

37



ИЗДАТЕЛЬСТВО

ТИП. - R - -

2-12462

ОСНОВЫ
КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ
ПАДЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

P2 - 12462

**ПРОБЛЕМЫ
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Труды
**V Международного совещания
по нелокальным теориям поля**

Алушта, 18-25 апреля 1979 года

Дубна 1979



С о с т а в О р г к о м и т е т а

БЛОХИНЦЕВ Дмитрий Иванович	- председатель
МАРКОВ Моисей Александрович	- председатель
ЕФРЕМОВ Анатолий Васильевич	- заместитель председателя
БАРБАШОВ Борис Михайлович	- член Оргкомитета
ВОЛКОВ Михаил Константинович	- член Оргкомитета
ЕФИНОВ Гарий Владимирович	- член Оргкомитета
ФИЛИППОВ Александр Тихонович	- член Оргкомитета
ШВАНЕВ Вениамин Семенович	- член Оргкомитета
ПЕРВУШИН Виктор Николаевич	- ученый секретарь
ИСАЕВА Надежда Сергеевна	- секретаря

П р е д и с л о в и е

С 18 по 25 апреля 1979 г. в Алуште проходило У Международное совещание по нелокальной теории поля.

Это совещание, как и четыре предыдущих /Дубна, 1967 г.; Азау, 1970 г.; Алушта, 1973 г.; Алушта, 1976 г./ было организовано по инициативе директора Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований члена-корреспондента АН СССР Дмитрия Ивановича Блохинцева, скоропостижно скончавшегося в январе этого года.

Имя Д.И.Блохинцева неразрывно связано с историей мирного атома, с развитием различных областей современной физики, с большим вкладом в организацию советской науки, с разработкой философских и методологических вопросов.

Д.И.Блохинцев имел прямое отношение к решению многих проблем атомной энергетики и реакторостроения:

- проектированию и сооружению первой в мире атомной электростанции в г. Обнинске и созданию Физико-энергетического института;
- первым расчетам и сооружению перспективных для атомной энергетики реакторов на быстрых нейтронах;

Дмитрий Иванович был инициатором сооружения импульсных реакторов /ИБР/, зарекомендовавших себя в дальнейшем как отличное орудие для разнообразных исследований свойств ядра, твердых и жидких тел, элементарных частиц.

В 1956 г. Д.И.Блохинцев был избран первым директором международного исследовательского центра социалистических стран /ОИЯИ/. За годы его руководства /1956-65 г.г./ Институт вырос, оформился организационно, превратился в один из

крупнейших в мире центров физики элементарных частиц и атомного ядра. В последние годы Д.И.Блохинцев возглавлял Лабораторию теоретической физики в ОИЯИ. Одновременно с этим он являлся одним из авторов и научных руководителей проекта нового мощного импульсного реактора ИБР-2 в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Выдающиеся научные заслуги Д.И.Блохинцева были отмечены высшими наградами: Ленинской премией, двумя Государственными премиями, званием Героя Социалистического Труда, четырьмя орденами Ленина и многими другими орденами и медалями СССР и социалистических стран.

В 1938 году он был избран членом-корреспондентом АН УССР, а в 1956 году - членом-корреспондентом АН СССР. Д.И.Блохинцев являлся членом Академии Леопольдина в ГДР и Венгерской академии наук, почетным доктором Высшей технической школы в Праге, а также университетов им. А.Гумбольдта в Берлине и им. Карла Маркса в Лейпциге, членом Физического общества НРБ.

Признание научных заслуг Д.И.Блохинцева мировой научной общественностью выразилось в избрании его на пост вице-президента /с 1963 г. по 1966 г./, а затем и президента /с 1966 г. по 1969 г./ Союза чистой и прикладной физики при ЮНЕСКО /ИЮПАП/.

Долгое время он работал советником Научного совета при Генеральном секретаре ООН, а также представлял СССР на крупнейших международных форумах, в том числе на первой конференции по мирному использованию атомной энергии в 1956 году.

Научная деятельность Д.И.Блохинцева слишком разнообразна и обширна, чтобы можно было подробно рассказать о ней в этом кратком сообщении. Она простирается от теоретических исследований микромира до инженерных проектов крупнейших физических экспериментальных установок.

Первая опубликованная научная работа была выполнена совместно с И.Е.Танном в 1932 году и посвящена вычислению работы выхода электронов из металла. Первая самостоятельная работа Д.И.Блохинцева относилась к теории движения электронов в периодическом потенциале кристалла, где было дано обобщение теории Блоха на случай перекрывающихся зон, которая позволила ему объяснить ряд аномальных магнитных и термоэлектрических эффектов в металлах.

Большое прикладное значение имели в то время его работы по теории выпрямления тока полупроводниками. Им было показано, что эффект выпрямления обусловлен появлением объемных зарядов вблизи поверхности раздела проводников, приводящих к нелинейному закону Ома, и не связан с особенностями строения полупроводников.

Д.И.Блохинцеву впервые удалось дать простую квантовомеханическую интерпретацию явлению, широко исследовавшемуся в 30-е годы экспериментально: фосфоресценции кристаллических фосфоров. Эти работы Д.И.Блохинцева сыграли в дальнейшем большую роль в развитии исследований в квантовой теории твердого тела.

В последние годы Дмитрий Иванович снова вернулся к вопросам теории твердого тела в связи с неожиданно обнаруженным эффектом - малым временем хранения ультрахолодных нейтронов в ловушках.

Д.И.Блохинцеву принадлежит один из первых трудов по нелинейной оптике - области, бурно развивающейся в последнее время. В частности, им разработана теория эффекта Штарка в сильном переменном поле. ныне, после изобретения оптических квантовых генераторов, эта работа имеет не только теоретическую ценность.

Дмитрий Иванович является создателем нелинейной акустики движущихся и неоднородных сред. Его исследования по акустике, выполненные во время Великой Отечественной войны по заданию правительства, имели огромное практическое значение и отмечены орденом Ленина. Монография "Акустика неоднородной и движущейся среды", изданная в СССР, была затем дважды переиздана в США и пользуется широкой известностью.

Глубина мышления Д.И.Блохинцева особенно ярко проявилась в работах,наименованных опередивших свое время. Еще в 1938 году Д.И.Блохинцевым в докладе на семинаре ФИАН была дана в основных чертах теория ламбовского сдвига. Этот расчет на 10 лет опередил развитие квантовой электродинамики. Идея спонтанных вакуумных переходов, интенсивно используемая в современных единых теориях элементарных частиц, была сформулирована Дмитрием Ивановичем еще в 1951 году в статье "К единой теории поля", опубликованной в УФН.

В 1957 году Д.И.Блохинцевым была выдвинута гипотеза о флуктуациях плотности ядерного вещества. Вначале она использовалась для качественного понимания природы "дейтронных" пиков в реакциях квазиупругого рассеяния протонов высокой энергии ядрами и предсказания выходов других кластеров. Плодотворность идеи "флуктонов" проявилась спустя 20 лет, когда были открыты реакции кумулятивного типа.

Исследование механизма таких процессов и структуры самих флуктонов открывает новое перспективное направление в современной релятивистской ядерной физике.

Большой интерес представляет идея Дмитрия Ивановича о квантовых стохастических пространствах. Результаты этих исследований вошли в монографию "Пространство и время в микромире", изданную в 1970 году.

Важное место в научной деятельности Д.И.Блохинцева занимали вопросы интерпретации квантовой механики. Он много и плодотворно работал в этой области. Его книга "Основы квантовой механики" начиная с 1944 года выдержала пять изданий у нас в стране и переведена на многие иностранные языки.

Концепция квантовых ансамблей, выдвинутая Д.И.Блохинцевым, его детальный анализ квантовомеханического процесса измерения, его трактовка волновой функции, как объективной характеристики всего ансамбля в целом, а не отдельного микрообъекта - все это, несомненно, способствовало правильному пониманию фундаментальных основ квантовой механики.

Обобщением этих исследований явилась монография "Принципиальные вопросы квантовой механики", вышедшая в 1966 году.

Дмитрий Иванович воспитал целое поколение молодых ученых, ставших кандидатами и докторами наук. С 1935 года и до последних дней он являлся профессором и заведующим кафедрой физического факультета Московского университета.

Общественная деятельность Д.И.Блохинцева была отмечена Почетной грамотой Всемирного Совета мира за выдающийся вклад в дело укрепления мира /1959 г./ . В течение ряда лет он являлся членом Советского Комитета защиты мира. Дмитрий Иванович неоднократно избирался членом Московского областного комитета партии, был делегатом XXII съезда КПСС.

Дмитрия Ивановича всегда привлекали самые актуальные проблемы теоретической физики. Ряд его работ посвящен фундаментальным вопросам квантовой теории поля - причинности, нелокальным и нелинейным взаимодействиям. Для обсуждения последних достижений в этой области и рассмотрения широкого круга вопросов, касающихся структуры классической и квантовой теории поля, описывающей взаимодействия элементарных частиц, в 1967 году по инициативе Д.И.Блохинцева в Дубне было создано Международное совещание по нелокальной квантовой теории поля. С тех пор эти совещания стали традиционными и повторялись регулярно через три года в различных местах нашей страны.

На V Международном совещании обсуждались наиболее актуальные проблемы современной теории поля:

- Нелокальная теория поля и проблема сильной связи.
- Динамика малых расстояний.
- Единые теории поля и локальные симметрии.
- Классические решения в теории поля и проблема квантования.
- Удержание кварков в квантовой теории поля.

В работе совещания приняло участие около 130 ученых из 10 стран. Было заслушано и обсуждено более 50 докладов, 18 из которых имели обзорный характер. Ввиду большого количества материалов, представленных на совещание, Оргкомитет имеет возможность издать лишь обзорные доклады и часть оригинальных сообщений. Список докладов и сообщений, не вошедших в сборник, приводится в конце книги.

В сборнике помещен "Конспект вводного доклада" Д.И.Блохинцева, который был подготовлен им в декабре 1978 года.

ОРГКОМИТЕТ

КОНСПЕКТ ВВОДНОГО ДОКЛАДА ^{x)}

Д.И.Блохинцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

1. За прошедшие после нашего предыдущего совещания три года произошли значительные события как в теоретической, так и в экспериментальной физике элементарных частиц. В этот период взаимное обогащение этих двух путей к изучению мира элементарных частиц было особенно ярко и содержательно.

2. Экспериментальные данные последних лет явным образом поддерживают успех локальных, перенормируемых, калибровочных теорий квантовых полей. Они также свидетельствуют о сложной структуре адронов, о существовании кварков как структурных компонент этих частиц.

3. Мы начинали этот семинар более десяти лет тому назад. В то время казалось, что расходимости в перенормировках должны быть устранены на пути нелокальной теории поля, может быть, на пути изменения геометрии микромира, вообще говоря, на пути изменения локального принципа причинности, выражающегося фундаментальной формулой:

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)] = 0 \quad \text{для} \quad (x-y)^2 > 0.$$

Локальная теория поля допускает, в принципе, существование как угодно точно локализуемых объектов, т.е. частиц с массой $M \rightarrow \infty$, и в таком аспекте является логичной и самосогласованной теорией.

4. Факт наличия бесконечностей в перенормировках уже на первых стадиях развития техники перенормировок рассматривался как отражение нашего незнания того, что происходит на некоторых малых расстояниях порядка $\alpha \sim 1/\Lambda$, где Λ — импульс "обрезания". В этом смысле нелокальная теория, развиваемая Г.В. Бримальским /Г/, может оказаться весьма эффективным способом учета этого незнания.

^{x)} Конспект вводного доклада зачитан на V Международном совещании по нелокальной теории поля Барбашовым Б.М. по тексту, подготовленному покойным Д.И. Блохиным.

5. Нелокальность, или, лучше сказать, "псевдонелокальность", может возникать как следствие обнаружения структуры у объектов, ранее считавшихся точечными.

6. Замечательный японский физик Саката последовательно настаивал на идее о том, что значительные сдвиги в физике микромира всегда возникали в результате обнаружения новых структурных элементов, новых субчастиц. Эта идея в наше время находит прекрасное подтверждение в обнаружении структурных элементов адронов-кварков.

7. Нелокальность в таком аспекте будет следствием сложности объектов, раскрываемой на каждом новом уровне, а бесконечные перенормировки будут сменяться на новые структурные объекты, которые теперь считаются точечными.

8. Такой подход мог бы примирить нас с необходимостью иметь дело с бесконечностями в теории элементарных частиц.

9. Последовательность "частиц в частицах" могла бы оборваться где-то, где обнаружилась бы истинная нелокальность, например изменение геометрии.

Такое изменение, как многие считают, безусловно, должно бы произойти в области, где гравитация становится значительной. Эта область

$$\alpha_G \sim 10^{-33} \text{ см.}$$

10. Разумеется, много непредвиденного может появиться на пути от изучаемых теперь масштабов $\alpha_F \sim 10^{-15}$ см до гравитационных масштабов $\alpha_G \sim 10^{-33}$ см. Но уже сейчас видно, что включение в теорию частиц квантованной гравитации ставит нас перед фундаментальной проблемой стохастической геометрии. Каким способом упорядочить точечные объекты в континууме со стохастической метрикой?

11. Какой бы в будущем путь не избрала теория, сейчас события в нашей науке разыгрываются под знаком идей Сакаты и идей Янга-Миллса о калибровочных перенормируемых кварковых полях.

12. Новые сведения о кварках, число которых теперь достигает пяти,

$$u, d, s, c, b, \dots,$$

колоссально расширяет теоретически мыслимый мир адронов в соответствии с ростом объема мультиплетов группы $SU(n)$.

Создается целая адронная химия, в которой адроны выступают как молекулы, построенные из кварков, а также как возбужденные состояния этих "кварковых молекул". Возникает возможность существования "экзотических" частиц и возможность образования "фликтонов" - кварковых систем с большим числом кварков. Видимо, такого рода образования обнаруживаются в кумулятивных эффектах (А.М.Балдин^{12/}).

13. Новые сведения о лептонах наводят на мысль об обнаружении первых намеков на лептонную спектроскопию.

$$\begin{array}{l} \tau \text{ ————— } m = 3565 m_e \\ \mu \text{ ————— } m = 220 m_e \\ e \text{ ~~~~~~ } m = 1 \end{array}$$

Не указывает ли это на сложную структуру лептонов? Сопровождающие эти лептоны "свой" нейтрино напоминает известную картину, наблюдаемую в молекулярных кристаллах, когда волны молекулярных колебаний (закон дисперсии $\omega = \omega_0 + \kappa^2 + \dots$) всегда ассоциируются с акустическими, "безмассовыми" колебаниями (закон дисперсии $\omega = \nu K$).

14. Одним из важнейших фактов в физике лептонов является экспериментальное доказательство роста сечений процессов, инициированных нейтрино (включая процессы, обусловленные нейтральными токами)

$$\sigma_{\nu} \approx G_F^2 m E \approx 10^{-38} \frac{\text{см}^2}{\text{гэВ}} \cdot E.$$

Еще в конце 50-х годов было указано на то, что при энергии в с.д.м.

$$W \approx \alpha^{3/4} \frac{1}{\lambda_F} \approx 100 \text{ ГэВ},$$

где $\alpha = 1/137$, $1/\lambda_F = 300 \text{ ГэВ}$ - энергия унитарного предела, слабое взаимодействие сравнивается с электромагнитным (Д.Блохинцев, 1957-61^{13/}).

В настоящее время теория Салама-Вайнберга на основе гравитационной инвариантности и представления о скалярном поле с вырожденным вакуумом успешно объединяет слабые и электромагнитные взаимодействия в одной картине^{*/}.

Пока что эта замечательная теория позволяет качественно и количественно объяснить все известные сейчас экспериментальные данные с помощью одного параметра - угла Салама-Вайнберга:

$$\sin \theta_{sw} = 0,23 \pm 0,02.$$

Феноменологические расчеты возможных экспериментов на мюонных пучках предсказывают возможность отличить теорию Салама-Вайнберга от других вариантов теории слабых взаимодействий (С.М.Биленький, 1978^{/5/}).

Ближайшее поколение ускорителей со встречными пучками, видимо, позволяет решить вопрос о существовании предсказываемых этой теорией промежуточных бозонов W^\pm, Z^0 с массой около 70-80 ГэВ.

15. Представляется вообще исключительно сложным, что с помощью этих ускорителей будет возможно перемагннуть энергии ультратяжелого предела

$$W_F = \frac{1}{\lambda_F} \approx 300 \text{ ГэВ} -$$

перевал, за которым скрываются новые края страны Микромира.

В этой связи может представить значительный интерес калибровочная электродинамика с элементарной длиной, приводящая к удвоению числа лептонов, к появлению дипольного момента у элементарных частиц, а также к другим интересным выводам (В.Г.Кадмешевский, 1978^{/6/}).

16. В теории сильных взаимодействий успешно развивается квантовая хромодинамика - неабелева калибровочная теория поля Янга-Миллса.

Истоки этой интересной теории относятся к работе Н.Н.Боголюбова, Б.Н.Струмицкого и А.Н.Тавхелидзе (1965)^{/7/}, которые впервые ввели понятие о новой степени свободы кварков, позднее получившей название цвета (Фритч, Гелл-Манн, 1972^{/8/}).

^{*/}Представление о вырождении вакуума само по себе не ново (Д.Блохийцев, 1951^{/4/}).

17. Изучение глубокоупругих процессов на основе квантовой хромодинамики, приводящей к асимптотической свободе и к картине жестких столкновений кварков (А.Вейсман, А.Радзинский, Д.Политцер и др., 1976^{9,10/}), указывает на тенденцию к согласию предсказаний КХД с наблюдаемыми при больших передачах импульса явлениями.

К их числу следует прежде всего отнести нарушение скейлинга в процессах $\ell + p \rightarrow \ell' + X$ при $Q^2 \gg 1$ ГэВ/с. Видно, на этой же основе может быть истолковано нарушение кваркового счета (поведение p_1^{-8}) в процессах с большими p_{\perp} . Здесь уместно сослаться на заключение репортёров на Токийской конференции (Габатулер, Сакита, Венециано)^{11/}, которые подчеркивали согласие КХД при больших Q^2 с экспериментальными данными. Однако имеется и ряд трудностей, например в объяснении отношения $R = G_L/G_T$.

18. Иначе обстоит дело с проблемой взаимодействия кварков в связанных состояниях. Известно, что сравнительно простые модели J/ψ частиц с потенциалом вида (Де Рухула, Гленшоу, 1977^{12/}).

$$U(r) = \alpha r + \beta \frac{1}{r}$$

даёт удовлетворительное описание наблюдаемого спектра этих частиц. Однако релятивистская теория с потенциалом этого вида невозможна ввиду перекрытия состояний с $\pm mc^2$.

Совершенно не удастся описать Υ -мезон, сложная структура которого была предсказана еще З.Ферми и Янгом (1949)^{13/}. Не существует также удовлетворительной количественной теории барьонов - трехкварковых систем.

Еще не получено убедительного объяснения разногласия между нулевой массой кварков в квантовой хромодинамике и эффективной массой $m_q \approx 300$ МэВ/с² в теории сложных систем.

19. Еще хитрее обстоит дело с проблемой удержания кварков. По совокупности экспериментальных данных и по теоретическим соображениям следует считать, что свободные цветные объекты, в том числе отдельные кварки, не наблюдаются.

Качественно можно объяснить дело с помощью представления о релятивистской струне. (Теория таких струн развивалась в частности, Б.М.Барбазовым^{14/}). При некотором критическом напряжении струна, соединяющая кварки, рвется и на свободных концах возникает

ет пара кварк-антикварк. В кварк-глюонной картине такая необходимо предполагать совместное с кварком рождение по крайней мере одной пары ($q\bar{q}$). Однако количественной теорией, объясняющей такую ситуацию, еще не существует.

20. Интересная попытка объяснить удержание кварков, о которой было рассказано в прошлом году в Токио (Гросс, 1978^{/15/}), на основе представления о вакууме как двухфазном газе инстантонов нуждается пока еще в более строгом обосновании (гипотеза о фазовом переходе). К тому же следует заметить, что полезность идеи об инстантонах вызывает сейчас сомнения. Несколько иной подход к топологически вырожденному вакууму в КХД и задаче об удержании кварков развит в работе В.Первушина^{/16/}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Г.В. Настоящий сборник, с.3.
2. Baldin A.M. In: Proc. XIXth Int. Conf. on High Energy Physics, Tokyo (1978), p.455.
3. Блохинцев Д.И. УФН, 62 (1957), с.381.
4. Блохинцев Д.И. УФН, 44 (1951), с.104.
5. Быленский С.И. Настоящий сборник, с.103.
6. Кацмивский В.Г. Настоящий сборник, с.21.
7. Боголюбов Н.И., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н. Препринт ОИЯИ, Д - 1968, Дубна, 1965.
8. Fritsch H., Gell-Mann M. In: Proc. XVIth Int. Conf. on High Energy Physics, Chicago (1972), vol.2, p.135.
9. Ефремов А.В., Радомский А.В. Настоящий сборник, с.65.
10. Politzer H.D. In: Proc. XIXth Int. Conf. on High Energy Physics, Tokyo (1978), p.229.
11. Sabathuler E. In: Proc. XIXth Int. Conf. on High Energy Physics, Tokyo (1978), p.841;
Sakita B., *ibid*, p.921;
Harari H., *ibid*, p.611.
12. De Rujula A., Georgi H., Glashow S.L. Phys.Rev. D12 (1975), p.147.
13. Fermi E., Yang C.N., Phys.Rev. 76 (1949), p.1739.
14. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ЗЧАЯ, 9 (1978), с.709.
15. Gross D.J. In: Proc. XIXth Int. Conf. on High Energy Physics, Tokyo (1978), p.486.
16. Первушин В.Н. Настоящий сборник, с.223.

**1. Нелокальные теории поля
и проблема сильной связи**



НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Г. В. Ефимов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Имеется две точки зрения на подход к построению нелокальной теории. Одна точка зрения заключается в том, что нелокальную теорию следует понимать как принципиально новую теорию, где постоянная размерности длины ℓ должна рассматриваться как новая фундаментальная константа подобно c , \hbar , e . Эта идея развивалась М. А. Марковым, Н. Е. Таммом, а в настоящее время исследуется В. Г. Кадмиевским с сотрудниками^{/1/}.

Другая точка зрения состоит в том, что нам надо научиться описывать нелокальные взаимодействия квантованных полей, не меняя фундаментальных основ теории. При этом возникающие параметры размерности длины уже не являются универсальными фундаментальными постоянными, а являются характеристиками данного взаимодействия. Действительно, трудности локальной квантовой теории поля, связанные с малыми расстояниями, чисто математического характера, поскольку, как неоднократно подчеркивал Д. И. Блохинцев, на любые физические процессы, происходящие на каких-то определенных расстояниях, никогда не влияют события, происходящие на расстояниях на несколько порядков меньше исследуемых.

Настоящий доклад посвящен исследованию именно этого направления нелокальной квантовой теории поля. К предыдущему IV Международному совещанию были разработаны методы построения S -матрицы по теории возмущений для нелокальных взаимодействий квантованных полей^{/2/}. Было доказано, что S -матрица удовлетворяет всем необходимым требованиям. Кроме того, В. Я. Файнберг с сотрудниками^{/3/} доказал все основные теоремы аксиоматического подхода в нелокальной квантовой теории поля. Таким образом, квантовая теория поля с нелокальным взаимодействием поставлена в настоящее время

на тот же уровень строгости, что и локальная. Далее в рамках теории электромагнитных и слабых нелокальных взаимодействий были получены оценки для различных поправок, связанных с нелокальностью взаимодействия. Из сравнения с экспериментальными данными были получены ограничения на величину параметров, характеризующих нелокальность взаимодействия. Однако в настоящее время продвинуться дальше в этом направлении довольно затруднительно, поскольку экспериментально до сих пор не найдено никаких отклонений от предсказаний локальной теории.

Поэтому была предпринята попытка применить методы, развитые в квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием, для описания сильных взаимодействий. За прошедшие три года эта идея усиленно разрабатывалась, и к настоящему времени уже получены обнадеживающие результаты. Работа велась в двух направлениях. Во-первых, было построено так называемое виртуальное поле, существующее только в виртуальном состоянии^{/4/}. Такое поле является хорошим кандидатом на роль описания кварков, и оказалось, что методы теории возмущений применимы в низкоэнергетической теории кварков при описании распадов элементарных частиц^{/5-7/}.

Во-вторых, в нелокальной теории для ряда лагранжианов удалось получить поведение амплитуд при асимптотически больших константах связи^{/8/} и, как следствие, при больших энергиях. Это позволяет попытаться применить полученные результаты сильной связи к процессам множественного рождения элементарных частиц.

1. Нелокальная модель кварков

Гипотеза о существовании кварков как низшего представления группы $SU(3)$ оказалась очень успешной в описании имеющихся экспериментальных данных в физике элементарных частиц. Однако тот факт, что кварки экспериментально до сих пор не обнаружены, означает, что мы встретились с совершенно новым явлением в физике. Это составляет основную проблему теоретического описания кварков. Было предложено большое количество моделей, пытающихся объяснить механизм "удержания" кварка^{/9/}. Основная идея всех подходов заключается в предположении, что кварки являются обычными дираковскими частицами, но не рождаются согласно какому-то динамическому механизму.

В работах^{4-7/} для решения проблемы удержания кварка предложено совершенно другой принцип. Было введено новое квантованное поле, описывающее частицы, которые вообще не существуют в свободном состоянии подобно электрону, нуклому, мезону и т.д., но существуют только в виртуальном состоянии. Эти несуществующие частицы были названы "виртонами", и поле, описывающее эти частицы, было названо виртонным полем.

В лагранжиовом формализме описания элементарных частиц эта гипотеза означает, что в лагранжиале виртонного поля

$$L_0(x) = \bar{q}(x) Z(\beta) q(x) \quad (1.1)$$

оператор $Z(\beta)$ должен быть выбран таким образом, что единственным решением уравнения движения

$$Z(\beta) q(x) = 0 \quad (1.2)$$

должно быть

$$q(x) \equiv 0. \quad (1.3)$$

С другой стороны, мы хотим, чтобы функция Грина поля $q(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$Z(\beta) G(x-y) = i \delta(x-y), \quad (1.4)$$

была отличной от нуля

$$G(x-y) = Z^{-1}(\beta) i \delta(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Z^{-1}(\beta) e^{-ip(x-y)} \quad (1.5)$$

Это означает, что виртонное поле, которое равно нулю в свободном состоянии, тем не менее, может существовать в виртуальном состоянии.

В рамках стандартных методов классической и локальной квантовой теории поля невозможно одновременно удовлетворить уравнению (1.2) с решением (1.3) и уравнению (1.4) с решением (1.5), поскольку функция Грина обычно строится из решений свободного уравнения (1.2). Однако в рамках методов квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием эта проблема может быть решена.

Прежде всего найдем явный вид оператора $Z(\beta)$. Функция $Z(\beta)$ должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) $Z(s)$ - целая аналитическая функция;
- 2) $[Z(s)]^* = Z(s^*)$ - вещественная функция;
- 3) $Z(s)$ не имеет нулей, чтобы удовлетворить (3);
- 4) $Z(p) \rightarrow \infty$ при $p^2 = p_0^2 - p^2 \rightarrow -\infty$ (требование того, чтобы функция Грина $G(p)$ убывала в евклидовой метрике);
- 5) принцип минимальности, т.е. наимизный порядок целой функции, при котором выполнены предыдущие четыре условия.

Тогда оператор $Z(\hat{p})$, удовлетворяющий всем условиям, записывается в виде

$$Z(\hat{p}) = -M \exp\left\{-l\hat{p} - \frac{L}{4} p^2\right\}. \quad (1.6)$$

Таким образом, сформулированные выше требования фиксируют оператор $Z(\hat{p})$ с точностью до двух параметров:

$$L, \quad \xi = \frac{2l}{L}. \quad (1.7)$$

Параметр M не является независимым, мы выбираем его равным $M = \frac{1}{L}$.
Оператор (1.6) определяет функцию Грина

$$G(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} G(\hat{p}) e^{-i p x}, \quad (1.8)$$

$$G(\hat{p}) = L \exp\left\{l\hat{p} + \frac{L}{4} p^2\right\}.$$

Как строится квантовая теория виртонного поля? Было построено регуляризованное поле

$$q_j^\delta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-)^j \sqrt{A_j(\delta)} q_j^\delta(x). \quad (1.9)$$

Здесь q_j^δ - дираковские поля, удовлетворяющие уравнениям

$$(\hat{p} - M_j(\delta)) q_j^\delta(x) = 0 \quad (j=1, 2, \dots),$$

$$M_j(\delta) = \frac{j^\sigma}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty \quad (\sigma > 1)$$

и квантующиеся с индефинитной метрикой

$$\{q_j^\delta(x), \bar{q}_{j'}^\delta(x')\}_+ = (-)^j \delta_{jj'} S(x-x', M_j(\delta)),$$

где $S(x, M)$ - обычная перестановочная функция спинорного поля с массой M .

Коэффициенты $A_j(\delta)$ таковы, что поле $q^\delta(x)$ обладает следующими свойствами.

1) При $\delta > 0$ поле $q^\delta(x)$ в (I.9) является локальным полем, т.е.

$$\{q^\delta(x), \bar{q}^\delta(x')\}_+ = 0 \quad \text{при} \quad (x-x')^2 < 0.$$

Поле $q^\delta(x)$ определено на пространстве Фока \mathcal{H} с индефинитной метрикой. Физические состояния $\Psi(E) \in \mathcal{H}$ строятся стандартным образом, причем для каждого состояния $\Psi(E)$ энергия E может принимать любое произвольное, но конечное значение.

2) В пределе снятия регуляризации

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\Psi_1(E_1); q^\delta(x_1) \dots q^\delta(x_n); \Psi_2(E_2)) = 0$$

для любых n и $\Psi(E)$ из \mathcal{H} , т.е. в слабом смысле

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} q^\delta(x) = 0. \quad (\text{I.10})$$

3) Для пропагатора оказывается

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle 0 | T(q^\delta(x) \bar{q}^\delta(x')) | 0 \rangle &= \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-)^j A_j(\delta)}{M_j(\delta) - \beta} e^{-ip(x-x')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p L \exp\left\{p^2 + \frac{L^2}{4} p^2\right\} e^{-ip(x-x')} = G(x-x'). \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Таким образом, виртонное поле $q^\delta(x)$ удовлетворяет требуемым условиям.

Взаимодействие обычных полей, например мезонного $\mathcal{H}(x)$ и нуклонного $N(x)$, можно описать при помощи виртонного поля $q(x)$ следующим образом. Пусть лагранжиан взаимодействия задан

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(x) &= g_\pi \mathcal{H}(x) (\bar{q}(x) \gamma_5 q(x)) + \\ &+ i g_N (N(x) q(x)) (\bar{q}(x) \gamma_5 q(x)) + h. c. \end{aligned}$$

Введем регуляризованный лагранжиан

$$\mathcal{L}_I^\delta(x) = g_x \bar{\psi} (\not{\partial} - \not{g}_5 \psi^\delta) + i g_N (\bar{N} \not{\partial} \psi^\delta) / (\not{\partial} \not{g}_5 \psi^\delta) + h.c.$$

Как показано в [2], существует предел

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} T \exp \{ i \int dx \mathcal{L}_I^\delta(x) \}. \quad (1.12)$$

Этот предел определяет конечную унитарную причинную S -матрицу, которая описывает взаимодействие между мезонами и нуклонами. Взаимодействие определяется обменом виртонами, причем виртонов нет ни в начальном, ни в конечном состояниях.

Построенное виртонное поле $q(x)$ является хорошим кандидатом на роль описания кварков. Наша кварковая модель, описывающая сильные, электромагнитные и слабые взаимодействия адронов, заключается в следующем.

1. Мы считаем, что обычные физические частицы - адроны (мезоны и барионы) подчиняются систематике группы $SU(3)$, имеют экспериментально наблюдаемые массы и описываются стандартными квантованными полями, удовлетворяющими обычным уравнениям Дирака, Клейна-Гордона и т.д.

2. Предполагается, что реальные адроны могут взаимодействовать между собой не непосредственно, а путем обмена кварками. Кварки в группе $SU(3) \times SU_c(3)$ описываются полями

$$q_\alpha(x) = \begin{pmatrix} q_\alpha^m(x) \\ q_\alpha^2(x) \\ q_\alpha^3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\alpha(x) \\ d_\alpha(x) \\ s_\alpha(x) \end{pmatrix},$$

где m и α - соответственно $SU(3)$ и цветовой индексы.

Лагранжиан взаимодействия полей октета псевдоскалярных $P^{KS}(x)$ нонета векторных $V_\mu^{KS}(x)$ мезонов и октета барионов $B^{KS}(x)$ с кварковым полем $q_\alpha^m(x)$ выбирается в простейшем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{st}(x) = & g_P P^{KS}(x) (\bar{q}_\alpha^m(x) \not{g}_5 q_\alpha^s(x)) + g_V V_\mu^{KS}(x) (\bar{q}_\alpha^m(x) \not{g}_\mu q_\alpha^s(x)) + \\ & + g_B [i (\bar{B}^{KS}(x) q_\alpha^s(x)) (\not{q}_\mu^{mC}(x) \not{g}_5 q_\mu^n(x)) + h.c.] \varepsilon^{\kappa\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

3. Предположение о том, что адроны являются связанными состояниями кварков, эквивалентно требованию, чтобы константа Z_h нормировки волновой функции адрона h равнялась нулю:

$$Z_h = Z_h(g, m, L, \xi) = 0. \quad (I.14)$$

Таким образом, сильные взаимодействия определяются физически двумя параметрами L и ξ в (I.7), поскольку константы связи g_h определяются условием связности (I.14).

4. Анализ ряда теории возмущений показал, что при переходе в евклидову метрику все интегралы, соответствующие любым диаграммам Фейнмана, хорошо сходятся, поскольку пропагатор кварка (I.8) убывает как гауссовская экспонента. Оказалось, что эффективными константами разложения в случае лагранжиана взаимодействия (I.13) являются параметр

$$\lambda_F = \left(\frac{g_F}{4\pi}\right)^2, \quad \lambda_V = \left(\frac{g_V}{4\pi}\right)^2, \quad \lambda_B = \frac{1}{2} \left(\frac{g_B}{L^2}\right)^2 \left(\frac{2}{3\pi}\right)^4. \quad (I.15)$$

Матричный элемент какого-либо физического процесса перехода адронов из состояния i в состояние f , описываемого лагранжианом (I.13), имеет следующий вид:

$$M_{f \leftarrow i} = L^{a_i} \sum_{n=N_i} \lambda^n M_n(\xi, m_f L, m_i L),$$

где a_i и N_i - параметры, зависящие от данного процесса $i \rightarrow f$. Наша надежда состоит в том, что сила взаимодействия должна определяться величиной параметра L , а эффективная константа связи должна быть $\lambda \approx 0,1$, чтобы можно было пользоваться рядом теории возмущений.

5. Слабые и электромагнитные взаимодействия адронов вводятся инвариантными относительно группы $SU(3) \times SU_c(3) \times U(1)$:

$$\mathcal{L}_{em}(x) = e \left[J_\mu^{em h}(x) + J_\mu^{em q}(x) \right] A_\mu(x), \quad (I.16)$$

$$\mathcal{L}_w(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[J_\mu^{wh}(x) + J_\mu^{wq}(x) \right] J_\mu^{wb+}(x) + h.c.$$

Здесь J_μ - соответственно точечные электромагнитные (em) и слабые (w) токи адронов (h), кварков (q) и лептонов (l). Токи адронов и лептонов выбираются в стандартной форме. Локальный ток кварков в регуляризованном виде записывается следующим образом:



Отношение теоретических величин к их экспериментальным значениям .

$$[J_{\mu}^{em q}(x)]^{\delta} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\bar{q}_{j\alpha}^{-\delta}(x) \gamma_{\mu} Q q_{j\alpha}^{\delta}(x)),$$

$$[J_{\mu}^{w q}(x)] = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (\bar{q}_{j\alpha}^{-\delta}(x) Q_{\mu} J_{\theta} q_{j\alpha}^{\delta}(x)),$$
(I.17)

где Q - зарядовая матрица, J_{θ} - матрица, определяющая ток Кабиббо в группе $SU(3)$:

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В изложенной выше схеме был рассмотрен ряд распадов псевдоскалярных и векторных мезонов, а также лептонные распады барионов и их магнитные моменты. Результаты показаны на рисунке, где приведены отношения теоретических значений соответствующих величин к их экспериментальным значениям. Из группы распадов, связанных друг с другом соотношениями группы $SU(3)$, приведено только по одному распаду.

Теоретические данные получены при следующих значениях параметров:

$$L = \frac{1}{320 \text{ МэВ}}, \quad \bar{Z} = \frac{2\ell}{L} = -1,5. \quad (\text{I.18})$$

Значения эффективных констант связи, определяющихся из условий связности (15), оказались следующими

$$\begin{aligned} g_{\rho} &= 4,5, & \lambda_{\rho} &= 0,13; \\ g_{\nu} &= 4,5, & \lambda_{\nu} &= -0,13; \\ g_{\text{В}} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{10^2}{\text{мэ}^2}, & \lambda_{\text{В}} &= -0,07. \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Мы считаем, что точность 15+25% вполне приемлема для описания экспериментальных данных.

Таким образом, мы видим, что исследованные процессы хорошо описываются лагранжианом (I.13) с двумя независимыми параметрами кваркового поля (I.18). Кроме того, оказалось, что эффективные константы разложения (I.19) меньше единицы, так что можно применить теорию возмущений.

Полученные результаты говорят о том, что предложенная кварковая модель довольно хорошо описывает рассмотренные экспериментальные данные. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы найти лагран-

жиаи взаимодействия, который полностью описывал бы всю физику элементарных частиц низких энергий.

Следует далее заметить, что в нелокальной квантовой теории поля амплитуды физических процессов экспоненциально растут с ростом энергии. Поэтому теория возмущений применима лишь при малой константе связи для сравнительно небольших энергий. Для описания явлений при высоких энергиях теория возмущений уже неприменима, необходимо использовать методы сильной связи. Поэтому предлагаемая кварковая модель претендует на описание явлений, происходящих при не очень высоких энергиях, примерно до $2+5$ ГэВ. Это область сильных, электромагнитных и слабых распадов элементарных частиц и низкоэнергетического рассеяния $\pi\pi$, $K\pi$, πN и т.д.

2. Сильная связь и проблемы множественного рождения элементарных частиц

Другим направлением исследований в нелокальной квантовой теории поля было изучение поведения матричных элементов S -матрицы при асимптотически больших константах связи для различных лагранжианов взаимодействия скалярного поля¹⁸⁾. Пусть задана плотность лагранжиана скалярного поля

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x) - g U(K(\square \ell^2) \varphi(x)), \quad (2.1)$$

где $U(\varphi)$ - достаточно произвольная функция взаимодействия, $K(z)$ - нелокальный фактор, удовлетворяющий условиям:

- 1) $K(z)$ - целая аналитическая функция порядка роста $\rho \geq \frac{1}{2}$;
- 2) $[K(z)]^* = K(z^*)$;
- 3) $K(k^2 \ell^2) \rightarrow 0$, $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 \rightarrow -\infty$;
- 4) $K(m^2 \ell^2) = 1$.

