k,S}}{v_{k,S}} \right)^* \times |\bar{v}_{k,S}|^2 \right) \\ &= \prod_k \mathcal{N} \exp \left(\text{Im} \left[\left(\frac{v'_{k,S}}{v_{k,S}} \right)^* \right] \times |\bar{v}_{k,S}|^2 - i \text{Re} \left[\left(\frac{v'_{k,S}}{v_{k,S}} \right)^* \right] \times |\bar{v}_{k,S}|^2 \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

ce qui correspond bien à un état gaussien. Puisqu'il s'agit d'un état gaussien, le théorème de Wick nous assure que la connaissance de la valeur moyenne et la corrélation à deux points —ou encore le spectre de puissance dans l'espace de Fourier— des perturbations en fin d'inflation suffit à déterminer l'ensemble de la statistique. Puisque l'état gaussien est centré en zéro, la valeur moyenne des configuration du champ de perturbation sera nulle. Il faut évidemment que cela soit le cas car nous traitons explicitement de *perturbations*. On peut aussi facilement se convaincre que $\langle 0 | \bar{v}_{\mathbf{S}} | 0 \rangle$ est bien nulle. Reste alors à calculer le moment d'ordre deux. La fonction de corrélation à

deux points, dans un langage quantique, s'exprime comme

$$\xi_{v_S}(\mathbf{r}) = \langle 0 | \hat{v}_S(\eta_f, \mathbf{x}) \hat{v}_S(\eta_f, \mathbf{x} + \mathbf{r}) | 0 \rangle. \quad (2.61)$$

En passant dans l'espace de Fourier pour obtenir le spectre de puissance par bande logarithmique, on montre facilement que

$$\mathcal{P}_{v_S}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \times |v_{k,S}(\eta_f)|^2 \times \langle 0 | a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle \quad (2.62)$$

$$= \frac{k^3}{2\pi^2} \times |v_{k,S}(\eta_f)|^2. \quad (2.63)$$

Pour déterminer le spectre de puissance des perturbations scalaires en fin d'inflation, il suffit donc de connaître les modes propres du champ en fin d'inflation *moyennant* une définition appropriée de ces modes en *début* d'inflation. Or un choix spécifique de modes propres (autrement dit le choix des constantes d'intégrations en début d'inflation dans la résolution de l'équation de Klein-Gordon) correspond à un choix spécifique de l'état vide en début d'inflation. Pour finaliser le calcul des spectres de puissance, il faut donc choisir cet état vide initial.

Pour les modes tenseurs— Avant cela, mentionnons rapidement que dans un cadre quantique, le spectre de puissance des perturbations tenseurs est donné par :

$$\mathcal{P}_{v_T}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \times \sum_{s=1}^2 |v_{k,s,T}(\eta_f)|^2 \times \langle 0 | a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} + a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^\dagger | 0 \rangle \quad (2.64)$$

$$= \frac{k^3}{2\pi^2} \times \sum_{s=1}^2 |v_{k,s,T}(\eta_f)|^2. \quad (2.65)$$

Ce résultat suit exactement le cas des perturbations scalaires avec les deux spécificités suivantes :

- les modes propres sont maintenant solution d'une équation de Klein-Gordon dont la masse dépendante du temps n'est plus z''/z mais a''/a ;
- il faut prendre en compte les deux états d'hélicité des ondes gravitationnelles.

Choisir le vide— Une particularité de la théorie quantique des champs en espace courbe est l'apparition d'états vides différents selon l'observateur considéré. En effet, à un changement d'observateur, non-inertiel, correspond un changement, non-Lorentzien, du système de coordonnées, en particulier de la coordonnée de type temps, et donc une nouvelle manière de définir les excitations d'énergie positive du champ. Ainsi, l'état fondamental, vide d'excitation, va changer d'un observateur à un autre et il n'existe pas d'état vide canonique comme dans un espace-temps Minkowskien. Cette particularité amène à se poser toujours la même question lorsque l'on aborde le comportement d'un champ quantique en espace courbe : quel état vide correspond à l'état fondamental ?

Plusieurs critères existent pour répondre à cette question. Tout d'abord, si l'espace présente un vecteur de Killing de type temps global, il est aisé d'utiliser un système de coordonnées ayant comme coordonnée temporelle celle associée au vecteur de Killing pour définir les énergies positives et négatives et par conséquent appliquer aisément la procédure de seconde quantification, qui se fait sur des *tranches* à temps fixé. Cependant, dans un espace-temps donné, il n'est pas toujours possible de définir un vecteur de Killing de type temps partout. Dans ce cas, il faut alors chercher un système de coordonnées relatif à un vecteur de Killing dans une région donnée de l'espace-temps considéré : un vecteur de Killing sur l'horizon d'un trou noir par exemple, ou bien, pour un espace-temps asymptotiquement plat, le système de coordonnées pour un observateur à l'infini dont le temps donnera un vecteur de Killing de type temps à l'infini. Il est aussi possible de choisir l'état fondamental en exigeant qu'il soit invariant sous certaines transformations, en particulier les isométries de l'espace-temps considéré. Enfin, il est aussi adéquat de se donner des critères permettant d'exclure les états vides comme état fondamental. Par exemple, il faudra que le tenseur énergie-impulsion sur l'état choisi ne diverge en aucun point régulier de l'espace-temps. Ce dernier point est particulièrement bien illustré dans le cas des trous noirs : en choisissant l'état fondamental comme l'état vide relatif à un observateur à l'infini du trou noir, le tenseur énergie-impulsion diverge à l'horizon, qui n'est pourtant pas une région singulière. Il faut donc choisir un autre état vide, qui s'avère être celui de l'observateur en chute libre, pour définir l'état fondamental.

Dans le cas de l'inflation, nous choisirons comme état vide celui dit de Bunch-Davies. Ce vide de Bunch-Davies est un choix de vide relativement naturel. En début d'inflation, la distance de Hubble comobile est extrêmement grande et au moins plus grande que la distance de Hubble comobile aujourd'hui. Par ailleurs, tous les modes aujourd'hui observables ont une longueur d'onde comobile $\lambda \sim 1/k$ inférieure à la distance de Hubble comobile aujourd'hui. Ainsi, tous les modes perturbatifs observables aujourd'hui avaient en début d'inflation, une longueur d'onde bien plus petite que la distance de Hubble comobile. Ces modes sont donc un régime oscillant et on peut légitimement négliger l'influence de l'expansion de l'Univers. Puisque ces modes sub-Hubble se comportent comme dans un espace plat, le choix initial des modes propres correspondant au vide de Bunch-Davies, noté dans la suite $|0_{\text{BD}}\rangle$:

$$v_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-ik\eta) \quad \text{pour} \quad \left(\frac{k}{aH}\right) \rightarrow \infty. \quad (2.66)$$

Ce choix d'état vide s'applique aussi bien aux modes propres des perturbations scalaires qu'aux modes propres des perturbations tenseurs. En effet, en début d'inflation nous trouvons que les modes sub-hubble satisfont aussi bien à $k \gg \sqrt{z''/z}$ qu'à $k \gg \sqrt{a''/a}$. Cela fournit d'ailleurs une seconde justification de ce choix d'état vide. Dans l'espace de Fourier, l'équation de Klein-Gordon se ramène à une équation de Schrödinger

$$v_k'' + (k^2 - V(\eta)) v_k = 0.$$

L'évolution des modes propres s'interprète donc comme la transmission d'une onde d'énergie effective k^2 sur un potentiel. Pour un tel problème, on choisit usuellement un état initial *adiabatique* dans le sens où infiniment loin dans le passé, le potentiel s'annule pour être ensuite *doucement* –ou encore *adiabatiquement*– introduit. Si l'on étend infiniment loin dans le passé l'inflation, cela revient à étendre η jusqu'à $-\infty$. Or, $V_{\text{S(T)}} \rightarrow 0$ pour $\eta \rightarrow -\infty$ et l'état initial est alors $v_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-ik\eta)$ pour $\eta \rightarrow -\infty$. Or, les modes tels que $(k/aH) \gg 1$ en début d'inflation –c'est-à-dire en $\eta = \eta_i$ – évolue justement adiabatiquement depuis $\eta \rightarrow -\infty$ jusqu'à $\eta = \eta_i$. On notera d'ailleurs que $(k/aH) \rightarrow \infty$ si $k \rightarrow \infty$ ou si $\eta \rightarrow -\infty$ car $aH = \mathcal{H} = -1/\eta$ dans l'approximation d'une inflation purement exponentielle. En début d'inflation, le spectre de puissance associé à cet état vide est donc

$$\mathcal{P}_{\text{S(T)}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \times |v_{k,\text{S(T)}}(\eta_i)|^2 = \frac{k^2}{2\pi^2}. \quad (2.67)$$

2.3.5 Spectres de puissance primordiaux : prédiction de l'inflation

Nous sommes maintenant en possession d'un cadre quantique *et* d'un critère de sélection de l'état vide en début d'inflation dont les propriétés statistiques sont connues –i.e. le vide de Bunch-Davies $|0_{\text{BD}}\rangle$, est un état gaussien centré en zéro et de spectre de puissance par bande logarithmique $k^2/(2\pi^2)$ –. Il nous faut maintenant résoudre explicitement les équations d'Einstein linéarisées pour les variables $v_{k,\text{S(T)}}$. Cela suppose évidemment de connaître l'évolution du facteur d'échelle et de la moyenne du champ scalaire durant l'inflation. Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas général d'une inflation en roulement lent. Nous adoptons ce choix car il constitue le cadre canoniquement admis par la communauté. Nous tenterons, une fois les expressions des spectres de puissance déterminées, d'expliciter en quoi ce cadre est communément admis sur une base théorique et sur une base de confrontation entre théorie et observation.

Dans une approche d'inflation par roulement lent, les potentiels effectifs $V_{\text{S(T)}}$ sont exprimés en fonction du temps conforme η en effectuant un développement perturbatif en fonction des paramètres de roulement lent. Nous limiterons ici au deuxième ordre en fonction des paramètres ϵ_H et δ_H . Nous renvoyons le lecteur au chapitre 8 de [6] et aux articles [23] pour une discussion plus détaillée. En fonction des deux paramètres de roulement lent définis mentionnés ci-dessus, les deux potentiels effectifs prennent la forme suivante :

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\eta^2} \times (2 + 6\epsilon_H - 3\delta_H), \quad (2.68)$$

$$\frac{a''}{a} = \frac{1}{\eta^2} \times (2 + 3\epsilon_H). \quad (2.69)$$

Avec une telle dépendance en fonction du temps conforme, les solutions des équations de Schrödinger satisfaites par $v_{k,\text{S(T)}}$ s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel (voir la référence [24] pour une définition de ces fonctions ainsi

qu'un long exposé de leurs propriétés analytiques), usuellement dénotées J_ν et Y_ν avec ν l'ordre de ces fonctions. De façon plus précise, nous utiliserons les fonctions de Hankel définies comme $H_\nu^\pm = J_\nu \pm iY_\nu$. Nous posons tout d'abord les ordres suivants : $\nu_S^2 - 1/4 = 2 + 6\epsilon_H - 3\delta_H$ et $\nu_T^2 = 2 + 3\epsilon_H$; ce qui, en effectuant un développement limité, donne

$$\nu_S = \frac{3}{2} + 2\epsilon_H - \delta_H, \quad (2.70)$$

$$\nu_T = \frac{3}{2} + \epsilon_H. \quad (2.71)$$

Les solutions génériques pour les perturbations sont alors :

$$v_{k,S(T)}(\eta) = \sqrt{-k\eta} \left[A_{k,S(T)} H_{\nu_{S(T)}}^+(-k\eta) + B_{k,S(T)} H_{\nu_{S(T)}}^-(-k\eta) \right], \quad (2.72)$$

avec $A_{k,S(T)}$ et $B_{k,S(T)}$ deux constantes d'intégration à déterminer en exigeant qu'en début d'inflation, la solution ci-dessus tendent vers les modes décrivant le vide de Bunch-Davies. Le début d'inflation correspond à $k/aH \rightarrow \infty$, c'est-à-dire $(-k\eta) \rightarrow \infty$. Le comportement asymptotique des fonctions de Hankel est

$$\lim_{(-k\eta) \rightarrow \infty} \left(H_{\nu_{S(T)}}^\pm(-k\eta) \right) = \sqrt{\frac{2}{-\pi k\eta}} \times \exp \left[\mp i k\eta \mp i \left(\frac{\nu_{S(T)}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Pour obtenir le vide de Bunch-Davies comme vide initiale, les constantes d'intégration sont fixées par :

$$A_{k,S(T)} = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \times \exp \left[-i \left(\frac{\nu_{S(T)}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad \text{et} \quad B_{k,S(T)} = 0. \quad (2.73)$$

On peut vérifier qu'avec une telle normalisation, et compte-tenu du Wronskien satisfait par les fonctions de Hankel *i.e.* $W \{H_\nu^+, H_\nu^-\} = -4i/(\pi x)$ et $W \{H_\nu^\pm, H_\nu^\pm\} = 0$, les modes propres satisfont bien à la condition de normalisation *tout au long de l'inflation* imposée par le produit de Klein-Gordon, c'est-à-dire $\left(v_{k,S} (v_{k,S}^*)' - v_{k,S}^* (v_{k,S})' \right) = i$.

Comment de tels modes se comportent en fin d'inflation? Pour cela, il faut encore définir ce qu'est la fin de l'inflation. Comme nous l'avons mentionné précédemment pour le choix du vide de Bunch-Davies, les modes d'intérêt cosmologique sont *initialement* sub-Hubble et *finalemtent*, entendue ici comme *en fin d'inflation*, super-Hubble. Autrement dit, les modes d'intérêt cosmologique sont en fin d'inflation tels que $(k/aH) \rightarrow 0$. Compte tenu de la forme des deux équations de Schrödinger, le mode croissant en fin d'inflation est donc :

$$v_{k,S}(\eta \rightarrow \eta_f) = C_{k,S} \times z(\eta \rightarrow \eta_f), \quad (2.74)$$

$$v_{k,T}(\eta \rightarrow \eta_f) = C_{k,T} \times a(\eta \rightarrow \eta_f), \quad (2.75)$$

avec $C_{k,S(T)}$ deux constantes dépendant de k . On peut d'ores-et-déjà reformuler l'expression des spectres de puissances primordiaux pour les perturbations de la 3-courbure spatiale et les ondes gravitationnelles en fonction de ces constantes en partant des équations en partant des définitions en Eqs. (2.41) & (2.42)

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \times \left\langle \left| \frac{v_{k,S}}{z(\eta_f)} \right|^2 \right\rangle = \frac{k^3}{2\pi^2} \times |C_{k,S}|^2, \quad (2.76)$$

$$\mathcal{P}_T(k) = (32\pi G) \times \frac{k^3}{2\pi^2} \times \sum_{s=1}^2 \left\langle \left| \frac{v_{k,s,T}}{a(\eta_f)} \right|^2 \right\rangle = \frac{32Gk^3}{\pi} \times |C_{k,T}|^2. \quad (2.77)$$

Reste encore à déterminer l'expression de ces constantes en fonctions des constantes $A_{k,S(T)}$. Pour cela, on identifie dans la solution générique (2.72) le mode croissant en fin d'inflation.

La limite des modes super-Hubble en fin d'inflation se traduit par $(-k\eta) \rightarrow 0^+$. La limite asymptotique des fonctions de Hankel est alors :

$$\lim_{(-k\eta) \rightarrow 0^+} \left(H_{\nu_{S(T)}}^+(-k\eta) \right) = \frac{1}{i\pi} \Gamma(\nu_{S(T)}) \left(\frac{-k\eta}{2} \right)^{-\nu_{S(T)}},$$

ce qui donne la dépendance temporelle des modes : $v_{k,S(T)} \propto (-k\eta)^{-\nu_{S(T)}+1/2}$. Pour identifier le mode croissant dans cette solution asymptotique, il nous faut ré-exprimer η en fonction de $z(\eta)$ pour le mode scalaire et en fonction de $a(\eta)$ pour le mode tenseur. Dans un développement en roulement lent, on obtient [6, 23] :

$$z(\eta) = \frac{M_{\text{Pl}}}{H_*} \sqrt{\frac{\epsilon_H}{2\pi}} \times \left| \frac{1}{\eta} \right|^{1+2\epsilon_H-\delta_H}, \quad (2.78)$$

$$a(\eta) = (1 + \epsilon_H) H_*^{-1} \times \left| \frac{1}{\eta} \right|^{1+\epsilon_H}. \quad (2.79)$$

Il convient maintenant d'effectuer un développement limité de $\left(\frac{-k\eta}{2}\right)^{-\nu_{S(T)}+1/2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-k\eta}{2}\right)^{-\nu_S+1/2} &= \left| \frac{1}{\eta} \right|^{1+2\epsilon_H-\delta_H} \times \left(\frac{2}{k}\right)^{1+2\epsilon_H-\delta_H} \\ &= \frac{H_*}{M_{\text{Pl}}} \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon_H}} \times z(\eta) \times \left(\frac{2}{k}\right) [1 + (2\epsilon_H - \delta_H) (\ln 2 - \ln k)], \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-k\eta}{2}\right)^{-\nu_T+1/2} &= \left| \frac{1}{\eta} \right|^{1+\epsilon_H} \times \left(\frac{2}{k}\right)^{1+\epsilon_H} \\ &= \frac{H_*}{1 + \epsilon_H} \times a(\eta) \times \left(\frac{2}{k}\right) (1 + \epsilon_H \ln 2 - \epsilon_H \ln k). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Grâce à ce développement limité qui montre bien que $v_{k,S}$ et $v_{k,T}$ exprimés à l'aide des fonctions de Bessel sont respectivement proportionnels à z et a , il est aisé de déterminer les constantes $C_{k,S(T)}$ en fonction des constantes $A_{k,S(T)}$. En regroupement l'ensemble des résultats (et en effectuant un développement limité¹² de $\Gamma(3/2 + 2\epsilon_H - \delta_H)$ et $\Gamma(3/2 + \epsilon_H)$ autour de la valeur $3/2$), nous obtenons alors pour les modes scalaire :

$$\begin{aligned} |C_{k,S}|^2 &= \left| \frac{v_{k,S}(\eta \rightarrow \eta_f)}{z(\eta \rightarrow \eta_f)} \right|^2 = \frac{2\pi}{\epsilon_H} \left(\frac{H}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \left| \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + 2\epsilon_H - \delta_H)}{\pi} \right|^2 |A_{k,S}|^2 \frac{4}{k^2} [1 + 2(2\epsilon_H - \delta_H) (\ln 2 - \ln k)] \\ &\rightarrow |C_{k,S}|^2 = \frac{1}{k^3} \frac{2\pi}{\epsilon_H} \left(\frac{H}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 [1 + 2\epsilon_H (2 - \gamma_E - \ln 2) + 2(\gamma_E + \ln 2 - 2) \delta_H \\ &\quad + (2\delta_H - 4\epsilon_H) \ln k] \end{aligned} \quad (2.82)$$

et pour les modes tenseur :

$$\begin{aligned} |C_{k,T}|^2 &= \left| \frac{v_{k,T}(\eta \rightarrow \eta_f)}{a(\eta \rightarrow \eta_f)} \right|^2 = H_*^2 \left| \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + \epsilon_H)}{\pi} \right|^2 |A_{k,T}|^2 \frac{4}{k^2} (1 + 2\epsilon_H \ln 2 - 2\epsilon_H \ln k) \\ &\rightarrow |C_{k,T}|^2 = \frac{H_*^2}{2k^3} [1 + 2\epsilon_H (2 - \gamma_E - \ln 2 - \ln k)]. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Dans les expressions ci-dessus, la constante $\gamma_E \simeq 0.57721$ correspond à la constante d'Euler-Mascheroni. L'expressions des constantes $C_{k,S(T)}$ sont finalement introduite dans l'expression des spectres de puissance pour obtenir

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{1}{\pi\epsilon_H} \left(\frac{H}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 [1 + (2\epsilon_H - \delta_H) (2 - \gamma_E - \ln 2) + 2(\delta_H - 2\epsilon_H) \ln k], \quad (2.84)$$

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 [1 + 2\epsilon_H (2 - \gamma_E - \ln 2 - \ln k)]. \quad (2.85)$$

12. Nous rappelons que, pour $\varepsilon \ll 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma(3/2 + \varepsilon) &\simeq \Gamma(3/2) + \varepsilon \Gamma'(3/2) \\ &\simeq \Gamma(3/2) [1 + \varepsilon \psi(3/2)] \\ &\simeq \frac{1}{2} \sqrt{\pi} [1 - \varepsilon (\gamma_E + 2 \ln 2 - 2)], \end{aligned}$$

avec $\gamma_E \simeq 0.57721$ la constante d'Euler-Mascheroni (voir [24]).

2.3.6 Spectres de puissance primordiaux : paramétrisation phénoménologique

De façon plus phénoménologique, les spectres de puissances primordiaux sont paramétrisés par une loi de puissance :

$$\mathcal{P}_S(k) = \mathcal{A}_S \times \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_S-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_T(k) = r \times \mathcal{A}_S \times \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_T}. \quad (2.86)$$

Le nombre d'onde k_0 correspond à une échelle dite de *pivot* sur laquelle on s'appuie pour évaluer l'amplitude du spectre. Ainsi, la quantité $\mathcal{A}_S = \mathcal{P}_S(k_0)$, appelée amplitude du mode scalaire, correspond à la valeur du spectre de puissance scalaire à l'échelle k_0 et $\mathcal{A}_T = r \times \mathcal{A}_S = \mathcal{P}_T(k_0)$, l'amplitude du mode tenseur, correspond à la valeur du spectre de puissance tenseur à l'échelle k_0 . Usuellement, l'amplitude du mode tenseur est phénoménologiquement définie par rapport à l'amplitude du mode scalaire par le *rapport tenseur-sur-scalaire* $r \equiv \mathcal{A}_T/\mathcal{A}_S$. La quantité $n_{S(T)}$ est appelé l'indice spectral scalaire (tenseur) ou *tilt*. Il est défini à partir de la dérivée du logarithme de $\mathcal{P}_{S(T)}$ par rapport à $\ln k$ en k_0 .

Pour établir le lien entre les prédictions de l'inflation et cette paramétrisation phénoménologique, on utilise les définitions suivantes :

$$\mathcal{A}_S = \mathcal{P}_S(k_0), \quad (2.87)$$

$$n_S = 1 + \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_S}{d \ln k} \right|_{k=k_0} \quad (2.88)$$

et

$$r = \frac{\mathcal{P}_T(k_0)}{\mathcal{P}_S(k_0)}, \quad (2.89)$$

$$n_T = \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k} \right|_{k=k_0}. \quad (2.90)$$

Dans le cas d'une inflation de type *roulement lent* – nous nous limiterons à l'ordre dominant en paramètre de roulement lent –, il est donc obtenu pour le mode scalaire :

$$\mathcal{A}_S = \frac{1}{\pi \epsilon_H} \left(\frac{H_\star}{M_{\text{Pl}}} \right)^2, \quad (2.91)$$

$$n_S = 1 - 4\epsilon_H. \quad (2.92)$$

Pour le mode tenseur, les paramètres phénoménologiques sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_T &= \frac{16}{\pi} \left(\frac{H_\star}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \\ &\longrightarrow r = 16\epsilon_H \end{aligned} \quad (2.93)$$

et

$$n_T = -2\epsilon_H. \quad (2.94)$$

Cette description phénoménologique, dont les paramètres sont accessibles via l'observation du fond diffus cosmologique, fournit en particulier une règle de consistance de l'inflation par roulement lent reliant le rapport tenseur-sur-scalaire à l'indice spectral des modes tenseurs :

$$r = -8n_T. \quad (2.95)$$

En quoi ces paramètres sont particulièrement pertinents ? En se restreignant d'abord au simple cadre de l'inflation à un champ dans les conditions de roulement lent, choisir un modèle inflationnaire donné c'est choisir un *potentiel* pour le champ scalaire. Toujours dans ce cadre de roulement lent, on voit alors que la mesure de l'amplitude du mode tenseur permet de remonter à la valeur de $H_\star$ durant l'inflation. Par les équations de Friedmann en roulement lent, cela nous donne accès à la valeur du potentiel $V(\varphi_\star)$. De même, en mesurant l'indice spectrale tenseur ou encore l'amplitude des modes scalaires en plus de l'amplitude des modes tenseurs, nous avons alors

accès à ϵ_H , c'est-à-dire au rapport $V_{,\varphi}/V(\varphi)|_{\varphi_*}$. Si on ajoute à cela la mesure de l'indice spectral scalaire, nous aurions en plus accès à δ_H , qui est lui relié à la dérivée seconde du potentiel V . Si nous avons développé toute la hiérarchie des paramètres de roulement lent (qui consiste à prendre en compte les dérivées d'ordre de plus en plus élevés de V pour ensuite les 'propager' dans le calcul des spectres de puissance primordiaux) comme expliqué dans la référence [15], il apparaît possible, du moins en principe, de mesurer toutes les valeurs des dérivées d'ordre n du potentiel V par une mesure précise des spectres de puissance primordiaux. S'il est possible de reconstruire (du moins jusqu'à un certain ordre) le potentiel du champ d'inflaton [16], il est possible de discriminer entre différents modèles d'inflation à un champ en roulement lent. De façon plus générique, tester la règle de consistance $r = -8n_T$ permet de tester la validité du cadre globale de l'inflation à un champ en roulement lent.

D'un point de vue pratique, il faut d'abord noter que ces spectres ne sont pas directement observés mais plutôt par l'intermédiaire des anisotropies du fond diffus cosmologique. Par ailleurs, puisque $\epsilon_H \ll 1$, c'est le spectre scalaire qui est le plus intense. (Nous rappelons qu'en première approximation $\mathcal{P}_S \propto \epsilon_H^{-1} \times \mathcal{P}_T$.) Comme il le sera expliqué dans la suite, nous avons pour l'instant que des limites supérieures sur l'amplitude du spectre de puissance tenseur tandis que l'amplitude du spectre scalaire est elle mesurée. Ainsi, nous avons actuellement accès aujourd'hui qu'au rapport H_*^2/ϵ_H . En utilisant la relation entre ϵ_H et ϵ_V et l'équation de Friedmann, cela donne donc une contrainte sur :

$$V^3(\varphi_*) \times \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_*} \right)^{-2}.$$

De façon similaire, en utilisant la relation entre ϵ_H et ϵ_φ et en notant $T := (\dot{\varphi})^2/2$ l'énergie cinétique du champ scalaire, une mesure *seule* de l'amplitude du mode scalaire conduit à une mesure de

$$\frac{V(\varphi_*)}{T(\varphi_*)} \times (T(\varphi_*) + V(\varphi_*)).$$

Ainsi, une mesure seule de l'amplitude du mode scalaire conduit à la mesure combinée de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du champ scalaire (ou analogiquement, une mesure combinée de la valeur du potentiel et de sa dérivée première) durant l'inflation. Pour lever une telle dégénérescence, et par là initier une discrimination entre différents potentiels d'inflaton proposables, une mesure de l'amplitude du mode tenseur est nécessaire car elle permet une mesure de H_*^2 et donc de $V(\varphi_*)$.

Conclusion I

L'inflation jouit d'un grand succès théorique et observationnel. Elle prédit en effet un spectre de puissance primordial des inhomogénéités cosmiques quasi-invariant d'échelle. On le comprend aisément ainsi. Le spectre de puissance pour une échelle k donnée est en première approximation proportionnel au carré du paramètre de Hubble $H^2(t_k)$ évalué quand ce mode sort de l'horizon de Hubble. Or durant l'inflation, l'évolution est quasi-de Sitter, c'est-à-dire que le paramètre de Hubble ne décroît que très faiblement. Puisque ce sont d'abord les plus grandes échelles qui quittent l'horizon, il apparaît que le spectre de puissance doit être *quasi* invariant d'échelle et légèrement *rouge*. Elle prédit par ailleurs une statistique quasi-gaussienne pour ces inhomogénéités. Encore une fois cela se comprend aisément ainsi. L'origine des inhomogénéités sont les fluctuations quantiques du vide. Or le vide quantique est un état cohérent *gaussien*. Par ailleurs, pour les modèles les plus simples à un champ, l'évolution de ces perturbations est linéaire au premier ordre perturbatif, ce qui préserve cette statistique gaussienne.

Les derniers résultats du satellite PLANCK confirme ces prédictions standard de l'inflation [2, 1] : les fluctuations primordiales scalaires sont presque invariantes d'échelles et légèrement rouge, il n'y a pas de running significatif de l'indice spectral, il n'y pas de fortes non-gaussianités ou de fortes perturbations non-adiabatiques. Les photons du fond diffus cosmologiques constituent un rayonnement de corps noir relique du Big Bang. La distribution sur la sphère céleste du CMB montre de très faibles variations en intensité (ou température) et en polarisation linéaire dont l'origine n'est rien d'autre que l'empreinte laissée par les inhomogénéités cosmiques. Ces anisotropies se décompose suivant trois modes, T pour la température et E et B pour les deux modes de polarisation linéaire. En étudiant les propriétés statistiques de ces anisotropies, il est possible (entre autre) de remonter aux propriétés statistiques des fluctuations primordiales (en particulier leur spectre de puissance), elles-mêmes fonctions de la dynamique (et du modèle) inflationnaire. En appelant X , $Y = T$, E et B , les spectres de puissance angulaire des anisotropies du CMB se relient aux spectre de puissance primordiaux via la solution en intégrale suivant la ligne de visée des équations de Boltzmann :

$$C_\ell^{XY} = \int_0^\infty dk \int_{\eta_e}^{\eta_0} d\eta \left[\Delta_\ell^{X,S}(k, \eta) \Delta_\ell^{Y,S}(k, \eta) \mathcal{P}_S(k) + \Delta_\ell^{X,T}(k, \eta) \Delta_\ell^{Y,T}(k, \eta) \mathcal{P}_T(k) \right], \quad (2.96)$$

avec $\Delta_\ell^{X,S(T)}(k, \eta)$ les fonctions de transfert qui encode les transferts radiatifs dans un univers FLRW perturbé, depuis l'inflation jusqu'à aujourd'hui, ainsi que la reprojection sur la sphère céleste. Par exemple, $\Delta_\ell^{E,S}(k, \eta)$ encode comment les perturbations scalaires (S) d'échelle de longueur k^{-1} contribuent à la polarisation de type E à l'échelle angulaire ℓ^{-1} . Ces fonctions de transfert dépendent de différents paramètres cosmologiques comme la densité totale de l'Univers ou encore la courbure spatiale. En reconstruisant les spectres de puissance angulaire des anisotropies du CMB (comme première source d'information statistique) [25], il est possible, entre autre, de remonter aux paramètres qui décrivent la forme des spectres de puissance primordiaux et par-là, de contraindre les différents scénarii d'inflation [2]. Par ailleurs, en étudiant les moments de la statistique d'ordre strictement supérieur à deux, il est possible de tester le caractère gaussien des fluctuations primordiales [20]. Plus généralement, les propriétés statistiques des anisotropies du fond diffus cosmologiques sont une source extrêmement riche d'information sur la physique de l'univers primordial et permet donc de contraindre différentes modélisations de cette phase première de l'histoire cosmique [26].

La figure A montre un exemple d'une carte des anisotropies en température du fond diffus cosmologique ainsi qu'une estimation des spectre de puissance angulaire en température (points rouges). La courbe verte est le meilleur ajustement théorique en supposant que le spectre de puissance primordial des perturbations scalaires est bien un spectre inflationnaire, c'est-à-dire une loi de puissance avec une amplitude de $\mathcal{A}_S = (2.23 \pm 0.16) \times 10^{-9}$ à $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ et un indice spectral de $n_S - 1 = (0.9616 \pm 0.0094) - 1$, tout deux à 68% de niveau de confiance et en utilisant les données PLANCK uniquement [1]. (On notera que le spectre de puissance scalaire ici contraint est celui

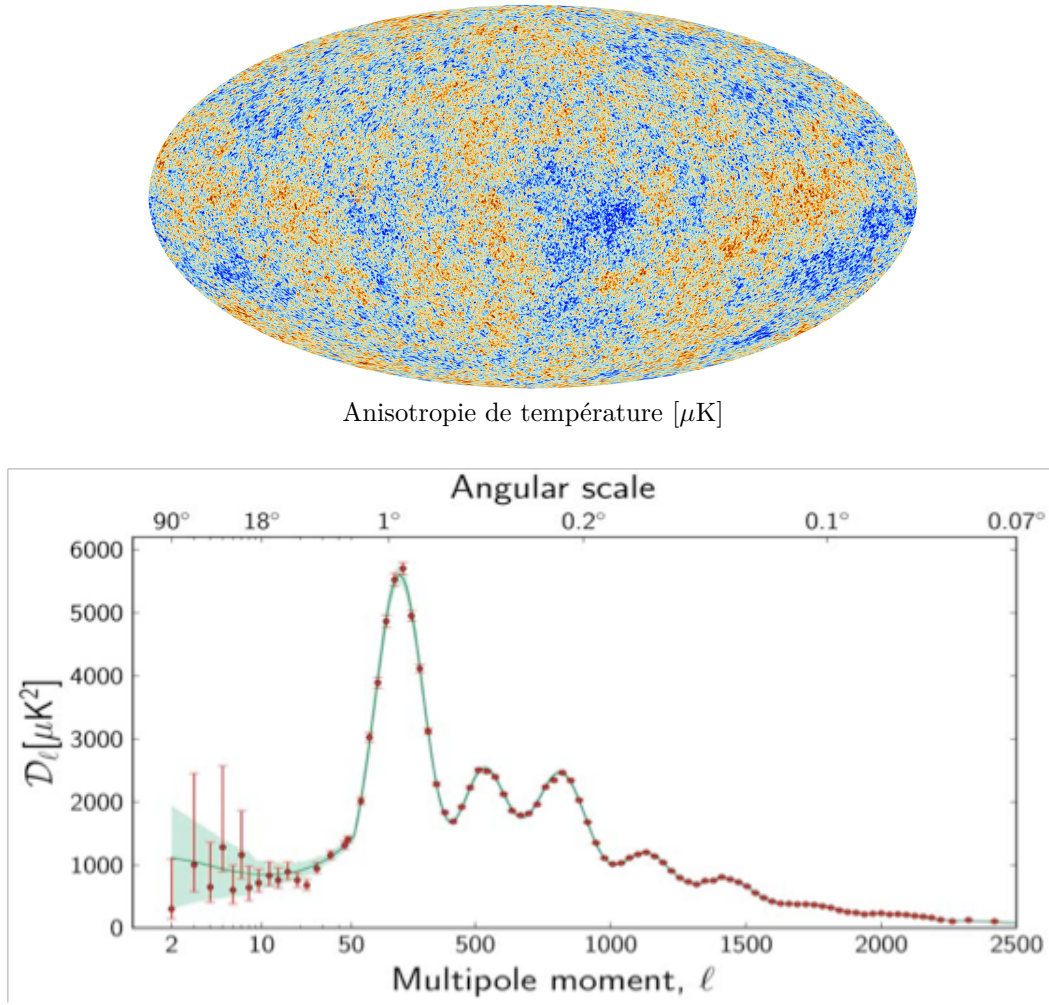


FIGURE A – Carte des anisotropies de température et spectre de puissance angulaire de ces anisotropies telles que mesurées par le satellite PLANCK.

de la trois courbure spatiale, $\mathcal{R}$.) Les spectres de puissance angulaire du CMB peuvent être vus comme sources de contraintes semi-directes sur l'inflation. Ce qui est en premier lieu contraint c'est $\mathcal{P}_{S(T)}(k)$. Par une modélisation de la forme de ce spectre, par exemple une loi de puissance, cela peut finalement se traduire en contrainte sur les modèles d'inflation. Evidemment, des écarts à cette loi de puissance peuvent aussi être testé, et cela a été fait dans le cas de PLANCK [2].

Il ressort deux points essentiels de ces spectres de puissance angulaire en température. Tout d'abord, il y a un accord quasi parfait allant des moyennes aux petites échelles angulaires ($\theta < 3$ degrés) entre les données et la prédiction de l'inflation. Cela signifie que ces données possèdent un fort pouvoir d'exclusion de modèles de gravité quantique, ou tout autre alternative en générale, *prédissant* des écarts à la prédiction de l'inflation dans cette gamme d'échelles angulaires. Deuxièmement, une faible tension à 2.5σ entre les données et le modèle apparaît aux grandes échelles angulaires ($\theta > 3$ degrés), précisément ces échelles qui sondent la phase la plus primordiale, et donc la plus proche de l'ère de Planck de l'histoire cosmique. Cela signifie qu'il y a de la "place" pour un écart à la prédiction de l'inflation. Par ailleurs, si l'inflation résout un certain nombre d'aporées des vieux modèles de Big Bang chaud, elle ne les résout pas tous et elle en pose elle-même. Tout d'abord, l'espace-temps UNIVERSE reste singulier dans le paradigme inflationnaire. De façon plus générale, l'ère de Planck n'est tout simplement pas abordée dans ce scénario et l'inflation serait la première phase suivant cette ère durant laquelle une théorie de gravitation quantique est nécessaire. Par ailleurs, initier une phase d'inflation dans l'univers primordial n'est pas aisé. Outre la nécessité

de convoquer un champ scalaire (on peut toujours voir ce champ comme une description effective), les conditions que doit remplir ce champ et/ou la forme de son potentiel d'auto-interaction, semblent peu naturel.

Par ailleurs, la collaboration BICEP2 a récemment rapporté une détection du mode B de polarisation sur des échelles angulaires allant de 1 degrés à la dizaine de degrés. Cette détection peut s'interpréter comme un mode B primordial du aux ondes gravitationnelles produites pendant l'inflation cosmique. Si cela est confirmé, alors ces résultats vont dans le sens d'une tension entre un spectre primordial en pure loi de puissance légèrement rouge (comme prédiction générique des modèles d'inflation les plus simples) et les spectres de puissance angulaires mesuré. Si l'on suit cette interprétation, le rapport tenseur-sur-scalaire serait de $r = 0.2^{+0.05}_{-0.05}$ à $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ [3]. Cela favorise donc les modèles d'inflation dit de *large fields* tels les potentiels en $V(\varphi) = \varphi^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Evidemment, ce niveau reste à confirmer, en particulier relativement aux différents effets systématiques (astrophysiques comme instrumentaux qui viendraient s'ajouter au signal primordial)¹³. On notera d'abord qu'une corrélation croisée entre les données de BICEP2 et celles du KECK ARRAY conduirait à $r = 0.16$. Ensuite, il est possible de placer une limite supérieure sur r partant de la température uniquement. Avec les données PLANCK, cela conduit à $r < 0.11$ à 95% de niveau de confiance [1]. Il semblerait donc qu'il y ait une tension entre les mesures en température faites par PLANCK et les mesures en polarisation faites par BICEP2. D'un point de vue théorique, cette tension peut être réduite en supprimant de la puissance (que ce soit sur le mode scalaire, sur le mode tenseur, ou les deux) aux grandes échelles angulaires (au-delà de la dizaine de degrés) dans le spectre de puissance angulaire des anisotropies en température. La limite supérieure sur r venant des anisotropies de température est obtenue en imposant un *running* nul de l'indice spectral scalaire, *i.e.* $dn_S/d\ln k = 0$. Si l'on relâche cette contrainte, la limite supérieure devient alors $r < 0.26$ à 95% de niveau de confiance [1], avec $dn_S/d\ln k = -0.022 \pm 0.010$ [2]. (Cela permet de supprimer la contribution du mode scalaire aux plus grandes échelles angulaires dans le spectre de puissance angulaire de température.) Une autre possibilité serait de garder inchangé le spectre de puissance primordial scalaire mais d'autoriser un spectre de puissance tenseur *bleu* (avec $n_T \sim 1$). (Cela permet plutôt de supprimer la contribution du mode tenseur aux plus grandes échelles angulaires dans le spectre de puissance angulaire de température.) Si l'on fait confiance aux résultats de BICEP2 et de PLANCK, cela signifierai qu'une modélisation du spectre de puissance scalaire au-delà d'une stricte loi de puissance devient favorisée par l'étude conjointe des anisotropies de température, de polarisation de type E et de polarisation de type B (même s'il convient de noter que du strict point de vue de la température telle que mesurée par PLANCK, un *running* négatif de l'indice spectral scalaire n'est favorisé qu'à 1.5σ). Dans l'hypothèse d'une confirmation des résultats de BICEP2, il est important de mesurer que les deux explications ci-dessus sont en forte tension avec le paradigme inflationnaire. Si l'indice spectral des modes tenseur est fortement bleu, cela contredit la règle de consistance $r = -8n_T$ et plus génériquement l'idée même du roulement lent, puisque un indice spectral tenseur légèrement négatif vient simplement de la petite décroissance du paramètre de Hubble pendant l'inflation de roulement lent. Si à l'inverse, c'est l'option d'un *running* de l'indice spectral scalaire qui est conservé, un problème similaire survient. La valeur du *running* est du même ordre de grandeur, $\sim 10^{-2}$, que l'indice spectral scalaire lui-même. Or dans la logique de l'inflation de roulement lent, l'indice spectral est le résultat d'un développement de Taylor au *deuxième ordre* autour de la solution exponentielle alors que le *running* est un terme de *troisième ordre*. Ainsi, le *running* devrait être bien plus faible que l'indice spectral lui-même et non pas du même ordre de grandeur. S'il existe quelques modèles d'inflation qui permettent cela, ils sont toutefois peu nombreux et ils ne permettent pas, par ailleurs, d'obtenir une valeur élevée du rapport tenseur-sur-scalaire.

Compte tenu de cette tension entre un spectre de puissance scalaire *strictement* en loi de puissance et les derniers résultats de PLANCK (cette tension est issu des données PLANCK seules ; les données BICEP2, dans l'hypothèse d'une confirmation, viendraient alors confirmer cette tension), du fait que les conditions pour l'inflation semble peu naturelles, et que la question de la singularité de Big Bang est mise de côté, il n'est pas déraisonnable de considérer des scénarii alternatifs à l'inflation ; ou plus précisément dans ce qui va suivre, d'étudier l'ère de Planck en vue d'étendre le cadre purement inflationnaire. Il s'agira donc d'étendre le paradigme actuel : étudier la phase qui précède l'inflation, la connecter à cette dernière et enfin chercher à voir si cette phase de Planck laisse ou non une empreinte observationnelle dans les anisotropies du fond diffus cosmologique.

13. Les critiques que l'on peut mettre en avant concernant ces résultats seront explicitement mentionnées en conclusion de la dernière partie de ce manuscrit, Part. III. Ici nous adoptons une perspective plus théorique, cherchant à évaluer l'impact de ces résultats sur les modèles d'Univers primordial.

Deuxième partie

Modélisation en cosmologie quantique à boucles

Sommaire

3	Les idées de la gravité quantique à boucles	61
3.1	Formalisme hamiltonien	61
3.2	Relativité générale et variable de Ashtekar	64
3.3	Quantification par les boucles	66
4	Les idées de la cosmologie quantiques à boucles	69
4.1	Quantification de l'espace FLRW	69
4.1.1	Cosmologie classique dans le formalisme hamiltonien	69
4.1.2	Dynamique quantique	70
4.1.3	Dynamique effective	71
4.2	Equation effective : construction phénoménologique	72
5	Dynamique effective du fond	75
5.1	Equation effective semiclassique	75
5.2	Un univers en rebond	76
5.3	Un univers en rebond et inflationnaire	76
6	Premiers pas vers des traces observationnelles	79
6.1	Impact de la LQC sur le spectre inflationnaire des modes tensoriels	80
6.2	Impact du rebond sur la polarisation du fond diffus cosmologique	82
7	Inhomogénéités cosmiques en cosmologie quantique à boucles	87
7.1	Algèbre des contraintes semiclassiques	87
7.2	Propagation des inhomogénéités cosmiques dans un fond quantique	90

Introduction II

Ce chapitre est dédié à l'exploration théorique et observationnelle d'un modèle quantique de l'Univers primordial. La *cosmologie quantique à boucles* (LQC dans la suite pour l'acronyme anglais de LOOP QUANTUM COSMOLOGY) est un modèle de mini-superspace inspiré de la théorie de la *gravité quantique à boucles* (LQG dans la suite pour l'acronyme anglais LOOP QUANTUM GRAVITY) qui permet d'étudier la dynamique cosmique jusqu'à l'échelle de Planck. Après une rapide introduction aux idées de la LQG, nous montrons comment le problème de la singularité de Big Bang et celui de la naturalité de l'inflation sont résolus dans le cadre de la LQC par un *rebond quantique*. Tester ce modèle de façon observationnelle suppose de construire la théorie des perturbations cosmologiques évoluant dans une telle géométrie quantique. Nous montrons alors les premières tentatives de prédiction de l'impact du rebond quantique sur la production d'ondes gravitationnelles primordiales. Nous montrons enfin un exemple d'une construction théorique *semiclassique* pour décrire la dynamique des perturbations cosmologiques évoluant dans une géométrie quantique, et finalement suggérer les possibles traces que laisserait un tel rebond quantique dans les anisotropies en polarisation du fond diffus cosmologique.

Construire une théorie quantique de la gravité, c'est-à-dire un modèle quantique de l'espace-temps lui-même, est considéré comme l'un des plus grands défi (si ce n'est le plus grand) de la physique moderne. Le problème est double ; à la fois théorique : les méthodes usuelles de quantification développées dans le cadre de la théorie quantique des champs en espace plat sont inapplicables à la relativité générale, vu comme une théorie de champ elle-même ; et observationnel : l'échelle d'énergie à laquelle les effets de gravité quantique devraient se manifester, *i.e.* l'échelle de Planck, est plus de 16 ordres de grandeur au-delà de l'énergie actuellement atteinte au LHC ($\sim 10^4$ GeV au LHC contre $M_{\text{Pl}} \sim 10^{19}$ GeV pour l'échelle de Planck). En l'absence d'outils mathématiques adéquates (dans le sens où les outils mathématiques déjà éprouvés pour quantifier des théories de champs comme l'électrodynamique ou la chromodynamique ne s'appliquent pas à la relativité générale) et d'un horizon expérimental proche, parler de gravité quantique serait plus un discours métaphysique que physico-mathématique. Pourtant, construire (et conséquemment tester) une théorie quantique de la gravitation n'est pas optionnel : dans l'état actuel des développements en physique des hautes énergies, en physique de la gravitation et en cosmologie, une telle théorie est *nécessaire*.

Le problème de la gravité quantique est souvent vu comme l'horizon final de l'unification. Si toutes les interactions fondamentales sont à unifier sous une seule et même théorie, cette unification ne se fera que dans un cadre quantique. Au bout du processus d'unification se trouve une théorie quantique de toutes les interactions, donc de la gravité. La question de la gravitation quantique se voit ramener au problème de l'unification de toutes les interactions et, à suivre les échelles d'énergies d'unification attendues, il s'agit même de la dernière étape de cette unification. L'unification a été un guide extrêmement efficace : cela a fonctionné pour Newton qui unifia mécanique terrestre et mécanique céleste, cela a fonctionné pour Maxwell qui unifia électricité et magnétisme, cela a fonctionné pour Glashow, Weinberg et Salam qui unifièrent électromagnétisme et interaction faible. Pourtant, notre monde aujourd'hui est-il plus unifié qu'au dix-neuvième siècle ? Tournons le regard vers la sphère céleste : partout des étoiles, des planètes, des galaxies, des quasars, des trous noirs, de gigantesques nuages de poussières, des halos de matière noire. Regardons plutôt le monde subatomique, le microcosme : le modèle standard de la physique des particules contient cent vingt degrés de liberté, soit légèrement plus que le nombre d'atomes dans la vieille classification de Mendeleev. Tournons nous alors vers les interactions fondamentales : trois parmi quatre résistent encore à l'unification, et de nombreux physiciens invoquent un scénario de "quintus essentia", littéralement de cinquième essence, pour rendre compte de l'évolution récente de notre Univers.

Plus encore, le principe d'unification pourrait échouer. Unifier, c'est mener un double mouvement. Un premier va du multiple vers l'unique (regrouper par exemple deux forces sous une même symétrie). Mais ce n'est pas suffisant.

Il faut aussi aller de l'unique vers le multiple, c'est-à-dire briser la symétrie pour retrouver la diversité. Le monde aujourd'hui nous apparaît alors si divers de part la brisure de ces symétries. Unifier, c'est réduire diverses entités physiques à une seule entité plus fondamentale, puis générer la diversité à partir de celle-ci. Ce schéma si efficace au cours du dernier siècle a pourtant révélé une possible faille. La théorie des cordes poursuit justement ce but d'une théorie unifiée de la physique : toutes les particules et interactions fondamentales ne seraient que la manifestation de différents modes de vibration d'une unique classe d'objets plus fondamentaux encore, les cordes élémentaires. Certes, la théorie des cordes reste une construction encore mal définie et spéculative. Elle n'en demeure pas moins un cadre de pensée fécond. Ironiquement peut-être, c'est justement cette théorie unificatrice qui révèle un échec possible du schéma d'unification. Cela vient en théorie des cordes, de la découverte du paysage, qui se réfère au nombre gigantesque de vide de la théorie. Il faut pouvoir générer à partir de la théorie unifiée la diversité de notre monde d'aujourd'hui ; c'est-à-dire partant de la théorie des cordes, retrouver les lois de la physique valides aujourd'hui, le modèle standard de la physique des particules avec ses trois interactions ainsi que la théorie d'Einstein de la gravité. Or en théorie des cordes, ce n'est pas seulement une version des lois de la physique effectives aujourd'hui qui est générée, ni même deux, mais quelque 10^{500} versions différentes ! Pour chaque vide de la théorie des cordes, en chaque point de cet insondable paysage, c'est une nouvelle version des lois de la physique qui devrait s'appliquer au sein des grands collisionneurs ou durant l'essentiel de l'histoire de notre Univers. Et seule une petite région du paysage correspondrait aux lois que nous connaissons. L'échec du schéma unificateur n'est ni dans un manque d'unification, ou dans une mauvaise diversification, mais dans un trop plein de diversité. Ce qui dérange ici, c'est l'excès plutôt que le manque.

Si l'unification plaide en faveur d'une théorie quantique de la gravité, le procédé d'unification lui-même doit se voir plus comme un guide directeur, qui peut de plus échouer. Doit-on pour autant oublier l'idée de la gravité quantique ?

Indépendamment de la question théorique de l'unification, on ne peut ignorer la gravitation quantique. Plusieurs expériences de pensées permettent de comprendre que cette tension entre le monde gravitationnel et le monde quantique doit être résolue. Mais plus encore, les théorèmes de singularités de Penrose-Hawking montre que la relativité générale prédit, en quelque sorte, sa propre perte. Prenons l'exemple de la singularité initiale de Big Bang présentes dans la plupart des modèles cosmologiques basés sur la théorie d'Einstein. Lorsque cette singularité est approchée dans l'Univers primordial, l'échelle de Planck est atteinte. Ainsi, une description complète d'un phénomène physique observé, l'Univers en tant qu'objet physique, *nécessite* une théorie quantique de la gravitation ! L'importance de ces théorèmes est double : ils nous apprennent qu'une théorie quantique de la gravité est nécessaire mais aussi quels phénomènes sont susceptibles de sonder cette théorie. D'un point de vue théorique, les théorèmes de singularité ne supposent pas d'unification et il semble raisonnable de chercher un cadre théorique sans se poser la question de l'unification de l'ensemble des interactions. D'un point de vue expérimentales, chercher des traces expérimentales ou observationnelles de la gravitation quantique c'est se tourner vers ces régions *singulières* de l'espace-temps. Dans le cadre de la cosmologie, c'est donc s'intéresser à la phase la plus primordial de l'Univers, l'inflation et, si le cadre théorique nouveau le permet, avant l'inflation.

La théorie de la gravité quantique à boucles [27] a pour but de développer de nouvelles méthodes de quantification permettant une quantification non-perturbative de la relativité générale. En ce sens, elle n'est pas une théorie unificatrice, c'est-à-dire qu'elle ne cherche pas à unifier la gravité aux autres interactions fondamentales, mais plutôt une théorie qui vise la complétude. L'objectif est le suivant : quantifier une théorie de champ spécifique qui est la relativité générale. La relativité générale en tant que théorie de champ tire sa singularité de la symétrie qui lui est sous-jacente. A la différence de *e.g.* l'électromagnétisme qui est formulée sur une structure de fond immuable, l'espace-temps minkowskien, la relativité générale est *invariante de fond*, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune structure sous-jacente fixée. Tout y est dynamique, même l'espace-temps qui, en tant qu'espace géométrique, est identifié au champ gravitationnel. Par ailleurs, la relativité générale est une théorie hautement non-linéaire. (On peut la voir à la manière de la chromodynamique comme une théorie de Yang-Mills non-abélienne. Tout comme les gluons se couplent les uns aux autres, les gravitons se couplent aussi les uns aux autres.) C'est l'ensemble de ces considérations qui est prise en compte dans la gravité quantique à boucles : construire une quantification non-perturbative d'une théorie de champ totalement covariante, sans nécessairement l'unifier aux autres champs.

La gravité quantique à boucle cherche donc à développer des méthodes de quantification d'une théorie de champ de type Yang-Mills dont l'hamiltonien apparaît comme une pure contrainte. Différentes formulations existent (canonique ou covariante) et conduisent toutes à la même théorie. La version la plus développées ces dernières années est une version covariante dite de *mousses de spin*. Elle contient trois ingrédients majeurs. Premièrement un espace de Hilbert qui correspond aux états physiques de la théorie. Cet espace de Hilbert est composé de

réseaux de spin. Il est identique à l'espace d'Hilbert d'une théorie de champ sur réseau (comme par exemple la chromodynamique sur réseau) avec comme groupe de symétrie fondamental le groupe $SU(2)$. Cet espace de Hilbert admet une interprétation géométrique : les théorèmes "spin-géométrie" de Penrose étendent un résultat de Minkowski qui permet de relier un réseau de spin à une géométrie courbe mais discrète. Cet espace de Hilbert peut donc se voir comme les états propres de certains opérateurs géométriques, de volumes et d'aires. Ce sont justement ces opérateurs géométriques qui sont le deuxième ingrédient essentiel de la théorie. On notera un premier résultat majeur : à l'échelle de Planck, l'espace apparaît comme discret ! On peut facilement s'en convaincre de la façon suivante. Le champ gravitationnel est la variable dynamique de la relativité générale et il est promu au rang d'opérateur dans la théorie quantique. Or c'est justement le champ gravitationnel en relativité générale qui détermine les quantités géométriques que sont les longueurs, les aires et les volumes. Autrement dit, ces quantités géométriques deviennent elles-mêmes des opérateurs quantiques et l'analyse spectrale de ces opérateurs montrent justement qu'à l'échelle de Planck, chacun de leur spectre est discret. Cela fixe l'espace de Hilbert cinématique mais pas encore la dynamique. Il est encore nécessaire de déterminer les amplitudes de transition d'un état quantique à un autre, c'est-à-dire les amplitudes de transition allant d'un réseau de spin spécifique (ou encore d'une géométrie quantique) à un autre. C'est le troisième élément clé de la théorie. Ces amplitudes de transition sont univoquement données par une intégrale de chemin. Tout comme l'intégrale de chemin de Feynman détermine l'amplitude de probabilité de transition d'une position x_A à t_A vers une position x_B à t_B , l'intégrale de chemin de la gravité quantique à boucles détermine l'amplitude de transition d'une géométrie quantique à une autre. Cette intégrale de chemin est une mousse de spin et elle peut être vue comme la version quantique de l'espace-temps.

La cosmologie quantique à boucles est l'application des techniques de la gravité quantique à boucles au cas de l'espace-temps UNIVERS [28]. Il ne s'agit pas à proprement parler de l'identification, au sein des réseaux de spin, de l'état quantique le plus à-même de décrire l'univers. Plutôt, il s'agit de se restreindre d'emblée à l'espace-temps FLRW (homogène et isotrope) classique et de quantifier un tel espace-temps en suivant les idées de la gravité quantique à boucles. C'est donc un modèle de *minisuperspace*. Les liens précis avec la théorie mère sont encore à éclaircir mais on peut d'ores et déjà noter plusieurs résultats importants.

- La limite infrarouge de la théorie est correcte. Autrement dit, les équations de Friedmann classiques (décrivant la dynamique classique de l'Univers) sont retrouvées dans la limite des grands volumes.
- La limite ultraviolette de la théorie est correcte dans le sens où la singularité de Big Bang est maintenant remplacée par un rebond quantique régulier (usuellement dénommé par l'anglicisme *big bounce*). L'équation de Friedmann effective fait apparaître un terme quadratique en densité d'énergie avec un signe négatif. Cela assure que la densité d'énergie est bornée supérieurement et que la constante de Hubble change de signe, permettant une transition régulière d'une branche en contraction vers une branche en expansion. (Récemment, il a été montré que les singularités devraient être génériquement résolues dans le cadre de la gravité quantique à boucles [29].)
- Les états semiclassiques, extrêmement piqués autour des solutions classiques, sont stables.
- L'inflation est génériquement prédite comme conséquence de la contraction et du rebond quantique précédant la phase d'expansion. En sortie de rebond, l'Univers est dans les conditions appropriées pour qu'une phase d'inflation débute avec une probabilité très proche de l'unité. La durée de cette phase d'inflation dépend essentiellement de trois paramètres (et elle peut être déduite de la connaissance de ces trois paramètres) : le paramètre de Barbero-Immirzi, la masse du champ d'inflaton et la fraction d'énergie potentielle dans le champ d'inflaton au moment du rebond.
- Le cadre théorique donnant la dynamique des perturbations cosmologiques évoluant dans une géométrie de fond quantique est en partie établie. Essentiellement deux approches différentes ont été adoptées. Il reste encore à les comparer tant dans leurs fondements théoriques que dans leurs conséquences phénoménologiques.

Chapitre 3

Les idées de la gravité quantique à boucles

La LQG est une quantification non-perturbative de la relativité générale. Son ambition n'est pas de développer une théorie unifiée de toutes les interactions, mais plutôt une théorie complète dans laquelle l'interaction gravitationnelle, sans être unifiée aux autres interactions, n'en demeure pas moins traitée dans un cadre quantique. En ce sens, c'est une théorie des géométries quantiques.

3.1 Formalisme hamiltonien

La voie usuelle de la quantification part d'un formalisme hamiltonien de la mécanique, et c'est probablement le cadre le plus approprié pour traiter le problème de la gravitation quantique. Cependant, le formalisme hamiltonien ne traite pas l'espace et le temps de façon identique (du moins de façon explicite) et c'est exactement ce qu'on ne souhaite pas faire pour une théorie totalement covariante comme la relativité générale. Il n'en demeure pas moins possible de reformuler la relativité générale dans une version hamiltonienne. L'espace-temps est feuilleté le long d'une direction temporelle arbitraire. Evidemment, le choix du feuilletage est conventionnel et une écriture hamiltonienne propre de la relativité générale doit être insensible à ce choix.

La première formulation hamiltonienne de la relativité générale est le formalisme ADM (pour Arnowitt-Deser-Misner). Dans un premier temps, l'espace-temps est décomposé en une partie spatiale et une partie temporelle : il s'agit d'un feuilletage où chaque "tranche" est une hypersurface tridimensionnelle correspondant à la partie spatiale tandis que le passage d'une "tranche" à une autre correspond à une "évolution" dans le temps. L'intervalle relativiste devient

$$ds^2 = (Ndt)^2 - q_{ab} (N^a dt + dx^a) (N^b dt + dx^b) \quad (3.1)$$

avec N la fonction de *lapse* et N^a le vecteur de *shift*. (Les indices latin a, b varient de 1 à 3. Ce sont des indices spatiaux associé à la base naturelle $\vec{\partial}_a$ du système de coordonnées x^a sur les hypersurfaces.) De façon intuitive, et sans trop se soucier des détails propres aux théories contraintes, on peut facilement se convaincre que le nombre de degrés de liberté est égal aux 10 fonctions décrivant le tenseur métrique symétrique $g_{\mu\nu}$: 1 degré de liberté pour N , 3 pour N^a et 6 pour le tenseur symétrique q_{ab} . Le sens de la fonction de laps et du vecteur de shift est intuitivement illustré sur la figure 3.1. Considérons deux hypersurface Σ_t à t et Σ_{t+dt} à $t + dt$ ainsi que le quadrivecteur n^μ , orthogonal à Σ_t au point $A = (t, x^a)$. L'évolution purement temporelle du point A , c'est-à-dire sans variation spatiale, est le point $C = (t + dt, x^a)$ sur Σ_{t+dt} . Les points A et C sont connectés par le quadrivecteur $t^\mu dt$. La même "évolution" peut être obtenue en deux étapes, faisant intervenir explicitement la fonction de laps et le vecteur de shift. Partant du point A et se déplaçant suivant le quadrivecteur $n^\mu N dt$ nous amène sur le point $B = (t + dt, x^a - N^a dt)$ de l'hypersurface Σ_{t+dt} . Il suffit alors de faire un second déplacement de $N^a dt$ sur l'hypersurface Σ_{t+dt} pour rejoindre le point C . Une fois le feuilletage effectué, l'espace de phase peut être identifié : il s'agit de la métrique induite sur les hypersurfaces, c'est-à-dire q_{ab} , et la courbure extrinsèque K_{ab} . Cette dernière peut se définir comme la dérivée de Lie de la métrique induite q_{ab} , elle-même liée à la dérivée temporelle de q_{ab} . Intuitivement, la courbure extrinsèque d'une hypersurface donnée Σ_t peut se comprendre comme la courbure de

cette hypersurface tridimensionnelle vu depuis la variété quadridimensionnelle dans laquelle elle est immergée¹.

Soit une variété $\mathcal{M}$ de dimension 4 à laquelle est associée une métrique $g_{\mu\nu}$. On appelle $x^\mu = (t, x^a)$ un système de coordonnées sur $\mathcal{M}$. La base naturelle des vecteurs (dans l'espace tangent) est $\mathbf{e}_\mu = \partial_\mu$. Par exemple, le vecteur $\mathbf{e}_t$ est tangent aux lignes pour lesquelles $x^a = \text{cte}$ pour tout $a = \{1, 2, 3\}$. On suppose cette variété globalement hyperbolique et sa topologie est alors $\mathcal{M} \simeq \Sigma \times \mathbb{R}$. Une variété globalement hyperbolique admet un feuilletage par une famille continue d'hypersurfaces (ici tridimensionnelles) de type espace et notée $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Cela signifie qu'il existe un champ scalaire $\hat{t}$ dont le gradient n'est jamais nul et dont les hypersurfaces de niveau sont les Σ_t telles que ces dernières couvrent l'ensemble de la variété quadridimensionnelle $\mathcal{M}$. En d'autre terme, pour tout point p de $\mathcal{M}$, il existe un réel t tel que le point p se situe sur Σ_t et $t = \hat{t}(p)$. Le fait que le gradient de $\hat{t}$ ne s'annule pas assure que les hypersurfaces ne se recouvrent pas. Le champ scalaire $\hat{t}$ dont le gradient est orthogonal à Σ_t permet de définir le vecteur $\mathbf{n}$ de type temps orthonormal aux hypersurfaces et dont les composantes covariantes sont : $n_\mu = (N(x^\nu), 0, 0, 0)$ avec $N = (\hat{t}_{;\mu} \hat{t}^{;\mu})^{-1/2}$ la fonction de laps. Par ailleurs, le passage d'une feuille Σ_t à une feuille $\Sigma_{t+\delta t}$ se fait à l'aide du vecteur normal d'évolution donné par $\mathbf{m} = N \times \mathbf{n}$. Ce vecteur permet de transporter la surface Σ_t en $\Sigma_{t+\delta t}$ dans le sens où le point p' défini comme $p' = p + \delta t \times \mathbf{m}$ avec $p \in \Sigma_t$, se trouve sur la surface $\Sigma_{t+\delta t}$. Toutefois, le vecteur $\mathbf{m}$ ne coïncide pas nécessairement avec le vecteur $\mathbf{e}_t$. Plus précisément, ces deux vecteurs seront égaux si les lignes de coordonnées spatiales constantes sont orthogonales aux hypersurfaces Σ_t . Un choix approprié du système de coordonnées tel que $\mathbf{m} = \mathbf{e}_t$ est toujours possible. Si un tel système n'a pas été identifié, les deux vecteurs sont liés par le vecteur de shift β , nécessairement tangent aux hypersurfaces Σ_t : $\mathbf{e}_t = N\mathbf{n} + \beta$. Les composantes du vecteurs de shift sont $\beta^\mu = (0, N^a)$. Les composantes covariantes et contravariantes du vecteur $\mathbf{n}$ orthonormal aux hypersurfaces sont :

$$n_\mu = (N(x^\nu), 0) \text{ et } n^\mu = \frac{1}{N(x^\nu)}(1, N^a(x^\nu)).$$

La fonction de laps et le vecteur de shift s'interprètent de la manière suivante. La quantité $N\delta t$ fournit l'élément de temps propre entre les surfaces Σ_t et $\Sigma_{t+\delta t}$ mesuré par un observateur dont la quadrivitesse est le vecteur $\mathbf{n}$. Lorsque l'on passe de la surface Σ_t à la surface $\Sigma_{t+\delta t}$, le point p en $X^\mu(p) = (t, x^a)$ se trouve en $X^\mu + \delta X^\mu = (t + \delta t, x^a + N^a \delta t)$. Le vecteur de shift fournit donc le décalage suivant la partie spatiale lorsque l'on passe de la surface Σ_t à la surface $\Sigma_{t+\delta t}$. L'opérateur $\Pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ permet de projeter les vecteurs de l'espace tangent de la variété $\mathcal{M}$ sur l'espace tangent des hypersurfaces Σ_t . Ce projecteur permet de définir la métrique induite (appelée aussi première forme fondamentale) sur les hypersurfaces Σ_t par $q_{ab} = g_{\mu\nu} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu$. La métrique d'un espace-temps feuilleté est alors

$$ds^2 = N^2(t, x^c) dt^2 - q_{ab}(t, x^c) (dx^a + N^a(t, x^c) dt) (dx^b + N^b(t, x^c) dt).$$

En plus de la métrique induite q_{ab} , le plongement des hypersurfaces Σ_t est caractérisé par la courbure extrinsèque (dite deuxième forme fondamentale) définie comme $K_{ab}(t, x^c) = -n_{\mu;\nu} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu = -n_{a;b}$. De façon plus « intuitive », q_{ab} décrit la métrique interne des hypersurfaces dont on peut déduire une courbure intrinsèque tridimensionnelle, indépendante de l'immersion des hypersurfaces dans $\mathcal{M}$. La courbure extrinsèque K_{ab} mesure la projection sur les hypersurfaces Σ_t de la dérivation covariante du vecteur $\mathbf{n}$. Elle dépend donc de l'immersion des hypersurfaces dans $\mathcal{M}$. Dans ce formalisme, le choix de la fonction de laps N et du vecteur de shift N^i est équivalent au choix du système de coordonnées. Puisque le choix du système est arbitraire, il en va de même du choix de N et N^a , c'est-à-dire du feuilletage.

En mécanique classique, le lagrangien est vu comme une fonction de $2n$ variables conjuguées, elles-mêmes dépendantes du temps, *i.e.* $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$, à partir duquel les n moments conjugués sont définis comme

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.2)$$

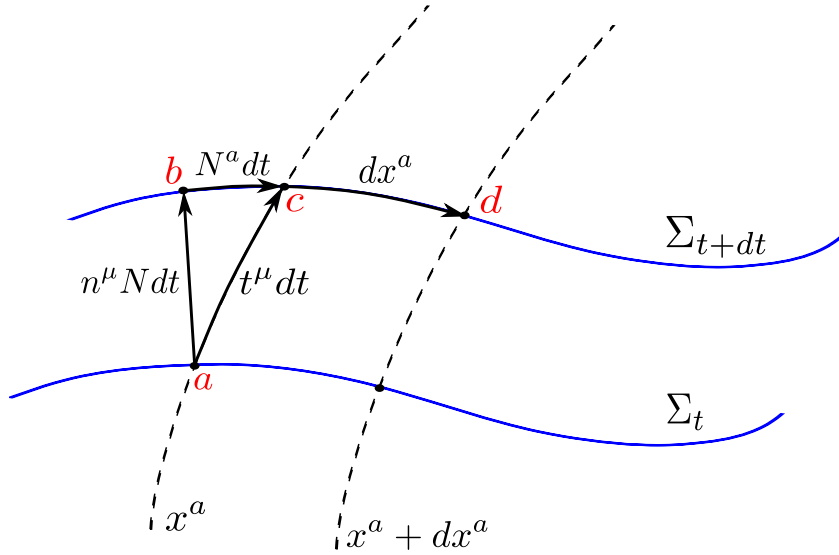
On définit alors le fonction de Hamilton, définie sur l'espace de phase (q_i, p_i) à $2n$ dimensions, par une transformation de Legendre

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (3.3)$$

Une structure symplectique est alors définie sur cet espace de phase à l'aide des crochets de Poisson

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (3.4)$$

1. Cela est complètement analogue au cas d'un cylindre. Cet objet bidimensionnel n'a pas de courbure intrinsèque. toutefois, si on l'immerge dans l'espace euclidien tridimensionnel, un cylindre a de ce point de vue, une courbure, dite extrinsèque.

FIGURE 3.1 – Illustration du feuilletage d'un espace-temps en hypersurface Σ_t de type espace.

Il est facilement déduit de cette définition que

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (3.5)$$

La donnée du crochet de Poisson et de la fonction de Hamilton suffit à déterminer l'évolution temporelle de n'importe quelle fonction définie sur l'espace de phase par

$$\dot{f} = \{f, H\} \quad (3.6)$$

avec le cas spécifique des fonctions q_i et p_i qui donne les équations usuelles de Hamilton

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.7)$$

Il arrive régulièrement en physique que le système soit contraint. Un exemple simple est celui du pendule pesant de longueur ℓ et oscillant dans un plan (x, y) . La dynamique peut être décrite dans le plan sur l'espace de phase $(x, y; p_x, p_y)$. Il faudra alors imposer la contrainte que $x^2 + y^2 = \ell^2$. Dans le cas de la relativité générale, ce sont les symétries fondamentales de la théorie qui vont agir comme des contraintes. On peut facilement s'en convaincre en se rappelant que le choix du système de coordonnées est arbitraire ce qui conduit aux identités de Bianchi. Ces identités de Bianchi s'appliquent à n'importe quelle géométrie solution des équations d'Einstein et indique que les 10 composantes du tenseur métrique ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres. Les symétries fondamentales et donc les contraintes, s'expriment comme une relation entre les variables de l'espace de phase, *i.e.* $C(p_i, q_i) = 0$. (Dans le cas du pendule pesant, la contrainte serait $C(x, y) = x^2 + y^2 - \ell^2$.) Les solutions des équations du mouvement sont obtenues en extrémisant l'action. Avec les contraintes, il s'agira donc d'extrémiser une action sous contrainte à l'aide des multiplicateurs de Lagrange $L \rightarrow L_{tot} = L + \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m$ où M est le nombre total de contraintes et λ_m le multiplicateur de Lagrange associé à chaque contrainte. Après une transformation de Legendre, on obtient la fonction de Hamilton sous contrainte (appelée Hamiltonien total)

$$H_{tot}(q_i, p_i) = H(q_i, p_i) - \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(p_i, q_i). \quad (3.8)$$

Les solutions du système, pour des conditions initiales données, vont dépendre de la valeur des multiplicateurs de Lagrange. Mais il faut se rappeler que ces contraintes ont pour origine les symétries propres de la théorie. Ainsi, un choix des valeurs des multiplicateurs de Lagrange correspond à un choix de jauge et les solutions différentes,

pour des λ_m différents sont reliées les unes aux autres par une symétrie : elles sont équivalentes de jauge. Ce formalisme s'étend au cas des théorie de champs en considérant les fonctions de Hamilton comme des fonctionnelles du champ et de son moment conjugué, et en remplaçant dans les crochets de Poisson les dérivations usuelles par des dérivations fonctionnelles. Si $A_i(x)$ est la variable de configuration du champ et $E^j(y)$ son moment conjugué, le crochet de Poisson est

$$\{A_i(x), E^j(y)\} = \delta_i^j \delta(x - y), \quad (3.9)$$

dans lequel apparaît à la fois un δ de Kronecker et un δ de Dirac.

Ce formalisme hamiltonien avec la notion de contrainte permet une description de la relativité générale. Mais la situation est particulière dans ce cas. La symétrie fondamentale derrière la relativité générale est l'invariance par difféomorphisme qui se comprend, en tant que difféomorphisme passif, comme la liberté dans le choix du système de coordonnées. Or le feuilletage, décrit par N et N^a change avec le système de coordonnées. Si la relativité générale est "insensible" au choix du système de coordonnées, elle est donc aussi "insensible" au choix du feuilletage. Il en résulte que la fonctionnelle de Hamilton en relativité générale est une pure contrainte et, à proprement parler, il n'y a pas d'évolution². La dynamique peut être vue comme une transformation canonique entre t et $t + dt$ générée par l'Hamiltonien. Mais puisque l'Hamiltonien est une pure contrainte, les transformations canoniques qu'il génère sont des transformations de jauge et deux points dans l'espace de phase reliés par une telle transformation sont physiquement équivalents.

3.2 Relativité générale et variable de Ashtekar

Dans un formalisme lagrangien, la relativité générale est donnée par l'action de Einstein-Hilbert

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x. \quad (3.10)$$

Or les composantes g^{00} et g^{0a} apparaissent dans l'expression du scalaire de Ricci sans dérivation temporelle et ces composantes sont des multiplicateurs de Lagrange. Ils sont simplement reliés aux fonctions de laps et au vecteur de shift par $g^{00} = 1/N^2$ et $g^{0a} = N^a/N^2$ qui joueront donc identiquement le rôle de multiplicateurs de Lagrange, à chacun desquels est associé une contrainte. La contrainte associée au vecteur de shift est un vecteur dont le flot est relié aux difféomorphisme d'espace (autrement dit la liberté de choisir le système de coordonnées des hypersurfaces Σ_t). La contrainte associée à la fonction de laps est quant à elle un scalaire et elle reflète la déformation des hypersurfaces passant de t à $t + dt$. (Nous serons peu rigoureux dans nos dénomination des contraintes. La contrainte associée à N^a sera aussi bien appelée contrainte vecteur ou contrainte de difféomorphisme. La contrainte associée à N sera aussi bien appelée contrainte scalaire ou contrainte hamiltonienne. Il faudra toutefois garder à l'esprit que nous distinguons *contrainte hamiltonienne* de *hamiltonien total*, ce dernier étant la somme des contraintes.)

En LQG, les variables canoniques utilisées ne sont pas la métrique induite q_{ab} et la courbure extrinsèque K^{ab} mais les variables d'Ashtekar. Tout comme les variables du formalisme ADM, ces variables sont canoniquement conjuguées et la relativité peut être reformulée de façon hamiltonienne sur cet espace de phase. La première de ces variables est le champ de triade densifiée, ou densité de triade. On appelle e_a^I le champ de triade où a est un indice de coordonnées sur l'hypersurface et I est un indice interne, par exemple à valeur dans l'espace tangent. Relativement à l'indice interne I , le champ de triade est un vecteur, et une 1-forme vis-à-vis de l'espace tangent de l'hypersurface Σ_t labellisée par les coordonnées x^a . (Nous rappelons que les indices spatiaux sont levés et descendus par application de q_{ab} et q^{ab} tandis que les indices internes sont levés ou descendus par application de δ_{IJ} et δ^{IJ} .) Intuitivement, il s'agit du champ qui donne le référentiel localement cartésien en chaque point de l'hypersurface considérée. Il est relié à la métrique induite via $q_{ab} = \delta_{IJ} e_a^I e_b^J$ (ou inversement $\delta_{IJ} = q_{ab} e_I^a e_J^b$). Dans le formalisme d'Ashtekar, le champ de triade est choisi à valeur dans $SU(2)$. De là, on peut définir le champ de triade densifiée par $\det(q_{ab}) q^{ab} = E_I^a E_J^b \delta^{IJ}$. La variable canoniquement conjuguée à E_I^a est la connexion d'Ashtekar A_a^I qui se définit à partir de la courbure extrinsèque et la connexion de spin. On définit d'abord $K_a^I = K_{ab} e^{bI} = K_{ab} E^{bI} / \sqrt{\det(q_{ab})}$. Considérons maintenant un vecteur de $SU(2)$ défini comme $V^I(x^a) = V^a(x^a) e_a^I$. La connexion de spin Γ_{aJ}^I est une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Elle permet simplement de définir le transport d'un vecteur de Lorentz sur l'hypersurface Σ_t et donc la dérivation covariante d'objet portant un indice interne, *i.e.*

$$\nabla_a V^I = \partial_a V^I + \Gamma_{aJ}^I V^J. \quad (3.11)$$

2. EVOLUTION signifie changement dans le temps alors que CONTRAINTE signifie, implicitement ici, relation *constante* dans le temps. Si l'hamiltonien est une contrainte, l'évolution qu'il génère est tout simplement nulle.

On définit alors la forme duale de cette connexion par $\Gamma_a^I = \Gamma_{aJK}\varepsilon^{IJK}$ où ε^{IJK} est le tenseur de Levi-Civita dans l'espace interne. La connexion d'Ashtekar est une famille de connexions paramétrisée par le paramètre de Barbero-Immirzi γ :

$$A_a^I = K_a^I + \gamma \Gamma_a^I. \quad (3.12)$$

Le paramètre de Barbero-Immirzi est un paramètre libre dont la valeur libre (réelle ou complexe) n'affecte pas la théorie classique. Ces deux variables, densité de triade et connexion d'Ashtekar, sont canoniquement conjuguées et leur crochet de Poisson est

$$\{A_a^I(x), E_J^b(y)\} = 8\pi G \delta_J^I \delta_a^b \delta(x-y). \quad (3.13)$$

Dans la suite nous noterons les indices internes par i, j , etc. plutôt que I, J , plus conforme aux conventions d'écriture usités en LQG et LQC.

Le choix de $SU(2)$ peut apparaître comme surprenant. Partant d'hypersurface tri-dimensionnel, le champ de triade pourrait intuitivement être construit comme une 1-forme à valeur dans $SO(3)$, tout comme le champ de tetrade e_μ^T est une 1-forme à valeur dans $SO(3,1)$. Ainsi, le champ de triade e_a^I serait interprété relativement à l'indice I comme donnant trois vecteurs de base du plan tangent à Σ_t . (Pour chaque valeur de $I \equiv \bar{I}$ correspond une 1-forme dont les composantes dans la base naturelle associée aux coordonnées x^a est e_a^I .) Il est toutefois possible de choisir cette 1-forme à valeur dans $su(2)$ puisqu'il existe un isomorphisme entre la représentation adjointe de $su(2)$ et les vecteurs de $SO(3)$ sur $\mathbb{R}^3$. La donnée de ces trois vecteurs suffit à déterminer la métrique par $q_{ab} = \delta_{IJ} e_a^I e_b^J$. Mais on peut facilement se convaincre qu'en appliquant une rotation dans le plan tangent, $e_a^I \rightarrow \tilde{e}_a^I = R_{IJ} e_a^J$, on définit identiquement la métrique, i.e. $q_{ab} = \delta_{IJ} \tilde{e}_a^I \tilde{e}_b^J$. Le champ de triade contient donc des degrés de liberté qui ne sont pas pertinent du point de vue de la métrique q_{ab} . Ainsi l'espace de phase partant de e_a^I contiendrait plus de degrés de liberté que l'espace de phase initial de la relativité générale, (q_{ab}, K^{ab}) . Pour s'assurer que la reformulation en terme des variables d'Ashtekar se ramène bien à l'espace de phase de la relativité générale, on ajoutera une contrainte supplémentaire dans l'hamiltonien total, appelée contrainte de Gauss. Autrement dit, si l'on part de l'espace de phase définit par $\Gamma = (E_a^I, K_a^I)$, représentant respectivement le champ de triade densifié et la courbure extrinsèque, il est possible d'effectuer une réduction symplectique de cet espace de phase pour aboutir à l'espace de phase de la relativité générale. Cette réduction symplectique s'obtient en prenant le quotient de Γ avec le groupe des rotations infinitésimales de $SO(3)$. Ces rotations étant générées par la contrainte de Gauss, cela signifie que nous devons imposer cette contrainte dans l'Hamiltonien.

Avec cette paire de variables conjuguées, le Lagrangien de la relativité générale devient

$$L = \int_{\Sigma_t} d^3x \left(\frac{1}{8\pi G \gamma} E_a^i \dot{A}_a^i - NC - N^a C_a - N^i C_i \right), \quad (3.14)$$

où la connexion d'Ashtekar apparaît comme l'analogue de la variable de configuration et la densité de triade comme l'analogue du moment conjugué, et où

$$C = \frac{1}{16\pi G} \frac{E_a^i E_b^j}{\sqrt{|\det E|}} \left[\varepsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right], \quad (3.15)$$

$$C_a = \frac{1}{8\pi G \gamma} (E_a^b F_{ab}^i - A_a^i C_i), \quad (3.16)$$

$$C_i = \frac{1}{8\pi G \gamma} \mathcal{D}_a E_a^i = \frac{1}{8\pi G \gamma} (\partial_a E_a^i + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a), \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

et $F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon^i{}_{jk} A_a^j A_b^k$ est la courbure de la connexion d'Ashtekar. Il se dégage explicitement de ce Lagrangien que les quantités N, N^a et N^i sont des multiplicateurs de Lagrange respectivement associés à la contrainte hamiltonienne C , à la contrainte de difféomorphisme C_a et à la contrainte de Gauss C_i . Il est évident de se convaincre que ces trois quantités sont associées à des contraintes puisqu'elles ne font que tracer les symétries sous-jacentes à la relativité générale ; N et N^a ne correspondent qu'à un choix conventionnel de feuilletage alors que N^i ne correspond qu'à un choix conventionnel vis-à-vis des rotations du champ de triade. Par une transformation de Legendre, la fonctionnelle de Hamilton est alors la somme de trois contraintes fois des multiplicateurs de Lagrange (à l'exception de tout autre terme)

$$H_{RG} = \int_{\Sigma_t} d^3x (NC + N^a C_a + N^i C_i), \quad (3.19)$$

et l'extrémisation du Lagrangien conduit à rendre l'Hamiltonien de la relativité générale nul, $H_{RG} \approx 0$, sur les solutions physiques. Il est alors commode de définir les contraintes intégrées sur les hypersurfaces

$$\mathcal{C}_1 = G[N^i] = \int_{\Sigma} d^3x N^i C_i, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{C}_2 = D[N^a] = \int_{\Sigma} d^3x N^a C_a, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{C}_3 = S[N] = \int_{\Sigma} d^3x NC. \quad (3.22)$$

Ainsi $H_{RG}[N^i, N^a, N] = G[N^i] + D[N^a] + S[N]$. Puisque l'hamiltonien pris sur une solution physique s'annule à tout temps -on dit que l'hamiltonien s'annule faiblement $H_{RG} \approx 0$ - il en va de même de sa dérivée temporelle, $\dot{H}_{RG} \approx 0$. Puisque la dynamique est donnée par $\dot{f} = \{f, H_{RG}\}$, on en déduit aisément que le crochet de Poisson de l'Hamiltonien avec lui-même est faiblement nul :

$$\{H_{RG}[N^i, N^a, N], H_{RG}[M^i, M^a, M]\} \approx 0. \quad (3.23)$$

On déduit de cela l'algèbre des contraintes. L'équation ci-dessus se réécrit explicitement comme

$$\{G[N^i] + D[N^a] + S[N], G[M^i] + D[M^a] + S[M]\} \approx 0. \quad (3.24)$$

Compte tenu de la linéarité des crochets de Poisson, la condition ci-dessus se ramène à une algèbre de première classe pour les contraintes,

$$\{\mathcal{C}_I, \mathcal{C}_J\} = f^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a) \mathcal{C}_K, \quad (3.25)$$

où les fonctions de structures f^K_{IJ} dépendent de l'espace de phase. En ce sens, les contraintes ne forment pas une algèbre de Lie mais plutôt un algebroid de Lie, *i.e.* un ensemble d'algèbre. On peut le comprendre intuitivement ainsi : les fonctions de structures étant dépendantes de l'espace de phase, nous avons une algèbre de Lie avec ses propres fonctions de structures associées à chaque point de l'espace de phase. Si nous nous plaçons sur la surface correspondant à l'annulation de la contrainte de Gauss, $G[N^i] \approx 0$, l'algèbre des contraintes se réduit à

$$\{D[M^a], D[N^a]\} = D[M^b \partial_b N^a - N^b \partial_b M^a], \quad (3.26)$$

$$\{D[M^a], S[N]\} = S[M^a \partial_a N - N \partial_a M^a], \quad (3.27)$$

$$\{S[M], S[N]\} = sD[q^{ab}(M \partial_b N - N \partial_b M)], \quad (3.28)$$

avec s la signature de la métrique ($s = 1$ pour une signature lorentzienne et $s = -1$ pour une signature euclidienne).

3.3 Quantification par les boucles

Historiquement, une des premières approches pour quantifier la relativité générale a été proposé par J. A. Wheeler et B. de Witt. Partant du formalisme hamiltonien ADM, l'hamiltonien classique est

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\sqrt{\det(q_{ab})}} G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \sqrt{\det(q_{ab})} R^{(3)}, \quad (3.29)$$

avec $G_{abcd} = (q_{ac}q_{bd} + q_{ad}q_{bc} - q_{ab}q_{cd})$, $R^{(3)}$ la 3-courbure des hypersurfaces et π^{ab} le moment conjugué à q_{ab} . L'approche de Wheeler-de Witt consiste à promouvoir cet hamiltonien au rang d'opérateur s'appliquant sur une fonctionnelle d'onde $\Psi(q_{ab})$ mesurant l'amplitude de probabilité d'être dans une géométrie donnée, avec la règle de commutation usuelle pour les variables canoniques :

$$q^{ab} \rightarrow \hat{q}^{ab}(t, x^c) \Psi(q_{ab}) = q^{ab}(t, x^c) \times \Psi(q_{ab}) \quad (3.30)$$

$$\pi^{ab} \rightarrow \hat{\pi}^{ab}(t, x^c) \Psi(q_{ab}) = -i \frac{\delta \Psi(q_{ab})}{\delta q^{ab}(t, x^c)}. \quad (3.31)$$

Une même approche peut être adoptée partant du formalisme de Ashtekar, à la différence que ce sera la connexion qui jouera le rôle de variable de configuration et non le champ de triade, *i.e.*

$$A_a^i \rightarrow \hat{A}_a^i(t, x^c) \Psi(A_a^i) = A_a^i(t, x^c) \times \Psi(A_a^i) \quad (3.32)$$

$$E_i^a \rightarrow \hat{E}_i^a(t, x^c) \Psi(A_a^i) = -i \frac{\delta \Psi(A_a^i)}{\delta A_a^i(t, x^c)}. \quad (3.33)$$

A ce stade, même si le formalisme de Ashtekar peut potentiellement simplifier la contrainte scalaire, une telle approche rencontre les mêmes difficultés que l'approche historique de Wheeler et de Witt. En particulier, il est impossible de définir proprement un produit scalaire entre différents états quantiques. Or cet outil mathématique est nécessaire dans la théorie quantique, afin de pouvoir, par exemple, calculer les amplitudes de probabilité.

Pour contourner ces difficultés, les *boucles* sont introduites. Ces boucles sont construites à partir des holonomies de la connexion de Ashtekar et les holonomies généralisent la notion de la circulation d'un vecteur le long d'une boucle. Prenons l'exemple suivant : supposons que nous cherchons à transporter parallèlement l'objet E_i^b le long de la courbe fermée $\gamma^a(s)$ (nous nous rappellerons que a sont les indices d'espace et i les indices internes). Le transport parallèle consiste à annuler la *dérivée covariante* :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^a}{ds} \nabla_a E_i^b &= 0 \\ \rightarrow \dot{\gamma}^a (\partial_a + A_a^i) E_i^b &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\rightarrow \frac{dE_i^b}{ds} = -\dot{\gamma}^a(s) A_a^i(s) E_i^b(s) \quad (3.35)$$

ce qui donne une solution 'formelle'

$$E_i^b(s) = E_i^b(0) - \int_0^s \dot{\gamma}^a(s') A_a^i(s') E_i^b(s') ds'. \quad (3.36)$$

Il faut toutefois se méfier de cette solution 'formelle'. On se rappellera que dans le cas de la gravitation, la connexion est à valeur dans l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Or ce groupe n'est pas *commutatif*. Il faut donc convoquer la notion de produit ordonné le long de la courbe fermée. Cette précaution prise en compte, l'holonomie apparaît comme le produit ordonné de la connexion le long de notre courbe fermée :

$$h_\gamma[A] = P \left[\exp \left(- \oint_\gamma \dot{\gamma}^a(s) A_a(s) ds \right) \right]. \quad (3.37)$$

Ce produit ordonné est une matrice. Quelle est l'intérêt de cet objet ? Le théorème de Giles montre que si l'on calcul la trace des holonomies sur toutes les boucles possibles, alors toute l'information *invariante de jauge* de la connexion peut être *reconstruite* [31]. Cela signifie que les holonomies peuvent servir de fonctions de *base* pour toute fonction des holonomies ! Or nous avons précisément vu que la fonctionnelle d'onde est fonction de la connexion d'Ashtekar. Autrement dit, toute fonctionnelle d'onde invariante de jauge peut se décomposer suivant les holonomies. Il s'agit de la représentation en *boucle* de la fonctionnelle d'onde, *i.e.*

$$\Psi[A] = \sum_\gamma \Psi_\gamma h_\gamma[A]. \quad (3.38)$$

Ces boucles sont des boucles de Wilson et, dans le cadre de la relativité générale, on peut facilement se convaincre de leur pertinence de la façon suivante. On peut en effet se rappeler qu'une manière de définir le tenseur de Riemann consiste justement à s'intéresser à la circulation d'un vecteur le long d'un chemin fermé. Il en ressort que les boucles fermées sont aussi un moyen de mesurer la courbure.

Les holonomies sont donc une représentation possible de l'espace de Hilbert cinématique. A ce stade, la dynamique n'est pas encore donnée. Il faut construire l'opérateur hamiltonien, utilisant donc les opérateurs d'holonomie, puis résoudre cette contrainte afin de trouver ces fonctionnelles d'onde qui décriront une géométrie quantique. En ce sens, la représentation en boucle nous donne l'espace où nous devons chercher de telles solutions. Mais cet espace de Hilbert est légèrement plus compliqué. En effet, à chaque boucle nous pouvons associer une représentation différente de l'algèbre $su(2)$. Si deux boucles se croisent en un point, et que sur chacune de ces boucles, ce sont deux

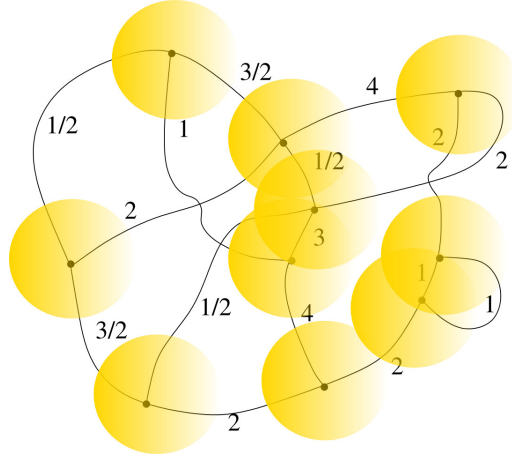


FIGURE 3.2 – Exemple d'un réseau de spin. Chaque ballon jaune correspond à un quanta d'espace.

représentations différentes de $su(2)$ qui sont considérées, il nous faut alors 'coller' ces deux représentations à l'aide d'un objet appelé 'intertwiner'. (Un intertwiner peut se comprendre comme le couplage entre différent moment cinétique, comme par exemple les coefficients de Clebsch-Gordan, ou symbole de Wigner- $3j$, pour le couplage de 3 moments cinétique.) Le résultat est un *réseau de spin*, c'est-à-dire un graphe avec des intersections et des liens colorés, la couleur des liens étant donné par la dimension de la représentation adopté pour la boucle faisant lien. Une illustration d'un réseau de spin est donné dans la figure 3.2. Quel est l'intérêt des réseau de spin en tant que base de l'espace de Hilbert cinématique ? Il s'avère que la représentation en boucle constitue une base sur-complète (c'est-à-dire que certains vecteurs de la base, voire beaucoup, sont redondants). En passant au réseau de spin, on limite ce caractère sur-complet.

En vertu du théorème spin-géométrie de Penrose, un réseau de spin a une interprétation géométrique en terme de géométrie discrète. Chaque intersection s'interprète comme un volume élémentaire d'espace, tandis que chaque lien, interface entre deux volumes, correspond à une surface élémentaire.

Chapitre 4

Les idées de la cosmologie quantiques à boucles

4.1 Quantification de l'espace FLRW

L'approche rigoureuse qui consisterait à proposer un modèle quantique de l'univers, en tant qu'espace-temps maximalement symétrique, consisterait à partir de la LQG et d'identifier l'état quantique correspond à une géométrie homogène et isotrope. Dans l'état actuel, identifier un tel état et en déterminer la dynamique n'est pas aisé.

Une autre voix, celle de la LQC, consiste plutôt à partir directement de l'espace de phase réduit par homogénéité et isotropie, puis à appliquer une méthode de quantification inspirée de la LQG. Dans cette approche dite de *minisuperspace*, ce ne sont pas les méthodes complètes de la LQG qui sont utilisées, mais plutôt les faits les plus marquants, avec en particulier l'utilisation des boucles. Cette technique viole en partie certaines des hypothèses du théorèmes de Stone-Von Neumann, montrant l'unicité des relations de commutation canoniques entre l'opérateur de position et celui d'impulsion [30]. Ainsi, des résultats différents de ce qui pouvait être obtenu avec l'approche de Wheeler-de Witt sont attendus, ce qui est heureux puisque dans l'approche de Wheeler-de Witt, la singularité de Big Bang n'est pas résolue.

4.1.1 Cosmologie classique dans le formalisme hamiltonien

Nous nous limiterons ici au cas de la quantification de l'espace-temps FLRW avec section spatiale plate, *i.e.* $ds^2 = dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ avec (x, y, z) un système de coordonnées cartésien sur toute l'hypersurface. Le cas $\kappa = \pm 1$ a aussi été traité.

Sous l'hypothèse d'un espace-temps homogène et isotrope, les variables de Ashtekar se ramène à $A_a^i = \bar{k} \delta_a^i$ et $E_i^a = \bar{p} \delta_i^a$, où c et p deviennent les variables pertinentes de l'espace de phase. Ces deux variables définissent le crochet de Poisson,

$$\{\bar{k}, \bar{p}\} = 8\pi G\gamma/3, \quad (4.1)$$

avec le crochet de Poisson défini comme

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \bar{p}} \frac{\partial g}{\partial \bar{k}} - \frac{\partial g}{\partial \bar{p}} \frac{\partial f}{\partial \bar{k}}. \quad (4.2)$$

La variable $\bar{p}$ est relié au facteur d'échelle, $\bar{p} = a^2$, et la variable $\bar{k}$ est relié au paramètre de Hubble, c étant proportionnel à $\dot{a}$. En ajoutant les degrés de liberté pour le contenu en matière (nous choisissons un champ scalaire $(\bar{\varphi}, \bar{\pi}_{\bar{\varphi}})$), l'hamiltonien complet est (où nous avons choisit $N = 1$, correspondant au temps cosmique) :

$$\mathcal{H} = -\frac{3\sqrt{\bar{p}}\bar{k}^2}{8\pi G\gamma^2} + \left(\frac{\bar{\pi}_{\bar{\varphi}}^2}{2\bar{p}^{3/2}} + p^{3/2}V(\bar{\varphi}) \right). \quad (4.3)$$

Le premier terme est l'hamiltonien gravitationnel et le second (entre parenthèse) est l'hamiltonien du champ scalaire considéré comme contenu matériel de l'univers. Pareillement, un crochet de Poisson est associé au variable décrivant

le champ scalaire :

$$\{f, g\}_{\text{matiere}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\pi}_\varphi} - \frac{\partial g}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\pi}_\varphi}. \quad (4.4)$$

En utilisant les équations de Hamilton, $\dot{f} = \{f, \mathcal{H}\}_{\text{total}}$, et le fait que l'hamiltonien s'annule faiblement, on retrouve aisément les équations de Friedmann et de Klein-Gordon dans ce formalisme hamiltonien :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (4.5)$$

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 3H\dot{\bar{\varphi}} + \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = 0. \quad (4.6)$$

4.1.2 Dynamique quantique

A un niveau classique, l'espace de phase possède 4 degrés de liberté : 2 pour la gravitation, $\bar{k} = \gamma\dot{a}/N$ et $|\bar{p}| = a^2$, et 2 autres pour le champ scalaire, $\bar{\varphi}$ et $\bar{\pi}_\varphi$. Partant de là et utilisant les symétries d'un espace homogène et isotrope, la partie purement gravitationnel de l'Hamiltonien se réécrit comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{grav}} &= -\gamma^{-2} \int_{\mathcal{V}} d^3x \epsilon_{ijk} \frac{E^{ai} E^{bj}}{\sqrt{|\det E|}} F_{ab}^k \\ &= -\gamma^{-2} \epsilon^{ij}_k \dot{e}_i^a \dot{e}_j^b F_{ab}^k, \end{aligned} \quad (4.7)$$

Classiquement, la courbure de la connexion F_{ab}^k est proportionnelle à $\bar{k}$. La courbure de la connexion peut être exprimé comme une fonction des holonomies, où nous choisissons comme boucle une boucle carré $\square_{ij}$:

$$F_{ab}^k = -2 \lim_{A_{\square_{ij}} \rightarrow 0} \text{Tr} \left(\frac{h_{\square_{ij}}^{(\lambda_c)} - 1}{\lambda_c^2} \right) \tau^k \dot{\omega}_a^i \dot{\omega}_b^j = \lim_{\lambda_c \rightarrow 0} \epsilon^k_{ij} \dot{\omega}_a^i \dot{\omega}_b^j \left(\frac{\sin^2 \lambda_c \bar{k}}{\lambda_c^2} \right), \quad (4.8)$$

avec

$$h_{\square_{ij}}^{(\lambda_c)} = h_i^{(\lambda_c)} h_j^{(\lambda_c)} (h_i^{(\lambda_c)})^{-1} (h_j^{(\lambda_c)})^{-1}, \quad (4.9)$$

et λ_c^2 la surface en *coordonnée* (et non la surface physique) contenue dans la boucle $\square_{ij}$. On peut facilement se convaincre en prenant $\lambda_c \rightarrow 0$ que l'on retrouve l'expression usuelle de la courbure de la connexion.

Si nous avons à prendre en compte les idées de la LQG, nous retiendrons alors que l'holonomie ne peut pas être déformée jusqu'à atteindre une surface nulle. Le spectre de l'opérateur de surface en LQG nous apprend en effet qu'il y a un *gap* minimal, donnée par $\Delta = 2\sqrt{3}\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}$ [32]. Si λ^2 est la surface en coordonnée de la boucle, et se rappelant que $|\bar{p}| = a^2$, nous avons alors $\lambda_c^2 |\bar{p}| = \Delta$, ce qui fixe la valeur minimale de $\lambda_c = \sqrt{\Delta/|\bar{p}|}$. L'opérateur hamiltonien se construit alors en promouvant au rang d'opérateur les holonomies de la connexion d'Ashtekar, et non directement la connexion d'Ashtekar¹ :

$$\left(\frac{\sin^2 \lambda_c \bar{k}}{\lambda_c^2} \right) \rightarrow \left(\frac{\sin^2 \lambda_c \bar{k}}{\lambda_c^2} \right), \quad (4.10)$$

qui peut également s'exprimer avec $\exp(\widehat{i\lambda_c \bar{k}/2})$. On introduit alors le nouveau couple de variables conjuguées (b, ν) défini par $b = \bar{k}/\sqrt{|\bar{p}|}$ et $\nu = |\bar{p}|^{3/2}$. On peut facilement se convaincre qu'elles sont conjugués leur crochet de Poisson donnant $\{\nu, b\} = 4\pi G\gamma$. La variable $\nu = a^3$ n'est rien d'autre que le volume. Les deux opérateurs fondamentaux sont donc l'opérateur de volume qui agit sur les états propres de volume comme :

$$\widehat{V} |\nu\rangle = 2\pi\ell_{\text{Pl}}^2 \gamma |\nu| |\nu\rangle, \quad (4.11)$$

et l'opérateur d'holonomie $\exp(\widehat{i\lambda_c \bar{k}/2}) = \exp(\widehat{i\sqrt{\Delta} b/2})$ qui agit sur les états propres de volume par une opération de translation

$$\exp(\widehat{i\lambda_c \bar{k}/2}) |\nu\rangle = \exp(\widehat{i\sqrt{\Delta} b/2}) |\nu\rangle = |\nu + \sqrt{\Delta}\rangle. \quad (4.12)$$

1. Intuitivement, on peut se forger l'image d'une régularisation de la courbure. Classiquement, la courbure en un point s'obtient par la limite quand la surface tend vers 0 d'une holonomie le long de la ligne entourant la surface. Le fait qu'il existe une valeur minimale non nulle pour les opérateurs de surface en LQG impose de calculer la courbure comme la limite de l'holonomie quand la surface tend vers cette valeur minimale et non plus vers 0.

En fonction des variables (b, ν) , l'Hamiltonien classique est

$$\mathcal{H} = -\frac{3}{8\pi G\gamma} \nu b^2 + \frac{\bar{\pi}_\varphi^2}{2\nu}. \quad (4.13)$$

Puisque cette Hamiltonien est une contrainte, sa version quantique sera un opérateur qui annule la fonction d'onde, $\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0$. Moyennant un choix d'ordre des opérateurs et prenant en compte que ce sont les holonomies de b et non $\bar{b}$ qu'il faut promouvoir au rang d'opérateur, l'équation de Schrödinger devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(\nu, \bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^2} &= 3\pi G \widehat{\nu} \left(\frac{\widehat{\sin \sqrt{\Delta} b}}{\sqrt{\Delta}} \right) \widehat{\nu} \left(\frac{\widehat{\sin \sqrt{\Delta} b}}{\sqrt{\Delta}} \right) \Psi(\varphi, \nu) \\ &= \frac{3\pi G}{4\Delta} \nu \left[(\nu + 4\sqrt{\Delta}) \Psi(\nu + 4\sqrt{\Delta}) - 2\nu \Psi(\nu) + (\nu - 4\sqrt{\Delta}) \Psi(\nu - 4\sqrt{\Delta}) \right] \\ &= \Theta_{(\nu)} \Psi(\nu, \bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

L'opérateur $\Theta_{(\nu)}$ correspond simplement à la partie purement gravitationnelle de l'opérateur hamiltonien tandis que le membre de gauche vient simplement du fait que le moment conjugué au champ salaire a été promu au rang d'opérateur, $\widehat{\pi}_\varphi \rightarrow \widehat{\bar{\pi}}_\varphi = -i \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}}$. On peut d'ores et déjà noter une différence fondamentale d'avec l'approche de Wheeler et de Witt : l'opérateur quantique $\Theta_{(\nu)}$ n'est plus un opérateur différentiel mais un opérateur de différence. On peut aussi facilement comprendre en quoi le problème de la singularité de Big Bang sera résolu. Considérons une valeur propre ν quelconque et rappelons nous que ν correspond au volume. Ainsi, la singularité de Big Bang correspondrait au cas $\nu = 0$. La fonction d'onde $\Psi(\nu \neq 0)$ peut-elle transiter vers $\Psi(\nu = 0)$? Pour cela on notera que (le calcul n'est pas ici rigoureux et n'a qu'une valeur pédagogique)

$$\begin{aligned} \langle \Psi(0) | \Theta_{(\nu)} | \Psi(\nu) \rangle &= \nu \left[(\nu + 2\sqrt{\Delta}) \langle \Psi(0) | \Psi(\nu + 4\sqrt{\Delta}) \rangle - 2\nu \langle \Psi(0) | \Psi(\nu) \rangle \right. \\ &\quad \left. + (\nu - 2\sqrt{\Delta}) \langle \Psi(0) | \Psi(\nu - 4\sqrt{\Delta}) \rangle \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Trois options sont possibles : soit $\nu = 0$ auquel cas seul le produit scalaire $\langle \Psi(0) | \Psi(\nu) \rangle$ est non nul mais multiplié par $\nu = 0$; soit $\nu + 4\sqrt{\Delta} = 0$ auquel cas seul le produit scalaire $\langle \Psi(0) | \Psi(\nu + 4\sqrt{\Delta}) \rangle$ est non nul mais multiplier par $\nu + 4\sqrt{\Delta} = 0$; soit $\nu - 4\sqrt{\Delta} = 0$ auquel cas seul le produit scalaire $\langle \Psi(0) | \Psi(\nu - 4\sqrt{\Delta}) \rangle$ est non nul mais multiplier par $\nu - 4\sqrt{\Delta} = 0$. Dans tous les cas, nous voyons que cette probabilité de transition est nulle et l'état de volume nul ne peut jamais être atteint partant d'un état de volume non nul. Dans ce cadre cosmologique, cela signifie simplement qu'en remontant le cours de l'histoire cosmique, l'univers n'atteindra jamais un état singulier de volume nul.

Les études numériques de l'évolution de la fonction d'onde montre que tel est bien le cas. Si en particulier on trace l'évolution de la valeur attendu du facteur d'échelle en fonction du temps, alors ce facteur d'échelle décroît (l'univers est en contraction) puis passe par une valeur minimale (le rebond quantique) avant de croître (l'univers entre dans une phase d'expansion).

4.1.3 Dynamique effective

Si l'on considère une classe d'états fortement piqués autour des solutions classiques, l'évolution du facteur d'échelle tracé par le pic des états fortement piqués est très bien décrite par une équation de Friedmann effective. Cette équation effective se traite classiquement mais part d'un hamiltonien qui contient le premier ordre des corrections quantiques venant des holonomies. L'hamiltonien effectif est (en choisissant pour la fonction de laps $N = 1$ afin de travailler en temps cosmique)

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{3}{8\pi G\gamma^2} \frac{\sin 2(\sqrt{\Delta} b)}{\Delta} V - \mathcal{H}_{\text{matiere}}. \quad (4.16)$$

La densité d'énergie du contenu en matière est donnée par $\rho = \mathcal{H}_{\text{matiere}}/V$ et, puisque l'hamiltonien total est nul sur les solutions physiques, il en résulte

$$\rho = \frac{3}{8\pi G\gamma^2} \frac{\sin 2(\sqrt{\Delta} b)}{\Delta}. \quad (4.17)$$

Le membre de droite atteint sa valeur maximale pour $\sin 2(\sqrt{\Delta}b) = 1$, ce qui fixe une densité d'énergie maximale atteignable :

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G\gamma^2\Delta}. \quad (4.18)$$

Pour notre valeur de Δ , cela donne $\rho_c = (\sqrt{3}/32\pi^2\gamma^3)M_{\text{Pl}}^4$ où $M_{\text{Pl}} = 1/\sqrt{G}$. Si l'on prend la valeur de γ fixée par l'entropie des trous noirs, on obtient $\rho_c \simeq 0.41 \times M_{\text{Pl}}^4$. (Rien n'oblige à fixer la valeur de γ ainsi et il s'agit ici de fixer les idées. Dans la suite, nous montrerons que les prédictions effectuées en LQC peuvent en principe aussi être utilisées pour fixer cette valeur via une contrainte sur ρ_c .) Dans cette description effective, toutes les trajectoires vont passer à travers le rebond, ce qui n'est pas toujours le cas pour un état quantique quelconque.

On dérive de l'hamiltonien ci-dessus l'équation du mouvement pour le volume

$$\dot{V} = \{V, \mathcal{H}_{\text{eff}}\} = \frac{3}{\gamma\sqrt{\Delta}} V \sin(\sqrt{\Delta}b) \cos(\sqrt{\Delta}b). \quad (4.19)$$

Puisque $\dot{V} = 3a^2\dot{a}$ et en utilisant le fait que $\mathcal{H}_{\text{eff}} = 0$ pour exprimer les sinus et cosinus en fonction de la densité d'énergie ρ , on obtient aisément l'équation de Friedmann modifiée

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \times \rho \times \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right). \quad (4.20)$$

De façon analogue, il est possible de dériver l'équation de Raychaudhuri modifiée et l'équation de Klein-Gordon

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho \left(1 - 4\frac{\rho}{\rho_c}\right) - 4\pi G P \left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}\right) \quad (4.21)$$

et

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 3H\dot{\bar{\varphi}} + m^2\bar{\varphi} = 0. \quad (4.22)$$

Pour le champ scalaire, nous avons supposé un potentiel simple : $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\bar{\varphi}^2$.

Il est important de noter que pour chaque trajectoire semiclassique considérée, il existe systématiquement deux points tournants à $b = \pm\pi/(2\sqrt{\Delta})$ dont l'origine est la quantification via les holonomies. Par ailleurs, le paramètre de Hubble admet toujours une borne supérieure finie quelque soit le contenu en matière, assurant donc l'absence de singularité.