S -матрица, описывающая взаимодействия в системе (2.1), может быть представлена в виде сходящегося континуального интеграла в евклидовом пространстве в конечном объеме :

$$\begin{aligned} S_V[\varphi] &= \int \delta \Lambda \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_V dx \Lambda(x) (\square - m^2) \Lambda(x) - g \int_V dx U(K(\square \ell^2) \Lambda(x) + \varphi(x)) \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \int \delta \psi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_V dx \psi^2(x) - g \int_V dx U \left(\int_V dy \mathcal{D}(x-y) \psi(y) + \varphi(x) \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\int dy \mathcal{D}(x-y) \mathcal{D}(y-x') = \mathcal{D}(x-x') = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{[K(-k_E^2 e^{\gamma})]^2}{m^2 + k_E^2} e^{-i k_E (x-x') \cdot k_E} \quad (2.2)$$

Континуальный интеграл существует при

- 1) $V < \infty$,
- 2) $D(0) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k_E^2) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{[K(-k_E^2 e^{\gamma})]^2}{m^2 + k_E^2} < \infty$, (2.3)
- 3) $\int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\{-v^2 - g U(\sqrt{D} v)\} < \infty$.

Континуальный интеграл в (2.2) определяется следующим образом. Пусть в объеме V задана ортонормированная система функций $\{g_n^{(v)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Тогда

$$S_V[\varphi] = \lim_{N \rightarrow \infty} S_V^{(N)}[\varphi], \quad (2.4)$$

$$S_V^{(N)}[\varphi] = \prod_{n=1}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u_n^2} \right) \exp\left\{-g \int_V dx U\left(\sum_{m=1}^N \mathcal{D}_m(x) u_m + \varphi(x)\right)\right\},$$

где

$$\mathcal{D}_m(x) = \int dy \mathcal{D}(x-y) g_m(y).$$

При выполнении условий (2.3) предел в (2.4) существует. Совокупность всех связанных графов Фейнмана задается функционалом

$$B_V[\varphi] = -\ln S_V[\varphi] = V E(g) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int dx_1 \dots \int dx_m B_m(x_1, \dots, x_m) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_m), \quad (2.5)$$

где $E(g)$ — плотность энергии вакуума, а $B_m(x_1, \dots, x_m)$ соответствует всем связным графам с n внешними линиями. Если положить $\varphi(x) = -\Phi = \text{const}$, то

$$B_V[\Phi] = -\ln S_V[\Phi] = V E(g, \Phi) = \quad (2.6)$$

$$= V \left[E(g) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi^m}{m!} T_m(g) \right],$$

где $T_m(g)$ - неперенормированная амплитуда процесса с n внешними линиями, причем все внешние импульсы $p_j = 0$. Знамя поведения плотности энергии вакуума

$$E(g, \phi) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln S_V[\phi], \quad (2.7)$$

когда поле $\varphi(x) = \phi = \text{const}$, дает информации о поведении амплитуд физических процессов.

Исследование функции $E(g, \phi)$ должно дать информации о

- 1) поведении функции $E(g)$ и амплитуд $T_m(g)$ при $g \rightarrow \infty$,
- 2) аналитических свойствах $E(g)$ и $T_m(g)$ в комплексной g -плоскости в окрестности вещественной оси.

К настоящему времени в [8] исследованы аналитические свойства и асимптотическое поведение функции $E(g)$ для ряда лагранжианов взаимодействия $V(\phi)$.

Характер поведения величины $E(g, \phi)$ оценивается из неравенств

$$E_-(g, \phi) \leq E(g, \phi) \leq E_+(g, \phi). \quad (2.8)$$

Здесь для произвольных $V(\phi)$

$$E_+(g, \phi) = \min_{A, g(\kappa^2) > 0} \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4} \left[\ln(1 + g(\kappa^2)) - \frac{g(\kappa^2)}{1 + g(\kappa^2)} \right] + \frac{m^2}{2} A^2 + g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} U(\sqrt{\Delta_g} u + A - \phi) \right\},$$

где

$$\Delta_g = \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{D}(\kappa^2)}{m^2 + \kappa^2}.$$

В случае, если функция взаимодействия такова, что

$$U(\phi) = F(\phi^2), \quad F''(\phi^2) > 0,$$

тогда можно записать

$$-U(\phi) = \min_s [-F(s) + (s - \phi^2)F'(s)].$$

Для нижней оценки в (2.8) получим

$$E_-(g, \phi) = \max_s \left\{ -g [s F'(s) - F(s)] + \frac{1}{2} \left(\frac{d'k}{(2\pi)^d} \ln(1 + 2g F'(s) \tilde{D}(k^2)) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \frac{2g F'(s)}{m^2 + 2g F'(s)} \right) \right\}.$$

В таблице приведено асимптотическое поведение плотности энергии вакуума для различных лагранжианов взаимодействия. Из таблицы видно, что характер поведения $E(g)$ при $g \rightarrow \infty$ определяется, во-первых, формой лагранжиана взаимодействия и, во-вторых, скоростью убывания нелокального пропагатора $\tilde{D}(k^2)$ в евклидовой метрике. Существование, что чем медленнее убывает $\tilde{D}(k^2)$, тем быстрее растет $E(g)$ при $g \rightarrow \infty$.

Таблица

$d=4$	$\tilde{D}(k^2)$ $k^2 \rightarrow \infty$	$E(g)$ $g \rightarrow \infty$
$g \varphi^{2n}$	$(k^2)^{-(1+a)}$	$g^{\frac{2}{n(1+a)-2(n-1)}}$
$g \varphi^4$	$\left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ -1- \\ e^{-k^2} \end{array} \right.$	$g^{\frac{1}{a}}$ $(\ln g)^3$
$g e^{\varphi^2}$	любое убывание	g
$g \cos \varphi^2$		g
$d=2$		
$g \varphi^4$	$\frac{1}{k^2}$	$-g (\ln g)^2$
$g \cos \varphi^2$		$g^{\frac{1}{1-\gamma}}, \gamma = \frac{\beta^2}{8\sigma} < 1$

Было, далее, доказано, что в случае неполономиальных лагранжианов взаимодействия, для которых $|V(\phi)| < 1$, функция $E(g)$ аналитична в окрестности вещественной полуоси в комплексной

g -плоскости. Для лагранжиана $V(\phi) = \phi^4$ оказалось, что $E(g)$ аналитична всюду, кроме отрицательной вещественной полуоси, включая точку $g=0$.

Дальнейшая задача состоит в отыскании асимптотики при $g \rightarrow \infty$ и исследовании аналитических свойств в g -плоскости для амплитуд $T_m(g)$. Покажем теперь, к каким выводам можно прийти, зная эти характеристики. Предположим, что $T_m(g)$ так же, как и $E(g)$, аналитична в окрестности положительной вещественной полуоси $g > 0$ и при $g \rightarrow \infty$ имеет некоторую асимптотику

$$T_m(g) = T_m(g, p_i = 0) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} f_m(g). \quad (2.9)$$

С другой стороны, по теории возмущений имеем для амплитуды упругого рассеяния (переход $2 \rightarrow 2$)

$$T_{2 \rightarrow 2}(g; s, t) = \sum_n g^n T_{2 \rightarrow 2}^{(n)}(s, t). \quad (2.10)$$

В нелокальной теории амплитуды растут с ростом энергии, как

$$T_{2 \rightarrow 2}^{(n)}(s, t) = O(\exp\{(n-1)(st)^p\}), \quad (2.11)$$

т.е. реальным параметром разложения является параметр $g \exp\{(st)^p\}$, как dh_s в электродинамике или ts в теории слабых взаимодействий. Используя далее аналитические свойства и асимптотику $T_{2 \rightarrow 2}(g, s)$, можно получить, что при $s \rightarrow \infty$

$$T_{2 \rightarrow 2}(g; s, t) \sim e^{-(st)^p} f_4(g e^{(st)^p}). \quad (2.12)$$

Далее имеем для полного сечения

$$\sigma(s) \sim \frac{1}{s} \text{Im} T_{2 \rightarrow 2}(g; s, 0) \sim \frac{1}{s} e^{-(st)^p} f_4(g e^{(st)^p}). \quad (2.13)$$

Качественные оценки показывают, что в нелокальной теории, когда $D(0) < \infty$, фактически для любых лагранжианов взаимодействия $f_m(g) \approx O(g)$ при $g \rightarrow \infty$.

Это означает, что в этих случаях

$$\sigma(s) = \begin{cases} O(\frac{1}{s}), \\ \text{или} \\ O(\exp(-(st)^p)), \end{cases} \quad (2.14)$$

т.е. сечение убывает как степень S или даже быстрее. Это согласуется с представлением, что нелокальные взаимодействия можно представить как взаимодействия, происходящие в некоторой среде с непрерывным распределением вещества без точечных рассеивающих центров. Естественно считать, что с ростом энергии такая среда будет становиться все более прозрачной для падающих частиц.

Однако в случае слабой сингулярности пропагатора $\tilde{D}(k)$ (например, $\tilde{D}(k) = O(k^{-4})$ - аналог локальной скалярной теории в двумерном пространстве-времени) можно ожидать, что (как в теории φ_2^4)

$$\sigma_4(g) = O(g(\ln g)^2) \quad (2.15)$$

$$\sigma(s) \sim \frac{(s^2)^{2\rho}}{s} \sim \text{const} \quad \text{при} \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, качественные оценки показывают, что в теории с нелокальным нелинейным или неполномонимальным лагранжианом взаимодействия у нас имеется достаточно широкие возможности.

Изложенные методы сильной связи в нелокальной квантовой теории поля могут быть применены для описания процессов множественного рождения адронов.

Прежде всего перечислим основные экспериментальные факты, характеризующие множественное рождение сильно взаимодействующих частиц для не слишком больших передач импульса, без так называемых жестких соударений (физика малых P_{\perp}).

1) Полное сечение взаимодействия постоянно или слабо растет в широком интервале энергий $\sigma(s) \approx \text{const}$.

2) Поперечные импульсы вторичных частиц ограничены, распределение частиц по поперечному импульсу имеет вид

$$F(p_{\perp}) \sim \exp\{-\lambda E_{\perp}\},$$

$$E_{\perp} = \sqrt{p_{\perp}^2 + m^2}, \quad \lambda = \frac{1}{170 \text{ МэВ}}.$$

$$P_{\perp} \approx 300 \div 400 \text{ МэВ}, \quad p_{\perp} \approx 2 \text{ ГэВ/с}$$

3) наблюдается эффект лидирующей частицы, когда одна из вторичных частиц (чаще всего по квантовым числам совпадающая с падающей частицей) уносит большую долю начальной энергии.

4) Вторичные частицы рождаются струями, т.е. в каждом случае множественного рождения адронов можно выделить некоторое направление, относительно которого средний поперечный импульс вторичных частиц остается ограниченным при росте начальной энергии и продольного импульса.

5) Рождение вторичных частиц (пионов) идет через промежуточное состояние (кластеры, фейерболы, резонансы).

6) Средняя множественность медленно растет с ростом энергии

$$\bar{n}(s) \sim \ln s \quad \text{или} \quad s^\beta \quad (\beta < 1).$$

Для теоретического описания процессов множественного рождения создано к настоящему времени множество феноменологических моделей: мультипериферическая, мультирежисовская, мультифейербольная, модель независимого испускания кластеров, модель некоординированных струй, статистический бутстрал и т.д. (см., например, ¹¹⁰). Эти модели в целом удовлетворительно описывают экспериментальные данные. Из многочисленных предположений, лежащих в основе этих моделей, нам бы хотелось выделить следующие, на наш взгляд, основные пункты:

1) Процесс множественного рождения — это двухступенчатый процесс, т.е. считается, что сначала после столкновения возникает кластер (фейербол резонанс), которые затем распадаются на наблюдаемые адроны.

2) Процесс множественного рождения протекает в ограниченном объеме $\sim 10^{-13}$ см. Правда, имеются модели, где объем растет с ростом массы кластера (например, коллективное возбуждение "мешка").

3) Спектр адронных состояний имеет вид

$$\rho(m) \sim \exp\left\{\frac{m}{T_0}\right\},$$

где $T_0 \sim m_T$ и не зависит от начальной энергии и массы кластера.

Все эти модели далеки от квантовополюсового описания элементарных частиц. В последнее время предпринимается попытка ¹¹¹ описать физику множественного рождения адронов в квантовополюсовом подходе. Однако эти подходы пока успеха не имели.

Наша идея состоит в том, чтобы описать процессы множественного рождения адронов в квантовой теории поля с нелокальным неполномасштабным взаимодействием вида

$$\mathcal{L}_I(x) = g V(K(\rho^2) \varphi(x)) = g \sum_{n=3}^{\infty} \frac{u_n}{n!} (K(\rho^2) \varphi(x))^n. \quad (2.16)$$

Сразу же можно сказать, что в построенной теории все требования (релятивистская ковариантности, унитарности, конечности, причинности и т.д.) будут выполнены.

Выбор лагранжиана взаимодействия в форме (2.16) позволяет учесть следующие характеристики физики множественного рождения:

1) лагранжиан (2.16) описывает рождение любого числа частиц,
 2) рождение частиц происходит в ограниченном объеме, размер которого $\sim \rho$.

3) в лагранжиане (2.16) коэффициенты u_n , т.е. форма функции $V(\phi)$, учитывает спектр адронов.

Выше уже говорилось, что в рамках нелокальной квантовой теории поля с лагранжианом взаимодействия вида (2.16) можно добиться, чтобы сечение было постоянным. Ограниченность поперечного импульса связана с регулярностью поведения пропагатора при совпадающих аргументах. Далее, в теории возмущений $T_{L \rightarrow N}^{(n)}(S_{ij})$ при $S_{ij} \rightarrow \infty$ растет быстрее, чем $\exp\{(n-1)(S_{ij})^2\}$, поэтому чем большее число энергетических переменных S_{ij} растет при $S \rightarrow \infty$, тем быстрее убывает амплитуда $T_{2 \rightarrow N}(S)$. Таким образом, более вероятным является процесс, когда основную энергию заберет одна частица. Это может объяснить эффект лидирующей частицы.

Возможен еще несколько другой подход. В нелокальной теории можно ввести поле кластера $\Gamma(x)$, такое, что пропагатор этого поля равен

$$\langle 0 | T(\Gamma(x)\Gamma(x')) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{-ik(x-x')} \quad (2.17)$$

$$G(k) = \int_{m^2}^{\infty} \frac{dx^2 \rho(x^2)}{x^2 - k^2 - i\varepsilon} \cdot \frac{W(k^2)}{W(x^2)}.$$

Здесь спектр кластера

$$\rho(x^2) = \sum_{n=1}^{[x/m]} \gamma_n \Omega_n(x^2),$$

$\Omega_n(x^2)$ - фазовый объем n скалярных частиц, γ_n - коэффициенты, характеризующие спектр, $W(\varepsilon)$ - целая функция, такая, что интеграл в (2.17) сходится и $G(k^2)$ убывает в евклидовой метрике.

Далее можно рассматривать взаимодействия кластеров, например, $g\Gamma^4(x)$ и т.д. Развал кластеров на мезоны можно осуществить различными способами.

Предлагаемые модели пока поддаются только качественному анализу. Необходимо еще провести ряд исследований, чтобы найти ту единственную модель, которая описывает картину множественного рождения.

В целом мы, тем не менее, убеждены, что в рамках квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием можно описать основные черты процессов множественного рождения адронов.

Литература

1. А.Д.Донков, В.Г.Кадмиевский, М.Д.Матвеев, Р.М.Мир-Касимов. Взаимодействие частиц на малых расстояниях и фундаментальная длина. Материалы IV Международного совещания по нелокальной теории поля. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
2. Г.В.Ефимов. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. "Наука", М., 1977.
3. М.А.Соловьев, В.Я.Файнберг. Современное состояние аксиоматической квантовой теории поля неполиномиального роста. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
4. А.З.Дубничкова, Г.В.Ефимов. ОИЯИ, Е2-10371, Дубна, 1977.
5. А.З.Дубничкова, Г.В.Ефимов, М.А.Иванов. ОИЯИ, Р2-10734, Дубна, 1977.
6. Г.В.Ефимов, М.А.Иванов. ОИЯИ, Е2-11065, Р2-10740, Дубна, 1977.
7. М.Динейхан, Г.В.Ефимов, Д.Д.Лобанов. ОИЯИ, Р2-12430, Дубна, 1979.
8. G.V.Efimov. Commun. Math.Phys., 57,235,1977; 65,15,1979.
9. H.Joos. Quark confinement. DESY 76/36, July, 1976;
S.D.Drell. Quark confinement SLAC-PUB-2020, October, 1977.
10. И.М.Дремин, К.Квириг.УФН, 124, вып.3, 535, 1978.
11. E.Etin, R.Hagedorn. Nucl.Phys. B131,429,1977;
L.Turko. Nucl.Phys.B114, 535, 1976.

КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ДЛИНОЙ

В.Г.Кадьяшевский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Фундаментальная длина и импульсное пространство де Ситтера

В настоящем сообщении обсуждается теория электромагнитных взаимодействий, основанная на концепции фундаментальной длины. Эта новая гипотетическая константа обозначается буквой l . Величина

$$M = \frac{\hbar}{lc} \quad (I.1)$$

будет называться фундаментальной массой.

Идея о существовании в природе новой универсальной постоянной размерности длины, которая бы фиксировала определенный масштаб в пространстве-времени (и соответственно в силу (I.1) в четырехмерном импульсном пространстве), многократно обсуждалась в литературе в самых различных контекстах^{/1-14/}. Главным стимулом для всех попыток ввести в теорию поля фундаментальную длину была надежда, что на этом пути удастся избавиться от ультрафиолетовых расходимостей. Оказалось, однако, что в так называемых перенормируемых теориях существование расходимостей не мешает проведению количественных расчетов. В результате интерес к проблеме фундаментальной длины почти пропал (см., тем не менее, ^{/15-18/}).

Самым убедительным примером плодотворности алгоритма перенормировки и возможности построения на его основе вычислительной схемы может служить квантовая электродинамика (КЭД). Предсказания КЭД согласуются с опытом с беспрецедентной точностью, что является наиболее веским доказательством ее жизнеспособности как физической

теории. Таким образом, следует признать, что гипотеза о существовании фундаментальной длины — это прежде всего вызов существующей квантовой электродинамике^{*)}. Чтобы иметь надежду выжить, эта гипотеза должна углубить КЭД как физическую теорию, сохранив, разумеется, ее согласие с уже имеющимися экспериментальными данными.

Как известно, КЭД является простейшим и исторически первым примером калибровочной теории поля, где вид взаимодействия определяется из соображений симметрии. Соответствующая (абелева) группа локальных калибровочных преобразований имеет вид $(k=c=1)$ ^{**)}

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{ie\lambda(x)}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{-ie\lambda(x)}\bar{\psi}(x); \end{aligned} \quad (I.3a)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x^\mu}; \quad \lambda^+(x) = \lambda(x). \quad (I.3b)$$

Требование инвариантности теории относительно группы (I.3) в сочетании с принципом минимальности электромагнитного взаимодействия, выражаемого подстановкой

$$i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (I.5)$$

сразу приводит к уравнениям Дирака-Максвелла для "голых" полей:

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x) \right) \gamma^\mu - m \right] \psi(x) = 0, \quad (I.6a)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad (I.6b)$$

*) Из опытов по проверке КЭД в области высоких энергий можно извлечь следующий верхний предел для фундаментальной длины:

$$l \lesssim 10^{-15} \text{ см.} \quad (I.2)$$

**) В p -представлении условие эрмитовости λ -функций, очевидно, выглядит так:

$$\lambda^+(p) = \lambda(-p), \quad (I.4)$$

где

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A^\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu}. \quad (I.7)$$

Группа (I.3) и подстановка (I.5) не содержат какого-либо масштаба типа ℓ или M . Поэтому современная КЭД формально применима на любых пространственно-временных расстояниях и при всех значениях 4-импульса.

С другой стороны, если в природе существует фундаментальная длина, то в дополнительных по отношению друг к другу областях

$$|x| \leq \ell, \quad (I.8a)$$

$$|p| \gtrsim M \quad (I.8b)$$

рассматриваемая ортодоксальная формулировка КЭД уже не может считаться адекватной физической сути электромагнитных явлений. В простейшем случае, когда $e A_\mu = \text{const} \equiv C_\mu$ и, следовательно, $F^{\mu\nu}(x) = 0$, постановка (I.5) эквивалентна замене

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - C_\mu. \quad (I.9)$$

Таким образом, группа калибровочных преобразований (I.3) здесь совпадает с группой параллельных переносов \mathcal{P} -пространства Минковского. Другими словами, в рамках обычной КЭД импульсное 4-пространство должно быть плоским псевдоевклидовым пространством. Соответственно, если (I.5) и (I.3) нельзя применять в областях (I.8), то структура \mathcal{P} -пространства не обязана быть псевдоевклидовой при $|p| \gtrsim M$. Возникает вопрос: какой геометрией может обладать импульсное 4-пространство, если эта геометрия не является псевдоевклидовой?

Согласно общей классификации (псевдо)евклидовых пространств суть пространства нулевой кривизны. Их ближайшими "соседями" являются пространства постоянной ненулевой кривизны. В нашем 4-случае это так называемые пространства де Ситтера. Поэтому естественно попытаться ввести в импульсном 4-пространстве геометрию де Ситтера. Такая геометрия реализуется на поверхности однополостного 5-гиперболоида

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - M^2 p_4^2 = -M^2. \quad (I.10)$$

Радиус кривизны этого гиперболоида отождествляется с фундаментальной массой (I.1), которая в силу (I.2) достаточно велика. Заметим, что

уравнение (I.10) не накладывает никаких ограничений на времени-подобные 4-импульсы и поэтому не приводит к каким-либо трудностям при построении пространства Фока и формулировке требования инвариантности \mathcal{S} -матрицы относительно группы Пуанкаре. В области малых 4-импульсов, например при

$$|\vec{p}|, |\vec{p}'| \ll M, \quad p^4 \approx 1, \quad (\text{I.11})$$

геометрия на поверхности (I.10) не отличается от псевдоевклидовой^{*)}. Поскольку гиперболоиды массовых поверхностей

$$p^2 = m_1^2, \quad p^2 = m_2^2, \dots$$

одинаково легко вкладываются как в p -пространство де Ситтера (I.10), так и в плоское p -пространство Минковского, свободные частицы не могут различать эти две геометрии. Фактически только виртуальные (взаимодействующие) частицы способны зондировать геометрическую структуру импульсного 4-пространства. В области больших виртуальных импульсов (I.8б) кривизна p -пространства де Ситтера играет доминирующую роль. Поэтому описание взаимодействий элементарных частиц в этой области и, следовательно, на малых пространственно-временных расстояниях (I.8), основанное на использовании p -пространства де Ситтера, будет радикально отличаться от той картины, которая возникает в обычном подходе, связанном с использованием псевдоевклидова p -пространства.

Общий подход к построению квантовой теории в p -пространстве де Ситтера, удовлетворяющей требованию трансляционной инва-

*) Кроме (I.10), существует еще только одно пространство де Ситтера, переходящее в пространство Минковского в "плоском пределе" (I.11), а именно:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + M^2 p_4^2 = M^2.$$

Однако в этой геометрии возникает универсальное ограничение сверху на времениподобные 4-импульсы:

$$p_0^2 - \vec{p}^2 \leq M^2,$$

что создает осложнение при реализации унитарных представлений группы Пуанкаре в пространстве Фока.

риантности, был развит в работах^{/19-29/ж}). Однако возможность калибровочно-инвариантной формулировки КЭД, приспособленной к новым геометрическим условиям, до последнего времени по существу оставалась неисследованной.

Ниже мы рассмотрим одну такую формулировку, следуя работам^{/30-33/}.

II. Новая концепция локального калибровочного преобразования и 5-потенциал электромагнитного поля

Даже еще не зная, как выглядит новое калибровочные преобразования, обобщающие в духе геометрии p -пространства де Ситтера (I.10) группу преобразований (I.3), можно утверждать, что в импульсном представлении соответствующие функции λ представимы в виде.

$$\lambda(p^0, \vec{p}, p^V) = \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 - M^2 p^V^2 + M^2) \tilde{\lambda}(p^0, \vec{p}, p^V) \quad (2.1a)$$

при дополнительном ограничении

$$\lambda^+(p^0, \vec{p}, p^V) = \lambda(-p^0, -\vec{p}, p^V), \quad (2.1б)$$

ж) Полученные на этом пути результаты докладывались на предыдущих конференциях по нелокальной и нелинейной теории поля, начиная с 1970 года.

Отметим, что сама идея использовать искривленное p -пространство (I.10) в теории поля впервые была выдвинута в работах^{/4,8/}. В^{/20/} можно найти ссылки на работы, в которых развивается подход, изложенный в^{/4/} и^{/8/}. В^{/10/} обсуждалась теория поля, в которой пространство импульсов имело переменную кривизну. Отметим, что во всех ранних работах по применению неевклидова p -пространства не выполнялся закон сохранения 4-импульса, т.е. была нарушена трансляционная инвариантность теории.

Концепция нелокального электромагнитного поля, основанная на идеях, близких к гипотезе неевклидова импульсного пространства, и в то же время сохраняющая трансляционную инвариантность теории, была развита М.А.Марковым много лет тому назад^{/3/}.

переходим в условие эрмитовости (I.4) в "плоском пределе" (I.II).
Если положить далее

$$\lambda(p, p^*) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ipx + ip^* \tau} \lambda(x, \tau) d^4x d\tau, \quad (2.2)$$

то из (I.I2) следует, что

$$(\square - M^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - M^2) \lambda(x, \tau) = 0, \quad (2.3a)$$

$$\lambda(x, \tau)^+ = \lambda(x, -\tau). \quad (2.3b)$$

Таким образом, калибровочные преобразования в новой схеме можно локализовать в псевдоевклидовом 5-пространстве (x, \vec{x}, τ) , причем функции $\lambda(x, \tau)$, параметризующие их, удовлетворяют условиям (2.3). Ясно, что соответствующее калибровочное поле, т.е. электромагнитный потенциал, в таком случае должно быть 5-вектором, подобным (x, \vec{x}, τ) . Обозначим его следующим образом:

$$A_L(x, \tau) = (A_\lambda(x, \tau), A_\mu(x, \tau)) \quad (2.4)$$

$\lambda = 0, 1, 2, 3$

Дополнительная компонента $A_4(x, \tau)$ в дальнейшем будет именоваться τ -фотон. Нейтральность электромагнитного поля выражается теперь соотношением (ср. (2.3b))

$$A_L(x, -\tau) = (A_\lambda^+(x, \tau), -A_4^+(x, \tau)). \quad (2.5)$$

Это равенство можно осмыслить и как закон преобразования электромагнитного 5-потенциала при отражении оси τ .

Согласно ^{130/} уравнения движения для всех пяти компонент потенциала (2.4) в единицах $\hbar = c = \hbar = M = 1$ имеют вид:

$$\begin{aligned} A_\lambda(x, \tau) + i \frac{\partial A_\lambda(x, \tau)}{\partial \tau} - i \frac{\partial A_4(x, \tau)}{\partial x^\lambda} &= 0, \\ A_4(x, \tau) - i \frac{\partial A_4(x, \tau)}{\partial \tau} + i \frac{\partial A_\nu(x, \tau)}{\partial x_\nu} &= 0, \\ (\square - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1) A_\lambda(x, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Легко убедиться, что эти уравнения инвариантны относительно следующего калибровочного преобразования:

$$\begin{aligned}
 A_{\mu}(x, \tau) &\rightarrow A_{\mu}(x, \tau) - \frac{\partial \lambda(x, \tau)}{\partial x^{\mu}}, \\
 A_{4}(x, \tau) &\rightarrow A_{4}(x, \tau) + i \lambda(x, \tau) - \frac{\partial \lambda(x, \tau)}{\partial \tau},
 \end{aligned}
 \quad (2.7)$$

где функция $\lambda(x, \tau)$ удовлетворяет уравнению (2.3а) и условию (2.3б).
 Полагая

$$e^{-i\tau} A_{M}(x, \tau) \equiv B_{M}(x, \tau) \quad (M = 0, 1, 2, 3, 4), \quad (2.8)$$

мы можем записать (2.7) в виде пятимерного градиентного преобразования:

$$B_{M}(x, \tau) \rightarrow B_{M}(x, \tau) - \frac{\partial}{\partial x^{M}} (e^{-i\tau} \lambda(x, \tau)). \quad (2.9)$$

Вводя в рассмотрение 5-тензор напряженностей электромагнитного поля

$$F_{MN}(x, \tau) = \frac{\partial B_{M}(x, \tau)}{\partial x^{N}} - \frac{\partial B_{N}(x, \tau)}{\partial x^{M}} \quad (2.10)$$

и принимая во внимание уравнения (2.6), нетрудно установить, что

$$F_{\mu 4}(x, \tau) = 0, \quad \frac{\partial F^{\mu\nu}(x, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x, 0)}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) представляет собой свободное уравнение Максвелла в четырехмерном конфигурационном пространстве. Это подразумевает, что 4-вектор $B_{\mu}(x, 0)$ можно отождествить с обычным 4-потенциалом $A_{\mu}(x)$:

$$B_{\mu}(x, 0) = A_{\mu}(x, 0) \equiv A_{\mu}(x). \quad (2.13)$$

В силу (2.7) калибровочные преобразования $A_{\mu}(x)$ совпадают с (1.35) при условии, что $\lambda(x) = \lambda(x, 0)$.

Как было показано в [30], τ -фотонная компонента $A_{4}(x, \tau)$, аналогично скалярным и продольным фотонам, не является независимой динамической степенью свободы и может быть совсем исключена с помощью подходящего калибровочного преобразования (2.7). Однако

Состояния (3.6) выражают тот простой геометрический факт, что при погружении массовой поверхности \mathbb{R}^2 в пятимерное пространство де Ситтера (1.10) фиксированной оказывается лишь величина μ_1^2 , тогда как знак μ_1 остается произвольным. Поэтому в отличие от "плоской" теории мы неизбежно должны теперь иметь дело с двумя состояниями (3.6) вместо одного^{*)}.

Используя (3.1), нетрудно убедиться, что обе компоненты волновой функции

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}\gamma^5} \psi_1(x,0) \\ e^{-i\frac{\theta}{2}\gamma^5} \psi_2(x,0) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$\sin \theta = t_0 \mu_1^2, \quad (3.8)$$

удовлетворяют стандартному свободному уравнению Дирака:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi_a(x) = 0; \quad a = 1, 2. \quad (3.9)$$

Таким образом, (3.7) следует рассматривать как правило перехода от описания дираковского поля во вспомогательном пятимерном (x, τ) - пространстве к обычному описанию (ср. (2.13)).

Система уравнений (3.9) инвариантна относительно группы унитарных преобразований в 2-пространстве величин (3.7). Мы будем обозначать эту группу симметрии посредством $SU_2(x)$, т.к. ее возникновение непосредственно связано с симметрией относительно τ - инверсии.

IV. Новая группа калибровочных преобразований и взаимодействующие поля

Итак, переход к p -пространству де Ситтера эквивалентен

^{*)} В случае электромагнитного поля подобное удвоение состояний отсутствует благодаря нейтральности данного поля (см. (2.5)). С помощью (2.6) можно показать, что в лоренцевской калибровке $\partial^\mu A_\mu(p, p') = 0$ для обычных фотонов $p^0 = 1 > 0$, а для τ -фотонов $p^0 = -1 < 0$.

специфической пятимерной формулировке теории свободных полей. При этом уравнения электромагнитного поля (2.6) оказываются инвариантными относительно более широкой, чем в обычном подходе, группы калибровочных преобразований (2.7). В силу (2.3а) данная группа нетривиальным образом зависит от фундаментальной длины. Соотношения (2.13) и (3.7) осуществляют связь между пятимерным формализмом и стандартной теорией свободных полей.

Чтобы построить на этом фундаменте адекватную теорию электромагнитных взаимодействий, необходимо вначале наделять дираковское поле $\Psi(x, \tau)$ определенными трансформационными свойствами относительно калибровочных преобразований (2.7). Принимая во внимание (2.9), естественно предположить, что при преобразовании (2.7) волновая функция $\Psi(x, \tau)$ в 5-пространстве испытывает "фазовое" преобразование вида

$$\Psi(x, \tau) \rightarrow \exp [i e \lambda(x, \tau) e^{-i\tau}] \Psi(x, \tau), \quad (4.1)$$

где e - электрический заряд^{*)}.

Теперь постулируем, что новая теория электромагнитных взаимодействий остается инвариантной при локальных калибровочных преобразованиях (2.7) и (4.1) с функцией $\lambda(x, \tau)$, подчиняющейся условиям (2.3). Сразу возникает вопрос: как должен формулироваться новый принцип минимального электромагнитного взаимодействия? Учитывая (2.9), (4.1) и то обстоятельство, что в уравнения (3.1) все компоненты оператора 5-импульса $i \frac{\partial}{\partial x^M}$ входят симметричным образом, можно заключить что вместо (I.5а) теперь следует применять подстановку

$$i \frac{\partial}{\partial x^M} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x^M} - e A_M(x, \tau) e^{-i\tau} \quad M = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (4.2)$$

Следующий шаг в предпринятом нами построении должен быть связан с развитием соответствующего лагранжева формализма. Этот вопрос подробно рассмотрен в ^{133/}, и мы не будем здесь на нем останавливаться. Отметим лишь, что в нашем распоряжении оказыв-

*) Заметим, что для каждой компоненты дублета (3.7) преобразование (4.1) сводится к обычному фазовому преобразованию (I.3а) с $\lambda(x) = \lambda(x, \tau)$.

яется система уравнений для взаимодействующих пятимерных полей $\Psi^{(a)}$ и $A_{\mu\nu}(x, \tau)$, инвариантная относительно калибровочных преобразований (4.1) и (3.7) и τ -инверсии. Если, используя (2.13) и (3.7), перейти к обычным четырехмерным величинам $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $A_{\mu\nu}(x)$, то для них получаются следующие уравнения движения (в единицах $\hbar=c=1$):

$$\begin{aligned} & [(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu)\gamma^\mu - m]\psi_2(x) = \\ & = \frac{ie\ell\cos\theta}{4}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi_2(x) - \frac{e\ell\sin\theta}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi_2(x) - \\ & - \frac{e^2\ell^2}{8}[(\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x) + \bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\psi_1(x))\gamma^\mu\psi_2(x) + \\ & + (\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_1(x) - \bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\psi_2(x))\gamma^\mu\psi_2(x)], \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} & [(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x))\gamma^\mu - m]\psi_2(x) = \\ & = \frac{ie\ell\cos\theta}{4}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi_2(x) - \frac{e\ell\sin\theta}{4}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi_2(x) + \\ & + \frac{e^2\ell^2}{8}[(\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x) + \bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\psi_1(x))\gamma^\mu\psi_2(x) - \\ & - (\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_1(x) - \bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\psi_2(x))\gamma^\mu\psi_2(x)], \end{aligned} \quad (4.3b)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = e[j^\mu(x) + \ell\cos\theta j_{2aM}^\mu(x) + \ell\sin\theta j_{12aM}^\mu(x)], \quad (4.3b)$$

где

$$j^\mu(x) = \sum_{a=1,2} \bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu\psi_a(x), \quad (4.4)$$

$$j_{2aM}^\mu(x) = -\frac{i}{2} \sum_{a=1,2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\bar{\psi}_a(x)\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\psi_a(x)), \quad (4.5)$$

$$j_{12aM}^\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{a=1,2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\bar{\psi}_a(x)\sigma^{\mu\nu}\psi_a(x)). \quad (4.6)$$

$$\sin \theta = \operatorname{th} \eta/2 = \frac{\sqrt{1+m^2 \ell^2} - 1}{m \ell}, \quad (4.7)$$

$$\cos \theta = 1/\operatorname{ch} \eta/2 = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1+m^2 \ell^2}}} \quad (\text{ср. (3.8)}).$$

Система уравнений (4.3) выглядит как нетривиальное обобщение системы уравнений Дирака-Максвелла (I.6). Соответствующий лагранжиан дается выражением:

$$\begin{aligned} L(x) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \bar{\Psi}(x) \left[i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A_\mu(x) \right] \sigma_0 \gamma^\mu \Psi(x) - \\ & - \frac{i e \ell}{4} \cos \theta \left[\bar{\Psi}(x) \sigma_0 \times \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} \Psi(x) \right] F_{\mu\nu}(x) + \\ & + \frac{e \ell}{4} \sin \theta \left[\bar{\Psi}(x) \sigma_0 \times \sigma^{\mu\nu} \Psi(x) \right] F_{\mu\nu}(x) + \\ & + \frac{e^2 \ell^2}{8} \left[\bar{\Psi}(x) \sigma_1 \gamma^\mu \Psi(x) \right] \left[\bar{\Psi}(x) \sigma_3 \gamma_\mu \Psi(x) \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

где дираковские поля объединены в 8-компонентные спиноры

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

и

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что в полученной электродинамике на равных правах с традиционным минимальным электромагнитным взаимодействием фигурируют и исчезающие при $\ell \rightarrow 0$ неминимальные взаимодействия:

а) взаимодействие $\sim e \ell \cos \theta$, индуцированное электрическим дипольным моментом (ЭДМ);

б) паулевское взаимодействие $\sim e \ell \sin \theta$, индуцированное магнитным дипольным моментом (МДМ);

в) векторное четырехфермионное взаимодействие $\sim e^2 \ell^2$. Это новое электромагнитное взаимодействие, не содержащее вовсе 4-потенциал $A_\mu(x)$, обязано своим существованием τ -фотонам.

Очевидно, что ЭДМ-взаимодействие нарушает в лагранжиане (4.8) P- и CP-симметрии, а τ -фотонное четырехфермионное взаимодействие - симметрию относительно группы $SU_\tau(2)$. Заметим также,

что из (4.3а) и (4.3б) следует уравнение непрерывности для полного электромагнитного тока (4.4);

$$\frac{\partial j^{\mu}(x)}{\partial x^{\mu}} = 0. \quad (4.10)$$

Токи (4.5)-(4.6) удовлетворяют уравнению непрерывности (4.10) независимо от уравнений движения полей.

У. Обсуждение и интерпретация

Начнем с $SU_c(2)$ -симметрии. Ясно, что развитая нами схема после проведения процедуры квантования должна быть прежде всего применена для описания электромагнитных взаимодействий лептонов-электрона и мюона, ибо обычная КЭД здесь достигла поразительного согласия с опытными данными.

Как хорошо известно, до сих пор не найдено никаких различий в электромагнитных свойствах e и μ . Если бы не разность масс, эти частицы в рамках КЭД были бы идентичны. Происхождение этой $e\mu$ -универсальности электромагнитных взаимодействий представляет собой старую загадку.

В обсуждаемой нами теории как будто возникает естественная возможность для описания $e\mu$ -универсальности. Она связана с существованием того нового "аромата", который отличает поля $\psi(x)$ и $\psi_2(x)$. Примем как гипотезу, что

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Тогда можно утверждать, что развитая теория электромагнитных взаимодействий $e\mu$ -универсальна в том смысле, что она формулируется одновременно и для e , и для μ ^{*}. В приближении,

* Недавно открытый τ -лептон должен входить в другой $SU_c(2)$ -дублет с неизвестным пока партнером. Подчеркнем, что новый "аромат" не является, конечно, привилегией одних лептонов. Это универсальное квантовое число, внутренне связанное с нашей концепцией фундаментальной длины, должно иметь отношение ко всем частицам, в частности, к адронам, гипотетическому промежуточному W -бозону и т.д.

В семействе адронов различие между "электроноподобными" и "мюноподобными" состояниями, по-видимому, следует вводить на уровне кварков. Возможно, кварки μ -типа окажутся значительно тяжелее кварка e -типа. Тогда примесь μ -кварков должна приводить к заметному утяжелению адронов. Возникает естественный вопрос: не состоит ли τ -семейство ($m \sim 10$ ГэВ) из кварков и антикварков μ -типа?

Ометим, что при калибровочном подходе к самой $\psi(x)$ -симметрии мы неизбежно приходим к $SU_c(2)$ -триплетам.

когда четырехфермионное τ -фотонное взаимодействие в (4.8) не учитывается, U_1 -универсальность электромагнитного взаимодействия проявляется как $SU_2(2)$ -симметрия обычного минимального взаимодействия и новых адр- и мю-членов. При этом массы электрона и мюона должны считаться равными. Замечливо предположить, что нарушающее $SU_2(2)$ -симметрию τ -фотонное взаимодействие

$$\frac{e^2 \ell^2}{g} [\bar{\psi}(x) \sigma_1 \times \gamma_\mu \psi(x)] [\bar{\psi}(x) \sigma_3 \times \gamma_\mu \psi(x)] \quad (5.2)$$

ответственно за возникновение разности масс мюона и электрона. Этот вопрос в настоящее время исследуется.

Благодаря взаимодействию (5.2), становится возможным распад

$$\mu \rightarrow 3e \quad (5.3)$$

и, следовательно, реакции

$$\mu \rightarrow e\gamma, \quad (5.4a)$$

$$\mu \rightarrow e\gamma\gamma, \quad (5.4b)$$

$$\mu + Z \rightarrow e + Z \quad (5.4в)$$

и т.д. Из экспериментов по поиску распада (5.3) следует, что ^{34/}

$$\frac{\Gamma(\mu \rightarrow 3e)}{\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})} < 1.9 \times 10^{-9}. \quad (5.5)$$

Отсюда и из (5.2) находим верхнюю границу для фундаментальной длины ℓ ж):

$$\ell \lesssim 3 \times 10^{-18} \text{ см.} \quad (5.6)$$

Если полученную оценку для ℓ использовать в расчетах вероятности распада (5.4a), исходя из следующего графического представления данного процесса



то результат оказывается согласующимся с последними эксперимен-

*) Обрати внимание на то, что эта величина на три порядка меньше оценки (1.2).

таковыми данными /35/:

$$\frac{\Gamma(\mu \rightarrow e \gamma)}{\Gamma(\mu \rightarrow e \bar{\nu})} \leq 2.0 \cdot 10^{-10}. \quad (5.7)$$

Займемся теперь анализом эдм- и мдм-взаимодействий, возникающих в новой схеме. Вводя в уравнениях Дирака (4.3а) и (4.3б) стандартное обозначение $\frac{e\kappa}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi_a(x)$ для паулевских членов и учитывая (4.7), находим следующее выражение для рожденного аномального магнитного момента "голой" дираковской частицы:

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa \mu - 1 = \sqrt{1 + m^2 l^2} - 1 = \\ &= \sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} - 1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Далее будет удобно перейти в уравнениях (4.3а)-(4.3б) к нерелятивистскому приближению Паули. Предполагая, что электромагнитное поле является внешним, причем

$$A^0 = \phi(r), \quad \vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H} \times \vec{r}], \quad \vec{H} = \text{const}, \quad (5.9)$$

и производя в (4.3а)-(4.3б) разложение по степеням $1/c$, приходим к обобщенному уравнению Паули:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a(\vec{r}, t) &= \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - e\phi(r) - \frac{e}{2mc} (\vec{L} + g\vec{S}) \cdot \vec{H} + \right. \\ &\left. + \frac{e \cos\theta}{Mc} (\vec{S} \cdot \vec{E}) \right] \psi_a(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

(a=1,2),

где $\vec{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{S} = \frac{\hbar \vec{\sigma}}{2}$,
 $\vec{E} = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial \vec{r}}$

и

$$\begin{aligned} g &= 2(1 + \kappa) = 2\sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}}, \\ \cos\theta &= \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}}}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Записывая эдм-взаимодействие в стандартной форме

$$V_{\text{эдм}} = -(\vec{\alpha} \cdot \vec{E}),$$

получаем следующее выражение для вложенного электрического дипольного момента "голой" дираковской частицы:

$$\vec{d} = -e \frac{\cos \theta}{Mc} \vec{S} = -e \frac{\cos \theta}{2} \vec{\sigma}. \quad (5.12)$$

Заметим, что вектор \vec{d} антипараллелен вектору магнитного момента частицы

$$\vec{\mu} = \frac{e g}{2mc} \vec{S}. \quad (5.13)$$

Уравнение (5.10) справедливо для любых значений отношения $\frac{m}{M}$. В случае лептонов, разумеется (см. (1.2) и (5.6)), $\frac{m}{M} \ll 1$. Отсюда и из (5.11) и (5.12) следует, что

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\text{лептон}} \approx \frac{m^2}{2M^2}, \quad (5.14a)$$

$$|\vec{d}|_{\text{лептон}} \approx \frac{e \ell}{2}. \quad (5.14b)$$

Сравнивая (5.14a) с теми ошибками (теоретическими и экспериментальными), с которыми на сегодня определены величины $\frac{g-2}{2}$ для μ и e ^{36/}, находим еще одну верхнюю границу для фундаментальной длины ℓ :

$$\ell \lesssim 2.6 \cdot 10^{-17} \text{ см.} \quad (5.15)$$

Принимая во внимание (5.6), (5.15) и (5.14b), можно сделать вывод, что

$$|\vec{d}|_{\text{лептон}} \lesssim 10^{-18} \text{ е*см.} \quad (5.16)$$

Эта оценка согласуется со всеми экспериментальными данными по прямому измерению электронного и мюонного эдм ^{36/}, с наблюдаемыми сдвигами атомных уровней ^{37/} с наблюдаемыми эффектами несохранения четности в атомах ^{38-39/} и в рассеянии поляризованных электронов на дейтерии ^{40/}.

С другой стороны, был проведен целый ряд экспериментов, в которых величина $|\vec{a}|$ электрон определялась косвенным образом на основе измерений эдм атомов. Полученные оценки верхнего предела для электронного эдм оказываются на много порядков меньше, чем (5.16):

$$|\vec{a}|_{\text{электрон}} < \begin{cases} 3 \cdot 10^{-24} \text{ е} \cdot \text{см} /41/, \\ (0,7 \pm 2,2) \cdot 10^{-24} \text{ е} \cdot \text{см} /42/, \\ (1,9 \pm 3,4) \cdot 10^{-24} \text{ е} \cdot \text{см} /43/, \\ (8,1 \pm 11,6) \cdot 10^{-23} \text{ е} \cdot \text{см} /44/. \end{cases} \quad (5.17)$$

Результаты /41-43/ *) лежат в том же интервале значений, что и последние данные по измерению эдм нейтрона /45/:

$$|\vec{a}|_{\text{нейтрон}} < 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ е} \cdot \text{см}. \quad (5.18)$$

Из (5.17) и (5.18) следует значительно более жесткое ограничение на величину ℓ :

$$\ell \lesssim 10^{-24} - 10^{-23} \text{ см}. \quad (5.19)$$

Полагая, что электромагнитные взаимодействия кварков описываются нашими уравнениями (4.3), подобную оценку для ℓ можно извлечь и из (5.18), если рассматривать нейтрон в рамках релятивистской кварковой модели /46/.

Хорошо известно /47/, что обнаружение эдм у элементарных частиц было бы прямым свидетельством несохранения CP-симметрии. Как мы убедились, механизм нарушения CP-инвариантности может быть чисто электромагнитным, если теорию электромагнитных взаимодействий развивать на основе нашей гипотезы о фундаментальной длине ℓ . Нет нужды доказывать, что экспериментальное открытие су-

*) В работе /44/ использовалась независимая по отношению к /41-43/ методика.

**) Как было отмечено в /30/, неабелевы теории поля могут быть также обобщены в духе гипотезы о де-ситтеровском импульсном пространстве. Соответствующие версии квантовой хромодинамики и модели Вайнберга-Салама, содержащие фундаментальную длину ℓ , внесут, конечно, новые моменты в проблему CP-симметрии.

ществования у элементарных частиц эдм имело бы важнейшее значение для развиваемого подхода.

Рассмотрим теперь электромагнитные характеристики дираковской частицы в случае, когда ее масса m значительно превышает фундаментальную массу M :

$$\frac{m}{M} \gg 1. \quad (5.20)$$

В этом пределе, как видно из (5.12), эдм частицы становится малой величиной:

$$|\vec{d}| \approx e\ell \sqrt{\frac{M}{m}}. \quad (5.21)$$

Магнитный момент (5.13), напротив, к нулю не стремится и оказывается не зависящим от m :

$$\vec{\mu} = \frac{e}{Mc} \vec{S} = \frac{e\ell}{2} \vec{\sigma}. \quad (5.22)$$

Таким образом, фундаментальная длина определяет минимально возможную величину магнетона для дираковской частицы.

Мы видим, что сверхтяжелые заряженные дираковские частицы, если такие объекты вообще где-нибудь существуют^{*)}, могут служить и источниками статического магнитного поля.

В заключение мы хотели бы подчеркнуть, что в настоящем докладе фактически шла речь о классической электродинамике, содержащей фундаментальную длину. Процедура вторичного квантования и диаграммная техника, проблема расходимостей и перенормировки — все эти вопросы остались вне рамок нашего рассмотрения, поскольку их исследование еще не закончено.

Отличительной особенностью развитой схемы как калибровочной теории поля является использование пятимерного конфигурационного пространства для локализации калибровочной группы и внутренняя зависимость этой группы от фундаментальной длины (см. уравнение (2.3а)).

Автор искренне благодарен А.Д.Донкову, М.Д.Матееву и Р.М.Мир-Касимову за многочисленные полезные обсуждения.

*) Ср. с "максимоном" М.А.Маркова /48/.

Автор выражает глубокую признательность Н.Н.Боголюбову, Д.Бёржени, Б.В.Васильеву, С.С.Герштейну, Д.Джонсону, А.А.Логунову, Ф.Лоу, М.А.Маркову, В.И.Огиевскому, Н.Рамзену, А.Т.Филиппову, Э.Н.Цыганову и М.В.Чижову за ценные дискуссии по ряду вопросов, затронутых в докладе.

Литература

1. G.V.Watagin. *Zs.Phys.*, 88, 92 (1934).
2. W.Heisenberg. *Zs. Phys.* 101, 533 (1936); W.Heisenberg, *Instoduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles*, Inters. Publ., 1966.
3. М.А.Марков. *ЖЭТФ* 10, 1311 (1940).
4. H.Snyder. *Phys. Rev.* 71, 38 (1947); 72, 68 (1947).
5. C.N.Yang. *Phys. Rev.* 72, 874 (1947).
6. М.А.Марков. *Nucl. Phys.* 10, 140 (1958); А.А.Комар and М.А.Марков. *Nucl. Phys.*, 12, 190 (1959); М.А.Марков. *Гипероны и К-мезоны ГИФМЛ*, Москва, 1958.
7. Д.И.Блохинцев. *УФН*, 61, 137 (1957).
8. Д.А.Гольфанд. *ЖЭТФ*, 37, 504 (1959); 43, 256 (1962); 44, 1248 (1963).
9. В.Г.Кадышевский. *ЖЭТФ* 41, 1885 (1961), *ДАН СССР*, 147, 588, 1336 (1962).
10. Л.Е.Тамм. *Proceedings of XII International Conference on High Energy Physics*, v.II, p. 229; *Atomizdat*, Moscow (1964). *Proceedings of Intern. Conf. on Elementary Particles*, Kyoto (1965).
11. Р.М.Мир-Касимов. *ЖЭТФ*, 49, 905, 1161 (1965); 52, 533 (1967).
12. Д.А.Киржниц. *УФН*, 90, 129 (1966).
13. А.Н.Лезнов, *Препринт ОИЯИ Р2-3590*, Дубна (1967), с. 52.
14. Д.И.Блохинцев. *Пространство и время в микромире*, Москва, Наука, 1970.
15. Г.В.Ефимов. *ЭЧАЯ*, 1, 256 (1970); 5, 223 (1974); V.A.Alebastrov and G.V.Efimov. *Comm. of Math. Physics*, 31, 1 (1973); 38, 11 (1974).
16. М.А.Соловьев и В.А.Файнберг. В сборнике: "Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории". *Препринт ОИЯИ, Д2-9788*, Дубна (1976).
17. S.Fubini. *CERN preprint*, TH 2129, CERN (1976).
18. J.D.Bjorken. In: *Unification of Elementary Forces and Gauge Theories* Harwood Academic Publishers, p. 701 (1979).

19. В.Г.Кадмиевский. Препринт ОИЯИ P2-5717, Дубна (1971).
20. В.Г.Кадмиевский. В книге: "Проблемы теоретической физики", посвященной памяти акад. И.Е.Тамма, Москва, Наука, 1972; Препринт ОИЯИ Д2-7161, Дубна (1973).
21. A.D.Donkov, V.G.Kadyshhevsky, M.D.Mateev, and R.M.Mir-Kasimov. *Bulgar. Journ. of Physics* 1, 58, 150, 233 (1974); 2, 3 (1975); *Proceedings of Internat. Conference on Mathemat. Problems of Quantum Field Theory and Quantum Statistics*, pp. 85-129, Moscow, Nauka (1975); JINR preprint E2-7936, Dubna (1974).
22. Р.М.Мир-Касимов. Аксиоматическая квантовая теория поля и импульсное пространство де Ситтера, препринт ОИЯИ P1,2-7642, Дубна (1973).
23. V.G.Kadyshhevsky, M.D.Mateev and R.M.Mir-Kasimov, JINR preprints; E2-8892, P2-8877, Dubna (1975).
24. V.G.Kadyshhevsky, Fundamental length as a new scale in quantum field theory, in: JINR, D1,2-9342, Dubna (1975).
25. A.D.Donkov, V.G.Kadyshhevsky, M.D.Mateev and R.M.Mir-Kasimov. В сборнике: "Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории", препринт ОИЯИ Д2-9788, Дубна (1976); *Proceedings of the XVIII International Conference on High Energy Physics*, Tbilisi, p. A5-1, D1,2-10400, Dubna (1977).
26. М.Д.Матеев. Процессы при высоких энергиях и гипотеза о фундаментальной длине, препринт ОИЯИ Д2-10533, с. 257 Дубна (1977), с. 257.
27. И.П.Волобуев. ТМФ 28, 331 (1976).
28. I.P.Volobuyev, R.M.Mir-Kasimov. *Acta Physica Polonica* B9, 2 (1978).
29. V.G.Kadyshhevsky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov and I.P.Volobuyev. JINR preprint, E2-10860 (1977).
30. V.G.Kadyshhevsky. *Nuclear Physics*, B141, 477 (1978).
31. V.G.Kadyshhevsky. In: *Proceedings of International Integrative Conference on Group Theory and Math. Physics*, Austin, Texas (1978).
32. V.G.Kadyshhevsky, FERMILAB-Pub 78/70 THY, September, 1978.
33. В.Г.Кадмиевский. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий, ЭЧАЯ (1979), II, вып. I, с.5.

34. S.M.Korenchenko, et al. Proceedings of the XVIII Intern. Conference on High Energy Physics, v.II, p. B174, D1,2-10400 (1977).
35. M.Cooper. Search for $n \rightarrow e\gamma$, Topical Conference at SLAC, 1978.
36. F.J.M.Farley, E.Picasso. Preprint CERN-EP/79-20, march 1979.
37. S.I.Манро. ЖЭТФ, 95, 145 (1968).
38. L.L.Lewis, et al. Phys. Rev. Letters 29, 795 (1977); P.G.H.Sanders. Search for Parity Nonconservation in B_1 , Proceedings of Ben Lee Memorial Conference, 1977.
39. I.Barkov. Proceedings of the XIX International Conference on High Energy Physics, p. 425, Tokyo, Japan (1979).
40. R.J.Taylor. Proceedings of the XIX International Conference on High Energy Physics, p. 422, Tokyo, Japan (1979).
41. M.C.Weisskopf, et al. Phys. Rev.Lett. 21, 1645 (1968); T.S.Stein, et al. Phys.Rev. 186, 39 (1969).
42. M.A.Player and P.G.H.Sanders. J. Phys. B1, 1620 (1970).
43. P.G.H.Sanders and R.M.Sternheimer. Phys.Rev. A11, 413 (1975).
44. Б.В.Васильев, Е.В.Колычева. ЖЭТФ, 74, 466 (1978).
45. И.С.Алтарев и др. Поиск электрического дипольного момента нейтрона с помощью ультрахолодных нейтронов, препринт ДИЯФ № 430 (1978).
46. П.Н.Боголюбов. ЭЧАЯ, 3, 71 (1972).
47. Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, 32, 405 (1957).
48. М.А.Марков. ЖЭТФ, 51, 878 (1966).

СУММИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Д.И. Казаков, Д.В. Ширков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Доклад посвящен асимптотическим рядам квантовой теории возмущений и их суммированию. Он содержит сводку результатов по рядам, возникающим в задачах квантовой теории поля и квантовой механики. Затем рассматривается задача "суммирования" рядов \hbar , в частности, продолжения по константе связи g результатов обычной точной теории возмущений в область $g \gg 1$.

1. Введение

Исследования общей структуры рядов теории возмущений в квантовой теории имеют довольно длинную историю. Еще четверть века назад появились работы^{1/1}, в которых было установлено, что число фейнмановских диаграмм k -го порядка с ростом k , вообще говоря, растет как квадрат факториала, что указывает на асимптотический характер рядов теории возмущений для функций Грина и матричных элементов. Подобные заключения были тогда получены для нерелятивистских моделей. Анализ релятивистского случая натолкнулся на трудности, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями и с необходимостью проведения перенормировок. Однако уже в начале 50-х годов было ясно^{2/2}, что матричные элементы имеют существенную особенность, расположенную в начале координат комплексной плоскости переменной константы связи g .

Для логарифмических моделей квантовой теории поля с помощью ренормгруппы удалось показать^{3/3}, что требования перенормируемости и причинности (взяты в форме спектрального представления Челлена-Лемана) не совместны со свойством аналитичности в точке $g = 0$ и приводят к заключению о наличии существенной сингулярности вида

$$\exp(-1/g)$$

Этот результат перекликается с информацией о поведении функций Грина при $g = 0$, получаемой с помощью изучения представления континуального интеграла методом континуального перевала.

Метод континуального перевала, изобретенный более 10 лет назад в работах по статистической физике^{4,5/} был "перестроен" Липатовым^{6/} при решении задачи определения асимптотики коэффициентов разложения по степеням g в моделях квантовой теории поля.

Существует два способа использования этого метода применительно к указанной задаче. Один из них состоит в представлении k -го члена разложения по степеням g в виде функционального интеграла

$$G_k(\dots) = \int \frac{\delta\varphi}{\text{const}} e^{-\int \mathcal{L}_0(\varphi) dx} \frac{1}{k!} \left[\int \mathcal{L}_I(\varphi) dx \right]^k = \\ = \frac{1}{k!} \int \frac{\delta\varphi}{\text{const}} e^{-\int \mathcal{L}_0(\varphi) dx} + k \ln \int \mathcal{L}_I(\varphi) dx,$$

который вычисляется методом функционального перевала, причем индекс k выступает в роли большого параметра. Эту процедуру будем называть методом k -перевала, а результат обозначать тильдой сверху: $G_k \rightarrow \tilde{G}_k$.

Второй способ заключается в применении метода наискорейшего спуска в функциональном пространстве непосредственно к континуальному интегралу для функции Грина. Большим параметром здесь служит величина $1/g$. Полученное этим путем приближенное выражение \tilde{G} затем формально разлагается в ряд по g :

$$\tilde{G}(g) = \sum_k g^k \tilde{G}_k.$$

Этот способ действия будем называть методом g -перевала. Коэффициенты \tilde{G}_k отличаются от выражений \tilde{G}_k , возникающих в результате k -перевала, на относительно малые члены порядка k^{-1} .

При этом оказывается, что коэффициенты степенных разложений функций Грина и матричных элементов

$$G(\dots, g) = \sum_k g^k G_k(\dots) \quad (I.1)$$

при больших k растут факториально ($G_k \sim k!$), вследствие чего ряды теории возмущений имеют асимптотическую природу. "Суммирование" асимптотических рядов не является однозначной процедурой и требует привлечения дополнительных соображений.

В настоящем обзоре, во-первых, дана сводка результатов, полученных в различных релятивистских квантовопольных и нерелятивистских квантовомеханических моделях по структуре асимптотических коэффициентов теории возмущений \tilde{G}_k , \tilde{G}_k . Там, где это возможно, проведено сравнение асимптотических \tilde{G}_k , \tilde{G}_k с точными G_k . Затем рассмотрена проблема "суммирования" полученных асимп-

тогических рядов и обсуждены некоторые полученные этим путем физические результаты.

2. Асимптотика коэффициентов и сравнение с точными результатами

В настоящем разделе мы дадим сводку результатов вычислений асимптотик (при больших k) коэффициентов ряда теории возмущений в различных моделях квантовой механики и квантовой теории поля. Параллельно мы приводим известные точные результаты и проводим сравнение с ними.

2а. Нульмерные аналоги

Почувствительным и в то же время простым примером является обычный однократный интеграл

$$I(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 - qx^4} \quad (2.1)$$

Степенное разложение подынтегральной функции приводит к асимптотическому ряду

$$I(q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-q)^k I_k, \quad I_k = \frac{\Gamma(2k + 1/2)}{\Gamma(k+1)} \quad (2.2)$$

Использование метода q -перевала дает для этих коэффициентов асимптотические выражение

$$\tilde{I}_k \approx \frac{4^k \Gamma(k)}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.3)$$

Используя формулу Стирлинга при больших k , мы видим, что выражение (2.3) монотонно стремится к (2.2). Кроме того, интеграл (2.1) допускает точную квадратуру, приводящую к цилиндрической функции

$$I(q) = e^{1/8q} K_{1/4}(1/8q) \sqrt[4]{8q} \quad (2.4)$$

где K - функция Макдональда. При $q \rightarrow \infty$ $I(q) \rightarrow \frac{1}{2} \Gamma(1/4) q^{-1/4}$.

Весьма поучительным также оказывается интеграл

$$J(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2(1-qx)^2} \quad (2.5)$$

в котором функция $V(x) = x^2(1-qx)^2$, стоящая в экспоненте, имеет два минимума. Этот интеграл моделирует квантовополевой случай с потенциалом $V(\varphi) = \varphi^2(1-q\varphi)^2$, т.е. модель с двукратно вырожденным вакуумом. Разложение подынтегральной экспоненты в степенной ряд по q приводит к знакопостоянному асимптотическому ряду

$$J(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} J_k, \quad J_k = \frac{4^k \Gamma(2k + 1/2)}{\Gamma(k+1)} \quad (2.6)$$

В то же время асимптотические значения коэффициентов $J_k^{\frac{1}{2}}$, полученные методом g -перевала

$$J_k^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 4 \frac{2k \Gamma(k)}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.7)$$

в пределе $k \rightarrow \infty$ отличаются от J_k в 2 раза. Дело в том, что формальное разложение экспоненты по степеням g соответствует разложению около одной из перевальных точек ($x=0$), тогда как в интеграл, вычисленный методом перевала, дают равные вклады обе перевальные точки ($x=0$, $x=1/2$).

Точное выражение для интеграла (2.5)

$$J(g) = \frac{\pi}{\sqrt{16g^2}} e^{-\frac{1}{32g^2}} \left[I_{1/4} \left(\frac{1}{32g^2} \right) + I_{-1/4} \left(\frac{1}{32g^2} \right) \right], \quad (2.8)$$

где I - функция Инфельда, содержит также слагаемое, неразложимое в ряд Тейлора по g , которое не проявляется в обычной теории возмущений. Эта ситуация типична для моделей с вырожденным минимумом.

26. Квантовая механика

Квантовомеханическая проблема определения уровней энергии также может быть сформулирована на языке функционального интеграла. Для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{g^2} V(qx) \quad (2.9)$$

основной уровень энергии записывается в виде

$$E^{(0)}(g) = \frac{1}{2} + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln \frac{\text{Tr } e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H_0}} \right\}, \quad (2.10)$$

где

$$\frac{\text{Tr } e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H_0}} = \frac{\int \delta x(t) \exp \left\{ -\int_0^\beta dt \left[\dot{x}^2/2 + 1/g^2 V(qx) \right] \right\}}{\int \delta x(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\beta dt \dot{x}^2 \right\}} \quad (2.11)$$

Вычисление функционального интеграла (2.11) может быть проведено как по обычной теории возмущений, так и методом перевала в функциональном пространстве.

Для ангармонического осциллятора $V(x) = \frac{1}{2} x^2 + x^4$ метод k -перевала приводит к следующим асимптотическим оценкам на коэффициенты ТВ^{7/}:

$$E^{(0)}(g^2) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{2k} E_k^{(0)}, \quad \tilde{E}_k^{(0)} = -k! (c_3)^k K^{-1/2} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \left(1 - \frac{g_5}{72k} + \dots \right), \quad (2.12)$$

причем в данном случае вычислена и первая поправка к первоначальному выражению $\sqrt{8}$. (Этот результат был ранее получен в работе ¹⁹ методом БКБ). Сравнение выражений (2.12) с первыми 75 точными значениями коэффициентов приведено на рис. 2. Начиная с 5-го члена асимптотические формулы монотонно стремятся к точным значениям.

Формулы (2.12) могут быть обобщены на случай произвольного потенциала без вырождения и принимают вид ¹⁰

$$\tilde{E}_k^{(0)} = -\frac{\Gamma(k+1/2)}{2\pi^{3/2}} \sum_{x_c}^{-k-1/2} S(x_c) x_+ \exp\left\{ \int_0^{x_+} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2V(x)}} - \frac{1}{x} \right] \right\}, \quad (2.13)$$

где x_c означает классическую траекторию нулевой энергии из точки 0 в точку x_+ (см. рис. 1).

Специального рассмотрения требует случай вырожденного минимума. Здесь не существует классической траектории, удовлетворяющей периодическим граничным условиям, и основной вклад в функциональный интеграл дают квази-решения, соответствующие инстантон-антиинстантонной паре.

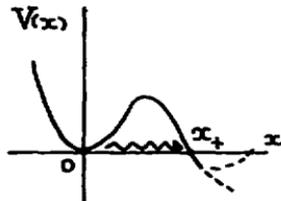


Рис. 1

При этом происходит экспоненциально малое расщепление основного уровня, которое, в полной аналогии с нульмерным аналогом, не улавливается обычной теорией возмущений.

Асимптотические коэффициенты, полученные методом k -перевала вокруг такого квази-решения, имеют вид: ¹⁰

$$\tilde{E}_k^{(0)} = \sum_{x_c} \frac{k! k^{\frac{1}{2\nu}}}{[2S(x_c)]^{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2}} a^{1+\frac{1}{2\nu}}}{\pi \sqrt{\frac{1}{2\nu}} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu})}. \quad (2.14)$$

где $\exp \int_0^a dx \left[\frac{1}{\sqrt{2V(x)}} + \frac{1}{x \left(\frac{x}{a} \right)^{\nu-1}} \right],$

$$V'(0) = 0, \quad V''(0) = 1; \quad V'(a) = 0, \quad V''(a) = \nu^2.$$

В случае потенциала $V(x) = \frac{\nu^2}{2}(1-x)^2$ имеем ¹¹:

$$\tilde{E}_k^{(0)} = -k! 3^{k+1} \frac{1}{\pi}. \quad (2.15)$$

Сравнение коэффициентов (2.15) с первыми 73 точными значениями аналогично (2.12). Начиная с 5-го члена ряда мы опять наблюдаем

монотонное стремление асимптотических формул к точным значениям.

Метод перевала в функциональном пространстве может быть также использован для получения коэффициентов разложения возбужденных уровней энергии. Модификация формулы (2.13) для p -ого возбужденного уровня имеет вид: /10/

$$\Gamma_k^{(p)} = - \frac{2^{p+2} \Gamma(k+p+1/2)}{\pi^{1/2} p! [S(x_+)]^{k+p+1/2}} \left\{ x_+ \exp \int_0^{x_+} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2V(x)}} - \frac{1}{x} \right] \right\}^{2p+1} \quad (2.16)$$

2в. Квантовая теория поля

Техника нахождения асимптотики коэффициентов ряда теории возмущений в квантовой теории поля при функциональной формулировке теории сходна с рассмотренной выше. Евклидовы функции Грина выражаются функциональным интегралом

$$G^{(N)} = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \rangle_0 = \frac{\int \delta\varphi(x) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) e^{-S(\varphi)}}{\int \delta\varphi e^{-S(\varphi)}}, \quad (2.17)$$

где евклидово действие

$$S(\varphi) = \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + g V(\varphi) \right\}. \quad (2.18)$$

В такой постановке задачи квантовая механика выступает в роли одномерной теории поля. Основные количественные результаты были получены в скалярных моделях, причем асимптотики коэффициентов высших порядков теории возмущений были найдены для функции Гелл-Манна-Лоу $\beta(g)$ и аномальных размерностей функций Грина.

Так, в случае логарифмических теорий с потенциалом

$$V(\varphi) = \frac{1}{(2N)!} \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \right)^N, \quad D = \frac{2N}{N-1}, \quad N > 2, \quad (2.19)$$

было получено /6, 7/

$$\beta(g) = \sum_{k=2} g^k \beta_k, \quad \tilde{\beta}_k = [k(N-1)]! a^k k^b c, \quad (2.20)$$

где

$$a = - \frac{[(N-1)/2]^{N+1}}{N \pi^N (2N-1)!} \left\{ \Gamma\left(\frac{2N}{N-1}\right) / \Gamma\left(\frac{N}{N-1}\right) \right\}^{N-1}, \quad b = \frac{N^2}{N-1} + \frac{N}{2} - 1. \quad (2.21)$$

В класс этих теорий (случай $N=2$ будет рассмотрен особо) попадает лишь теория φ^4 , где известны два коэффициента разложения β -функции при $N=4$ /12/:

$$\beta(g) = \frac{10}{3} \frac{g^2}{(8\pi)^2} - \frac{74,52}{(8\pi)^4} g^3 + \dots \quad (2.22)$$

Знание лишь двух коэффициентов не позволяет судить об установлении асимптотики.

Значительно больше известно о модели $\varphi_{(3)}^4$. Здесь

$$V(\varphi) = \frac{1}{4!} \left(\sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 \right)^2, \quad D=3 \quad (2.23)$$

и коэффициенты разложения β -функции

$$\tilde{\beta}_k = k! a^k k^b c, \quad (2.24)$$

где /7/

$$a = (-\pi \cdot 36,091)^{-1}, \quad b = 3 + \frac{1}{2}.$$

В случае $n=1$ коэффициент c вычислен и формула (2.24) может быть представлена также в виде

$$\tilde{\beta}_k = (-1)^k \Gamma(k + \frac{9}{2}) (0,0022196)^k 0,6292937. \quad (2.25)$$

Для модели $\varphi_{(3)}^4$ известны первые семь точных коэффициентов ряда ТВ. Сравнение их с формулой (2.25) приведено на рис. 2.

Большое количество результатов получено также в модели с гауссовым пропагатором /13/

$$S(\varphi) = \int d^3x \left\{ \frac{\Lambda^2}{2} \varphi(x) e^{-\Delta x / \Lambda^2} \varphi(x) + \frac{g}{(2N)!} \varphi^{2N} \right\}. \quad (2.26)$$

Приближения для коэффициентов разложения N -хвостной функции Грина

$$G^{(M)} = \sum_k G_k^{(M)} g^k \quad (2.27)$$

имеет вид

$$\tilde{G}_k^{(M)} = [k(N-1)]! (-a)^k k^b c,$$

где

$$a = \frac{(2N)^{N-1}}{(2N-1)!} \left[\frac{[2N(N-1)]^{N-1}}{(2N-1)^{2N-1}} \right]^{D/2} \left\{ \frac{\Lambda^{D(N-1)-2N}}{(2\pi)^{D(N-1)/2}} \right\}, \quad b = -1 + \frac{D+M}{2}. \quad (2.28)$$

Сравнение формул (2.27) и (2.28) с точными расчетами приведено в /13/. Наблюдается монотонное стремление приближенных результатов к точным, причем тем лучшее, чем ниже размерность пространства.

Наиболее хорошо изучена модель $\varphi_{(4)}^4$ с потенциалом

$$V(\varphi) = \frac{16\pi^2}{4!} \left(\sum_{i=1}^4 \varphi_i^2 \right)^2. \quad (2.29)$$

Для функции $\beta(g)$ получены следующие асимптотические оценки коэффициентов /6,7,14/

$$\beta(g) = \sum_{k \geq 2} g^k \beta_k, \quad \tilde{\beta}_k = (-1)^k k! k^b a^k c, \quad (2.30)$$

причем

$$a = 1, \quad b = 3 + \frac{k}{2}, \quad 16\pi^2 c = \begin{cases} 4,096, & n = 1, \\ 0,543, & n = 2, \\ 0,250, & n = 3. \end{cases} \quad (2.31)$$

Значение коэффициента c соответствует симметричной точке вычитания четырехжесткости $\rho_i^2 = -\lambda$, $S = \frac{1}{2} = \mu = -4\lambda/S$. Вычисленные первые четыре коэффициента ряда ТВ модели (2.29) при симметричной точке вычитания имеют вид $\sqrt[15]{}$

$$\beta(q) = \frac{3}{2}q^2 - \frac{17}{6}q^3 + 19,3q^4 - (146 \pm 2)q^5 + \dots \quad (2.32)$$

Сравнение формул (2.30), (2.31) и (2.32) представлено на рис. 2. Как видно, в отличие от случаев $D=0$ и $D=1$ при $D=4$ мы еще далеки от асимптотического режима и поправки $\sim 1/k$ еще очень велики.

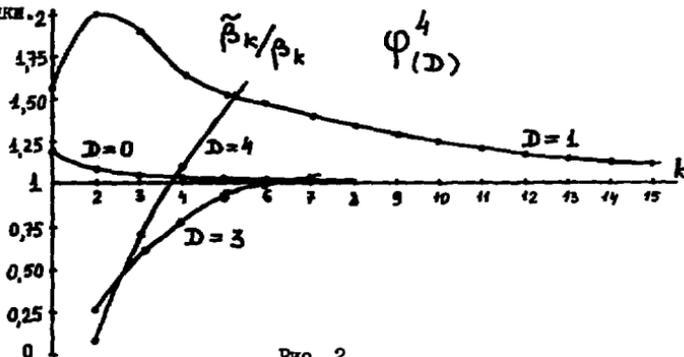


Рис. 2

Отдельный интерес представляет случай большого числа компонент n . При $n \neq 1$ формула (2.32) принимает вид:

$$\beta(q) = \frac{n+8}{6}q^2 - \frac{6n+28}{12}q^3 + \frac{(1,05n^2 + 33,52n + 119,5)}{16}q^4 - \frac{(0,62n^3 + 42,1n^2 + 579n + 1746)}{16}q^5 + \dots \quad (2.33)$$

Таким образом, с ростом n точные коэффициенты β_k растут как n^{k-1} . В то же время приближенные значения ведут себя как $1/6$

$$\tilde{\beta}_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_k^{(4)} \left(\frac{4}{3}\right)! / \left(\frac{4}{3}\right)! \cdot n^4 \rho^n \rightarrow 0$$

Это различие, возможно, связано с существованием дополнительных перевальных точек в функциональном интеграле в случае $n \neq 1$ (см., например, $\sqrt[16]{}$).

В рамках теоретико-полевого подхода к критическим явлениям знание точных значений коэффициентов β -функции и аномальных размерностей в модели $\varphi_{(4,4)}^4$ позволяет построить так называемое

ϵ – разложение Вильсона для критических индексов фазовых переходов. При этом критические индексы, характеризующие поведение различных статфизических величин вблизи критической температуры, выражаются через аномальные размерности функций Грина в инфракрасно-стабильной точке и разлагаются в асимптотические ряды по ϵ вида $\sum_k \epsilon^k k! a^k b^c$, причем метод асимптотических оценок дает значения параметров^{/7/}

$$a = -\frac{3}{n+8}, \quad b = \begin{cases} 4+n/2 & \text{для } g^*, \\ 3+n/2 & \text{--- } \gamma, \\ 4+n/2 & \text{--- } \nu, \\ 5+n/2 & \text{--- } \omega. \end{cases} \quad (2.34)$$

Здесь g^* – критический заряд, а γ , ν и ω суть критические индексы. Точные значения коэффициентов ϵ – разложения для этих величин имеют вид ($n=4$):^{/18/}

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\epsilon^2}{54} \left[1 + \frac{109}{108} \epsilon + \epsilon^2 \left(\frac{7217}{11664} - \frac{8}{9} \zeta(3) \right) \right] + O(\epsilon^5), \\ \nu &= 2 - \frac{\epsilon}{3} - \frac{19}{162} \epsilon^2 - \left(\frac{937}{17496} - \frac{4}{27} \zeta(3) \right) \epsilon^3 - \left(\frac{24857}{1289568} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{40}{81} \zeta(5) - \frac{1}{9} \zeta(4) - \frac{119}{1458} \zeta(3) \right) \epsilon^4 + O(\epsilon^5), \\ \omega &= \epsilon - \frac{17}{27} \epsilon^2 + \epsilon^3 \left(\frac{1603}{2916} + \frac{2}{9} \zeta(3) \right) - \left(\frac{172417}{314928} + \frac{153}{243} \zeta(3) + \frac{40}{9} \zeta(5) - \frac{2}{3} \zeta(4) \right) \epsilon^4 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Результаты, полученные в моделях, включающих спиновые и векторные поля, заметно скромнее. Это относится прежде всего к методу асимптотических оценок коэффициентов высших порядков, что связано с усложнением структуры вакуума в таких теориях, с трудностью решения классических уравнений движения и вычисления квантовых поправок. Поэтому сравнение с первыми точными членами ряда ТВ здесь затруднено.