4.2 Equation effective : construction phénoménologique

Avant de s'intéresser plus en détail à la modélisation de l'univers primordial dans le cadre de la LQC, il est utile de montrer comment la dynamique effective peut-être retrouvée de façon phénoménologique. Nous rappelons pour cela l'hamiltonien total en fonction des variables de Ashtekar

$$\mathcal{H} = -\frac{3\sqrt{\bar{p}}\bar{k}^2}{8\pi G\gamma^2} + \left(\frac{\bar{\pi}_\varphi^2}{2\bar{p}^{3/2}} + p^{3/2}V(\bar{\varphi})\right). \quad (4.23)$$

Nous considérons un champ avec potentiel d'auto-interaction. Effectuons le changement suivant, guidé par l'utilisation des holonomies, $\bar{k} \rightarrow \sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})/(\bar{\mu}\gamma)$:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{3\sqrt{\bar{p}}}{8\pi G\gamma^2} \left(\frac{\sin \bar{\mu}\gamma\bar{k}}{\bar{\mu}\gamma}\right)^2 + \frac{\bar{\pi}_\varphi^2}{2\bar{p}^{3/2}}, \quad (4.24)$$

tout en conservant la structure symplectique $\{\bar{k}, \bar{p}\} = 8\pi G\gamma/3$. En utilisant d'abord les équations de Hamilton et en se rappelant que $\bar{p} = a^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= \{\bar{p}, \mathcal{H}_{\text{eff}}\} \\ \rightarrow \frac{\dot{\bar{p}}}{2\bar{p}} &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\bar{p}}} \left(\frac{\sin 2\bar{\mu}\gamma\bar{k}}{2\bar{\mu}\gamma}\right) = H. \end{aligned} \quad (4.25)$$

De façon analogue :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\varphi}} &= \{\bar{\varphi}, \mathcal{H}_{\text{eff}}\}_{\text{matiere}} \\ &= \frac{\bar{\pi}_{\varphi}}{\bar{p}^{3/2}}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

On notera enfin que l'hamiltonien total est nul, ce qui conduit à :

$$\left(\frac{\sin \bar{\mu}\gamma\bar{k}}{\bar{\mu}\gamma}\right)^2 = \frac{8\pi G\gamma^2}{3\sqrt{\bar{p}}} \times \left(\frac{\bar{\pi}_{\varphi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} + p^{3/2}V(\bar{\varphi})\right).\tag{4.27}$$

Le membre de droite de Eq. (4.27) se ré-exprime facilement en fonction de la densité d'énergie du champ scalaire

$$\frac{8\pi G\gamma^2}{3\sqrt{\bar{p}}} \left(\frac{\bar{\pi}_{\varphi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} + p^{3/2}V(\bar{\varphi})\right) = \frac{8\pi G\gamma^2}{3}\bar{p} \times \left(\frac{(\dot{\bar{\varphi}})^2}{2} + V(\bar{\varphi})\right) = \frac{8\pi G\gamma}{3}\bar{p} \times \rho.\tag{4.28}$$

Il convient maintenant de ré-exprimer le paramètre de Hubble H en fonction du membre de gauche de Eq. (4.27). Pour cela, il est préférable d'utiliser le carré de H et de noter que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin 2\bar{\mu}\gamma\bar{k}}{2\bar{\mu}\gamma}\right)^2 &= \left(\frac{\sin \bar{\mu}\gamma\bar{k}}{\bar{\mu}\gamma}\right)^2 \left[1 - (\bar{\mu}\gamma)^2 \left(\frac{\sin \bar{\mu}\gamma\bar{k}}{\bar{\mu}\gamma}\right)^2\right] \\ &= \frac{8\pi G}{3}\rho \times (\gamma a)^2 \left[1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right],\end{aligned}\tag{4.29}$$

avec

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G\bar{\mu}^2\gamma^4 a^2}.\tag{4.30}$$

Finalement, puisque $H^2 = \left(\frac{\sin 2\bar{\mu}\gamma\bar{k}}{2\bar{\mu}\gamma}\right)^2 / (\gamma a)^2$, nous obtenons l'équation de Friedmann effective

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right).\tag{4.31}$$

Il convient maintenant d'identifier $(\gamma\bar{\mu})$ avec $\sqrt{\Delta/\bar{p}}$ ce qui donne la densité d'énergie critique précédemment trouvée

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G\gamma^2\Delta}.\tag{4.32}$$

Il est important ici de noter que la limite classique se retrouve en prenant $\Delta \rightarrow 0$, c'est-à-dire en prenant l'aire minimale de LQG comme tendant vers zéro, ce qui envoie bien $\rho_c \rightarrow +\infty$ indépendamment de la valeur de γ . (On notera aussi que ce n'est pas en prenant $\gamma \rightarrow 0$ que cette limite classique est obtenue, ce qui aurait pour conséquence que la valeur de ce paramètre jouerait un rôle au niveau classique, ce qui n'est pas le cas.)

Chapitre 5

Dynamique effective du fond

5.1 Equation effective semiclassique

De façon générique, la LQC considère l'Univers comme un tout décrit par une fonction d'onde interprétée comme donnant l'amplitude de probabilité d'être dans une géométrie donnée. De façon plus précise, la fonction d'onde décrivant l'Univers en LQC s'obtient en appliquant les techniques de la LQG à un espace de phase géométrique restreint : plutôt que de quantifier directement n'importe quel type d'espace pseudoriemannien, on se restreint aux espace-temps homogène et isotrope. Il s'agit des approches dites de *mini-superspace*. Dans le cas des espace-temps homogène et isotrope et dont les sections spatiales sont elles aussi plates¹, l'espace de phase est donné par le facteur d'échelle $a(t)$ et le paramètre de Hubble $H = (\dot{a}/a)$. Parmi les différents états quantiques construits, il existe une classe d'état extrêmement piqués autour des solutions classiques. Autrement dit, pour ces états analogues des états cohérents (ou quasiclassiques) de l'optique quantique, l'évolution de la valeur attendue du facteur d'échelle est pour les grands volumes, donnée par les équations de Friedmann classique, *i.e.*

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \times \rho, \quad (5.1)$$

où ρ est la densité d'énergie des constituants de l'Univers. On retrouve donc bien la cosmologie classique dans la limite où les effets de gravité quantique sont censés être négligeables. Cependant, lorsque l'on approche des petits volumes, les effets de gravité quantiques ne sont plus négligeables et en étudiant l'évolution de la valeur attendue de $a(t)$ pour les états extrêmement piqués, on obtient une équation de Friedmann effective contenant les premières corrections quantiques :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \times \rho \times \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \quad (5.2)$$

où ρ_c est une densité d'énergie maximale essentiellement fixée par le fait que le spectre des opérateurs de surface est discret : il présente donc un *gap* minimal entre la valeur propre zéro et la première valeur propre non-nulle. Cette densité d'énergie maximale est de l'ordre de la densité de Planck. Sa valeur n'est toutefois pas univoquement fixée par la théorie puisqu'elle fait apparaître le paramètre de Barbero-Immirzi, γ , dont la valeur (a priori réelle) n'est pas fixée par la LQC. Par ailleurs, il a été montré que cette équation de Friedmann effective reste une excellente approximation quantique complète même lorsque l'on approche l'ère de Planck : elle demeure donc un cadre pertinent pour étudier la dynamique complète de l'Univers, même dans sa phase la plus quantique [33]. L'efficacité de cette approche effective a été prouvée en deux temps [33]. tout d'abord, il a été montré numériquement que les solutions de l'équation de Friedmann effective reste très proche des solutions donnée par l'évolution complète de la fonction d'onde. Plus récemment, un argument analytique a été donné en montrant en quoi l'efficacité de cette approche relève d'un comportement analogue au théorème centrale limite : l'Univers se comporte comme une somme sur un très grand nombre de degrés de liberté microscopiques et dont les fluctuations quantiques cumulées sont réduites à la manière du théorème centrale limite.

Ce type de correction introduisant un terme quadratique en densité d'énergie est appelé *correction d'holonomie*. Cette dénomination vient du fait qu'il n'est pas possible de promouvoir directement la connexion d'Ashtekar au

1. Dans toute la suite, la discussion sera limitée au cas des espace FLRW plat. Le cas des univers ouvert ou fermé a été considéré par ailleurs.

rang d'opérateur. A la place, ce sont les holonomies de cette connexion qui sont promues au rang d'opérateur². La théorie effective ci-dessus garde la trace de cette variable. Si ce type de correction est inévitable (c'est justement le passage aux holonomies qui permet la quantification en terme de représentation de boucles et ainsi de résoudre certains des problèmes présents dans *e.g.* l'approche de Wheeler-de Witt de la gravitation quantique), il existe un deuxième type de correction dont la pertinence est encore débattue. Ces corrections dites de *volume inverse* viennent du fait que l'hamiltonien de la relativité générale contient des termes proportionnels à l'inverse du volume V , ce qui conduirait à des divergences dans la théorie quantique pour la valeur propre zéro de l'opérateur de volume $\hat{V}$. Pour régulariser la théorie quantique, c'est donc directement V^{-1} qui est promu au rang d'opérateur puis quantifié (plutôt que $(\hat{V})^{-1}$, c'est $\widehat{V^{-1}}$ qui est utilisé). A un niveau effectif, cela aboutit à

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \times \rho \times S(a), \quad (5.3)$$

où S est une fonction du facteur d'échelle $a(t)$. Si les deux types d'effets sont pris en compte, l'équation de Friedmann effective devient alors [34]

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \times \rho \times \left(S(a) - \frac{\rho}{\rho_c} \right). \quad (5.4)$$

La forme exacte de la fonction S n'est pas connue (elle dépend de certains paramètres d'ambiguïté dans la quantification), toutefois dans la limite où l'échelle caractéristique de l'Univers est bien plus grande que l'échelle de Planck l_{Pl} , on peut choisir $S(a) \simeq 1 + (l_{\text{Pl}}/a)^\sigma$ avec $\sigma > 0$.

(Les travaux de recherche présenté ci-dessous portent principalement sur l'impact des corrections d'holonomie et nous nous focaliserons ici sur ceux-ci. Toutefois, le cas des corrections de volume inverse a aussi été abordé, quoique plus marginalement. Ils seront donc mentionnés en quelques occasions.)

5.2 Un univers en rebond

Le premier fait remarquable de cette description quantique de l'univers primordial est le remplacement de la singularité de Big Bang par un rebond régulier. On peut le comprendre à l'aide de la théorie effective³. Si l'on remonte l'histoire cosmique et que l'on suppose, pour simplifier, que le contenu en matière est de type poussière, l'équation de Raychaudhuri est

$$\dot{H} = -4\pi G\rho. \quad (5.5)$$

En remontant le temps, le facteur d'échelle diminue et la densité d'énergie augmente. Il s'ensuit que la valeur absolue de la dérivé de H augmente. Puisque H mesure le taux de contraction de l'Univers, dans cette vision à rebours, cela signifie que la contraction n'est jamais ralentie : l'évolution est monotone et on ne peut empêcher le facteur d'échelle d'atteindre la valeur zéro. A l'inverse, si l'on prend en compte les effets de LQC, l'équation de Raychaudhuri devient

$$\dot{H} = -4\pi G\rho \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_c} \right). \quad (5.6)$$

Ainsi, quand ρ atteint la valeur $\rho_c/2$, le signe de $\dot{H}$ change et la contraction est comme ralentie. Lorsque ρ atteint alors la valeur ρ_c , la paramètre de Hubble devient nul pour une valeur non-nulle du facteur d'échelle. Le paramètre de Hubble change alors de signe et l'évolution de l'univers passe d'une phase de contraction à une phase d'expansion, le rebond quantique étant *régulier*.

5.3 Un univers en rebond et inflationnaire [35]

Quelques 10^{-30} seconde après le Big Bang, il semble que l'Univers soit passé par une phase d'expansion accélérée, appelée inflation cosmique. Cette phase, postulée au début des années quatre-vingt, permet de rendre compte, en

2. A un niveau classique, l'holonomie de la connexion d'Ashtekar et le flux de triade forme un espace de phase valide pour la relativité générale

3. On rappellera la raison quantique fondamentale : la singularité de Big Bang correspondrait à un niveau quantique au fait que la fonction d'onde évolue vers un état correspondant à une valeur attendue de l'opérateur de volume qui serait zéro. Or l'opérateur quantique hamiltonien empêche dynamiquement la transition d'un état de volume non-nul vers un état de volume nul. Cette transition est interdite à un niveau quantique et cela se manifeste au niveau effectif.

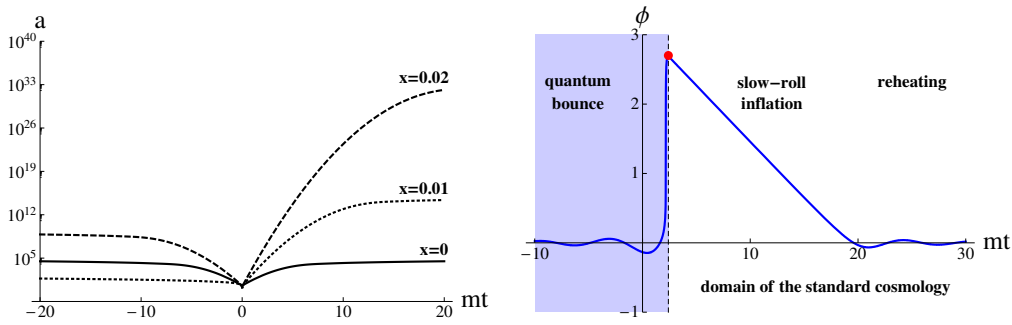


FIGURE 5.1 – *Gauche* : Evolution du facteur d'échelle $a(t)$ en fonction du temps cosmique en LQC. Il y a d'abord une phase de contraction puis une phase d'expansion. L'évolution n'est pas symétrique vis-à-vis du rebond quantique dès lors que le champ scalaire possède une petite fraction d'énergie potentielle, notée x , au moment du rebond. *Droite* : Evolution du champ scalaire $\varphi(t)$ en fonction du temps cosmique. Durant la phase pre-rebond, le champ suit des oscillations amplifiées. Au moment du rebond, le champ grimpe très haut dans son potentiel. L'univers entre alors dans une phase d'inflation cosmique durant laquelle le champ scalaire évolue linéairement en fonction du temps.

autre, de la géométrie plate de la partie spatiale de l'espace-temps UNIVERSES, ou encore de l'incroyable homogénéité du fond diffus cosmologique. Plus encore, elle permet d'invoquer un mécanisme de production d'inhomogénéités cosmiques -les perturbations cosmologiques- qui seront à l'origine des anisotropies du fond diffus cosmologique et qui constituent les graines primordiales nécessaires à la formation des galaxies et grandes structures par effondrement gravitationnel. Toutefois rendre compte de l'inflation elle-même n'est pas aisé. Le paradigme usuel considère que le contenu matériel dominant à cette époque est un champ scalaire. Si ce champ scalaire atteint les conditions de roulement lent, c'est-à-dire que son énergie est dominée par son énergie potentielle et que son accélération $\ddot{\varphi}$ est dynamiquement négligeable relativement à la force de frottement due à l'expansion de l'univers, $H \times \dot{\varphi}$, alors l'univers entre dans une phase d'inflation pour laquelle l'expansion est quasi exponentielle. Atteindre ces conditions dans l'Univers primordial apparaît toutefois peu probable.

Puisque la LQC permet de décrire l'Univers durant l'ère de Planck, et puisque dans le scénario standard l'inflation serait la première suivant cette ère de Planck, il est nécessaire de s'assurer que cette modélisation quantique de l'univers se noue naturellement au paradigme inflationnaire. Autrement dit, il faut répondre à la question suivante : est-ce que en sortie de rebond, l'Univers entre bien dans une phase d'inflation ou non ? Une façon d'aborder le problème est de considérer l'évolution d'un tel univers en rebond dont le contenu en matière est justement un champ scalaire, φ . Cela s'inspire des modèles d'inflation les plus simples à un champ, et, comme cela sera montré ultérieurement, le cas d'un champ scalaire massif suffit, $V(\varphi) = m^2 \varphi^2 / 2$.

L'évolution d'un champ scalaire massif est donnée par l'équation de Klein-Gordon

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0. \quad (5.7)$$

Dans un univers en expansion, $H > 0$ et l'expansion agit comme un terme de friction. Dans un univers en contraction, $H < 0$ et la contraction agit alors comme une antifricción sur la dynamique du champ scalaire. Par une étude numérique de l'équation de Klein-Gordon et de l'équation de Friedmann effective, il est alors montré que durant la phase de contraction, le champ scalaire subissant une antifricción, son évolution pre-rebond est décrite par des oscillations amplifiées [35]. Ainsi, le champ scalaire durant la contraction et le rebond grimpe le long de son potentiel pour finalement, peu de temps après le rebond, atteindre les conditions de roulement lent : l'univers entre alors naturellement dans une phase inflationnaire. C'est la dynamique d'un univers en *rebond* qui permet cela et c'est la quantification qui permet, au préalable, un tel *rebond*.

Ce que cette étude montre, c'est que non seulement le problème de la singularité de Big Bang est résolu en LQC, mais surtout que la dynamique pre-rebond et celle du rebond permettent de rendre compte de l'inflation primordiale. Cette image globale de la dynamique de notre univers dans le cadre de la LQC est résumée dans la figure 5.1 qui montre l'évolution du facteur d'échelle (pour différentes valeurs de la fraction d'énergie potentielle au moment du rebond, x) ainsi que celle du champ scalaire. Si l'inflation peut avoir effectivement lieu dans ce cadre, elle n'a pas pour autant lieu systématiquement. Cette dynamique est usuellement décrite à l'aide de deux

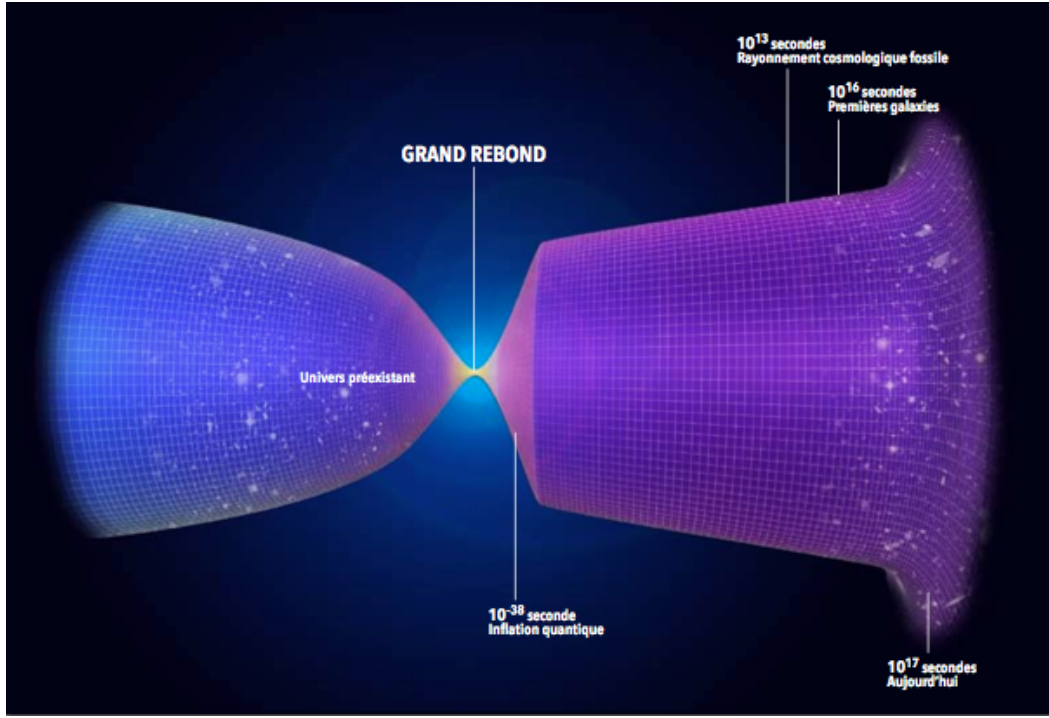


FIGURE 5.2 – Représentation schématique de l'Univers tel que modélisé en cosmologie quantique à boucles. (©Bruno Bourgeois)

paramètres, $x = m\varphi/\sqrt{2\rho_c}$ et $y = \dot{\varphi}/\sqrt{2\rho_c}$. Leur interprétation est aisée : x mesure la quantité d'énergie potentielle dans le champ scalaire alors que y mesure sa quantité d'énergie cinétique, toutes deux normalisées à la densité d'énergie critique (maximale) atteinte au moment du bounce. (Au rebond, puisque $\rho = \rho_{\text{crit}}$, on vérifie aisément que $x^2 + y^2 = 1$.) Ces deux termes sont aussi les deux variables de l'espace de phase du champ scalaire. Comme l'illustre la partie gauche de la figure 5.1, il est nécessaire d'avoir une petite fraction d'énergie potentielle au moment du rebond, pour qu'une phase d'inflation suffisamment longue, avec au moins 60 *e-fold*, ait lieu en sortie de rebond.

Montrer qu'il est possible d'avoir une phase inflationnaire en sortie de rebond est une chose. Cela n'est toutefois pas encore suffisant pour montrer que l'inflation apparaît comme naturelle en LQC. En effet, les quantités x et y peuvent a priori prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1 au moment du rebond, sous la contrainte que $x^2 + y^2 = 1$, et à chaque choix possible du couple $(x, 1-x)$ correspond une trajectoire cosmologique différente. Or rien ne dit que dans ce volume de trajectoire, la plupart des trajectoires passent effectivement par une phase d'inflation avec le nombre minimal d'*e-fold* requis. Il a été ultérieurement montré que cette phase d'inflation n'est pas seulement *prédite* en LQC, mais qu'elle est aussi extrêmement probable dans le sens où la plupart du volume des trajectoires possibles correspond à des trajectoires ayant au moins 60 *e-fold* [36]. Evidemment, cela dépend du choix de la distribution de probabilité des conditions initiales. Cependant, il a été montré que tel était le cas que l'on choisisse les conditions initiales au moment du rebond ou loin dans le passé, durant la contraction. Cela montre donc que dans le cadre de la *théorie effective* de la LQC, le problème de l'inflation est lui aussi résolu.

La vision schématique de l'Univers qui en résulte est donc la suivante (cf. Fig. 5.2) :

Phase de contraction : Durant la phase de contraction, l'Univers est essentiellement décrit de façon classique. Son contenu en matière est dominé par un champ scalaire φ .

Rebond quantique : L'Univers est décrit par une géométrie quantique. Cette description interdit la transition vers un état de volume nul et l'Univers rebondit pour entrer dans une phase d'expansion.

Inflation cosmique : Avec une probabilité très proche de l'unité, l'Univers initie une phase d'inflation cosmique avec au moins 60 *e-fold*, essentiellement décrite par les équations de Friedmann classique.

Modèle standard : Nous entrons alors dans l'histoire standard de l'Univers.

Chapitre 6

Premiers pas vers des traces observationnelles

Pour tester un tel modèle de cosmologie quantique en rebond, il est nécessaire de s'intéresser aux perturbations cosmologiques. En effet, on ne saurait s'extraire de l'Univers pour observer sa dynamique. Il nous faut plutôt chercher des traceurs internes. Or ces traceurs internes ne sont rien d'autre que les inhomogénéités cosmiques –ou perturbations cosmologiques– telles que les anisotropies du CMB ou la distribution des galaxies et des grandes structures cosmiques.

Durant l'inflation cosmique, les fluctuations quantiques du vide du champ de gravité et du champ scalaire sont amplifiées par l'expansion accélérée. Finalement, en fin d'inflation, l'Univers se trouve rempli d'inhomogénéités qui sont à l'origine de la formation des galaxies et des grandes structures et qui laissent aussi leurs empreintes dans les anisotropies du CMB. Ces inhomogénéités sont de deux types : un type purement gravitationnel, les ondes gravitationnelles primordiales (couramment appelées *perturbations tensorielles*); et un type scalaire qui correspond aux variations de potentiel gravitationnel, intrinsèquement couplé aux variations de la densité d'énergie du champ scalaire (couramment appelées *perturbations scalaires*). Tester ce modèle cosmologique, c'est donc calculer l'amplitude des perturbations cosmologiques en fin d'inflation mais, à la différence du scénario standard, ayant au préalable évoluées à travers la contraction et le rebond quantique. Par ailleurs, les perturbations cosmologiques sont elles-mêmes de nature gravitationnelle et il est raisonnable de considérer que, indépendamment de l'évolution spécifique du fond FLRW, le simple fait qu'elles se déplacent sur un fond quantique peut modifier leurs équations d'évolution. Plusieurs effets sont donc à prendre en compte :

1. le fait que le fond évolue à travers un rebond ;
2. le fait que les perturbations évoluent sur un fond quantifié (ou plus précisément, le fait qu'il faut maintenant perturber un espace-temps quantique et non plus un espace-temps classique).

La question qu'il convient de se poser est donc de savoir si ces deux effets affectent de façon significative (et peut-être même observable) l'amplitude des perturbations cosmologiques présentes dans l'univers en fin d'inflation.

A la fin, ce sont bien évidemment les contributions cumulées de ces deux effets qui dictent les distorsions possibles de l'amplitude des perturbations cosmologiques. On peut toutefois aborder cette question d'un point de vue plus analytique, se focaliser d'abord sur le premier des effets et ensuite ajouter le second ; cela permettant de distinguer l'impact spécifique à chacune de ces corrections. Ce point de vue n'est pas seulement pertinent d'un point de vue théorique, mais aussi observationnel. Si l'objectif final est de voir si, dans les données astronomiques (en particulier celles du CMB), des effets de gravitation quantique peuvent se manifester, il est important de connaître l'origine spécifique de chacune des distorsions possibles afin d'interpréter proprement les données.

L'amplitude en fin d'inflation de ces deux types d'inhomogénéités est usuellement quantifiée par leur spectre de puissance primordial, qui mesure la puissance contenue par bande logarithmique de nombre d'onde k . Ils sont l'analogue dans l'espace de Fourier de la fonction de corrélation à deux points et ils sont définis comme

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle \mathcal{R}(k, t_f) \mathcal{R}^*(k, t_f) \rangle, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_{s=1}^2 \langle h_s(k, t_f) h_s^*(k, t_f) \rangle, \quad (6.2)$$

où t_f correspond à la fin de l'inflation. Pour le mode scalaire (S), il s'agit du spectre de puissance des variations de la 3-courbure spatiale, $\mathcal{R}$. Pour le mode tensoriel (T), il y a une somme sur les spectres de puissance associés aux deux degrés d'hélicité s des ondes gravitationnelles, h_s . La notation $\langle \cdot \rangle$ signifie que nous prenons la valeur moyenne quantique sur l'état vide dans une quantification à la Fock des deux champs de perturbations (voir *e.g.* Ref. [8, 6]). Il est important de garder ce point à l'esprit. Implicitement dans les résultats présentés ci-après, les perturbations cosmologiques sont quantifiées à la manière de la quantification présentée dans le chapitre 2.3.4.

6.1 Impact de la LQC sur le spectre inflationnaire des modes tensoriels [37, 38, 34]

Dans un premier temps, nous nous restreindrons donc à l'étude du premier effet. Il y a essentiellement deux raisons à cela. Tout d'abord, il s'agit de comprendre l'impact de chacun des deux effets. Ensuite, la procédure cohérente permettant de perturber un espace-temps quantifié était encore inconnue en 2008. (C'est justement l'objet de la section suivante, Sec. 7.) Plus précisément, cette procédure semblait non-problématique pour les perturbations tensorielles (il était attendu que ce type de perturbations ne devait pas être affecté par le deuxième effet) et totalement problématique pour les perturbations scalaires. Dans ce contexte, se limiter à l'impact du rebond dans le cas *spécifique* des perturbations tensorielles permettait de se focaliser sur le premier des effets de façon cohérente. (La prise en compte de l'ensemble des effets sera présenté dans la section suivante, Sec. 7.)

Dans ce cadre, il convient, une nouvelle fois, de distinguer deux phases : distorsions dues au rebond quantique et distorsions dues à des effets résiduels de gravitation quantique pendant l'inflation. Pour ce deuxième effet, la dynamique de fond est restreinte à l'inflation cosmique uniquement, oubliant donc la contraction et le rebond quantique. Déjà dans ce cas, des effets de LQC se font ressentir simplement car en début d'inflation, l'univers peut être proche de l'échelle de Planck (cette 'proximité' dépendant de l'échelle d'énergie de l'inflation) et les corrections d'holonomie et/ou de volume inverse se font déjà ressentir. Rappelons brièvement que dans le cas de l'inflation standard, le spectre de puissance primordial des perturbations tensorielles est donnée par une loi de puissance légèrement rouge,

$$\mathcal{P}_T(k) = \mathcal{A}_T \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_T}, \quad (6.3)$$

où l'amplitude est proportionnelle à $(H_i/M_{\text{Pl}})^2$, l'échelle d'énergie de l'inflation en unité de Planck (fixée par la valeur du paramètre de Hubble quasi constant durant l'inflation cosmique), et l'indice spectral est négatif (spectre rouge). Usuellement, l'amplitude du mode tensoriel est paramétrisée par le rapport tenseur-sur-scalaire $r = \mathcal{P}_T(k_0)/\mathcal{P}_S(k_0) = \mathcal{A}_T/\mathcal{A}_S$, où $\mathcal{A}_S$ est l'amplitude du mode scalaire à l'échelle k_0 .

Si l'on prend en compte les effets d'holonomie, il apparaît que le spectre de puissance primordial est inchangé aux petites échelles de longueurs, *i.e.* les grandes valeurs du nombre d'onde k . Cependant, ce spectre devient bleu et se comporte en k^3 aux grandes échelles de longueurs, comme le montre la partie gauche de la figure 6.1 (cf. Ref. [37]). (Pour le régime inflationnaire de roulement lent, l'indice spectral est proche de zéro, $n_T = -2\epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$ le premier paramètre de roulement lent, et on montre que $r = 16\epsilon$.) Dans les résultats présentés ci-dessus, nous avons volontairement considéré le cas de l'inflation en loi de puissance, permettant d'avoir n'importe quelle valeur négative pour n_T , et cela afin de bien marquer la transition entre le régime bleu due aux effets quantiques et le régime rouge, standard. La conclusion d'un spectre bleu aux grandes échelles reste valide pour une inflation en roulement lent.

Si ce sont plutôt les effets de volume inverse qui sont pris en compte, le spectre devient alors exponentiellement amplifié aux grandes échelles de longueurs mais reste inchangé aux petites échelles (cf. partie droite de la figure 6.1 et Ref. [38]). Les comportements asymptotiques de ces spectres dans l'ultraviolet, UV (*i.e.* les petites échelles, $k \rightarrow \infty$), et dans l'infrarouge, IR (*i.e.* les grandes échelles, $k \rightarrow 0$), ont été obtenus analytiquement. La forme exacte de ces spectres sur l'ensemble de la gamme en k , est elle, obtenue par résolution numérique des équations de propagation des ondes gravitationnelles primordiales. (On notera que pour certaines valeurs spécifiques des paramètres d'ambiguïté des corrections de volume inverse, des solutions exactes, basées sur les fonctions de Kummer, existent. Ces cas spécifiques confirment le comportement exponentiellement croissant dans la limite IR des spectres.)

Toujours dans ce cadre méthodologique de s'intéresser en premier lieu à l'impact de la LQC sur l'inflation uniquement, il était indispensable de considérer les deux effets, volume inverse et holonomie, cumulés. En effet, chacun de ces effets agit de façon opposée sur le spectre aux grandes échelles de longueurs (les holonomies suppriment ce spectre, relativement à la prédiction standard, tandis que le volume inverse amplifie ce spectre). Pour cela, il a

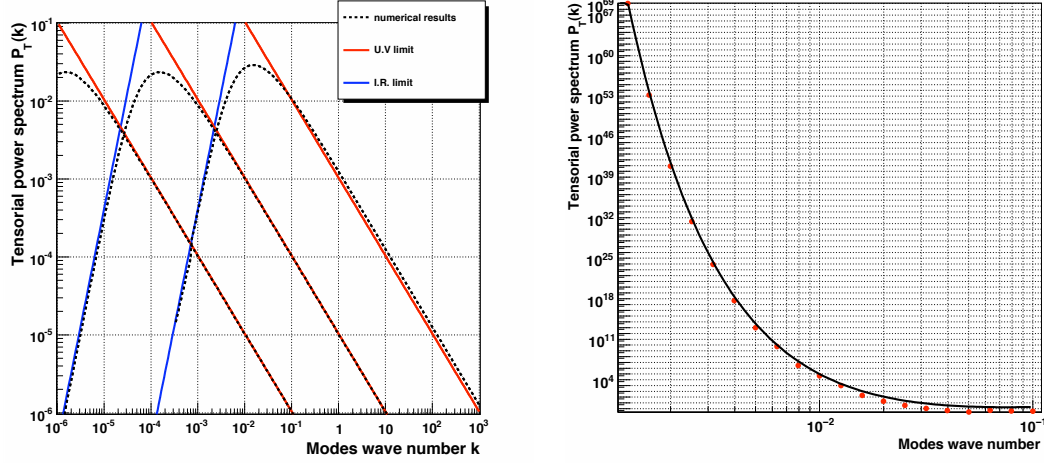


FIGURE 6.1 – *Gauche* : Spectre de puissance primordial des perturbations tensorielles avec *correction d'holonomie* pour trois valeurs du paramètre de Hubble durant l'inflation, $H_i/M_{\text{Pl}} = 10^{-4}$, 10^{-3} et 10^{-2} . *Droite* : Spectre de puissance primordial des perturbations tensorielles avec *correction de volume inverse*. Les points rouges sont le résultat numérique et la courbe noire la limite IR calculée analytiquement.

fallu préalablement effectué une étude plus théorique visant à dériver l'équation du mouvement des perturbations tensorielles se propageant sur un fond quantique et prenant en compte les deux effets de LQC [34],

$$\ddot{\phi}_k + \left\{ S^2 k^2 - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + M^2(a) - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{S}}{S} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{S}}{S} \right) \right\} \phi_k = 0. \quad (6.4)$$

avec $\phi_k = (a/\sqrt{S}) \times h_k$ et

$$M^2(a) = 8\pi G \frac{\rho}{\rho_c} a^2 \left(\frac{2}{3} \rho - \frac{\dot{\Phi}^2}{D(q)a^2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\dot{D}}{D} \frac{\dot{a}}{a} \right) \right). \quad (6.5)$$

Grâce à une résolution analytique exacte de cette équation pour quelques valeurs spécifiques du paramètre d'ambiguïté σ (ces valeurs qui permettent d'exprimer les solutions de l'équation des ondes gravitationnelles à l'aide des fonctions de Kummer dont les comportements asymptotiques sont connus), j'ai alors pu montré que ce sont les effets de volume inverse qui dominent, le spectre étant amplifié dans la limite IR [34].

La question du choix des conditions initiales pour les modes propres, c'est-à-dire de l'état vide initial, se pose de façon identique au cas de l'inflation standard. Si l'on se restreint à la seule phase de l'inflation de slow-roll, l'évolution du facteur d'échelle en fonction du temps est $a(\eta) = \ell_0 |\eta|^{-1-\varepsilon}$. Que ce soit avec les corrections d'holonomie ou avec les corrections de volume inverse, l'équation du mouvement prend la forme d'une équation de Schrödinger pour la variable de Mukhanov-Sasaki

$$v''_{T,k} + \omega_k^2(\eta) v_{T,k} = 0,$$

avec [38]

$$\omega_k^2(\eta) = \begin{cases} k^2 - \frac{2+3\varepsilon}{\eta^2} + \frac{\lambda}{\eta^{2(1-\varepsilon)}} & \text{(holonomie)} \\ \left(1 + \mu_1 |\eta|^{\sigma(1+\varepsilon)} \right) k^2 - \frac{2+3\varepsilon}{\eta^2} - \frac{\mu_2}{\eta^{2(1-\frac{\sigma}{2}(1+\varepsilon))}} & \text{(volume inverse)}. \end{cases}$$

Les constantes λ et μ_1, μ_2 sont positives.

Le cas avec corrections d'holonomie est le plus simple. On notera que les modes subhorizon sont telles que $k^2 \gg \omega^2(\eta) - k^2$. En propageant l'inflation infiniment loin dans le passé, $\eta \rightarrow -\infty$, tous les modes deviennent subhorizon et le choix de l'état vide est donné par le vide de Bunch-Davies usuel. Par ailleurs, tant que ces modes sont subhorizon, ils suivent une évolution adiabatique.

Le cas des corrections avec volume inverse est plus complexe. Pour trouver un vide adiabatique valable pour tous les modes k infiniment loin dans le passé, on effectue le changement $|\eta| = e^x$ et $v_{T,k} = e^{x/2}u(x)$. on peut alors trouver un vide adiabatique, analogue au vide de Bunch-Davies en recourant au fonction de Hankel d'ordre zéro (cf. Sec. IV de la référence [38]).

6.2 Impact du rebond sur la polarisation du fond diffus cosmologique [35, 39]

Dans un deuxième temps, il est nécessaire d'introduire la dynamique complète du fond, c'est-à-dire la contraction et le rebond quantique précédant l'inflation, afin de prédire l'impact complet de cette modélisation sur la production d'ondes gravitationnelles primordiales ; en se limitant cependant aux seules corrections d'holonomie.

La question des conditions initiales est ici particulièrement simple. En se plaçant loin dans la branche en contraction, l'Univers est classique et les corrections quantiques à l'équation du mouvement sont négligeables. On retrouve donc l'équation usuelle pour la variable de Mukhanov-Sasaki

$$v''_{T,k} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_{T,k} = 0. \quad (6.6)$$

Durant la phase de contraction classique, suffisamment loin du rebond, l'Univers est très bien approché par un Univers rempli de poussière. Ainsi, $a(\eta) \propto \eta^2$ et a''/a tend vers zéro : tous les modes sont subhorizon et le choix de l'état vide se ramène simplement au vide de Minkowski, *i.e.* $v_{T,k}(\eta \rightarrow -\infty) = (1/\sqrt{2k}) \times \exp(-ik\eta)$.

Grâce à une résolution numérique des équations du mouvement pour les modes tensorielles, il est montré que le spectre de puissance des ondes gravitationnelles présente trois régimes [35] :

- aux grandes échelles de longueurs, $k \ll k_*$, le spectre est bleu et se comporte en k^2 ;
- aux échelles intermédiaires, $k \sim k_*$, le spectre présente une forte amplification suivi d'oscillations amorties ;
- aux petites échelles de longueurs, $k \gg k_*$, le comportement standard inflationnaire, *i.e.* un spectre légèrement rouge, est retrouvé.

Un exemple de ce spectre est donné dans la partie gauche de la figure 6.2. Le paramètre k_* correspond à une échelle caractéristique fixée par le rebond quantique, $k_*(\text{today}) \sim \sqrt{8\pi G \rho_c} \times \exp(-N)$ où N est le nombre de e-folds depuis le rebond quantique jusqu'à aujourd'hui. (Plus précisément, la LQG fixe cette échelle caractéristique au *moment du rebond*, $k_*(\text{rebond}) \sim \sqrt{8\pi G \rho_c}$. Cette échelle caractéristique est ensuite dilatée par l'expansion cosmique conduisant à $k_*(\text{today}) = k_*(\text{rebond}) \times \exp(-N)$.) Ce motif est donc quantitativement fixé par la valeur de ρ_c , elle-même fixée par la valeur du paramètre fondamental de la LQG, le paramètre de Barbero-Immirzi. La hauteur de la bosse à k_* est quant-à elle fixé par la masse du champ d'inflaton. Enfin, l'indice spectrale et l'amplitude du spectre dans la limite UV sont fixés par la dynamique de l'inflation, elle-même fixée par la masse du champ scalaire et la fraction d'énergie potentielle dans le champ scalaire au moment du rebond.

De façon phénoménologique, ce spectre de puissance primordial est paramétrisé par quatre paramètres : l'échelle caractéristique k_* et l'amplitude du boost à cette échelle, R , d'une part, et, d'autre part, le rapport tenseur-sur-scalaire r et l'indice spectral n_T . Les deux premiers paramètres sont le résultats de l'évolution passant par un rebond (et dictent essentiellement la forme du spectre aux grandes échelles de longueur) alors que les deux suivants sont fixés par l'inflation (et dictent la forme du spectre dans la limite UV). On approxime aisément ce spectre par

$$\mathcal{P}_T(k) \approx \frac{1}{1 + (k_*/k)^2} \left[1 + \frac{4R - 2}{1 + (k/k_*)^2} \right] \times \left[r \mathcal{A}_S \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_T} \right], \quad (6.7)$$

où $r \mathcal{A}_S (k/k_0)^{n_T}$ n'est rien d'autre que le spectre de puissance primordial obtenu dans un modèles standard (sans rebond) d'inflation. Ces paramètres sont phénoménologiques mais ce sont eux qui vont dicter les distorsions finales du spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB. On peut les relier aux paramètres fondamentaux du

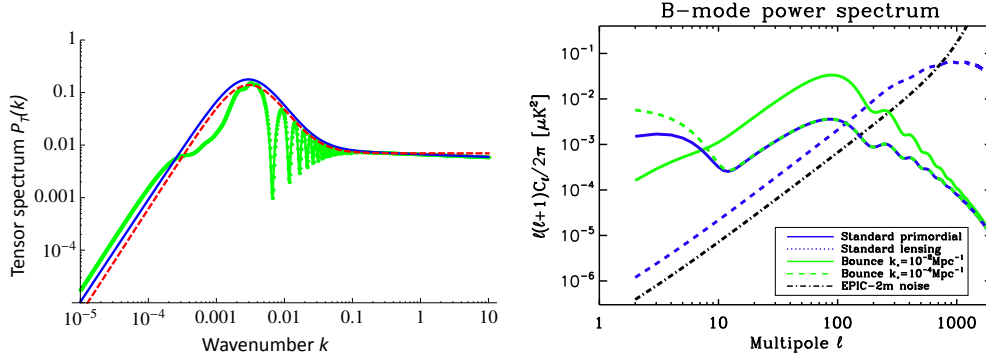


FIGURE 6.2 – *Gauche* : Spectre de puissance primordial des perturbations tensorielles avec *correction d'holonomie* et prenant en compte la dynamique complète d'un univers en rebond. La courbe verte correspond au résultat numérique. Les courbes bleues et rouges sont des approximations analytiques qui capturent l'essentiel des motifs propres à ce spectre. *Droite* : Spectre de puissance angulaire des anisotropies de mode B , C_ℓ^B , dans le cas de l'inflation standard (courbe bleue en trait plein) et prenant en compte les corrections d'holonomie et la dynamique complète de l'univers en LQC (courbes vertes). Ces deux courbes correspondent à deux valeurs possibles de l'échelle caractéristique $k_\star$ imprimée par le rebond quantique, 10^{-2} (trait plein) et 10^{-4} (tiret) Mpc^{-1} .

modèle via [39] :

$$R \approx \left(\frac{m_{\text{Pl}}}{m} \right)^{0.64}, \quad (6.8)$$

$$k_\star = \frac{\frac{4\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} \frac{m}{m_{\text{Pl}}} \bar{\varphi}_{\text{max}}}{\exp\left(2\pi \frac{\bar{\varphi}_{\text{max}}^2}{m_{\text{Pl}}^2}\right) \frac{T_{\text{RH}}}{T_{\text{eq}}} \left(\frac{g_{\text{RH}}}{g_{\text{eq}}}\right)^{\frac{1}{3}} (1 + z_{\text{eq}})}, \quad (6.9)$$

$$n_{\text{T}} = \frac{-1}{8\pi G} \left(\frac{1}{\bar{\varphi}_{\text{max}}} \right)^2, \quad (6.10)$$

$$r = -8 \times n_{\text{T}}, \quad (6.11)$$

avec

$$\bar{\varphi}_{\text{max}} \approx \bar{\varphi}_B + m_{\text{Pl}} = \left(\frac{\sqrt{2\rho_c}}{m} \right) x_B + m_{\text{Pl}}. \quad (6.12)$$

la valeur maximale du champ d'inflaton, exprimée ici en fonction de la fraction d'énergie potentielle au moment du rebond, x_B . Les quantités T_{RH} et g_{RH} sont la température de reheating et le nombre de degrés de liberté correspondant, tandis que $T_{\text{eq}} \simeq 0.75 \text{ eV}$, $z_{\text{eq}} \simeq 3196$ et $g_{\text{eq}} \simeq 3.9$ sont respectivement la température, le redshift et le nombre de degrés de liberté à l'égalité matière/rayonnement. On notera trois classes de paramètres : ρ_c et m qui sont des *constantes* du modèle, x_B qui est un paramètre *contingent* du modèle traçant les conditions initiales, et enfin T_{RH} , g_{RH} , T_{eq} , z_{eq} et g_{eq} qui tracent l'époque post-inflation. Nous sommes ici principalement intéressé par ces paramètres traçant la spécificité du modèle quantique, c'est-à-dire la première classe et la deuxième classe. Par une mesure précise des quatre paramètres phénoménologiques, il est possible de reconstruire les valeurs des paramètres fondamentaux m et x_B supposant la densité critique ρ_c connue.

Ce spectre de puissance primordial des modes tensoriels peut alors être propagé jusqu'aux anisotropies en polarisation du CMB. En particulier, les ondes gravitationnelles primordiales sont les seules sources possibles d'anisotropies primaires de type B . Pour cela, il est possible de modifier le code public CAMB [40] afin d'inclure les distortions du spectre de puissance primordial. Un exemple des spectres de puissances angulaires de mode B qui serait attendu en LQC est représenté sur la partie droite de la figure 6.2 (cf. Ref. [39]). (Nous rappelons que le multipole ℓ correspond à l'inverse d'une échelle angulaire sur la voûte céleste.) La courbe bleue en trait plein correspond au spectre de puissance angulaire attendu en inflation standard. Les deux courbes vertes correspondent à ce même spectre mais incluant les effets de LQC, pour deux valeurs de $k_\star$ (today), 10^{-4} Mpc^{-1} et 10^{-2} Mpc^{-1} . La première valeur correspond à une échelle caractéristique de la LQC qui est légèrement plus grande que l'horizon de Hubble

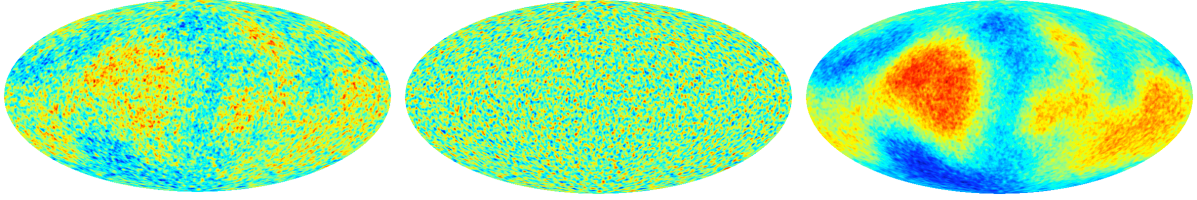


FIGURE 6.3 – Anisotropies de mode B primaire en cosmologie standard (gauche) et en LQC pour $k_* = 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$ et $R = 100$ (milieu) et $k_* = 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$ et $R = 100$ (droite). La valeur de k_* fixe l'échelle angulaire des structures qui seront principalement distordues alors que R fixe l'intensité de ces distorsions. (On notera que les échelles de couleur varient d'une carte à l'autre, l'important ici étant les échelles plus que l'intensité.)

aujourd'hui. (Le nombre d'onde correspondant à l'horizon de Hubble aujourd'hui est $k_H \simeq 2.3 \times 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$.) On ne peut donc pas 'voir' dans le CMB la suppression dans le domaine IR. Toutefois, la queue de la bosse à $k \sim k_*$ se traduit par une légère amplification aux grandes échelles angulaires, $\ell \sim 2 - 10$. La deuxième valeur correspond à une échelle caractéristique environ cent fois plus petite que l'horizon de Hubble. La bosse à k_* se traduit alors en une bosse à une échelle angulaire de l'ordre de $\ell_* \sim k_*/k_H$, c'est-à-dire $\ell_* \sim 100$ dans ce cas précis. Pour $\ell \ll \ell_*$, une suppression apparaît tandis que pour $\ell \gg \ell_*$, le spectre de puissance angulaire converge vers la prédiction standard de l'inflation.

La figure 6.3 montre comment une telle distorsion du spectre se traduirait sur des cartes d'anisotropies de mode B primaire (il faut ici garder à l'esprit que ces cartes de mode B ne sont jamais réellement observées). La première carte (gauche) correspond à des anisotropies de mode B primaire dans le cas standard pour $r = 0.05$ (courbe bleue de la figure 6.2). On remarque essentiellement des structures à plusieurs dizaine de degrés correspondant au pic de reionisation ($\ell \sim 2 - 10$) ainsi que des structures à l'échelle du degré correspondant au pic de recombinaison ($\ell \sim 90$). La seconde carte (milieu) correspond aux anisotropies obtenues en LQC avec $k_* = 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$ et $R = 100$ (cette dernière valeur étant choisie afin d'amplifier visuellement les effets). Cela revient donc à amplifier substantiellement les structures à l'échelle du degré (le pic de recombinaison) relativement aux structures à l'échelle de la dizaine de degrés (le pic de reionisation). Enfin, la dernière carte (droite) est obtenue avec $k_* = 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$ et $R = 100$ ce qui revient cette fois-ci à amplifier substantiellement les structures aux très grandes échelles, *i.e.* le pic de reionisation.

Au moment de cette étude, les anisotropies primaires et secondaires de mode B n'avaient toujours pas été détectées (entre temps, il y a une détection indirecte des anisotropies secondaires dues au lentillage gravitationnel du CMB par les grandes structures à l'aide des données du SOUTH POLE TELESCOPE [41], puis une détection directe par la collaboration POLARBEAR [42] et enfin une détection directe très probable des anisotropies *primaires* par la collaboration BICEP2 [3]). Partant des distorsions du spectre de puissance de mode B due à la LQC, il est toutefois possible de chercher à savoir si une future expérience dédiée à la polarisation du CMB serait en mesure de détecter de telles distorsions. La question qui se pose est la suivante : la précision de cette hypothétique expérience (déterminer essentiellement par sa sensibilité et la couverture de ciel observée) est telle suffisante pour reconstruire le mode B de façon suffisamment fine pour observer k_* et/ou la bosse à k_* . Pour cela, nous avons adopté un formalisme de Fisher [43] en considérant le cas d'une hypothétique mission satellite tel CORE ou PRISM (nous avons choisi les spécificités instrumentales de la Ref. [44]). Notre étude a montré que la détection d'une gamme de k_* allant de 10^{-4} Mpc^{-1} à 10^{-2} Mpc^{-1} serait possible [39]. (Ce paramètre est dégénéré avec le rapport tenseur-sur-scalaire, r , et l'amplitude du *boost* à k_* . Les limites ici données sont conservatives dans le sens où ces dégénérescences sont prises en compte par marginalisation.)

Même si les résultats de BICEP2 sont fortement sujet à caution (du moins au moment de la rédaction de ce manuscrit), il est intéressant de se demander si les spectres de mode- B LQC sont compatibles ou non avec les données de BICEP2 et celles de Planck. Pour cela il est important de se rappeler que BICEP2 contraint le mode tensoriel via le mode B aux échelles angulaires de l'ordre du degré ($\ell \sim 100$) tandis que Planck contraint le mode tensoriel via la température aux échelles angulaires de plusieurs dizaines de degrés ($\ell \sim 10$). Par BICEP2, aux échelles du degré, l'amplitude du mode tensoriel est fixée par $r = 0.2$. Par Planck, l'amplitude du mode tensoriel est majorée par $r < 0.11$. Cela se traduirait alors par un spectre primordial tensoriel qui serait *bleu* dans la gamme de k correspondant à des multipôles allant de 2 à ~ 100 . (On notera qu'un spectre bleu n'est pas prédit

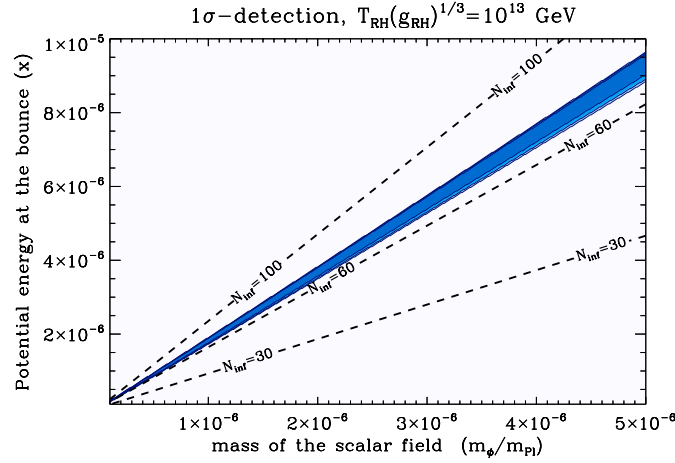


FIGURE 6.4 – Gamme des valeurs détectables des paramètres (m, x) pour un univers décrit dans le cadre de la LQC. Cette gamme en partie de la température de reheating qui a ici été fixée à $T_{RH}(g_{RH})^{1/3} = 10^{13}\text{GeV}$. Pour d'autres valeur de cette température, nous renvoyons à la Ref. [39].

par l'inflation.) Si $k_* \sim 10^{-4}\text{Mpc}^{-1}$, le spectre tensoriel LQC correspondant à cette gamme de multipôles est rouge (cf. courbe verte en tiret de la figure 6.2), ce qui est a priori exclu par notre raisonnement précédent. Cependant, si $k_* \sim 10^{-2}\text{Mpc}^{-1}$, alors le spectre tensoriel LQC devient bleu dans la gamme $\ell \in [2, 100]$ (cf. courbe verte en trait plein de la figure 6.2), ce qui est cette fois-ci favorisé par les données. Il ne faut toutefois pas pousser trop loin cela car les résultats de BICEP2 sont encore très controversés (et il semble même de plus en plus évident qu'une contamination galactique significative est bien présente [45]).

Cette gamme de valeurs détectables de k_* peut finalement être traduite en une gamme de valeurs détectables du couple (m, x) où m est la masse du champ scalaire et x la fraction d'énergie potentielle au moment du rebond. Cette gamme de valeurs détectables à 68% de niveau de confiance est présentée dans la figure 6.4 [39]. Compte tenu des différentes dégénérescences entre x et m , seule une bande de valeur est accessible. La partie supérieure est indétectable car elle correspond à des valeur de k_* bien plus faible que k_H et le spectre LQC n'est pas distordu dans sa gamme *observable*. A l'inverse, la partie inférieure n'est pas détectable car elle correspond à des valeurs de k_* suffisamment élevées pour que le spectre soit complètement supprimé.

Chapitre 7

Inhomogénéités cosmiques en cosmologie quantique à boucles

7.1 Algèbre des contraintes semiclassiques [46, 47, 48]

Comme il est mentionné en Sec. 3.2, l'invariance par difféomorphisme de la relativité générale se traduit, dans la formulation de Ashtekar, par une structure d'algèbre de contrainte. Il peut alors être montré que la théorie effective et semiclassique de la LQC (celle qui justement aboutit à l'équation de Friedmann modifiée Eq. (5.2)) revient à modifier de façon effective la contrainte C dans laquelle A_a^i est remplacé par une fonction de A_a^i , $A_a^i \rightarrow f(A_a^i)$, cette fonction étant dictée par le fait que la quantification nécessite de considérer les *holonomies* de la connexion plutôt que la connexion elle-même. Il peut alors être montré que l'hamiltonien effectif contenant ces corrections d'holonomie satisfait toujours l'algèbre de contrainte ci-dessus. Toutefois, cela est vrai pour l'espace-temps FLRW, totalement homogène et isotrope. Or l'espace-temps FLRW ne contient aucune inhomogénéité cosmique. Il faut plutôt considérer l'espace-temps FLRW *perturbé* qui n'est pas strictement parlant l'espace-temps FLRW, quand bien même ces deux espaces sont *comparables*. Quant-est il de l'algèbre de contrainte *semiclassique* pour un espace-temps FLRW *perturbé*?

Pour introduire les inhomogénéités, il faut considérer des perturbations du champ scalaire *et aussi* de la métrique. Dans la théorie effective de la LQC, il s'agit donc de perturber l'espace-temps FLRW semiclassique, contenant les corrections d'holonomies. Or il s'avère que l'implémentation naïve de cette approche conduit à des anomalies, *i.e.*

$$\{C_I^{\text{pert}}, C_J^{\text{pert}}\} = f^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a) C_K^{\text{pert}} + \mathcal{A}_{IJ}. \quad (7.1)$$

La structure de l'algèbre de contrainte n'est plus préservée *au niveau semiclassique et en ajoutant les perturbations cosmologiques*. Or cette structure découle directement du fait que $H_{RG} \approx 0$, c'est-à-dire de la symétrie fondamentale de la théorie d'Einstein. Cela signifie qu'à un niveau semiclassique avec les perturbations cosmologiques, la symétrie sous-jacente de la théorie est perdue. Si l'on se restreint aux seules perturbations tensorielles, les anomalies $\mathcal{A}_{IJ}$ n'apparaissent pas ; mais elles apparaissent dès que les perturbations scalaires et/ou vectorielles sont prises en compte. C'est pourquoi il a longtemps été pensé que ce problème d'anomalie et sa possible correction ne concernerait que les seules perturbations scalaires. (Le cas des perturbations vectorielles est aussi problématique. Nous l'avons considéré dans nos travaux. Ce types de perturbations n'est cependant que de peu d'importance dans l'univers primordial et nous focaliserons la discussion sur le cas scalaire.)