В модели скалярной электродинамики

$$H = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)^2 + |(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi|^2 + \frac{1}{2} g |\psi|^4 \quad (2.36)$$

для функций Грина получены следующие оценки^{/19/}:

$$\tilde{G} \sim \sum_k a^k k! (-0,0808)^k k^b c, \quad a = e^2/4\pi^2 \quad (2.37)$$

(в пренебрежении четверным взаимодействием) и^{/20/}

$$G \sim \sum_{k,l} g^k G_{kl}, \quad \tilde{G}_{kl} = (-)^{k+l} \left(\frac{k}{4\pi}\right)^k \left(\frac{l}{4\pi}\right)^l \left[C\left(\frac{l}{k}\right)\right]^{l+k} \quad (2.38)$$

$$C\left(\frac{l}{k}\right) = \left(1 + \frac{2k}{l}\right)^{\frac{2k+l}{k+l}} \left(\frac{3l^2}{k^2}\right)^{\frac{k}{k+l}}$$

В неабелевых калибровочных теориях получена оценка для коэффициентов разложения β -функции^{/21/}:

$$\beta \sim \sum_k (g^2)^k \beta_k, \quad \tilde{\beta}_k = -\Gamma\left(k + \frac{5}{3}\right) \left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^k \quad (2.39)$$

Приведем для сравнения также известные два члена ряда ТВ:

$$\beta(g^2) = -\frac{11}{3} C_2 \frac{g^4}{16\pi^2} - \frac{34}{3} C_2^2 \frac{g^6}{(16\pi^2)^2} + \dots \quad (2.40)$$

В моделях с фермионами также есть ряд оценок. Так, в модели Каппы в пренебрежении четверным взаимодействием в D -мерном пространстве для функции Грина имеем^{/22/}

$$G \sim \sum_k (g^2)^k G_k, \quad \tilde{G}_k = \cos \frac{2\pi k}{D} \Gamma\left[k\left(1 - \frac{2}{D}\right)\right] a^k, \quad (2.41)$$

а в КЭД в четырехмерии^{/23/}

$$\tilde{G}_k = \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) (\ln k)^k (-a)^k. \quad (2.42)$$

Сравнение с точными результатами здесь пока также затруднено.

3. Задача восстановления функции

Мы рассмотрим теперь задачу восстановления функции $f(g)$ переменной константы связи, отпавляясь от:

а) известных точных первых членов степенного разложения f_k и

б) асимптотики коэффициентов f_k при больших k с целью определения поведения функции $f(g)$ при $g \gg 1$. Эту задачу комбинирования информации из двух источников кратко будем называть "задачей восстановления". Она осложняется асимптотическим характером рядов, составленных из коэффициентов f_k .

Наиболее наивный способ действия состоит в представлении искомой функции f в виде суммы

$$f(g) = \sum_{k=k_0}^N (f_k - \tilde{f}_k) g^k + \sum_{k_0}^{\infty} \tilde{f}_k g^k \quad (3.1)$$

при условии $f_k - \tilde{f}_k = 0$ при $k \geq N$.

Выполняя тем или иным способом суммирование во втором члене

$$\sum_k \tilde{f}_k g^k = \tilde{f}(g),$$

получаем

$$f(g) = P_N(g) + \tilde{f}(g), \quad P_N(g) = \sum_{k=0}^N g^k (f_k - \tilde{f}_k). \quad (3.2)$$

Как нетрудно показать, добавление к асимптотическим коэффициентам малых поправок $\tilde{f}_k \rightarrow \tilde{f}_k(1 + \alpha/k)$ приводит к модификации суммы $\tilde{f}(g) \rightarrow \tilde{f}(1 + \alpha g)$, которая в области $g \gg 1$ не является малой. Поэтому этот простой метод не дает реального результата.

Основная трудность, связанная с факториальным ростом коэффициентов, обычно преодолевается путем использования интегрального преобразования Лапласа. Допустим, что функция $f(g)$ представлена в виде

$$f(g) = \int_0^{\infty} e^{-xg} B(x) \frac{dx}{g}. \quad (3.3)$$

Тогда степенной ряд для

$$B(x) = \sum_k \frac{f_k}{k!} x^k$$

может оказаться сходящимся в некоторой области. Такой метод суммирования под знаком интеграла Лапласа называется методом Бореля. Метод Бореля допускает некоторые простые модификации, например

$$f(g) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{g} e^{-\frac{x}{g}} \left(\frac{x}{g}\right)^{\alpha-\gamma} \left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} B^{(\alpha, \delta)}(x), \quad (3.4)$$

причем

$$B^{(\alpha, \delta)}(x) = \sum_k x^k \frac{f_k}{\Gamma(k+1+\alpha-\gamma) k^{\delta}}, \quad (3.5)$$

что позволяет получать желаемую степень убывания коэффициентов ряда для $B^{(\alpha, \delta)}(x)$.

Метод Бореля позволяет однозначно восстановить функцию $f(g)$ по ее асимптотическому ряду, в том случае, если она представима в виде (3.3). Согласно теореме Ватсона^{/24/} функция $f(g)$ может быть представлена в виде (3.3), если она удовлетворяет т. н. "сильному асимптотическому условию", означающему, что :

а) функция $f(g)$ аналитична в области

$$D = \{g \mid 0 < |g| < R, |\arg g| < \frac{\pi}{2} + \delta, \delta > 0\};$$

б) ошибка, получаемая при обрывании суммы ряда ТВ на конечном числе членов

$$f(g) = \sum_k^{N-1} f_k g^k + R_N(g),$$

равномерно ограничена в этой области следующим образом :

$$R_N(g) = O(N! g^N c^N N^{\alpha}) \text{ равномерно } \forall g \in D.$$

Как легко убедиться, справедливость второго условия вытекает из вида асимптотики коэффициентов f_k при больших k . Доказательство же первого условия представляет собой значительную проблему и требует привлечения дополнительных соображений, связанных с физической сущностью рассматриваемой задачи. К сожалению, в задаче квантовой теории поля не существует доказательства того, что функции Грина удовлетворяют сильному асимптотическому условию по константе связи. Их аналитические свойства по g неизвестны, что не позволяет проверить выполнение условия а) из теоремы Ватсона. Однако в квантово-механической задаче определения уровней энергии ангармонического осциллятора (модель $\Phi_{(1)}^+$), в двумерных моделях конструктивной квантовой теории поля (модель $\Phi_{(2)}^+$), суммируемость по Борелю доказана ^{/25,26/}. Единое представление функций Грина в этих моделях и в более реалистичной модели $\Phi_{(4)}^+$ с помощью одинакового функционального интеграла позволяет надеяться на правомерность суммирования по Борелю и в этом случае. Увеличение размерности пространства приводит к одной существенной разнице — наличию расходящихся и необходимости процедуры перенормировок. Существуют аргументы в пользу того, что это может привести к наличию дополнительных сингулярностей в g -плоскости ^{/27/} и к появлению полюсов на пути интегрирования в (3.4) ^{/28/}. Последнюю трудность в ряде случаев можно обойти, слегка изменяя контур интегрирования в x -плоскости ^{/29/}. Однако упомянутые аргументы не носят доказательного характера, и дополнительные сингулярности могут и не возникнуть.

Вид асимптотики коэффициентов ряда ТВ при больших k

$$f_k = k!(-a)^k k^b c \quad (3.6)$$

позволяет определить положение и характер ближайшей особенности в плоскости борелевской переменной x . Так, ближайшая особенность функции $B^{(a,b)}(x)$ (3.5) при учете (3.6) находится в точке $x = -\frac{1}{a}$, где $B^{(a,b)}(x)$ ведет себя как $(1+ax)^{-b-1}$ или как $\ln(1+ax)$ в случае, когда $a=b+1$ ^{/30/}. Таким образом, в случае знакопеременного ряда ($a > 0$) особенность лежит в левой полуплоскости, и функция $f(g)$ согласно теореме Ватсона суммируема по Борелю. В случае же знакопостоянного ряда ($a < 0$) особенность лежит справа на пути интегрирования и функция оказывается несуммируемой по Борелю. Наличие таких особенностей является сигналом существования вкладов в $f(g)$, не разложимых в ряд теории возмущения по g , которые, в свою очередь, являются проявлением физических особенностей задачи ^{/31/}.

Так, если гамильтониан не ограничен снизу, то не существует основного состояния, а вакуум теории возмущений является мета-

стабильным за счет туннелирования. Энергия имеет мнимую часть, пропорциональную амплитуде туннелирования, которая ведет себя как $e^{-1/2g}$. Эта ситуация характерна для теорий с "неправильным" знаком константы связи. Наглядной демонстрацией является модельный интеграл (2.1). При $g < 0$ функция Макдональда имеет разрыв, скачок на котором является чисто мнимым с характерной зависимостью типа $e^{-1/2g}$.

Другой пример дает система с несколькими вырожденными минимумами, разделенными потенциальными барьерами (несколькими потенциальными ямами). Энергия нижнего состояния такой "системы ям" отличается от энергии нижнего состояния каждой из ям на экспоненциально малую величину, соответствующую возможности туннельного перехода между ямами (см. рис. 3).

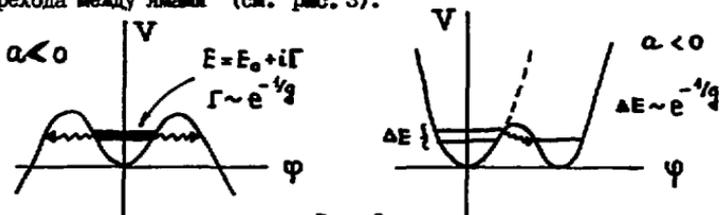


Рис. 3

Подобную картину мы наблюдаем и в случае модельного интеграла (2.5), где интерференция между двумя минимумами приводит к появлению экспоненциально малых вкладов ($e^{-1/2g}$). Теория Янга-Миллса сейчас представляется именно такой теорией, где туннелирование между различными вакуумами осуществляется за счет инстантонных конфигураций^{32/}.

Подобные физические соображения, равно как и аналоги в низшем числе измерений, не могут служить, конечно, обоснованием применимости или не применимости метода Бореля. Но они являются весомыми аргументами в пользу того или другого. Поэтому применение метода суммирования по Борелю к асимптотическим рядам КТП всегда есть дополнительный *ansatz*. Как мы увидим, в ряде случаев он приводит к весьма разумным результатам.

В итоге задача сводится к определению функции $B(x)$, заданной рядом, сходящимся в некоторой области. Необходимо продолжить функцию $B(x)$ из области, заданной степенным рядом, на весь бесконечный интервал интегрирования. Обычно такое аналитическое продолжение выполняется либо с помощью паде-аппроксимации, либо с помощью конформного преобразования. В последнем случае разрезан-

ная плоскость борелевской переменной отображается во внутренность единичного круга и функции $B(x)$ представляется степенным рядом по новой переменной, сходящийся внутри этого круга. При этом очень существенным оказывается поведение $B(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Степенной рост $B \sim x^\lambda$ при $x \rightarrow \infty$ отвечает степенному росту $f \rightarrow g^\lambda$ при $g \rightarrow \infty$. Степень роста λ оказывается свободным параметром и ее можно задавать независимо. Как будет показано ниже, метод конформного преобразования имеет ряд преимуществ. Он является более гибким и позволяет учесть характер особенности в z -плоскости, а также удовлетворить условиям соответствия коэффициентов разложения полуточной функции асимптотическим оценкам^{/33/}. В рамках этого метода можно фиксировать значение параметра λ из соображений быстрейшей сходимости ряда последовательных приближений.

Дадим теперь беглый обзор исследований, в которых рассматривались различные задачи квантовой физики, в рамках сформулированной выше "задачи восстановления".

Как уже указывалось, простейший вариант состоит в представлении искомой функции в виде (3.1), причем последняя сумма вычисляется по методу Бореля. Такой способ получили название улучшенной теории возмущений (УТВ). При этом предполагается, что разность $f_k - \tilde{f}_k$ довольно быстро стремится к нулю с ростом k . УТВ была применена к задачам нахождения нелинейной части лагранжиана Гейзенберга-Эйлера взаимодействия электромагнитного поля с вакуумом заряженных частиц, определения уровней энергии электрона в ядре вблизи границы континуума, решения уравнения Томаса-Ферми, определения основного уровня энергии ангармонического осциллятора^{/34/} и к квантово-полевой задаче построения функции $\beta(g)$ в модели^{/35/} ϕ^4 . Как правило, УТВ позволяет аппроксимировать точное решение в более широком интервале g , чем полиномы обычной ТВ. Однако в силу медленного установления асимптотики в большинстве случаев и главным образом за счет упомянутого влияния поправки $\sim 1/k$ УТВ не дает реального продвижения в область $g \gg 1$.

Некоторого расширения области применимости УТВ удается добиться, применяя к первой сумме в (3.1) метод Паде. Однако в силу асимптотического характера рассматриваемого ряда разность $f_k - \tilde{f}_k \sim k! a^k k^{b-2}$ также имеет факториальный рост, вследствие чего метод Паде в случае УТВ, как и в случае обычной ТВ, лишь незначительно улучшает аппроксимационные свойства^{/36/}. Естественным обобщением этого

метода является т.н. метод Паде-Бореля, в котором сначала производится преобразование Бореля, а затем к борелевскому образу полиномов УТВ применяется метод Паде. Существенным моментом здесь является то, что метод Паде применяется уже к сходящемуся ряду. Использование метода Паде-Бореля позволяет примерно на порядок расширить интервал применимости ТВ (до $g \sim 10$) в задаче об основном уровне ангармонического осциллятора ($\varphi_{(13)}^4$)^{36, 37/} и примерно в два раза (до значения $g/4 \sim 0.6$) в задаче восстановления функции $\beta(g)$ в модели \mathcal{N}_4 ; φ^4 в четырехмерном пространстве^{36/} при 15% точности. Основным недостатком методов Паде и Паде-Бореля является то, что они, вообще говоря, неправильно передают аналитические свойства, т.е. искажают особенности функции и ее борелевского образа. В некоторых случаях паде-аппроксиманты могут обладать полюсами, не имеющими отношения к реальной функции.

Как уже указывалось, рядом преимуществ обладает метод, объединяющий преобразование Бореля с конформным отображением под знаком интегрального представления. Он позволяет учесть не только факториальный характер роста коэффициентов ряда ТВ, но и структуру особенности в плоскости борелевской переменной. Мы осуществляем аналитическое продолжение функции $B(x) = \sum_k B_k x^k$ из круга сходимости на весь интервал интегрирования посредством конформного отображения $x \rightarrow w$ так, чтобы область интегрирования $[0, \infty)$ отображалась во внутренность единичного круга, а разрез $[-\frac{1}{2}, -\infty)$ переходил бы в его границу (см. рис. 4).

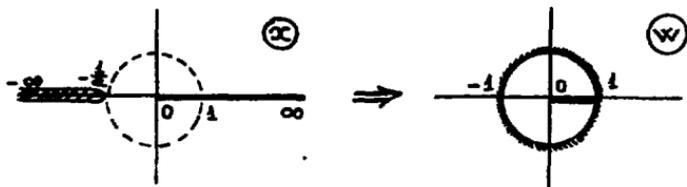


Рис. 4

Конформное преобразование выбирается таким образом, чтобы оно имело особенность, совпадающую с особенностью функции $B(x)$. После этого производится переразложение функции $B(x(w))$ в ряд по w , причем в новом ряду оставляется ровно столько членов, сколько их было в ряду для функции $f(g)$.

Этот метод успешно применялся к задачам вычисления критических индексов фазовых переходов как в модели $\varphi_{(13)}^4$ /^{38/}, так и в рамках ϵ -разложения Вильсона^{18/}, а также для восстановления

функции Гелл-Манна-Лоу в модели $g\varphi^4$ в области $g \gg 1$ /33/.
 Конформное преобразование выбралось в виде

$$W(x) = \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sqrt{1+ax} + 1} \quad (3.7)$$

что соответствует корневому ветвлению функции $B(x)$ в точке $x = -\frac{1}{a}$.
 Такой выбор, конечно, является далеко не единственным. Поскольку мы знаем только несколько первых членов ряда ТВ, то процедура переразложения $B(x(w))$ в ряд по w таит в себе неоднозначность следующего вида:

$$B(x(w)) = \frac{x^\lambda}{w^\lambda} \sum_k w^k B_k^{(\lambda)} \quad (3.8)$$

где λ - произвольное число. Как уже отмечалось, значение параметра λ определяет асимптотику функции $f(g)$ при $g \rightarrow \infty$:

$$f(g) \rightarrow g^\lambda \quad \text{при} \quad g \rightarrow \infty.$$

В тех случаях, когда асимптотика при больших g известна, наилучшая сходимость описанной процедуры к искомой функции наблюдается при выборе значения λ , согласованного с этой асимптотикой. Это становится особенно заметным при $g \gg 1$. Но так как такая асимптотика в большинстве случаев неизвестна, то приходится определять λ из других соображений. В работе /33/ предложен метод фиксации λ из требования наискорейшей сходимости аппроксимационной процедуры. А именно, ищется минимум относительной ошибки

$$\Delta_N(g) = 1 - f_N(g)/f_{N-1}(g), \quad (3.9)$$

где $f_N(g)$ получена с учетом N членов ряда ТВ при произвольном $g > 1$. Численный эксперимент показывает наличие резкого минимума величин $|\Delta_N|$ при близких значениях λ для всех N . Такой анализ был проведен для ангармонического осциллятора (φ^4), для модели с гауссовым пропатором и для уравнения Томаса-Ферми, где известно поведение при $g \rightarrow \infty$. Во всех случаях наблюдался резкий минимум величин $|\Delta_N|$ при значениях λ , согласующихся с асимптотикой при $g \rightarrow \infty$ (см. также /39/).

4. Физические результаты

Остановимся на физических результатах, полученных описанными выше методами в двух задачах квантовой физики: вычисление критических индексов фазовых переходов в рамках полевого подхода к

критическим явлениями и определением высокоэнергетического поведения функции Грина в квантово-полевой модели $\varphi^4(4)$.

Первая задача решалась в рамках модели $\varphi^4(3)$ методом Паде-Бореля ^{/37/} и методом Бореля с конформным преобразованием ^{/38/}, а в рамках ϵ -разложения - методом Бореля с конформным преобразованием ^{/18/}. Результаты этих работ, а также их сравнение с экспериментальными данными приведены в таблице.

Таблица Критические индексы ($O(n)$ φ^4 модель)

	Борель+конформ. ϵ -разложение	Борель+конф. преобр. $\varphi^4(3)$ /38/	Паде-Борель $\varphi^4(3)$ /37/	Эксперимент ^{/38/}	
$n=1$	β	$0,0333 \pm 0,0001$	$0,315 \pm 0,0025$	$0,021 \pm 0,02$	$0,016 \pm 0,014$
	ν	$0,628 \pm 0,002$	$0,6300 \pm 0,0008$	$0,627 \pm 0,01$	$0,625 \pm 0,005$
	ω	$0,781 \pm 0,015$	$0,782 \pm 0,010$		
$n=2$	β	$0,352 \pm 0,0001$	$0,0335 \pm 0,0025$		
	ν	$0,666 \pm 0,004$	$0,6693 \pm 0,0010$		$0,675 \pm 0,001$
	ω	$0,779 \pm 0,015$	$0,778 \pm 0,008$		
$n=3$	β	$0,0354 \pm 0,0001$	$0,0340 \pm 0,0025$		
	ν	$0,700 \pm 0,007$	$0,7054 \pm 0,0011$		
	ω	$0,779 \pm 0,007$	$0,779 \pm 0,006$		

Мы видим, что использование метода Бореля с конформным преобразованием позволяет добиться очень хорошей точности и получить согласованные результаты в обоих теоретических подходах.

Отметим, что в этих подходах суммировались существенно различные ряды ТВ, а именно, в первом случае ряды по g , а во втором - по ϵ . Результаты ТВ нужно было продолжить до нуля β -функции в первом случае и до $\epsilon=1$ во втором. Замечательное согласие результатов обоих подходов свидетельствует об эффективности использованного метода суммирования.

Задача определения высокоэнергетических асимптотик в модели $\varphi^4(4)$ в рамках метода ренормгруппы сводится к задаче восстановления функции Гелл-Манна-Лоу. Главный интерес представляет вопрос о существовании нетривиального нуля у β -функции и вид асимптотики $\beta(g)$ при $g \rightarrow \infty$.

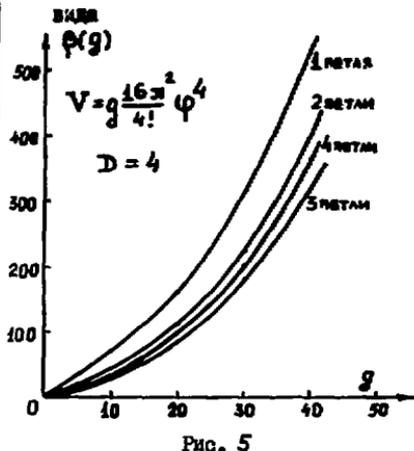
Эта задача решалась методами УТВ ^{/34,35/} Паде-Бореля ^{/36/} и методом Бореля с конформным преобразованием ^{/33/}. Наилучшего пред-

вращения в область $g > 1$ удалось достигнуть последним методом. В модели $8\pi^2$ он позволил восстановить функцию Гелла-Манна-Лоу вплоть до $g/16\pi^2 \sim 50$ с 10% точностью, т.е. увеличил область применимости на 2 порядка. Численный анализ минимума величины (3.14) дает для параметра Ландау $1,9 \pm 0,2$, что приводит к асимптотике функции $\beta(g)$

$$\beta(g) \sim 0,9g^2 \text{ при } g \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Графики функции $\beta(g)$ с учетом одно-, двух-, трех- и четырехпетлевого приближений приведены на рис. 5.

Полученное поведение функции $\beta(g)$ приводит к нуль-зарядной ситуации, т.е. к внутреннему противоречию в теории. Этот вывод качественно совпадает с результатами однопетлевого расчета $\beta_2(g) = 1,5g^2$, но в отличие от последнего он учитывает эффекты высших петель и формула (4.1) справедлива и при $g > 1$.



5. Заключение

Успехи, достигнутые на пути решения задачи восстановления, оставляют место ряду нерешенных проблем. Это прежде всего вопрос о наличии ренормалюнов в теории поля и задача суммирования знакопостоянных рядов, возникающих, например, в квантовой хромодинамике. Однозначное решение проблемы требует знания аналитических свойств функций в плоскости константы связи и конструктивного выхода в область сильной связи.

Литература

1. G. Hurst. Proc. Roy. Soc., 214A, 44, 1952;
W. Thirring. Helv. Phys. Acta, 26, 33, 1953;
A. Petermann. Helv. Phys. Acta. 26, 291, 1953.
2. F. E. Dyson. Phys. Rev., 85, 631, 1952.
3. Д. В. Ширков. Lett. Math. Phys., 1, 179, 1976.
4. C. S. Lam. Nuovo Cim., 47A, 451; 50A, 504, 1967; 55A 258, 1968.

5. J.S.Langer. *Ann.Phys.*, 41, 108, 1967.
6. Л.Н.Липатов. *ВЖТФ*, 72, 411, 1977.
7. E.Bresin, J.-C. Le Guillow, J.Zinn-Justin. *Phys.Rev.* D15, 1544, 1978.
8. J.C.Collins, D.R.Soper. *Ann. of Phys.*, 112, 209, 1978.
9. C.N.Bender, T.T.Wu. *Phys.Rev.*, 184, 1231, 1969;
Phys.Rev.Lett., 27, 461, 1971; *Phys.Rev.*, 27, 1620, 1972.
10. E.Bresin. *Proceedings of the European Particle Physics Conference, Budapest, 1977*, p. 1231-1254.
11. E.Bresin, G.Parisi, J.-Zinn-Justin. *Phys.Rev.*, D16, 408 (1977).
12. Д.И.Казakov, Л.Р.Комидзе, Н.В.Махалдани, А.А.Владимиров. Препринт ОИЯИ, Е2-8085, Дубна, 1974.
13. C.Dervillier, J.M.Drouffe, C.Godreche, J.Zinn-Justin. *Phys. Rev.*, D17, 2144 (1978).
14. Е.Б.Богомольный. *Phys.Lett.*, 67B, 193, 1977.
15. Ф.М.Диттес, В.А.Кубышкин, О.В.Тарасов. *ТМФ*, 37, 66, 1978.
16. А.Носова. *ОУ-НЕТ 21 Preprint, Тоуонака, 1977*.
17. К.Вильсон, Дж.Когут. Ренормализационная группа и ϵ -разложение, "Мир", М., 1975.
18. Д.И.Казakov, О.В.Тарасов, А.А.Владимиров. Препринт ОИЯИ, Е2-12249, Дубна, 1979.
19. C.Itzykson, G.Parisi, J.-B.Zuber. *Phys.Rev.Lett.*, 38, 306, 1977.
20. А.П.Бухвостов, Л.Н.Липатов. *Phys.Lett.*, 70B, 48, 1977.
21. Е.Б.Богомольный, В.А.Фатеев. *Phys.Lett.*, 71B, 93, 1977.
22. G.Parisi. *Phys.Lett.*, 66B, 382, 1977.
23. C.Itzykson, G.Parisi, J.-B.Zuber. *Phys.Rev.*, D16, 996 (1977).
24. Г.Харди. Расходящиеся ряды, ИИЛ, 1951, Теорема # 136.
25. S.Graffi, V.Greschi, B.Simon. *Phys.Lett.*, 32B, 681, 1970.
26. J.P.Eckmann, J.Magnen, B.Sénéor. *Commun. Math.Phys.*, 32, 251, 1975.
27. G. 't Hooft. In *Deeper Pathways in High-Energy Physics*. Ed. by B.Kursunoglu a.o. New York-London, Plenum Press, 1977, p. 699.
28. G.'t Hooft. Lectures given at the "Ettore Majorana" International School of Subnuclear Physics, Erice, 1977.
B.Lautrup. *Phys.Lett.*, 69B, 109, 1977.
G.Parisi. *Phys.Lett.*, 76B, 65, 1978.
29. N.N.Khuri. *Phys.Lett.* 82B, 83, 1979.
30. C.A.Truesdell. *Ann. of Math.*, 46, 114, 1945.

31. E. Brezin, J.-C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys.Rev., D15, 1558, 1977;
G.Parisi. Preprint LPTENS 77/13 (Lectures given at the 1977 GARGESE Summer Institute).
32. C.G.Callan, R.P.Dashen, G.J.Gross. Phys.Lett., 62B, 334, 1976.
33. А.М.Казанов, О.В.Тарапов, А.В.Ширков, ТМФ, 36, 15, 1979.
34. В.С.Попов, В.А.Евуский, А.В.Турбинер. ЭТФ, 74, 445, 1978.
35. А.В.Ширков. Lett. Nuovo Cim., 18, 452, 1977.
36. В.А.Евуский, В.С.Попов. ЯФ, 28, 1109, 1978.
37. G.A.Baker, B.G.Nickel, M.S.Green, P.I.Meiron. Phys.Rev.Lett., 36, 1351, 1976.
38. J.C.Le Guillou, J.Zinn-Justin. Phys.Rev.Lett., 39, 95, 1977.
39. O.B.Тарапов. Lett. in Math. Phys., 2, 143-149, 1979.

II. Динамика малых расстояний



ПАРТОНЫ В КВАНТОВОМ ХРОМОДИНАМИКЕ.

ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

А.В.Ефремов, А.В.Радзюкин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Последние годы были ознаменованы прогрессом в квантово-полевой теории сильных взаимодействий. Можно даже утверждать, что впервые с момента открытия ядерных сил, т.е. с опытов Резерфорда 1911 г., мы подошли к пониманию природы этих сил (научившись по дороге использовать их для нужд человечества и открыв целый мир элементарных частиц). Как и во времена Резерфорда, этот прогресс связан прежде всего с экспериментальными и теоретическим проникновением внутрь элементарных частиц, с изучением процессов с большой передачей импульса $\Delta p \gg 1 \text{ ГэВ}/c$.

1. КХД жестких процессов

Теоретическое изучение жестких процессов шло несколькими различными путями. Один из них - общеизвестный путь создания и развития партонной модели. Другой, менее известный (но более близкий авторам), основан на изучении и суммировании асимптотик фейнмановских диаграмм в КТП в 60-х годах и связан с именами Полкингорна, Ефремова, Завьялова, Тиктопулоса, Гинзбурга, Сербо и др.

Именно на этом пути было установлено, что асимптотика любой диаграммы, описывающей процесс в области, где некоторые из переменных много больше остальных, $s, s_e \gg t, t_e$, определяется интегрированием по области малых расстояний таких

подграфов ("партоновых подпроцессов"), скажем в гочку которых ликвидируют зависимость амплитуды от всех больших переменных (рис. I)

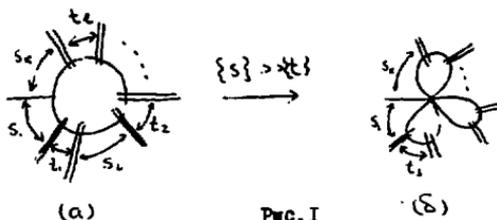


Рис. I

При этом естественно, что степень убывания по s определяется размерностью амплитуды партонового подпроцесса (массовые параметры несущественны, а константы взаимодействия будем считать безразмерными), точнее, суммарным твистом всех внешних линий

$$F \sim s^{-\tau} \quad (\text{с точностью до } \log s),$$

где

$$\tau = \begin{cases} 1 & \text{для частиц со спином } 0 \text{ и } 1/2, \\ 0 & \text{для частиц со спином } 1. \end{cases}$$

Для скалярных глюонов, которыми мы пока ограничимся, это означает, что за старшие асимптотические члены ответственны подпроцессы с минимальным числом внешних линий.

Наиболее важным для всего последующего развития подхода и его физических приложений оказалось свойство факторизации мелиновского образа (моментов) амплитуды по большим переменным, т.е. то, что он является произведением мелиновского образа "партонового подпроцесса" на малых расстояниях при нулевых значениях малых переменных и некоторых функций малых переменных, связанных с большими расстояниями. В импульсном представлении это свойство формулируется в виде свертки

$$F(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_e) = \int dx_1, \dots, dx_k f_{LD}(x_1, \dots, x_k, t) E_{SD}(x_i, s_i, \dots, x_k, s_k), \quad (I)$$

где E_{SD} означает амплитуду партонного подпроцесса и зависит только от больших переменных, а f_{LD} "функция фрагментации" - связана с большими расстояниями и определяется несвязным остатком диаграмм типа изображенных на рис.1б. Она также имеет вид произведения функций, соответствующих слабо связным частям диаграмм (рис.1б).

Именно эта факторизация больших и малых расстояний, составляющая основу партонной картины, позволяет изучать их раздельно. Ввиду большого значения свойства факторизации мы остановимся на нем более детально.

В качестве примера рассмотрим процесс рождения фотона с большим поперечным импульсом P_T в адрон-адронном соударении. Сечение этого процесса в области $s_1, s_2, s \gg m_{agr}^2$ и $s_1 s_2 / s = P_T^2 \gg m_{agr}^2$ определяется мнимой частью амплитуды рис.2а. На рис.2б показаны

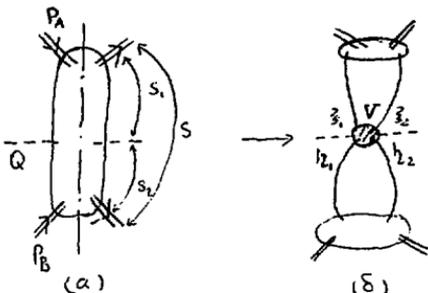


Рис.2

диаграммы подпроцесса, ответственные за старший степенной член. В координатном представлении любую из них можно записать в виде

$$\int d^3z_1 d^3z_2 d^2h_1 d^2h_2 f_A(z_1, z_2, P_A) E_V(z_1, z_2, h_1, h_2, Q) f_B(h_1, h_2, P_B) + O(\sqrt{P_T}). \quad (2)$$

Чтобы получить факторизацию на малых расстояниях, достаточно было бы разложить f_A и f_B в ряд по $(z_1 - z_2)$ и $(h_1 - h_2)$ и проинтегрировать E_V с этими множителями. Однако этого сделать нельзя, так как при $z_1, h_1 \rightarrow z_2, h_2$ возникает расходящиеся "треугольные" диаграммы, т.е. $f_{A,B}$ в этом пределе

оказываются сингулярными. Это происходит из-за того, что подграфы V_1, V_2, \dots (рис.3) имеет тот же тапст, что и V_3 . Для корректного перехода к пределу эти сингулярности необходимо выделить.

Пусть V_1 - наибольший из таких подграфов. Из вклада диаграммы выделим сингулярную часть \mathcal{F}_{V_1} , связанную с малыми расстояниями в V_1 , и регулярную часть \mathcal{F}_{reg, V_1} .

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{V_1} + \mathcal{F}_{reg, V_1}.$$

Последняя может иметь сингулярность из-за малых расстояний в следующем подграфе V_2 . Выделим сингулярность, соответствующую малым расстояниям в этом подграфе:

$$\mathcal{F}_{reg, V_1} = \mathcal{F}_{V_2} + \mathcal{F}_{reg, V_1, V_2}$$

и т.д. В результате вклад любой диаграммы окажется записанным в виде

$$\mathcal{F} = \sum_i \mathcal{F}_{V_i} + \mathcal{F}_{reg, \text{all } V_i's}. \quad (3)$$

Заметим, однако, что процедура вычитания неоднозначна, поскольку неоднозначно само разделение на большие и малые расстояния. Единственное требование на параметр границы μ : он должен быть больше всех других размерных параметров (масс кварков и адронов).

Каждый из членов сумм (3) графически имеет вид рис.4, а аналитически представим в виде (2), где функции $\mathcal{F}_{A,B}$ и E_{V_i}

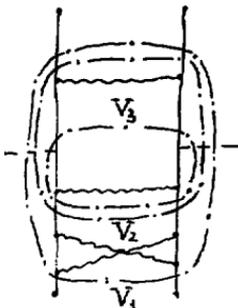


Рис.3

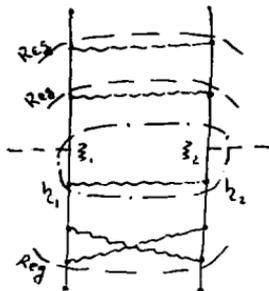


Рис.4

приобретает зависимость от μ . (Кроме этого, они, разумеется, зависят от константы связи g_λ и параметра λ , при котором она определена.) Ясно, однако, что асимптотика \bar{f} не должна зависеть от нашего произвола в выборе границы.

Поскольку форма выражения (3) справедлива для любого подграфа V и для любой диаграммы процесса, естественно предположить, что она справедлива и для всей амплитуды, т.е. для сумм всех диаграмм, величины $\bar{f}_{A,B}$ при этом имеют смысл матричных элементов

$$\bar{f}_A(\bar{z}_1, \bar{z}_2, P_A, \mu, \lambda, g_\lambda) = \langle P_A | N_\mu(\bar{\Psi}(\bar{z}_1) \Gamma \Psi(\bar{z}_2)) | P_A \rangle. \quad (4)$$

где N_μ означает нормальное произведение, регуляризованное при $(\bar{z}_1, -\bar{z}_2) \rightarrow 0$. Это позволяет разложить ее в ряд

$$\bar{f}_A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)_{\nu_1} \dots (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)_{\nu_n} \langle P_A | N_\mu(\bar{\Psi}(0) \Gamma \bar{\partial}_{\nu_1} \dots \bar{\partial}_{\nu_n} \Psi(0)) | P_A \rangle, \quad (5)$$

где матричный элемент может быть представлен в виде

$$\langle P_A | N_\mu(\bar{\Psi}(0) \Gamma \bar{\partial}_{\nu_1} \dots \bar{\partial}_{\nu_n} \Psi(0)) | P_A \rangle = (P_A)_{\nu_1} \dots (P_A)_{\nu_n} \alpha_n(\mu, \lambda, g_\lambda). \quad (6)$$

Если теперь записать безразмерные величины α_n как

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{dx}{x} x^n f(x),$$

то подстановка выражений (4), (5), (6) в (2) и интегрирование по \bar{z} и h немедленно дает:

$$\bar{f} = \int_0^1 dx dy f_A(x, \mu, \lambda, g_\lambda) E_V(x P_A, y P_B, Q, \mu, \lambda, g_\lambda) + f_B(y, \mu, \lambda, g_\lambda) + O(1/P_T). \quad (7)$$

Где величина E есть амплитуда подпроцесса, задаваемого подграфом V на рис. 2в с безмассовыми пропагаторами и внешними импульсами $x P_A, y P_B, Q$.

Заметим, что в отличие от обычной партонной формы функции распределения здесь оказались зависящими от параметра μ . Эта зависимость, однако, должна быть такой, чтобы асимптотика амплитуды (7) осталась не зависящей от μ . Вместе с независимостью от λ (ренормгруппа) это приводит к уравнению $(\lambda = \mu)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_{\mu}} + \beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{\mu}} \right)^2 + z_n (g_n^2) \right) a_n \left(\frac{\mu^2}{\mu^2} g_n^2 \right) = 0 \quad (8)$$

и аналогичному уравнению для моментов амплитуд подпроцесса $E_{nm}(P/\mu, g_{\mu})$. Оно-то и определяет зависимость a_n и E_{nm} от μ (и, следовательно, от P_T). Если теперь положить $P_T = \mu$, то получим обычную форму модифицированной партонной модели

$$F(P_A, P_B, Q) = \int_0^1 \{_A(x, P_T) \}_B(y, P_T) E(x P_A, y P_B, Q, \alpha(P_T)), \quad (9)$$

где $\alpha(P_T) = g_n^2 / \mu^2$, а зависимость $\{$ от P_T определена уравнением (8).

Такая теория особенно содержательна, когда при достаточно большом P_T эффективная константа $\alpha(P_T)$ становится настолько малой, что позволяет пользоваться теорией возмущений. Именно с такой ситуацией мы встречаемся в квантовой хромодинамике. В этой теории, однако, при выводе возникает усложнения, связанные, во-первых, с нулевой массой глюона $m_g = 0$ и, во-вторых, с его единичным спином.

Первое обстоятельство приводит к тому, что в отдельных диаграммах оказывается важным кулоновское дальнеедействие между сталкивающимися частицами (рис.5), в результате которого появляются инфракрасные члены типа $\log m_g$. Можно, однако, показать¹³⁾, что для бесцветных начальных состояний эти слагаемые в сумме сокращаются. Физическая причина этого состоит в том, что для бесцветных состояний остаются по большей мере только дипольные силы, которые приводят к поправке степенной малости по P_T .