Afin d'avoir un cadre théorique cohérent pour *tout* type de perturbations cosmologiques, ce problème de correction des anomalies a été traité dans les Refs. [46, 47, 48]. Les trois points clés à retenir sont :

- il est possibles de corriger de ces anomalies et de restaurer l'algèbre des contraintes de la forme $\{C_I^{\text{pert}}, C_J^{\text{pert}}\} = \tilde{f}^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a) C_K^{\text{pert}}$;
- cela est rendu possible par une modification des fonctions de structure de l'algèbre de contrainte, *i.e.* $f^K_{IJ} \rightarrow \tilde{f}^K_{IJ}$;
- bien que les anomalies proviennent des perturbations scalaires et vectorielles, et non des perturbations tensorielles, la modification des fonctions de structure de l'algèbre de contrainte s'appliquant à *tout* type de perturbations, il s'ensuit que les perturbations tensorielles sont elles aussi affectées par cette modification.

La procédure corrigeant des anomalies est la suivante. Le point de départ est l'hamiltonien *classique* décrivant un espace-temps FLRW *et perturbé*. Il contient deux termes : un hamiltonien de fond donnant la dynamique globale de l'univers, $\mathcal{H}_0$, et un hamiltonien décrivant les inhomogénéités évoluant dans le fond globale, $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. L'hamiltonien de fond est modifié pour prendre en compte les corrections d'holonomies provenant de la quantification via les boucles. La forme de cette modification est fixée par les corrections d'holonomie. L'hamiltonien des perturbations est alors modifié phénoménologiquement avec des contretermes qui viennent justement corriger de ces anomalies. La forme exacte de ces contretermes est *partiellement* contraint par la quantification par voie des boucles, mais pas entièrement. Ils sont alors complètement contraints en imposant que $\mathcal{A}_{IJ} = 0$ tout en autorisant une possible modification des fonctions de structures, afin de restaurer la structure d'algèbre des contraintes. Nous avons montré que cette procédure fonctionne (*i.e.* il existe *une unique* solution pour les contretermes) pour le cas des perturbations vectorielles [46] puis pour le cas des perturbations scalaires [47]. Nous avons finalement montré dans la référence [48] qu'une *unique* modification des fonctions de structures (dans le cas des corrections d'holonomie) suffisait à restaurer la structure d'algèbre des contraintes.

Nous détaillons ici la procédure de correction des anomalies au niveau semiclassique en nous focalisant sur le cas de la contrainte hamiltonienne. Il sera important de toutefois garder à l'esprit que l'ensemble la procédure de modifications de l'hamiltonien à un niveau semiclassique doit s'appliquer à toutes les contraintes.

Dans le formalisme hamiltonien de Ashtekar, les variables de Ashtekar décrivant un espace-temps FLRW perturbé sont données par

$$A_a^i = \gamma \bar{k} \delta_a^i + \delta A_a^i \quad \text{et} \quad E_i^a = \bar{p} \delta_i^a + \delta E_i^a,$$

où $\bar{p} = a^2$ et la courbure extrinsèque $\bar{k}$ sont les degrés de liberté homogène et isotrope et δA_a^i et δE_i^a sont les perturbations. Elles sont aisément reliées à la formulation usuelle des perturbations par

$$\delta E_i^a = \bar{p} \left[-2\psi \delta_i^a + (\delta_i^a \partial^d \partial_d - \partial^a \partial_i) E - c_1 \partial^a F_i - c_2 \partial_i F^a - \frac{1}{2} h_i^a \right].$$

Il convient par ailleurs de perturber la fonction de laps et le vecteur de shift, $N = \bar{N} + \phi$ et $N^a = \bar{N}^a + \partial^a B$ où ϕ et B sont des scalaires. Si nous choisissons $\bar{N} = a$, nous travaillerons en temps conforme. Si à la place nous choisissons $\bar{N} = 1$, nous serons en temps cosmique. Dans ce formalisme, la contrainte hamiltonienne sur les hypersurfaces est donnée par

$$H[N] = \int_{\Sigma} d^3x \left[\bar{N} (\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(2)}) + \delta N \mathcal{H}^{(1)} \right].$$

avec pour l'ordre zéro en perturbation

$$16\pi G \mathcal{H}^{(0)} = -6\sqrt{\bar{p}} \bar{k}^2;$$

pour le premier ordre en perturbation

$$16\pi G \mathcal{H}^{(1)} = -4\sqrt{\bar{p}} \delta K_d^d - \frac{\bar{k}^2}{\sqrt{\bar{p}}} \delta E_d^d + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \partial^j \partial_c \delta E_j^c;$$

et enfin pour le deuxième ordre en perturbation

$$\begin{aligned} 16\pi G \mathcal{H}^{(2)} &= -2 \frac{\bar{k}}{\sqrt{\bar{p}}} \delta K_a^i \delta E_i^a + \sqrt{\bar{p}} \left(\delta_i^b \delta K_a^i \delta_j^a \delta K_b^j - \delta_i^a \delta K_a^i \delta_j^b \delta K_b^j \right) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\bar{k}^2}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}} \left(\delta_a^i \delta E_i^a \delta_b^j \delta E_j^b - 2 \delta_a^j \delta E_i^a \delta_b^i \delta E_j^b \right) + \frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}} Y_{bcd}^{kjil} \epsilon_k^{ab} \partial_a \left(\delta E_j^d \partial_i \delta E_l^c \right) \\ &+ \frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}} Z_{ab}^{cidj} \left(\partial_c \delta E_i^a \right) \left(\partial_d \delta E_j^b \right). \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, la quantité Z_{ab}^{cidj} permet de *sélectionner* le type de perturbations. Son expression explicite se trouve dans Ref. [48], le point clé à retenir étant $Z_{ab}^{cidj} \left(\partial_c \delta E_i^a \right) \left(\partial_d \delta E_j^b \right)$ vaut :

$$\begin{aligned} \delta_{ab} \delta^{ij} \delta^{cd} \cdot (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b) &\quad \text{modes tensorielles,} \\ 0 &\quad \text{modes vectorielles,} \\ -\frac{1}{2} \delta_a^c \delta_b^d \delta^{ij} \cdot (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b) &\quad \text{modes scalaires.} \end{aligned}$$

Focalisons nous pour un temps sur l'ordre zéro. Les corrections d'holonomie s'implémentent à un niveau semiclassique en remplaçant $\bar{k}$ dans $\mathcal{H}^{(0)}$ par $\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})/(\bar{\mu}\gamma)$. Ce remplacement est évidemment dicté par la quantification. Partant d'un hamiltonien homogène et isotrope *semiclassique* donné par

$$16\pi G \mathcal{H}_{\text{semiclassique}}^{(0)} = -6\sqrt{\bar{p}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma} \right)^2$$

on aboutit à l'équation de Friedmann modifiée, *i.e.* $H^2 = (8\pi G/3)\rho(1 - \rho/\rho_c)$. Il apparaît que les variables de fond, $\bar{p}$ et $\bar{k}$ apparaissent dans les parties perturbées de l'Hamiltonien, simplement car les perturbations se propagent dans un fond FLRW. Il est donc tentant d'effectuer la même opération de remplacement, *i.e.* $\bar{k} \rightarrow \sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})/(\bar{\mu}\gamma)$ dans $\mathcal{H}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(2)}$. Cela donnerait un hamiltonien décrivant la propagation des perturbations cosmologiques dans un fond *semiclassique*. Il conviendrait de faire le même type de remplacement dans les contraintes de Gauss et de difféomorphisme. Or c'est justement ce remplacement qui conduit aux anomalies. Si nous partons de ces contraintes *naïvement* modifiées pour prendre en compte les effets quantiques, alors l'algèbre des contraintes est brisée, *i.e.* :

$$\{\mathcal{C}_I^{\text{pert}}, \mathcal{C}_J^{\text{pert}}\} = f^K_{IJ}(\mathcal{A}_b^j, E_i^a) \mathcal{C}_K^{\text{pert}} + \mathcal{A}_{IJ}.$$

Pour corriger de ces anomalies, il est possible d'adopter une approche phénoménologique. Si dans l'hamiltonien d'ordre zéro en perturbation nous continuons de remplacer $\bar{k}$ par $\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})/(\bar{\mu}\gamma)$ (nous rappelons que cela vient de la quantification de l'espace-temps FLRW stricte, homogène et isotrope), nous autorisons une gamme plus large de substitution phénoménologique dans $\mathcal{H}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(2)}$. Par exemple, dans le premier terme de $\mathcal{H}^{(2)}$, $\bar{k}$ est remplacé par $\sin(n\bar{\mu}\gamma\bar{k})/(n\bar{\mu}\gamma) + \alpha_1$ (et non plus par $\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})/(\bar{\mu}\gamma)$). Pareillement, le second terme de $\mathcal{H}^{(2)}$, qui pourtant ne fait pas explicitement apparaître $\bar{k}$, se voit multiplier par un facteur $(1 + \alpha_2)$. Chacun des termes de la partie perturbée de l'hamiltonien est ainsi modifiée et des modifications identiques sont appliquées aux deux autres contraintes.

On notera ici que $\bar{k}$ est liée à la connexion et que $\bar{p}$ est lié à la densité de triade. Puisque nous nous intéressons ici aux corrections d'holonomie, c'est-à-dire au fait que c'est l'holonomie de la connexion et non la connexion elle-même qui est quantifiée, les termes en $\bar{p}$ ne sont pas modifiés. On notera aussi que ces modifications ne touchent que les variables de fond, c'est-à-dire les degrés de liberté homogène et isotrope, et non les perturbations. La raison est que nous cherchons l'évolution des perturbations dans un fond semiclassique et non une "semiclassisation" des perturbations.

À ce stade, les différents coefficients α_i et les entiers naturels n ne sont pas encore déterminés mais on notera que si l'on calcule les différents crochets de Poisson entre ces différentes contraintes semiclassiques, des termes d'anomalies apparaissent comme fonctions des α_i et des n . Par ailleurs, les fonctions de structures de l'algèbre de contrainte sont elles aussi dépendantes de ces paramètres. Ces coefficients sont alors déterminés en imposant une des deux contraintes. Tout d'abord (et c'est le but premier de cette approche), ils doivent être choisis afin d'annuler les anomalies, $\mathcal{A}_{IJ}(\alpha_i, n) = 0$. Deuxièmement, il est nécessaire de retrouver les contraintes *classique* dans la limite des grands volumes. Cela impose que dans la limite des grands volumes, tous les α_i tendent vers 0 et que $\sin(n\bar{\mu}\gamma\bar{k})/(n\bar{\mu}\gamma) \rightarrow \bar{k}$. La limite des grands volumes se traduisant par $\gamma\bar{\mu}\bar{k} \rightarrow 0$, la seconde condition est systématiquement satisfaite pour n non-nul.

Rien ne garantit a priori que le système algébrique à résoudre est une solution (il y a au final 9 anomalies à annuler). Pourtant, dans le cas des corrections des holonomies, il est non seulement montré qu'il existe effectivement une solution à ce système mais plus encore, que cette solution est unique. Il y a donc effectivement une façon d'éliminer les termes d'anomalies dans l'algèbre de contrainte à un niveau semiclassique et prenant en compte les perturbations. Il convient maintenant de noter un point clé. Notre requisit premier est d'imposer $\mathcal{A}_{IJ}(\alpha_i, n) = 0$ mais pas d'imposer que les fonction de structure de l'algèbre de contrainte, f^K_{IJ} restent intact. Et précisément, obtenir une solution au système algébrique $\mathcal{A}_{IJ}(\alpha_i, n) = 0$ est possible en modifiant les fonctions de structure. Ainsi, à un niveau semiclassique, la structure d'algèbre se trouve modifiée. Evidemment, dans la limite des grands volumes, les fonctions de structure semiclassique tendent vers les fonctions de structure classique de l'algèbre de contrainte.

Classiquement en cosmologie, l'algèbre de contrainte est :

$$\{D_{(m+g)}[N_1^a], D_{(m+g)}[N_2^a]\} = 0, \quad (7.2)$$

$$\{H_{(m+g)}[N], D_{(m+g)}[N^a]\} = -H_{(m+g)}[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (7.3)$$

$$\{H_{(m+g)}[N_1], H_{(m+g)}[N_2]\} = D_{(m+g)}\left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1)\right], \quad (7.4)$$

où l'indice $(m+g)$ signifie que les contraintes prennent en compte la gravité *et* la matière (*i.e.* l'Hamiltonien du champ scalaire en plus de l'Hamiltonien gravitationnel). Nous rappelons que nous sommes ici intéressé par

l'espace-temps FLRW *perturbé*. Les quantités $\bar{N}$ et $\bar{p} = a^2(t)$ sont des quantités purement homogènes et isotropes décrivant le fond. La quantité δN correspond aux variations de la fonction de laps compte tenu des perturbations. Les contraintes ci-dessus ne sont pas explicitées mais elles contiennent, évidemment, une partie de fond (homogène et isotrope) et une partie pour les perturbations. Il est alors suffisant de modifier la dernière des équations de structure, *i.e.*

$$\{H_{(m+g)}[N_1], H_{(m+g)}[N_2]\} = \Omega \times D_{(m+g)} \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right], \quad (7.5)$$

avec $\Omega = (1 - 2\rho/\rho_c)$ qui est donc une fonction du temps cosmique.

Pour les grands volumes (que ce soit dans la contraction ou dans l'expansion), cette modification tend vers 1 et on retrouve la structure d'algèbre classique. Pour $\rho > \rho_c/2$, la fonction Ω devient négative pour atteindre (-1) au rebond, $\rho = \rho_c$. (Cette même forme de modification a aussi été obtenue dans l'étude de théorie effective pour les espaces-temps statiques et à symétrie sphérique [49]. Ce type de correction est appelée Ω -correction ou encore β -correction selon la littérature.)

7.2 Propagation des inhomogénéités cosmiques dans un fond quantique [58, 59]

Ce changement de structure définit une modification unique de l'hamiltonien totale décrivant l'univers semi-classique *et* les perturbations s'y propageant. Partant de là, on peut dériver l'équation du mouvement pour les perturbations scalaires et les perturbations tensorielles, respectivement décrites par les variables de Mukhanov-Sasaki¹, $v_S = (z_S \times \mathcal{R})$ et $v_T = (z_T \times h_s / \sqrt{32\pi G})$, (cf. Refs. [48, 50]),

$$v_{S(T)}'' - \Omega(\eta) (\Delta v_{S(T)}) - \left(\frac{z_{S(T)}''}{z_{S(T)}} \right) v_{S(T)} = 0, \quad (7.6)$$

écrite ici en temps conforme η , Δ est l'opérateur Laplacien (nous rappelons que nous considérons le cas d'un univers à section spatiale plate) et $z_{S(T)}$ est une quantité qui contient l'impact de l'évolution globale de l'Univers sur les perturbations. Elle est donnée par

$$z_S(\eta) = \frac{a^2(\eta) \times \varphi'(\eta)}{a'(\eta)}, \quad (7.7)$$

$$z_T(\eta) = \frac{a(\eta)}{\sqrt{\Omega(\eta)}}. \quad (7.8)$$

(Pour le cas spécifique des perturbations scalaires, la même équation de propagation a été obtenue partant d'une approche différente [51].)

Il était déjà évident que l'évolution via un rebond affectait l'évolution des perturbations cosmologiques (cf. la section précédente) simplement car l'histoire cosmique est différente en cosmologie quantique, dans les tout premiers instants, qu'en cosmologie classique. Mais ici, nous montrons que la forme même des équations de propagation des perturbations est modifiée lorsque l'espace de fond considéré est *semiclassique*. En effet, il faut se rappeler que dans le cas classique, les équations de propagation sont

$$v_{S(T)}'' - (\Delta v_{S(T)}) - \left(\frac{\tilde{z}_{S(T)}''}{\tilde{z}_{S(T)}} \right) v_{S(T)} = 0, \quad (7.9)$$

1. Le choix est ici fait de façon à ce que les modes propres sont proprement normalisés pour définir un état vide tel que, si $k^2 \gg z_{S(T)}''/z_{S(T)}$ alors $v_{S(T),k}(\eta) = \exp(ik\eta)/\sqrt{2k}$. Avec ces variables de Mukhanov-Sasaki, nous rappelons que les spectres de puissance primordiaux sont donnés par :

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \times \left\langle \left| \frac{v_{S,k}(\eta_f)}{z_S(\eta_f)} \right| \right\rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_T(k) = \frac{16\pi G k^3}{\pi^2} \times \sum_{s=1}^2 \left\langle \left| \frac{v_{T,k}(\eta_f)}{z_T(\eta_f)} \right| \right\rangle.$$

avec

$$\tilde{z}_S(\eta) = \frac{a^2(\eta) \times \varphi'(\eta)}{a'(\eta)} = z_S(\eta), \quad (7.10)$$

$$\tilde{z}_T(\eta) = a(\eta) \neq z_T(\eta). \quad (7.11)$$

Il y a donc essentiellement deux différences d'avec la théorie classique. Premièrement, le Laplacien est remplacé par $\Omega \times \Delta$ avec Ω qui dépend du temps. Deuxièmement, pour le cas uniquement des perturbations tenseurs, la fonction z_T qui prend en compte l'impact du fond sur les perturbations est elle aussi modifiée.

On notera quatre points important ici. En premier lieu, les anomalies $\mathcal{A}_{IJ}$ ne proviennent *pas* de l'introduction des perturbations tensorielles. *Pourtant*, corriger de ces anomalies nécessite de modifier l'ensemble de la structure d'algèbre de contrainte, ce qui affecte *aussi* les perturbations tensorielles. Il en résulte que bien que les perturbations tensorielles n'engendrent a priori aucune anomalie, corriger de ces dernières de façon cohérente affecte aussi les perturbations tensorielles (en particulier l'introduction de Ω devant le Laplacien).

En second lieu, la fonction Ω change de signe pour $\rho = \rho_c/2$: quand la densité d'énergie atteint $\rho_c/2$ avant le rebond, Ω devient négatif jusqu'à ce que ρ redevienne plus petit que $\rho_c/2$ après le rebond. Si l'on compare la structure d'algèbre modifiée, Eq. (7.5), à la structure d'algèbre générale, Eqs. (3.26) à (3.28), il apparaît que le changement de signe de Ω peut s'interpréter comme un changement de *signature* de l'espace-temps semiclassique : quand $\rho_c/2 < \rho \leq \rho_c$, toutes les dimensions seraient du même type [52]. La pertinence d'une telle conclusion n'est pas encore claire : quel serait le sens d'un espace-temps *semiclassique* pour lequel la signature peut effectivement changer² ?

En troisième lieu, les résultats ci-dessous ont été obtenus avec les seules corrections d'holonomie. Le cas des corrections de volume-inverse a aussi été fait [54]. Lorsque les deux effets sont pris ensembles, il reste possible de clore l'algèbre de contrainte (et donc d'éliminer toutes les anomalies). Toutefois la solution n'est pas unique et il existe plusieurs modifications semiclassiques effectives possibles, certaines conduisant à un changement de signature, d'autres non [55].

En quatrième lieu, il est important de noter qu'une approche différente de la construction des perturbations cosmologiques se propageant dans une géométrie quantique a été développée durant la dernière année [56]. Cette approche diffère à plus d'un titre de la notre et le point clé est que les équations du mouvement qui en découlent sont différentes, *i.e.*

$$v''_{S(T)} - (\Delta v_{S(T)}) - \left(\frac{\langle \hat{z}''_{S(T)} \rangle}{\langle \hat{z}_{S(T)} \rangle} \right) v_{S(T)} = 0, \quad (7.12)$$

avec $\langle \hat{O} \rangle$ qui signifie la valeur attendue de l'opérateur quantique $\hat{O}$ prise sur une *géométrie quantique de fond*; a priori $\langle \hat{z}_{S(T)} \rangle \neq \tilde{z}_{S(T)}$, $\langle \hat{z}_{S(T)} \rangle \neq z_{S(T)}$ et la fonction Ω n'apparaît plus devant le Laplacien.

Nous introduisons ici succinctement l'approche développée dans les références [56] pour traiter le cas des perturbations cosmologiques se propageant dans un espace-temps quantique.

Rappelons d'abord que l'approche développée ici fonctionne de la façon suivante. Premièrement, l'espace de phase complet de la relativité générale est réduit aux seuls degrés de liberté homogène et isotrope. La quantification par voie des boucles est alors effectuée sur cet espace de phase réduit, Γ_{FLRW} . Pour les états fortement piqués autour des solutions classiques (à grand volume), une dynamique effective classique est déterminée sur l'espace de phase réduit (il s'agit de l'équation de Friedmann modifiée). Enfin, les perturbations cosmologiques sont ajoutées partant de cette description effective de l'univers quantique. Pour cela, on part de l'hamiltonien classique contenant les degrés de liberté homogène et isotrope ainsi que le premier ordre des degrés de liberté inhomogène. Les variables canoniques décrivant les degrés de liberté homogènes et isotropes sont alors remplacées par des fonctions de ces dernières prenant en compte qu'il faut clore l'algèbre. La dynamique des perturbations est alors donnée par l'hamiltonien au deuxième ordre mais ne gardant que le carré des perturbations au premier ordre (rejetant donc les perturbations du deuxième ordre). Enfin, ces perturbations sont quantifiées en utilisant les techniques usuelles de quantification des champs en espace courbe.

A l'inverse, l'approche développée dans Ref. [56] ne part pas de l'espace de phase totalement homogène et isotrope, Γ_{FLRW} , mais plutôt de l'espace de phase réduit de l'espace-temps FLRW perturbé, $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{\text{FLRW}} \times \Gamma_{\text{pert}}$. Relativement à l'espace de phase

2. On se rappellera en particulier qu'à un niveau classique –c'est-à-dire au niveau des espace-temps pseudoriemannien de la relativité générale–, un changement de signature semble impossible en vertu du théorème d'inertie de Sylvester [53].

complet de la relativité générale, cet espace de phase est bel et bien réduit mais il contient plus de degrés de liberté que l'espace de phase réduit Γ_{FLRW} dans le sens où, en plus des degrés de liberté homogènes et isotrope, il contient aussi les degrés de liberté des perturbations au premier ordre. Partant de cet espace de phase 'perturbé', l'état quantique s'écrit comme le produit tensoriel de deux fonctions d'onde, $\Psi(\nu, v_{\text{S(T)}}, \varphi) = \Psi_{\text{FLRW}}(\nu, \bar{\varphi}) \otimes \Psi_{\text{pert}}(v_{\text{S}}, v_{\text{T}}, \bar{\varphi})$, avec ν les degrés de liberté homogènes et isotropes et $v_{\text{S(T)}}$ les degrés de liberté des perturbations. La quantification de la géométrie de fond, homogène et isotrope, est effectuée par la voie des boucles. Il existe plusieurs états quantiques possibles pour la géométrie et le formalisme développé dans [56] les traite également. Toutefois, nous nous limiterons ici au cas des états fortement piqués autour de la solution classique. Pour ce type d'état, il est possible de définir un opérateur métrique

$$\hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1} \ell^6 \hat{a}^6(\bar{\varphi}) \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1} d\bar{\varphi}^2 - \hat{a}^2 d\vec{x} \cdot d\vec{x},$$

avec $\hat{H}_{\text{FLRW}} = \hbar \sqrt{\Theta_{(\nu)}}$ l'opérateur hamiltonien du fond homogène et isotrope et ℓ^3 le volume de la cellule fiducielle. La dynamique quantique des perturbations est alors donnée par l'hamiltonien à l'ordre deux (toujours en se restreignant au carré des perturbations au premier ordre) qui doit être promu au rang d'opérateur. Toutefois, cet opérateur agissant dans cette portion de l'espace de Hilbert décrivant les perturbations dépend du facteur d'échelle dépendant du temps, c'est-à-dire du fond quantique. Cela n'est évidemment pas surprenant et signifie ni plus ni moins que le fond influence les perturbations. Cette procédure utilise les techniques développées dans la référence [57] et nous nous contenterons ici de résumer l'approche. Dans un premier temps, l'opérateur hamiltonien complet est appliqué, qui agit donc sur l'état quantique complet, *i.e.* $-i\hbar \partial_{\bar{\varphi}} \Psi(\nu, v_{\text{S(T)}}, \bar{\varphi}) = [\hat{H}_{\text{FLRW}} + \hat{H}_{\text{pert}}] \Psi(\nu, v_{\text{S(T)}}, \bar{\varphi})$. Ensuite, il convient de passer à la représentation en interaction par la transformation

$$\Psi_{\text{int}} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{FLRW}}(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_B) \right] \left(\Psi_{\text{FLRW}}(\nu, \bar{\varphi}) \otimes \Psi_{\text{pert}}(v_{\text{S(T)}}, \bar{\varphi}) \right).$$

Le passage à cette représentation en interaction de la fonction d'onde nécessite de prendre quelques précautions. Dans l'exponentielle ci-dessus, un choix explicite de variable temporelle est fait, le temps relationnel $\bar{\varphi}$. A cause de cela, il est nécessaire de construire l'opérateur hamiltonien agissant sur les perturbations, $\hat{H}_{\text{pert}}$, en accord avec ce choix explicite de variable temporelle. Cela se traduit par un choix approprié de la fonction de laps. Par ailleurs, l'opérateur $\hat{H}_{\text{pert}}$ est aussi composé d'opérateur agissant sur le fond, en particulier d'opérateur métrique comme l'opérateur associé au facteur d'échelle. Il est donc nécessaire que l'ordre de ces opérateurs, dans la construction de $\hat{H}_{\text{pert}}$, soit en accord avec l'ordre des opérateurs intervenant dans l'opérateur métrique, $\hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. La dynamique des perturbations tensorielles (l'approche se généralisant aussi aux perturbations scalaires) dans la représentation interaction est alors

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{FLRW}} \otimes i\hbar \partial_{\bar{\varphi}} \Psi_{\text{pert}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ 32\pi G [\hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1} \Psi_{\text{FLRW}}(\nu, \bar{\varphi})] \otimes \left[|\hat{\pi}_{\text{T}, \vec{k}}|^2 \Psi_{\text{pert}}(v_{\text{S(T)}}, \bar{\varphi}) \right] \right. \\ &+ \left. \frac{k^2}{32\pi G} [\hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \hat{a}^4(\bar{\varphi}) \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \Psi_{\text{FLRW}}(\nu, \bar{\varphi})] \otimes \left[|\hat{v}_{\text{T}, \vec{k}}|^2 \Psi_{\text{pert}}(v_{\text{S(T)}}, \bar{\varphi}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

avec $(\hat{v}_{\text{T}, \vec{k}}, \hat{\pi}_{\text{T}, \vec{k}})$ les opérateurs de configuration et de moment conjugué des perturbations. En prenant le produit scalaire de l'équation de Schrödinger ci-dessus avec la fonction d'onde décrivant le fond, Ψ_{FLRW} , on obtient alors l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde décrivant les perturbations :

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_{\bar{\varphi}} \Psi_{\text{pert}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ 32\pi G \langle \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1} \rangle |\hat{\pi}_{\text{T}, \vec{k}}|^2 \Psi_{\text{pert}} \right. \\ &+ \left. \frac{k^2}{32\pi G} \langle \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \hat{a}^4(\bar{\varphi}) \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \rangle |\hat{v}_{\text{T}, \vec{k}}|^2 \Psi_{\text{pert}} \right\}, \end{aligned}$$

avec $\langle \cdot \rangle$ qui signifie la valeur attendue d'opérateur de fond évalué sur l'état quantique de fond uniquement, *i.e.* $\langle \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1} \rangle := \langle \Psi_{\text{FLRW}} | \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1} | \Psi_{\text{FLRW}} \rangle$.

Considérons pour un temps le cas des perturbations cosmologiques, quantifiées, mais évoluant dans le fond FLRW *classique*. Dans un formalisme de Schrödinger, l'équation de Schrödinger pour la fonctionnelle d'onde est

$$i\hbar \partial_{\bar{\varphi}} \Psi_{\text{pert}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ 32\pi G (\bar{p}_\varphi)^{-1} |\hat{\pi}_{\text{T}, \vec{k}}|^2 \Psi_{\text{pert}} + \frac{k^2}{32\pi G} (\bar{p}_\varphi)^{-1} a^4(\bar{\varphi}) |\hat{v}_{\text{T}, \vec{k}}|^2 \Psi_{\text{pert}} \right\},$$

avec a le facteur d'échelles *classique* et $\bar{p}_\varphi$ le moment conjugué au champ scalaire *classique*. Cette équation est obtenue en utilisant le champ scalaire homogène comme variable de temps, ce qui correspond à réécrire la métrique FLRW ainsi

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\bar{p}_\varphi)^{-2} \ell^6 a^6(\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}^2 - a^2(\bar{\varphi}) d\vec{x} \cdot d\vec{x}.$$

Il y a donc une analogie de forme entre la dynamique des perturbations quantifiées évoluant dans un fond classique et cette même dynamique mais pour des perturbations évoluant dans un fond quantifiée via la LQC. Conséquemment, la dynamique des perturbations en LQC peut être décrite comme les dynamique des perturbations sur un fond classique en introduisant une *métrique habillée* (pour *dressed metric* en anglais), *i.e.*

$$i\hbar\partial_{\tilde{\varphi}}\Psi_{\text{pert}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ 32\pi G(\tilde{p}_{\varphi})^{-1} |\hat{\pi}_{\text{T},\vec{k}}|^2 \Psi_{\text{pert}} + \frac{k^2}{32\pi G} (\tilde{p}_{\varphi})^{-1} \tilde{a}^4(\tilde{\varphi}) |\hat{v}_{\text{T},\vec{k}}|^2 \Psi_{\text{pert}} \right\},$$

en identifiant

$$(\tilde{p}_{\varphi})^{-1} = \langle \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1} \rangle \quad \text{and} \quad \tilde{a}^4 = \frac{\langle \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \hat{a}^4(\tilde{\varphi}) \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \rangle}{\langle \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1} \rangle}.$$

La métrique habillée $\tilde{g}_{\mu\nu}$ n'est pas égale à la métrique classique mais, plus important encore, elle n'est a priori pas égale à la tracé par le pic des états fortement piqués. Autrement dit, il n'y a a priori aucune raison pour que $\tilde{p}_{\varphi}$ et $\tilde{a}$ soient solutions des équations de Klein-Gordon et de Friedmann modifiée, effective. Grâce à cette identification, la quantification des perturbations peut aussi être effectué via les techniques usuelles de théorie quantique des champs en espace courbe, passant par un espace de Fock.

Ce formalisme s'étend au cas des perturbations scalaires et la même analogie formelle ressort. En utilisant les techniques de théorie quantique des champs en espace courbe, l'état quantique des perturbations est donné par la connaissance des fonctions propres solutions des équations du mouvement des perturbations scalaires d'une part, et tensorielles d'autre part. Il ressort que les équations du mouvement dans ce formalisme sont

$$\begin{aligned} Q_k'' + 2 \left(\frac{\tilde{a}'}{\tilde{a}} \right) Q_k' + (k^2 + \tilde{U}) Q_k &= 0, \\ h_k'' + 2 \left(\frac{\tilde{a}'}{\tilde{a}} \right) h_k' + k^2 h_k &= 0, \end{aligned}$$

avec Q_k une variable invariante de jauge pour les perturbations scalaires et reliée à la variable de Mukhanov-Sasaki par $Q_k = a^{-1} \times v_{\text{S},k}$; $\tilde{U}$ est un terme de type *potentiel habillé* donné par

$$\tilde{U}(\tilde{\varphi}) = \frac{\langle \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \hat{a}^2(\tilde{\varphi}) \hat{U}(\tilde{\varphi}) \hat{a}^2(\tilde{\varphi}) \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \rangle}{\langle \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \hat{a}^4(\tilde{\varphi}) \hat{H}_{\text{FLRW}}^{-1/2} \rangle}.$$

Il est la contrepartie quantique de

$$U(\tilde{\varphi}) = a^2 \left(fV(\tilde{\varphi}) - 2\sqrt{f}\partial_{\tilde{\varphi}}V + \partial_{\tilde{\varphi}}^2 V \right),$$

avec $f = 24\pi G(\dot{\tilde{\varphi}}^2/\rho)$ la fraction d'énergie cinétique dans le champ scalaire. Il est important de noter que ce sont la métrique et le potentiel *habillé*, et non classique, qui interviennent dans les équations ci-dessus. Il est important de noter ici que pour le cas spécifique des états fortement piqués, les fluctuations quantiques du fond sont négligeables. Ainsi, le potentiel *habillé*, $\tilde{U}$, et le facteur d'échelle *habillé*, $\tilde{a}$, coïncident alors avec leur valeur effective tracé par le pic de la fonction d'onde du fond, c'est-à-dire avec les solutions des équations de Klein-Gordon et de Friedmann effective.

Puisque deux approches alternatives ne conduisant pas exactement à la même théorie des perturbations cosmologiques se propageant sur une géométrie quantique de fond émergent, il est important de comparer ces deux cadres théoriques. Notre approche consiste à perturber un espace-temps semiclassical. L'approche [56] consiste quant-à elle à quantifier un espace-temps perturbé pour ensuite en prendre la limite semiclassical. Si dans ses principes la seconde approche semble plus pertinente, il est important de noter que dans notre approche, les trois contraintes (scalaire, vectorielle et de Gauss) sont résolues au niveau semiclassical tandis que dans l'approche [56], si la contrainte scalaire est résolue au niveau quantique, les contraintes vectorielles et de Gauss sont quant-à elle résolues à un niveau classique uniquement. En ce sens, si notre approche n'est pas complètement quantique, elle est complètement semiclassical (*i.e.* relativement aux trois contraintes) alors que l'approche de [56] est quantique relativement à la contrainte scalaire mais classique relativement aux deux autres.

D'un point de vue théorique, il semble de plus en plus nécessaire d'avoir des apports de la théorie mère, en particulier de l'approche dite de la cosmologie par mousses de spin. Toutefois, il y a encore un long chemin entre la cosmologie en mousses de spin et la phénoménologie des perturbations cosmologiques se propageant dans une

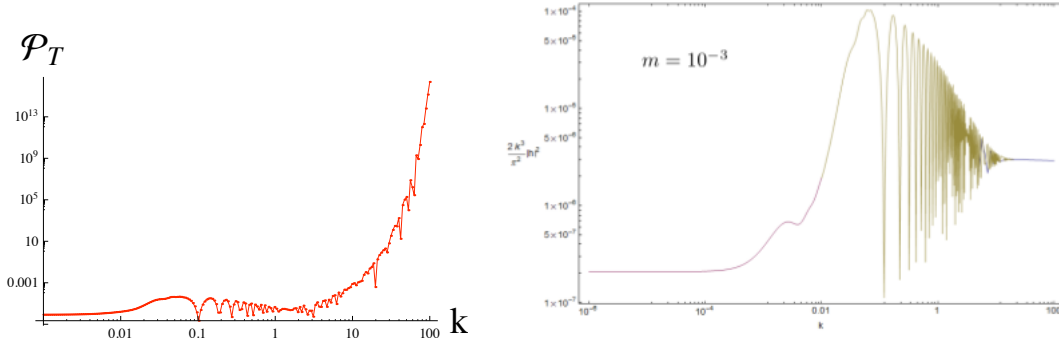


FIGURE 7.1 – Spectre de puissance primordial des modes tensoriels dans la construction des Refs. [46, 47, 48] de la théorie des perturbations cosmologiques se propageant sur un fond classique (gauche) et dans la construction de la Ref. [56] de cette théorie (droite).

géométrie quantique. Or la comparaison peut aussi être faite d’un point de vue phénoménologique. Que ce soit avec l’approche ici présentée [46, 47, 48] ou avec l’approche [56], il est possible de prédire les spectres de puissance primordiaux des perturbations scalaires et tensorielles et ainsi l’impact que cela aurait sur les anisotropies en température et en polarisation du CMB. Pour cela, il est nécessaire de calculer les spectres de puissance primordiaux en fin d’inflation, prenant en compte les équations du mouvement présentées ci-dessus.

En prenant comme conditions initiales pour les perturbations un vide de Minkowski dans la phase de contraction, le spectre de puissance primordial des perturbations tensorielles présente trois régimes lorsque les corrections Ω sont prises en compte [58] :

- aux grandes échelles de longueur, $k \ll \sqrt{8\pi G\rho_c}$, le spectre est invariant d’échelle ;
- aux échelles intermédiaires, $k \sim \sqrt{8\pi G\rho_c}$, le spectre présente une forte amplification suivi d’oscillations amorties ;
- aux petites échelles de longueur, $k \gg \sqrt{8\pi G\rho_c}$, le spectre est *exponentiellement* amplifié.

Dans l’approche de [56], le spectre de puissance tensoriel se comporte ainsi [56, 59] :

- aux grandes échelles de longueur, $k \ll \sqrt{8\pi G\rho_c}$, le spectre est invariant d’échelle ;
- aux échelles intermédiaires, $k \sim \sqrt{8\pi G\rho_c}$, le spectre présente une forte amplification suivi d’oscillations amorties ;
- aux petites échelles de longueur, $k \gg \sqrt{8\pi G\rho_c}$, le comportement standard inflationnaire, *i.e.* un spectre légèrement rouge, est retrouvé.

Ces prédictions sont obtenues numériquement et analytiquement dans les limites IR et UV. On peut en particulier montrer que la limite IR est identique dans les deux approches :

$$\mathcal{P}_T(k \rightarrow 0) \simeq \mathcal{A}_T^{(IR)} + \mathcal{O}(k^4), \quad (7.13)$$

avec l’amplitude $\mathcal{A}_T^{(IR)}$ proportionnelle à $(m/M_{Pl})^2$.

Deux exemples de ces spectres de puissance primordiaux pour les modes tensoriels sont représentés sur la figure 7.1 pour l’approche des Refs. [46, 47, 48] (gauche) et pour l’approche de la Ref. [56] (droit). Il reste encore à propager ces spectres de puissance jusqu’aux anisotropies de type B du fond diffus cosmologique, puis de réitérer ce travail pour le cas des perturbations scalaires et enfin les propager jusqu’aux anisotropies de température et de polarisation de type E du fond diffus cosmologique. Cela permettra une confrontation aux données CMB, des prédictions faites dans ces deux cadres alternatifs de théorie des perturbations cosmologiques se propageant dans un fond quantique.

Différents choix des conditions initiales des perturbations cosmologiques sont possibles. Les résultats ici présentés sont obtenus en plaçant les conditions initiales durant la phase de contraction. Infiniment loin dans cette branche, tous les modes sont subhorizon et le vide est simplement le vide de Minkowski :

$$v_{T,k}(\eta \rightarrow -\infty) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \exp(-ik\eta).$$

Ce choix de conditions initiales s'appliquent identiquement que l'on travaille dans une approche de métrique habillée ou bien dans une approche de clôture de l'algèbre.

Un autre choix possible, adopté dans la référence [56], consiste à fixer les conditions initiales au moment du rebond. Ce choix se justifie ainsi : pour que l'approche perturbative soit valide, il est nécessaire que la densité d'énergie des perturbations n'excède jamais celle du fond. Or cette densité d'énergie des perturbations est maximale au moment du rebond. Il va alors être exigé de fixer les conditions initiales au moment du rebond de telle sorte que la densité d'énergie des perturbations est proprement régularisée au moment du rebond. Puisque cela correspond à la situation maximale, c'est une condition suffisante pour la densité d'énergie des perturbations n'excède jamais celle du fond à *tout* les instants de l'histoire cosmique.

On notera toutefois que ce choix pose plusieurs problème. Pour les modes tels que $k^2 \leq 8\pi G\rho_c$, les modes ne sont pas oscillants mais soit exponentiellement amplifiés, soit exponentiellement supprimés. Partant de technique de théorie quantique des champs, il n'est donc pas évident de donner une interprétation en terme de particule de ces modes. Par ailleurs, pour les modes proches de cette valeur critique de $\sqrt{8\pi G\rho_c}$, l'évolution n'est pas du tout adiabatique. Il est donc nécessaire de s'assurer que tel est le cas sans quoi le spectre de puissance en fin d'inflation deviendrait extrêmement sensible au choix des conditions initiales.

Conclusion II [63, 64]

Il est possible de qualitativement défricher la zone d'espace de paramètres de la modélisation de l'ère de Planck dans la LQC partant des derniers résultats publiés par PLANCK quant au spectre de puissance angulaire des anisotropies de température. Comme déjà mentionné en conclusion de notre première partie (voir la figure A de Part. I), le spectre de puissance angulaire tel que mesuré par le satellite PLANCK montre deux choses³ : pour $\ell \geq 50$, un spectre de puissance primordial des modes scalaires en loi de puissance avec $n_S = 0.96$ [1] s'ajuste remarquablement bien aux données tandis que pour $\ell \leq 50$, des écarts, certes faibles, restent possibles. Cette échelle angulaire caractéristique de $\ell_{\text{CMB}} \simeq 50$ se traduit par une échelle de longueur caractéristique (très grossière) dans le spectre de puissance primordial : $k_{\text{CMB}}(\text{today}) = \ell_{\text{CMB}} \times k_H(\text{today})$. Cela signifie donc que pour que la LQC soit en accord avec les données PLANCK, le spectre de puissance primordial des modes *scalaires* doit être le spectre inflationnaire standard pour $k(\text{today}) \geq k_*(\text{today})$ alors que de faibles déviations sont autorisées pour des valeurs plus faibles du nombre d'onde. Par ailleurs, la modélisation présentée ci-dessus montre qu'au *moment du rebond*, l'échelle caractéristique laissée par la LQC est de $k_{\text{LQC}}(t_B) \simeq \sqrt{8\pi G \rho_c}$. Cette échelle est ensuite étirée par l'expansion cosmique. Enfin, si l'on suit par exemple la modélisation des Ref. [56], alors le spectre primordial prédit correspond au spectre inflationnaire standard pour $k(t_B) > k_{\text{LQC}}(t_B)$. En comparant cela à l'échelle caractéristique imposée par PLANCK, on peut d'ores et déjà déduire que $\sqrt{8\pi G \rho_c} \times \exp(-N) \leq \ell_{\text{CMB}} \times k_H(\text{today})$ avec N le nombre de *e-fold* depuis le rebond jusqu'à aujourd'hui. Evidemment l'échelle caractéristique inférée des mesures du CMB, k_{CMB} , est grossière. Mais cela souligne la stratégie future à adopter et le fait que les mesures CMB ont un fort potentiel d'exclusion. Ce point est résumé dans la figure B où, supposant que la prédiction LQC conduit à un spectre inflationnaire pour $k > k_{\text{LQC}}$ (ce qui est en pratique le cas pour une des approches de la théorie des perturbations cosmologiques) : pour $k_{\text{LQC}} < k_H$, le paradigme des boucles avec rebond puis inflation et l'inflation pure ne sont pas distinguables ; pour $k_{\text{LQC}} > k_{\text{CMB}}$, le paradigme LQC serait en désaccord avec les données PLANCK ; entre ces deux valeurs, une comparaison précise entre prédiction et observation est nécessaire. (Evidemment, l'impact des résultats de BICEP2 seront aussi à prendre en compte. Toutefois, cette détection est encore trop récente, et des confirmations sont encore nécessaires, avant de pouvoir tirer des conclusions pertinentes.)

Dans l'état actuel des développements théoriques en LQG et en LQC, il est important de saisir proprement la portée d'une possible exclusion (ou corroboration) de l'espace des paramètres de la modélisation LQC de l'Univers primordial. Deux niveaux sont à considérer. Le premier niveau se situe à l'intérieur strict de la cosmologie quantique à boucle. Dans ce cadre restreint, une possible exclusion ne signifierait pas nécessairement une exclusion du rebond quantique mais en premier lieu une exclusion de la formulation de la théorie des perturbations cosmologiques se propageant dans un fond quantique. Imaginons que toutes ces formulations soient en pratique exclues. Cela ne signifierait pas pour autant que la LQG est exclue. Au niveau de la LQG cette fois-ci, il faut se rappeler que la LQC n'est pas une déduction mathématique de la LQG mais bien une modélisation inspirée de la LQG. Si la LQC peut servir d'horizon phénoménologique à la LQG, cela signifierait simplement que cette formulation spécifique de la dynamique quantique de l'Univers ne peut plus servir d'horizon phénoménologique, une phénoménologie sur le terrain de la cosmologie, à la LQG.

La gravité quantique à boucles et la cosmologie quantique à boucles ont toutes deux énormément évolué durant les dix dernières années. Evidemment, ces approches sont loin d'être complètes et exemptes de toute faiblesse et difficulté. Toutefois, un véritable programme de recherche est maintenant mis en place, convoquant physique de la gravitation quantique et cosmologie théorique *et* observationnelle. Ce programme de recherche se présente comme

3. On se rappellera ici que le spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB est fonction, entre autre, du spectre de puissance primordial. En ce sens, il permet de placer des contraintes soit sur ce spectre primordial, soit sur les paramètres d'une forme paramétrique de ce spectre.

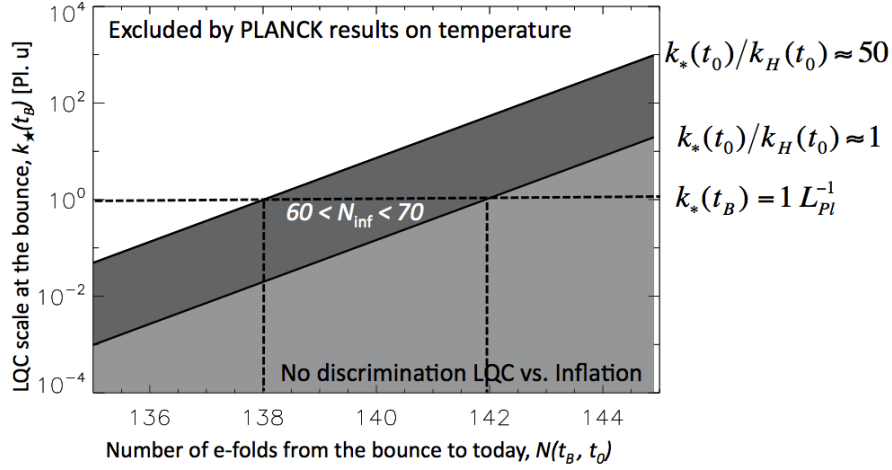


FIGURE B – Valeur de l'échelle caractéristique au moment du rebond quantique « autorisée » en principe par les données PLANCK en fonction du nombre de e -fold depuis le rebond jusqu'à aujourd'hui. On notera qu'il s'agit ici d'une estimation grossière. La quantité k_* correspond à k_{LQC} et nous prenons $k_{\text{CMB}} \simeq 50 \times k_H$.

un tout cohérent, la cosmologie quantique à boucles et les questions qu'elle suscite débordant dans le champ de la gravité quantique à boucles, et inversement.

La cosmologie quantique à boucles s'est déployée comme une modélisation inspirée de la gravitation quantique à boucles mais elle n'est pas encore une *déduction* de la théorie mère. En ce sens, la cosmologie quantique à boucles demande de nouveaux développements dans le cadre de la théorie complète qu'est la gravité quantique à boucles, en développant des modèles de l'Univers dans lesquels la quantification est effectuée *avant* la réduction de l'espace de phase par symétrie. La question qui se pose ici est de savoir si la LQC, comme quantification *après* réduction par symétrie, correspond bien au secteur cosmologique de la LQG ? Ainsi, les développements futurs en LQC seront de fait en dialogue avec les développements en LQG et en gravitation quantique non-perturbative. Une première modélisation partant de la gravité quantique formulée suivant l'approche des mousses de spin a été proposée en Ref. [60]. Outre les développements mathématiques en terme de calcul des amplitudes de transition que permet une telle question, il a été montré que partant d'un réseau de spin simple, le *dipôle*, l'amplitude de transition d'un tel état quantique, dans la limite des grands volumes (ou encore des grands spins), se ramène à l'équation de Friedmann classique. Cela offre un point de départ pour une modélisation de l'Univers partant de la théorie complète mais aussi, un point de départ pour le développement des méthodes de calcul des amplitudes de transition et, plus particulièrement, des schémas d'approximation (par exemple prendre la limite des grands spins) nécessaire à l'implémentation de tels calculs. Parallèlement à cela, des développement similaire ont été développés dans le cadre la LQG réduite [61] ou encore dans les cadres des théories de champ à valeur dans un groupe [62].

Inversement, la phénoménologie partant de la théorie mère est encore à ce stade hors de portée. Ainsi, la cosmologie quantique à boucles offre, avec possiblement la physique des trous noirs [63], un des rares moyen d'accès *observable* à des effets de gravité quantique [64]. Les résultats que nous avons résumés dans ce manuscrit en sont une illustration particulièrement aboutie. Durant les trois dernières années, deux approches alternatives de la théorie des perturbations se propageant dans un fond quantique ont été établies, et puisque les prédictions sur les observables cosmologiques diffèrent d'une approche à l'autre, il semble possible en principe de pouvoir discriminer entre ces deux approches. L'issue d'une telle confrontation aux observables que sont les anisotropies (en particulier en température) du fond diffus cosmologique n'est pas encore connu. Il est cependant évident que les observations limiteront une partie de l'espace des paramètres et peut-être même exclurons l'une ou l'autre de ces approches. Cela constituera un guide précieux pour les développements futurs en LQG puisque ces régions de la théorie qui sont sur la mauvaise piste seront en partie connues.

Finalement, ce programme de recherche possède une forte dimension cosmologique. A proprement parler, la modélisation en LQC de l'Univers proposée ci-dessus n'est pas un scénario alternatif au paradigme cosmologique standard mais plutôt une *extension* de ce paradigme à l'ère de Planck : tout le paradigme standard, c'est-à-dire classique (par opposition à quantique), y est inclus. Cela signifie que ce programme de recherche incorpore des

problématiques propres à la cosmologie, comme la non-reproductibilité de l'expérience, le fait que l'observateur est *partie* du système qu'il entend étudier et observer, etc. En particulier certaines questions de cosmologie sont ici non-résolues. Evidemment celle de l'énergie noire et celle de la matière noire mais aussi celle de la nature du champ d'inflaton. Ainsi, ce programme de recherche hérite bien de questions cruciales que pose la cosmologie. Et cela est aussi le cas d'un point de vue méthodologique. Observer de potentiels effets de gravité quantique aux confins du Cosmos suppose une analyse extrêmement fine des observables cosmologiques et astronomiques. L'observable de choix est la distribution statistique des anisotropies en température et en polarisation du fond diffus cosmologique. Rechercher des traces du gravité quantique dans le ciel micro-onde convoque les méthodes et outils statistiques d'analyse et d'interprétation des mesures du fond diffus cosmologique. Si, comme nous le pensons, il est maintenant possible *en principe* de contraindre des modélisations quantiques des tout premiers instants de l'histoire cosmique à l'aide d'observations astronomiques, cela ne pourra se faire sans une compréhension précise de ces données et de leur analyse statistique.

Troisième partie

Observer l'univers primordial avec le fond diffus cosmologique

Sommaire

8	Analyse spectrale et reconstruction du mode B	109
8.1	La fuite des modes E dans les modes B	109
8.2	Estimation sans mélange des modes B	112
8.2.1	Construction d'un estimateur sans mélange	112
8.2.2	Optimisation des fonctions de masque	115
8.2.3	Efficacité de l'estimation pure	120
8.3	Extension aux corrélations croisées TB et EB	121
8.4	Efficacité des méthodes de pseudospectre pour l'estimation du mode B	123
8.4.1	Efficacité comparée des différents estimateurs	123
8.4.2	Estimation pure pour les expériences satellite	125
9	Paramètres cosmologiques avec le mode B	127
9.1	Contrainte sur le rapport tenseur-sur-scalaire	127
9.1.1	Analyse de Fisher	127
9.1.2	Détection du rapport tenseur-sur-scalaire	128
9.1.3	Impact des émissions astrophysiques d'avant-plan	129
9.2	Violation de parité dans l'univers primordial	132
9.2.1	Anisotropies du CMB	132
9.2.2	Erreur statistique et effet systématique	134
9.2.3	Détecter la violation de parité avec les corrélations TB et EB	137
9.2.4	Contrainte sur les modèles de violation de parité	142

Introduction III

Ce chapitre porte sur le fond diffus cosmologique en tant que principale sonde astronomique de l'univers primordial. Ce rayonnement fossile de corps noir libéré 380 000 ans après le Big Bang présentent de faibles fluctuations sur le ciel en intensité et en polarisation dont les sources premières sont les perturbations cosmologiques produites durant l'inflation. Il est une source extrêmement riche d'informations sur l'évolution globale de l'Univers, sa géométrie et sa composition en matière, ainsi que sur la phase d'inflation primordiale. C'est en tant que sonde de cette dernière, et en particulier via les anisotropies en polarisation, que nous focaliserons la discussion. Après une rapide introduction, nous montrons en quoi la reconstruction des modes B partant des paramètres de Stokes est compromise si les fuites des modes E dans le mode B n'est pas corrigé. Ces mélanges dégradent fortement la reconstruction des spectres de puissance de mode B , C_ℓ^{BB} , principale source de contrainte sur l'échelle d'énergie de l'inflation. Nous présentons ensuite une méthode de séparation exacte des mode E et B , son implémentation numérique pour l'estimation des spectres de puissance angulaire de mode B et aux corrélations croisées TB et EB . Les performances de cette méthode statistique sont aussi présentées, à la fois pour des expériences couvrant une faible portion du ciel et pour une possible future mission satellite. Détecter le mode B a pour but final de contraindre la physique de l'univers primordial. Nous montrons quelle type de contrainte peuvent être établi par notre reconstruction du mode B sur le rapport tenseur-sur-scalaire, r , et sur une possible violation de parité dans l'univers primordial. Finalement, nous montrons l'efficacité d'une possible méthode de séparation des composantes pour le cas des expériences sol ou ballon couvrant une faible portion de la voûte céleste.

L'ensemble des travaux ici présentés ont été effectué *avant* la détection récente du mode B des anisotropies polarisés du fond diffus cosmologique. Dans ce contexte d'ignorance observationnelle, le niveau de mode B primordial pouvait être arbitrairement bas. Ainsi, les méthodes développées ont été validées sur des niveaux *bas* relativement à la valeur actuellement rapportée par la collaboration BICEP2. Ces méthodes n'en demeure pas moins pertinentes si ce niveau de mode B tel que mesuré par BICEP2 se confirme, signifiant simplement qu'elles permettrons une reconstruction d'autant plus précise de ce mode de polarisation.

Les anisotropies du CMB apparaissent suivant trois modes : du plus intense au plus faible, anisotropies de température, anisotropies de polarisation de type E (mode gradient) et anisotropies de polarisation de type B (mode rotationnel) [65]. La décomposition du champ de polarisation en un mode E et B est "naturelle" d'un point de vue mathématique et physique : le mode E est principalement généré par les perturbations scalaires (comme la température) alors que le mode B , à l'ordre linéaire, n'est généré que par les ondes gravitationnelles primordiales (et non par les perturbations scalaires) [66]. L'information supplémentaire contenue dans le champ de polarisation permet de lever les dégénérescences entre différents paramètres cosmologiques et ainsi améliorer notre connaissance observationnelle de l'Univers. Une connaissance du mode E permet par exemple de contraindre la phase de reionisation de l'Univers, l'instant où les premières étoiles se forment, et ainsi de lever la dégénérescence entre la profondeur optique de reionisation et l'indice spectral de perturbations cosmologiques scalaires.