Второе обстоятельство, т.е. нулевой twist глюонного поля, приводит к тому, что вместе с подпроцессами, изображенными на рис.2б, становится важным подпроцессом с любым числом глюонов (рис.6), которые в отдельных диаграммах дают дважды логарифмические члены $\alpha(P_T) \log^2 P_T$. Можно, однако, показать¹³⁾, что суммирование глюонных вставок в каждую из линий приводит (с точностью до операторов $G_{\mu\nu}$ twist 1, т.е., в конечном итоге, с точностью до $1/P_T$) к простой их модификации (рис.7). Эта модификация равносильна замене

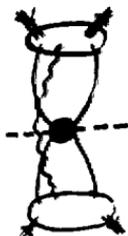


Рис.5



Рис.6

$$\begin{aligned}
 X_1 \quad X_2 &+ \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \\
 &= T_c \left[e^{-p} \left(i g \int_{X_1}^{X_2} \tilde{A}_r dz_r \right) \right] S(X_1, X_2) + O(G)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 \quad X_2 &+ \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \\
 &= T_c \left[\exp \left(i g \int_{X_1}^{X_2} \tilde{A}_r dz_r \right) \right] D_{mn}(X_1, X_2) + O(G)
 \end{aligned}$$

Рис.7

$$\psi(z_1) \Gamma \psi(z_2) \rightarrow \psi(z_1) T_c \left[\Gamma e^{i g \int_{z_1}^{z_2} \tilde{A}_r dz_r} \right] \psi(z_2) + O(G)$$

в выражении (2), (4) и, в конечном итоге, к замене $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ в разложении (5). Форма же ответа (7) остается неизменной.

Этот результат, справедливость модифицированной партонной картины в КХД, была независимо получена разными методами разными группами авторов ^{/4/}. Наш подход кажется наиболее последовательным, так как он, во-первых, не предполагает ее заранее, т.е. не предполагает никакого отбора диаграмм, а исходит из всего ряда теории возмущений.

Это преимущество дало нам возможность получить необычную партонную картину для эксклюзивных процессов ^{/5/}. В отличие от фейнмановской картины ^{/6/}, где передача большого импульса адрону осуществляется за счет передачи его быстрому партону, несущему почти весь импульс адрона с последующим подхватом им остальных

медленных партоней, КХД привела к картине, где импульс адрона разделен примерно поровну, а перераспределение большей доли происходит за счет подпроцесса жесткого перераспределения партоней (как, например, на рис.8).



Рис.8

Есть основания надеяться на получение интересных результатов в КХД для процессов в дифракционной области, где для скалярных глюонов была получена [11] модификация реджиусовской картины.

Во-вторых, в рамках какого подхода виден путь учета младших степенных поправок. В частности, уже сделан учет конечной массы адронов [12] (ξ - скейлинг); на очереди — важная задача корректного учета поперечного движения партоней.

2. Экспериментальный статус КХД

Итак, КХД вносит в партонную модель специфические модификации, допускающие экспериментальную проверку. Это:

а) зависимость партонных подпроцессов от эффективной константы связи, падающей с ростом передачи импульса

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2n_f) \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (10)$$

где n_f — число разных кварков (u, d, s, c, b, \dots , впрочем, влияние последних при достижимых ныне энергиях подавлено в силу того, что их проявление связано с рождением тяжелых частиц);

б) специфическое нарушение скейлинга в функциях распределения $f_{H \rightarrow q}(x, Q^2)$ и $D_{q \rightarrow H}(x, Q^2)$: с ростом Q^2 они должны расти в области малых x и падать в области $x \approx 1$;

в) рост среднего поперечного импульса партоней с ростом Q^2 .

$$\langle k_T^2 \rangle \sim \frac{Q^2}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (11)$$

Насколько эти модификации видны экспериментально?

На рис.9 представлена зависимость структурной функции глубоко-неупругого рассеяния (ГНР) νW_2 от Q^2 . Видно, что характер зависимости согласуется с КХД, т.е. функция растет в области $x = Q^2/\nu < 0,2$ ($\frac{d}{dx} > 0$) и падает в области $x > 0,2$. Конечно, это явление можно объяснить и другими причинами. Например, открыванием каналов рождения очарованных частиц в области большой передачи энергии ν (малых x) и влиянием неасимптотических поправок (учитываемых эффективной заменой $x \rightarrow x' = x/(1 + A/\nu)$) в области малых ν (больших x). Однако превосходство КХД в том, что она дает единое количественное объяснение этих явлений. Сравнение νW_2 с КХД при $A = 0,5$ показано на рис.10.

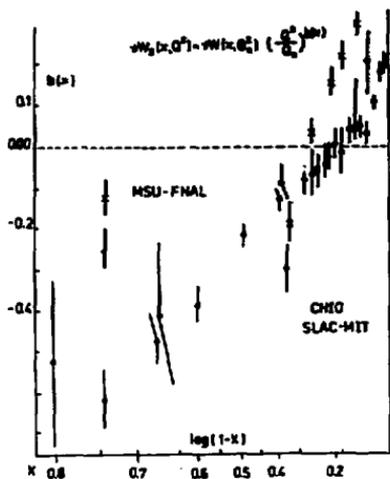


Рис.9

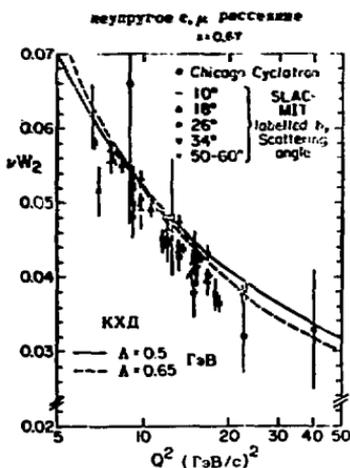


Рис.10

Такое прямое сравнение, правда, имеет некоторую неопределенность из-за неизвестной формы распределения глюонов в адроне. Этот же недостаток присущ и сравнению моментов структурной функции глубоконеупругого $e p$ -рассеяния:

$$M_2(N, Q^2) = \int_0^1 x^{N-2} \nu W_2(x, Q^2) dx. \quad (12)$$

КХД (т.е. уравнение (8) с вычисленными по теории возмущений величинами Z_n) дает

$$M_2(N, Q^2) = A(N)(L)^{-d_A(N)} + B(N)(L)^{-d_B(N)} + C(N)(L)^{-d_C(N)} \quad (13)$$

где $L = (\ln Q^2/\Lambda^2)/\ln(Q^2/\Lambda^2)$, величинами A и B вычисляются из функций распределения кварков и глюонов в синглетном (по туну кварка) состоянии при $Q^2 \approx Q^2$, а величина C - в несинглетном состоянии, т.е. она не содержит глюонных функций и может быть найдена, например, путем вычитания данных из протона и нейтронной мишеней. Величина же d в низшем приближении по α_s является просто числами. Сравнение, проведенное для трех моментов $19/$, продемонстрировало хорошее согласие с экспериментом при $\Lambda = 0,66$ ГэВ/с (рис.II).

Еще более впечатляющим оказывается сравнение, проведенное для моментов структурной функции $x F_3$ в сечении ГНР γ Итрино $10, II/$, которая также не содержит глюонных функций распределения

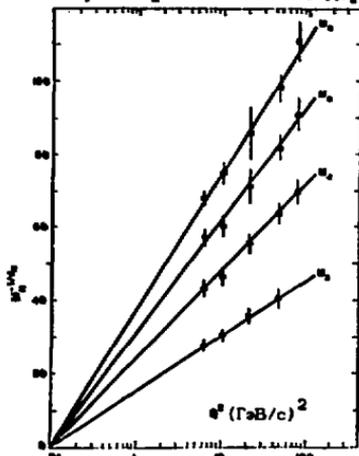


Рис. II

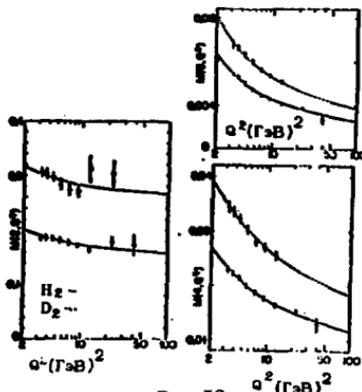


Рис. I2

$$M_3(N, Q^2) = C_3(N)(L)^{-d_C(N)} \quad (14)$$

Согласно КХД все величины $M_3 \frac{1}{d_C}$ должны линейно зависеть от $\ln Q^2$ и обращаться в нуль в точке $Q^2 = \Lambda^2$.

Рис. 12 наглядно показывает, в какой степени это подтверждается экспериментально. Величина Λ при этом оказывается равной $0,33 \pm 0,10 \text{ ГэВ}/c$.

Очень интересно сравнение зависимости между моментами с разными номерами N . Из выражения (14) следует, что зависимость между $\ln M_N(N, Q^2)$ и $\ln M_N(N', Q^2)$ должна быть прямой с наклоном, равным $(d \ln M_N / d \ln N)$, т.е. числом, величина которого не зависит от параметра Λ . Это сравнение показано на рис. 13. Примечательно, что величина наклона определяется спином глюона. Так, для скалярного глюона наклоны $M(3)/M(2)$ и $M(4)/M(3)$ были бы равны 1,12, 1,06, 1,21, что явно меньше экспериментальных.

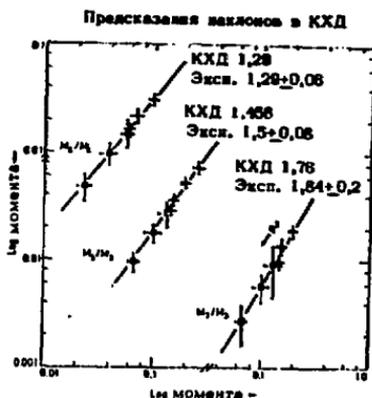


Рис. 13

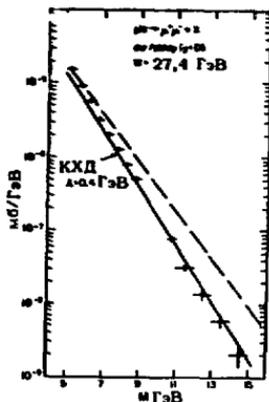


Рис. 14

Таким образом, КХД дает хорошее количественное объяснение нарушения скейлинга. Следует, однако, обратить внимание на разницу в величинах универсального параметра Λ при прямом сравнении и сравнении моментов. Источником ее является, по-видимому, поправки, которые могут быть двух сортов: это неасимптотические члены $O(1/Q^2) / \ln$ и поправки высшего порядка по α_s (двухпетлевые диаграммы) $/ \ln$. Дело в том, что в методе моментов, в отличие от прямого сравнения, основное убывание идет от упругого рас-

себя в области $\chi \approx 1$ с большими значениями Q^2 , и поэтому поправки внесут относительно малый вклад. Коррентный учет их в КХД в настоящее время затруднителен. Поправки на высшем порядке эффективно оказываются эквивалентным перераспределению α_s , т.е. изменению величины Λ . В частности, учет их [11] привел к уменьшению величины Λ на 40%.

Обратимся теперь к процессу рождения тяжелых лептонных пар, $A + B \rightarrow \mu^+ \mu^- + X$. Здесь нарушение скейлинга при достижении выше энергий должно приводить к дополнительному падению $d\sigma/dM$ по сравнению с партонной моделью. Приведенное на рис.14 сравнение [13] неплохо согласуется с КХД при $\Lambda \approx 0,4$. Однако неоднозначность, связанная с распределением глюонов, а также систематическая ошибка экспериментальных данных делает это согласие менее значительным, чем в глубоконеупругом рассеянии.

Другой кинематической областью, где КХД также приводит к партонной модели, является рождение пар с большим P_T , причем в отличие от процесса Дрейль-Яна (рис.14) здесь в качестве партонных подпроцессов выступают как аннигиляция $q + \bar{q} \rightarrow \gamma^* + G$, так и комптоновский процесс $q + G \rightarrow \gamma^* + q$. Сравнение соответствующих вычислений с экспериментальными данными показано на рис.15. Видно, что хотя по порядку величины теоретические

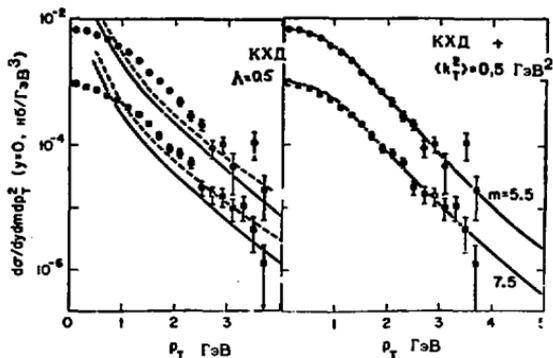


Рис. 15

сечения близки к экспериментальным, форма распределения описывается несколько иной. Причина этого различия, по-видимому, также заключается как в поправках высшего порядка, которые здесь имеют дважды логарифмический характер $\sim \ln^2 \sqrt{s}$, $\alpha_s(P_T) \ln^2 \sqrt{s}/Q$, так и в степенных поправках по P_T , которые феноменологически учитываются поперечным движением кварков $\sim 1/P_T$ (см. рис. 150).

Перейдем теперь к процессу рождения адронов с большими P_T , $A + B \rightarrow C + X$. Вплоть до самого последнего времени эти процессы представляли наибольшую трудность для партонной модели ввиду гораздо более высокой ($\sim P_T^2$) степени убывания сечения по сравнению с предпологаемой по соображениям ($\sim P_T^{-2}$). В КХД эта дополнительная степень падения идет из нескольких разных источников $\sim 1/P_T^2$, при достижении кинне энергиях, данных вклад одного знака. Имеется в виду

а) Убывание функций распределения кварков (рис. 9):

$$\Delta N_{3qf} \approx 0,2 \text{ при } x \approx P_T/\sqrt{s} \approx 0,25.$$

б) Убывание функции фрагментации кварков в адрон ($\Delta N_{3qf} \approx 0,6$), так как из-за достаточно быстрого убывания сечения подпроцесса $qq \rightarrow qg$ с ростом поперечного импульса доля импульса, уносимого адроном, составляет $\approx 0,85$.

в) Убывание за счет логарифмического падения $\alpha_s(P_T)$ в партонном подпроцессе - рис. 15 ($\Delta N_{3qf} \approx 1$ в области $P_T \approx 2 \div 10 \text{ ГэВ/с}$).

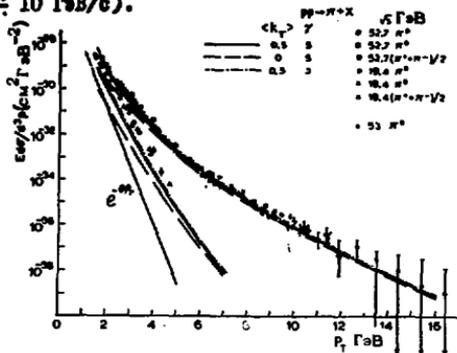


Рис. 16

Все вместе они приводят к степени падения $\Delta N \approx 6$, которая наблюдается сейчас в области $P_T > 6$ ГэВ/с. Сравнение численного расчета по КХД [16] с экспериментом показано на рис.16 (пунктирная кривая). Более высокая степень падения в области $P_T < 6$ требует, кроме всех перечисленных факторов, и феноменологического учета поперечного движения кварков в адроне (сплошная кривая на рис.16). Как уже отмечалось, последовательный учет этого фактора в КХД пока не проведен.

Вообще, что касается растущего среднего поперечного импульса кварков, то положение таково, что никаких эффектов роста пока не наблюдается. Наиболее ярким из них, согласно картине Дрелля-Яна (рис.14), мог бы быть рост среднего поперечного импульса пары $\mu^+ \mu^-$ в зависимости от ее массы. Экспериментальное же измерение этой величины свидетельствует, во-первых, о ее постоянстве при $M > 5$ ГэВ/с² и, во-вторых, о значительном превышении значения, предсказанного КХД (рис.17, пунктирная кривая). Чтобы ликвидировать это расхождение, необходимо в дополнение к хромодинамическому вводить некий постоянный феноменологический ("primordial") средний поперечный импульс $\langle k_T \rangle \approx 500-700$ МэВ/с (сплошная линия).

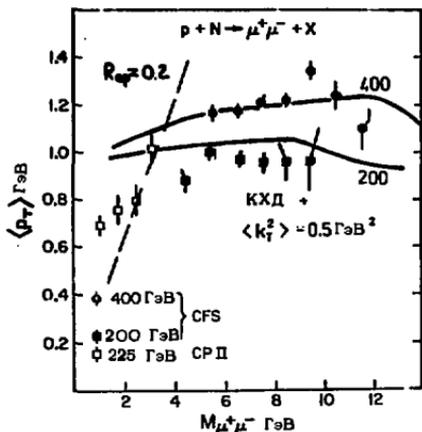


Рис. 17

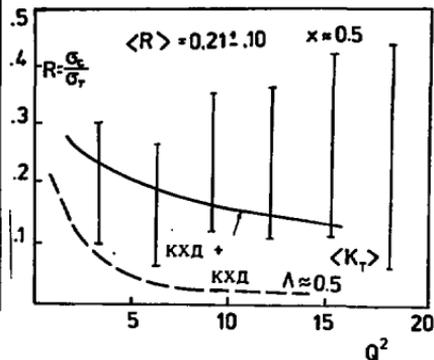


Рис. 18

Другим примером может служить величина $R = G_1/G_T$ в глубоконеупругом рассеянии. В кварк-партоной модели эта величина равна нулю, точнее, падает как $4\langle K_T^2 \rangle/Q^2$. В КХД партон приобретает поперечный импульс ($\sim Q^2/e_n Q^2/k$) за счет излучения глюона, поэтому величина R оказывается пропорциональной $\alpha_s(Q^2) \sim (e_n Q^2/k)^{-2}$.

Вычисления R приводят к величине, лежащей значительно ниже экспериментальных точек (рис.18), хотя точность измерения R оставляет желать много лучшего. Согласование снова требует добавления постоянного поперечного импульса. Аналогичные добавки, как мы видели, нужны и при описании адронов с большим поперечным импульсом. Довольно большая величина этого среднего поперечного импульса, по-видимому, и "забывает" пока эффект КХД.

Резюмируя, можно утверждать, что для процессов с большой передачей импульса в КХД получены надежные теоретические доказательства справедливости модифицированной партонной модели, которая находит все большее экспериментальное подтверждение. В этом смысле претензии КХД на роль теории сильных взаимодействий необычайно высоки, хотя и имеется ряд трудностей, главная из которых - учет неасимптотических поправок, приводящих к эффекту ферми-движения кварков в адронах.

Литература

1. A.V.Efremov, I.F.Ginzburg. Fortschritte der Physik, 22, 575, 1974.
2. A.V.Efremov, A.V.Radyushkin. Prepr.JINR E2-11725, 11726, 1978.
3. A.V.Efremov, A.V.Radyushkin. Prepr.JINR E2-11849, 1978.
4. D.Amati, R.Petronzio, G.Veneziano. Nucl.Phys. B140, 54, 1978, B146, 29, 1978.
S.Libby, G.Sterman. Phys.Rev. D18, 3252 (1978).
R.K.Ellis, H.Georgi, M.Machacek, H.D.Politzer, G.G.Ross. Caltech prepr. CALT-68-684, 1978.
A.H.Mueller, Phys.Rev. D18, 3705, 1978.
5. A.V.Efremov, A.V.Radyushkin. Prepr. JINR E2-11983, Dubna, 1978.
6. Р.Фейнман. Взаимодействие фотонов с адронами, "Мир", 1975.
7. E.Gabathuler. Proc. of Tokyo Conf., 1978.

8. G.C.Fox. Nucl.Phys. B21, 107, 1977.
9. H.L.Anderson, H.S.Matis, L.C.Myriantopoulos. Phys.Rev.Lett., 40, 1061, 1978.
- 10.CERN-Dortmund-Heidelberg-Saclay-Belogne-collab.
CERN-prepr., 1978.
- 11.Aachen-Bonn-CERN-London-Oxford-Saclay-collab.,
CERN/EP/PHYS, 73-30, 1978.
- 12.A.De Rujula, H.Georgi, H.D.Politzer. Ann.of Phys.
103, 315, 1977.
- 13.L.Lederman. Proc.of Tokyo Conf., 1978.
14. В.Д.Локшицер, Д.М.Дьяконов, С.Н.Троян. IX-ая зимняя школа
ЛМФН, Ленинград, 1978.
- 15.D.M.Scott, Workshop on Lepton-Pair Production in Hadron-Hadron
collision, Bielefeld, 1978.
- 16.R.P.Feynman, R.D.Field, G.C.Fox. Phys.Rev., D18, 3320, 1978.
A.P.Contogouris. 13th Rencontre de Moriond, Les Arcs,
Savoie, 1978.

КВАРКОВЫЙ И ГЛЮОННЫЙ КОНДЕНСАТ В ВАКУУМЕ

А.И.Вайнштейн, В.И.Захаров, М.А.Шифман

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

I. Введение

Квантовая хромодинамика является, по-видимому, правильной теорией сильных взаимодействий. Это убеждение основано не столько на детальном сравнении теории с опытом — хорошо проверенных количественных предсказаний либо нет вообще, либо немного — сколько на красоте общей картины и справедливости некоторых качественных следствий теории.

Фундаментальной нерешенной проблемой квантовой хромодинамики остается невылетание цветных частиц. Хотя последовательное решение отсутствует, не может не быть некоторых, хотя бы смутных представлений о механизме невылетания. В последнее время складывается представление, что ненаблюдаемость цветных частиц в свободном состоянии связана со специфическими свойствами вакуума в квантовой хромодинамике ^{1/1}.

В настоящем обзоре мы остановимся на некоторых результатах, в основном опубликованных в работах ^{1/2}, которые следуют из представлений, подобных используемым в физике резонансов. Центральной является гипотеза о существовании вакуумных полей — кваркового и глюонного конденсатов, которые действуют на цветные объекты. Вакуум, прозрачный по отношению к незаряженным, "белым" состояниям служит источником силы, действующей на цветные частицы.

Картину образования резонанса можно качественно представить следующим образом. Пусть на малых расстояниях, скажем на e^+e^- аннигиляции, образуется пара кварк-антикварк. Пара не обладает цветом, и, пока кварки находятся "рядом", их можно рассматривать как свободные. Поскольку их ничто не удерживает на малых расстояниях, кварки начинают расходиться друг от друга, возникает распределение цветного заряда. Взаимодействие с вакуумными полями приводит тогда к возникновению силы, действующей на пару, причем можно убедиться, что (пока расстояние мало) сила — дипольная, то есть растет пропорционально расстоянию между кварками.

В конечном счете это взаимодействие приводит к образованию резонанса (например, ρ).

Альтернативным может быть предположение, что существенны обмены между кварками: константа связи мала на малых расстояниях и не препятствует вначале разлету кварков, а с увеличением относительного расстояния между кварками эффективная константа растет и взаимодействие связывает кварки в мезоны.

Будет видно, что изложенные картины образования резонансов можно различить экспериментально и будут приведены аргументы в пользу первой из них.

Вакуумные поля мы будем характеризовать несколькими числами, главными из которых являются

$$\langle 0 | \frac{d_s}{\Lambda^2} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle = 0.012 \text{ ГэВ}^4, \quad (1)$$

$$\langle 0 | d_s^{1/2} \bar{q} q | 0 \rangle = 0.012 \text{ ГэВ}^3, \quad (2)$$

где q - кварковое поле ($q = u, d, s$), $G_{\mu\nu}^a$ - тензор напряженности глюонного поля, $a = 1, \dots, 8$ - цветовой индекс. В определении вакуумных средних включена константа сильных взаимодействий d_s ($d_s = g_s^2/4\pi$), и степень d_s выбрана так, чтобы ответ не зависел от точки нормировки. Несколько забегая вперед, мы привели также численные значения вакуумных средних (их определение обсуждается ниже).

Представление о вакуумном конденсате возникло давно, в начале 60-х годов, в связи с обсуждением киральной симметрии сильных взаимодействий. Строгая киральная симметрия отвечает тому, что кварки безмассовые и лагранжиан сильных взаимодействий \mathcal{L}_S - инвариантен, то есть не меняется при замене

$$q \rightarrow \gamma_5 q.$$

С другой стороны, на опыте нет вырождения частиц по четности. Например, ρ - и A_1 -мезоны - возможные партнеры по мультиплету группы $SU(2) \otimes SU(2)$ - сильно раздвинуты по массе:

$$m_{A_1}^2 \approx 2 m_\rho^2.$$

Возможный выход заключается в несимметрии физического вакуума относительно γ_5 -преобразований: отлична от нуля величина $\langle 0 | \bar{q} \gamma_5 q | 0 \rangle$ и равна нулю $\langle 0 | \bar{q} \gamma_5 q | 0 \rangle$. Вследствие такого спонтанного нарушения киральной симметрии появляется безмассовая частица, которую следует отождествить с η -мезоном (m_η^2 не равна строго нулю, поскольку у кварков есть небольшие затрещочные массы).

Глюонный конденсат стал обсуждаться недавно, в связи с собственно квантовой хромодинамикой ^{14/}.

Реально мы не сможем полностью провести намеченную программу и доказать невылетание кварков или факт существования резонансов исходя из представления о вакуумном конденсате. Наши результаты ограничены следующими. Удастся строго рассмотреть действие вакуумных полей на кварки, пока расстояние между ними относительно мало и сила, действующая со стороны вакуумных полей на кварки, относительно невелика. Будет показано, что взаимодействие с вакуумными полями, действительно, сказывается раньше, чем силы, связанные с обменом глюонами.

Во-вторых, мы предположим, что вакуумные поля приводят к образованию резонансов, и выразим массы и константы связи резонансов с токами через характеристики вакуумного конденсата. Например, получим соотношения

$$m_\rho \approx 3 \sqrt[3]{\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle}, \quad (3)$$

$$g_\rho^2 / 4\pi \approx 2\pi / e, \quad (4)$$

где m_ρ - масса ρ -мезона, g_ρ - константа связи ρ с фотонем, e - основание натурального логарифма.

Соотношения такого типа - численные, их точность - порядка 10-15%. Полученные предположения согласуются с опытом, и согласие с опытом достаточно убедительно, чтобы поверить в правильность исходных предположений (по крайней мере, на наш взгляд). Мы обсудим также ряд качественных следствий.

Если поверить в реальность вакуумного конденсата и его связь со свойствами резонансов, то естественным следующим шагом было бы выразить величины (1), (2) через фундаментальные пара-

метры квантовой хромодинамики. Действительно, в квантовой хромодинамике есть только один размерный параметр Λ (кроме масс кварков, которые в данном случае не имеют отношения к делу), который по традиции определяется как точка нормировки эффективной константы связи:

$$\frac{\delta \ln^2}{g_s^2(\rho)} = - (11 - \frac{2}{3} n_q) \ln(\Lambda \rho), \quad (5)$$

где n_q — число кварков с $m_q \rho \ll 1$, так что в приложениях, как правило, $n_q = 3$.

Ясно поэтому, что должны существовать соотношения типа

$$\begin{aligned} \langle 0 | d_s^{1/2} \bar{q} q | 0 \rangle &= c_q \Lambda^3, \\ \langle 0 | \frac{d_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle &= c_g \Lambda^4 \end{aligned} \quad (6)$$

и коэффициенты c_q, c_g вычислимы в последовательной теории.

Для оценки коэффициента c_g можно воспользоваться недавними результатами Каллана, Дашена и Гросса ^{/5/}, которые означают фактически

$$\frac{11}{32} \langle 0 | \frac{d_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle = 130 \Lambda^4. \quad (7)$$

Теоретическую точность результата трудно оценить (он получен без учета кваркового конденсата). Так как величина Λ известна с точностью, не лучшей фактора 2-3, то численно соотношение (7) малопочтительно.

С лучшей точностью, на наш взгляд, можно найти связь между c_q и c_g ^{/2/}:

$$\langle 0 | d_s^{1/2} \bar{q} q | 0 \rangle \sim - \frac{1}{10(200 \text{ МэВ})} \langle 0 | \frac{d_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle. \quad (8)$$

Точность этого соотношения — порядка 2.

Такова краткая экспозиция полученных результатов. Поскольку обсуждаемый материал довольно обширен, нам не удалось избежать

во введении и не удастся избежать в остальных разделах известной фрагментарности изложения. План изложения таков. В разделе 2 мы обрисовываем формальную схему вывода соотношений для лептонных ширины и масс резонансов. В последующих разделах мы поясним более подробно некоторые понятия, введенные выше, и обсудим следствия.

2. Дисперсионные правила сумм

Основным аппаратом для вычисления масс и лептонных ширины резонансов служат дисперсионные правила сумм, которые мы и опишем в настоящем разделе с их внешней, формальной стороны.

Для квантовой хромодинамики принципиально деление расстояний на большие и малые. На малых расстояниях константа связи мала (см. (5)) и кварки почти свободны. Проблема, однако, заключается в том, что ни в одном реальном процессе нельзя обособить область малых расстояний: в конечном состоянии мы всегда имеем дело со связанными состояниями кварков и, следовательно, с эффектом сильной связи.

Оказывается, что для некоторого, довольно узкого класса процессов можно разделить вклады разных расстояний, используя дополнительно свойства аналитичности амплитуд. Так возникает дисперсионное правило сумм.

Объектом нашего рассмотрения будет поляризованный оператор

$$\Pi_A(q^2) = i \langle 0 | \int e^{iqx} dx T \{ j_A(x) j_A(0) \} | 0 \rangle, \quad (9)$$

где ток j_A может иметь разную лоренцеву и изотопическую структуру, например,

$$j_A^{(\rho)} = \frac{1}{2} (\bar{u} \gamma_\mu u - \bar{d} \gamma_\mu d)$$

имеет квантовые числа ρ - мезона.

С помощью стандартных дисперсионных соотношений величина $\Pi(q^2)$ во всей комплексной плоскости q^2 выражается через интеграл от мнимой части:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(\rho)} &= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi^\rho(q^2), \\ -\frac{d}{dQ^2} \Pi^\rho(Q^2) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im} \Pi^\rho(s) ds}{(s+Q^2)^2}, \quad Q^2 = -q^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Мнимая часть непосредственно связана с характеристиками резонансов. В том же случае тока j^ρ

$$\text{Im} \Pi^\rho(s) = \frac{1}{12\pi} \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, I=1)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \equiv \frac{1}{12\pi} R_{I=1}(s), \quad (11)$$

где $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, I=1)$ - сечения рождения адронов с полным изотопическим спином I. Оно включает, в частности, сечения рождения ρ -мезона:

$$R_{I=1}(s) = \frac{12\pi^2 m_\rho^2}{g_\rho^2} \delta(s - m_\rho^2) + \dots \quad (12)$$

Дисперсионное представление для $\Pi^\rho(q^2)$ мы будем называть феноменологическим, отказываясь тем самым от каких-либо сомнений в справедливости дисперсионных соотношений.

Правила сумм возникают, если помимо феноменологического существует независимое "теоретическое" представление для той же величины Π^ρ . В рамках QCD, действительно, можно вычислить $\Pi^\rho(Q^2)$ независимым образом, в терминах фундаментальных величин, входящих в лагранжиан, если выбрать Q^2 далеко от физического разреза. Простейшим выбором такого рода служит

$$Q^2 \text{ вещественно, } Q^2 \gg \Lambda^2. \quad (13)$$

Тогда при вычислении графиков теории возмущений можно сделать виковский поворот, и большое значение Q^2 означает, что все компоненты вектора x_μ малы (x_μ - расстояние между точками "входа" и "выхода" тока j_μ). Тем самым гарантировано, что кварки находятся на малых расстояниях и, следовательно, константа их взаимодействия мала.

Разумеется, изложенные пока что соображения не новы. Они приводят, в частности, к классическому предсказанию для асимптотики сечения аннигиляции e^+e^- в адроны ^{16/}:

$$\frac{\overline{\sigma}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \sum_q Q_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s(s)}{n}\right), \quad (14)$$

где Q_q - заряд кварка, а черта над $\overline{\sigma}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$ означает, что, строго говоря, сечение следует усреднить по области энергий порядка s .

Так как $\alpha_s \rightarrow 0$, то можно оставить только первый член, который отвечает невзаимодействующим кваркам (см. рис. I), или области асимптотической свободы.

Нас интересуют, однако, не асимптотические энергии, а резонансная область. Чтобы "пробовать токком" большие расстояния, нужно уменьшать Q^2 . Этому наглядному образу отвечает увеличение вклада резонансов в интеграле (10) с уменьшением Q^2 .

При некоторых Q^2 асимптотическая свобода нарушается. На первый взгляд, это происходит там, где становится велика поправка порядка α_s в соотношении (14). Наша гипотеза (утверждение) заключается в том, что это не так и главную роль в нарушении асимптотической свободы играют степенные поправки, то есть члены, пропорциональные Q^{-4}, Q^{-6} .

Мы поясним основания для такого предположения в последующих разделах, а здесь приведем некоторые ответы, чтобы читатель мог составить впечатление о том, как окончательно выглядят правила сумм, которые и приводят к определению характеристик резонансов.

Для этого необходимо сделать еще один шаг, который хотя и носит формальный характер, важен с практической точки зрения.

Именно, мы рассматриваем не собственно поляризационный оператор $\Pi(Q^2)$, а его борелевский образ $\Pi(M^2)$. Можно показать, что переход осуществляется с помощью оператора

$$\Pi(M^2) = \mathcal{L}_M \Pi(Q^2),$$

где

$$\hat{L}_n = \lim_{\substack{Q^2 \rightarrow \infty \\ \hat{Q}^2/n \text{ fixed}}} \left\{ \frac{1}{(n-1)!} Q^{2n} \frac{d^n}{(dQ^2)^n} \right\}. \quad (I5)$$

При выводе правил сумм важны следующие соотношения:

$$\hat{L}_n Q^{-2n} = \frac{1}{(n-1)!} M^{-2n}, \quad (I6a)$$

$$\hat{L}_n (s+Q^2)^{-1} = \exp(-s/M^2), \quad (I6b)$$

$$\hat{L}_n (Q^2)^{-\beta} = (L_n M^2)^{-\beta}. \quad (I6b)$$

Используя эти соотношения и явные вычисления степенных членов, можно получить следующие правила сумм для $\Pi^P(Q^2)$:

$$\begin{aligned} \int ds \exp(-\frac{s}{M^2}) \cdot R_{I-1}(s) &= \frac{3}{2} M^2 \left[1 + \frac{d_2(M)}{\pi} + \frac{\pi^2}{3} \langle 0 | \frac{d_2}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \right. \\ &- 2\pi^2 \frac{\langle 0 | d_3 (\bar{u} \gamma_4 \gamma_5 t^a u - \bar{d} \gamma_4 \gamma_5 t^a d)^2 | 0 \rangle}{M^6} \\ &\left. - \frac{4}{9} \pi^2 \langle 0 | d_3 (\bar{u} \gamma_4 t^a u + \bar{d} \gamma_4 t^a d) \sum_{q=u,d,s} \bar{q} \gamma_4 t^a q | 0 \rangle M^{-6} \right], \end{aligned} \quad (I7)$$

которые можно уже рассматривать почти как окончательный результат. Единственное упрощение, которое остается сделать — это свести вакуумное среднее от произведения четырех кварковых полей к $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle$ (t^a — матрицы Гелл-Манна в пространстве цвета).

Предполагая, что основной вклад дает вакуумное промежуточное состояние, получаем:

$$\langle 0 | \bar{\psi} \Gamma_1 \psi \bar{\psi} \Gamma_2 \psi | 0 \rangle = N^{-2} |\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle|^2 [S_P \Gamma_1 S_P \Gamma_2 - S_P \Gamma_1 \Gamma_2], \quad (I8)$$

где N — нормировочный множитель. В частности,

$$\langle 0 | (\bar{u} \gamma_4 \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_4 \gamma_5 d)^2 | 0 \rangle = \frac{3}{5} \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle^2. \quad (19)$$

Справедливость вакуумного прокладывания¹ можно обосновать отдельно.

Соотношениями (17) можно пользоваться до тех пор, пока степенные поправки относительно малы, то есть составляют 10-20% от единичного члена в правой части, который отвечает асимптотической свободе. В противном случае следовало бы удерживать члены высших порядков по M^{-2} .

3. Взаимодействие кварков с вакуумным конденсатом

Поясним, как введенные выше степенные поправки в поляризацонном операторе связаны с вакуумным конденсатом, обсуждавшимся во введении.

Существование вакуумных полей проявляется в том, что помимо обычных глюонных обменов (рис. 2) нужно учитывать графики с "линиями" внешними линиями, которые аннигилируют в вакуум (рис.3).

Хотя дополнительные диаграммы выглядят необычно, если речь идет о вакуумном поляризацонном операторе, они были бы совершенно привычны, если бы речь шла о вычислении во внешнем поле. Более того, вычисления поляризацонного оператора во внешнем поле хорошо известны в электродинамике, и мы могли бы заимствовать отсюда некоторые результаты.

Теперь мы думаем, что в вакууме есть реальные поля и смысл диаграмм прост: график (рис. 3а) отвечает рассеянию на внешнем глюонном поле, а рис 3б - обменному взаимодействию с вакуумными кварками. Естественно, что есть и свои особенности у вакуумного внешнего поля: суммарный импульс, переданный вакууму, равен нулю, также нельзя передать цвет.

Легко, далее, понять, что взаимодействие с конденсатом приводит именно к степенным поправкам. Действительно, флуктуация имеет какой-то характерный размер, $\sim 1/\mu$, так что напряженность вакуумного поля порядка $\sim 1/\mu^2$. Из одних размерных соображений ясно, что $1/\mu^2$ "обезразмеривается" $1/q^2$, поскольку вероятность взаимодействия кварка пропорциональна некото-

рой степени расстояния, проходимого кварком. Последнее составляет величину порядка $1/16^2$.

Подчеркнем, что картина проста, пока $1/Q$ меньше $1/\mu$. В этом случае кварки не могут изменить вакуумных полей и служат пробником напряженности вакуумного поля. Ясно, далее, что кварк регистрирует некоторые усредненные характеристики конденсата. Простейшие средние, которые могут характеризовать вакуум, и есть $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$, $\langle 0|G^2|0\rangle$, упомянутые во введении. Поэтому ответ выражается прежде всего через эти параметры.

Если уменьшать Q , то кварк начинает "чувствовать" не только средний квадрат напряженности, но и, скажем, градиенты полей. Когда же величина $1/Q$ больше чем $1/\mu$, то исчезает всякая простота: рождение пары может изменить вакуумные τ ; сами поля нужно характеризовать большим числом параметров.

Итак, степенное разложение разумно, пока кварки находятся внутри одной флуктуации, размеры которой, по крайней мере формально, считаются большими.

Как уже упоминалось, асимптотическая свобода нарушается также обычными глюонами обмена, которым отвечает логарифмические поправки, пропорциональные $\alpha_s(Q^2) \sim 1/\ln Q^2$.