Par ailleurs, le mode B est la seule sonde remontant *directement* au fond d'ondes gravitationnelles primordiales produites durant l'inflation. Sa mesure est une fenêtre ouverte sur l'Univers quelques 10^{-35} après le Big Bang et permettrait donc de connaître l'échelle d'énergie de l'inflation. Le niveau du mode B est usuellement quantifié par le rapport tenseur-sur-scalaire, noté r (ou parfois T/S), qui correspond au rapport de la puissance des ondes gravitationnelles primordiales divisées par la puissance des perturbations scalaires à une échelle de longueur de référence, $r = \mathcal{P}_T(k_0)/\mathcal{P}_S(k_0)$ avec, usuellement, $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$. Ce rapport est d'autant plus faible que l'échelle d'énergie de l'inflation l'est. Dans le cadre de l'inflation de roulement lent, si E_i est l'échelle d'énergie de l'inflation, alors le spectre de puissance des anisotropies primaires de mode B présentera un pic de recombinaison

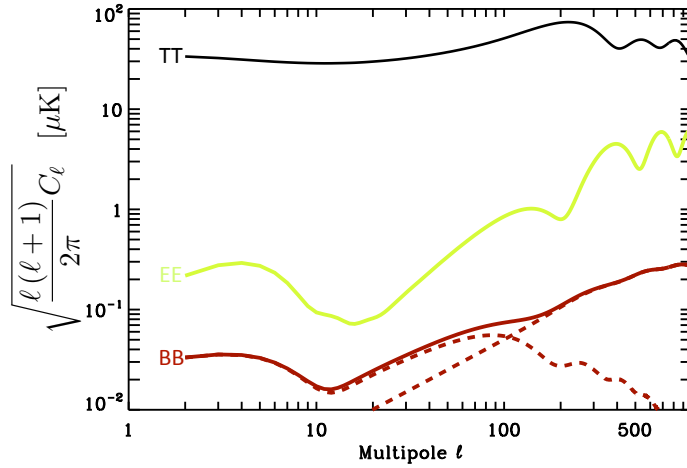


FIGURE C – Spectres de puissance angulaire pour les autocorrélations TT , EE et BB ; à cela s’ajoute la corrélation croisée TE non-nulle (non représentée ici). Dans le scénario standard de la cosmologie, les corrélations croisées TB et EB sont nulles par invariance suivant la symétrie de parité. Le mode B contient une composante primaire (piquant aux grandes échelles) et une composante secondaire (piquant aux petites échelles angulaires), toutes deux représentées en tiret.

à $\ell \sim 90$ dont l’amplitude est directement proportionnel au carré de cette échelle d’énergie, *i.e.* [67]

$$\sqrt{C_{\ell \sim 90}^B} = 0.024 \times \left(\frac{E_i}{10^{16} \text{GeV}} \right)^2 \mu\text{K}. \quad (7.14)$$

(Nous rappelons que le multipôle est une fréquence angulaire et correspond donc à l’inverse d’une échelle angulaire sur la sphère céleste, *i.e.* $\ell \sim 180/\theta[\text{deg.}]$ où θ est l’échelle angulaire correspondante.) L’amplitude du mode- B est directement proportionnelle à l’amplitude du mode tensoriel primordial, elle-même paramétrisée par le rapport tenseur-sur-scalaire r . Evidemment, l’amplitude finale de C_ℓ^B dépend aussi de la physique de la recombinaison. On peut toutefois remonter à r qui est directement proportionnel, dans le cas de l’inflation à un champ, à la valeur du potentiel pendant l’inflation [43]

$$V^{1/4} = 1.06 \times 10^{16} \text{GeV} \left(\frac{r}{0.01} \right)^{1/4}. \quad (7.15)$$

Les anisotropies de température et de modes E donnent accès à la puissance du mode scalaire primordial. Or cette puissance est inversement proportionnelle au rapport *énergie cinétique dans le champ d’inflaton* divisée par *énergie totale*, *i.e.* $\epsilon \propto (\dot{\varphi}^2)/(\dot{\varphi}^2 + 2V(\varphi))$. Un grand nombre de modèles d’inflation, c’est-à-dire de choix du potentiel d’auto-interaction du champ d’inflaton φ , aboutissent à la même valeur de ϵ . En détectant le mode B , il est alors possible de remonter à l’énergie totale et donc de lever la dégénérescence entre énergie cinétique et énergie totale du champ d’inflaton, et par là bien mieux discriminer entre ces différents modèles.

Outre cette composante primaire, le mode B possède une composante secondaire due à l’effet de lentillage gravitationnel des galaxies et structures cosmiques sur les photons du CMB, transformant du mode E en mode B [68]. L’amplitude de cette seconde composante est fixée par l’amplitude du mode E et l’amplitude du potentiel de lentillage des grandes structures. Elle est donc essentiellement fixée par l’amplitude des modes scalaires produits durant l’inflation primordiale et ne dépend pas (en fait que très marginalement) de l’amplitude des ondes gravitationnelles primordiales. Une mesure de cette composante secondaire permettrait par exemple d’améliorer notre connaissance de la formation des structures qui dépend, entre autre, des propriétés de l’énergie noire.

D’un point de vue de la dépendance spectrale, les anisotropies primaires (uniquement dues aux ondes gravitationnelles primordiales) dominent aux grandes échelles angulaires (de ~ 1 degré à 90 degrés) sur une gamme de multipôles allant de $\ell = 2$ à $\ell \sim 100$, la valeur exacte de la borne supérieure dépendant évidemment de l’échelle d’énergie de l’inflation qui fixe la puissance des ondes gravitationnelles primordiales. Les anisotropies secondaires dues au lentillage sont quant-à elles dominantes aux petites échelles angulaires pour $\ell \geq 100$ et présentent un

maximum d'amplitude à la dizaine de minutes d'arc, $\ell \sim 1000$. Ce comportement est illustré sur la figure C : la courbe bordeaux en tiret *dominant* à $\ell \leq 100$ correspond à la composante primaire due aux ondes gravitationnelles pour un rapport tenseur-sur-scalaire $r = 0.05$, tandis que la courbe bordeaux en tiret *dominant* à $\ell > 100$ (et piquant à $\ell \sim 1000$) correspond à la composante secondaire. Le mode B potentiellement observé est la somme de ces deux composantes (courbe bordeaux en trait plein).

La mesure ultime des anisotropies en température grâce aux données du satellite PLANCK a été récemment publiée, Ref. [25]. Elle a permis d'établir de nombreuses contraintes (plus de 30 publications en 2013, avec pour ce qui concerne la cosmologie primordiale *e.g.* Refs. [2, 26]). (Les données CMB, et tout particulièrement celles fournies par PLANCK sont extrêmement riche d'informations cosmologiques et astrophysiques. Nous ne donnons ici que des exemples particuliers.) Le mode E a déjà été détecté aux petites échelles angulaires par DASI, QUAD et BICEP ainsi que par WMAP aux grandes échelles angulaires [69]. Cependant une caractérisation précise de ses propriétés statistiques sur une plage allant de la dizaine de minute d'arc à quelques dizaine de degrés, ne sera faisable que grâce aux données de PLANCK-HFI, dont les résultats en polarisation devrait être publiés durant le premier semestre de 2014.

Jusqu'à 2014, la composante primordiale du mode B n'avait pas été détectée et seules des limites supérieures avaient pu être obtenues [69]. Toutefois, sa composante secondaire due au lentillage gravitationnel a été détecté indirectement avec les données de SPTPOL [41] et plus récemment, une détection directe a été proclamée par la collaboration POLARBEAR [42]. (Plus précisément, cette composante secondaire a été détectée à 1.66σ dans la bande $500 \leq \ell < 900$ et à 1.27σ dans la bande $900 \leq \ell < 1300$, ce qui exclut l'hypothèse d'une composante secondaire nulle à 97.5% de niveau de confiance.) Le 14 mars 2014, la collaboration BICEP2 a annoncé la détection d'un mode B pour une gamme angulaire allant de $\ell \sim 30$ à $\ell \sim 150$ significativement en excès du mode B secondaire du au lentillage [3]. Les quatre points de mesure obtenus dans cette gamme de multipôle sont très bien reproduit par un pic de recombinaison ce qui favorise leur interprétation comme étant d'origine primordiale avec un rapport tenseur-sur-scalaire de $r = 0.2$. Compte tenu de la petitesse du mode B du CMB, sa détection et sa caractérisation nécessitent un très bon contrôle des effets systématiques, une bonne connaissance de la polarisation des émissions d'avant-plan venant polluer les mesures du CMB et le développement de nouvelles techniques d'analyse de données, afin d'être en mesure d'aller chercher un signal très ténu et dont le niveau global est encore inconnu. Dans cette perspective, les données qu'a fournies l'instrument haute fréquence HFI du satellite PLANCK permettront de bien mieux comprendre, et donc mieux soustraire, les émissions astrophysiques d'avant-plan et d'aboutir au moins à la meilleure limite supérieure sur le mode B du CMB aux grandes échelles angulaires (au-delà de la dizaine de degrés). Par ailleurs, un grand nombre d'expériences sol (comme *e.g.* POLARBEAR, ACTPOL, SPTPOL ou encore QUBIC) ou ballon (comme EBEX ou SPIDER) dédiées à la détection du mode B , sont soit en cours d'acquisition de données soit en phase de développement. Ces expériences ont une sensibilité instrumentale bien meilleur que celle du satellite PLANCK. Cependant, à la différence d'une mission satellite qui donne accès à environ $\sim 70\%$ de la voûte céleste, les expériences sol ou ballon ne couvrent qu'une faible portion du ciel, $\sim 1\%$. Ces dernières sont donc plus sensibles à la polarisation et ont un meilleur contrôle des effets systématiques que l'instrument HFI pour des échelles angulaires en-deçà de la dizaine de degrés, et fourniront ainsi les meilleures contraintes sur le mode- B dans une gamme complémentaire de celle étudiée grâce aux données fournies par PLANCK. Enfin, il est important de noter que des études sur la conception d'une future expérience satellite dédiée à la polarisation du CMB, et plus particulièrement au mode B , sont en cours depuis quelques années déjà, *e.g.* LITEBIRD, PIXIE ou encore PRISM ou CORE. Il est maintenant évident que la prochaine étape pour le CMB est la détection et la caractérisation fine de ce fameux mode B de polarisation. (On notera que les études de variation du spectre électromagnétique du CMB (c'est-à-dire des distortions de la loi de corps noir) est une autre voie prometteuse.)

Pour une expérience comme PLANCK, ou pour toute possible expérience satellite dédiée à la polarisation, l'objectif est en premier lieu d'accéder aux plus grandes échelles angulaire et donc de chercher à détecter le mode B primordial via son pic de reionization à $\ell = 2 - 20$ et son pic de recombinaison à $\ell \sim 90$. Pour une expérience couvrant une faible portion de ciel, le mode primordial ne sera a priori détectable que via son pic de recombinaison, comme les résultats de BICEP2 le confirme.

De façon schématique, l'analyse et l'interprétation physique des données CMB procède en quatre étapes (cf. Ref. [70]). Le point de départ est les données ordonnées en temps qui subissent un premier traitement. Des cartes du ciel des trois paramètres de Stokes, I , Q et U sont alors construites pour chaque fréquence électromagnétique mesurée. Ces cartes par fréquence sont ensuite combinées pour former des cartes par composante (CMB, différents avant-plans). A partir des cartes de la composante CMB, les spectres de puissance angulaire (ou tout autre quantité statistique pertinente pour le CMB, tels les bispectres) en température et en polarisation sont estimés. Enfin, ces

spectres de puissance peuvent être utilisés pour établir les contraintes sur les différents paramètres et modèles cosmologiques.

Les données fournies par les expériences dédiées au CMB sont extrêmement riches d'informations : anisotropies primaires, mais aussi secondaires (toutes deux en température et en polarisation), fond diffus infrarouge, catalogue d'amas par effet Sunyaev-Zeldovich, etc. Nous focalisons ici la discussion sur les anisotropies polarisées du CMB, essentiellement en tant que sonde de l'univers primordial, et nous ne parlerons que peu de *toute* la richesse du ciel micro-onde, qu'il faut toutefois garder à l'esprit.

Chapitre 8

Analyse spectrale et reconstruction du mode B

8.1 La fuite des modes E dans les modes B

Que ce soit pour les anisotropies de température ou celles de polarisation, les spectres de puissance angulaire ne sont jamais estimés à partir de cartes du ciel couvrant la totalité de la voûte céleste. D'une part, les expériences suborbitales (sol ou ballon) n'observent qu'une portion limitée du ciel. D'autre part, bien que les expériences satellitaires observent la totalité de la sphère céleste, il est nécessaire de masquer les zones où les émissions astrophysiques d'avant-plan sont trop intenses avant toute analyse statistique sur les anisotropies du CMB. Les couvertures du ciel typiques envisagées pour les expériences satellite et sol ou ballon sont présentées sur la figure 8.1. Si pour les expériences satellite, il peut être raisonnable de considérer en première approximation que le bruit instrumental se distribue de façon homogène lors de la reconstruction des cartes du ciel, tel n'est pas le cas pour les expériences sol ou ballon couvrant une faible fraction de ciel. Un exemple typique de distribution du bruit pour une expérience comme EBEX est aussi présenté sur la figure 8.1.

L'estimation des spectres de puissance angulaire nécessite une analyse harmonique en prenant la transformée en harmonique sphérique des cartes du ciel des trois paramètres de Stokes I , Q et U . (Il s'agit ni plus ni moins de la généralisation de la transformée de Fourier sur la sphère, aussi étendue au cas des champs de spin (± 2) pour la polarisation.) Or, dès que la couverture du ciel n'est plus complète, les coefficients harmoniques estimés à partir des paramètres de Stokes sont un mélange des coefficients harmoniques du CMB, par un effet de convolution avec la fonction décrivant la portion de ciel observée. Ce mélange a tout d'abord lieu entre les différents multipôles, *i.e.* mélange des fréquences angulaires. Ainsi, une estimation non biaisée des spectres de puissance angulaire en température à partir de I nécessite de déconvoluer les effets de couverture incomplète du ciel (aussi appelés effet de masque) afin de corriger du mélange des différentes fréquences angulaires.

Par ailleurs, ce mélange a aussi lieu entre les deux sous-espaces E et B (en plus des mélanges entre ℓ et ℓ'). La décomposition du champ de polarisation suivant les modes E et B à partir de Q et U n'est orthogonale que si la couverture du ciel est complète, *i.e.* (où nous définissons $P_{\pm 2} = Q \pm iU$)

$$a_{\ell m}^E = -\frac{1}{2} \int_{4\pi} [P_2(\vec{n}) {}_2Y_{\ell m}^*(\vec{n}) + P_{-2}(\vec{n}) {}_{-2}Y_{\ell m}^*(\vec{n})] d\vec{n}, \quad (8.1)$$

$$a_{\ell m}^B = \frac{i}{2} \int_{4\pi} [P_2(\vec{n}) {}_2Y_{\ell m}^*(\vec{n}) - P_{-2}(\vec{n}) {}_{-2}Y_{\ell m}^*(\vec{n})] d\vec{n}. \quad (8.2)$$

Cette reconstruction des multipôles découle de la décomposition suivant les harmoniques sphériques de spin (± 2) des champs de polarisations sur la sphère,

$$P_{\pm 2}(\vec{n}) = - \sum_{\ell, m} (a_{\ell m}^E \pm i a_{\ell m}^B) {}_{\pm 2}Y_{\ell m}(\vec{n}) \quad (8.3)$$

et du fait que les harmoniques sphériques de spin (± 2) forment une base orthonormée. Dans ce cas spécifique mais irréaliste d'une couverture céleste complète (et en oubliant les effets de *beam* et le bruit instrumental pour

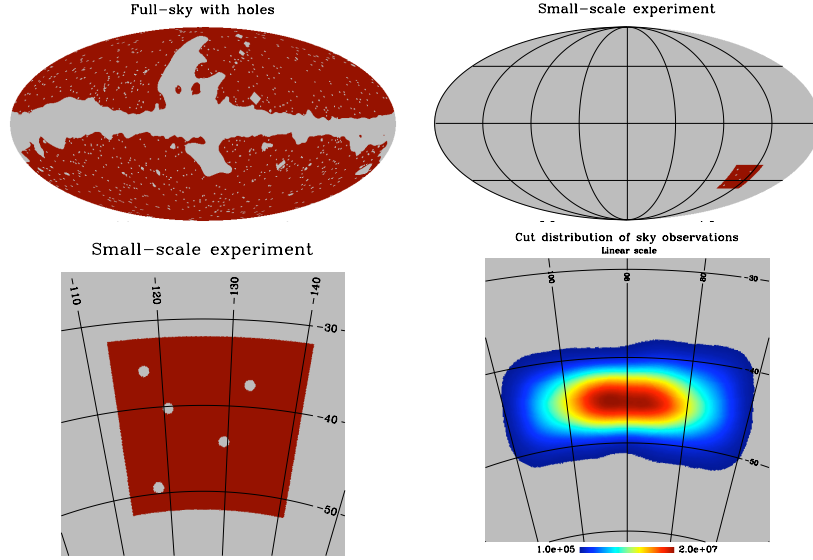


FIGURE 8.1 – *Haut gauche* : Couverture céleste typique pour une expérience satellite plein ciel, $f_{\text{sky}} \sim 70\%$. Les parties masquées correspondent au masque galactique ainsi qu'aux trous masquant les sources ponctuelles trop brillantes. *Haut droite* : Couverture céleste typique pour une expérience sol ou ballon, $f_{\text{sky}} \sim 1\%$. *Bas gauche* : Zoom de la couverture céleste typique d'une expérience sol ou ballon. On y voit clairement les trous venant du fait qu'il faut masquer les sources ponctuelles. *Bas droite* : Exemple de la distribution *inhomogène* du bruit pour une expérience ballon comme EBEX. La couverture céleste correspondante est de $\sim 1\%$.

simplifier), on peut facilement se convaincre que l'estimateur défini comme

$$\hat{C}_\ell^X = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^X|^2, \quad (8.4)$$

est non-biaisé, *i.e.* $\langle \hat{C}_\ell^X \rangle = C_\ell^X$, et de covariance

$$\text{Cov}(\hat{C}_\ell^X, \hat{C}_{\ell'}^X) = \frac{2(C_\ell^X)^2}{2\ell+1} \times \delta_{\ell, \ell'}. \quad (8.5)$$

Il s'agit ni plus ni moins de la *variance cosmique* traçant le fait que nous n'observons qu'un seul univers et donc une unique réalisation des anisotropies du CMB. (De façon plus rigoureuse, on notera que pour chaque multipôle ℓ , il y a $(2\ell+1)$ réalisations indépendantes des anisotropies, chacune correspondant à une valeur de m , sous l'hypothèse d'isotropie *statistique* des anisotropies.)

Dans le cas où la couverture du ciel n'est pas complète (ce qui est en pratique toujours le cas), une fuite des modes E vers les modes B , et réciproquement, apparaît :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\ell m}^E &\equiv \frac{-1}{2} \int_{\Omega} W [P_2(\vec{n}) {}_2Y_{\ell m}^*(\vec{n}) + P_{-2}(\vec{n}) {}_{-2}Y_{\ell m}^*(\vec{n})] d\vec{n} \\ &= \sum_{\ell' m'} [\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(+)} a_{\ell' m'}^E + i\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(-)} a_{\ell' m'}^B], \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\ell m}^B &\equiv \frac{i}{2} \int_{\Omega} W [P_2(\vec{n}) {}_2Y_{\ell m}^*(\vec{n}) - P_{-2}(\vec{n}) {}_{-2}Y_{\ell m}^*(\vec{n})] d\vec{n} \\ &= \sum_{\ell' m'} [-i\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(-)} a_{\ell' m'}^E + \mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(+)} a_{\ell' m'}^B], \end{aligned} \quad (8.7)$$

où Ω correspond à la portion de ciel observé. C'est un angle solide inférieur à 4π . La fonction W est la fonction de masque qui est nulle pour tous les pixels non observés (ou exclus de l'analyse) et qui peut prendre n'importe quelle

valeur non-nulle et positive pour les pixels conservés. (On notera que pour les pixels "observés", on peut vouloir prendre une valeur de W différente de l'unité pour *e.g.* attribuer un poids plus faible aux pixels les plus bruités.) Les noyaux de convolution (aussi appelés matrices de mélange), $\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(\pm)}$, ne dépendent que de la fonction de masque W qui est connue. Ces mélanges se comprennent par l'analogie suivante. Une transformée en harmonique sphérique est analogue à une transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^2$. Or la transformée de Fourier du produit de deux fonctions a pour résultat la *convolution* des transformées de Fourier de chacune de ces fonctions. Ainsi, pour un ciel partiel, les pseudomultipôles $\tilde{a}_{\ell m}^X$ sont la convolution des multipôles du CMB $a_{\ell m}^X$ avec ceux de la fonction de masque.

Tout comme le mélange entre multipôles, ce mélange des deux modes de polarisation peut être déconvolué en moyenne, permettant une estimation non biaisée des spectres de puissance en polarisation. En définissant le pseudospectre $\tilde{C}_\ell^X$ par

$$\tilde{C}_\ell^X = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\tilde{a}_{\ell m}^X|^2, \quad (8.8)$$

un estimateur non biaisé, $\hat{C}_\ell^X$, est obtenu en inversant le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_\ell^E - N_\ell^E \\ \tilde{C}_\ell^B - N_\ell^B \end{pmatrix} = \sum_{\ell'} B_{\ell\ell'}^2 \times \begin{pmatrix} K_{\ell\ell'}^{(+)} & K_{\ell\ell'}^{(-)} \\ K_{\ell\ell'}^{(-)} & K_{\ell\ell'}^{(+)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_{\ell'}^E \\ \hat{C}_{\ell'}^B \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

où N_ℓ^X correspond au biais venant du bruit instrumental et B_ℓ^2 l'effet du *beam*, et

$$K_{\ell\ell'}^{(\pm)} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} |\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(\pm)}|^2. \quad (8.10)$$

Partant de l'inverse du système linéaire ci-dessus, on peut facilement se convaincre que les estimateurs sont en effet non-biaisés, *i.e.* $\langle \hat{C}_\ell^{E(B)} \rangle = C_\ell^{E(B)}$. Les fuites, en particulier des modes E dans les modes B , sont donc bien corrigées *en moyenne*, c'est-à-dire au niveau du moment d'ordre 1 de la statistique de l'estimateur $\hat{C}_\ell^X$. Le mode E qui a fuit dans B (et réciproquement) reste toutefois présent au niveau de la *variance* des estimateurs. Le mode E , pour le CMB, étant quelques ordres de grandeurs plus élevé que celui du mode B , la variance du spectre de puissance de type B se trouve largement dominée, en particulier aux grandes échelles angulaires, par la contribution des modes E , élargissant significativement les barres d'erreurs sur l'estimation de C_ℓ^B .

Il s'agit de la construction originelle des estimateurs dits de *pseudospectres*, intensément étudiés pour les anisotropies de température et de polarisation [71].

En pratique, les spectres ne sont pas systématiquement estimés multipôle par multipôle mais plutôt dans des bandes de multipôles de largeur Δ_b . Cette largeur est essentiellement fixée par la résolution en ℓ que l'on peut atteindre, c'est-à-dire par l'inverse de la taille caractéristique de la fraction de ciel observée, $\Delta_b \sim 1/\Delta\theta$. Cela permet de simplifier l'inversion et de réduire les corrélations. En effet, compte tenu des mélanges, l'estimateur à un ℓ donné aura reçu des contributions à d'autres ℓ , ce qui entraînera des corrélations, difficilement quantifiables, entre les spectres de puissance angulaire estimés à différents multipôles. Les matrices de mélanges $K^{(\pm)}$ sont dominées par une bande diagonale de largeur $\sim \Delta\theta^{-1}$. L'estimation à un ℓ donné, $\bar{\ell}$ sera donc corrélée avec les estimations dans une bande de multipôles $\ell \in [\bar{\ell} - \Delta\theta^{-1}/2, \bar{\ell} + \Delta\theta^{-1}/2]$. En moyennant dans des bandes de largeur Δ_b , on réduit fortement (et on peut l'espérer à un niveau sous-dominant) ces corrélations.

Puisque les spectres de puissance du CMB se comporte en première approximation comme $1/[\ell(\ell + 1)]$. On définit les spectres moyennés dans les bandes par

$$\tilde{C}_b = \sum_{\ell \in b} P_{b\ell} \tilde{C}_\ell \quad \text{et} \quad \hat{C}_b = \sum_{\ell \in b} P_{b\ell} \hat{C}_\ell.$$

Les opérateurs de *binning*, et son inverse, l'opérateur d'interpolation, sont simplement définis comme

$$P_{b\ell} = \begin{cases} \frac{S_\ell}{\ell_{\max}^b - \ell_{\min}^b}, & \ell \in [\ell_{\min}^b, \ell_{\max}^b] \\ 0, & \ell \notin [\ell_{\min}^b, \ell_{\max}^b] \end{cases}$$

$$Q_{b\ell} = \begin{cases} \frac{1}{S_\ell}, & \ell \in [\ell_{\min}^b, \ell_{\max}^b] \\ 0, & \ell \notin [\ell_{\min}^b, \ell_{\max}^b], \end{cases}$$

avec $S_\ell = \ell(\ell + 1)/(2\pi)$. (On vérifie aisément que $\sum_\ell Q_{b'\ell} P_{b\ell} = \delta_{bb'}$. Le système linéaire à inverser est alors

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_b^E \\ \tilde{C}_b^B \end{pmatrix} = \sum_{b'} \begin{pmatrix} K_{bb'}^{(+)} & K_{bb'}^{(-)} \\ K_{bb'}^{(-)} & K_{bb'}^{(+)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{b'}^E \\ C_{b'}^B \end{pmatrix},$$

avec

$$K_{bb'}^{(\pm)} \equiv \sum_{\ell, \ell'} P_{b\ell} K_{\ell\ell'}^{(\pm)} B_{\ell'}^2 Q_{b'\ell'}.$$

Dans le cas des expériences sol ou ballon couvrant $\sim 1\%$ du ciel, la taille des bandes est ~ 40 . Pour les expériences plein ciel, il est possibles de faire l'inversion multipôle par multipôle au risque de conserver de fortes corrélation entre des multipôles adjacent, difficilement quantifiable.

On notera ici un point important : s'il est possible d'inverser les matrices $K_{\ell\ell'}^{(\pm)}$ (de taille $(N_{\text{pix}}^{1/2} \times N_{\text{pix}}^{1/2})$), tel n'est pas le cas des matrices $\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(\pm)}$ (de taille $(N_{\text{pix}} \times N_{\text{pix}})$). Cela est à la fois du à la dimension du problème à inverser, numériquement trop coûteux, et (surtout) au fait que les matrices $\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(\pm)}$ oscillent énormément. C'est pourquoi ce sont les *pseudospectres* qui sont déconvolués et non les *pseudomultipôles*.

Une estimation rigoureuse des incertitudes sur la reconstruction des C_ℓ par la méthode ci-dessus appelée *méthode de pseudospectres* passe par des simulations Monte-Carlo afin de prendre en compte l'impact de l'ensemble des mélanges. Il existe toutefois une estimation naïve de cette incertitude qui consiste simplement à prendre compte qu'une portion complète de ciel se ramène à avoir accès à moins de modes :

$$\text{Cov}(\hat{C}_\ell^X, \hat{C}_{\ell'}^X) \simeq \frac{2 \times \delta_{\ell, \ell'}}{(2\ell + 1)f_{\text{sky}}} \left(C_\ell^X + \frac{N_\ell^X}{B_\ell^2} \right)^2, \quad (8.11)$$

où f_{sky} est la fraction de ciel observée (toujours inférieure ou égale à 1), N_ℓ est le spectre de puissance du bruit instrumental projeté sur les cartes du ciel et B_ℓ est la transformée en harmonique sphérique de la fonction de *beam*, supposée à symétrie azimuthale ici. Le terme proportionnel à C_ℓ^X est la variance d'échantillonnage (le fait que nous n'avons accès qu'à une *fraction* d'une *unique* réalisation du ciel) et le terme proportionnel à N_ℓ^X correspond à l'incertitude due au bruit instrumental. Cette expression ne fournit toutefois qu'une *sous-estimation* des incertitudes

La taille et la précision toujours croissante des volumes de données à traiter nécessitent la mise en place d'outils rapides d'estimation des spectres de puissance angulaire tout en conservant une grande précision. Dans le contexte des futures expériences dédiées à la polarisation du CMB, il est crucial de résoudre le problème du mélange E/B puisque c'est justement cette variance induite par la fuite de E vers B qui dominera les barres d'erreur à grande échelle angulaire. Pour les expériences sol ou ballon ne couvrant qu'une très faible portion du ciel, la reconstruction du mode B devient même impossible si cette fuite n'est pas évitée, comme le montre la partie gauche de la figure 8.2. La courbe noire en trait plein correspond au spectre de puissance angulaire de mode B que l'on cherche à reconstruire alors que les courbes en tirets représentent les incertitudes (ne prenant ici en compte que la variance d'échantillonnage). Si les mélanges ne sont pas corrigés (courbe bleue), les incertitudes sont plus grande que le spectre lui-même pour $\ell < 150$, interdisant sa reconstruction. Si les mélanges sont corrigés (courbe rouges) par la méthode présentée ci-dessous, alors l'incertitude reste plus faible que le spectre lui-même et s'approche de la sous-estimation des erreurs statistiques données par la formule Eq. (8.11).

8.2 Estimation sans mélange des modes B [75]

8.2.1 Construction d'un estimateur sans mélange

Les mélanges des différents modes conduisent à un double problème. Tout d'abord un problème de biais : par exemple, le pseudospectre de type B est un mélange des spectres de types E et des spectres de type B . Toutefois, l'estimateur construit précédemment consiste à inverser l'effet du masque sur les pseudospectres. L'estimation finale est alors *non-biaisée*. Toutefois, ces mélanges n'étant éliminer qu'en *moyenne*, ils contribuent toujours à l'incertitude via la variance d'échantillonnage. Une solution possible et *suffisante* est de s'affranchir des mélanges avant toute estimation statistique, c'est-à-dire sur chaque réalisation spécifique (du moins en principe).

Les conditions mathématiques nécessaires à une décomposition *sans fuites* de E dans B et réciproquement ont été démontré dans la Ref. [72]. Les conditions dégagés sont les suivantes : les modes E qui fuit dans les modes B sont

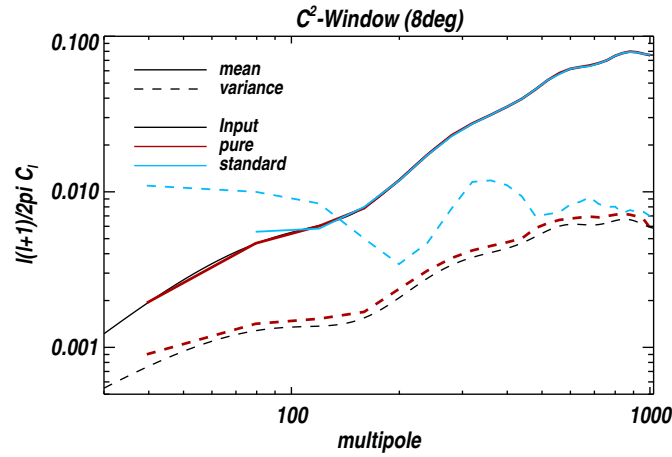


FIGURE 8.2 – Variance d'échantillonnage de l'estimation des spectres de puissance de mode B sans correction du mélange E/B (courbe bleue-tiret) et avec correction de ce mélange (courbe rouge-tiret) pour une couverture du ciel de 1%. La courbe noire-tiret correspond à la variance optimale. Le spectre de puissance de mode B à reconstruire est donné par la courbe noire-trait plein. Les courbes en trait plein correspondent au spectre de puissance reconstruit par l'approche standard (bleue) et pure (rouge). Sans estimation pure (courbe bleue-tiret), la variance d'échantillonnage est très élevée à bas ℓ compte-tenu du mode E qui a fuit dans B , rendant la reconstruction de ce spectre impossible. Grâce à une estimation pure, cette variance est abaissée à un niveau proche de la variance optimale.

ces modes de Fourier de type E non nuls et/ou leurs dérivées premières est non-nulles sur le contour de la portion de ciel observée. Partant de là, un estimateur des spectres de puissance de mode E et B qui s'affranchit du mélange E/B , baptisé estimateur *pur*, a été proposé par Smith & Zaldarriaga [73]. Pour annuler les mélanges E/B à tous les moments de la statistique des estimateurs de pseudospectre, il faut pouvoir annuler les matrices de mélanges $\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(-)}$ apparaissant dans les équations (8.6) et (8.7). Cela est rendu possible en utilisant les pseudomultipôles *purs* :

$$\tilde{a}_{\ell m}^E = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \int_{\Omega} d\vec{n} \left[P_2(\vec{n}) \times (\partial \partial W(\vec{n}) Y_{\ell m}(\vec{n}))^* + P_{-2}(\vec{n}) \times (\bar{\partial} \bar{\partial} W(\vec{n}) Y_{\ell m}(\vec{n}))^* \right], \quad (8.12)$$

$$\tilde{a}_{\ell m}^B = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \int_{\Omega} d\vec{n} \left[P_2(\vec{n}) \times (\partial \partial W(\vec{n}) Y_{\ell m}(\vec{n}))^* - P_{-2}(\vec{n}) \times (\bar{\partial} \bar{\partial} W(\vec{n}) Y_{\ell m}(\vec{n}))^* \right]. \quad (8.13)$$

Les opérateurs différentiels ∂ et $\bar{\partial}$ sont les opérateurs de *spin-raising* et *spin-lowering*, respectivement. Si la fonction de masque W est telle qu'elle s'annule sur le contour du masque *et* telle que toutes ses dérivées partielles premières s'annulent elles aussi sur le contour du masque (pour cela $\partial W = \bar{\partial} W = 0$ sur le contour est suffisant), alors il en résulte que les pseudomultipôles ainsi définis sont sans mélange, *i.e.* $\mathcal{K}_{\ell m, \ell' m'}^{(-)} = 0$ (cf. [72, 73]).

On peut facilement s'en convaincre en effectuant deux intégrations par partie. Puisque W , ∂W et $\bar{\partial} W$ s'annulent sur les contours du masque, les deux intégrales de contour lors de la double application de l'intégration par partie sont elles aussi nulles. Il reste

$$\tilde{a}_{\ell m}^E = \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \int_{\Omega} d\vec{n} W(\vec{n}) Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \times \left\{ \frac{-1}{2} [\bar{\partial} \bar{\partial} P_2(\vec{n}) + \partial \partial P_{-2}(\vec{n})] \right\}, \quad (8.14)$$

$$\tilde{a}_{\ell m}^B = \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \int_{\Omega} d\vec{n} W(\vec{n}) Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \times \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\partial} \bar{\partial} P_2(\vec{n}) - \partial \partial P_{-2}(\vec{n})] \right\}. \quad (8.15)$$

Or les champs $\chi^E = \frac{-1}{2} [\bar{\partial} \bar{\partial} P_2(\vec{n}) + \partial \partial P_{-2}(\vec{n})]$ et $\chi^B = \frac{i}{2} [\bar{\partial} \bar{\partial} P_2(\vec{n}) - \partial \partial P_{-2}(\vec{n})]$ sont respectivement purement E et purement B , c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun mélange. On peut facilement se convaincre de ce dernier

point en injectant la décomposition harmonique des champs $P_{\pm 2}$ dans les définitions de $\chi^{E/B}$, ce qui donne

$$\chi^{E/B}(\vec{n}) = \sum_{\ell, m} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} a_{\ell m}^{E/B} Y_{\ell m}(\vec{n}). \quad (8.16)$$

(Les propriétés des harmoniques sphériques de spin non-nul et des opérateurs de spin-raising et spin-lowering sont données dans les Refs. [65, 74].)

L'implémentation numérique des pseudomultipôles purs procède ainsi [75]. Elle offre un second regard sur ces pseudomultipôles purs. On définit d'abord $W_1 = \partial W$ et $W_2 = \partial \partial W$, respectivement de spin 1 et de spin 2 (W étant de spin 0). Ces fonctions de spin 1 et 2 vérifie $W_s^* = W_{-s} = \bar{\partial}^s W$. Partant des champs de polarisation, $P_{\pm 2}$, on définit trois nouveaux champs sur la voûte céleste, respectivement de spin 2, 1 et 0 :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 &= W(Q + iU), \\ \tilde{P}_1 &= W_1^*(Q + iU), \\ \tilde{P}_0 &= W_2^*(Q + iU). \end{aligned}$$

Les champs de spin négatifs sont simplement obtenus par $\tilde{P}_{-s} = \tilde{P}_s^*$. On notera que W_2 et $P_{\pm 2}$ sont à valeur complexe. Ainsi, le champ $\tilde{P}_0$ est de spin zéro et à valeur complexe : il possède donc une composante de type E (la partie réelle dans ce cas spécifique d'un spin 0) et une composante B (la partie imaginaire). On prend alors la décomposition en mode E et en mode B de chacun de ces champs :

$$\mathcal{B}_{s, \ell m} = \frac{i}{2} \int \left[\tilde{P}_{+s}(\vec{n})_s Y_{\ell m}^*(\vec{n}) - (-1)^s \tilde{P}_{-s}(\vec{n})_{-s} Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \right] d\vec{n}.$$

Le pseudomultipôle pur est finalement donné par une combinaison linéaire spécifiques des différents $\mathcal{B}_{s, \ell m}$:

$$\tilde{a}_{\ell m}^B = \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \mathcal{B}_{0, \ell m} + 2 \sqrt{\frac{(\ell+1)! (\ell-2)!}{(\ell-1)! (\ell+2)!}} \mathcal{B}_{1, \ell m} + \mathcal{B}_{2, \ell m}. \quad (8.17)$$

Le dernier de ces trois termes, $\mathcal{B}_{2, \ell m}$, n'est rien d'autre que le pseudomultipôle de mode B standard, cf. Eq. 8.7. Il contient donc des modes E qui ont fuit et les deux premiers termes peuvent donc se comprendre comme des contretermes qui viennent justement soustraire les modes E qui ont fuit.

Il est important de noter qu'à aucune étape de l'implémentation numérique de la transformée en harmonique sphérique *pure* nous prenons les dérivées des cartes du ciel. Cela est un avantage car les cartes du ciel dont nous partons sont évidemment bruitées. En les dérivant, nous augmenterions la puissance du bruit instrumental par ℓ^4 (il y a deux dérivations qui amènent une multiplication par ℓ^2 , ensuite mise au carré pour avoir la puissance) et nous corrélérions le bruit entre différents pixels, quand bien même le bruit initial serait décorrélié entre deux pixels différents.

La construction de l'estimateur de pseudospectre partant des pseudomultiôles purs est alors similaire à celle de l'estimateur usuel, le système à inverser prenant la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_\ell^E - N_\ell^E \\ \tilde{C}_\ell^B - N_\ell^B \end{pmatrix} = \sum_{\ell'} B_{\ell'}^2 \times \begin{pmatrix} H_{\ell \ell'}^{(+)} & H_{\ell \ell'}^{(-)} \\ H_{\ell \ell'}^{(-)} & H_{\ell \ell'}^{(+)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_{\ell'}^E \\ \hat{C}_{\ell'}^B \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

où l'expression explicite des matrices de couplages est donnée dans [75, 76]. En théorie, les matrices $H_{\ell \ell'}^{(-)}$ sont nulles car les mélanges ont été corrigé au niveau des pseudomultipôles. Toutefois, cela ne corrige que de la source principale de telles fuites que sont les effets de couverture incomplète. Il y a une source secondaire de telles fuites venant de la pixelisation de la sphère céleste. Cette seconde source est toutefois largement sous-dominante et il n'est pas nécessaire de la corriger au niveau de la covariance des estimateurs, seulement au niveau du moment d'ordre 1, c'est-à-dire du biais.

Un exemple de ces matrices de mélange pour l'estimateur *standard* (ne corrigeant pas *réalisation par réalisation* des fuites de E dans B) et pour l'estimateur *pur* (corrigeant *réalisation par réalisation* des fuites de E dans B) est donné en figure 8.3. Les blocs hors-diagonal, $K_{\ell \ell'}^{(-)}$ et $H_{\ell \ell'}^{(-)}$, mesurant les fuites de E dans B sont données dans la colonne de droite. Si $H_{\ell \ell'}^{(-)}$ dans la méthode pure, n'est pas strictement nul (il s'agit des mélanges résiduels dus

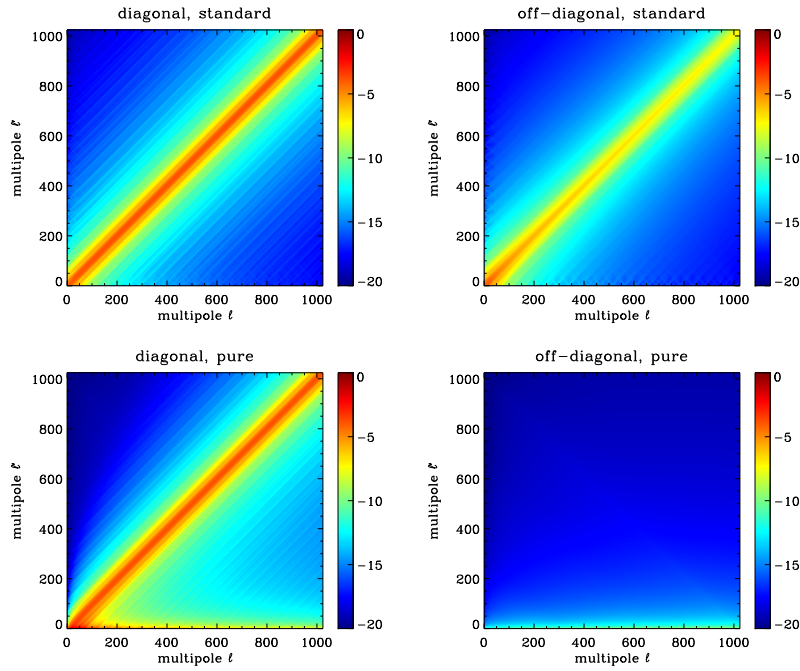


FIGURE 8.3 – Matrices de mélange pour l’estimation standard, sans correction des mélanges (figures supérieures), et pour l’estimation *pure*, corrigeant des fuites de E dans B (figures inférieures). La colonne de gauche est le bloc diagonal, $K_{\ell\ell'}^{(+)}$ et $H_{\ell\ell'}^{(+)}$, et la colonne de droite le bloc hors-diagonal, $K_{\ell\ell'}^{(-)}$ et $H_{\ell\ell'}^{(-)}$, celui mesurant précisément les fuites de E dans B .

à la pixelisation, par ailleurs corrigés en moyenne), il n’en demeure pas moins bien plus faible que $K_{\ell\ell'}^{(-)}$ dans la méthode standard car la source principale des fuites de E dans B , à savoir les effets de couverture incomplète du ciel, est filtrée.

Cette approche peut être facilement étendue au cas des spectres croisés entre deux jeux de cartes du ciel provenant, par exemple, de deux campagnes de mesures différentes [77]. L’avantage d’une telle approche est que, si les deux jeux de cartes proviennent de détecteur (intra-expérience ou inter-expériences) indépendant, le bruit du jeu de cartes A sera décorrélié du bruit dans le jeu de cartes B : il n’y a plus de biais venant du bruit (quand bien même ces bruits contribueront toujours aux incertitudes, au niveau de la covariance des estimateurs). Le système à inverser se simplifie :

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_\ell^E \\ \tilde{C}_\ell^B \end{pmatrix} = \sum_{\ell'} B_{\ell'}^2 \times \begin{pmatrix} H_{\ell\ell'}^{(+)} & H_{\ell\ell'}^{(-)} \\ H_{\ell\ell'}^{(-)} & H_{\ell\ell'}^{(+)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_{\ell'}^E \\ \hat{C}_{\ell'}^B \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Dans le cas usuel, les matrices de couplages entre modes sont des fonctionnelles du spectre de puissance des fonctions de masque, *i.e.* $H_{\ell\ell'}^{(\pm)}[\mathcal{W}_{\ell''}]$ avec $\mathcal{W}_{\ell''} = \sum_{m''=-\ell''}^{\ell''} |w_{\ell''m''}|^2 / (2\ell'' + 1)$. Pour le cas des spectres croisés, les matrices de couplage deviennent alors des fonctionnelles du spectre de puissance *croisé* entre les fonctions de masques appliquées au jeu A et les fonctions de masque appliquées au jeu B , *i.e.* $H_{\ell\ell'}^{(\pm)}[\mathcal{W}_{\ell''}]$ avec $\mathcal{W}_{\ell''}^{AB} = \sum_{m''=-\ell''}^{\ell''} (w_{\ell''m''}^A w_{\ell''m''}^{B*}) / (2\ell'' + 1)$ (cf. Ref. [75, 76]).

8.2.2 Optimisation des fonctions de masque

La mise en place de cet estimateur pur suppose de pouvoir construire des fonctions de masque applicables aux cartes Q , U qui satisfont aux conditions aux limites de Dirichlet et Neuman, $W|_{\partial\Omega} = \partial W|_{\partial\Omega} = 0$. Le choix

de ces fonctions est important car en pratique, c'est notre capacité à optimiser ce choix qui permet d'obtenir de très bonne performance en terme de minimisation des incertitudes sur la reconstruction des spectres de puissance angulaire de type B . On peut comprendre la chose ainsi : ce que nous voulons minimiser est la variance *totale*, qui contient, en toute généralité, la variance d'échantillonnage venant des modes B , la variance d'échantillonnage venant des éventuels mode E fuyant dans B , et la variance due au bruit instrumental. Filtrer totalement les fuites de E dans B permet évidemment de réduire la variance d'échantillonnage sur la reconstruction de C_ℓ^B : c'est la variance d'échantillonnage due au modes E qui est significativement réduite. Cependant, filtrer les modes E qui fuient revient à filtrer tous les modes ambigus (ces modes dont on ne peut savoir, compte tenu de la couverture incomplète, si ils sont de type E ou de type B [72]). Ainsi, une partie des modes B est aussi filtrée. Cette perte d'information entraîne alors un accroissement de la variance : c'est cette fois-ci la variance d'échantillonnage due aux modes B qui est augmentée. Enfin, le filtrage des modes ambigus se fait sur des cartes du ciel *bruitées* et il n'est pas a priori évident de savoir l'impact que cela aura sur la variance due au bruit instrumental. Ce qui se dessine ici, c'est un problème d'optimisation. Anticipons quelque peu. Le mode E étant bien plus intense que le mode B , on s'attendra à ce qu'il soit préférable de filtrer les modes E qui fuit (réduisant significativement la variance d'échantillonnage) quitte à perdre un peu d'information sur le mode B .

Fonctions analytiques— Dans un premier temps, nous pouvons utiliser des constructions analytiques partant d'arches de cosinus ou d'arches de sinus [73] :

$$W_i = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(-\pi \frac{\delta_i}{\delta_c}\right), & \delta_i < \delta_c, \\ 1, & \delta_i > \delta_c, \end{cases} \quad (8.20)$$

ou [75] :

$$W_i = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{\delta_i}{\delta_c}\right) - \frac{\delta_i}{\delta_c}, & \delta_i < \delta_c, \\ 1, & \delta_i > \delta_c, \end{cases} \quad (8.21)$$

ces fonctions étant nulles pour les pixels non observés. La quantité δ_c est une longueur d'apodization (la longueur angulaire, partant du bord du masque, sur laquelle la fonction de la valeur 0 à la valeur 1) qu'il est libre de fixer alors que δ_i correspond à la plus petite distance entre le pixel i et le contour de la portion de ciel observée. On pourra en particulier adapter le choix de δ_c afin de minimiser l'incertitude sur la reconstruction final des spectres de puissance angulaire de type B .

On notera que $W_s = \partial^s W$ est une fonction de spin s alors que $W_{-s} = \bar{\partial}^s W$ est de spin $(-s)$. Ces fonctions de spin non nul sont à valeur complexe et elle satisfont $W_s^* = W_{-s}^*$.

Ces deux fonctions satisfont aux conditions aux bords de Dirichlet et Neuman. Cependant, la fonction proposée en Eq. (8.20) a une dérivée seconde, $\partial\partial(W)$, non nul au bord alors que celle proposée en Eq. (8.21) satisfait à $\partial\partial(W|_{\partial\Omega}) = 0$. Autrement dit, l'équation (8.20) fournit une fonction de masque continue et une fois dérivables sur le ciel alors que l'équation (8.21) fournit une fonction continu et deux fois dérivables. On peut facilement montré que le spectre de puissance de telles fonctions, définie sur un support compact, est majoré supérieurement par une loi de puissance à haut ℓ par $\mathcal{W}_\ell < \alpha \times \ell^{-2n}$, où n est le nombre de fois maximale que l'on peut dériver W . Ainsi, la deuxième fonction aura un spectre de puissance qui chutera à haut ℓ plus rapidement que celui de la première. Cela limitera donc d'autant mieux les possibles mélanges entre de multipôles distants.

De part leur propriété de dérivabilité, les fonctions données en Eq. (8.20) (respectivement données en Eq. (8.21)) seront dénotées les fonctions $\mathcal{C}^1$ (respectivement $\mathcal{C}^2$). Un exemple de ces deux types de fonctions ainsi que la partie réelle de leurs dérivées première et seconde est présenté sur la figure 8.4. La longueur d'apodization ici choisie est $\delta_c = 7$ degrés.

Fonctions optimisées— Dans l'idéal, nous pouvons chercher un critère d'optimisation afin de définir une fonction de masque minimisant l'erreur sur la reconstruction des spectres de puissance angulaire. Dans un certain sens, une telle optimisation est déjà connu. Dans le contexte des estimateurs quadratiques [78], il suffit de multiplier les cartes du ciel par l'inverse de la matrice de covariance des données afin d'obtenir l'estimateur quadratique de variance minimal. Evidemment, une telle approche suppose deux choses : connaître *déjà* (ou tout du moins suffisamment bien pour ensuite procéder de façon itérative) les spectres de puissance que l'on veut reconstruire, car invariablement dans le cas du CMB, le signal lui-même, c'est-à-dire les spectres de puissance angulaire, contribue aux incertitudes

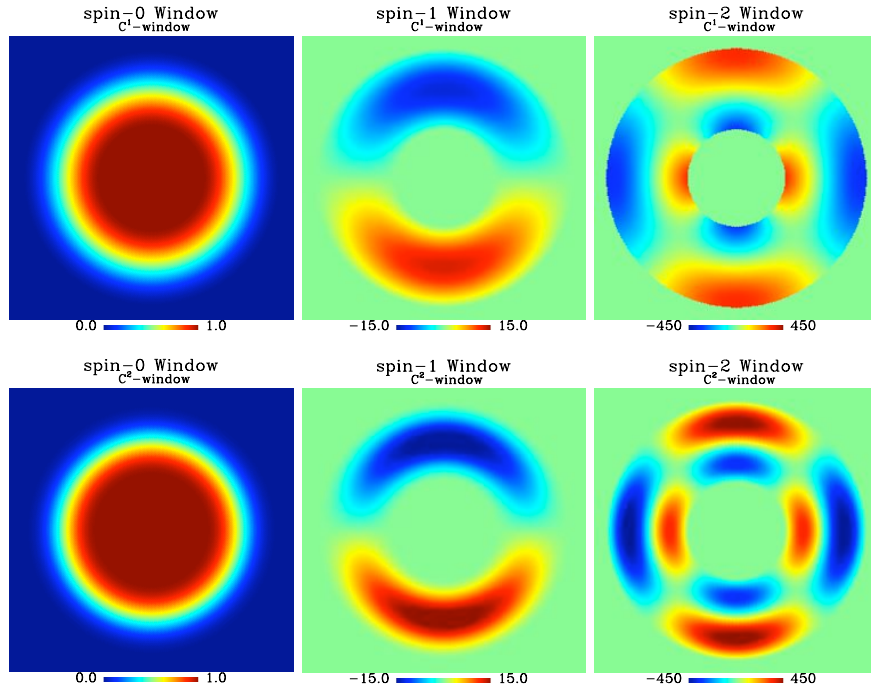


FIGURE 8.4 – Fonction de masque apodisée et analytique C^1 (haut) C^2 (bas). Seul la partie réelle des fonctions de spin 1 et 2 est représenté. La longueur d'apodization est de 7 degrés.

et donc à la covariance des données, et être capable d'inverser numériquement cette matrice de covariance qui a un coût numérique substantiel en N_{pix}^3 .

La construction de l'estimateur quadratique de variance minimale procède ainsi. (Il s'agit ici plutôt d'une reconstruction à la façon des pseudospectres dans le sens où nous prenons d'emblée l'inverse de la matrice de covariance pour filtrer les données. Ce fait découle en fait de l'exigence que la variance doit être minimisée.) En dénotant

$$\mathbf{d}_i = \begin{pmatrix} Q(j) \\ U(j) \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

le vecteur de données dans l'espace des pixels et

$$[\mathbf{C}]_{ij} = \langle \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle Q(i)Q(j) \rangle & \langle Q(i)U(j) \rangle \\ \langle U(i)Q(j) \rangle & \langle U(i)U(j) \rangle \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

sa matrice de covariance, la procédure fonctionne en quatre étapes. Premièrement, on filtre les données par l'inverse de la matrice de covariance

$$\mathbf{d}^{(\text{opt})} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d}. \quad (8.24)$$

Deuxièmement, on projette ce nouveau vecteur, $\tilde{\mathbf{d}}$, suivant les harmoniques sphériques spinnées afin d'en obtenir la décomposition en mode E et B

$$a_{\ell m}^{E(\text{opt})} = \frac{-1}{2} \int_{4\pi} \left[P_2^{(\text{opt})}(\vec{n}) {}_2Y_{\ell m}^*(\vec{n}) + P_{-2}^{(\text{opt})}(\vec{n}) {}_{-2}Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \right] d\vec{n}, \quad (8.25)$$

$$a_{\ell m}^{B(\text{opt})} = \frac{i}{2} \int_{4\pi} \left[P_2^{(\text{opt})}(\vec{n}) {}_2Y_{\ell m}^*(\vec{n}) - P_{-2}^{(\text{opt})}(\vec{n}) {}_{-2}Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \right] d\vec{n}. \quad (8.26)$$

Troisièmement, on construit le pseudospectre associé, $\tilde{C}_\ell^X = \sum_m \left| a_{\ell m}^{X(\text{opt})} \right|^2 / (2\ell + 1)$, et on le débiaise du bruit instrumental.

Quatrièmement, on corrige des différents mélanges en inversant la matrice de Fisher

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_\ell^E - N_\ell^E \\ \tilde{C}_\ell^B - N_\ell^B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{\ell'} \begin{pmatrix} [\mathbf{F}]_{\ell, \ell'}^{E,E} & [\mathbf{F}]_{\ell, \ell'}^{E,B} \\ [\mathbf{F}]_{\ell, \ell'}^{B,E} & [\mathbf{F}]_{\ell, \ell'}^{B,B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_\ell^{E(\text{opt})} \\ \hat{C}_\ell^{B(\text{opt})} \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

avec

$$[\mathbf{F}]_{\ell, \ell'}^{X,Y} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial C_\ell^X} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial C_{\ell'}^Y} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (8.28)$$

L'estimateur qui en résulte, $\hat{C}_\ell^{X(\text{opt})}$, est non biaisé et optimal dans le sens où, parmi tous les estimateurs quadratiques possibles, il est de variance minimale, donnée par l'inverse de la matrice de Fisher ci-dessus, $\text{Cov} \left(\hat{C}_\ell^{X(\text{opt})}, \hat{C}_{\ell'}^{Y(\text{opt})} \right) = [\mathbf{F}^{-1}]_{\ell, \ell'}^{X,Y}$. On peut aussi montrer que cet estimateur coïncide avec l'estimateur par maximum de vraisemblance lorsque l'on atteint le pic de la vraisemblance [79].