Покажем, что экспериментально можно однозначно определить, какой из эффектов сказывается раньше (то есть на меньших расстояниях).

Рассмотрим для этого величины

$$I_1(M^2) = \int \exp(-s/M^2) R_{T=1}(s) ds / (\frac{3}{2} M^2), \quad (20)$$

$$I_2(M^2) = \int \exp(-s/M^2) R_{T=1}(s) ds / (\frac{3}{2} M^4).$$

Тогда для обычных логарифмических поправок нарушение асимптотической свободы приводит к положительным добавкам как в I_1 , так и в I_2 :

$$I_{1,2} = 1 + \frac{\alpha_s(M)}{\pi}. \quad (21)$$

Если же главным является взаимодействие с глюонным конденсатом, то добавка к единичному члену положительна в первом случае и отрицательна во втором:

$$I_1 = 1 + \delta_g, \quad I_2 = 1 - \delta_g, \quad (22)$$

$$\delta_g = \frac{g^2}{3M^4} \left| \left\langle \frac{d}{dt} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right\rangle \right|.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\left| \left\langle 0 \left| \frac{d}{dt} G^2 \right| 0 \right\rangle \right| = \left\langle 0 \left| \frac{d}{dt} G^2 \right| 0 \right\rangle. \quad (23)$$

Утверждение о знаке $\langle 0 | G^2 | 0 \rangle$ доказывается с помощью представления вакуумного среднего в виде функционального интеграла и перехода к евклидовой метрике (в пространстве Минковского $G^2 \sim \vec{H}^2 - \vec{E}^2$ и пропорционально $\vec{H}^2 + \vec{E}^2$ в евклидовом пространстве).

Наконец, если важен член $\sim M^{-6}$ или обменное взаимодействие с кварковым конденсатом, то

$$I_1 = 1 - \delta_q, \quad I_2 = 1 + 2\delta_q, \quad (24)$$

$$\delta_q = \frac{64 \cdot 7}{81} \pi^2 \alpha_s \left| \left\langle 0 \left| \bar{q} q \right| 0 \right\rangle \right|^2,$$

где утверждение о знаке матричного элемента можно опять обосновать в самом общем виде.

Счастливым образом знаки добавок к асимптотической свободе оказываются разными в трех случаях.

Обработка последних экспериментальных данных, проведенная в работе^{7/}, однозначно приводит к третьей возможности (см. (24)). Иными словами, в первую очередь сказывается обменное взаимодействие с вакуумом.

Чтобы избежать недоразумений, подчеркнем сразу, что член $\sim M^{-6}$ оказывается главным при уменьшении M^2 по сравнению с $\sim M^{-4}$. В этом нет, однако, противоречий с предположением о возможности разложения по M^{-2} . Дело в том, что члены

начинают как бы разные серии коэффициентов разложения. Коэффициент при M^{-6} численно значительно больше, чем при M^{-4} , из-за того, что простейшая диаграмма для взаимодействия с кварковым конденсатом — борновская, а с глюонным конденсатом — петлевая. Поэтому они оказываются сравнимыми в критической области M^2 (первая — несколько больше). В последующих членах разложения эта "аномалия" не повторяется.

4. Электронная ширина и масса ρ -мезона

Знак нарушения асимптотической свободы для относительно больших M^2 может быть установлен исходя из общих соображений. Для вычисления ширины и масс резонансов нужно более детальное знание вакуумных средних и константы связи d_3 . В качестве примера рассмотрим ρ -мезон.

Правила сумм зависят от следующих параметров:

$$d_3(M), \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle, \langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle.$$

Величины d_3 и $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle$ известны независимо:

$$d_3(m_p^2) = 0,3, \quad d_3^{2/3} |\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle|^2 = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ ГэВ}^6.$$

Константа связи может быть найдена, например, из полной адронной ширины $\bar{\psi}/\psi$ -мезона, а матричный элемент $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle$ встречается в низкоэнергетической пионной физике. В частности, те же параметры важны в теории нелептонных распадов К-мезонов и гиперонов и используются нами на протяжении ряда лет. Мы не варьируем эти параметры и не считаем их подгончными.

Что касается интенсивности вакуумных глюонных полей, $\langle 0 | G^2 | 0 \rangle$, то эта величина встречается впервые и нет другого способа найти её, кроме как пожертвовать одним из правил сумм. Мы выбрали для этой цели правила сумм для рождения явного и скрытого чарма в e^+e^- -столкновениях. Таким образом, единственный параметр теории определяется из физики тяжелых частиц и предсказания для легких мезонов свободны от неопределенности.

Для полноты изложения приведем упомянутые правила сумм для рождения чарма:

$$\frac{1}{12\pi^2 Q_c^2} \int \frac{R_c(s) ds}{s^{n+1}} = \frac{3 \cdot 2^n (n+1)(n-2)!}{4\pi^2 (2n+3)!} (4m_c^2)^{-n} \cdot [1 + a_n d_s - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2n+5} \frac{4}{3} \pi^2 \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle (4m_c^2)^{-2}], \quad (25)$$

$$R_c(s) = \frac{G(e^+e^- \rightarrow \text{charm})}{G(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)},$$

где a_n - числа, явный вид которых может быть найден в /2/, стр. 459. Численно поправка $\sim d_s$ не очень важна.

Соотношения (25) верны, пока степенная поправка не доминирует ($n \leq 10$). Из первых четырех правил сумм можно найти массу очарованного кварка m_c ($m_c \approx 1,25$ ГэВ), а из последующих - $\langle 0 | G^2 | 0 \rangle$ (результат приведен в (2)). Правил сумм больше, чем параметров, так что удастся проверить самосогласованность всей картины. Отметим также, что при $n \geq 5$ интеграл от экспериментального сечения определяется фактически одним f/γ -мезоном. Поэтому $\langle 0 | G^2 | 0 \rangle$ выражается через легтонную ширину и массу f/γ .

Подставляя теперь все числа в правила сумм для ρ -мезона, имеем:

$$I_1(M^2) = 1 + \frac{d_s(M)}{\pi} + 0,1 \left(\frac{0,6 \text{ ГэВ}}{M^2} \right)^2 - 0,14 \left(\frac{0,6 \text{ ГэВ}}{M^2} \right)^3, \quad (26)$$

$$I_2(M^2) = 1 + \frac{d_2(M)}{\pi} - 0,1 \left(\frac{0,6 \text{ ГэВ}}{M^2} \right)^2 + 0,28 \left(\frac{0,6 \text{ ГэВ}}{M^2} \right)^3. \quad (27)$$

Хотя соотношение (27) не независимо от (26) (получается дифференцированием последнего по $1/M^2$), его удобно рассматривать отдельно, что позволяет лучше контролировать точность вычисления.

В предыдущем разделе мы упоминали непосредственную проверку соотношений (26, 27). Здесь мы поступим иначе и будем рассматривать соотношение (26) как условие для определения константы связи резонанса, а (27) - его массы.

Такая возможность связана с тем, что даже при $M^2 = m_\rho^2 =$

= 0,6 ГэВ² степенные поправки к асимптотической свободе малы и, следовательно, теоретическое вычисление надежно. С другой стороны, экспериментально интеграл от сечения при таком M^2 определяется одним ρ -мезоном.

Для явного вычисления предложим следующую модель сечения:

$$R_{I=1}(s) = \frac{12\pi^2}{g^2} m_\rho^2 \delta(s - m_\rho^2) + R_{I=1}^{\text{quark}} \theta(s - s_0) \quad (28)$$

где $R_{I=1}^{\text{quark}}$ отвечает кварковым диаграммам (рис. 1,2), а константы g_ρ , m_ρ , s_0 считаются неизвестными.

Подчеркнем, что факт существования резонанса не доказывается, а предполагается. Для доказательства следовало бы просуммировать все степенные члены.

Обработывая модель (28) с помощью правил сумм (26), (27), находим:

$$\frac{g_\rho^2}{4\pi} = \frac{2\pi}{e} \quad , \quad m_\rho^2 \approx (0,75 \text{ ГэВ})^2 \quad , \quad s_0 \approx 2,5 m_\rho^2 \quad . \quad (29)$$

Все числа очень разумны с точки зрения сравнения с опытом. Размерные величины входят в правила сумм только через вакуумные средние, так что масса ρ -мезона есть их неявная функция.

Итак, нельзя пока что доказать существование резонанса, но можно утверждать, что если резонанс есть, то его масса и ширина однозначно выражаются через характеристики вакуумного конденсата.

В заключение несколько слов о точности теоретических предсказаний. Точность определения безразмерной величины $g^2/4\pi$ высокая, не хуже 10%. Для дальнейшего ее улучшения надо отказаться от грубой модели (28). Что касается массы, то теоретическая точность здесь несколько хуже (хотя буквально теоретическое число оказывается очень близким к экспериментальному). Как уже упоминалось, размерные параметры связаны только с вакуумными средними. Если увеличить, скажем, $|\langle 0|\bar{q}q|0\rangle|$ в два раза, то предсказание для m_ρ^2 возрастет в $\sqrt[3]{2}$. Именно такова реальная точность в определении $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ и, следовательно, m_ρ .

5. Сводка результатов для других резонансов

Успех правил сумм для ρ -мезона открывает увлекательную возможность исследовать влияние вакуумного конденсата на свойства резонансов. Действительно, меняя квантовые числа токов, мы меняем только коэффициенты перед $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$, $\langle G^2 \rangle$ в правилах сумм, причем эти коэффициенты определяются диаграммами типа рис. 3. С другой стороны, с изменением квантовых чисел меняются свойства резонансов: их массы, лептонные ширины. Если справедлива предложенная картина, то свойства резонансов вычисляются исходя из диаграмм, описывающих взаимодействие с вакуумным конденсатом.

Проверка показала, что предложенная картина правильна для нечетных векторных и аксиальных мезонов.

Из констант связи, допускающих непосредственное сравнение с опытом, удается вычислить:

$$\frac{g_{\omega}^2}{4\pi} = \frac{g_{\rho}^2}{4\pi} = \frac{2\pi}{e}; \quad (g_{\psi}^2/g_{\rho}^2) \approx 1,3 (g_{\psi}^2/g_{\rho}^2)_{\text{exact}}, \quad f_{\pi} \approx \frac{m_{\rho}}{2\pi}. \quad (30)$$

Что касается масс, то правила сумм предсказывают:

$$\begin{aligned} \rho - \omega \text{ вырождение, } m_{\rho}^2 &= m_{\omega}^2; \\ m_{\pi^+} &\approx 0,93 \text{ ГэВ}, \quad m_{\eta} \approx 1,07 \text{ ГэВ}; \\ m_{\pi^+}^2 f_{\pi}^2 &= - (m_{\pi^+} + m_{\pi^0}) \langle 0 | \bar{u} u | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

Несколько особняком стоит вычисление $\rho - \omega$ и $\psi - \omega$ смешивания. В первом случае оказываются важными невакуумные вклады в $\langle 0 | \bar{\psi} \Gamma \psi | 0 \rangle$. В результате возникает новый параметр, исключая который, мы выражаем $\psi - \omega$ смешивание через (небольшую) разность масс ρ и ω . Точность вычисления невысокая, порядка 2. Для нас, однако, было неожиданным понимание того, что $\omega - \psi$ смешивание не связано с трехглюонным промежуточным состоянием, как это обычно полагают. Основной вклад вносит на самом деле взаимодействие с вакуумными кварками.

Что касается $\rho - \omega$ смешивания, то оно может быть связа-

но либо с виртуальными электромагнитными взаимодействиями, либо с затравочной разностью масс d - и u -кварков. Правила сумм позволяют убедиться, что доминирует второй механизм, и получить оценку

$$\frac{m_d - m_u}{m_d + m_u} \approx 0,3,$$

что находится в согласии с другими оценками /8/ (основанными, однако, на иных предположениях; так, обычно предполагают $su(3)$ -симметрию; наш вывод свободен от этой гипотезы).

Из пока не подтвержденных предсказаний отметим следующие:

- 1) Интеграл от аксиальной плотности в канале с $T = I$ по области масс от I до $1,4$ ГэВ примерно совпадает с интегралом от кваркового сечения (экспериментально сечение рождения адронов аксиальным током в этой области масс может быть измерено в распадах \bar{C} -лептона). Правила сумм не позволяют сделать вывод о том, сосредоточено ли сечение в узком резонансе (A_1 -мезон) или представляет собой размытую структуру.
- 2) Если есть A_1 -мезон, то должен существовать также вырожденный с ним по массе A_0 -лептон с изотопическим спином 0. Основной канал распада A_0 , видимо, $\gamma^* \pi^0$. Заметным может быть также распад на $\pi^+ \pi^-$.
- 3) Наблюдаемое в ДЭСИ состояние с массой 2,83 ГэВ не может быть отождествлено с нижним уровнем парачармония. Предсказывается "истинный" парачармоний с массой, близкой к 3,0 ГэВ.

Чтобы несколько оживить перечисление результатов, приведем очень краткий анализ правил сумм для аксиальной плотности ρ_A . Правила сумм удобно записать в виде:

$$\int (\rho_A - \rho_V) \exp(-s/M^2) ds = \frac{M^2}{4\pi} 0,36 \left(\frac{0,6 \text{ ГэВ}^2}{M^2} \right)^3, \quad (32)$$

$$\int s(\rho_A - \rho_V) \exp(-s/M^2) ds = -\frac{M^4}{4\pi} 0,72 \left(\frac{0,6 \text{ ГэВ}^2}{M^2} \right)^3, \quad (33)$$

$$\int s^2(\rho_A - \rho_V) \exp(-s/M^2) ds = \frac{M^6}{4\pi} 0,72 \left(\frac{0,6 \text{ ГэВ}^2}{M^2} \right)^3. \quad (34)$$

При $M^2 \rightarrow \infty$ соотношения (32), (33) переходят в правила сумм Вайнберга /9/. Определение векторной и аксиальной плотностей такое, что, например, $\rho_V(s) = \frac{1}{4\pi} R_{J_1}(s)$.

Сначала о качественных выводах. Правая часть (32) положительна. Это отвечает тому, что с уменьшением M^2 при $M^2 \sim m_\rho^2$ экспоненциальный фактор e^{-1/m^2} практически не сказывается еще на \mathcal{N} -мезоне, но уже заметно уменьшает вклад ρ . Соотношение (32) таким образом "сигнализирует", что самое легкое состояние — \mathcal{N} -мезон — в аксиальном канале.

Умножение плотности на z сокращает \mathcal{N} -мезонный полюс (рассматривается предел безмассовых кварков). Отрицательный знак правой части (33) отвечает тому, что теперь более легкое состояние в векторном канале. И, действительно, ρ легче, чем A_1 . Наконец, правила сумм (34) требуют, чтобы континуум в аксиальном канале начинался ближе к резонансу, чем в векторном.

Количественные результаты уже цитировались выше. Отметим одно обстоятельство. Всё различие между векторным и аксиальным каналами может быть связано для безмассовых кварков только со степенными членами. Если наивно оценивать их эффект как $|\langle \bar{q}q \rangle|^2 M^{-6}$, то при $M^2 \sim m_\rho^2, m_{A_1}^2$ возникает очень малое число, $\sim 10^{-3}$. Кажется очевидным поэтому, что вакуумный конденсат не может объяснить наблюдаемого расщепления масс и A_1 - вопреки нашим утверждениям. Разрешение парадокса заключается в том, что на самом деле $|\langle \bar{q}q \rangle|^2 M^{-6}$ входит в правила сумм с дополнительным фактором порядка 200 ($200 \sim 2\pi^4$), что и меняет наивную оценку. Таким образом, все полученные предсказания для резонансов весьма далеки от простых размерных соображений. Теория носит сугубо количественный характер.

7. Вакуумный конденсат и инстантоны. Модель мешков

До сих пор мы рассматривали вакуумный конденсат исключительно на феноменологической основе. Очень важный теоретический вопрос состоит в том, какие именно вакуумные флуктуации ответственны за конденсат. Простейшим примером вакуумных флуктуаций, которые действительно приводят к вакуумным полям, являются инстантоны \mathcal{I} . Однако количественной теорией на основе инстантонов создать не удастся.

Действительно, легко убедиться, что инстантонные решения дают вклад в среднее значение $\langle G^2 \rangle$, пропорциональный

$$\exp(-8\pi^2/g^2(\rho)) \sim (\rho \Lambda)^{11} \quad (n_2 = 0).$$

Интегрирование по размерам инстантона ρ следует производить с весом $\sim d\rho/\rho^5$. В результате интеграл расходится при больших размерах ρ , где необходимо учитывать взаимодействие инстантонов.

Если попытаться определить предельный размер инстантонов ρ_c исходя из экспериментального числа для $\langle \sigma G^2 \rangle$, то получается, что

$$\rho_c \sim (200 \text{ МэВ})^{-1}.$$

Хотя с инстантонами не удается получить количественных результатов, они весьма полезны для понимания качественных следствий, например знака $\langle \sigma G^2 \rangle$. Действительно, на первый взгляд трудно представить себе флуктуацию, которая уменьшает плотность энергии. Инстантоны можно рассматривать как некоторый туннельный переход, и эта интерпретация позволяет понять знак $\langle \sigma G^2 \rangle$ наглядным образом.

В поле инстантонов существуют также решения для фермионных полей с нулевой энергией. Эти, т.е. нулевые, моды могут служить прообразом вакуумного конденсата кварков.

Наконец, упомянем возможную связь вакуумного конденсата с моделью мешков. Дело в том, что исходя из общих соотношений квантовой хромодинамики можно доказать следующее соотношение:

$$\epsilon = -\frac{9}{32} \langle \sigma | \frac{d^2}{dx^2} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle, \quad (32)$$

где ϵ — плотность энергии вакуума. На самом деле начало отсчета энергии можно всегда сдвинуть, так что не следует подставлять (32), скажем, в космологические уравнения.

Соотношение (32) приобретает смысл, если предположить, что внутри адрона глюонные и кварковые флуктуации, приводящие к (отрицательному!) значению ϵ подавлены взаимодействием с полем кварков. Тогда получаем соотношение между $|\epsilon|$ и объемной энергией внутри адрона, введенной в модели мешков $/12/$:

$$B = |\epsilon|.$$

Соотношение согласуется с опытом в пределах точности моделей. Вакуумные флуктуации вытесняются либо целиком, либо частично.

Можно привести серьезные аргументы в пользу того, что взаимодействие поля кварков с вакуумными флуктуациями действительно подавляет вероятность последних. Особенно детальный анализ удастся провести, если ограничиться инстантонными вакуумными флуктуациями $1/5$. В частности, так возникает уже цитированный результат для величины B в терминах параметра Λ .

Заключение

Кажется несомненной реальность вакуумного конденсата кварков и глюонов, влияние его на свойства адронов, связь с моделью мешков и т.д. В заключение отметим, однако, что этим не исчерпывается тема "адроны в квантовой хромодинамике". Рассмотрение т.н.

$U(1)$ -проблемы, то есть расщепления масс $\eta - \eta'$, приводит к выводу, что влияние вакуумных флуктуаций нельзя целиком свести к $\langle 0|G^2|0\rangle$. Подробное рассмотрение этого вопроса требует отдельного обзора.



Рис. 1



Рис. 2

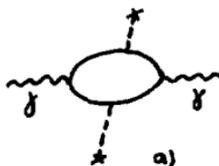


Рис. 3

Л и т е р а т у р а

1. A.Polyakov. Nucl.Phys., B120, 429 /1977/.
2. M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov. Nucl.Phys., B147 /1979/, 385, 448, 519.
3. Y.Nambu. Phys.Rev.Lett., 4, 380 /1960/;
Y.Nambu, G.Jona-Lasino. Phys.Rev., 122, 345 /1961/.
4. А.И.Вайнштейн, В.И.Захаров, М.А.Шифман. Письма ЖЭТФ, 27, 60 /1978/.
5. C.G.Callan, R.Dashen, D.J.Gross. A Theory of Strong Interactions, Princeton preprint /1978/.
6. T.Appelquist, H.Georgi. Phys.Rev., DE, 4000 /1973/;
A.Zee. Phys.Rev., DE, 4038 /1973/.
7. S.I.Eidelman, L.M.Kurdadze, A.I.Vainshtein. e^+e^- Annihilation Below 2 GeV. Test of QCD Predictions, preprint 78-84, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk /1978/.
8. H.Leutwyler. Phys.Lett., 48B, 45 /1974/; Nucl.Phys., B76, 413 /1974/.
9. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 18, 507 /1967/.
10. R.Crewter. Phys.Rev.Lett., 28, 147 /1972/;
M.Chanowitz and J.Ellis. Phys.Lett., 40B, 397 /1972/;
J.Collins, L.Duncun and S.Joglekar. Phys.Rev., D16, 438 /1977/.
11. A.Belavin, A.Polyakov, A.Schwartz and Yu.Tyupkin. Phys. Lett., 59B, 85 /1970/.
12. A.Chodos et al. Phys.Rev., D2, 3471, D10, 2599 /1974/;
T.DeGrand et al. Phys.Rev., D12, 2060 /1975/.

**III. Единые теории поля
и локальные симметрии**



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ СТАТУС ЕДИНЫХ ТЕОРИЙ

С. М. Биленький

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Введение

Статус теорий электрослабого взаимодействия можно охарактеризовать одной фразой: имеющиеся данные описываются простейшим вариантом единых теорий — теорией Вайнберга-Салама-Глэшоу-Иллиопулоса-Майана^{/1/}. Огромный прогресс в понимании природы слабого взаимодействия стал возможен в результате выполнения большой совокупности экспериментов по изучению нейтральных токов на пучках нейтрино и выдающихся опытов^{/2,3/}, в которых было открыто обусловленное нейтральными токами слабое взаимодействие электронов и нуклонов.

Мы ограничимся обсуждением стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории. В основе этой теории лежит предположение о том, что левые компоненты полей образуют дублеты, а правые — синглеты. Лагранжиан слабого взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L} = i \frac{g}{2\sqrt{2}} j_a^{(+)} W_a + \text{h.c.} + i \frac{g}{2\cos\theta} j_a^0 Z_a. \quad (1)$$

Здесь $j_a^{(+)}$ — заряженный ток, j_a^0 — нейтральный ток, θ — угол Вайнберга, а константа g связана с константой ферми G соотношением

$$\frac{g^2}{8m_e} = \frac{G}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Заряженный ток $j_a^{(+)}$ и нейтральный ток j_a^0 дается соответственно выражениями

$$j_a^{(+)} = 2 \sum_a \bar{\psi}_{aL} \gamma_a \frac{1}{2} (\tau_1 + i\tau_2) \psi_{aL}, \quad (3)$$

$$j_a^0 = 2 \sum_a \bar{\psi}_{aL} \gamma_a \frac{1}{2} \tau_3 \psi_{aL} - 2 \sin^2 \theta j_a^{em},$$

где j_a^{em} - электромагнитный ток ψ_{aL} - дублеты теории ($\psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi$):

$$\psi_{aL} \Rightarrow \begin{pmatrix} \nu_{aL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, \dots, \\ \begin{pmatrix} u_L \\ d_L' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L' \end{pmatrix}, \dots \quad (4)$$

Из (1) и (2) для эффективного гамильтониана слабого взаимодействия получаем следующее выражение:

$$\mathcal{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_a^{(+)} j_a^{(-)} + \kappa j_a^0 j_a^0), \quad (5)$$

где

$$\kappa = \frac{m_N^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta}. \quad (6)$$

2. Заряженные токи

Рассмотрим вначале первый член гамильтониана (5). Заряженный ток $j_a^{(+)}$ может быть представлен в виде

$$j_a^{(+)} = j_a^{(+);h} + j_a^{(+);l}, \quad (7)$$

где $j_a^{(+);h}$ и $j_a^{(+);l}$ - соответственно адронный и лептонный заряженные токи. В простейшем случае, если учитывать только кабиббовское смешивание, заряженный адронный ток имеет вид

$$j_a^{(+);h} = \bar{u} \gamma_a (1 + \gamma_5) d_c + \bar{c} \gamma_a (1 + \gamma_5) s_c + \bar{t} \gamma_a (1 + \gamma_5) b_c, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} d_c &= d \cos \theta_c + s \sin \theta_c, \\ s_c &= -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c. \end{aligned} \quad (9)$$

(θ_c - угол Кабиббо).

Первые два члена этого выражения описывают огромную совокупность данных, включая новые данные о распадах очарованных частиц. Открытие Υ -частиц не оставляет сомнений в том, что третий член в заряженном адронном токе, действительно, есть. Однако, т.к. частицы, содержащие новые кварки, пока не обнаружены, вопрос о структуре этого члена открыт.

С третьим членом заряженного тока тесно связан также вопрос о смешивании полей кварков. В общем случае помимо 6 кварков и угла Кабиббо можно ввести еще два угла смешивания и фазу^{4/}. Поля d' , s' и b' в дублетах (4) имеют в общем случае вид

$$\begin{aligned} d' &= \cos \epsilon d_c + \sin \epsilon b, \\ s' &= \cos \alpha e^{i\delta} s_c + \sin \alpha (-\sin \epsilon d_c + \cos \epsilon b), \\ b' &= -\sin \alpha e^{i\delta} s_c + \cos \alpha (-\sin \epsilon d_c + \cos \epsilon b). \end{aligned}$$

Здесь ϵ и α - дополнительные углы смешивания; фаза δ ответственна за нарушение CP-инвариантности. Из имеющихся в настоящее время данных (универсальность Кабиббо, разность масс K_2 и K_3 -мезонов и др.) могут быть получены лишь верхние границы параметров ϵ и α ^{5/}.

$$\begin{aligned} \sin^2 \epsilon &\leq 0,008, \\ \sin^2 \alpha &\leq 0,3. \end{aligned}$$

Для определения углов смешивания ϵ и α необходимо изучить распады частиц, содержащих b -кварк. Отметим, что с величиной этих углов тесно связан вопрос о природе нарушения CP-инвариантности.

Заряженный лептонный ток имеет в стандартной теории вид

$$\begin{aligned} j_a^{(+) ; \ell} &= \bar{\nu}_e \gamma_a (1 + \gamma_5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma_a (1 + \gamma_5) \mu + \\ &+ \bar{\nu}_\tau \gamma_a (1 + \gamma_5) \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Последний член этого выражения описывает все имеющиеся данные по распаду τ -лептона. Выполненные в последнее время измерения спектра электронов от распада τ -лептонов согласуются с $V-A$ вариантом и исключают $V+A$ и $V(\lambda)$ варианты. Для параметра Миселя получено^{6/} значение $\rho = 0,72 \pm 0,15$. В случае $V-A$, $V+A$ и $V(\lambda)$ вариантов параметр ρ соответственно равен 0,75; 0 и 0,375. Далее, в таблице I приведены измерения на опыте^{7/} парциальные ширины распадов $\tau \rightarrow e \nu_e \nu_\tau$, $\tau \rightarrow \mu \nu_\mu \nu_\tau$, $\tau \rightarrow \pi \nu_\tau$ и $\tau \rightarrow \rho \nu_\tau$ (второй столбец). В третьем столбце таблицы I приводятся теоретические значения соответствующих парциальных ширин. Как видно из этой таблицы, парциальные ширины распадов τ -лептона согласуются с вычисленными на основе стандартной теории значениями. Наконец, имеющиеся данные свидетельствуют о том, что ν_τ - третий тип нейтрино^{7/}. Из данных, полученных на пучках нейтрино высоких энергий, следует, что в случае, если существует тяжелый заряженный лептон с лептонным числом ν , то его масса должна быть больше 7,5 ГэВ и он не может, следовательно, быть τ -лептоном. Далее, ν_τ не может иметь также лептонные числа $\bar{\nu}_e$ и $\bar{\nu}_\mu$. Иначе в распаде $\tau^- \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e$ либо в распаде $\tau^- \rightarrow \mu^- \nu_\tau \bar{\nu}_\mu$ в конечном состоянии было бы две тождественные частицы и парциальные ширины этих распадов отличались бы в два раза. На опыте найдено $\Gamma_{\tau \rightarrow \mu \nu \nu} / \Gamma_{\tau \rightarrow e \nu \nu} = 1,13 \pm 0,16$.

Таблица I

Парциальные ширины распадов τ -лептона

Процесс	Парциальная ширина (экспер.) (%)	Стандартная теория (%)
$\tau \rightarrow e \nu \nu$	$16,5 \pm 1,5$	18
$\tau \rightarrow \mu \nu \nu$	$18,6 \pm 1,9$	18
$\tau \rightarrow \pi \nu$	$8,3 \pm 1,4$	10
$\tau \rightarrow \rho \nu$	24 ± 9	20

Отметим также, что на основе имеющихся данных получено следующее ограничение на массу ν_τ :

$$m_{\nu_\tau} < 250 \text{ МэВ.}$$

Если массы нейтрино отличны от нуля, то поля нейтрино, так же как и поля кварков, могут входить в гамильтониан в смешанном виде. В простейшем случае смешивания двух полей операторы ν_e и ν_μ в выражении (10) представляет собой ортогональные суперпозиции

$$\begin{aligned} \nu_e &= \nu_1 \cos\theta' + \nu_2 \sin\theta', \\ \nu_\mu &= -\nu_1 \sin\theta' + \nu_2 \cos\theta'. \end{aligned} \quad (II)$$

Здесь ν_1 и ν_2 - операторы полей нейтрино с массами m_1 и m_2 , а θ' - угол смешивания. Если массы m_1 и m_2 достаточно малы, то слабые распады в теории со смешиванием (II) описываются так же, как и в обычной теории. Отличие между теориями скажется в поведении пучков нейтрино. Если имеет место смешивание, то должны наблюдаться осцилляции нейтрино^{/В/}.

Вектора состояния нейтрино, образующихся в обычном слабом распаде, имеют в теории со смешиванием (II) вид

$$|\nu_l\rangle = \sum_{\sigma=1,2} u_{l\sigma} |\nu_\sigma\rangle \quad (l=e,\mu), \quad (I2)$$

где $|\nu_\sigma\rangle$ - вектор состояния нейтрино с массой m_σ , а

$$u = \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}.$$

Пучок нейтрино с импульсом \vec{p} описывается в этом случае вектором

$$|\nu_l\rangle_t = e^{-iHt} |\nu_l\rangle_0 = \sum_{l'=e,\mu} |\nu_{l'}\rangle_0 a_{l'l}(t) \quad (I3)$$

(H - свободный гамильтониан, $|\nu_l\rangle_0$ - вектор состояния пучка в начальный момент). В этом выражении

$$a_{l'l}(t) = \sum_{\sigma=1,2} u_{l'\sigma} e^{-iE_\sigma t} u_{l\sigma}, \quad (I4)$$

где

$$E_\sigma = \sqrt{m_\sigma^2 + \vec{p}^2}.$$

Для пучка "мюонных" нейтрино имеем

$$I_{\nu_{\mu}}(R) = \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta' (1 - \cos 2\pi \frac{R}{L}) \right] I_{\nu_{\mu}}^{\circ} \quad (15)$$

$$I_{\nu_e}(R) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta' (1 - \cos 2\pi \frac{R}{L}) I_{\nu_{\mu}}^{\circ}$$

Здесь $I_{\nu_{\mu}}(R)$ и $I_{\nu_e}(R)$ - интенсивности ν_{μ} и ν_e на расстоянии R от источника нейтрино, $I_{\nu_{\mu}}^{\circ}$ - начальная интенсивность ν_{μ} ,

$$L = 4\pi \frac{p}{|m_1^2 - m_2^2|} \quad (16)$$

- длина осцилляций (мы предположим, что $p \gg m_1, m_2$).

Осцилляции нейтрино можно искать путем измерения интенсивности нейтрино и сравнения ее с ожидаемой в отсутствие осцилляций интенсивностью, путем поиска электронов на пучках "мюонных" нейтрино и т.д. В выполненных до сих пор нейтринных экспериментах осцилляции не наблюдались. Это означает, что имеющиеся данные позволяют лишь получить нижнюю границу длины осцилляций или верхнюю границу параметра $|m_1^2 - m_2^2|$. При $\theta' \approx \frac{\pi}{4}$ (максимальное смешивание) имеем

$$|m_1^2 - m_2^2| \lesssim 1 (\text{эВ})^2 \quad (17)$$

В настоящее время на ускорителях и реакторах проводится целый ряд опытов по поиску осцилляций. Эти эксперименты позволят понизить верхнюю границу (17) на два порядка (либо обнаружить осцилляции, если есть смешивание и $|m_1^2 - m_2^2| \gtrsim 10^{-2} (\text{эВ})^2$). Уникальной чувствительностью в смысле возможностей поиска осцилляций обладают опыты с нейтрино от Солнца (малые энергии, огромные расстояния). Осцилляции нейтрино от Солнца могут быть наблюдаемы, если $|m_1^2 - m_2^2| \gtrsim 10^{12} (\text{эВ})^2$. Поток нейтрино от Солнца дается выражением

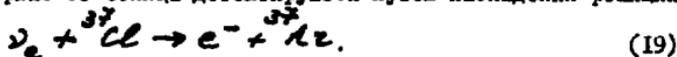
$$\bar{I}_{\nu_e} = \delta \bar{I}_{\nu_e}^{\circ} \quad (18)$$

где

$$\delta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta' \quad \left(\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1 \right)$$

(из-за усреднений по области, в которой образуются нейтрино, спектру нейтрино и т.д. член $\cos 2\pi \frac{R}{L}$ исчезает). В настоящее

время нейтрино от Солнца детектируется путем наблюдения реакции



В последних измерениях найдено^{/9/}, что поток солнечных нейтрино равен

$$2,4 \pm 0,4 \text{ SNU} \quad (20)$$

($1 \text{ SNU} = 10^{-26}$ события $\nu_e \text{Cl} \rightarrow e^{-}\text{Ar}$ / сек).

В работе^{/10/} на основе стандартной теории для ожидаемого потока нейтрино от Солнца получено значение

$$6 \pm 2 \text{ SNU}. \quad (21)$$

Из сравнения (20) и (21) нельзя сделать никаких заключений об осцилляциях нейтрино. Это связано главным образом с трудностями в точном предсказании ожидаемого потока. Хлор-аргонный метод позволяет регистрировать только $\sim 10^{-4}$ от общего потока солнечных нейтрино (порог реакции (19) равен 0,81 МэВ; максимальная энергия нейтрино от основной реакции $pp \rightarrow de^+\nu_e$ равна 0,42 МэВ). Полный поток нейтрино от Солнца легко может быть вычислен. Он связан со светимостью Солнца L_{\odot} соотношением

$$\bar{I}_{\nu_e} = \frac{2 L_{\odot}}{4\pi R^2 (25 \text{ МэВ})},$$

где R - расстояние от Земли до Солнца. Если регистрировать нейтрино от основной реакции $pp \rightarrow de^+\nu_e$, то вопрос об осцилляциях нейтрино может быть, следовательно, однозначно решен. В настоящее время такие детекторы создаются. Мы имеем прежде всего в виду галлиевые детекторы^{/11/} (порог реакции $\nu_e + {}^{76}\text{Ga} \rightarrow e^{-} + {}^{76}\text{Ge}$ равен 0,23 МэВ).

3. Нейтральные токи

Теперь мы перейдем к обсуждению обусловленного обменом \tilde{Z} -бозоном эффективного гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} \alpha j_a^0 j_a^0, \quad (22)$$

где

$$\alpha = \frac{m_N^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta}. \quad (23)$$

Из данных, полученных в нейтринных экспериментах, следует

$$\alpha = 0,98 \pm 0,05,$$

что согласуется с простейшим предположением о структуре хиггсовского сектора (поля Хиггса образуют дублет).

Далее запишем нейтральный ток в следующем виде:

$$j_a^0 = j_a^{\nu} + j_a^{\ell} + j_a^z. \quad (24)$$

Здесь

$$j_a^{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=e,\mu,\tau,\dots} \bar{\nu}_{\ell} \gamma_a (1 + \gamma_5) \nu_{\ell} \quad (25)$$

нейтринный ток, а j_a^{ℓ} и j_a^z — лептонный и адронный нейтральные токи. Имеем

$$j_a^{\ell} = \sum_{\ell=e,\mu,\tau,\dots} \bar{\ell} \gamma_a (g_V + g_A \gamma_5) \ell, \quad (26)$$

$$j_a^z = \sum_{q=u,d,\dots} q_L \bar{q} \gamma_a (1 + \gamma_5) q + \sum_{q=u,d,\dots} q_R \bar{q} \gamma_a (1 - \gamma_5) q. \quad (27)$$

В рассматриваемой нами $SU(2) \times U(1)$ стандартной теории слабого взаимодействия

$$g_V = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta, \quad (28)$$

$$g_A = -\frac{1}{2},$$

$$u_L = c_L = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta, \quad (29)$$

$$d_L = s_L = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta,$$

$$u_R = c_R = -\frac{2}{3} \sin^2 \theta,$$

$$d_R = s_R = \frac{1}{3} \sin^2 \theta,$$

где θ — угол Вайнберга.

В гамильтониан (22) входят члены двух типов: диагональные и недиагональные. О диагональных членах практически нет никакой информации. Эта часть гамильтониана (22) имеет вид

$$\mathcal{H}^d = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_a^0 j_a^0 + j_a^1 j_a^1 + j_a^2 j_a^2). \quad (30)$$

Второй член взаимодействия (30) приводит к эффектам несохранения четности в таких чисто лептонных процессах, как $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. В ближайшие годы эти эффекты будут изучаться на ускорителях **PETRA** и **PEP**.

Последний член взаимодействия (30) ответственен за P-нечетные эффекты в ядерных переходах. Нейтральный ток дает основной вклад в ту часть P-нечетного нуклон-нуклонного потенциала, которая меняет на единицу изотопический спин. Ядро ^{18}F является удобным объектом для изучения вклада нейтральных токов в P-нечетные эффекты. В этом ядре имеется два близких уровня с разной четностью и изотопическими спинами $T=0$ и $T=1$. Изучение циркулярной поляризации γ -квантов, возникающих от распада $^{18}\text{F}^*$, может позволить получить информацию о третьем члене гамильтониана (30). В работах ^{12/} для циркулярной поляризации γ -квантов от распада $^{18}\text{F}^*$ найдено значение

$$P_\gamma = 3,6 \cdot 10^{-4} \eta,$$

где множитель η характеризует отношение вкладов нейтральных и заряженных токов. В теории Вайнберга-Салама $\eta \simeq 10^{12/}$. На опыте ^{13/}

$$P_\gamma = (-0,7 \pm 2,0) \cdot 10^{-3}.$$

Никаких заключений из этих данных сделать нельзя.

Наконец, первый член гамильтониана (30) описывает взаимодействие между нейтрино. Запишем гамильтониан ν - $\bar{\nu}$ взаимодействия в виде

$$\mathcal{H}_{\nu\nu} = \frac{F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1+\gamma_5) \nu_\mu) (\bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1+\gamma_5) \nu_\mu).$$

Информацию о константе F можно получить из данных опытов с пучками нейтрино высоких энергий. В порядке $G \cdot F$ возможен процесс

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \nu_\mu + X.$$

Если использовать имеющиеся данные, то можно получить^{/14/} следующее ограничение на константу F :

$$F \lesssim 10^4 G.$$

В теории Вайнберга-Салама

$$F = \frac{1}{4} G.$$

Замечательный прогресс последних лет связан с изучением обусловленных недиагональными членами гамильтониана (22) процессов. Мы обсудим вначале нейтрино-адронные процессы. В теории Вайнберга-Салама гамильтониан этих процессов имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_\mu) j_\alpha^z, \quad (31)$$

где адронный нейтральный ток j_α^z дается выражением (27). На опыте были исследованы процессы

$$\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + N \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + X, \quad (32)$$

$$\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + \rho \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + \rho, \quad (33)$$

$$\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + N \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + N + \pi, \quad (34)$$

$$\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + N \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + \pi^\pm + X. \quad (35)$$

Если принять партонную модель, то из данных, полученных при изучении процессов (32), можно определить параметр $\sin^2 \theta$. В работе^{/15/} найдено, что

$$\sin^2 \theta = 0,24 \pm 0,02. \quad (36)$$

Из данных по упругому рассеянию нейтрино на протоне было получено, что^{/16/}

$$\sin^2 \theta = 0,26 \pm 0,06. \quad (37)$$

Отметим, что на основе по изучению процессов (34) и (35) были также найдены значения параметра $\sin^2 \theta$, совпадающие в пределах ошибок с (36).

Если известны сечения процессов (32), а также процессов

$$\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + N \rightarrow \mu^- (\mu^+) + X,$$

то параметр $\sin^2\theta$ может быть определен без предположений о диме-
мике. Нетрудно показать, что

$$\frac{\sigma_{\nu}^{NC} - \sigma_{\bar{\nu}}^{NC}}{\sigma_{\nu}^{CC} - \sigma_{\bar{\nu}}^{CC}} = \frac{1}{2} - \sin^2\theta.$$

Таким способом в работе^{/17/} было найдено значение

$$\sin^2\theta = 0,22 \pm 0,05, \quad (38)$$

согласующееся с (36) и (37).

Совокупность имеющихся данных позволяет определить параметры u_L, d_L, \dots , входящие в выражение (27) для нейтрального тока, непосредственно из данных опытов, без предположений о справедливости теории Вайнберга-Салама. При этом удается получить единственное решение. Это единственное решение соответствует теории Вайнберга-Салама при $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$.

В таблице 2, взятой из доклада^{/18/}, приводятся найденные путем анализа данных опыта значения параметров u_L, d_L, \dots (второй столбец). В третьем столбце таблицы приведены значения этих параметров, вычисленные на основе теории Вайнберга-Салама (соотношения (29)) при $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$. Как видно из таблицы 2, имеющиеся данные находятся в полном согласии с теорией Вайнберга-Салама.

Таблица 2

Значения параметров u_L, d_L, \dots , входящих в адронный нейтральный ток

	Полученные из опыта значения	Теоретические значения ($\sin^2\theta = \frac{1}{4}$)
u_L	$0,35 \pm 0,07$	0,35
d_L	$-0,40 \pm 0,07$	-0,42
u_R	$-0,19 \pm 0,06$	-0,17
d_R	$0,0 \pm 0,11$	0,08

Перейдем теперь к обсуждению гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_\mu) j_\alpha^e, \quad (39)$$

описывающего нейтринно-лептонные процессы (ток j_α^e дается выражением (26)). На опыте изучались следующие обусловленные взаимодействием (39) процессы

$$\bar{\nu}_e + e \rightarrow \bar{\nu}_e + e, \quad (40)$$

$$\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + e \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + e. \quad (41)$$

Если предположить справедливость теории Вайнберга-Салама (соотношения (28)), то из данных по рассеянию $\bar{\nu}_e$ на электронах следует^{/19/}

$$\sin^2 \theta = 0,29 \pm 0,05. \quad (42)$$

Из данных по рассеянию ν_μ на электронах было получено, что^{/20/}

$$\sin^2 \theta = 0,21_{-0,06}^{+0,09}. \quad (43)$$

Значения (42) и (43) согласуются с (38).

Параметры g_V и g_A могут быть определены из данных опытов без предположений о справедливости теории Вайнберга-Салама. В работе^{/18/} было найдено два решения:

$$g_V \approx 0, \quad g_A \approx -\frac{1}{2};$$

$$g_V \approx -\frac{1}{2}, \quad g_A \approx 0.$$

Первое из этих решений согласуется с теорией Вайнберга-Салама при $\sin^2 \theta \approx \frac{1}{4}$.

Наконец, обсудим гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma_\alpha (g_V + g_A \gamma_5) e j_\alpha^2, \quad (44)$$

описывающий слабое взаимодействие электронов и адронов. В 1978 г. было завершено два эксперимента, в которых это взаимодействие было открыто и исследовано. В опыте Новосибирской группы^{/21/} был измерен P-нечетный угол вращения плоскости поляризации при прохождении поляризованного пучка фотонов через пары ^{20}Bi . Получено значение

$$(-17 \pm 3) 10^{-8}$$

согласующееся с величиной $^{1/2}I$, вычисленной на основе теории Вайнберга-Салама. Стэнфордская группа $^{1/3}$ завершила эксперимент по измерению P-нечетной асимметрии, возникающей при рассеянии продольно-поляризованных электронов на неполяризованных дейтронах. Получено, что

$$\lambda = (9,5 \pm 1,6) 10^{-5} \frac{g^2}{(\text{ГэВ})^2} \quad (45)$$

$$(\langle g^2 \rangle = 1,6 (\text{ГэВ})^2, \quad y = 0,21).$$

Если предположить справедливость теории Вайнберга-Салама и использовать партонную модель, то из (45) для параметра $\sin^2 \theta$ может быть получено значение

$$\sin^2 \theta = 0,20 \pm 0,03, \quad (46)$$

согласующееся с (38).

На этом мы закончим обсуждение экспериментального статуса единых теорий слабого и электромагнитного взаимодействий. Имеющиеся данные находятся во впечатляющем согласии с простейшим вариантом единых теорий - теорией Вайнберга-Салама. Необходимо, однако, отметить, что точности опытов еще невелики (не лучше 20%) и что практически отсутствует информация о диагональных членах гамильтониана. Несомненно, что дальнейшая проверка теории будет важной задачей ближайших лет.

Литература

1. S.Weinberg, Phys.Rev.Lett., 19, 1264 (1967).
A.Salam, Proc. of the Eighth Nobel Symposium, J.Wiley, N.Y. (1968).
S.L.Glashow, J.Illiopulos, L.Maiani, Phys.Rev., D2, 1285 (1970).
2. Л.Н.Барков, М.С.Золотарев, Письма ЖЭТФ, 27, 379 (1978).
3. C.Y.Frascott et al. Phys.Lett., 77B, 347 (1978).
4. M.Kobayashi, K.Maskawa, Progr.Theor.Phys., 49, 652 (1973).
5. G.Altarelli, Proc. 19th Int. Conf. High Energy Physios, Tokyo, p.411 (1978).
S.Weinberg, Proc. 19th Int.Conf. High Energy Physios, Tokyo, p.907 (1978).

6. W. Baccio et al. Phys.Rev. Lett., 42, 749 (1979).
7. G.J. Feldman, Proc. 19th Int. Conf. High Energy Physios, Токуо, p.777 (1978).
8. Б.М.Понтекорво, ЖЭТФ, 53, 1717 (1967).
См. обзор: С.М.Биленький, Б.М.Понтекорво. УФН, 123, 181 (1977).
9. R. Davis et al. Proc. of the Conf. "Neutrino-78", p.32, 1978.
10. J.N. Bahcall, R. Davis, Science, 191, 264 (1976).
11. В.А.Кузьмин, ЖЭТФ, 49, 1532 (1965).
A.A. Pomansky, A.I. Sevastjanov, Proc. of the Conf. "Neutrino-75" v.2, p.383 (1975).
12. M. Gari, J.B. McGroary, B. Offerman, Phys.Lett., 55B, 277 (1975).
S. Weinberg, Proc. VII Int. Conf. on High Energy Physics and Nuclear Structure, Switzerland (1977).
13. С.А. Barnes et al. Phys.Lett., 40, 840 (1978).
14. С.М.Биленький, Н.А.Дадаян, Е.Х.Христова, ЯФ, 28, 518 (1978).
15. M. Holder et al. Phys.Lett., 72B, 254 (1977).
16. M. Claudson, E.A. Pashos, L.R. Sulak. Proc. 19th Int. Conf. High Energy Physics, Токуо (1978).
17. P. Bosetti et al. Oxford preprint 16/78 (1978).
18. С. Baltay, Proc. 19th Int. Conf. High Energy Physics, Токуо (1978), p.882.
19. F. Reines et al. Phys.Rev.Lett. 37, 315 (1976).
20. А.М.Снорс et al. Phys.Rev.Lett. 41, 357 (1978).
21. В.Н.Новиков, О.П.Сушков, И.Б.Хриплович, ЖЭТФ, 71, 1665 (1976).

ОПИСАНИЕ СИЛЬНЫХ, СЛАБЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ МЕЗОНОВ В КВАНТОВОЙ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

М.К. Волков, Д. Эберт

Объединённый институт ядерных исследований, Дубна

Около двадцати лет прошло со времени появления первых работ, посвященных исследованию киральной теории поля^{/1/}. За это время были достигнуты большие успехи в развитии как алгебры токов^{/2,3/}, так и лагранжева формализма в киральной теории поля (феноменологической^{/4-6/} и квантовой^{/7/}).

Какая ситуация имеет место в настоящее время в статусе киральной теории? Можно считать достаточно хорошо установленным фактом, что $SU(3)_V \times SU(3)_A$ кирально-симметричная теория дает вполне разумную картину низкоэнергетической физики мезонов. В древесном приближении теории возмущений содержится основная информация о низкоэнергетических процессах в согласии с мягкопионными теоремами алгебры токов. Однопетлевое приближение хорошо описывает структурные константы и формфакторы мезонов, а также полные вероятности процессов в тех случаях, когда отсутствуют в низших порядках древесные диаграммы (например, в процессах $(\pi^0, \eta) \rightarrow \gamma\gamma$ и т.п.). Наиболее достоверные результаты получаются, если процессы описываются так называемыми "аномальными" петлевыми диаграммами^{/8,9/x/}.

x) Заметим, что при вычислении амплитуд процессов в киральной теории нельзя претендовать на точность, превышающую 20 - 30 %. Это следствие того, что в теории используется целый ряд приближений: приближенное тождество Голдбергера - Треймана, приближенное равенство констант распада $F_\pi \approx F_\eta \approx F_\eta' \approx 95 \text{ МэВ}$ и т.п.

В первой части этого обзора будет показано, как в рамках $SU(3) \times SU(3)$ симметричной киральной модели теории поля можно получить вполне удовлетворительную картину всех главных распадов мезонов основного октета и сделать некоторые важные предсказания (например, о замещении экспериментального значения для ширины распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$). Для простоты будет положено, что $F_\pi \approx F_K \approx F_\eta = F \approx 95$ МэВ. Массы всех баронов в октете также полагаются приближенно равными. Массовые члены в мезонном октете вводятся по схеме нарушения киральной группы, предложенной Гелл-Манном-Оаксом-Реннером^{10, II}. Взаимодействие с электромагнитным полем вводится минимальным градиентно-инвариантным способом. Слабые взаимодействия описываются стандартной схемой ток \times ток, где адронные токи имеют структуру Кабиббо и строятся на основе кирального лагранжиана обычным способом. η -мезон приближенно считается чисто октетным состоянием.

Тем самым в теории используется минимальное количество параметров, ни один из которых не является свободным. Эти параметры следующие: константа сильной связи g ($g^2/4\pi \approx 14,7$), константа электромагнитного взаимодействия e ($\alpha = e^2/4\pi = 1/137$), константа слабого взаимодействия $G = 10^{-5}/M^2$; масса протона M ; масса нейтрального каона m_{K^0} ; константа перенормировки аксиального тока $g_A \approx 1,25$; параметр смешивания f и d -связи в $SU(3)$ -теории $a \approx 2/3$ и угол Кабиббо $\theta \approx 0,26$.

Во второй части обзора делается попытка обобщения нелинейной киральной модели на случай очарованных адронов, т.е. переход от группы $SU(3) \times SU(3)$ к группе $SU(4) \times SU(4)$. Поскольку здесь вступают в игру значительно более тяжелые очарованные мезоны (D , F и η^c) и бароны, то следует ожидать, что группа $SU(4) \times SU(4)$ будет нарушаться массовыми членами несравненно сильнее, чем в случае теории $SU(3) \times SU(3)$. Однако можно надеяться, что киральная группа и здесь сохранит свои основные черты и даст, как минимум, правильную качественную картину при описании взаимодействий очарованных адронов (правила ЧСАТ, связи констант различных адронных процессов и пр.).

На основе нелинейной киральной теории $SU(4) \times SU(4)$ будет тогда построена единая модель типа Салама-Вайнберга для описания сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий адронов и получены правила ЧСАТ для адронных токов.

Особое внимание в этой части обзора будет уделено описанию

обобщенной схемы нарушения киральной $SU(4) \times SU(4)$ группы, следующей основным принципам прежней схемы Гелл-Манна-Оакса-Реннера. Будут получены массовые формулы для 15-плета мезонов и 20-плета барбионов с использованием угла Кабиббо и семи подгрупповых параметров (два - для мезонов и пять для барбионов). С одной позиции удастся выяснить ту важную роль, которую играет угол Кабиббо как в слабых, так и в сильных взаимодействиях (он определяет структ. γ слабых адронных токов и расщепление масс адронов в изотопических мультиплетах).

§ 2. Лагранжиан $SU(3) \times SU(3)$ киральной теории

Приведем нелинейный $SU(3) \times SU(3)$ инвариантный лагранжиан мезон-барбионного взаимодействия^{15,71}

$$\mathcal{L}_1 = \frac{F^2}{2} D_\mu \xi_i D_\mu \xi_i + \bar{B}_i (i \gamma_\mu D_\mu - M_0) B_i - \\ - g \bar{B}_i \gamma_\mu \gamma_5 [a d_{ijk} - i(1-a) f_{ijk}] B_j D_\mu \xi_k, \quad (I)$$

где $\xi_i = \Phi_i/F$, Φ_i - поля мезонного октета, F - размерный параметр киральной теории, B_i - поля барбионного октета и M_0 - средняя масса барбионов; f_{ijk} , d_{ijk} - структурные константы группы $SU(3)$ и a - параметр смешивания d - и f - связей. $D_\mu \xi_i$, $D_\mu B_i$ являются киральными ковариантными производными мезонных и барбионных полей, $D_\mu \xi_i = -i/2 \text{Sp}\{A_i e^{i\xi} A_i e^{i\xi} A_i\} \partial_\mu e^{i\xi} A_i$, $D_\mu B_i = (\partial_\mu \delta_{ij} + \Theta_\mu^k(\xi) f_{kij}) B_j$, $\Theta_\mu^i(\xi) = -i/2 \text{Sp}\{V_i e^{i\xi} A_i e^{i\xi} A_i\} \partial_\mu e^{i\xi} A_i$, где $A_i = \lambda_i/2 \gamma_5$, $V_i = \lambda_i/2 \mathbf{1}$ - полный ортогональный набор аксиальных и векторных генераторов группы $SU(3) \times SU(3)$, λ_i - матрицы Гелл-Манна (шпур берется по групповым и по лоренцевским индексам).

Мезоны в лагранжиане (I) являются безмассовыми. Массовые члены мезонного октета можно ввести, следуя схеме нарушения группы $SU(3) \times SU(3)$, предложенной Гелл-Манном-Оаксом-Реннером^{10,11}. Нарушающая группу часть лагранжиана преобразуется в этой схеме по представлению $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$ киральной группы и имеет вид

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{\mu^2}{2f^2} F^2 \text{Sp}\{(V_0 + a V_8) e^{i2\xi} A_i\} \quad (2)$$

(подробное обсуждение массовых членов мезонов и барбионов дано в § 5).

Взаимодействие с электромагнитным полем A_μ вводится обычным гадантно-инвариантным способом:

$$\partial_\mu \chi^\pm \rightarrow (\partial_\mu \pm ie A_\mu) \chi^\pm, \quad (3)$$

где χ^\pm - поля заряженных мезонов и баронов. В результате прихода к электромагнитному лагранжиану

$$\mathcal{L}_{EM} = -e A^\mu J_{EM}^\mu, \quad (4)$$

где

$$J_{EM}^\mu = J_3^\mu + J_8^\mu / \sqrt{3}. \quad (5)$$

электромагнитный ток адронов.

Слабое взаимодействие адронов с лептонами описывается произведением двух заряженных токов:

$$\mathcal{L}_{sl} = \frac{G}{\sqrt{2}} [J_{\mu(l)}^+ J_{\mu(A)}^- + J_{\mu(A)}^+ J_{\mu(l)}^-]. \quad (6)$$

Лептонные и адронные токи имеют вид

$$J_{\mu(l)}^\mu(x) = : \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 + \gamma^5) l : + : \bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) e : \quad (7)$$

$$J_{\mu(A)}^\mu(x) = \cos \theta (V+A)_{4+i2}^\mu + \sin \theta (V+A)_{4+i5}^\mu, \quad (8)$$

где μ, e, ν и $\psi_{\mu, e}$ - поля мюна, электрона и соответствующих нейтрино. $V_{knie}^\mu = V_k^\mu + i V_e^\mu$ и $A_{knie}^\mu = A_k^\mu + i A_e^\mu$ - векторные и аксиальные токи адронов, θ - угол Кабиббо. $J_{(A)}^\mu = J_{(B)}^\mu + J_{(M)}^\mu$ - сумма барионного и мезонного токов^{x)}

$$(V_{(B)})_i^\mu = -i : \bar{B}_k \gamma^\mu f_{ike} B_e : \quad , \quad (g_A \approx \frac{g_F}{g_{M_0}}); \quad (9)$$

$$(A_{(B)})_i^\mu = g_A : \bar{B}_k \gamma^\mu \gamma^5 [a_{ike} - i(1-a) f_{ike}] B_e : \quad (10)$$

Мезонные токи даются выражениями

$$\begin{aligned} (J_{(M)})_i^\mu &= (V_{(M)} + A_{(M)})_i^\mu = -\frac{F^2}{2} D_{\xi k}^\mu \text{Sp} \{ (V_i + A_i) e^{i\xi_e A_e} A_k e^{-i\xi_e A_e} \} = \\ &= -i \frac{F^2}{4} \text{Sp} \{ (V_i + A_i) e^{i2\xi_e A_e} \partial^\mu e^{-i2\xi_e A_e} \}. \end{aligned} \quad (II)$$

^{x)} Здесь барионные токи приведены без мезонных полей, которые там тоже могут присутствовать.

Эти токи получаются из кирального лагранжиана (I) с помощью стандартной процедуры^{/2,7/}.

Поскольку здесь будут обсуждаться только лептонные, полулептонные и радиационные распады мезонов, лагранжианы, описывающие слабые адрон-адронные взаимодействия, не приводятся.

§ 3. Распады мезонов основного октета

Рассмотрим наиболее характерные распады мезонов основного октета в древесном и однопетлевом приближениях киральной теории (более подробное изложение см. в^{/12/}). Как показывают оценки в однопетлевом приближении, определяющие вклады дают барийные петли. Вклады от мезонных петель малы или отсутствуют вообще. Поэтому здесь будут рассмотрены только барийные петли.

Расходимости, возникающие в барийных петлях, устраняются в однопетлевом приближении обычными приемами ренормируемой теории поля, несмотря на использование нелинейной реализации киральной симметрии. Этому способствует учет свойств градиентной инвариантности теории и частичного сохранения аксиального тока^{/7,12/}.

Перейдем к краткому описанию основных распадов мезонов.

а) Лептонные распады $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu (e^\pm \nu_e)$; $K^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu (e^\pm \nu_e)$
 Амплитуды этих распадов, соответствующие древесному приближению, имеют вид

$$T_{\substack{\pi \rightarrow \mu \nu_\mu \\ K \rightarrow \mu \nu_\mu}}^{(gr)} = i \sqrt{2} F \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} p_\mu \ell_\mu, \quad (12)$$

где p_μ - импульс распадающейся частицы, а

$$\ell_\mu = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_\mu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu, \quad (13)$$

ток лептонов. При $F = 95$ МэВ вероятность распада $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu$ точно соответствует экспериментальному значению, а для распада $K^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu$ получаем

$$W_{(K^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu)}^{теор} = 4,8 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}, \quad (14)$$

что также хорошо соответствует экспериментальному значению

$W_{(K^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu)}^{эксп} = 5,1 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$ ^{/13/}. Однопетлевое приближение даёт

х) Заметим, что выбор для угла Кабиббо значения $\theta \approx 0,26$ позволяет приблизительно положить $F_\pi \approx F_K$ и даёт непротиворечивую картину для всех остальных распадов мезонов.

конечные поправки к древесному приближению в пределах 20 %, т.е. той точности, на которую мы претендуем. Поэтому оно здесь не будет учитываться.

б) Полуклептоновые распады: $\pi^{\pm} \rightarrow \pi^0 e^{\pm} \nu_e$, $K_{\ell 2}$, $K_{\ell 4}$.

Распады 1) $\pi^{\pm} \rightarrow \pi^0 e^{\pm} \nu_e$, 2) $K_L \rightarrow \pi^{\pm} e^{\mp} \nu_e$, 3) $K^{\pm} \rightarrow \pi^0 e^{\pm} \nu_e$ в древесном приближении описываются формулой

$$T_{M_i}^{(gp)} = a_i (p_{M_i} + p_{\pi})_{\mu} \ell_{\mu}, \quad (15)$$

где p_{M_i} - импульс распадающейся частицы, а p_{π} - импульс рожденного пиона. Коэффициенты a_i для указанных трех распадов имеют значения

$$a_1 = \sqrt{2} \cos \theta, \quad a_2 = \sin \theta, \quad a_3 = \sin \theta / \sqrt{2}. \quad (16)$$

В результате для вероятностей распадов получаем

$$W_{\pi^{\pm} \ell_3}^{\text{теор}} = 0,39 \text{ сек}^{-1}; \quad W_{K_L \ell_3}^{\text{теор}} = 9 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}; \quad W_{K^{\pm} \ell_3}^{\text{теор}} = 4,2 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}. \quad (17)$$

Экспериментальные значения равны^{/13/}

$$W_{\pi^{\pm} \ell_3}^{\text{экс.}} = 0,4 \text{ сек}^{-1}; \quad W_{K_L \ell_3}^{\text{экс.}} = 7,53 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}; \quad W_{K^{\pm} \ell_3}^{\text{экс.}} = 3,9 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}. \quad (18)$$

Однопетлевое приближение дает удовлетворительные значения для слабого радиуса пиона ($r_{\pi}^2 \approx 0,36 \text{ (фм)}^2$) и для параметров наклона $\lambda_{(+)} \lambda_{(0)}$ в $K_{\ell 3}$ -распаде (см.^{/12/}):

$$\lambda_{(+)} \approx 0,025; \quad \lambda_{(0)} \approx -0,028. \quad (19)$$

Экспериментальные данные из^{/14/} равны

$$\lambda_{(+)} = 0,025 \pm 0,007; \quad \lambda_{(0)} = -0,017 \pm 0,011. \quad (20)$$

Распад $K_{\ell 4}$ описывается амплитудой

$$T_{K_{\ell 4}} = i \frac{\sin \theta}{m_K} \{ (p^+ + p^-)_{\mu} f + (\bar{p} - p^+)_{\mu} g + (p_K - \bar{p} - p^+)_{\mu} z + \\ + i \frac{\lambda_{\mu}^2}{m_K^2} \epsilon_{\mu\nu\sigma} (p_K)_{\nu} (\bar{p} + p^+)_{\sigma} (\bar{p} - p^+)_{\sigma} \} \ell_{\mu}, \quad (21)$$

где p_k, p^+ и p^- - импульсом клона, π^+ и π^- - мезонов соответственно, f, g, z - аксиальные формфакторы и h - векторный формфактор.

Величины аксиальных формфакторов в основном определяются древесным приближением

$$f = g = \frac{m_K}{\sqrt{2}F}; \quad z = \sqrt{2} \frac{m_K}{F} \frac{q p^+}{m_K^2 - q^2} = \begin{cases} 0, & p^+ = 0; (q = p_K - \bar{p} p^+) \\ \frac{m_K}{\sqrt{2}F}, & \bar{p} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Эти результаты полностью согласуются с алгеброй токов [3/x].

Для вычисления векторного формфактора h необходимо рассмотреть однопетлевое приближение. Здесь мы впервые сталкиваемся с петлевыми диаграммами аномального типа [8,9]. Четырехугольные и треугольные барнионные диаграммы полностью определяют величину формфактора h :

$$h = - \frac{g_A 2,4}{\pi^2 \sqrt{2}} \left(\frac{m_K}{2F} \right)^3 \approx -3,7. \quad (23)$$

Это значение хорошо согласуется как с последними экспериментальными данными [15], так и с другими теоретическими оценками [16].

в) Радиационные распады $\pi^0, \eta \rightarrow \gamma\gamma, \eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma, K_L \rightarrow \gamma\gamma, K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$

Величины этих распадов, так же как и значение h , полностью определяются вкладом барнионных петлевых диаграмм аномального типа. Амплитуды распадов $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ и $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ имеют вид

$$T_{\mu\nu}^{(\pi^0, \eta)} = - f_{(\pi^0, \eta)} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_1^\alpha q_2^\beta, \quad (24)$$

где q_1^α и q_2^β - импульсы фотонов. Теоретические оценки для f имеют вид

$$f_{(\pi^0)} = 0,7 \frac{\alpha}{m_\pi}; \quad f_{(\eta)} = 1,7 \frac{\alpha}{m_\eta}. \quad (25)$$

Эксперимент дает [13]

$$f_{(\pi^0)} = 0,5 \frac{\alpha}{m_\pi}; \quad f_{(\eta)} = 1,5 \frac{\alpha}{m_\eta}. \quad (26)$$

х) Значения (22), как и данные алгебры токов, приводят к заниженным на 50% результатам для вероятности K_{L4} -распада. Учет однопетлевого приближения улучшает согласие с экспериментом.

Учет аномальных петель дает для ширины распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$ значение

$$\Gamma_{\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma} = 36 \text{ эВ}, \quad (27)$$

которое также близко к экспериментальному (41 эВ). Распады $K_L \rightarrow \gamma \gamma$ и $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$ легко объясняются через соответствующие распады π^0 - и η -мезонов, если учесть полные диаграммы, описывающие переход $K_L \rightarrow \eta$, $K_L \rightarrow \pi^0$ /12/.

г) Распады $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \gamma$ и $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$

В процессе $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \gamma$ рассмотрение барьонных петель позволяет вычислить аксиальную и векторную структурные константы h_A и h_V . Их отношение равно /12/

$$\delta = h_A/h_V \approx 0,5. \quad (28)$$

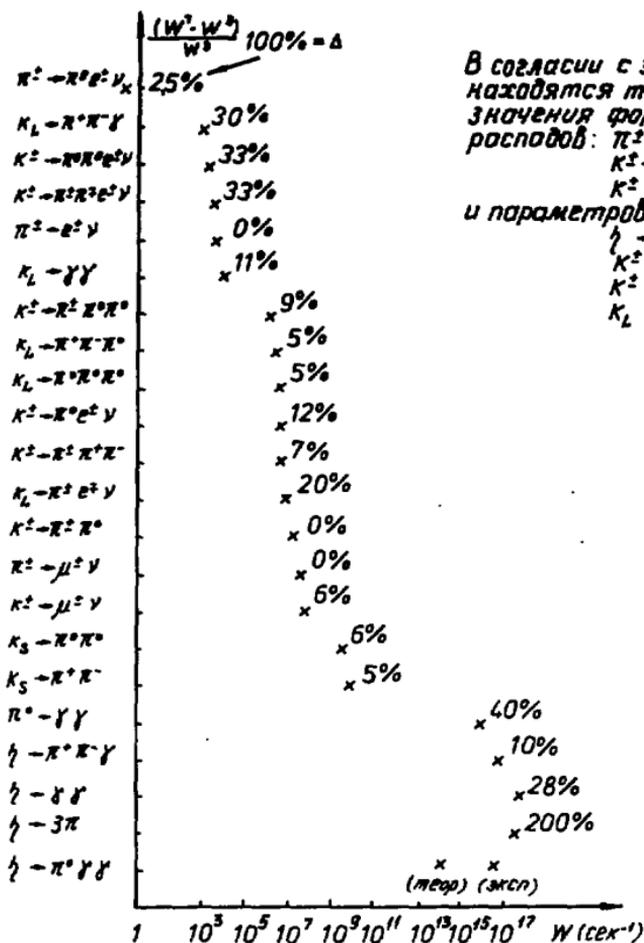
Последние экспериментальные данные следующие /17/:

$$\delta = 0,44 \pm 0,12. \quad (29)$$

На приведенном здесь рисунке собраны все основные распады пионов, каонов и η -мезона и указаны ошибки предсказаний киральной теории. Легко видеть, что киральная теория вполне удовлетворительно воспроизводит реальную картину распадов мезонов всего основного октета. Тем более удивительным кажется единственное грубое расхождение теории и эксперимента (более чем на три порядка!) в описании распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$. Здесь имеет место несколько необычная ситуация. Все барьонные петли полностью сокращаются, и процесс $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ может идти только через пионные петли. Теоретическая оценка дает $\sim 0,01 \text{ эВ}^2$ /18/, а современные экспериментальные данные $\sim 26 \text{ эВ}^2$ /13/. Теоретические оценки в других подходах также дают малые значения /19,20/. Это заставляет более критично относиться к экспериментальным данным.

§ 4. Обобщение на группу $SU(4) \times SU(4)$

С учетом всех тех замечаний, которые были сделаны во введении, обобщим киральный лагранжиан (I) на случай группы $SU(4) \times SU(4)$. Это позволит нам, с одной стороны, включить в рассмотрение очарованные адроны, а с другой стороны — построить единую (нелинейную) модель Салама-Вайнберга, описывающую более последовательно, чем в § 2, сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия /21/. Все



В согласии с экспериментам
находятся теоретические
значения факторов
распадов: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_e$
 $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e (K_L \rightarrow \pi^+ e^+ \nu_e)$
 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 e^+ \nu_e$
и параметров наклона для:
 $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$
 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$
 $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

Теоретические оценки распадов $\eta \rightarrow 3\pi$ и $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ тесно связаны с выбором формы нарушения киральной группы. Поэтому ошибки здесь могут быть нестандартно велики (см. $\eta \rightarrow 3\pi$). Однако маловероятно, чтобы эти ошибки могли превышать два - три порядка (распад $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$).

те лагранжианы, которые изучались в начале этой работы, будут содержаться в новом более общем лагранжиане, и, следовательно, можно опять описать все важные низкоэнергетические свойства обычных мезонов основного октета. Что же касается очарованных мезонов, то здесь приходится работать с осторожностью, так как в силу больших масс таких мезонов киральная группа $SU(4) \times SU(4)$ нарушается значительно сильнее групп $SU(3) \times SU(3)$ и $SU(2) \times SU(2)$ и теория возмущений в рамках этой модели работает плохо. Поэтому этот лагранжиан следует рассматривать как феноменологический для очарованных адронов.

а) Сильные взаимодействия

Рассмотрим 15-plet 0^- мезонов и 20-plet $1/2^+$ баркионов. Мезонные поля обозначим опять через $\xi_i = \Phi_i / F (i=1, \dots, 15)$, а баркионные поля опишем тензором $B_c^{[a, b]}$ ($a, b, c=1, \dots, 4$). Явные выражения баркионных полей через тензорные компоненты $B_c^{[a, b]}$ можно найти в ^{12,14}. Киральный $SU(4) \times SU(4)$ лагранжиан тогда принимает вид ^{12,13,15}

$$\mathcal{L}_1 = \frac{F^2}{2} D_\mu \xi_i D_\mu \xi_i + \bar{B} (i \gamma_\mu D_\mu - M_0) B - g_A [a (\bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 V_k B)_d + (1-a) (\bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 V_k B)_f] D_\mu \xi_k, \quad (30)$$

где индексы d и f в выражениях типа $(\bar{B} V_k B)_{d(f)}$ обозначают d - и f -связь (a - параметр смешивания)

$$(\bar{B} V_k B)_{d(f)} = \frac{1}{2} \bar{B}_{[m, n]}^a (V_k)_a^b B_b^{[m, n]} + (-) \bar{B}_{[b, n]}^m (V_k)_a^b B_m^{[a, n]}. \quad (31)$$

Ковариантная производная баркионного поля определяется соотношением

$$\bar{B}_i \gamma_\mu D_\mu B = \frac{1}{2} \bar{B}_{[m, n]}^a i \gamma_\mu \partial_\mu B_a^{[m, n]} - (\bar{B} \gamma_\mu V_k B)_f \Theta_\mu^k(\xi), \quad (32)$$

х) Лагранжиан (30) инвариантен относительно следующих нелинейных преобразований адронных полей $(\xi, B) \rightarrow (\xi', B')$:

$$g e^{i \xi_i A_i} = e^{i \xi'_i A_i} e^{i u'_i(\xi, g) V_i}, \quad g \in SU(4) \times SU(4),$$

$$B_a^{[m, n]} = (U^+)_i^m (U^+)_j^n (U^k)_a^b B_k^{[m, n]}, \quad U = \exp(i u'_i(\xi, g) V_i),$$

где A_i, V_i ($i=1, \dots, 15$) - алгебраические и векторные генераторы группы $SU(4) \times SU(4)$.

и формы Картана $D_\mu \xi_i, \Theta_\mu^i(\xi)$ ($i = 1, 2, \dots, 15$) определяются формулами, аналогичными тем, которые приведены в §2.

б) Слабые и электромагнитные взаимодействия

Слабые и электромагнитные взаимодействия можно ввести в лагранжиан (30) через калибровочные поля. В качестве калибровочной группы используем группу $G_W = SU(2) \times U(1)$ (модель Салама-Вайнберга²⁴). Для генераторов этой группы выберем 4x4 матричное представление

$$SU(2)_L: \hat{C}_i = \frac{1+\gamma_5}{2} C_i; \quad C_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_3 \sigma_i^{-1} \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3);$$

$$U(1): \hat{Y} = \frac{Y_W}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2} C_3; \quad [\hat{C}_i, \hat{Y}] = 0. \quad (33)$$

Здесь σ_i - матрицы Паули, а Y_W - слабый гиперзаряд. Электрический заряд равен $Q = C_3 + \hat{Y} = \frac{C_3}{2} + \frac{Y_W}{2}$. Группу G_W можно рассматривать как часть более общей группы сильного лагранжиана $SU(4) \times SU(4)$ (если пренебречь фазовым множителем в законах преобразования, возникающим от единичной матрицы из $\hat{Y}/2$). Поэтому нелинейные преобразования адронных полей относительно группы G_W следуют из подобных преобразований относительно группы $SU(4) \times SU(4)$.

Рассмотрим локальные калибровочные преобразования $h \in G_W$, $h = \exp(i\psi(x)\hat{Y}) \exp(i\xi_i(x)\hat{C}_i)$. Для построения лагранжиана, инвариантного относительно таких преобразований, необходимо ввести калибровочные поля W_μ^i, X_μ , связанные с генераторами \hat{C}_i и $\hat{Y}/2$ группы G_W . Эти поля вводятся через переопределение ковариантных производных $D_\mu \xi_i \rightarrow \bar{D}_\mu \xi_i$, $\bar{V}_i \chi_\mu D_\mu B \rightarrow \bar{V}_i \chi_\mu \bar{D}_\mu B$. Здесь калибровочно-ковариантные формы Картана определены соотношениями

$$e^{-i\xi_i A_i} (\partial_\mu + ig W_\mu^i \hat{C}_i + ig' X_\mu \hat{Y}/2) e^{i\xi_i A_i} =$$

$$= i (A_i \bar{D}_\mu \xi_i + V_i \bar{\Theta}_\mu^i(\xi)) + ig' X_\mu Y_W/2, \quad (34)$$

где g и g' - константы связи калибровочных полей W_μ^i, X_μ . Переходя к физическим полям заряженных и нейтральных векторных бозонов W_μ^\pm и Z_μ и фотонов A_μ , калибровочно-инвариантный лагранжиан запишем в форме^{21,23}

$$\mathcal{L}(\bar{D}_\mu \xi, B, \bar{D}_\mu B) = \mathcal{L}_1(D_\mu \xi, B, D_\mu B) - \frac{g}{2A_2} (W_\mu^+ J_\mu^{(W)} + \text{з.с.}) -$$

$$- \frac{g}{2\cos\theta_W} Z_\mu J_\mu^{(Z)} - e A_\mu J_\mu^{(A)} + \mathcal{L}_{\text{кв}}(A_\mu, W_\mu^\pm, Z_\mu). \quad (35)$$

Здесь $J_{\mu}^{(W)}$, $J_{\mu}^{(2)}$ и $J_{\mu}^{(A)}$ - слабые заряженные и нейтральные адронные токи, а также электромагнитный ток и θ_w - угол Вайнберга ($\tan \theta_w = g'/g$). $\mathcal{L}_{\text{кв}}$ - часть лагранжиана, содержащая квадратичные по векторным полям члены. Явное выражение для заряженного тока $J_{\mu}^{(W)}$ будет приведено ниже.

§ 5. Массовые формулы

В § 2 мы коротко обсуждали схему нарушения группы $SU(3) \times SU(3)$ с использованием представления $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$. Покажем, как эту схему можно обобщить для случая киральной группы $SU(4) \times SU(4)$, и выясним при этом роль угла Кабиббо.

а) Мезоны

Для введения масс 15-плета 0^- -мезонов используем представление $(4, 4^*) \oplus (4^*, 4)$ группы $SU(4) \times SU(4)$. Массовый член $\Delta \mathcal{L}_{(M)}$ тогда имеет вид ^{/10, II, 25/}

$$\Delta \mathcal{L}_{(M)} = \frac{\mu^2}{2V_8} F^2 \text{Sp} \{ (V_0 + a V_8 + b V_{15}) e^{i2\xi_i A_i} \}. \quad (36)$$

Как и в работах ^{/10, II/}, исходная симметрия $SU(4) \times SU(4)$ нарушается сначала до $SU(2) \times SU(2)$ (т.е. легкие пионы считаем безмассовыми частицами). Для этого необходимо выбрать следующие значения параметров: $\mu^2 = m_{K^0}^2 + m_{D^0}^2$, $a = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m_{K^0}^2}{\mu^2}$, $b = -(3m_{D^0}^2 - m_{K^0}^2)/\sqrt{3} \mu^2$. Это дает

$$\Delta \mathcal{L}_{(M)} = \frac{F^2}{4} \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & m_{K^0} & \\ & & m_{D^0} \end{pmatrix} e^{i2\xi_i A_i} \right\}. \quad (37)$$

Теперь, используя калибровочно-инвариантный лагранжиан (35) и нарушающую киральную группу часть $\Delta \mathcal{L}$, можно показать, что преобразованием адронных полей можно сразу же получить как правильные значения адронных масс, так и кабиббовскую структуру адронных токов, участвующих в слабых взаимодействиях.