D'une certaine manière, on peut voir les estimateurs de pseudospectre comme une approximation de cet estimateur quadratique dans lequel la matrice qui sert à filtrer les cartes du ciel (*i.e.* la fonction de masque) est *diagonale* dans l'espace des pixels. Puisque l'estimateur ci-dessus est optimal, la question de chercher la fonction de masque W qui minimise les incertitudes revient à chercher la fonction W qui minimise la distance entre l'estimateur de pseudospectre *pur* et l'estimateur quadratique optimal. Cette approche a été adoptée dans la référence [73] et elle a été systématisée pour la polarisation et les spectres croisés dans [75]. Elle conduit à l'inversion du système linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^{N_{obs}} [\bar{\mathbf{C}}]_{ij} \sum_{s=0}^2 [\mathbf{P}^{(b)}]_{i+N_{obs}s, j+N_{obs}s'} [\mathbf{W}]_{i+N_{obs}s} = [\mathbf{e}]_{j+N_{obs}s'}, \quad (8.29)$$

L'indice s court le long des spin et le vecteur $\mathbf{W}$ contient la fonction W ainsi que sa dérivée première, $W_1 = \partial W$, et sa dérivée seconde $W_2 = \partial \partial W$, respectivement de spin 0, 1 et 2. On notera que les fonctions de spin non nul sont à valeur complexe. Le vecteur $\mathbf{W}$ contient $5 \times N_{obs}$ éléments. Le vecteur $\mathbf{e}$ a aussi $5 \times N_{obs}$ éléments : les N_{obs} premiers valent 1 et les $4 \times N_{obs}$ suivant sont nuls. La matrice $\mathbf{P}$ correspond à la projection sur les harmoniques sphériques spinnées,

$$[\mathbf{P}^{(b)}]_{i,j}^{s,s'} = \sum_{\ell \in b} \frac{(\ell-2)! \ell(\ell+1)}{(\ell+2)!} \frac{1}{2\pi\Delta_b} \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{s,s',X} (\partial^s Y_{\ell m}(i))^* (\partial^{s'} Y_{\ell m}(j)), \quad (8.30)$$

avec le coefficients $\alpha_{s,s',X}$ qui vaut ± 1 ou ± 2 selon la valeur de s et s' et selon que l'on optimise pour C_ℓ^E ou pour C_ℓ^B . Finalement, $\bar{\mathbf{C}}$ est la matrice de covariance des données agencées comme $\bar{\mathbf{d}}_i = (P_2(i), P_{-2}(i))$. Elle est donnée par :

$$[\bar{\mathbf{C}}]_{ij} = \sum_{\ell} \left(C_\ell^E [\mathbf{\Pi}_\ell^E]_{ij} + C_\ell^B [\mathbf{\Pi}_\ell^B]_{ij} \right) + \begin{pmatrix} \langle n_Q(i) n_Q(j) \rangle & \langle n_Q(i) n_U(j) \rangle \\ \langle n_U(i) n_Q(j) \rangle & \langle n_U(i) n_U(j) \rangle \end{pmatrix}. \quad (8.31)$$

Le premier terme correspond à la contribution du signal, le CMB, et le second à la contribution du bruit instrumental. Les matrices $\mathbf{\Pi}_\ell^X$ sont simplement les combinaisons appropriées des polynômes de Legendre de spin (± 2) évalués pour la valeur $(\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j)$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Pi}_\ell^E]_{ij} &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \begin{pmatrix} 2Y_{\ell m}^*(i) 2Y_{\ell m}(j) & 2Y_{\ell m}^*(i) -2Y_{\ell m}(j) \\ -2Y_{\ell m}^*(i) 2Y_{\ell m}(j) & -2Y_{\ell m}^*(i) -2Y_{\ell m}(j) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\ell+1}{4\pi} \begin{pmatrix} P_\ell^{2,2}(i \cdot j) & P_\ell^{2,-2}(i \cdot j) \\ P_\ell^{-2,2}(i \cdot j) & P_\ell^{-2,-2}(i \cdot j) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Pi}_\ell^B]_{ij} &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \begin{pmatrix} 2Y_{\ell m}^*(i) 2Y_{\ell m}(j) & (-1) \times 2Y_{\ell m}^*(i) -2Y_{\ell m}(j) \\ (-1) \times -2Y_{\ell m}^*(i) 2Y_{\ell m}(j) & -2Y_{\ell m}^*(i) -2Y_{\ell m}(j) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\ell+1}{4\pi} \begin{pmatrix} P_\ell^{2,2}(i \cdot j) & -P_\ell^{2,-2}(i \cdot j) \\ -P_\ell^{-2,2}(i \cdot j) & P_\ell^{-2,-2}(i \cdot j) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

On peut se référer aux annexes des références [78] et [73] pour une discussion détaillée de cette matrice.

Nous avons développé deux approches pour résoudre le système linéaire définissant les fonctions optimales. La première suppose que le bruit instrumental est distribué de façon homogène sur le ciel. Dans ce cas, le système linéaire ci-dessus étant, en fait, une convolution dans l'espace des pixels, est plus simplement résolu dans l'espace des harmoniques sphériques, la convolution devenant un simple produit (la matrice à inverser est *diagonale* dans l'espace harmonique si et seulement si le bruit instrumental projeté sur la voûte est homogène). La solution est trouvée en passant dans l'espace harmonique en prenant en compte que (i) $w_{\ell m}^{(s)} = \sqrt{\frac{(\ell+s)!}{(\ell-s)!}} w_{\ell m}^{(0)}$ avec $w_{\ell m}^{(s)}$ la décomposition harmonique de $W_s = \partial^s W$ et $w_{\ell m}^{(0)}$ et $w_{\ell m}^{(0)}$ la décomposition harmonique de W , et, (ii) il faut imposer les contraintes $W|_{\partial\Omega} = \partial W|_{\partial\Omega} = 0$ dans l'espace harmonique. La solution dans l'espace harmonique est alors :

$$w_{0,\ell''m''} = \frac{1}{C_{\ell,\ell''}^X} (\lambda \mathcal{M}_{\ell''m''} + \mu \mathcal{P}_{\ell''m''}). \quad (8.34)$$

avec

$$C_{\ell,\ell''}^X = \sum_{\ell'} \frac{2\ell' + 1}{4\pi} \frac{(\ell - 2)! (\ell' + 2)!}{(\ell + 2)! (\ell' - 2)!} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & \ell'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \times (C_{\ell'}^B B_{\ell'}^2 + \sigma^2), \quad (8.35)$$

$\mathcal{M}_{\ell''m''}$ et $\mathcal{P}_{\ell''m''}$ la décomposition harmonique du masque binaire et du contour de ce masque, et λ et μ deux multiplicateurs de Lagrange dont les expressions explicites sont données dans l'annexe C de [75].

Dans le cas plus générique où le bruit est inhomogène sur la sphère céleste, nous résolvons le système linéaire par une méthode de gradient conjugué avec pré-conditionneur dans l'espace des pixels [73, 75]. En théorie, cette résolution numérique devrait imposer les contraintes $W_1 = \partial W$ et $W_2 = \partial \partial W$. Toutefois, ces deux contraintes sont relâchées en pratique. On notera d'abord que à la fin du processus itératif conduisant à une solution pour W , W_1 et W_2 , ce lien de dérivation est presque satisfait et les conditions $W|_{\partial\Omega} = W_1|_{\partial\Omega} = 0$ sont aussi presque satisfaites. Cela est le simple résultat du fait qu'en premier lieu, minimiser la variance revient à filtrer les modes E qui fuient. Il est donc naturel que le gradient conjugué tende vers ces fonctions qui satisfont (presque) les conditions ci-dessus. Le "presque" est en fait ici important car bénéfique. A la fin, le but est de minimiser la variance *total* avec en particulier de ne pas trop supprimer de mode B lorsque l'on supprime le mode E fuyant et de ne pas augmenter drastiquement la contribution du bruit ou encore les mélange entre différent multipôles. En d'autres termes, en relâchant certaines des contraintes, nous pouvons minimiser *globalement* la variance plutôt que minimiser *localement* la seule variance d'échantillonnage due aux modes E qui fuiraient dans B . Evidemment, cette minimisation globale passe entre autre, et en pratique de façon majoritaire (mais pas uniquement), par la minimisation locale de la variance d'échantillonnage due aux modes E fuyant dans B .

On notera de plus le point suivant : les fonctions optimisées pour minimiser la variance sont obtenues par bande de multipôles dans lesquels le spectre de puissance de mode B est calculé. Autrement dit, à chaque bande en ℓ pour laquelle le spectre est estimé correspond un jeu W , W_1 et W_2 de fonctions optimisées pour l'estimation du spectre dans cette bande.

La figure 8.5 montre un exemple des fonctions optimisées (dans l'espace pixel ici) pour le cas d'un bruit homogène (ligne du haut) et le cas d'un bruit inhomogène (ligne du bas) pour des couvertures et des distributions de bruit présentées dans la figure 8.1. Ces fonctions sont optimisées pour l'estimation dans la bande $\ell \in [60, 100]$ pour l'estimation du spectre de puissance de mode B . Une étude détaillée de ces fonction se trouve dans la Ref. [75]. Le point important à noter est le suivant. Optimiser ces fonctions suppose déjà de connaître les spectres de puissance angulaire de type E et de type B . Si la connaissance du spectre de type E n'est pas un problème (une estimation suffisamment précise de ce dernier pouvant être atteinte sans recourir à une optimisation des fonctions de masque), le mode B reste quant à lui non détecté. On peut alors légitimement s'interroger sur la pertinence (en principe comme en pratique) de ces fonctions optimisées qui suppose déjà de connaître le signal que l'on veut détecter (ici le mode B de polarisation) avant même sa détection. Il a été montré dans [75] que ces fonctions optimisées ne dépendent que marginalement de notre connaissance du mode B primordial. En d'autres termes, il est suffisant d'optimiser ses fonctions par notre seule connaissance du mode E et de la composante secondaire de lensing du mode B . Cette composante est certes encore peu connu d'un point de vu observationnel mais son niveau et sa forme sont bien fixés de façon théorique (il s'agit simplement du transfert de mode E , bien connu, par effet de lentillage gravitationnel, lui aussi bien connu), et les derniers résultats observationnels tendent à montrer que cette connaissance théorique est correct [41, 80].

On notera que le calcul dans l'espace harmonique est bien plus rapide que dans l'espace direct des pixels. Toutefois, le calcul harmonique n'est valide que pour du bruit homogène et il est moins flexible car les conditions

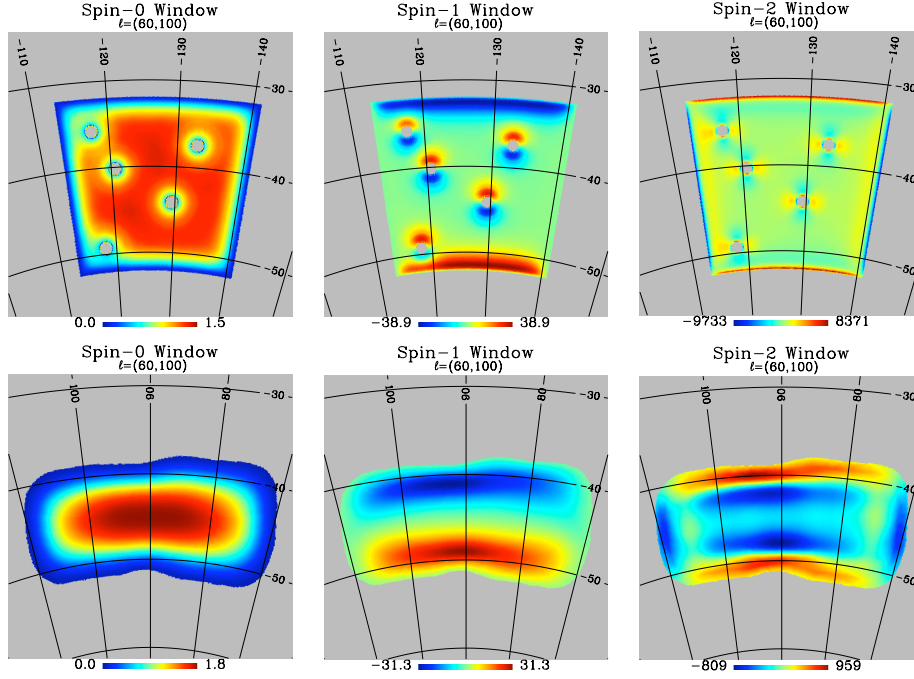


FIGURE 8.5 – Fonctions de masque optimisées pour la détection du mode B dans la bande $\ell \in [60, 100]$ pour une distribution de bruit homogène (haut) et une distribution de bruit inhomogène (bas) telles que données dans Fig. 8.1. Sont représentées la fonction de spin 0 (gauche) et les parties réelles des fonctions de spin 1 (milieu) et de spin 2 (droite). L’optimisation est ici effectuée dans l’espace direct des pixels.

de dérivabilité sont imposées, ce qui (comme nous le verrons dans l’application à une expérience satellite) ne garantit pas une minimisation *globale* des incertitudes, et ce même si le bruit est homogène.

8.2.3 Efficacité de l’estimation pure

Nous avons mis en place un code d’estimation des spectres de puissance angulaire en polarisation basé sur cette définition des *purs* pseudomultipoles et qui présente trois ingrédients essentiels [75] :

- estimation des spectres croisés entre différentes cartes CMB (ces cartes provenant soit de différents détecteurs d’un même instrument, soit de deux campagnes de mesure différentes), ce qui permet de s’affranchir du biais du au bruit instrumental,
- estimation pure pour s’affranchir du mélange E/B ,
- calcul de fonctions de masque W optimisées appliquées aux différentes cartes, permettant une minimisation des barres d’erreurs.

Dans la figure 8.2, nous illustrons l’importance de corriger des fuites de E dans B afin de réduire significativement la variance d’échantillonnage (cette figure est obtenue par la méthode pure sur une calotte sphérique sans bruit instrumental). La figure 8.6 illustre les performances de notre estimateur comme minimisant la variance *globale*. Elle montre la réduction de variance obtenue grâce à l’utilisation des poids optimisés dans le cas d’une couverture idéalisée à gauche, correspondant à une calotte sphérique couvrant 1% du ciel¹ avec bruit homogène, et pour le cas d’une distribution de bruit inhomogène typique d’une expérience ballon (cf. Fig. 8.1 pour la distribution de bruit). Pour ces deux cas, le bruit moyen est de $5.75\mu\text{K-arcminute}$, typique des expériences sol ou ballon en cours d’acquisition de données ou en phase de développement. A l’aide de simulations réalistes de l’expérience EBEX, la variance aux grandes échelles angulaires ($\ell \leq 300$) sur l’estimation du mode B est environ 1,5 fois plus grande que la variance obtenue à l’aide de méthodes optimales, mais trop coûteuses en temps de calculs. Aux plus petites

1. On rappellera ici qu’une calotte à le périmètre minimal pour une surface de ciel donnée. Cela correspond donc au cas où il y a le moins de fuite à corriger.

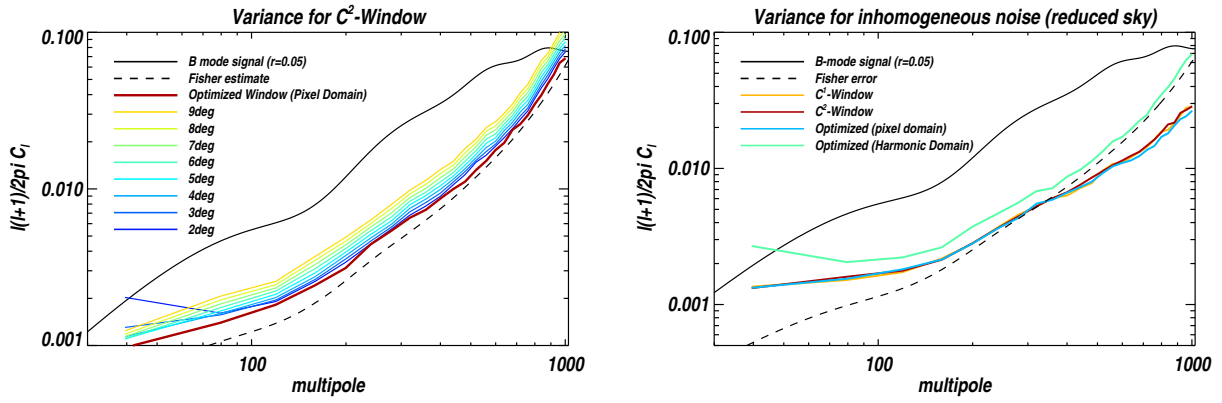


FIGURE 8.6 – *Gauche* : Variance Monte-Carlo obtenue selon le poids appliqué aux cartes pour une portion de ciel observée donnée par une calotte sphérique avec bruit homogène. Les courbes bleues, vertes et jaunes montrent la variance obtenue en utilisant une approche analytique pour les poids à appliquer aux données (les différentes courbes correspondent à différentes valeurs du paramètre libre des poids analytiques). La courbe rouge représente la variance obtenue avec nos poids optimisés : cette variance est la plus faible sur la majeure partie du spectre, justifiant l'utilisation de cette approche. (La courbe noire en trait plein correspond au spectre de puissance de mode B utilisé pour les simulations Monte-Carlo tandis que la courbe noire en tiret représente l'erreur optimale.) *Droite* : Identique à la partie droite mais pour une distribution inhomogène de bruit donnée par la figure 8.1.

échelles angulaires, les deux approches conduisent sensiblement aux mêmes variances.

L'implémentation numérique de cet outil, baptisé $x^2\text{PURE}$, est faite dans une architecture massivement parallélisée (communication inter-processeur en MPI) afin de pouvoir traiter de gros volumes de données et effectuer des simulations Monte-Carlo. L'ensemble des routines nécessaires à l'estimation pure et aux calculs des poids optimisés que j'ai développées sont accessibles dans les bibliothèques $s^2\text{HAT}$ et $pure\text{-}s^2\text{HAT}$ [81].

Cet outil d'estimation des spectres de puissance angulaire présente le double avantage d'être rapide tout en atteignant des précisions proches de celles des estimateurs optimaux grâce à l'estimation *pure*. Sans correction du mélange E/B , une limite inhérente à la méthode sur la détection du mode B apparaît : il est impossible d'extraire le mode B si celui-ci est plus faible que le mode E qui fuit et dont le niveau est fixé par l'amplitude intrinsèque du mode E , la fraction de ciel observée et le périmètre de cette portion. En corrigeant du mélange E/B , $x^2\text{PURE}$ s'affranchit de cette limite inhérente. Par ailleurs, le nombre d'opérations est en $N_{\text{pix}}^{3/2}$ alors qu'il est en N_{pix}^3 pour les estimateurs optimaux par maximum de vraisemblance (N_{pix} représente ici le nombre total de pixels à analyser), rendant ces dernières méthodes difficilement utilisables dans le futur.

8.3 Extension aux corrélations croisées TB et EB [76]

En cosmologie standard, la physique décrivant la propagation des photons du CMB et la génération des anisotropies conduit à des corrélations croisées TB et EB nulles. Cependant, ces deux spectres croisés jouent un rôle important dans l'analyse des données en polarisation. A priori nuls, ils constituent un test simple de la présence résiduelle d'effets systématiques astrophysiques ou instrumentaux [67, 82]. L'origine de telles corrélations peut aussi être cosmologique. De façon générique, de telles corrélations croisées TB et EB non-nulles apparaissent si il y a brisure de la symétrie de parité. Ces anisotropies primaires corrélées peuvent apparaître si *e.g.* l'univers primordial est rempli par un champ magnétique d'hélicité non nulle [83], si le champ d'inflaton est pseudoscalaire (il se couplera alors naturellement au champ électromagnétique d'une façon qui brise explicitement la parité) [84], ou alors si la gravitation brise explicitement la parité (ce qui apparaît explicitement dans les formulations de Ashtekar ou de Kibble de la théorie de la gravitation) [85]. Par ailleurs, ces corrélations peuvent se manifester dans les anisotropies secondaires puisque le plan de polarisation peut subir des rotations lors de la propagation des photons du CMB de la surface de dernière diffusion jusqu'à nos détecteurs. Cette rotation du plan de polarisation peut par exemple être due à la présence de champs magnétiques dans un milieu ionisé sur le parcours des photons [86] (rotation Faraday) ou encore due à une interaction spéculative de la lumière avec un champ pseudoscalaire [87] (biréfringence).

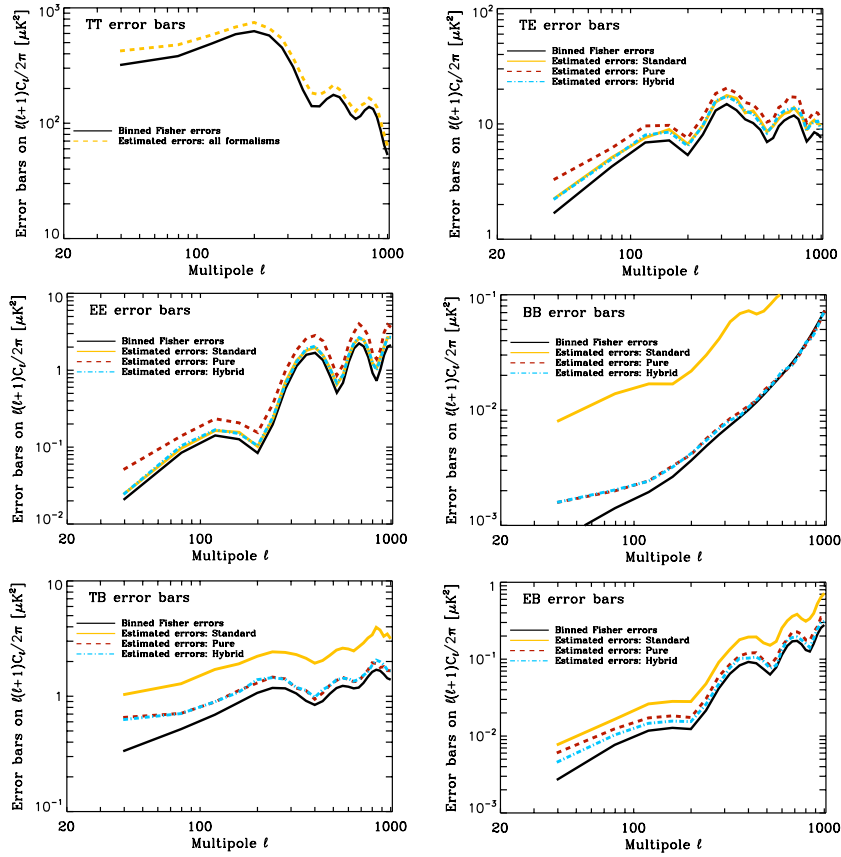


FIGURE 8.7 – Incertitudes sur la reconstruction des six spectres de puissance angulaire des anisotropies du CMB pour chacun des formalismes, standard, pure ou hybride (courbes en couleur). La courbe noire correspond à l'estimation naïve des incertitudes basée sur un simple comptage des modes, cf. Eq. (8.11).

Tout cela induit alors des corrélations croisées TB et EB non-nulles qui deviennent alors des sondes nécessaires à la reconstruction du plan de polarisation. Ainsi, que ce soit d'un point de vue instrumental, astrophysique, cosmologique ou physique fondamentale, une reconstruction précise des spectres de puissance angulaire TB et EB est nécessaire.

Nous avons généralisé le formalisme *pur* utilisé pour les spectres de puissance de mode B aux cas des spectres de puissance EB et TB [76]. Dans ce cas, plusieurs approches sont possibles. Il faut se rappeler le point suivant. Nous pouvons choisir d'estimer les pseudomultipôles de type E et B de deux manières : soit en prenant les pseudomultipôles standards avec mélange soit en prenant les pseudomultipôles purs sans mélange. S'affranchir des mélanges pour *e.g.* B est bénéfique car le mode E ne contribue plus à la variance d'échantillonnage. Mais cela a un coup. Filtrer les modes qui fuient revient à filtrer les modes dits ambigus [72] : lorsque nous filtrons exactement les modes E qui fuient dans B , une partie des modes B est aussi filtrée et cette perte d'information conduit à un accroissement de la variance d'échantillonnage. Il y a donc un juste équilibre à trouver entre perte d'information et filtrage des mélanges. Puisque le mode E est bien plus intense que le mode B , il est préférable *pour le mode B* de filtrer entièrement les modes E qui fuient quitte à perdre un peu d'information. Mais pour le mode E , c'est exactement l'inverse. La fuite de B dans E n'entraîne qu'une très faible augmentation de la variance d'échantillonnage du mode E et il est *a priori* préférable de garder l'ensemble de l'information. Trois approches peuvent donc être adoptées :

L'approche standard : les pseudomultipôles de modes E et B sont estimés sans corriger des mélanges.

L'approche pure : les pseudomultipôles de modes E et B sont estimés en corrigeant des mélanges (par la méthode pure).

L'approche hybride : les pseudomultipôles de modes E sont estimés sans corriger des mélanges alors que ceux

de modes B sont estimés en corrigeant de la fuite de E dans B .

On notera que l'approche hybride ne se réduit pas à la composition des deux premières approches car les noyaux de convolution dépendent de façon stricte de chacun des formalismes adoptés.

Nous avons implémenté numériquement ces formalismes dans $X^2\text{PURE}$ et nous l'avons appliqué au cas d'expérience couvrant environ 1% de la voûte céleste, considérant différentes formes de la portion de ciel observée et différents niveaux d'inhomogénéité de bruit [76]. Compte tenu de la discussion précédente, il était attendu que le formalisme hybride fournisse la meilleure reconstruction (c'est-à-dire les plus petites incertitudes) des six spectres de puissance angulaire, TT , EE , BB , TE , TB et EB . Cela est illustré sur la figure 8.7 dans le cas d'un bruit fortement inhomogène, caractéristique d'une expérience ballon comme EBEX (cf. partie droite-bas de la figure 8.1). Ces résultats numériques confirment l'intuition : il s'agit bien de l'approche hybride qui fournit les plus petites incertitudes sur la reconstruction de l'ensemble des six spectres.

8.4 Efficacité des méthodes de pseudospectre pour l'estimation du mode B [90]

8.4.1 Efficacité comparée des différents estimateurs

Depuis la proposition séminale des estimateurs purs proposé en Ref. [73], d'autres approches ont été proposées, Refs. [88] et [89]. Chacune de ces méthodes propose une manière numérique de reconstruire les champs χ^E et χ^B qui lui est propre. Si le fond théorique est donc identique (*i.e.* estimer les champs χ^X), les performances effectives de chacune de ces approches dépendent fortement de la méthode numérique mise en place *en pratique* pour reconstruire les champs χ^X . La question qui se pose est donc d'évaluer les performances respectives de chacune de ces approches [90].

Dans un premier temps, nous avons développé un formalisme commun pour traiter les trois approches respectivement proposées dans les Refs. [73], [88] et [89]. Nous avons en particulier amélioré l'approche de [88] pour montrer son équivalence théorique d'avec l'approche de [73]. Cependant, la formulation explicite et détaillé de la méthode [73] permet une optimisation des fonctions de masques W qui n'est pas possible dans la formulation spécifique de [88]. Par ce formalisme unifié, nous avons aussi pu montré que l'approche de [89] est une approximation de l'approche des Refs. [73, 88]. Par cette enquête théorique, il est donc raisonnable de s'attendre à ce que la méthode [73] soit la plus performante, suivie de la méthode [88] puis de la méthode [89].

Reconstruire les modes E et B partant des cartes du ciel de Q et U peut se faire dans l'espace harmonique (cf. Eqs. (8.1) & (8.2)). Toutefois cette opération est globale dans l'espace des pixels et entraîne les fuites des modes E dans les modes B pour des couvertures céleste partielle. Une solution est donc de passer par une opération *locale* dans l'espace des pixels. Une telle opération est connu depuis longtemps : il suffit de reconstruire les champs χ^X définis comme

$$\begin{aligned}\chi^E(\vec{n}) &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\partial}\bar{\partial}P_2(\vec{n}) + \partial\partial P_{-2}(\vec{n}) \right], \\ \chi^B(\vec{n}) &= \frac{i}{2} \left[\bar{\partial}\bar{\partial}P_2(\vec{n}) - \partial\partial P_{-2}(\vec{n}) \right].\end{aligned}$$

L'implémentation numérique de dérivations est problématique à deux niveaux. Tout d'abord les cartes du ciel sont bruitées et les dériver, qui plus est deux fois, amplifie la puissance du bruit et génère des corrélations entre pixels difficilement traitable. Par ailleurs, il faut souvenir que les cartes sont pixelisées, en conséquence de quoi l'opération de dérivation ne peut jamais être totalement locale. Partant de cartes masquées, il faudrait dériver les champs $M \times P_{\pm 2}$ où est un masque binaire. La pixelisation va entraîner de nombreuses complications dans la dérivation aux alentours des contours du masque. Cependant, chacune des méthodes ici étudiées propose à sa manière de reconstruire les champs χ^X .

La méthode proposée dans la Ref. [73] a déjà été largement présenté précédemment. Elle se propose de construire directement les pseudomultipôles du champ $W \times \chi^B$ sans jamais dériver les cartes des paramètres de Stokes : elle passe directement des cartes de Q et U aux pseudomultipôles, dans l'espace harmonique donc, de $W \times \chi^B$.

La méthode proposé dans la Ref. [88] consiste dans un premier temps à reconstruire dans l'espace des pixels le champ $W^2 \times \chi^B$ à l'aide de

$$\begin{aligned}W^2(\vec{n})\chi^B(\vec{n}) &= \frac{i}{2}W(\vec{n}) \left[\bar{\partial}\bar{\partial}(WP_2) - \partial\partial(WP_{-2}) \right] - i \left[\bar{\partial}W\bar{\partial}(WP_2) - \partial W\partial(WP_{-2}) \right] \\ &- \frac{i}{2}W(\vec{n}) \left[(\bar{\partial}\bar{\partial}W)P_2 - (\partial\partial W)P_{-2} \right] + i \left[(\bar{\partial}W)^2P_2 - (\partial W)^2P_{-2} \right].\end{aligned}$$

La fonction W une fonction de masque qui doit être continu et deux fois dérivables sur l'ensemble de la voûte céleste (et évidemment nulle pour tous les pixels non-observés). Elles doivent donc être proprement apodisées et les fonctions analytiques proposées précédemment sont donc de bons candidats. On notera que ces conditions de continuité et de dérivabilité viennent du fait que les dérivations sont numériquement effectuées en passant dans l'espace harmonique, opération faite sur l'ensemble de la sphère céleste. Dans la proposition originelle de [88], le membre de droite de l'équation ci-dessus par W^2 . On peut alors montrer analytiquement (partant simplement des propriétés de continuité et de dérivabilité sur la sphère céleste) que cela entraîne nécessairement une divergence aux alentours des contours du masque. Il était alors nécessaire de supprimer une bande proche de ces contours, perdant par-là une partie de l'information. Notre implémentation numérique travaille directement en partant des champs $W^2\chi^B$ et corrige ensuite de ce biais au niveau de la moyenne des estimateurs. Si cela n'assure pas de conserver toute l'information (la fonction W est apodisée), moins d'information est toutefois perdue. D'un point de vue théorique, cette approche est équivalente à l'approche de [73]. elle nécessite toutefois de passer d'abord par le champ χ dans l'espace pixel avant d'en prendre les pseudomultipôles.

On peut d'ores et déjà noter un point. Comme nous l'avons mentionner précédemment, l'approche de [73] possède une certaine flexibilité en terme d'optimisation des fonctions de poids. En particulier, il est possible de relâcher les contraintes de dérivabilité et de continuité des fonctions W au profit d'une minimisation globale de la variance. Malheureusement la méthode [88] ne partage pas cette flexibilité. Cette perte de flexibilité vient du choix d'implémenter numériquement l'équation ci-dessus plutôt qu'une transformée directe en harmonique sphérique pure. Si ces deux sont équivalentes sur le papier, elles ne le sont pas a priori dans leur implémentation numérique et leur efficacité.

Puisque W est constante dans une région interne au masque initiale, il est évident que dans cette région où $W = cste$, seul le premier terme du membre de droite de l'équation ci-dessus est non-nul et se ramène à $i [\partial\bar{\partial}(P_2) - \partial\partial(P_{-2})] / 2$ (où nous avons choisis $W = 1$ dans cette région). Ce n'est rien d'autre qu la définition de χ^B et se premier terme est, dans cette région spécifique, sans fuite de E dans B . Dans les régions où W varie, ce premier terme est sujet aux fuites mais les trois suivants viennent justement les compenser. C'est ce dernier point qui à l'origine de la méthode proposée en Ref. [89]. Seul le premier terme est calculé et ces zones du masque où W varie sont tout simplement exclues de l'analyse. En un certain sens, elle constitue une approximation des méthodes précédente. On peut d'ores et déjà se convaincre d'une perte de performance partant de cette approche. Tout d'abord une partie de l'information est invariablement perdue car il faut éliminer une partie des zones observées pour réduire les fuites de E dans B . Deuxièmement, les effets de pixelisation font que même dans la région interne où $W = cste$, des fuites résiduelles sont toujours présentes. Or ces fuites sont strictement non-modélisable dans cette approche et il faut donc les réduire à un niveau suffisamment faible pour l'estimation ne soit pas biaisée. Cela est rendu possible en choisissant une longueur d'apodization pour W relativement grande, entraînant de fait une plus grande perte d'information et donc une perte en précision (cf. Ref. [90]).

Nous avons implémenté une version parallèle de x^2PURE permettant, en plus de l'approche [73], de traiter les approches [88] et [89]. Nous avons alors évalué les performances relatives de chacune de ces trois approches dans le cas de deux configurations expérimentales :

- Une expérience sol ou ballon couvrant 1% du ciel (la couverture exacte étant donnée par la partie gauche-bas de la figure 8.1) avec un bruit homogène à $5.75\mu K$ -arminute et un *beam* gaussien de 8 arcminutes. Cela correspond aux spécificités typiques des expériences sol ou ballon en cours d'acquisition de données polarisées.
- Une expérience satellite couvrant 71% du ciel (la couverture exacte étant donnée par la partie gauche-haut de la figure 8.1) avec un bruit homogène à $2.2\mu K$ -arminute et un *beam* gaussien de 8 arcminutes. Cela correspond aux spécificités typiques d'une possible future mission satellite dédiée à la polarisation du fond diffus cosmologique.

La figure 8.8 résume nos résultats numériques, les incertitudes sur la reconstruction du mode B pour chaque méthode étant estimée à l'aide de 500 simulations Monte-Carlo. Les spectres de puissance angulaire sont estimés par bande contiguës de multipôles ; la première bande allant de $\ell = 2$ à $\ell = 20$ et les bandes suivantes ayant une largeur de $\Delta\ell = 40$. Il est clair que la méthode la plus performante est la méthode [73]. Pour le cas spécifique d'une expérience satellite, elle est la seule qui permet une reconstruction avec un rapport signal-sur-bruit plus grand que 1 sur l'ensemble des échelles angulaires [90]. Le fait que la méthode [88] est moins performante que celle de [73] s'explique par le fait qu'une optimisation globale, minimisant les incertitudes, des fonctions de masques W est possible pour la méthode de [73] et impossible pour la méthode de [88]. Le fait que la méthode de [89] est la moins performante s'explique à la fois par l'impossibilité d'optimiser les fonctions de masques mais aussi par le fait qu'elle est une approximation des méthodes [73, 88]. Cette approximation s'assure qu'il n'y a aucune fuite de E dans B mais, en plus d'éliminer les modes ambigus, elle élimine aussi une partie de l'information des modes B .

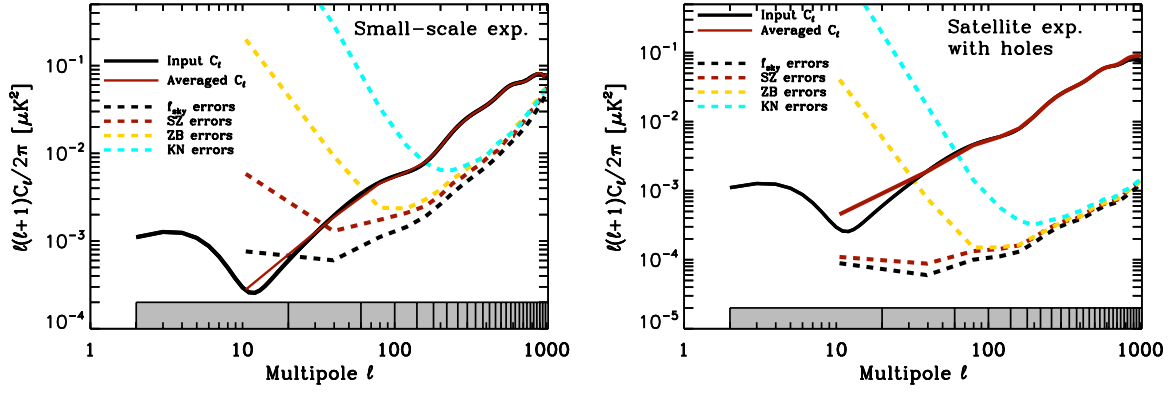


FIGURE 8.8 – Incertitude sur la reconstruction du mode B pour chacune des méthodes de pseudospectres corrigeant des mélanges E/B et pour une expérience sol ou ballon (gauche), et une expérience satellite (droite). (Les spécificités de chacune de ces configurations expérimentales sont données dans le corps du texte.) La courbe noire en trait plein est le spectre de puissance de mode B théorique alors que la courbe rouge en trait plein est le spectre de puissance estimé par bande de multipôles. Cela montre que l'estimation est effectivement non biaisé. Les courbes en tiret sont les incertitudes : i) noire : sous-estimation naïve donnée par l'équation (8.11), ii) rouge : incertitudes pour la méthode [73], iii) jaune : incertitudes pour la méthode [88] et iv) bleue : incertitudes pour la méthode [89].

8.4.2 Estimation pure pour les expériences satellite

Les études menées précédemment [75, 76] montraient la nécessité de corriger des fuites de E dans B dans le cas des expériences sol ou ballon car ces expériences couvrent une très faible portion de ciel. Si les expériences satellite couvrent une bien plus grande portion de ciel, il n'en demeure pas moins qu'il est nécessaire de corriger des fuites si l'on souhaite reconstruire le mode B avec un précision suffisante pour ensuite contraindre les modèles d'univers primordial. En particulier, les mélanges ne sont pas négligeables (voire pratiquement du même ordre de grandeur que pour les expériences couvrant 1% du ciel) compte tenu de la forme très complexe des contours du masque galactique et des trous internes masquant les sources ponctuelles (cf. partie gauche-haut de la figure 8.1). Sur la figure 8.9 (gauche), nous montrons le rapport signal-sur-bruit sur la reconstruction du mode B , *i.e.*

$$(S/N)_\ell = \frac{\langle \hat{C}_\ell^B \rangle}{\sqrt{\text{Cov}(\hat{C}_\ell^B, \hat{C}_\ell^B)}},$$

en utilisant une méthode de pseudospectre ne corrigeant pas des fuites (courbe jaune) et utilisant la méthode [73] corrigeant de ces fuites dans l'implémentation $x^2\text{PURE}$ (courbe rouge). (La courbe noire représente le cas optimiste et irréaliste où les incertitudes sont données par l'équation (8.11). Nous la montrons en guise de référence.) Si les mélanges ne sont pas corrigés, une mesure à 3σ de ce spectre de puissance angulaire est impossible pour $\ell < 300$, justement la gamme qui permet d'accéder aux ondes gravitationnelles primordiales, et passer à une estimation pure est alors nécessaire [90].

Si la correction des mélanges pour le cas des expériences satellites est nécessaire, la mise en place d'une telle approche pour ce cas spécifique n'est pas si aisée car l'optimisation des fonctions de masque W y joue un rôle clé. Sur la figure 8.9 (droite), nous montrons les incertitudes statistiques sur la reconstruction de C_ℓ^B , multipôle par multipôle, en utilisant la méthode [73] et en appliquant trois types de fonction de masque :

- en jaune une fonction découlant d'une expression analytique,
- en bleu une fonction partiellement optimisée mais rapidement calculée (optimisation dans l'espace harmonique),
- en rouge une fonction optimisée mais dont le calcul peut s'avérer numériquement compliqué (optimisation dans l'espace des pixels).

Il est évident qu'une reconstruction du spectre de puissance angulaire de mode B n'est possible pour $\ell < 40$ que si les fonctions de masque sont *optimisées* [90] dans l'espace pixel. On notera en particulier qu'une optimisation dans

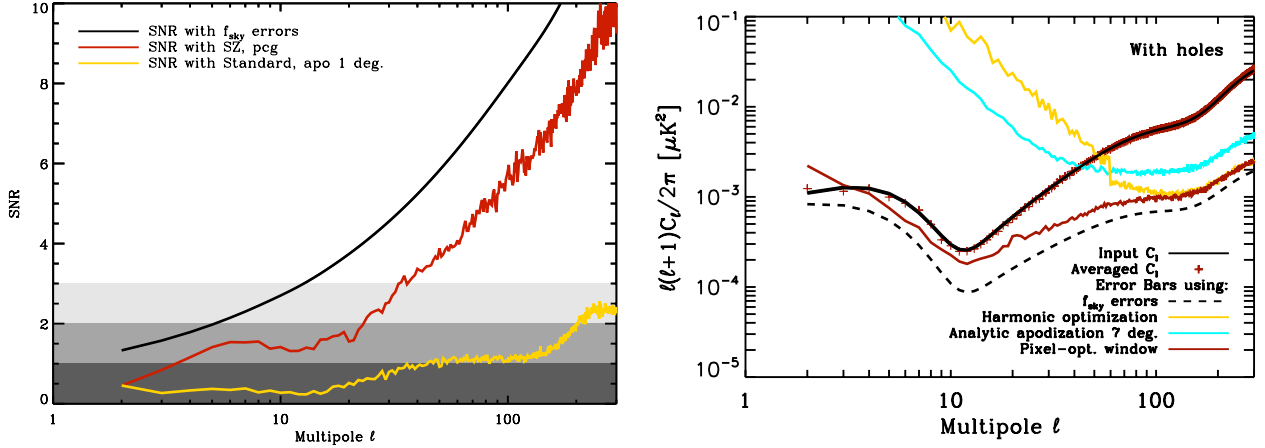


FIGURE 8.9 – *Gauche* : Rapport signal-sur-bruit sur la reconstruction du mode B , *i.e.* $\langle \hat{C}_\ell^B \rangle / \sqrt{\text{Cov}(\hat{C}_\ell^B, \hat{C}_\ell^B)}$, en utilisant une méthode de pseudospectre ne corrigeant pas des fuites $E \rightarrow B$ (courbe jaune) et utilisant la méthode [73] corrigeant de ces fuites (courbe rouge). La courbe noire représente le cas optimiste et irréaliste où les incertitudes sont données par l'équation (8.11). *Droite* : Reconstruction du spectre de puissance de modes B en utilisant la méthode [73] pour une future expérience satellite dédiée à la polarisation du CMB. Trois types de fonction sont utilisés : i) en jaune une fonction découlant d'une expression analytique, ii) en bleu une fonction partiellement optimisée mais rapidement calculée (optimisation dans l'espace harmonique) et iii) en rouge une fonction optimisée mais dont le calcul peut s'avérer numériquement compliqué (optimisation dans l'espace des pixels).

l'espace harmonique est inefficace aux grandes échelles angulaires pour la raison suivante : imposer $W = \partial W = 0$ sur le contour du masque assure d'annuler toutes les fuites de E dans B mais cela se fait au détriment d'une minimisation *globale* de la variance, qui est elle assurée par une optimisation dans l'espace des pixels. Ce résultat est aussi à comparer aux résultats obtenues pour les expériences sol ou ballon, résumés dans le figure 8.6. Pour ce type d'expérience, utiliser les fonctions optimisées dans l'espace pixel conduit certes aux plus petites incertitudes. Toutefois, par un choix approprié des longueurs d'apodization des fonctions analytiques, il est déjà possible d'obtenir de faibles incertitudes, comparable à celles obtenues avec les fonctions optimisées dans l'espace pixel. Dans le cas des expériences satellite, tel n'est plus le cas (c'est en particulier en utilisant une longueur d'apodization de 7 degrés que nous obtenons les plus petites incertitudes si l'on se restreint à l'utilisation des fonctions analytiques). Autrement dit, si l'utilisation des fonctions optimisées n'est apparemment pas cruciale pour obtenir déjà une bonne reconstruction de C_ℓ^B pour les expériences sol ou ballon, cela devient crucial aux grandes échelles angulaires pour une expérience satellite. La raison à cela est que les contours du masque pour ce dernier type d'expérience sont bien plus complexes que pour les expériences sol ou ballon, que ce soit du point de vue du masque galactique que du grand nombre de trous masquant les sources ponctuelles. Or les fuites de E dans B et les mélanges entre différents multipôles sont justement dictés par la forme du contour du masque.

Cette possibilité d'optimisation est à ce titre un des atouts majeurs de la méthode [73] implémentée dans le code $x^2\text{PURE}$. Bien plus que la valeur de la fraction de ciel observée, c'est surtout la complexité des contours du masque qui fixe le niveau de mélange, et donc la nécessité d'optimiser très finement les fonctions de masques.

Chapitre 9

Paramètres cosmologiques avec le mode B

9.1 Contrainte sur le rapport tenseur-sur-scalaire [91, 95, 96]

Si l'on cherche à détecter le mode B primordial, c'est bien évidemment dans l'optique de placer des contraintes sur les modèles d'Univers primordial et, en premier lieu, de discriminer entre les différents modèles d'inflation. Une première grande classe de distinction est entre les modèles dits *large field*, signifiant que le champ d'inflaton est initialement à une valeur extrêmement élevée (tel le modèle en $m^2\varphi^2$), et les modèles dits *small field*. Cette discrimination est rendue simple si l'on peut mesurer la valeur du rapport tenseur-sur-scalaire puisque génériquement, les modèles *large field* prédisent un fort taux de production d'ondes gravitationnelles primordiales (se traduisant par une grande valeur de r) tandis que les modèles *small field* prédisent une faible valeur de r .

Le paramètre cosmologique qui est donc principalement visé dans la détection de la composante primordial du mode B est ce rapport tenseur-sur-scalaire. Actuellement, les anisotropies en température telles que mesurées par PLANCK ont permis de placer une limite supérieure sur ce paramètre de $r < 0.11$ à 95% de niveau de confiance [2]. Ces contraintes viennent uniquement de la contribution des modes tensoriels aux anisotropies de température et, les mesures de PLANCK en température étant uniquement limitées par la variance cosmique, cette contrainte ne pourra être améliorée par la seule utilisation des anisotropies de température. Si l'on recourt plutôt au mode B , seule une limite supérieure sur ce mode de polarisation a été établie, il en résulte une limite supérieure sur r utilisant le mode B *uniquement* de : $r < 0.7$ à 95% de niveau de confiance (cf. dernière référence de [69]), obtenue à l'aide des données de BICEP.

La question posée est de traduire les incertitudes sur la reconstruction du mode B en des incertitudes sur la mesure de r . Il y a évidemment plusieurs sources d'incertitudes, statistique d'une part et systématique d'autre part. Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur l'impact des incertitudes statistiques, la question devenant : étant donnée une reconstruction de C_ℓ^B à l'aide de l'estimateur de pseudospectre pur, quelle valeur de r est détectable ? Ensuite, nous ajouterons une première source d'incertitude systématique : la soustraction des émissions astrophysiques d'avant-plan.

9.1.1 Analyse de Fisher

Pour traduire les erreurs sur l'estimation de C_ℓ^B en des erreurs sur le rapport tenseur-sur-scalaire, nous utilisons un formalisme de Fisher. L'erreur sur r est simplement donnée par l'inverse de la matrice de Fisher :

$$(\sigma_r)^{-1} = F_{rr} = \sum_{\ell, \ell'} \left(\frac{\partial C_\ell^{BB}}{\partial r} \right) (\Sigma^{-1})_{\ell\ell'} \left(\frac{\partial C_{\ell'}^{BB}}{\partial r} \right), \quad (9.1)$$

avec Σ la matrice de covariance de l'estimateur $\hat{C}_\ell^B$. Cela suppose implicitement que la fonction de vraisemblance sur les spectres estimés est gaussienne. Le rapport signal-sur-bruit quant à la reconstruction de r est alors simplement donné par $(S/N)_r = r/\sigma_r$.

L'estimation de la matrice de covariance peut procéder de trois manières différentes :

- Nous pouvons partir d’un calcul simpliste du nombre de modes :

$$\Sigma_{\ell\ell'} = \frac{2\delta_{\ell,\ell'}}{(2\ell+1)f_{\text{sky}}} \left(C_{\ell}^{BB} + \frac{N_{\ell}}{B_{\ell}^2} \right)^2, \quad (9.2)$$

avec N_{ℓ} le spectre de puissance du bruit instrumental reprojété sur le ciel. Dans cette approche, les incertitudes sont sous-estimées.

- Nous pouvons partir de l’estimateur quadratique optimal [78] :

$$(\Sigma^{-1})_{\ell\ell'} = \mathbf{F}_{\ell\ell'} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial C_{\ell}^{BB}} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial C_{\ell'}^{BB}} \mathbf{C}^{-1} \right], \quad (9.3)$$

avec $\mathbf{C} = \langle d_i d_i^{\dagger} \rangle$ la matrice de covariance des cartes du ciel, *i.e.* $d_i = (Q_i, U_i)$. Le calcul d’une telle matrice est toutefois très coûteuse et il ne sera effectué que sous l’hypothèse d’une portion de ciel observée qui présente une symétrie azimuthale. (Nous référons à l’annexe F de [73] pour un tel calcul simplifié.) On peut facilement montrer que la matrice de Fisher sur r se ramène alors à

$$(\sigma_r)^{-1} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}}{\partial r} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}}{\partial r}, \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \right], \quad (9.4)$$

où $\tilde{\mathbf{C}}$ est la matrice de covariance des données mais supposant qu’uniquement C_{ℓ}^B dépend du paramètre r

- Enfin nous pouvons estimer cette matrice de covariance Σ pour l’estimateur de pseudospectre pur à l’aide de simulations Monte-Carlo. Ces simulations sont rendues possible par l’implémentation x^2PURE de cette méthode de pseudospectre.

Le spectre de puissance de mode B se décompose suivant deux sources : le mode B primordial qui est directement proportionnel à r et le mode B secondaire du au lentillage gravitationnel. Cette dernière source ne dépend pas de r (en fait marginalement) et il agit donc comme une source effective de bruit qui vient masquer notre détection du mode B primordial. En tant que fonction du paramètre r , le spectre de puissance de mode B se modélise comme

$$\tilde{C}_{\ell}^{BB}[r] = r \times \mathcal{T}_{\ell}^{BB} + \mathcal{T}_{\ell, \text{lens}}^{EE \rightarrow BB}, \quad (9.5)$$

avec $\mathcal{T}_{\ell}^{BB}$ et $\mathcal{T}_{\ell, \text{lens}}^{EE \rightarrow BB}$ deux spectres de puissance angulaire fiduciels, indépendant de r , et donnée par

$$\mathcal{T}_{\ell}^{BB} = [1 + R^P] C_{\ell}^{BB}[r=1] + \sum_{\ell_1, \ell_2} F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(+)} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{BB}[r=1], \quad (9.6)$$

$$\mathcal{T}_{\ell, \text{lens}}^{EE \rightarrow BB} = \sum_{\ell_1, \ell_2} F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(-)} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{EE}. \quad (9.7)$$

Ce premier *template* correspond au mode B primordial et lentillé pour $r = 1$. Le second *template* correspond simplement au mode E primaire qui se transforme en B secondaire par lentillage gravitationnel [92].

9.1.2 Détection du rapport tenseur-sur-scalaire

Contrainte sur r : cas d’une future expérience satellite— Pour le cas d’une future mission satellite dédiée à la polarisation du CMB (tel CORE/PRISM ou encore LITEBIRD), ce n’est évidemment pas le temps d’observation qui fixe la portion de ciel *conservée* pour l’analyse CMB des cartes du ciel mais les émissions d’avant-plan et les sources ponctuels qu’il faut masquer. La couverture du ciel typique pour laquelle une estimation des spectres de puissance angulaire est donnée dans la partie haut-gauche de la figure 8.1. Pour une expérience dédiée au mode B primordial, nous rappelons que le niveau de bruit espéré est de $2.2\mu\text{K-arcminute}$ et que le beam est de 8 arcminute, ce qui optimise la détection des grandes échelles angulaires, justement là où le mode B *primordial* domine.

A l’aide de simulations Monte-Carlo nous avons estimé les incertitudes sur la reconstruction du spectre de puissance de mode B à l’aide d’une estimation par pseudospectre pur. Ces incertitudes ont été traduites en des incertitudes sur la détection de r via le formalisme de Fisher. Cela montre que, prenant en compte de façon réaliste les erreurs statistiques, une détection de $r = 10^{-3}$ à 3σ est possible. Pour une valeur de $r = 0.05$, la valeur principalement ciblée par les expériences sol ou ballon en cours de déploiement, c’est une détection à $\sim 24\sigma$ qui devient possible. Une valeur de $r = 0.1$, proche de la limite supérieure établie par la mesure du spectre de puissance en température par PLANCK, serait détectable à $\sim 30\sigma$.

9.1.3 Soustraction des émissions d'avant-plan : impact sur la détection de r

Les deux principales sources d'émissions d'avant-plan galactique polarisées polluant les mesures du CMB sont le rayonnement synchrotron des électrons spiralant autour du champ magnétique galactique et l'émission des poussières interstellaires. Le rayonnement synchrotron domine à basse fréquence, *i.e.* en-deçà de 100 GHz, tandis que l'émission des poussières est le principal contaminant pour les mesures à haute fréquence, au-delà de 100 GHz. Par ailleurs, l'émission de ces deux composantes domine largement le signal polarisé cosmologique de type B . Une bonne reconstruction des anisotropies en polarisation du CMB, et plus particulièrement celle de type B , nécessite alors une très bonne soustraction de ces deux contaminants. Cette soustraction peut se faire en tirant partie de l'information spectrale électromagnétique (nécessitant donc plusieurs fréquences d'observation) : le CMB présente une loi d'émission de corps noir tandis que le rayonnement synchrotron présente une loi d'émission en loi de puissance et les poussières interstellaires une loi d'émission de corps gris, avec un facteur d'émissivité en loi de puissance.

Que ce soit l'instrument HFI de PLANCK ou les expériences sol comme POLARBEAR ou ballon comme EBEX, les détecteurs sont des bolomètres qui opèrent donc à 100GHz et au-delà. Ainsi, le principal avant-plan galactique est l'émission des poussières interstellaires, malheureusement très mal connue (même si les résultats prochainement publiés par la collaboration PLANCK accroîtront considérablement cette connaissance). Les mécanismes physiques à l'origine de cette émission polarisée sont très peu compris et les données observationnelles concernant la polarisation de cette émission d'avant-plan sont peu nombreuses (en ce sens les résultats de PILOT, en plus de PLANCK, seront très utiles).

Bien soustraire cette émission d'avant-plan qu'est la radiation des poussières interstellaires nécessite donc une meilleure compréhension des mécanismes physiques à l'origine de cette émission polarisée. Dans cette optique, les données haute fréquence que fournit le satellite PLANCK sont très riches d'informations sur cette composante d'émission galactique. En outre, une meilleure compréhension de cet avant-plan conditionne aussi les méthodes d'extraction du CMB : il ne s'agit pas seulement de soustraire les composantes d'avant-plan pour obtenir une carte du CMB, mais plutôt de séparer les différentes composantes afin d'extraire une carte du CMB d'une part, et une carte de l'émission des poussières d'autre part (en supposant ici que la composante synchrotron puisse être négligée).

Séparation paramétrique des composantes— Certaines méthodes de séparation de composantes opèrent sur les cartes des paramètres de Stokes Q et U : elles permettent d'extraire des cartes par composante à partir des cartes par fréquence. Cependant, le signal cosmologique de type B étant très faible, il est impossible d'en déceler sa contribution directement sur les cartes Q et U de la composante CMB¹. Pour cela, il est alors nécessaire d'estimer les spectres de puissance de mode E et de mode B à partir de ces cartes et de s'assurer que la contribution résiduelle des émissions d'avant-plan est bien plus faible que celle du mode B cosmologique.

La méthode de séparation paramétrique développée dans la Ref. [94], et baptisée MIRAMARE, opère directement sur les cartes de Q et U . Il est donc essentiel de tester son efficacité dans l'objectif d'une reconstruction du mode B . De plus, cette méthode se base sur une modélisation paramétrique des composantes, CMB, synchrotron et poussières galactiques. Compte tenu des incertitudes théoriques concernant l'émission des poussières galactiques, il est aussi nécessaire de tester la robustesse de cette méthode vis-à-vis de l'a priori théorique concernant cette composante d'avant-plan, et ce toujours avec la reconstruction du mode B comme objectif final.

Séparation de composantes et détection du mode B pour les expériences suborbitales— Dans le cadre des expériences suborbitales (ballon ou sol) dédiées à la polarisation du CMB (qui était encore en cours de mise en place durant l'étude), nous avons étudié les performances de cette méthode paramétrique sur la reconstruction du mode B [95]. Pour cela, nous avons mené des simulations numériques prenant en compte le niveau de bruit, la portion de ciel observée et les fréquences d'observations typiques des expériences ballon d'une part et des expériences au sol d'autre part. Différents modèles d'émission des poussières galactiques sont aussi pris en compte lors de la simulation des cartes du ciel à observer afin de pouvoir tester la robustesse de la méthode vis-à-vis de l'a priori théorique. Les spécificités instrumentales sont données dans le tableau 9.1 et les portions de ciel effectivement prises en compte sont représentées sur la figure 9.1.

1. Autrement dit, les cartes Q et U de la composante CMB étant dominées par le mode E , les tests statistiques permettant de s'assurer de l'efficacité de la séparation opérant directement sur les cartes assure essentiellement que la séparation est efficace au niveau du mode E uniquement.

	f_{sky}	$beam$	fréquence	bruit (homogène) par fréquence et pour un pixel de 3.5 arcmin.
Ballon (type EBEX)	1%	8 armin.	150, 250, 410 GHz	1.5, 4, 40 μK
Sol (type POLARBEAR)	2.5%	8 armin.	90, 150, 220 GHz	3, 3, 9 μK

TABLE 9.1 – Spécificités instrumentales pour une expérience ballon (inspirée par EBEX) et une expérience sol (inspirée par POLARBEAR).

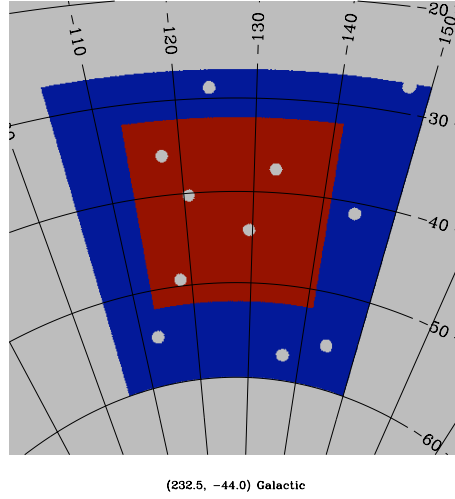


FIGURE 9.1 – Fraction de ciel observée par une expérience ballon type EBEX (région bordeaux) et par une expérience sol type POLARBEAR (région bordeaux et bleue).

Les cartes simulées contiennent trois composantes : le CMB, l'émission des poussières et l'émission synchrotron, auxquelles le bruit instrumental par fréquence est ajouté. Les cartes par composante, CMB d'une part et l'émission des poussières d'autre part, sont extraites des cartes par fréquence simulées à l'aide de MIRAMARE. Une carte de résiduel, représentant le niveau résiduel d'avant-plan dans les cartes CMB, peut aussi être extraite. Les spectres de puissance de mode E et B du CMB reconstruit et des avant-plans résiduels sont ensuite estimés à l'aide de X²PURE, l'erreur statistique sur la reconstruction des spectres de puissance angulaire étant obtenues à l'aide de simulation Monte-Carlo.

Un exemple des résultats pour la modélisation la plus simple de l'émission des poussières est représentés sur la figure 9.2 pour le cas d'une expérience ballon (milieu) et d'une expérience sol (droite). La courbe noire est le spectre de puissance de mode B que l'on cherche à reconstruire ; la courbe rouge est ce même spectre *estimé* par X²PURE partant de la carte de composante CMB reconstruite à l'aide de MIRAMARE ; la courbe bleue est le spectre de puissance des émissions d'avant-plan résiduelles dans la carte de composante CMB ; la bande grisée correspond aux incertitudes statistiques d'échantillonnage et de bruit. Pour une expérience type EBEX, les avant-plans sont effectivement suffisamment soustraits pour obtenir une bonne reconstruction, non-biaisée, du mode B . Cela est le cas car le canal à 410 GHz est dominé par l'émission des poussières : il peut servir de *template* pour soustraire cette émission des autres cartes, en particulier celle à 150 GHz où le CMB est plus intense, relativement aux autres composantes et aux autres fréquences. Cependant, pour une expérience type POLARBEAR, il y a encore beaucoup d'émission résiduelle aux grandes échelles angulaires. On observe d'ailleurs que pour cette gamme angulaire, $\ell = 20 - 60$, l'estimée du spectre de puissance angulaire de mode B est biaisée, non pas car l'estimateur de pseudospectre l'est intrinsèquement, mais compte tenu de la trop forte contribution des émissions résiduelles d'avant-plan. Cette émission résiduelle ne vient pas tant du fait que l'émission des poussières est mal soustraite mais du fait que le canal à 90 GHz contient de l'émission synchrotron qui n'est pas modélisé mais ne

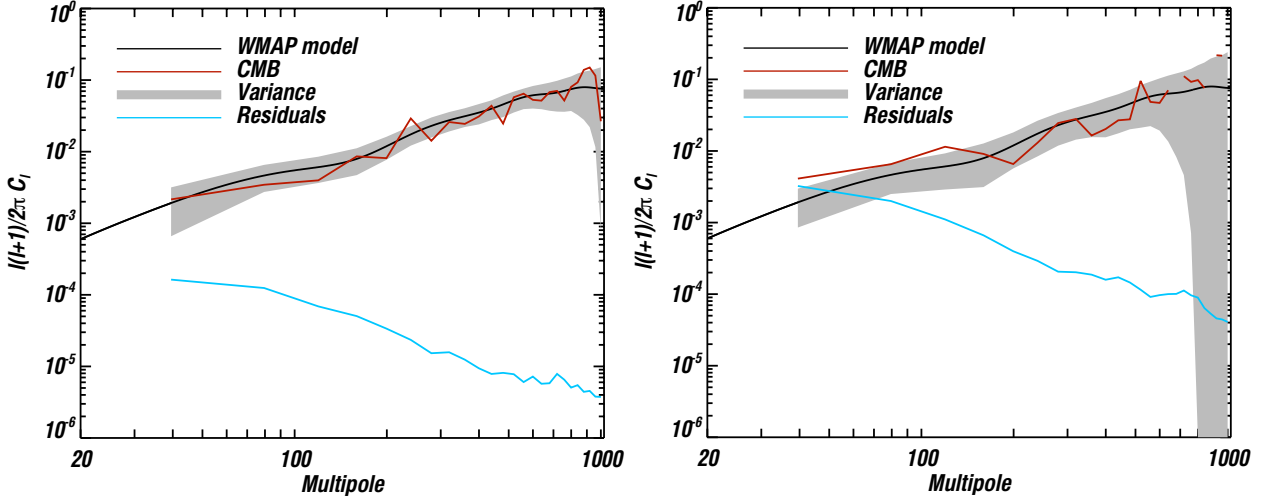


FIGURE 9.2 – *Gauche* : Reconstruction du spectre de puissance de mode B pour une expérience *ballon* et émission résiduelle d’avant plan. La courbe noire est le spectre de puissance de mode B que l’on cherche à reconstruire ; la courbe rouge ce même spectre *estimé* par $\chi^2\text{PURE}$ partant de la carte de composante CMB reconstruite à l’aide de MIRAMARE ; la courbe bleue est le spectre de puissance des émissions d’avant-plan résiduelles dans la carte de composante CMB ; la bande grisée correspond aux incertitudes statistiques d’échantillonnage et de bruit. *Droite* : Reconstruction du spectre de puissance de mode B pour une expérience *sol* et émission résiduelle d’avant plan.

peut plus être négligé. Nous avons alors montré qu’en utilisant un *template* extérieur comme source d’information concernant le synchrotron (par exemple un template venant des données basse fréquence de PLANCK), il est alors possible d’atteindre le même niveau de résiduel que pour une expérience comme EBEX [95].

En prenant en compte les erreurs statistiques ainsi que les erreurs systématiques dues aux émissions résiduelles d’avant-plan, nous avons montré qu’avec une expérience *ballon* (dont les spécificités sont données dans le tableau 9.1), il serait possible de détecter à 2σ un rapport tenseur-sur-scalaire de $r = 0.04$ [95]. Dans ce cas où les résiduels d’avant-plan contribuent aussi aux incertitudes statistiques, la matrice de covariance des spectres de mode B reconstruit est donnée par

$$\Sigma_{bb'} = \text{Cov}(\hat{C}_b^B, \hat{C}_{b'}^B) + C_b^{\text{CMB+noise}} C_{b'}^\Delta + C_b^\Delta C_{b'}^{\text{CMB+noise}} + C_b^\Delta C_{b'}^\Delta. \quad (9.8)$$

Le premier terme est simplement la covariance de l’estimateur des *pure* pseudospectres. Elle est obtenue par simulation Monte-Carlo utilisant $\chi^2\text{PURE}$. Les spectres $C_b^{\text{CMB+noise}}$ et C_b^Δ sont respectivement l’estimation du spectre de puissance du CMB et du bruit instrumental, et l’estimation du spectre de puissance de niveau résiduel d’avant-plan. Ils sont eux aussi estimés à l’aide de $\chi^2\text{PURE}$.

L’approche ci-dessus permet de prendre en compte l’impact des émissions astrophysique d’avant-plan lorsque lors niveau résiduel dans les cartes de CMB reconstruite ne biaise *pas* l’estimation de C_ℓ^B . Si il y a un biais significative – comme cela est le cas pour une expérience *sol* ayant un canal dans lequel le synchrotron domine –, il est possible d’utiliser un template extérieur traçant le synchrotron. L’efficacité de cette approche a été démontrée dans Ref. [95].

Il est *aussi* possible de prendre en compte les effets de l’émission résiduel d’avant-plan *au niveau du biais* lors de l’estimation des paramètres cosmologiques. Une fois les spectres de puissance angulaire reconstruits (avec donc des émissions résiduelles d’avant-plan), plutôt que de modéliser ces spectres comme dépendant uniquement des seuls paramètres cosmologiques, nous pouvons ajouter une composante résiduelle, que nous modélisons avec une loi de puissance $C_\ell^{\text{res}} = A_{\ell_0} \times (\ell/\ell_0)^\alpha$, et maximiser la vraisemblance prenant en compte ces deux paramètres supplémentaire [96]. Suivant cette approche, nous avons alors montré que cela n’affecte que minimalement les performances des expériences surorbitales telles que prévues si ces effets d’avant-plan ne sont pas pris en compte [96]. Ainsi, la détection à 2σ de $r = 0.04$ reste une prévision valide.

9.2 Violation de parité dans l'univers primordial [98]

9.2.1 Anisotropies du CMB

Comme nous l'avons déjà mentionné, les corrélations croisées TB et EB sont nulles dans le paradigme standard de la cosmologie. Toutefois, tout mécanisme impliquant une violation de la parité et affectant les anisotropies du fond diffus cosmologique va entraîner $C_\ell^{TB} \neq 0$ et $C_\ell^{EB} \neq 0$ [83, 84, 85, 86, 87]. Une classe générique de tels modèles prédit qu'il y a une production d'ondes gravitationnelles primordiales qui diffèrent selon leur état d'hélicité, engendrant des corrélations TB et EB non nulles. Dans ce cas, les anisotropies primaires du CMB sont données par

$$C_\ell^{XZ} = \int dk \{ \Delta_{\ell,S}^X(k, \eta_0) \Delta_{\ell,S}^Z(k, \eta_0) \mathcal{P}_S(k) + \Delta_{\ell,T}^X(k, \eta_0) \Delta_{\ell,T}^Z(k, \eta_0) [\mathcal{P}_T^R(k) + \varepsilon \times \mathcal{P}_T^L(k)] \}, \quad (9.9)$$

avec $X, Z = T, E$ ou B et $\Delta_\ell^{X,S(T)}$ la fonction de transfert pour les modes scalaires(tensoriels). Le nombre ε vaut $(+1)$ pour TT, EE, BB et TE et (-1) pour TB et EB . Les spectres de puissance primordiaux $\mathcal{P}_T^{R(L)}$ sont les spectres de modes tensoriels d'hélicité droite(gauche). Si l'on se focalise sur les spectres de puissance angulaire relatifs au mode B , nous obtenons :

$$C_\ell^{BB} = \int dk (\Delta_{\ell,T}^B(k, \eta_0))^2 \mathcal{P}_T^{(+)}(k), \quad (9.10)$$

$$C_\ell^{TB} = \int dk \Delta_{\ell,T}^T(k, \eta_0) \Delta_{\ell,T}^B(k, \eta_0) \mathcal{P}_T^{(-)}(k), \quad (9.11)$$

$$C_\ell^{EB} = \int dk \Delta_{\ell,T}^E(k, \eta_0) \Delta_{\ell,T}^B(k, \eta_0) \mathcal{P}_T^{(-)}(k), \quad (9.12)$$

avec

$$\mathcal{P}_T^{(\pm)}(k) = \mathcal{P}_T^R(k) \pm \mathcal{P}_T^L(k). \quad (9.13)$$

En se basant sur *e.g.* [85], il apparaît que seule l'amplitude globale des spectres tensoriels changent, et pas leur indice spectral. Ainsi, on peut les modéliser comme :

$$\mathcal{P}_T^{(\pm)}(k) = r_{(\pm)} \times \mathcal{A}_S \times \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_T}, \quad (9.14)$$

avec $n_T = n_R = n_L$ l'indice spectral et $r_{(\pm)} = r_R \pm r_L$ le rapport tenseur-sur-scalaire des modes $(\pm)$. De part leur définition, $r_{(-)} \leq r_{(+)}$. On retrouve la cosmologie standard pour $r_R = R_L$. Le niveau de violation de parité est donné par $\delta = r_{(-)}/r_{(+)}$ et il varie entre $-1 \leq \delta \leq 1$. Dans cette formulation, le paramètre $r_{(+)}$ est un analogue exact de r en cosmologie standard, dans le sens où par une mesure des seuls spectres TT, EE, TE et BB , il est impossible de savoir si c'est r ou $r_{(+)}$ qui est mesuré. Nous avons modifié le code CLASS pour inclure ce type de source tensorielle violant explicitement la parité [97]. Un exemple des résultats obtenus est présenté dans la figure 9.3 pour $r_{(+)} = 0.05$ et $\delta = 0.1, 0.5$ et 1 .

Evidemment, si les anisotropies primaires du CMB ont maintenant des corrélations croisées TB et EB non nulles, l'ensemble de ces six spectres vont être affectés par l'effet de lentillage gravitationnel. Adoptant le formalisme par développement en série de Taylor de la Ref. [92], nous trouvons pour les spectres finaux, incluant les anisotropies primaires et l'effet du lentillage gravitationnel, sont [98] :

– Pour la température :

$$\tilde{C}_\ell^{TT} = [1 + R^{TT}] C_\ell^{TT} + \sum_{\ell_1, \ell_2} F_{\ell\ell_1\ell_2}^{TT} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{TT} \quad (9.15)$$

avec

$$R^{TT} = -\frac{1}{2} \ell(\ell+1) \sum_{\ell_3} \ell_3(\ell_3+1) \frac{2\ell_1+1}{4\pi} C_{\ell_3}^{\phi\phi}, \quad (9.16)$$

$$F_{\ell\ell_1\ell_2}^{TT} = \frac{1}{4} \times N_{\ell, \ell_1, \ell_2} \times \frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (9.17)$$

et nous définissons

$$N_{\ell, \ell_1, \ell_2} = [\ell_1(\ell_1+1) + \ell_2(\ell_2+1) - \ell(\ell+1)]^2. \quad (9.18)$$

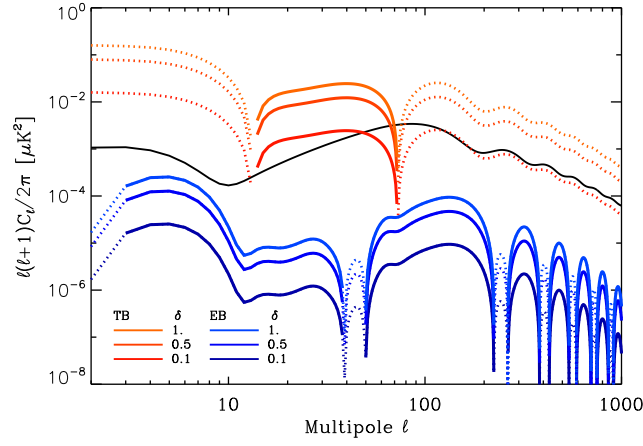


FIGURE 9.3 – Spectre de puissance angulaire *primaire* d'autocorrélation BB et de corrélations croisées TB et EB pour $r_{(+)} = 0.05$ et $\delta = 0.1, 0.5$ et 1 . L'indice spectral est pris égal à zéro.

– Pour les corrélations croisées température-polarisation :

$$\tilde{C}_\ell^{TE} = [1 + R^{TE}] C_\ell^{TE} + \sum_{\ell_1, \ell_2} F_{\ell\ell_1\ell_2}^{TE} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{TE}, \quad (9.19)$$

$$\tilde{C}_\ell^{TB} = [1 + R^{TB}] C_\ell^{TB} + \sum_{\ell_1, \ell_2} F_{\ell\ell_1\ell_2}^{TB} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{TB}, \quad (9.20)$$

avec

$$F_{\ell\ell_1\ell_2}^{TE} = F_{\ell\ell_1\ell_2}^{TB} = \frac{1}{8} \times N_{\ell, \ell_1, \ell_2} \times \frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi} \times \left(\begin{matrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \left[\left(\begin{matrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ 2 & 0 & -2 \end{matrix} \right) \pm \left(\begin{matrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ -2 & 0 & 2 \end{matrix} \right) \right]. \quad (9.21)$$

et

$$R^{TE} = R^{TB} = -\frac{1}{2} [\ell(\ell + 1) - 2] \sum_{\ell_3} \ell_3(\ell_3 + 1) \frac{2\ell_3 + 1}{4\pi} C_{\ell_3}^{\phi\phi}. \quad (9.22)$$

– Pour la polarisation :

$$\tilde{C}_\ell^{EE} = [1 + R^P] C_\ell^{EE} + \sum_{\ell_1, \ell_2} \left[F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(+)} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{EE} + F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(-)} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{BB} \right] \quad (9.23)$$

$$\tilde{C}_\ell^{BB} = [1 + R^P] C_\ell^{BB} + \sum_{\ell_1, \ell_2} \left[F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(+)} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{BB} + F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(-)} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{EE} \right] \quad (9.24)$$

$$\tilde{C}_\ell^{EB} = [1 + R^P] C_\ell^{EB} + \sum_{\ell_1, \ell_2} \left(F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(+)} - F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(-)} \right) C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{EB}, \quad (9.25)$$

avec

$$F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(\pm)} = \frac{1}{16} \times N_{\ell, \ell_1, \ell_2} \times \frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi} \left[\left(\begin{matrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ 2 & 0 & -2 \end{matrix} \right) \pm \left(\begin{matrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ -2 & 0 & 2 \end{matrix} \right) \right]^2 \quad (9.26)$$

et

$$R^P = -\frac{1}{2} [\ell(\ell + 1) - 4] \sum_{\ell_3} \ell_3(\ell_3 + 1) \frac{2\ell_3 + 1}{4\pi} C_{\ell_3}^{\phi\phi}. \quad (9.27)$$

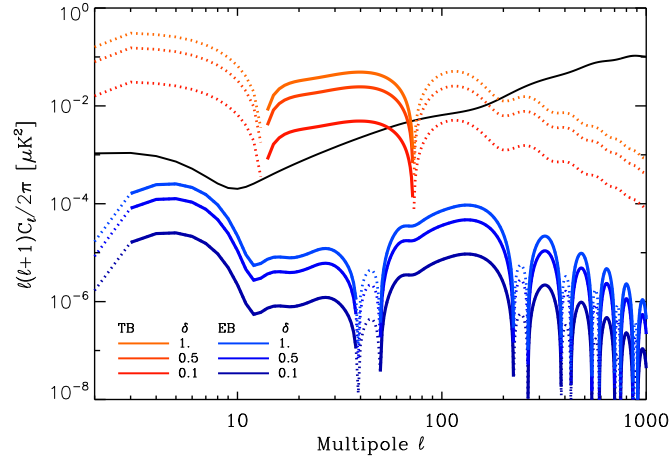


FIGURE 9.4 – Spectre de puissance angulaire BB , TB et EB avec lentillage gravitationnel pour $r_{(+)} = 0.05$ et $\delta = 0.1, 0.5$ et 1 .

Le point important est que, à ce niveau d'approximation, le spectre de puissance TE ne va pas « fuir » dans le spectre TB . Si tel avait été le cas, alors TE étant bien plus grand que TB (car TE est généré principalement par les modes scalaires alors que TB n'est généré que par les modes tensoriels), le signal traçant la violation de parité aurait été complètement noyé dans TE , qui lui ne trace pas cette violation. (Le même argument s'applique au cas de EB .) La figure 9.4 montre ces spectres de puissance une fois l'effet de lentillage gravitationnel pris en compte. Evidemment, le lentillage gravitationnel affecte significativement le spectre de puissance B à partir de $\ell \geq 150$ car du mode E est transféré dans le mode B . Toutefois, au niveau des corrélations croisées TB et EB , ni TT ni EE ne fuient vers TB ou EB et le lentillage n'affecte que marginalement les spectres de puissance angulaire.

9.2.2 Erreur statistique et effet systématique

Erreur statistique— Pour estimer les erreurs statistiques sur la reconstruction de $r_{(\pm)}$, nous employons de nouveau une approche par matrice de Fisher. Il y aura toutefois une différence par rapport au cas étudié dans la section précédente. Lorsque les corrélations TB et EB ne sont plus nuls, l'ensemble des six spectres de puissance angulaire sont corrélés. On peut facilement s'en convaincre partant de la covariance sur la reconstruction des C_ℓ telles que calculée par un comptage des modes :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\ell, \ell'}^{XY, X'Y'} = \text{Cov} \left(C_\ell^{XX'}, C_{\ell'}^{YY'} \right) &= \frac{\delta_{\ell, \ell'}}{(2\ell + 1)f_{\text{sky}}} \left[\left(C_\ell^{XX'} + \frac{N_\ell^{XX'}}{B_\ell^2} \right) \left(C_{\ell'}^{YY'} + \frac{N_{\ell'}^{YY'}}{B_{\ell'}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(C_\ell^{XY'} + \frac{N_\ell^{XY'}}{B_\ell^2} \right) \left(C_{\ell'}^{YX'} + \frac{N_{\ell'}^{YX'}}{B_{\ell'}^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (9.28)$$

avec X, X', Y et Y' prenant chacun les valeurs T, E ou B . Par exemple la covariance entre le spectre BB et le spectre TB vaut

$$[\Sigma]_{\ell \ell'}^{BB, TB} = \frac{2\delta_{\ell, \ell'}}{(2\ell + 1)f_{\text{sky}}} C_\ell^{TB} \left[C_\ell^{BB} + \frac{N_\ell^{BB}}{B_\ell^2} \right], \quad (9.29)$$

où nous supposons qu'il n'y a pas de bruit dans la corrélation croisée TB (cf. l'annexe C de [76] pour une discussion sur les conditions amenant à cela). Cela signifie que si l'on veut prendre en compte *toute* l'information statistique contenu dans les spectres de puissance angulaire, il est nécessaire de prendre en compte l'ensemble des six spectres et leurs corrélations croisées. En posant $\theta = (r_{(+)}, r_{(-)})$ le vecteur de paramètres, la matrice de Fisher devient

$$[\mathbf{F}]_{ij} = \sum_{A, A'} \sum_{\ell, \ell'} \frac{\partial C_\ell^A}{\partial \theta_i} \bigg|_{\theta_i = \bar{\theta}_i} \times [\Sigma^{-1}]_{\ell, \ell'}^{A, A'} \times \frac{\partial C_{\ell'}^{A'}}{\partial \theta_j} \bigg|_{\theta_j = \bar{\theta}_j}. \quad (9.30)$$

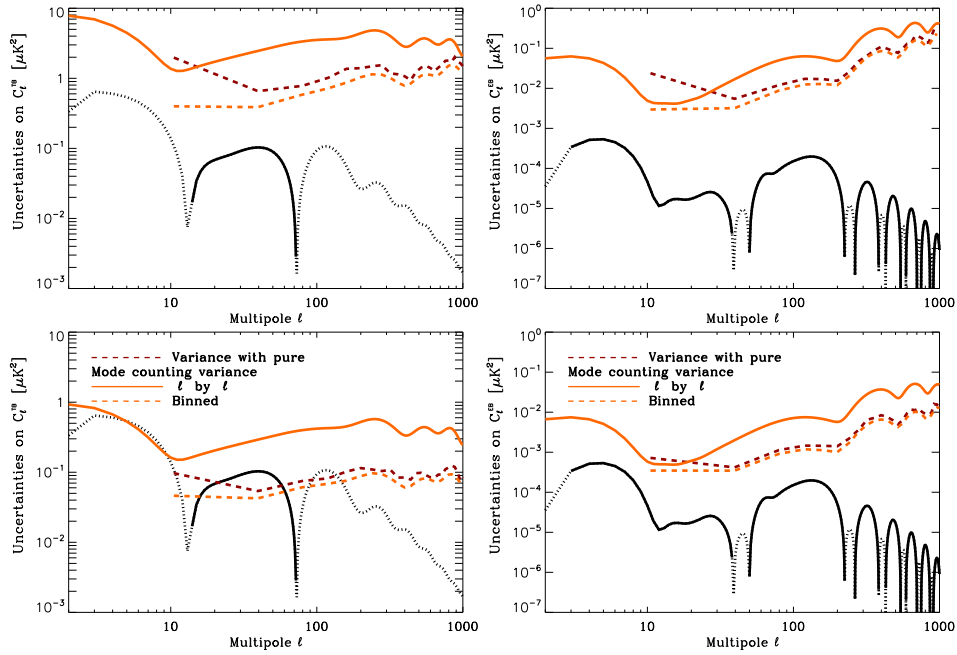


FIGURE 9.5 – Incertitudes sur la reconstruction des spectres TB (gauche) et EB (droite) pour deux configuration expérimentales : une expérience sol ou ballon (haut) et une future expérience satellite (bas). La courbe orange est l'incertitude par simple comptage des modes alors que la courbe rouge en tiret est l'incertitudes par estimation des pseudospectres purs. Cette dernière doit être comparé à l'incertitude obtenue par comptage des modes et intégrée dans les bandes de multipôles (courbe orange en tiret).

Les indices A, A' courent suivant les six spectres de puissance, *i.e.* TT, EE, BB, TE, TB et EB ². Finalement, le rapport signal-sur-bruit pour le paramètre θ_i marginalisé sur les autres paramètres est donné par $(S/N)_i = \theta_i / \sqrt{[\mathbf{F}^{-1}]_{ii}}$.

En toute généralité, les spectres TT, EE, TE et BB dépendent du paramètre $r_{(+)}$ qui, nous le rappelons, est l'analogue stricte de r . En pratique, nous ne considérerons aucune valeur de $r_{(+)}$ supérieure à la limite supérieure établi avec la température par les données PLANCK, *i.e.* $r_{(+)} \leq 0.1$ à 95% de niveau de confiance. Cela signifie que nous pouvons considérer que les trois spectres « scalaires », TT, EE , et TE sont indépendants de $r_{(+)}$ – nous rappelons qu'ils sont aussi indépendants de $r_{(-)}$ –, et seule $C_{\ell\ell}^{BB}$ sera une fonction de ce paramètre. Sa paramétrisation est identique à celle proposé dans la section précédente, remplaçant r par $r_{(+)}$. Les spectres TB et EB quant à eux ne dépendent que de $r_{(-)}$ et de façon linéaire. Nous les paramétrisons ainsi :

$$\tilde{C}_{\ell}^{TB(EB)}[r_{(-)}] = r_{(-)} \times \mathcal{T}_{\ell}^{TB(EB)}, \quad (9.31)$$

avec

$$\mathcal{T}_{\ell}^{TB} = [1 + R^{TB}] C_{\ell}^{TB}[r_{(-)} = 1] + \sum_{\ell_1, \ell_2} F_{\ell\ell_1\ell_2}^{TB} C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{TB}[r_{(-)} = 1], \quad (9.32)$$

et

$$\mathcal{T}_{\ell}^{EB} = [1 + R^P] C_{\ell}^{EB}[r_{(-)} = 1] + \sum_{\ell_1, \ell_2} \left(F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(+)} - F_{\ell\ell_1\ell_2}^{(-)} \right) C_{\ell_1}^{\phi\phi} C_{\ell_2}^{EB}[r_{(-)} = 1]. \quad (9.33)$$

2. Imaginons pour un temps que nous ne considérons que TB comme unique source de contrainte sur $r_{(-)}$. La matrice de Fisher serait alors :

$$[\tilde{\mathbf{F}}]_{r_{(-)}} = \sum_{\ell, \ell'} \frac{\partial C_{\ell}^{TB}}{\partial r_{(-)}} \times [\Sigma_{TB, TB}^{-1}]_{\ell, \ell'} \times \frac{\partial C_{\ell'}^{TB}}{\partial r_{(-)}}.$$

Or il est évident que si TB est corrélé à au moins un des autres spectres (et tel est le cas ici), $[\Sigma_{TB, TB}^{-1}]_{\ell, \ell'}$ n'est pas égal à $[\Sigma^{-1}]_{\ell, \ell'}^{TB, TB}$. Le même type d'argument s'applique tant que l'ensemble des six spectres ne sont pas pris en compte

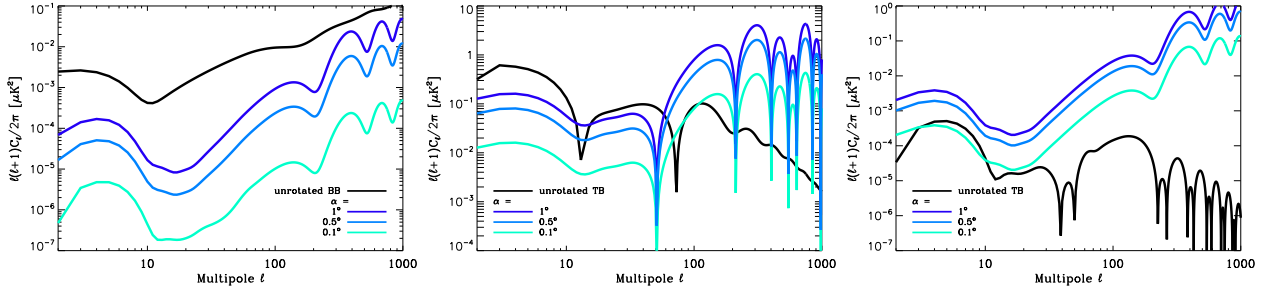


FIGURE 9.6 – Spectre de puissance angulaire intrinsèque du CMB (courbes noires) et contributions systématiques dues à une erreur d'étalonnage, $\tilde{C}_\ell^{A(\text{rot})} - \tilde{C}_\ell^A$ (courbes en couleur), pour les modes BB , TB et EB .

Le templates $\mathcal{T}_\ell^{TB(EB)}$ prennent en compte la source primaire et l'impact du lentillage gravitationnel.

La matrice de covariance sur la reconstruction des spectres de puissance angulaire peut être estimée de deux façon. Nous considérons de nouveau une approche naïve par comptage des modes, Eq. (9.28). Ensuite, nous utilisons l'outil $\chi^2\text{PURE}$ et des simulations Monte-Carlo pour obtenir une estimation plus réaliste des incertitudes et des corrélations. Comme pour l'étude précédente, les spectres de puissance angulaire sont reconstruits dans ce cas dans des bandes de multipôles, la première bande allant de $\ell = 2$ à $\ell = 20$ et les bandes suivantes, contiguës, ayant une largeur de 40. La figure 9.5 montre l'incertitude sur la reconstruction de C_ℓ^{TB} et C_ℓ^{EB} pour deux configurations expérimentales : une expérience sol ou ballon couvrant 1% du ciel avec un bruit de $5.75\mu\text{K-arcminute}$, et une expérience satellite couvrant 71% du ciel avec un bruit de $2.2\mu\text{K-arcminute}$ (les masques réalistes effectivement pris en compte sont donnés dans la figure 8.1. Cela montre que cette détection sera pratiquement impossible pour les expériences sol ou ballon en cours de déploiement, à moins d'intégrer sur une bande de multipôles de ~ 1000 . Pour une future mission satellite, la détection des corrélations TB est possible dans les trois premières bandes et la détection de EB le serait en intégrant sur une bande d'au moins quelques centaines de multipôles [98].

Effet systématique : étalonnage de l'orientation des polariseurs— La mesure de la polarisation du fond diffus cosmologique suppose, évidemment, des détecteurs sensible à la polarisation. Un facteur instrumental qu'il est important de connaître est donc l'angle d'orientation des polariseurs reprojeté sur la sphère céleste. L'étalonnage au sol de cette orientation est évidemment entaché d'incertitude qui vont se traduire par une rotation apparente systématique du plan de polarisation effectif du CMB : $P_\pm \rightarrow P_\pm^{(\text{obs})} = e^{\pm 2i\Delta\psi} \times P_\pm$ où $\Delta\psi$ est l'erreur d'étalonnage systématique sur l'orientation des polariseurs [67, 82, 99]. Tout comme n'importe quel effet qui tourne le plan de polarisation (par exemple la rotation Faraday), cela entraîne des mélanges de E dans B et vice-versa. Si l'on prend en compte le fait que le CMB possède des corrélations TB et EB intrinsèques, les spectres de puissances affectés par cet écart systématique dans l'étalonnage sont, en fonction des spectres de puissance intrinsèques du CMB :

$$\tilde{C}_\ell^{TT(\text{rot})} = \tilde{C}_\ell^{TT} \quad (9.34)$$

$$\tilde{C}_\ell^{TE(\text{rot})} = \cos(2\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{TE} - \sin(2\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{TB}, \quad (9.35)$$

$$\tilde{C}_\ell^{TB(\text{rot})} = \sin(2\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{TE} + \cos(2\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{TB}, \quad (9.36)$$

$$\tilde{C}_\ell^{EE(\text{rot})} = \cos^2(2\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{EE} + \sin^2(2\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{BB} + \sin(4\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{EB}, \quad (9.37)$$

$$\tilde{C}_\ell^{BB(\text{rot})} = \sin^2(2\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{EE} + \cos^2(2\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{BB} - \sin(4\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{EB}, \quad (9.38)$$

$$\tilde{C}_\ell^{EB(\text{rot})} = \frac{1}{2}\sin(4\Delta\psi)(\tilde{C}_\ell^{EE} - \tilde{C}_\ell^{BB}) + \cos(4\Delta\psi)\tilde{C}_\ell^{EB}. \quad (9.39)$$

Les spectres de puissance intrinsèques du CMB, $\tilde{C}_\ell^A$, et leur contribution systématique dues à une erreur d'étalonnage, $\tilde{C}_\ell^{A(\text{rot})} - \tilde{C}_\ell^A$, sont représentés sur la figure 9.6 pour $\Delta\psi = 0.1, 0.5$ et 1 degré. Cela montre en particulier que le spectre EB est très rapidement dominé par cette contribution systématique instrumentale.

r_+	0.2	0.1	0.07	0.05	0.03	0.007
r_-						
0.2	<u>10.6</u>					
0.1	<u>3.8</u>	<u>5.66</u>				
0.07	<u>2.57</u>	<u>3.6</u>	<u>4.3</u>			
0.05	1.8	2.46	2.91	3.4		
0.03	1.07	1.44	1.68	1.95	<u>2.44</u>	
0.007	0.25	0.33	0.39	0.44	0.54	0.94

TABLE 9.2 – Rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ et marginalisé sur $r_{(+)}$ dans le cas d'une future expérience satellite. La covariance sur l'estimation des spectres de puissance angulaire est obtenue par simple comptage des modes, cf. Eq. (9.28).

9.2.3 Détecter la violation de parité avec les corrélations TB et EB

Expérience satellite : erreur statistique— Dans un premier temps, nous nous focalisons sur les erreurs statistiques uniquement et supposons un étalonnage parfait de l'orientation des polariseurs, $\Delta\psi = 0$. Le tableau 9.2 rassemble les valeurs du rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ marginalisé sur $r_{(+)}$ en calculant la matrice de covariance des spectres de puissance estimés à l'aide d'un comptage de mode. On notera toutefois que ces deux paramètres sont peu corrélés puisque

$$\frac{\mathbf{F}_{r_{(+)}, r_{(-)}}}{\sqrt{\mathbf{F}_{r_{(+)}, r_{(+)}} \mathbf{F}_{r_{(-)}, r_{(-)}}}} \sim 10^{-3}.$$

Cependant, l'incertitude sur $r_{(-)}$ dépend de la valeur de $r_{(+)}$: un plus grand $r_{(+)}$ signifie une amplitude de C_ℓ^{BB} plus élevée. Ainsi, les incertitudes sur la reconstruction de $C_\ell^{TB(EB)}$, proportionnelles à

$$\sqrt{(C_\ell^{TB(EB)})^2 + C_\ell^{BB} C_\ell^{TT(EE)}},$$

sont plus élevées et $(S/N)_{r_{(-)}}$ plus faible. Une détection à *au moins* 2σ – correspondant à $\sim 95\%$ de niveau de confiance – est garantie si $r_{(+)} \geq 0.05$ et $r_{(-)} \geq 0.05$. Une valeur de $r_{(-)} = 0.03$ apparaît comme la valeur transitoire pour la détection de la violation de parité dans le mode tensoriel, le rapport signal-sur-bruit variant de 1.44 à 2.44 pour $r_{(-)} = 0.03$ et $r_{(+)}$ allant de 0.03 à 0.1.

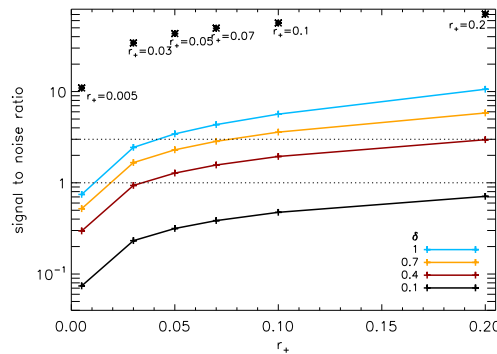


FIGURE 9.7 – Rapport signal-sur-bruit pour $r_{(+)}$ (croix noires) et $r_{(-)}$ (lignes) pour quatre valeurs fixées de δ dans le cas d'une future expérience satellite. La covariance sur les spectres de puissance angulaire est celle venant du comptage des modes.

La figure 9.7 représente ce même rapport signal-sur-bruit, $(S/N)_{r_{(-)}}$, pour différente valeur de $r_{(+)}$ et pour un niveau de violation de parité variant de $\delta = 10\%$ à $\delta = 100\%$. Une violation de 70% est détectable à 3σ – correspondant à $\sim 99\%$ de niveau de confiance – et une détection de 50% de violation de parité à 2σ est possible si $r_{(+)}$ est supérieur ou égal à 0.05.

De façon plus réaliste, les valeurs du rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ prenant en compte les incertitudes sur la reconstruction des spectres de puissance venant de l'estimation par *pseudospectre pur* sont présentées dans le tableau 9.3. Dans le cas le plus optimiste de $r_{(+)} = 0.2$ et 100% de violation de parité, une détection à plus de 5σ reste possible alors qu'une détection à plus de 2σ de 50% de violation de parité est atteignable. Dans un cas intermédiaire, $r_{(+)} = 0.1$ et 100% de violation de parité, la détection est possible à 3.67σ – à comparer à une détection à 5.66σ en sous-évaluant la covariance par le comptage des modes $-$. Si $r_{(+)} = 0.05$, une détection d'un niveau de violation de parité de 100% reste possible à plus de 2σ . Un niveau de violation de parité de 50% est marginalement détectable, de 1.17σ à 1.5σ , pour $r_{(+)} = 0.05$ et $r_{(+)} = 0.1$ respectivement. Le cas $r_{(+)} = 0.05$ et $\delta = 50\%$ (*i.e.* $r_{(-)} = 0.025$, constitue le niveau limite de détection : pour des valeurs plus faibles, le rapport signal-sur-bruit devient plus petit que 1. Si l'on considère qu'il n'y a pas de violation de parité, $\delta = 0$, l'erreur sur la reconstruction de $r_{(-)}$ pour $r_{(+)} = 0.05$, est de $\sigma_{r_{(-)}} = 0.023$. Cela signifie qu'une détection de *TB* et *EB* compatible avec $C_\ell^{TB} = C_\ell^{EB} = 0$, place une limite supérieure à 95% de niveau de confiance sur la violation de parité : $r_{(-)} \leq 0.046$ à 95% CL, correspondant à $\delta \leq 0.92$ à 95% CL. Pour le cas plus optimiste de $r_{(+)} = 0$, une détection nulle des spectres *TB* et *EB* conduirait à une limite supérieure sur la violation de parité de $\delta \leq 0.39$, toujours à 95% de niveau de confiance.

	$\delta = 1$	$\delta = 0.5$
$r_{(+)} = 0.2$	5.46	2.5
$r_{(+)} = 0.1$	3.67	1.51
$r_{(+)} = 0.05$	2.35	1.11

TABLE 9.3 – Rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ et marginalisé sur $r_{(+)}$ dans le cas d'une future expérience satellite. La covariance sur la reconstruction des spectres de puissance angulaire est celle obtenue par méthode des pseudospectres purs.

Expérience satellite : impact de l'étalonnage de l'orientation des polariseurs– Le premier impact d'un mauvais étalonnage de l'orientation des détecteurs polarisés sera de biaiser l'estimation du paramètre $r_{(-)}$. On peut en effet retrouver ce paramètre en minimisant le χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{A,A'} \sum_{b,b'} \left(C_b^{A \text{ (th)}} - C_b^{A \text{ (obs)}} \right)^\dagger \times [\mathbf{\Sigma}^{-1}]_{b,b'}^{A,A'} \times \left(C_{b'}^{A' \text{ (th)}} - C_{b'}^{A' \text{ (obs)}} \right), \quad (9.40)$$

avec $C_b^{A \text{ (th)}}$ les spectres de puissance théoriques, fonctions des paramètres cosmologique du modèle, et $C_b^{A \text{ (obs)}}$ les spectres de puissance angulaire estimés à partir des cartes du ciel des paramètres de Stokes. Les indices A et A' prennent les valeurs *TT*, *EE*, *BB*, *TE*, *TB* et *EB*. Si l'on ne prend pas en compte cet effet systématique, les spectres théoriques seront modélisés comme $\tilde{C}_b^A$, et non comme $\tilde{C}_b^{A \text{ (rot)}}$, la minimisation du χ^2 ,

$$\sum_{A,A'} \sum_{b,b'} \left(\frac{\partial C_b^{A \text{ (th)}}}{\partial r_{(-)}} \right)^\dagger \times [\mathbf{\Sigma}^{-1}]_{b,b'}^{A,A'} \times \left(C_{b'}^{A' \text{ (th)}} - C_{b'}^{A' \text{ (obs)}} \right) = 0, \quad (9.41)$$

fournira une estimation biaisé de $r_{(-)}$. Dans l'expression ci-dessus, les spectres théoriques sont indépendant de $\Delta\psi$ mais les spectres estimés entrant dans la matrice de covariance dépendront de $\Delta\psi$, *i.e.* $C_b^{A \text{ (obs)}} = \tilde{C}_b^{A \text{ (rot)}}[\bar{r}_{(\pm)}, \bar{\Delta}\psi]$.

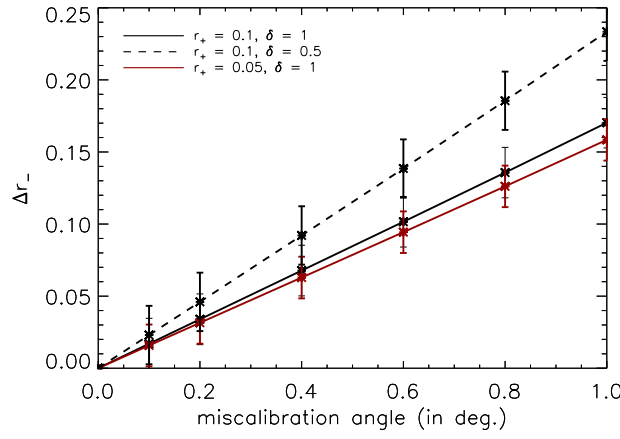


FIGURE 9.8 – Biais sur la reconstruction de $r_{(-)}$ du à une erreur d'étalonnage de l'orientation des polariseurs en fonction de l'angle d'erreur $\delta\psi$.

L'incertitude sur cette estimation biaisée sera donnée par l'inverse de la matrice d'information de Fisher

$$[\mathbf{F}]_{r_{(\pm)}r_{(\pm)}} = \sum_{A,A'} \sum_{\ell,\ell'} \frac{\partial \tilde{C}_{\ell}^A}{\partial r_{(\pm)}} \times [\Sigma^{-1}]_{\ell,\ell'}^{A,A'} \times \frac{\partial \tilde{C}_{\ell'}^{A'}}{\partial r_{(\pm)}}. \quad (9.42)$$

La figure 9.8 montre le biais sur la reconstruction de $r_{(-)}$ en fonction de $\Delta\psi$ et pour différentes valeurs de $r_{(+)}$ et de $r_{(-)}$. Cela montre que pour $\Delta\psi \geq 0.1$ degré, la mesure de $r_{(-)}$ est biaisée avec une incertitude statistique plus petite que ce biais. Cela conduirait donc à une fausse détection de la violation de parité. Pour $\Delta\psi \geq 0.2$ degré, cette fausse détection conduirait même à $r_{(-)} > r_{(+)}$.

Si les spectres de puissance angulaires sont proprement modélisés, c'est-à-dire $C_b^A \text{ (th)} = \tilde{C}_b^A \text{ (rot)}$ et le χ^2 est proprement minimisé, c'est-à-dire minimiser relativement aux trois paramètres $\theta_i = (r_{(+)}, r_{(-)}, \Delta\psi)$, l'estimation finale des paramètres est non-biaisée. Toutefois, les paramètres $r_{(\pm)}$ sont potentiellement dégénérés avec $\Delta\psi$ et les incertitudes sur les paramètres $r_{(\pm)}$ seront a priori élargies puisque marginalisées sur $\Delta\psi$. On peut cependant montrer la chose suivante [98]. Si les conditions suivantes sont réunies :

- la covariance sur les spectres de puissance angulaire est donnée par le comptage des modes,
- l'ensemble des corrélations entre les *six* spectres de puissance angulaire est proprement pris en compte dans $[\Sigma]_{\ell,\ell'}^{A,A'}$,
- cette covariance est dominée par la variance d'échantillonnage,

alors la matrice de Fisher donnant l'inverse de la covariance sur θ_i est donnée par (nous rappelons que le vecteur de paramètre est organisé comme $r_{(+)}$, $r_{(-)}$ et $\Delta\psi$) :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{r_{(+)},r_{(+)}} & F_{r_{(+)},r_{(-)}} & \epsilon f(r_{(\pm)}) \\ F_{r_{(+)},r_{(-)}} & F_{r_{(-)},r_{(-)}} & \epsilon g(r_{(\pm)}) \\ \epsilon f(r_{(\pm)}) & \epsilon g(r_{(\pm)}) & F_{\Delta\psi,\Delta\psi} \end{pmatrix}, \quad (9.43)$$

avec $F_{r_{(\pm)},r_{(\pm)}}$ la matrice de Fisher obtenue *sans* erreur d'étalonnage. La quantité ϵ a été évaluée numériquement et elle est de l'ordre de 10^{-5} . Les fonctions f et g ne dépendent *pas* de la valeur de $\Delta\psi$ et elles sont de l'ordre de $\sqrt{F_{r_{(+)},r_{(+)}}}$ et $\sqrt{F_{r_{(-)},r_{(-)}}$ respectivement. Autrement dit, si les conditions ci-dessus sont respectées, l'incertitude sur les paramètres $r_{(\pm)}$ n'est pas affectée par le fait que l'erreur d'étalonnage entre dans la minimisation globale du χ^2 puisque : i) les éléments $r_{(+)}, r_{(-)}$ sont égaux aux éléments *sans* erreur d'étalonnage, ii) les corrélations entre $r_{(\pm)}$ et $\Delta\psi$ sont très faibles et iii) elles sont indépendantes de la valeur de $\Delta\psi$. On peut s'en convaincre assez facilement ainsi : l'angle $\Delta\psi$ agit comme une rotation sur les pseudomultipôles qui a pour effet de redistribuer l'information sur différents spectres de puissance angulaire. Toutefois, dans la limite où le bruit instrumentale est sous-dominant dans la covariance, cette information est en pratique totalement retrouvée par la prise en compte de l'ensemble des corrélations croisées entre tous les spectres de puissance angulaire.

Supposons que la matrice de covariance sur la reconstruction des spectres de puissance angulaire partant des cartes des paramètres de Stokes est bien modélisée par le comptage des modes. La matrice de Fisher autour du maximum du χ^2 peut alors s'exprimer comme :

$$[\mathbf{F}]_{ij} = \frac{f_{\text{sky}}}{2} \sum_{\ell, m} \text{Tr} \left[\frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}^{(\text{obs})}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}_{\ell m}^{(\text{obs})-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}^{(\text{obs})}}{\partial \theta_j} \mathbf{C}_{\ell m}^{(\text{obs})-1} \right],$$

avec $\mathbf{C}_{\ell m}^{(\text{obs})} = \langle \mathbf{a}_{\ell m}^{(\text{obs})} \mathbf{a}_{\ell m}^{(\text{obs})\dagger} \rangle$ la matrice de covariance des multipôles de T , E et B – c'est-à-dire la covariance des cartes exprimées dans l'espace des harmoniques sphériques –. Si il y a une erreur de calibration globale, c'est multipôles sont affectés par une matrice de rotation :

$$\mathbf{a}_{\ell m}^{(\text{obs})} = \mathbf{R}(2\Delta\psi) \times \mathbf{a}_{\ell m} + \mathbf{n}_{\ell m},$$

avec

$$\mathbf{a}_{\ell m}^{(\text{obs})} = \begin{pmatrix} a_{\ell m}^{T(\text{obs})} \\ a_{\ell m}^{E(\text{obs})} \\ a_{\ell m}^{B(\text{obs})} \\ a_{\ell m} \end{pmatrix}$$

les multipôles observés (donc « tournés » par $\Delta\psi$ et affecté par le bruit instrumental),

$$\mathbf{a}_{\ell m} = \begin{pmatrix} a_{\ell m}^T \\ a_{\ell m}^E \\ a_{\ell m}^B \\ a_{\ell m} \end{pmatrix}$$

les multipôles intrinsèques du CMB (non tournés et non bruités),

$$\mathbf{n}_{\ell m} = \begin{pmatrix} n_{\ell m}^T \\ n_{\ell m}^E \\ n_{\ell m}^B \\ n_{\ell m} \end{pmatrix}$$

le bruit instrumental, et,

$$\mathbf{R}(2\Delta\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\Delta\psi) & -\sin(2\Delta\psi) \\ 0 & \sin(2\Delta\psi) & \cos(2\Delta\psi) \end{pmatrix}$$

une matrice de rotation décrivant l'impact de l'erreur d'étalonnage. Puisque c'est une matrice de rotation, elle vérifie : $\mathbf{R}^\dagger(2\Delta\psi) = \mathbf{R}(-2\Delta\psi) = \mathbf{R}^{-1}(2\Delta\psi)$. En définissant $\mathbf{C}_{\ell m} = \langle \mathbf{a}_{\ell m} \mathbf{a}_{\ell m}^\dagger \rangle$ et $\mathbf{N}_{\ell m} = \langle \mathbf{n}_{\ell m} \mathbf{n}_{\ell m}^\dagger \rangle$, toutes deux supposées diagonales par bloc – ce qui suppose que le bruit est homogène –, on montre facilement que :

$$\mathbf{C}_{\ell m}^{(\text{obs})} = \mathbf{R}(2\Delta\psi) \mathbf{C}_{\ell m} \mathbf{R}^{-1}(2\Delta\psi) + \mathbf{N}_{\ell m}.$$

Si l'on suppose enfin que la covariance est dominée par la variance d'échantillonnage, c'est-à-dire la variance venant du CMB lui-même, le bruit instrumental peut être négligé et : $\mathbf{C}_{\ell m}^{(\text{obs})} = \mathbf{R}(2\Delta\psi) \mathbf{C}_{\ell m} \mathbf{R}^{-1}(2\Delta\psi)$ et $\mathbf{C}_{\ell m}^{(\text{obs})-1} = \mathbf{R}(2\Delta\psi) \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \mathbf{R}^{-1}(2\Delta\psi)$.

Partant de là, on obtient tout d'abord les éléments suivant pour la matrice de Fisher :

$$[\mathbf{F}]_{r_{(\pm)} r_{(\pm)}} = \frac{f_{\text{sky}}}{2} \sum_{\ell, m} \text{Tr} \left[\frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}}{\partial r_{(\pm)}} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}}{\partial r_{(\pm)}} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \right],$$

puisque toutes les rotation se simplifie dans la trace ci-dessus. Cela signifie que le bloc $(r_{(+)}, r_{(-)})$ de la matrice de Fisher est exactement égal à la matrice de Fisher *sans* erreur d'étalonnage de l'orientation des polariseurs. Si l'on s'intéresse aux termes croisés entre $r_{(\pm)}$ et $\Delta\psi$, *i.e.*

$$[\mathbf{F}]_{r_{(\pm)} \Delta\psi} = \frac{f_{\text{sky}}}{2} \sum_{\ell, m} \text{Tr} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta\psi} \mathbf{C}_{\ell m} \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R} \mathbf{C}_{\ell m} \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \Delta\psi} \right) \times \mathbf{R} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}}{\partial r_{(\pm)}} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \right],$$

on utilise le fait qu'il s'agit de la trace d'un produit de matrice et le fait que $\mathbf{M}^{-1} (\partial \mathbf{M}) + (\partial \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{M} = 0$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}]_{r_{(\pm)} \Delta\psi} &= \frac{f_{\text{sky}}}{2} \sum_{\ell, m} \text{Tr} \left[\mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta\psi} \frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}}{\partial r_{(\pm)}} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} + \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \Delta\psi} \mathbf{R} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}}{\partial r_{(\pm)}} \right] \\ &= \frac{f_{\text{sky}}}{2} \sum_{\ell, m} \text{Tr} \left[\underbrace{\mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta\psi}}_{\mathbf{M}} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}}{\partial r_{(\pm)}} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} - \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_{\ell m}}{\partial r_{(\pm)}}}_{\mathbf{D}_{\ell m}} \right) \right], \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{D}_{\ell m}$ est nécessairement antisymétrique et on peut montrer que

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathbf{M}$ est aussi antisymétrique, on obtient donc :

$$[\mathbf{F}]_{r_{(\pm)}\Delta\psi} = 2f_{\text{sky}} \sum_{\ell,m} [\mathbf{D}_{\ell m}]_{2,3}.$$

Comme $\mathbf{D}_{\ell m}$ ne dépend pas de $\Delta\psi$, il en va de même de $[\mathbf{F}]_{r_{(\pm)},\Delta\psi}$.

Afin de compléter le calcul, on notera que

$$[\mathbf{F}]_{\Delta\psi,\Delta\psi} = f_{\text{sky}} \sum_{\ell,m} \left\{ \text{Tr} \left[\frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \Delta\psi} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \Delta\psi} \mathbf{R} \right] + \text{Tr} \left[\mathbf{R} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta\psi} \mathbf{C}_{\ell m} \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \Delta\psi} \right] \right\} \quad (9.44)$$

$$= f_{\text{sky}} \sum_{\ell,m} \text{Tr} \left[\mathbf{R} \mathbf{C}_{\ell m}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta\psi} \mathbf{C}_{\ell m} \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \Delta\psi} \right], \quad (9.45)$$

où l'on vérifie facilement que le produit $\left(\frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \Delta\psi} \mathbf{R} \right)^2$ est de trace nulle.

Dans le cas d'une future expérience satellite dédiée à la polarisation primordiale du CMB, la variance d'échantillonnage domine largement la variance du bruit instrumental aux grandes échelles angulaires. Or la plupart de nos contraintes sur $r_{(\pm)}$ proviennent justement de ces grandes échelles. Si en théorie le bruit instrumental contribue nécessairement à la covariance Σ – et contribue même de façon dominante aux petites échelles angulaires –, en pratique, nous sommes dans une situation où c'est la variance d'échantillonnage qui domine. Pour $\Delta\psi$ variant de 0 degré à 1 degré, une étude numérique de la matrice de Fisher montre que le rapport signal-sur-bruit sur $r_{(-)}$ ne diminue que de $\sim 10^{-5}$, en comparaison des résultats obtenus précédemment où l'effet de $\Delta\psi$ n'était pas pris en compte. Cela confirme notre intuition précédente. Par ailleurs, nous pouvons s'assurer de cela par les deux tests suivants : si le bruit instrumental n'est plus négligeable, alors le $(\text{S/N})_{r_{(-)}}$ doit décroître pour des valeurs de plus en plus élevé de $\Delta\psi$, et, si l'ensemble des corrélations entre les six spectres de puissance angulaire n'est pas pris en compte, de nouveau le $(\text{S/N})_{r_{(-)}}$ doit décroître pour des valeurs de plus en plus élevé de $\Delta\psi$. Nous avons vérifié (en augmentant le bruit instrumental d'un facteur 100 d'une part, et en ne prenant en compte que le sous block BB , TB , EB de la matrice de covariance Σ d'autre part), que tel était le cas. Cela signifie que les niveaux de détection d'une violation de parité dans les modes tensoriels primordiaux fournis dans le paragraphe précédent *avec la covariance en comptage des modes*, et pour lesquels l'effet d'une erreur d'étalonnage de l'orientation des détecteurs polarisés n'était pas prise en compte, reste pertinent.

Cet état de fait n'est toutefois vrai que dans l'hypothèse où la covariance sur la reconstruction des spectres de puissance angulaire est donné par le comptage des modes. Cependant, si l'on considère, de façon plus réaliste, la covariance obtenue par reconstruction des spectres de puissance angulaire avec la méthode des pseudospectres purs, l'angle d'orientation, $\Delta\psi$, et le niveau de violation de parité, δ , sont alors dégénérés. Pour les cas $r_{(+)} = 0.1$ et 0.2 et $\delta = 1$, le rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)} = \delta \times r_{(+)}$ et marginalisé sur les paramètres $r_{(+)}$ et $\Delta\psi$, est dégradé d'un facteur ~ 1.09 pour $\Delta\psi = 0.1$ degré et d'un facteur ~ 2.4 pour $\Delta\psi = 1$ degré. La raison semble être que, par méthode des pseudospectres, il n'est plus possible d'accéder à l'ensemble des corrélations compte tenu du mélange des modes et du *binning*. Une partie de l'informations contenues dans ces corrélations est inévitablement perdue, ce qui était une des conditions pour que $r_{(-)}$ et $\Delta\psi$ soient faiblement dégénérés.

Expérience sol ou ballon– Dans le cas d'une expérience sol ou ballon, les rapports signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ et marginalisé sur $r_{(+)}$ sont résumés dans le tableau 9.4. Ils sont obtenus en prenant le comptage des modes pour estimer la covariance sur la reconstruction des spectres de puissance angulaire. Même dans le cas le plus optimiste (à la fois théoriquement parlant, considérant les valeurs $r_{(+)} = r_{(-)} = 0.1$, et observationnellement parlant, le comptage des modes sous-estimant la covariance), ce rapport reste plus petit que l'unité et une détection de la violation de parité est donc impossible.

Si de façon plus réaliste, la covariance est celle obtenue par une estimation par pseudospectre pur des spectres de puissance angulaire, nous obtenons $(\text{S/N})_{r_{(-)}} = 0.2$. Si $r_{(-)} = 0$, l'erreur sur sa mesure est $\sigma_{r_{(-)}} = 0.36$. Cela

$r_{(-)}$	$r_{(+)}$	0.2	0.1	0.07	0.05	0.03	0.007
0.2		1.22					
0.1		0.43	0.64				
0.07		0.29	0.4	0.487			
0.05		0.2	0.28	0.326	0.38		
0.03		0.12	0.16	0.188	0.216	0.27	
0.007		0.03	0.037	0.043	0.049	0.06	0.1

TABLE 9.4 – Rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ et marginalisé sur $r_{(+)}$ dans le cas d'expériences sol ou ballon couvrant $\sim 1\%$ du ciel. La covariance sur l'estimation des spectres de puissance angulaire est obtenue par simple comptage des modes, cf. Eq. (9.28).

signifie que la non-détection de TB et EB place une limite supérieure sur le niveau de violation de parité à 68% de niveau de confiance de $|\delta| \leq 7.2$. Cette limite supérieure sur δ est supérieure à un, ce qui n'est pas possible d'un point de vue théorique. Cela signifie qu'avec les données prises par une expérience sol ou ballon, non seulement la détection de ce type de violation de parité est impossible, mais il est aussi impossible de placer une limite supérieure sur ce niveau avec une précision à 2σ .

9.2.4 Contrainte sur les modèles de violation de parité

Violation de parité dans le secteur gravitationnel— Dans le contexte de la reformulation de Ashtekar de la relativité générale implémentée dans le cadre inflationnaire [85], le paramètre δ est directement relié à la valeur du paramètre de Barbero-Immirzi, γ . On notera deux conditions nécessaires pour avoir effectivement des modes tensoriels non symétrique par parité : d'abord que les perturbations soit traités dans un cadre *quantique*, ce cadre étant ici le cadre usuel de la quantification d'un champ en espace courbe [8]; ensuite que le paramètre de Barbero-Immirzi est une partie imaginaire non nulle. Du point de vue de la gravité quantique à boucles, une valeur strictement réelle de ce paramètre est privilégiée. Le cadre reste toutefois spéculatif et cette violation de parité doit plus être vue comme un test de la nature de ce paramètre, indépendant de la quantification par les boucles.

Pour simplifier, nous nous limiterons au cas où ce paramètre est imaginaire pur. Son module est directement lié au module de δ par $|\gamma| = (1 \pm \sqrt{1 - \delta^2}) / |\delta|$. On notera qu'il y a une dégénérescence totale entre deux gammes de valeur de $|\gamma|$: $|\delta|$ varie de 0 à 1 pour $|\gamma|$ allant de 0 à 1, puis varie de 1 à 0 pour $|\gamma|$ allant de 1 à ∞ . La limite de détection à 1σ correspond à $\delta = 0.5$. Cela signifie que la violation de parité dans ce cadre de gravitation chirale n'est détectable que si $0.26 \leq |\gamma| \leq 3.75$, les limites de cet interval donnant une détection à 1σ . Par ailleurs, une mesure de TB et EB compatible avec zéro fournit une limite supérieure à 95% CL de $\delta \leq 0.92$. Une telle situation observationnelle signifierait que la gamme $0.66 \leq |\gamma| \leq 1.5$ serait exclue à 95% CL (la gamme exclue à 68% CL serait $0.24 \leq |\gamma| \leq 4.1$). Pour le cas $r_{(+)} = 0.2$, des spectres de puissance angulaire TB et EB cohérent avec zéro excluerait une gamme à 95% de niveau de confiance de $0.2 \leq |\gamma| \leq 4.9$ (et la zone d'exclusion à 68% de niveau de confiance serait $0.098 \leq |\gamma| \leq 10.1$).

Inflation avec un champ pseudoscalaire— Dans le contexte d'une inflation initiée par un champ pseudoscalaire, le niveau de violation de parité est [84] :

$$|\delta| = \frac{8.6 \times 10^{-7} \left(\frac{H^2}{2M_{\text{Pl}}^2} \frac{e^{4\pi\xi}}{\xi^6} \right)}{1 + 8.6 \times 10^{-7} \left(\frac{H^2}{2M_{\text{Pl}}^2} \frac{e^{4\pi\xi}}{\xi^6} \right)} \quad (9.46)$$

avec

$$r_{(+)} = 8.1 \times 10^7 \left(\frac{H^2}{M_{\text{Pl}}^2} \right) \left[1 + 8.6 \times 10^{-7} \left(\frac{H^2}{2M_{\text{Pl}}^2} \frac{e^{4\pi\xi}}{\xi^6} \right) \right]. \quad (9.47)$$

Pour une valeur donnée de $r_{(+)}$, on peut exprimer $\frac{H^2}{2M_{\text{Pl}}^2}$ en fonction de $\frac{e^{4\pi\xi}}{\xi^6}$ et introduire cette expression dans $|\delta|$. En suivant la référence [84], on introduit le paramètre $\tilde{X} = e^{2\pi\xi}/\xi^3$, relié à $r_{(+)}$ et δ par

$$\tilde{X} = \left(\frac{1.37 \times 10^7}{\sqrt{r_{(+)}}} \right) \sqrt{\left(\frac{|\delta|}{1-|\delta|} \right) \left(1 + \frac{|\delta|}{1-|\delta|} \right)}.$$

(Par rapport à Ref. [84], $\tilde{X}$ est relié à leur paramètre X via $X = \epsilon \times \tilde{X}$ avec ϵ le premier paramètre de roulement lent.) Pour $r_{(+)} = 0.05$, on obtient la limite supérieure sur $\tilde{X}$: $\tilde{X} \leq 73 \times 10^7$ à 95% CL. Pour $r_{(+)} = 0.2$, cette limite supérieure devient $\tilde{X} \leq 3 \times 10^7$ à 95% CL. Cela doit être comparé à la limite supérieure rapporté dans Ref. [84] : $\tilde{X} \leq 6 \times 10^7$ at 95% CL, obtenue en utilisant la limite supérieure sur les non-gaussianités primordiales obtenues par PLANCK, $f_{\text{NL}} < 150$ [20]. Si l'on suppose une valeur relativement élevée de $r_{(+)}$, cela signifie que les contraintes que l'on peut obtenir à l'aide des mesures des spectres TB et EB sont du même ordre de grandeur que les contraintes obtenues par la non-gaussianité.

Conclusion III

La satellite PLANCK a fourni la mesure ultime des anisotropies de température du fond diffus cosmologique, c'est-à-dire uniquement limitée par la variance d'échantillonnage, et il devrait fournir bientôt les meilleures mesures en polarisation sur des échelles angulaires allant de quelques minutes d'arc à 90 degrés. Toutefois, la sensibilité des instruments embarqués sur PLANCK ne permettra probablement pas une détection du mode B primordial, et certainement pas une caractérisation précise de ce dernier. Actuellement, la meilleure contrainte sur le rapport tenseur-sur-scalaire est de $r \leq 0.11$ à 95% CL utilisant les mesures en température de PLANCK [2]. Puisque les erreurs sur la mesure des anisotropies de température par PLANCK sont d'ores et déjà dominées par la variance d'échantillonnage, il est difficile d'améliorer la contrainte sur r partant des seules anisotropies de température et l'utilisation du mode B devient cruciale pour cela. toutefois, en l'absence de détection directe du mode B primordial, cette contrainte restait la meilleure établie puisque la meilleure limite supérieure sur ce même paramètre mais partant d'une limite supérieure sur le mode B est de $r \leq 0.7$ à 95% CL, obtenue grâce aux données de BICEP (cf. dernière référence de [69]). Si les résultats récents de la collaboration BICEP2 se confirme, le rapport tenseur-sur-scalaire serait de $r \sim 0.2$ à une échelle de $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ [3].

Le prochain défi est donc la confirmation des résultats de BICEP2 puis la caractérisation précise de ce mode B de polarisation, à la fois sa composante secondaire due au lentillage gravitationnel et sa composante primordiale. Un grand nombre d'expérience sol ou ballon sont actuellement en cours d'opération ou en phase de déploiement [100]. Parallèlement à cela, plusieurs proposition d'expérience satellite à l'horizon 2025 et dédiée à cette mesure de polarisation ont émergé [101]. Si une telle mesure nécessite évidemment une grande sensibilité instrumentale et un très grand contrôle des effets systématiques (des points qui ne sont évidemment pas à négliger), le défi se situe aussi au niveau de l'analyse des données. Plusieurs points cruciaux sont identifiés, en particulier la capacité à séparer la polarisation du CMB des émissions astrophysiques d'avant-plan polarisées à un niveau tel que l'extraction du mode B soit possible, et aussi la capacité à séparer le mode B du mode E partant des cartes des paramètres de Stokes. Enfin, ces défis en terme d'analyse de données doivent se penser dans le cadre d'une analyse à venir portant sur des volumes de données gigantesque, ce qui va contraindre la possibilité d'implémenter *en pratique* (*i.e.* numériquement) les outils statistiques envisagés !

Pour illustrer de l'importance d'une analyse des données extrêmement précise, rigoureuse et prenant en compte dans un cadre global l'ensemble des différentes étapes, en vue de l'extraction du mode B cosmologique, nous proposons ici une analyse critique des résultats récemment proclamés par la collaboration BICEP2. Une question clé est de savoir si le mode B mesuré à l'échelle du degré est bel et bien d'origine cosmologique. Pour cela, il faut s'assurer que le niveau d'émission d'avant-plan est suffisamment faible pour ne pas contaminer la mesure et, si tel n'est pas le cas, soustraire ces émissions. La séparation de la composante cosmologique des composantes d'avant-plan se fait en utilisant l'information sur le spectre électromagnétique des différentes composantes, ce qui suppose donc des mesures à différentes fréquences électromagnétiques. Or l'expérience BICEP2 n'a mesuré le ciel micro-onde qu'à une seule fréquence, pour laquelle le contaminant principal est l'émission polarisée des poussières galactiques³. Les avant-plans ne pouvant donc être soustraits partant des données, ce niveau de contamination a été évalué comme étant négligeable partant de modélisations théoriques. Or aucun de ces modèles n'est totalement satisfaisant et, plus encore, peu d'entre eux sont contraints par des données observationnelles précises quant à la polarisation de l'émissions des poussières galactiques. Cela induit évidemment une source d'incertitude systématique (difficilement estimable) sur le niveau de mode B cosmologique. Mais cette hypothèse théorique a aussi une influence sur la correction de certains effets systématiques. Prenons deux exemples. Les données de BICEP2 sont filtrées au niveau des données ordonnées en temps. Pour corriger du biais induit par ce filtre, l'effet du filtre est estimé via

3. On notera toutefois que les mesures faites par BICEP1 ajoute une deuxième fréquence, malheureusement proche de la fréquence de BICEP2.

des simulations Monte-Carlo de la chaîne de détection et d'analyse. Ces simulations Monte-Carlo suppose un ciel micro-onde, dans la région de la voûte céleste observée par BICEP2, dominé par le signal cosmologique polarisé. Or rien ne garantit que cet a priori théorique ne biaise pas la reconstruction de l'effet du filtre (un peu à la manière dont un filtre de Wiener peut être biaisé par l'a priori que nous avons sur les contributions relatives aux données du signal et du bruit). Par ailleurs, l'orientation globale des détecteurs polarisés est estimée en cherchant l'angle qui annule les spectres croisés TB et EB . Si cette hypothèse est largement justifiée pour le signal cosmologique, elle ne l'est pas du tout pour l'émission des poussières galactiques. Supposer que TB et EB sont bel et bien nuls dans les données acquises par BICEP2 est donc conditionné par l'hypothèse que ce contaminant galactique est sous-dominant. Si tel n'est pas le cas, l'orientation estimée des polariseurs est *biaisée* ce qui induit une fuite de E dans B et vice-versa, biaisant finalement l'estimation du mode B et donc de r . Cela souligne l'interaction entre les différentes étapes de l'analyse des données CMB et en particulier, comment une hypothèse théorique concernant la séparation des composantes peut se répercuter sur d'autres étapes de l'analyse. L'interprétation du mode B à l'échelle du degré tel que détecté par BICEP2 comme étant d'origine cosmologique est conditionnée par un a priori théorique qui se dissémine à différents niveaux de l'analyse. Evidemment, ce regard critique reste ici à un niveau qualitatif et seule une analyse quantitative, basée sur les résultats de PLANCK qui justement donnent accès à l'émission polarisée des poussières galactiques, permettra de conclure si la détection de BICEP2 demeure ou non, et si la valeur de r ainsi que le niveau de confiance de cette mesure doivent être revus ou non.

Dans cette optique, nous avons développé une méthode de séparation exacte des modes E et des modes B tout en conservant un temps de calcul raisonnable. Cela permet une estimation à la fois rapide et précise des spectres de puissance angulaire de mode B partant des cartes de Q et U . Nous avons montré que cette méthode dite de pseudospectre *pur* est nécessaire pour une reconstruction précise des modes B que ce soit dans le cadre d'expérience sol ou ballon couvrant une faible portion du ciel ou bien dans le cas d'une possible future mission satellite. Pour le cas des expériences satellite atteignant les plus grandes échelles angulaires, *i.e.* $\ell \leq 20$, une méthode par maximum de vraisemblance est probablement utilisable en pratique partant de carte à basse résolution. Toutefois, les méthodes par pseudospectre resteront les méthodes utilisées en pratique pour $\ell \geq 30$ et il apparaît que pour ces échelles angulaires intermédiaires et hautes, une séparation exacte des modes E et B est nécessaire si l'on souhaite reconstruire C_ℓ^{BB} avec un rapport signal-sur-bruit supérieur à 3 multipôle par multipôle.

Par ailleurs, notre implémentation numérique de cette méthode statistique, *i.e.* le code X²PURE, permettant une estimation rapide des spectres de puissance angulaire, constitue un outil précieux pour la préparation des futures expériences dédiées à la polarisation du CMB. Sa rapidité permet d'étudier les capacités de différents choix spécifiques de conception instrumentale et de stratégie de pointage par simulation Monte-Carlo *tout* en fournissant une estimation précise et réaliste des spectres de puissance angulaire.

Evidemment le but final des mesures du mode B de polarisation est de contraindre les modèles cosmologiques, à la fois les modèles d'univers primordial via la composante primaire du mode B , mais aussi l'évolution plus récente via sa composante secondaire. Du point de vue de la physique de l'univers primordial, une détection à 3σ de $r = 0.001$ sera possible d'un strict point de vue statistique partant des données que récolterait une mission satellite. Cela signifie qu'une non-détection du mode B primordial placera une limite supérieure sur le rapport tenseur-sur-scalaire de $r \leq 10^{-3}$, excluant alors les modèles d'inflation dit de *large field*. Cela est maintenant à repenser dans le contexte de la possible détection proclamée par BICEP2. Si le niveau de mode B primordial est tel que $r \sim 0.2$, cela signifie qu'avec les méthode de pseudospectre pur, c'est une reconstruction extrêmement précise du spectre de puissance angulaire qui sera possible. Il s'agira en particulier de déterminer si une mesure de l'indice spectral du mode tensoriel est faisable pour ainsi tester une des relations de cohérence établies dans le cadre de l'inflation de roulement lent : $r = -8n_T$.

Plus génériquement, le mode B pourrait donner un nouvel accès à la physique de l'univers primordial, en particulier dans le cadre de scénarii non-standard dans lesquels des corrélations TB et EB non-nulles signerait une brisure de la symétrie par parité dans l'univers primordial.

Conclusion

Durant les dernières décennies, la cosmologie physique a posé de nouveaux défis : en acquérant le statut de science de précision, c'est maintenant une construction microphysique du paradigme cosmologique qui est requise dans le sens où certaines apories du modèle cosmologique standard nécessitent un apport venant de la physique des particules, de la physique des hautes énergies voire de la gravitation quantique. La nature de l'énergie noire et de la matière noire, la naturalité de l'inflation ou la pathologie de singularité de Big Bang en sont les principaux témoins. Une manière de faire de la cosmologie physique est de considérer ce champ scientifique comme posant des questions de physique fondamentale avec comme moyen expérimental les observations astronomiques. Evidemment, bien d'autres questions se posent dans le paradigme actuel (origine du magnétisme cosmique, description précise de la phase de reionisation ou encore des âges sombres, etc.) et ce qui est ici proposé est bien *une manière de faire* de la cosmologie qui *n'épuise pas* toute la cosmologie physique.

Le cas de la cosmologie quantique à boucles est un exemple concret qui illustre cette *manière de faire* ; la thèse soutenue étant qu'il serait possible de détecter les traces de ce cadre théorique dans les anisotropies du fond diffus cosmologique, ou bien, en cas de non détection, d'exclure une partie de l'espace des paramètres de ce cadre théorique. Ce cadre ne se réduit pas à l'unique idée que l'Univers primordial serait un laboratoire pour tester les théories de gravitation quantique. En cosmologie quantique à boucles, la singularité de Big Bang est remplacée par un rebond quantique régulier. C'est évidemment le minimum que l'on peut exiger d'une théorie quantique de la gravitation (ce qui ne veut pas dire que ce *minimum* est simple à atteindre) et ce problème de singularité se pose plus généralement dans le cadre de la gravitation relativiste. De façon tout aussi remarquable, c'est de plus un problème *purement* cosmologique qui se trouve résolu en LQC puisque rapidement après le rebond, l'Univers primordial entre dans une phase d'inflation cosmique avec une très forte probabilité. La cosmologie quantique à boucles permet ainsi d'étendre le paradigme standard à l'ère de Planck pré-inflationnaire et cette extension, dans un sens probabiliste, fournit naturellement les conditions initiales nécessaires à la mise en route de la phase inflationnaire. Plus encore, si l'on considère la causalité avec sérieux – et elle est à l'heure actuelle prise au sérieux en cosmologie puisque sans elle, il serait impossible de conclure quant à *e.g.* la physique de l'inflation partant des observations du fond diffus cosmologique –, il devient possible de parler d'un *avant* rebond puisque l'Univers est dans une phase de contraction classique précédant le rebond quantique. On ne devrait peut-être pas tant s'étonner de cela : si les théorèmes de singularité signe un point d'arrêt de l'espace-temps, il n'est pas si surprenant que leur résolution, supprimant ce point d'arrêt, engendre une extension infinie de l'espace-temps comme cas particulier d'une extension sans frontière.

Observer ce possible rebond quantique suppose de prédire son impact sur la production des perturbations cosmologiques primordiales et la question de l'observation reconduit une question théorique : modéliser les perturbations cosmologiques évoluant dans un fond quantique. La construction de ce cadre théorique a été effectué à un niveau semiclassique et il montre qu'effectivement les inhomogénéités de courbure et les ondes gravitationnelles primordiales sont affectées par cette histoire cosmique en rebond. Qualitativement parlant, le rebond quantique imprime une échelle de longueur caractéristique dans les spectres de puissance primordiaux. Si cette échelle imprimée au moment du rebond est encore dans notre horizon cosmologique aujourd'hui, elle est *en principe* observable par une caractérisation précise des propriétés statistiques des anisotropies du fond diffus cosmologique.

Ce cadre théorique n'est toutefois pas exempt de faiblesses puisqu'il se déploie suivant un certain réseau d'approximations. Tout d'abord, il ne s'agit pas à proprement parler d'une déduction de la gravitation quantique à boucles mais d'un modèle de minisuperspace inspiré de cette dernière dans lequel la réduction par symétrie du nombre de degrés de liberté est effectué avant la quantification par voie des boucles. Par ailleurs, si le rebond quantique est clairement établi par l'étude de la dynamique de la fonction d'onde, le fait que l'Univers entre en

phase d'inflation a été établi au niveau semiclassique de la théorie. Si cette approximation semble validée par des analyses numériques et analytiques même dans la phase la plus quantique du rebond, il reste cependant important de comprendre en quoi cette approximation semiclassique est si efficace. Ainsi, ce modèle de minisuperspace nécessite aussi des avancées du côté de la théorie complète qu'est la gravitation quantique à boucles. Il a d'ores et déjà été montré que partant de la cosmologie en mousse de spins et en considérant le cas des graphes dipolaires, la dynamique classique de l'espace-temps FLRW est effectivement retrouvé dans la limite des grands volumes. Si ce type de graphe correspond effectivement à un choix pertinent d'état quantique pour notre Univers, il convient maintenant d'en étudier la dynamique effective à un niveau semiclassique. Le cas des perturbations cosmologiques devraient aussi être abordé du point de vue de la théorie mère puisque, partant de l'approche de minisuperspace, deux approches alternatives sont actuellement proposées. Parallèlement à ces développements théoriques, des avancées phénoménologiques sont aussi nécessaires. Le cas des inhomogénéités cosmiques constitue l'exemple paradigmatique de la nécessité de telles avancées. En étudiant les conséquences phénoménologiques et observationnelles de ces modèles, ce sera aussi en se basant sur des observations qu'il sera possible de discriminer entre les différentes propositions théoriques.

C'est donc un véritable programme de recherche qui est maintenant initié en cosmologie quantiques à boucles. Cette modélisation ne peut se passer de développement à venir en gravitation quantique à boucles afin d'asseoir sa base théorique et inversement, il semble maintenant possible, partant des modélisations de l'univers quantique, d'en prédire les empreintes observables et ainsi confronter les modèles aux observations astronomiques.

L'observable astronomique privilégiée pour « remonter » à l'Univers primordial, permettant ainsi de contraindre les modèles d'inflation et peut-être ses possibles extensions, est le fond diffus cosmologique. C'est en grande partie les propriétés statistiques de ses anisotropies de température qui fournit un faisceau de preuves observationnelles en faveur du scénario inflationnaire. Suite à la mesure ultime de ces anisotropies en température par le satellite PLANCK, le prochain défi est la détection et la caractérisation précise du mode B de polarisation. La première détection de sa composante secondaire vient d'être récemment proclamée par la collaboration POLARBEAR et, plus récemment encore, la première détection à des échelles angulaires de l'ordre du degré, interprété comme le mode B d'origine primordiale, vient d'être annoncée par la collaboration BICEP2. Toutefois, une confirmation de ces détections et une caractérisation précise de ces deux composantes du spectre de puissance angulaire de mode B restent encore à établir.

La plupart des campagnes d'observation fonctionne sur la base d'imageur ce qui signifie que les quantités statistiques sont estimées partant des cartes du ciel des paramètres de Stokes, elles-même reconstruites partant des données ordonnées en temps. La première quantité statistique à estimer est le spectre de puissance angulaire partant de ces cartes. Cependant, cette mesure est rendue difficile par différents effets systématiques en plus de la nécessité d'avoir un très faible niveau de bruit instrumental. Parmi ces effets systématiques, on notera les effets de *beam* asymétrique qui transfère du mode E dans le mode B , les émissions astrophysique d'avant-plan qui viennent masquer le signal cosmologique et les fuites du mode E , bien plus intense, dans le mode B lors de l'estimation des spectres de puissance angulaire compte tenu de la couverture partielle de la voûte céleste. Avec la sensibilité toujours croissante des détecteurs, il devient essentiel d'accroître les performances des méthodes d'analyse statistique afin que ces dernières ne constituent pas un facteur limitant dans l'extraction d'un signal aussi ténu que le mode B . Ces méthodes d'analyse statistique, et plus particulièrement leur implémentation numérique, font de plus face à la nécessité de pouvoir traiter de très gros volumes de données et cette exigence de réalisation et d'application *pratique* retroagit sur la conception même de ces méthodes.

L'estimation spectrale du mode B peut être rapidement effectuée par voie de pseudospectre. Toutefois cette approche est, dans sa formulation première, peu précise car elle ne corrige des fuites de E dans B qu'en moyenne : la variance d'échantillonnage est alors fortement augmentée compte tenu de la contribution des modes E qui ont fuit dans B . La méthode dite des pseudospectres purs sépare justement de façon exacte les modes B des modes E et elle permet ainsi une reconstruction à la fois précise et rapide des spectres de puissance angulaire de mode B . Dans la classe des méthodes de pseudospectre, l'implémentation $X^2\text{PURE}$ est actuellement la plus performante car elle tire avantage, en plus de cette séparation exacte des modes E et des modes B , de l'application de poids optimisés minimisant ainsi la variance globale sur la reconstruction de ces spectres. Pour les expériences sol ou ballon couvrant une faible portion de ciel – environ 1% –, une telle approche est nécessaire pour reconstruire le mode B . A ce titre, la mesure récente du spectre de puissance angulaire de mode B lentillé par la collaboration POLARBEAR utilise justement la méthode des pseudospectres purs tandis que les résultats de BICEP2 se basent sur une version dans l'espace pixel de ce type d'approche. Pour une possible future mission satellite et un rapport tenseur-sur-scalaire



FIGURE D – Vue d’artiste de la possibilité d’accéder à la gravitation quantique par l’observation du ciel micro-onde. (©Francesca Vidotto)

de $r = 0.05$, cette approche devient nécessaire pour une reconstruction du mode B aux échelles angulaires plus grandes que la dizaine de degrés et, pour les échelles plus petites, elle permet une reconstruction multipôle par multipôle avec un rapport signal-sur-bruit allant de 3 à 10 (alors que un rapport signal-sur-bruit de l’ordre de 3 est difficilement atteint si l’on ne corrige pas de ces fuites). De part leur construction mathématique, les méthodes de pseudospectre sont moins précises que les méthodes par maximum de vraisemblance. Cependant, le rapport signal-sur-bruit n’est dégradé au maximum que d’un facteur ~ 1.5 et ce uniquement aux plus grandes échelles angulaires. Par ailleurs, le coût en temps de calcul des méthodes par maximum de vraisemblance est tel qu’elles sont utilisables en pratique que sur des cartes à basse résolution et donc uniquement pour les plus grandes échelles angulaires. Pour des multipôles supérieures à ~ 20 , cette méthode de pseudospectre pur est très probablement la méthode à adopter pour reconstruire le spectre de puissance angulaire de mode B . Partant d’une telle reconstruction pratique de ce spectre de puissance pour une future mission satellite, une détection à 3σ d’un rapport tenseur-sur-scalaire de 0.001 est possible, alors que si $r = 0.05$, c’est une détection à 24σ qui devient possible.

La figure D résume parfaitement la thèse soutenue dans l’ensemble de ces travaux : en observant le ciel micro-onde, cette mince « surface » cosmique au-delà des étoiles, des galaxies et amas de galaxies, c’est peut-être un accès à la structure microphysique de l’espace-temps qui s’offrirait à nous, faite de quanta de champ gravitationnel dans la vision de la gravité quantique à boucles. Mais utiliser le fond diffus cosmologique comme sonde de la gravitation quantique et de l’ère de Planck ne peut se faire sans une étude globale de l’histoire cosmique et de comment cette histoire affecte les anisotropies du CMB. Cette lumière relique est une mine d’information cosmologique : elle nous renseigne sur l’inflation primordiale, mais aussi *e.g.* sur la phase de reionisation ou encore sur la formation des grandes structures cosmiques via le lentillage gravitationnel. Cette richesse est évidemment à exploiter mais son exploitation optimale requiert de pouvoir distinguer les traces que les différentes phases de l’histoire cosmique laissent, ou pourraient laisser, sur cette observable cosmologique. Détecter des distorsions fines des propriétés statistiques des anisotropies du CMB et les interpréter comme étant dues à la physique durant l’ère de Planck

suppose de pouvoir distinguer ces distorsions de celles induites par l'histoire cosmique plus récentes. En ce sens, prédire l'impact du rebond quantique sur les anisotropies primaires de mode B est évidemment nécessaire, mais non suffisant ! Il s'agira aussi de modéliser l'ensemble des anisotropies de mode B secondaires dues, par exemple, au magnétisme cosmique ou dans les amas. Partant de cette modélisation précise, il faudra finalement convoquer – et très certainement développer – des méthodes d'analyse statistique de reconstruction du mode B suffisamment précises pour non seulement aller chercher une potentielle distorsion fine traçant de l'ère de Planck, mais aussi distinguer cette distorsion fine des autres (ces autres « distorsions » étant elles-mêmes d'intérêt cosmologique).

Le programme de recherche à venir convoque donc non seulement des développements du point de vue de la modélisation de l'Univers durant l'ère de Planck mais aussi une modélisation la plus précise possible de tout effet secondaire affectant les anisotropies de température et de polarisation du fond diffus cosmologique.

Table des figures

2.1	Représentation schématique de l'évolution de la distance de Hubble comobile	23
A	Anisotropies de température telles que mesurées par PLANCK	50
3.1	Feuilletage d'un espace-temps	63
3.2	Réseau de spin	68
5.1	Facteur d'échelle et champ scalaire dans un univers avec rebond quantique	77
5.2	Représentation schématique de l'Univers tel que modélisé en cosmologie quantique à boucles.	78
6.1	Spectre de puissance primordial tensoriel avec correction d'holonomie ou correction de volume-inverse	81
6.2	Spectre de puissance primordial tensoriel et spectre de puissance angulaire de mode B dans un univers en rebond	83
6.3	Anisotropies primaires de mode B dans un univers en rebond quantique	84
6.4	Valeurs détectables des paramètres (m, x) pour un univers en rebond quantique	85
7.1	Spectre de puissance primordial tensoriel dans un univers quantique	94
B	Echelle caractéristique du rebond « autorisée » en principe par PLANCK en fonction du nombre de e -fold (estimation grossière)	98
C	Spectres de puissance angulaire des anisotropies du fond diffus cosmologique	106
8.1	Couverture céleste typique pour des expériences CMB sol/ballon ou satellite	110
8.2	Variance d'échantillonnage sur l'estimation de C_ℓ^B corrigeant ou non des fuites de E dans B	113
8.3	Matrice de couplage entre multipôles et entre mode E et mode B	115
8.4	Fonctions de masque analytiques pour une longueur d'apodization de 7 degrés	117
8.5	Fonctions de masque optimisées pour la détection du mode B dans la bande $60 \leq \ell < 100$ et pour deux distributions de bruit instrumental, homogène et inhomogène	120
8.6	Incertitudes sur la reconstruction du mode B avec les pseudospectres purs	121
8.7	Incertitudes sur la reconstruction des 6 spectres de puissance angulaire du CMB avec les pseudospectres purs	122
8.8	Incertitude sur la reconstruction du mode B pour trois méthodes concurrentes de pseudospectres corrigeants des mélanges E/B	125
8.9	Détection du mode B avec les pseudospectres purs pour une future mission satellite dédiée à la polarisation du mode B	126
9.1	Fraction de ciel observée pour des expériences sol et ballon	130
9.2	Reconstruction du spectre de puissance de mode B (et niveau résiduel des avant-plans) après soustraction des émissions astrophysiques d'avant-plan : cas des expériences sol et ballon	131
9.3	Spectre de puissance angulaire <i>primaire</i> d'autocorrélation BB et de corrélations croisées TB et EB pour $r_{(+)} = 0.05$ et $\delta = 0.1, 0.5$ et 1 . L'indice spectral est pris égal à zéro.	133
9.4	Spectre de puissance angulaire BB, TB et EB avec lentillage gravitationnel pour $r_{(+)} = 0.05$ et $\delta = 0.1, 0.5$ et 1	134

9.5	Incertitudes sur la reconstructions des spectres croisés TB et EB	135
9.6	Spectre de puissance angulaire intrinsèque du CMB et contributions systématiques dues à une erreur d'étalonnage de l'orientation des polariseurs	136
9.7	Rapport signal-sur-bruit sur le niveau de violation de parité dans le cas d'une future expérience satellite	137
9.8	Biais sur la reconstruction du niveau de violation de parité du à une erreur d'étalonnage de l'orientation des polariseurs	139
D	Observer la gravitation quantique via le fond diffus cosmologique : vue d'artiste	151

Liste des tableaux

- 9.1 Spécificités instrumentales pour une expérience ballon (inspirée par EBEX) et une expérience sol (inspirée par POLARBEAR). 130
- 9.2 Rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ dans le cas d’une expérience satellite 137
- 9.3 Rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ par méthode des pseudospectres purs dans le cas d’une expérience satellite 138
- 9.4 Rapport signal-sur-bruit pour $r_{(-)}$ dans le cas d’une expérience sol ou ballon 142

Bibliographie

- [1] Planck Collaboration : P. A. R. Ade, N. Aghanim *et al.*, arXiv :1303.5076
- [2] Planck Collaboration : P. A. R. Ade, N. Aghanim *et al.*, arXiv :1303.5082
- [3] Bicep2 Collaboration, P. A. R. Ade, R. W. Aikin *et al.*, arXiv :1403.3985
- [4] S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space and time*, (Cambridge University Press, 1973)
S. W. Hawking, extrait de *The large scale structure of space and time* [[arXiv : hep-th/9409195v1](#)]
- [5] A. Borde & A. Vilenkin, Int. J. Mod. Phys. D **5** 813 (1996)
- [6] P. Peter & J.-P. Uzan, *Cosmologie primordiale*, (Belin, 2005)
- [7] J. A. Peacock, *Cosmological physics*, (Cambridge University Press, 1999)
- [8] N. D. Birrell & P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, 1982)
- [9] J. M. Bardeen, Phys. Rev. D **22** 1882 (1981)
- [10] V. Mukhanov, H. Feldman & R. Brandenberger, Phys. Rep. **215** 203 (1992)
V. Mukhanov, Sov. Phys. JETP **68** 1297 (1988)
M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **76** 1036 (1986)
- [11] J. Martin & D. J. Schwarz, Phys. Rev. D **67** 083512 (2003)
- [12] J. Grain & A. Barrau, Phys. Rev. D **76** 084009 (2007)
J. Grain & A. Barrau, Nucl. Phys. B **742** 253 (2006)
J. Grain & A. Barrau, Eur. Phys. J. C **53** 641 (2008)
- [13] D. Langlois, Class. Quant. Grav., **11** 389 (1994)
- [14] D. S. Salopek & J. R. bond, Phys. Rev. D **42** 3936 (1990)
- [15] A. R. Liddle, P. Parsons & J. D. Barrow, Phys. Rev. D **50** 7222 (1994)
- [16] J. E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copeland, T. Barreiro & M. Abney, Rev. Mod. Phys. **69** 373 (1997)
- [17] R. Parentani, Comptes Rendus Physique **4** 935 (2003)
- [18] H. R. Lewis, Jr. & W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10** 1458 (1969)
- [19] L. Parker & S. A. Fulling, Phys. Rev. D **9** 341 (1974)
- [20] Planck Collaboration : P. A. R. Ade, N. Aghanim *et al.*, arXiv :1303.5084
- [21] J. Grain, *Relativité générale et champs quantiques : quelques aspects de physique des trous noirs et de cosmologie en gravité de Lovelock, espaces de Sitter et dimensions supplémentaires*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I (2006)
- [22] L. F. Abbott & R. K. Schaefer, Astrophys. J. **308** 546A (1986)
- [23] D. Lyth & E. D. Stewart, Phys. Lett. B **302** 171 (1993)
E. D. Stewart & J.-O. Gong, Phys. Lett. B **510** 1 (2001)
J. Martin & D. Schwarz, Phys. Rev. D **62** 103520 (2000)
- [24] M. Abramowitz & I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, (Dover Publications, New York, 1964)
- [25] Planck Collaboration : P. A. R. Ade, N. Aghanim *et al.*, arXiv :1303.5075

- [26] Planck Collaboration : P. A. R. Ade, N. Aghanim *et al.*, arXiv :1303.5083
Planck Collaboration : P. A. R. Ade, N. Aghanim *et al.*, arXiv :1303.5085
Planck Collaboration : P. A. R. Ade, N. Aghanim *et al.*, arXiv :1303.5086
- [27] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge, Cambridge University Press (2007)
A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Class. Quant. Grav.* **21** R53 (2004)
P. Dona and S. Speziale, arXiv :1007.0402v1
A. Perez, arXiv :gr-qc/0409061v3
R. Gambini and J. Pullin, *A First Course in Loop Quantum Gravity*, Oxford, Oxford University Press (2011)
C. Rovelli, arXiv :1102.3660v5 [gr-qc]
C. Rovelli, *Living Rev. Relativity* **1** 1 (1998)
L. Smolin, arXiv :hep-th/0408048v3
T. Thiemann, *Lect. Notes Phys.* **631** 41 (2003)
T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge, Cambridge University Press (2007).
- [28] A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** 233 (2003)
A. Ashtekar, *Gen. Rel. Grav.* **41** 707 (2009)
A. Ashtekar and P. Singh, *Class. Quant. Grav.* **28** 213001 (2011)
M. Bojowald, *Living Rev. Rel.* **11** 4 (2008)
M. Bojowald, arXiv :1209.3403 [gr-qc]
K. Banerjee, G. Calcagni, and M. Martin-Benito, *SIGMA* **8** 016 (2012)
G. Calcagni, *Ann. Phys.* **525** 323 (2013)
- [29] C. Rovelli & F. Vidotto, *Phys. Rev. Lett.* **111** 091303 (2013)
- [30] J. von Neumann, *Mathematische Annalen* **104** 570 (1931)
J. von Neumann, *Annals of Mathematics* **33** 567 (1932)
M. H. Stone, *Proc. of the national academy of sciences of the United-States of America* **16** 172 (1930)
M. H. Stone, *Annals of Mathematics* **33** 643 (1932)
- [31] R. Giles, *Phys. Rev. D* **24** 2160 (1981)
- [32] A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski, *Adv. Theo. Math. Phys.* **7** 233 (2003)
- [33] V. Taveras, *Phys. Rev. D* **78** 064072 (2008)
A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, *Phys. Rev. D* **73** 124038 (2006)
A. Ashtekar, T. Pawłowski, P. Singh and K. Vandersloot, *Phys. Rev. D* **75** 0240035 (2006)
C. Rovelli & E. Wilson-Ewing, arXiv :1310.8654
- [34] J. Grain, T. Cailleteau, A. Barrau & A. Gorecki, *Phys. Rev. D* **81** 024040 (2010)
- [35] J. Mielczarek, T. Cailleteau, J. Grain & A. Barrau, *Phys. Rev. D* **81** 104049 (2010)
- [36] A. Ashtekar and D. Sloan, *Phys. Lett. B* **694** 108 (2012)
A. Ashtekar and D. Sloan, *Gen. Rel. Grav.* **43** 3519 (2011)
L. Linsefors and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **87** 123509 (2013)
- [37] J. Grain & A. Barrau, *Phys. Rev. Lett.* **102** 081301 (2009)
- [38] J. Grain, A. Barrau & A. Gorecki, *Phys. Rev. D* **79** 084015 (2009)
- [39] J. Grain, A. Barrau, T. Cailleteau & J. Mielczarek, *Phys. Rev. D* **82** 123520 (2010)
- [40] A. Lewis, A. Challinor and A. Lasenby, *Ap. J.* **538** 473 (2000)
- [41] D. Hanson *et al.*, *Phys. Rev Lett.* **111** 141301 (2013)
- [42] Polarbear Collaboration : P. A. R. Ade, Y. Akiba *et al.*, arXiv : 1403.2369
- [43] L. Verde, H. Peiris & R. Jimenez, *JCAP* **0601** (2006) 019; D. Baumann *et al.*, *AIP Conf. Proc.* **1141** 10 (2009)
- [44] J. Bock *et al.*, arXiv :0805.4207v1 [astro-ph]
- [45] Planck Collaboration : P. A. R. Ade, N. Aghanim *et al.*, arXiv :1409.5738
- [46] J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau & J. Grain, *Class. Quant. Grav.* **29** 085009 (2012)
- [47] T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau & J. Grain, *Class. Quant. Grav.* **29** 095010 (2012)
- [48] T. Cailleteau, A. Barrau, J. Grain & F. Vidotto, *Phys. Rev. D* **86** 087301 (2012)

- [49] J. D. Reyes, *Spherically symmetric loop quantum gravity : connection to 2-dimensional models and application to gravitational collapse*, PhD thesis, The Pennsylvania State University, (2009)
- [50] T. Cailleteau & A. Barrau, Phys. Rev. D **85** 123534 (2012)
- [51] E. Wilson-Ewing, Class. Quant. Grav. **29** 085005 (2012)
- [52] M. Bojowald & G. M. Paily, Phys. Rev. D **86** 104018 (2012)
- [53] J. J. Sylvester, Philosophical Magazine (ser. 4) vol. 4, n. 23, p. 138 (1852)
E.ourgoulhon, cours intitulé *{3+1} formalism and bases of numerical relativity* donné au Trimestre de Relativité Générale à l'Institut Henri Poincaré, [arXiv : gr-qc/0703035v1]
- [54] M. Bojowald, G. M. Hossain, M. Kagan & S. Shankaranarayanan, Phys. Rev. D **78** 063547 (2008)
M. Bojowald, G. M. Hossain, M. Kagan & S. Shankaranarayanan, Phys. Rev. D **79** 043505 (2009) [Erratum-ibid. D **82** 109903 (2010)]
- [55] T. Cailleteau, L. Linsefors & A. Barrau, à paraître dans Phys. Rev. D, arXiv :1307.5238
- [56] I. Agullo, A. Ashtekar and W. Nelson, Phys. Rev. Lett. **109** 251301 (2012)
I. Agullo, A. Ashtekar and W. Nelson, Phys. Rev. D **87** 043507 (2012)
I. Agullo, A. Ashtekar and W. Nelson, Class. Quantum Grav. **30** 085014 (2013)
- [57] A. Ashtekar, W. Kaminski and J. Lewandowski, Phys. Rev. D **79** 064030 (2009)
- [58] L. Linsefors, T. Cailleteau, A. Barrau & J. Grain, Phys. Rev. D **87** 107503 (2013)
- [59] B. Bolliet, C. Stahl, J. Grain & A. Barrau, en préparation pour Phys. Rev. D
- [60] C. Rovelli & F. Vidotto, Class. Quant. Grav. **25** 225024 (2008)
C. Rovelli & F. Vidotto, Class. Quant. grav. **27** 145005 (2010)
E. Bianchi, C. Rovelli & F. Vidotto, Phys. Rev. D **82** 084035 (2010)
A. henderson, C. Rovelli, F. Vidotto & E. Wilson-Ewing, Class. Quant. Grav. **28** 025003 (2011)
- [61] E. Alesci & F. Cianfrani, Europhys. Lett. **104** 10001 (2013), arXiv :1210.4504
E. Alesci & F. Cianfrani, Phys. Rev. D **87** 083521 (2007)
- [62] S. Gielen, D. Oriti & L. Sindoni, arXiv :1311.1238 S. Gielen, D. Oriti & L. Sindoni, Phys. Rev. Lett. **111** 031301 (2013) G. Calcagni, S. Gielen & D. Oriti, Class. Quant. Grav. **29** 105005 (2012)
- [63] A. Barrau, T. Cailleteau, X. Cao, J. Diaz-Polo & J. Grain, Phys. Rev. Lett. **107** 251301 (2011)
- [64] A. Barrau, T. Cailleteau, J. Grain & J. Mielczarek, Class. Quant. Grav. **31** 053001 (2014)
- [65] M. Zaldarriaga & U. Seljak, Phys. Rev. D **55** 1830 (1997)
M. Kamionkowski, A. Kosowsky & A. Stebbins, Phys. Rev. Lett. **78** 2058 (1997)
- [66] U. Seljak & M. Zaldarriaga, Phys. Rev. Lett. **78** 2054 (1997)
D. N. Spergel & M. Zaldarriaga, Phys. Rev. Lett. **79** 2180 (1997)
- [67] W. Hu, M. H. Hedman & M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **67** 043004 (2003)
- [68] M. Zaldarriaga & U. Seljak, Phys. Rev. D **58** 023003 (1998)
W. Hu, Phys. Rev. D **62** 043007 (2000)
- [69] E. M. Leitch *et al.*, Nature (London) **420** 763 (2002)
J. M. Kovac *et al.*, Nature (London) **420** 772 (2002)
C. L. Bennett *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **148** 1 (2003)
G. Hinshaw *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **170** 288 (2007)
E. Komatsu *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **192** 18 (2011)
M. L. Brown *et al.*, Astrophys. J. **705** 978 (2009)
H. C. Chiang *et al.*, Astrophys. J. **711** 1123 (2010)
- [70] M. Tristram & K. Ganga, Rept. Prog. Phys. **70** 899 (2007)
- [71] M. G. Hauser, & P. J. E. Peebles, Astrophys. J., **185**, 757, (1973)
E. Hivon, K.M. Górski, C.B. Netterfield, B.P. Crill, S. Prunet, & F. Hansen, Astrophys. J., **567**, 2, (2002)
G. Hinshaw, et al., Astrophys.J.Supp., **148**,135, (2003)
G. Chon, A. Challinor, S. Prunet, & E. Hivon, MNRAS, **350**, 914, (2004)
- [72] E. F. Bunn, M. Zaldarriaga, M. Tegmark & A. de Oliveira-Costa, Phys. Rev. D **67** 023501 (2003)

- [73] K.M. Smith, Phys. Rev. D **74** 083002 (2006)
K.M. Smith & M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **76** 043001 (2007)
- [74] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev & V. K. Khersonskii, *Quantum theory of angular momentum* (World Scientific, 1988)
- [75] J. Grain, M. Tristram & R. Stompor, Phys. Rev. D **79** 123515 (2009)
- [76] J. Grain, M. Tristram & R. Stompor, Phys. Rev. D **86** 076005 (2012)
- [77] M. Tristram, J.F. Macias-Pérez, C. Renault & D. Santos, MNRAS, **358** 833 (2005)
- [78] M. Tegmark, Phys. Rev. D **55** 5895 (1997) M. Tegmark & A. de Oliveira-Costa, Phys. Rev. D **64**, 063001, (2001)
- [79] J. R. Bond, A. Jaffe and L. Knox, Phys. Rev. D **57** 2117 (1998)
- [80] Polarbear Collaboration : P. A. R. Ade, Y. Akiba *et al.*, arXiv : 1312.6645
Polarbear Collaboration : P. A. R. Ade, Y. Akiba *et al.*, arXiv : 1312.6646
- [81] http://www.apc.univ-paris7.fr/APC_CS/Recherche/Adamis/MIDAS09/software/s2hat/s2hat.html ;
http://www.apc.univ-paris7.fr/APC_CS/Recherche/Adamis/MIDAS09/software/pures2hat/pureS2HAT.html
- [82] A.P.S. Yadav, M. Su, & M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **81** 063512 (2010)
- [83] L. Pogosian, T. Vachaspati & S. Winitzki, Phys. Rev. D **65** 083502 (2002) ;
C. Caprini, R. Durrer & T. Kahniashvili, Phys. Rev. D **69** 063006 (2004)
T. Kahniashvili & B. Ratra, Phys. Rev. D **71** 103006 (2005)
- [84] L. Sorbo, JCAP **116** 003 (2011)
M. H. Anber & L. Sorbo, Phys. Rev. D **85** 123537 (2012)
J. L. Cook & L. Sorbo, arXiv :1307.7077
- [85] C. R. Contaldi, J. Magueijo & L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **101** 141101 (2008)
J. Magueijo & D. M. T. Benincasa, Phys. Rev. Lett. **106** 121302 (2011)
L. Bethke & J. Magueijo, Phys. Rev. D **84** 024014 (2011)
L. Bethke & J. Magueijo, arXiv :1108.0816v1
T. Kibble, J. Math. Phys. **2** 212 (1961)
A. Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **57** 2244 (1986)
- [86] A. Kosowsky & A. Loeb, Astrophys. J. **469** 1 (1996)
A. Kosowsky, T. Kahniashvili, G. Lavrelashvili & B. Ratra, Phys. Rev. D **71** 043006 (2005)
L. Campanelli, A. D. Dolgov, M. Giannotti & F. L. Vilante, Astrophys. J. **616** 1 (2004)
C. Scóccola, D. Harari & S. Mollerach, Phys. Rev. D **70** 063003 (2004)
- [87] S. M. Carroll, Phys. Rev. Lett. **81** 3067 (1998)
A. Lue, L. Wang & M. Kamionkowski, Phys. Rev. Lett. **83** 1506 (1999)
- [88] W. Zhao & D. Baskaran, Phys. Rev. D **82** 023001 (2010)
- [89] J. Kim & P. Naselsky, Astron. & Astrophys. **519** A104 (2010) ; J. Kim, Astron. & Astrophys. **531** A32 (2011)
- [90] A. Ferté, J. Grain, M. Tristram & R. Stompor, Phys. Rev. D **88** 023524 (2013)
- [91] A. Ferté, J. Peloton, J. Grain & R. Stompor, en préparation pour Phys. Rev. D
- [92] W. Hu, Phys. Rev. D **62** 043007 (2000)
- [93] A. Jaffe, M. Kamionkowski and L. Wang, Phys. Rev. D **61** 083501 (2000)
- [94] R. Stompor, S. Leach, F. Stivoli & C. Baccigalupi, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **392** 216 (2009)
- [95] F. Stivoli, J. Grain, S. Leach, M. Tristram, C. Baccigalupi & R. Stompor, MNRAS **408** 2319 (2010)
- [96] Y. Fantaye, F. Stivoli, J. Grain, M. Tristram, C. Baccigalupi & R. Stompor, JCAP **1108** 001 (2011)
- [97] D. Blas, J. Lesgourgues and T. Tram, JCAP **07** (2011) 034
- [98] A. Ferté & J. Grain, Phys. Rev. D **89** 103516 (2014)
- [99] M. Shimon, B. Keating, N. Ponthieu & E. Hivon, Phys. Rev. D **77** 083003 (2008)
B. Keating, M. Shimon & A. Yadav, Astrophys. J. Lett. **762** 23 (2012)

- [100] POLARBEAR : <http://bolo.berkeley.edu/polarbear/?q=science>
SPTPOL : <http://pole.uchicago.edu/>
QUBIC : <http://www.qubic-experiment.org/>
ACTPOL : <http://www.princeton.edu/act/>
EBEX : <http://groups.physics.umn.edu/cosmology/ebex/>
SPIDER : http://cmb.phys.cwru.edu/ruhl_lab/spider.html
- [101] LiteBIRD : <http://cmbpol.kek.jp/litebird/>
PRISM : <http://www.prism-mission.org/index.php>
PIXIE : A. Kogut, D. J. Fixsen *et al.*, JCAP **07** 025 (2011)