Будем считать, что физическими мезонными полями являются не поля ξ_i , а поля $\tilde{\xi}_i$, повернутые на угол Кабиббо θ :

$$e^{i\tilde{\xi}_i A_i} = U_c^{-1} e^{i\xi_i A_i} U_c, \quad (38)$$

где $U_c = \exp(i2\theta V_7)$. Тогда преобразованный лагранжиан $\Delta \mathcal{L}_{(M)}$ будет нарушать и группу $SU(2) \times SU(2)$, а у пионов также появится масса ($\tilde{\xi} = \xi_i A_i$).

$$\Delta \tilde{\alpha}_{(M)} = \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ U_c^{-1} \begin{pmatrix} 0 & m_{K^0}^2 & \\ & m_{\pi^0}^2 & \\ & & m_{\eta^0}^2 \end{pmatrix} U_c e^{i2\tilde{\xi}_i A_i} \right\} \Delta S=0 =$$

$$= -2F^2 \left\{ m_{K^0}^2 \sin^2 \theta [\tilde{\xi}^2]_{22} + m_{K^0}^2 \cos^2 \theta [\tilde{\xi}^2]_{33} + m_{\eta^0}^2 [\tilde{\xi}^2]_{44} + O(\tilde{\xi}^4) \right\} \quad (39)$$

Формула (39) дает следующие выражения для масс мезонного 15-плета:

$$m_{\pi^+}^2 = m_{K^0}^2 \sin^2 \theta, \quad m_{K^+}^2 = m_{K^0}^2 \cos^2 \theta,$$

$$m_{D^+}^2 = m_{\eta^0}^2 + m_{\pi^+}^2, \quad m_{F^+}^2 = m_{\eta^0}^2 + m_{K^+}^2,$$

$$m_{\eta^8}^2 = m_{K^0}^2 \left(\frac{1}{3} + \cos^2 \theta \right), \quad m_{\eta^{15}}^2 = \frac{1}{6} (m_{K^0}^2 + 9m_{\eta^0}^2). \quad (40)$$

Учет членов смешивания

$$-m_{K^0}^2 \sin^2 \theta / \sqrt{3} \pi^0 (\eta^8 + \eta^{15} / \sqrt{2}) - m_{K^0}^2 (3 \cos^2 \theta - 1) / 3\sqrt{2} \eta^8 \eta^{15}$$

позволяет объяснить расщепление пиконных масс (π^0 и π^\pm). В таблице I приведены значения мезонных масс, получившихся при $m_{K^0} = 498$ МэВ, $m_{\eta^0} = 1863$ МэВ и $\theta = 0,26^{xx}$. Заметим, что

Таблица I

$\frac{m_{\text{теор.}} - m_{\text{эксп.}}}{m_{\text{эксп.}}} \cdot 100\%$	m_{π^0}	m_{π^+}	m_{K^+}	m_{D^+}	m_{F^+}
$\theta = 0.26$	-6%	-8%	-2.6%	0%	-5.2%

х) В лагранжиане (39) мы отбросили недиагональные члены с $\Delta S \neq 0$, требуя сохранения странности.

хх) Чтобы более корректно описать массы π^0 , η^8 и η^{15} , следует учесть их смешивание с синглетным мезоном η^0 . Этот вопрос изучался многими авторами и мы отсылаем интересующихся к работам ^{25,26/}.

рассмотренное расщепление масс заряженных и нейтральных пионов, каонов и D-мезонов не электромагнитного происхождения. Дополнительно к этому надо еще учесть электромагнитные поправки к массам, особо важные при описании расщепления пионных масс.

б) Барьоны

Барьонный массовый член можно выбрать в форме, близкой к (39):

$$\tilde{\Delta}_{(B)}^2 = \frac{1}{2} \tilde{B}_{[mn]}^i \begin{pmatrix} 0 & a \sin^2 \theta \\ a \cos^2 \theta & b \end{pmatrix}^j \tilde{B}_j^{[mn]} + \tilde{B}_{[kn]}^m \begin{pmatrix} 0 & c \sin^2 \theta \\ c \cos^2 \theta & d \end{pmatrix}^i \tilde{B}_m^{[kn]} \quad (41)$$

где $\tilde{B}_a^{[mn]} = (U_c^+)_i^m (U_c^+)_j^n (U_c)_a^k \tilde{B}_k^{[ij]}$ — физические поля барьонов. Здесь учтены две формы связи барьонов (d и f) с различными параметрами смешивания для очарованных и неочарованных барьонов. Используя три массы из основного барьонного октета и две массы очарованных частиц ($m_{A_1^+} = 2260$ МэВ и $m_{B_3^+} = 2426$ МэВ), можно зафиксировать все параметры в (30) и (41):

$$M_0 = 2690 \text{ МэВ}; \quad a = -127 \text{ МэВ}, \quad b = -1221 \text{ МэВ}, \quad (42)$$

$$c = 264 \text{ МэВ}, \quad d = 1494 \text{ МэВ}.$$

Массы барьонов всего 20-плета ($1/2^+$), следующие из (30), (41) и (42), приведены в таблице 2.

§ 6. Токи и условие ЧСАТ

Приведем здесь явное выражение для заряженного слабого тока $J_\mu^{(w)}$ как функционала от физических полей адронов. Аналогичные выражения для нейтральных слабых и электромагнитных токов можно найти в [21, 23]:

$$\begin{aligned} J_\mu^{(w)} = & -F^2 \tilde{D}_\mu \tilde{\xi}_k \text{Sp}(\hat{C}_+(\theta) e^{i \tilde{\xi}_i A_i} A_k e^{-i \tilde{\xi}_i A_i}) + \quad (43) \\ & + (\tilde{B} \gamma_\mu V_k \tilde{B})_f \text{Sp}(\hat{C}_+(\theta) e^{i \tilde{\xi}_i A_i} V_k e^{-i \tilde{\xi}_i A_i}) - \\ & - g_A [a (\tilde{B} \gamma_\mu \gamma_5 V_k \tilde{B})_d + (1-a) (\tilde{B} \gamma_\mu \gamma_5 V_k \tilde{B})_f] \text{Sp}(\hat{C}_+(\theta) e^{i \tilde{\xi}_i A_i} A_k e^{-i \tilde{\xi}_i A_i}). \end{aligned}$$

$C = 0$	$m_n = 958$ (изв.)	$C = 1$	$m_{A_1} = 2260$	
	$m_p = 949$		$m_{A_2^+} = 2460$	
	$m_\Lambda = 1109$		$m_{A_2^0} = 2476$	
	$m_{\Sigma^+} = 1179$			
	$m_{\Sigma^0} = 1191.5$		$C = 2$	$m_{C_2^{++}} = 3647$
	$m_{\Sigma^-} = 1204$			$m_{C_2^+} = 3664$
	$m_{\Sigma^0} = 1297$			$m_{C_1^+} = 3894$
$m_{\Sigma^-} = 1315$				
$C = 1$	$m_{B_3^{++}} = 2426$		$\theta = 0.26$	
	$m_{B_3^+} = 2439$			
	$m_{B_3^0} = 2452$			
	$m_{B_2^+} = 2618$			
	$m_{B_2^0} = 2629$			
	$m_{B_1^0} = 2791$			

Здесь $\hat{C}_\pm(\theta) = U_C^{-1} \hat{C}_\pm U_C$ ($\hat{C}_\pm = \hat{C}_1 \pm i \hat{C}_2$) - повернутые заряженные генераторы группы $SU(2)_C$ слабого взаимодействия.

Токи (43) имеют обобщенную кабиббовскую структуру, соответствующую схеме ГИМ^[27]. Действительно, используя представление

$$\hat{C}_\pm(\theta) = \frac{1}{2} \cos \theta [(V_{1+i2} + A_{1+i2}) + (V_{13-i14} + A_{13-i14})] + \frac{1}{2} \sin \theta [(V_{4+i5} + A_{4+i5}) - (V_{11-i12} + A_{11-i12})], \quad (44)$$

где $V_{k \pm i l} = V_k \pm i V_l$, получаем

$$J^{(N)\mu} = \cos\theta [J_{4+i2}^{\mu} + J_{4-i2}^{\mu}] + \sin\theta [J_{4+i5}^{\mu} - J_{4-i5}^{\mu}]. \quad (45)$$

Токи $J_{k+i l}^{\mu}$ имеют здесь обычную $V^{\mu} A^{\mu}$ форму. Таким образом, легко убедиться, что переход к "повернутым" физическим полям $\vec{\xi}, \vec{B}$ позволяет не только правильно описать массы адронов, в частности, вычислить пионную массу на основе массы каона ($m_{\pi^+} = \sin\theta m_{K^0}$) и расщепление адронных масс в изомультиплетах, но и автоматически получить правильную структуру токов, участвующих в слабых взаимодействиях. Таким образом, удается установить взаимосвязь между этими столь различными на первый взгляд явлениями. Учет электромагнитных поправок оказывается значительно более слабым эффектом при изучении расщепления изомультиплетных масс. Кроме того, учет только последнего эффекта не может дать даже правильной качественной картины (например, объяснить, почему $m_{\pi^+} > m_{K^0}$, а $m_{K^+} < m_{K^0}$).

Выведем теперь условия ЧСАТ. Дивергенция аксиального тока вычисляется путем вариации лагранжианов (30) и (39), (41) относительно калибровочных преобразований всех физических полей (например, $\delta_+ e^{i\vec{\xi} \cdot \vec{A}_2} = i/2 E_+ \vec{C}_+(\theta) e^{i\vec{\xi} \cdot \vec{A}_2}$). Это приводит к следующему условию ЧСАТ^{21, 23/}:

$$\partial_{\mu} A_{\mu}^{(N)} = \sqrt{2} F \{ \cos\theta (m_{\pi^+}^2 \pi^- + m_F^2 F^-) + \sin\theta (m_K^2 K^- - m_D^2 D^-) \} + O(\vec{\xi}^3). \quad (46)$$

Здесь угол Кабиббо проявляет себя одновременно в двух ролях (определяет массы мезонов и структуру условия ЧСАТ).

§ 7. Лептонные и полулептонные распады очарованных мезонов

Добавляя к лагранжиану (35) взаимодействия лептонных токов с калибровочными полями и переходя к физическим полям адронов, можно получить эффективный лагранжиан типа ток \times ток, описывающий слабые лептон-адронные и электромагнитные взаимодействия. В таблице 3 приведены результаты предсказаний для ряда лептонных и

Распад	Вероятность распада (Киральная теория) ^{/23/}	Вероятность распада (Кварковая модель) ^{/29/}
$D^- - \mu \bar{\nu}_\mu$	$2 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$	$1.9 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$
$F^- - \mu \bar{\nu}_\mu$	$3 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$	$4.2 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$
$\bar{D}^0 - K^+ e \bar{\nu}_e$	$1 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$	$1.4 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$
$F^- - \eta e \bar{\nu}_e$	$1 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$
$\bar{D}^0 - \pi^+ e \bar{\nu}_e$	$1.2 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$	$1.4 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$
$\bar{D}^0 - K^0 \pi^+ e \bar{\nu}_e$	$2.1 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$	
$F^- - K^+ K^- e \bar{\nu}_e$	$1.1 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$	

полулептонных распадов очарованных мезонов и проведено сравнение с предсказаниями кварковых моделей.^{/23/}

§ 8. Заключение

В первой части этого обзора на основе рассмотрения распадов мезонов основного октета было показано, что нелинейную киральную $SU(2) \times SU(2)$ симметричную теорию можно рассматривать как квантовую теорию поля, вполне удовлетворительно описывающую низкоэнергетическую физику мезонов в двух первых порядках теории возмущений (древесном и однопетлевом приближениях). Предыдущие вычисления показали, что та же ситуация имеет место и при описании сильных и электромагнитных взаимодействий в этой теории ($\pi\pi$ - рассеяние, электромагнитные формфакторы мезонов и их поляризуемости и т.п.)^{/7,30/}. Единственным исключением,

где теория резко расходится с экспериментом, явился распад $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$. Это заставляет более внимательно отнестись к соответствующим экспериментальным данным.

При обобщении киральной теории на случай очарованных адронов (группа $SU(4) \times SU(4)$) [21, 23, 31, 32] нельзя ожидать столь же удовлетворительной картины. Из-за появления тяжелых очарованных мезонов группа будет нарушаться значительно сильнее и теория возмущений при низких энергиях также работает плохо. Однако такое обобщение может оказаться полезным по следующим причинам:

1) Если киральный $SU(4) \times SU(4)$ лагранжиан рассматривать как эффективный, он может дать разумные соотношения между константами связи различных процессов и привести к удовлетворительной качественной картине взаимодействий очарованных частиц (см. таблицу 3).

2) На основе такого лагранжиана легко построить единую модель типа Вайнберга-Салама, позволяющую с единой точки зрения описать сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия 15-плета мезонов и 20-плета барионов. Этот лагранжиан будет включать в себя как часть ранее рассмотренные лагранжианы, описывающие различные взаимодействия адронов из основного октета и, как уже упоминалось, хорошо зарекомендовавшие себя при изучении низкоэнергетической физики.

3) Обобщенная $SU(4) \times SU(4)$ модель при введении массовых членов, нарушающих киральную группу, позволяет с единой точки зрения взглянуть на роль угла Кабиббо в описании взаимодействия адронов. Помимо правильной структуры токов, участвующих в слабых взаимодействиях адронов, угол Кабиббо становится ответственным за расщепление масс в изомультиплетах адронов группы $SU(4)$ и за возникновение пиконной массы (нарушение группы $SU(2) \times SU(2)$ и $SU(2)$). Это расщепление оказывается не электромагнитного происхождения, а учет радиационных поправок дает лишь более слабые добавочные члены к массам заряженных адронов.

Литература

1. F. Gürsey. *Nuovo Cim.*, **16**, 230, 1960.
2. M. Gell-Mann, M. Levy. *Nuovo Cim.*, **16**, 703 (1960).
3. С. Адлер, Р. Дашен. Алгебра токов, "Мир", Москва, 1970.

3. С. Трейман, Р. Джекив, Д. Гросс. Лекции по алгебре токов. М., Атомиздат, 1977.
4. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 18, 188 (1967).
5. S.Coleman, J.Wess, B.Zumino. Phys.Rev., 177, 2239 (1969); Callan C.G. et al. Phys.Rev., 177, 2247 (1969).
6. Д.В. Волков, ЭЧАЯ, 4, 3, 1973.
7. М.К. Волков, В.Н. Перлушин. Существование нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов, Москва, Атомиздат, 1978.
8. S.Adler, W.Bardeen. Phys.Rev., 182, 1517, 1969.
9. М.В. Терентьев. УЖН, 112, 37, 1974.
10. M.Gell-Mann, R.J.Oakes, B.Renner. Phys.Rev., 175, 2195 (1968).
11. R.J.Oakes. Phys.Lett., 29B, 683 (1969).
12. М.К. Волков. ЭЧАЯ, 10, 689, 1979.
13. Particle Data Group, Rev.of Mod.Phys., 48, N 2, 1976.
14. H.Braun et al. Nuclear Phys., B89, 210, 1975.
15. L.Roselet et al. Phys.Rev., D12, 574, 1977.
16. М.В. Терентьев, В.В. Соловьев, ЯФ, 16, 153, 1972.
17. A.Stetz et al. Nucl.Phys., B138, 285, 1978.
18. М.К. Волков, Д. Эберт. Препринт ОИЯИ Е2-12255, Дубна, 1979.
19. N.D.Dass. Phys.Rev., D7, 1458, 1973.
20. C.J.Gounaris. Phys.Rev., D2, 2734, 1970.
21. D.Ebert, M.K.Volkov. JINR Prepr. E2-11679, Dubna, 1978; ЯФ, 29, 523, 1979.
22. M.Kobataishi et al. Progr.Theor.Phys., 47, 982, 1972.
23. D.Ebert, M.K.Volkov. JINR E2-11958, Dubna, 1978.
24. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 19, 1264, 1967.
A.Salam. Elementary Particle Physics, ed.by Svartholm, Stockholm, 367, 1968.
25. Z.Maki, T.Maskawa, I.Umemura. Progr.Theor.Phys., 47, 1682 (1972).
A.Ebrahim. Lett. Nuovo Cim., 19, 255 (1977).
26. E.Takasugi, S.Oneda. Phys.Rev.Lett., 17, 1129 (1975).
V.S.Mathur, S.Okubo, S.Borchardt. Phys.Rev., D11, 2572 (1975).
A.Kaxi et al. Lett. Nuovo Cim., 15, 120, 1976.
27. S.L.Glashow, J.Iliioupoulos, L.Maiani. Phys.Rev., D2, 1285 (1970).

28. M.K.Gaillard, E.W.Lee, J.L.Rosner. Rev.Mod.Phys., 47 , 277 (1975).
29. H.Schopper. Erice Lectures, DESY/1977.
30. H.Lehmann. Acta Physica Austriaca, Supplementum XI, 139, 1973.
31. J.L.Kalinovskij. V.M.Pervushin. JINR Prepr.P2-11358, Dubna, 1978; M.Singer. Phys.Rev., D16, 2304 (1977).
32. For linear $SU(4) \times SU(4)$ models see also:
B.Ru. Phys.Rev., D9 , 1825 (1974).
M.Vaughn. Phys.Rev. , D12, 2621 (1976).

ПРОБЛЕМА P- И CP - СОХРАНЕНИЯ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

Н.В.Красников, В.А.Матвеев, А.Н.Тавхелидзе

Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

1. Введение

Как известно, неабелевы калибровочные поля являются основой при построении современных моделей слабых и электромагнитных, а также сильных взаимодействий. Недавно было обнаружено характерное для таких теорий явление туннелирования между векторами состояний с различными значениями топологического заряда. На квазиклассическом языке туннелированию соответствует нетривиальные решения классических уравнений в евклидовом пространстве - времени с конечным действием (инстантоны) $\sim I^{-3}$. Всё это указывает на сложную структуру вакуумного состояния в калибровочных теориях, которая может привести к серьезным физическим следствиям. В частности, учет сложной структуры вакуума в квантовой хромодинамике может привести к нарушению CP-инвариантности в сильных взаимодействиях. Все это ставит перед теорией ряд серьезных проблем, о которых речь пойдет ниже.

2. Структура вакуума в калибровочных теориях

Лагранжиан калибровочного поля $\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad A_\mu = A_\mu^a T^a,$$

в калибровке $A_0^a = 0$ имеет вид

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{2} (\dot{A}_i^a)^2 - \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2$$

и напоминает обычный лагранжиан классической механики, если отождествить $\frac{1}{2} (\dot{A}_i^a)^2$ с кинетической энергией, а $\frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2$ - с потенциальной энергией системы. В дальнейшем эта аналогия будет весьма полезна. Вакуумные поля - это такие C-числовые значения калибровочного поля A_i^a , для которых тензор напряженности $F_{ij}^a = 0$. Вакуумное поле является "чистой калибровкой" и представимо в виде

$$A_i = u^{-1} \partial_i u,$$

где $U(\vec{x})$ - унитарная матрица. На матрицу $U(\vec{x})$ обычно накладывается условие $U(\vec{x}) \rightarrow 1$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, т.е. рассматриваются поля, убывающие на бесконечности.

Вакуумные поля можно охарактеризовать значением топологического заряда

$$n = \frac{1}{6\pi^2} \int d^3x \operatorname{Tr} \epsilon_{ijk} A_i A_j A_k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots,$$

который характеризует классы эквивалентности вакуумных калибровочных полей относительно непрерывных локальных преобразований.

Подчеркнем, что в теории возмущений все вакуумные состояния $|n\rangle$ эквивалентны и ортогональны.

Из коммутационного соотношения

$$i[H, n] = \dot{n}$$

следует, что, вообще говоря, могут быть переходы между различными состояниями, т.е. $\langle n | \dot{m} \rangle \neq 0$. В квазиклассическом приближении переходам между состояниями $\langle n_{out} | m_{in} \rangle$ соответствуют инстантонные решения.

Инстантоны характеризуются топологическим числом

$$q = \int d^4x \partial_\mu K_\mu = \frac{2}{32\pi^2} \int d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}, \quad \bar{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho},$$

$$K_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{Tr} \left\{ A_\nu \partial_\lambda A_\rho + \frac{2}{3} g^2 A_\nu A_\lambda A_\rho \right\}.$$

Наличие переходов $n \rightleftharpoons m$ при $n \neq m$ указывает на то, что истинный вакуум в калибровочных теориях может обладать сложной структурой и является некоторой линейной комбинацией векторов $|n\rangle$.

Рассмотрим калибровочные преобразования вида

$$g(\vec{x}) = \frac{\vec{x}^2 - 1}{\vec{x}^2 + 1} - \frac{2i\vec{x}}{\vec{x}^2 + 1}$$

(здесь для простоты мы рассматриваем калибровочное поле $SU(2)$). Этому преобразованию g соответствует преобразование $T(g)$, действующее в пространстве состояний со свойствами

$$T^\dagger T = 1, \quad T n T^\dagger = n + 1, \quad [T, H] = 0.$$

Из требования инвариантности вакуумного состояния относительно преобразования T , т.е.

$$T|\theta\rangle = e^{i\theta}|\theta\rangle, \quad H|\theta\rangle = E_\theta|\theta\rangle,$$

получаем, что $|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{in\theta} |n\rangle,$

т.е. вакуум характеризуется числом $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

При P- и CP-преобразованиях $P|n\rangle = |-n\rangle$,
 $CP|n\rangle = |-n\rangle$, т.е. $P|\theta\rangle = |-\theta\rangle$.

Таким образом, вакуум $|\theta\rangle$ при $\theta \neq 0$ не является инвариантным относительно отражения пространства. На языке континуального интеграла матричные элементы переходов в θ -вакууме записываются в виде

$$\langle \theta | F | \theta \rangle = \int_{\varphi=-\infty}^{\varphi=+\infty} e^{i\theta\varphi} \int F e^{-S(A)} (DA)_{\varphi} =$$

$$\int dA e^{-S_{\text{eff}}(A)} F, \quad S_{\text{eff}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}, \quad \mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \theta \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} \bar{F} F_{\mu\nu}.$$

Легко видеть, что последний член в выражении для \mathcal{L}_{eff} явным образом CP-неинвариантен. Энергия вакуума определяется выражением

$$\exp\{-\mathcal{R} E_{\theta}\} = \int dA e^{-S_{\text{eff}}} / \int dA e^{-S}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial E_{\theta}}{\partial \theta} = \langle \theta | \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} | \theta \rangle$$

есть мера CP-неинвариантности вакуума.

Из явного вида для E_{θ} следует, что

$$E_{\theta+2\pi k} = E_{\theta}, \quad E_{-\theta} = E_{\theta},$$

т.е. $E_{\theta} = E_0 + E_2 \cos \theta + E_4 \cos 2\theta + \dots$.

В приближении "разреженного инстантонного газа"

$$E(\theta) = A(1 - \cos \theta).$$

Как хорошо известно, сильные взаимодействия с высокой степенью точности являются P-и CP-инвариантными. Поэтому естественно встает вопрос, почему параметр θ в квантовой хромодинамике равен нулю или по крайней мере очень мал? Ведь хотя состояние с $\theta = 0$ и обладает наименьшей энергией, однако никакое калибровочно-инвариантное взаимодействие не может привести к переходам между состояниями с различными значениями θ , которые, таким образом, оказываются в значительной степени равновероятными.

Вообще говоря, дело осложняется еще тем, что в современных

объединенных моделях слабых и электромагнитных взаимодействий условие $\theta = 0$, наложенное на уровне "сильных взаимодействий", не инвариантно относительно включения слабых взаимодействий, что приводит к перенормировке параметра θ .

Лагранжиан квантовой хромодинамики, описывающий кварковые поля

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi} [i\hat{D} - \hat{M}] \psi,$$

где $\hat{D} = \hat{\partial} - \frac{ig}{2} \lambda^a \hat{A}_a$,

а $\hat{M} = M_0 + \gamma_5 M_2$ - массовая матрица, путем независимых унитарных преобразований

$$\psi_L \rightarrow U_L \psi_L, \quad \psi_R \rightarrow U_R \psi_R$$

можно привести к диагональному виду

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi} [i\hat{D} - \hat{M}_q] \psi, \quad M_q = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}.$$

Однако такие преобразования обладают аномалиями, что приводит к перенормировке параметра θ :

$$\theta \rightarrow \theta + \delta\theta, \quad \delta\theta = \arg [\text{Det } U_L^\dagger U_R].$$

Добавим к параметру θ в выражении для \mathcal{L}_{eff} источник $J(x)$ и совершим преобразование Лежандра по отношению к источнику J :

$$\Gamma(\varphi) = E(\theta + J) - \int J \varphi d^4x, \quad \varphi = \frac{\delta E(\theta + J)}{\delta J}.$$

Уравнение для определения равновесного φ_0

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi} = 0.$$

Условие устойчивости системы в точке равновесия имеет вид

$$\frac{\delta^2 \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi^2} \Big|_{\varphi = \varphi_0} \gg 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} \gg 0.$$

Отсюда мы получаем, что в приближении разреженного газа ($E(\theta) = A(1 - \cos\theta)$) условие на параметр θ имеет вид $\cos\theta \geq 0$. При $\cos\theta < 0$ вакуум будет нестабильным.

Рассмотрим вопрос, какие ограничения на θ накладывает эксперимент? Из экспериментов по поиску дипольного момента нейтрона известно, что

$$d_n \leq 10^{-24} \text{ е.с.м.}$$

В КХД дипольный момент нейтрона при $\theta \neq 0$ очень грубо можно оце-

нить, как $d_n \sim \frac{e}{2M_{eff}} \theta$, $M_{eff} \sim 1$ ГэВ.

Отсюда получаем, что $\theta \leq 10^{-10}$.

При учете легких кварков u и d возникает дополнительный фактор подавления

$$\sim \left(\frac{m_u}{M_{eff}}\right) \left(\frac{m_d}{M_{eff}}\right)$$

и оценка на θ понижается: $\theta \leq 10^{-6}$.

3. Возможные пути к решению проблемы

а) Киральная $U(1)$ - симметрия^{4/5}.

Пусть масса одного из кварков (масса u -кварка) равна нулю. Тогда классический лагранжиан КХД инвариантен относительно преобразований $u \rightarrow \exp(i\theta \gamma_5)u$; инвариантность относительно этих преобразований разрушается при учете инстантонных эффектов, ток, соответствующий этому преобразованию, обладает аномалией

$$\partial_\mu J_\mu^{u5} = 2 \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}. \quad (I)$$

В случае безмассовых фермионов, оператор \bar{D} в поле инстантона обладает нулевыми нормируемыми модами, что приводит к отсутствию туннелирования $\langle n|m \rangle = 0$, $n \neq m$, т.е. физика не зависит от параметра θ . Отсутствие CP-нарушения в случае безмассового фермиона легко увидеть также исходя из уравнения (I). Действительно, в силу трансляционной инвариантности

$$\langle \theta | J_\mu^{u5} | \theta \rangle = 0.$$

Отсюда имеем

$$\partial_\mu \langle \theta | J_\mu^{u5} | \theta \rangle = 0 = \langle \theta | \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} | \theta \rangle.$$

Рассмотрим теперь вопрос, насколько гипотеза $m_u = 0$ согласуется с феноменологией? В схеме с киральной симметрией $SU_L(3) \times SU_R(3)$ нарушение этой симметрии обусловлено наличием в гамильтониане массового члена $m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s$. Используя теорию возмущений I-го порядка и исходя из известных масс адронов, можно найти, что массы кварков равны

$$m_u = 4,5 \text{ МэВ}, \quad m_d = 7,5 \text{ МэВ}, \quad m_s = 150 \text{ МэВ}.$$

Безмассовый u -кварк приводит в такой схеме к сильному нарушению $SU(3)$ -симметрии^{5/7}.

Здесь, правда, следует упомянуть, что инстантонные эффекты могли бы привести к появлению у первоначально безмассового u -

кварка массы. (Инстантоны дают вклад в двухточку $\langle U \bar{U} \rangle$).

б) Модели с аксионом θ .

Эта возможность скомпенсировать параметр θ также поkommtся на наличии в лагранжиане некоторой киральной группы симметрии, обладающей на квантовом уровне аномалией. Вакуумные средние не инвариантны по отношению к этой группе симметрии, что приводит к возможности появления псевдоголдстоуновского бозона - легкой псевдоскалярной частицы "аксиона".

Рассмотрим сначала простую (нереалистическую) модель с одним типом кварков, причем массы кварков приобретаются вследствие взаимодействия спинорного поля со скалярным полем, вакуумное среднее которого отлично от нуля.

Лагранжиан модели

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{кв}} + \int \partial_\mu \psi|^2 + U(|\psi|^2) + G \bar{\psi} \psi \frac{1+i\gamma_5}{2} \psi + \text{H.C.} \quad (2)$$

Лагранжиан (2) инвариантен относительно преобразований

$$\psi \rightarrow \exp(i\gamma_5 \delta) \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp(-2i\delta) \bar{\psi}, \quad (3)$$

которые порождают сохраняющийся на классическом уровне ток

$$J_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi + 2i \psi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi. \quad (4)$$

При учете квантовых поправок ток (4) аномален, т.е.

$$\partial_\mu J_\mu^5 = \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}. \quad (5)$$

Под действием преобразований (3) изменение лагранжиана

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = \delta \int d^4x \partial_\mu J_\mu^5 = 2\delta \int d^4x \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu},$$

поэтому путем переопределения фаз полей ψ и $\bar{\psi}$ мы всегда в лагранжиане можем добиться исчезновения члена $\sim FF$, т.е. свести лагранжиан к явно CP-инвариантному виду. Нетрудно видеть, что вакуумные средние $\langle \psi \rangle$ не инвариантны по отношению к преобразованию (3). Будь симметрия (3) точная, то по теореме Голдстоуна мы имели бы безмассовые частицы в теории, однако при учете инстантонов симметрия (3) больше не является точной и в теории появляется легкая псевдоскалярная частица (аксион), причем масса аксиона

$$m_H^2 \approx \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \theta | \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} | \theta \rangle \frac{1}{|\langle \psi \rangle|^2}.$$

Более реалистичная модель такого типа основана на калибровочной группе $SU(2) \otimes U(1)$ и содержит 2 изодублета полей Хиггса:

$$\varphi_1 = (\varphi_1^0, \varphi_1^-), \quad \varphi_2 = (\varphi_2^+, \varphi_2^0),$$

и фермионные изомультиплеты:

$$\psi_L = \left(\begin{matrix} u \\ d \end{matrix} \right)_L, \left(\begin{matrix} s \\ c \end{matrix} \right)_L, \dots, \rho_R = \left(\begin{matrix} u \\ c \\ \dots \end{matrix} \right)_R, \ell_L = \left(\begin{matrix} \nu \\ e \end{matrix} \right)_L, \left(\begin{matrix} \nu \\ \mu \\ \dots \end{matrix} \right)_L, e_R = \left(\begin{matrix} e \\ \mu \\ \dots \end{matrix} \right)_R$$

Члены, описывающие взаимодействия фермионных и скалярных полей, имеют вид

$$\sum_{i,j} \left(\Gamma_{ij}^1 \bar{\psi}_{Li} \varphi_1 \rho_{Rj} + \Gamma_{ij}^2 \bar{\psi}_{Li} \varphi_2 \rho_{Rj} + \Gamma_{ij}^3 \bar{\ell}_{Li} \varphi_2 e_{Ri} \right) + \text{H.C.}$$

Вакуумные средние $\langle \varphi_1^0 \rangle \neq 0$, $\langle \varphi_2^0 \rangle \neq 0$,

$$\chi \equiv \text{tg} \alpha \equiv \frac{\langle \varphi_2^0 \rangle}{\langle \varphi_1^0 \rangle}.$$

Лагранжиан взаимодействия скалярных полей выбирается инвариантным относительно преобразований

$$\varphi_1 \rightarrow e^{i\alpha} \varphi_1,$$

$$\varphi_2 \rightarrow e^{i\beta} \varphi_2.$$

Нетрудно видеть, что лагранжиан модели инвариантен относительно киральных преобразований

$$\begin{aligned} \rho_R &\rightarrow e^{i\alpha} \rho_R, \quad \varphi_1 \rightarrow e^{-i\alpha} \varphi_1, \quad \varphi_2 \rightarrow e^{i\alpha} \varphi_2, \\ n_R &\rightarrow e^{-i\alpha} n_R, \quad e_R \rightarrow e^{-i\alpha} e_R. \end{aligned} \quad (6)$$

Этим преобразованиям соответствует ток

$$J_\mu^5 = 2fi \partial_\mu H + \text{tg} \alpha \sum_{\alpha=2/3} \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q + \quad (7)$$

$$+ \text{ctg} \alpha \sum_{\alpha=-2/3} \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q + \text{ctg} \alpha \sum_{\alpha=-1} \bar{e} \gamma_\mu \gamma_5 e,$$

причем

$$\partial_\mu J_\mu^5 = \frac{2N}{\sin 2\alpha} \left(\frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} \right), \quad (8)$$

N - число типов кварков.

Так же, как и в предыдущей модели, наличие киральной группы симметрии (3) приводит к тому, что мы всегда можем путем переопределения фаз избавиться от члена $\sim F\bar{F}$ в лагранжиане.

Массу аксиона можно приближенно записать, как

$$m_a^2 = \left(\frac{2N}{3 \sin 2\alpha} \right)^2 \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U_{\text{eff}} = \left(\frac{2N}{3 \sin 2\alpha} \right)^2 \sqrt{2} G A ,$$

где A в приближении разреженного инстантонного газа определяется из выражения $U_{\text{eff}} = A(1 - \cos \theta)$.

Оценки, использующие алгебру токов⁷, приводят к $A \sim m_{\pi}^2 f_{\pi}^2$, и тем самым масса аксиона

$$m_a \sim \frac{N}{\sin 2\alpha} 25 \text{ кэВ} .$$

Если использовать оценки для A , взятые из модели мешков, в которой

$$A \sim (147 \text{ МэВ})^2 ,$$

то

$$m_a \sim \frac{N}{3 \sin 2\alpha} 80 \text{ кэВ} .$$

Основными модами распада аксиона являются при $m_a < 2m_e$

канал $a \rightarrow 2\gamma$,

$$\Gamma(a \rightarrow 2\gamma) \sim (N t g \alpha)^2 \left(\frac{m_a}{100 \text{ кэВ}} \right)^5 c^{-1} ,$$

и распад $a \rightarrow e^+e^-$ при $m_a > 2m_e$, причем

$$\Gamma(a \rightarrow e^+e^-) \sim (N c t g \alpha)^2 5 \cdot 10^7 \left(\frac{m_a}{100 \text{ кэВ}} \right) c^{-1} ,$$

Из анализа реакторных данных⁸ следует, что масса аксиона $m_a < 140 \text{ кэВ}$. Астрофизические же ограничения⁹ на массу аксиона приводят к $m_a > 200 \text{ кэВ}$. Анализ реакции $pp \rightarrow a X$, $ap \rightarrow X$ ¹⁰ ("beam-dump experiment") также указывает на отсутствие в природе легкого аксиона. Таким образом, существование легкого аксиона запрещено существующими экспериментальными данными.

4. Другие возможности объяснения CP-инвариантности в КХД

а) Для того, чтобы избавиться от голдстоуновской степени свободы, связанной с аксионом, т.е. с наличием киральной группы симметрии, можно ввести калибровочное поле, соответствующее киральной $U(1)$ - группе симметрии. Новое векторное поле становится массивным, и голдстоуновская степень свободы (аксион) пропадает (механизм Хиггса). Однако при таком подходе сразу возникает проблема: вследствие треугольных аномалий киральный ток не

сохраняется, поэтому введение нового калибровочного поля приводит к отсутствию перенормируемости теории. Перенормируемость теории можно восстановить, если вводить добавочные тяжелые кварки Π .
Идя по такому пути, можно существенно увеличить массу аксиона. Однако с эстетической точки зрения подобная модель выглядит весьма искусственной, кроме того, она испытывает трудности при объяснении нейтральных токов.

б) В работах [2] была предложена модель, основанная на право-лево-симметричной калибровочной группе $SU_L(2) \otimes SU(2) \otimes U(1) \otimes U(1)$, которая, как считают авторы, естественным образом объясняет малость параметра θ . В этой модели $L-R$ асимметрия возникает в результате спонтанного нарушения симметрии. $L-R$ симметрия до спонтанного нарушения фиксирует $\theta = 0$. Массовая матрица M в древесном и однопетлевом приближении удовлетворяет условию $M = M^\dagger$, т.е. перенормировка параметра θ появляется только в двухпетлевом приближении, что обеспечивает малость перенормированного параметра θ_{ren} .

5. Конфаймент и структура θ -вакуума, динамическое подавление туннелирования

Как хорошо известно, в двумерных моделях с абелевой группой симметрии $U(1)$ (двумерная квантовая электродинамика, модель Хиггса) также возникает сложная структура вакуума. В таких моделях критерий Вилсона для конфаймента классических внешних зарядов

$$\langle \exp i q \int A_\mu(x) dx^\mu \rangle = \exp \{ -E(R)T \}, \quad T \gg R,$$

в силу равенства

$$\oint A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2} \int \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^2x$$

тесно связан с энергией θ -вакуума. А именно,

$$E(R) = R \left[E_\theta - E_\theta + \frac{1}{2} 2\pi \right].$$

Отсюда видно, что для внешних дробных зарядов модель обладает свойством конфаймента, а для целых зарядов конфаймент отсутствует. Здесь стоит отметить, что в случае $E_\theta = 0$ (модель Швингера) классические внешние заряды могут находиться в свободном состоянии, конфаймента нет. Поэтому можно сказать, что в двумерии требования конфаймента для классических зарядов и естественности сохранения CP-инвариантности являются взаимно исключающими.

Рассмотрим теперь, как обстоят дела с проблемой CP-сохранения

в 3- мерном пространстве. В работе / I3 / было показано, что в $SU(2)$ - модели Джорджи-Глэшу есть конформант. Действие в этой модели $S = \int d^3x \left[\frac{1}{e^2} \vec{F}_{\mu\nu}^2 + (\nabla_\mu \vec{\varphi})^2 + \lambda (\vec{\varphi}^2 - \eta^2)^2 \right]$,

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu, \quad \nabla_\mu \vec{\varphi} = \partial_\mu \vec{\varphi} + \vec{A}_\mu \times \vec{\varphi}.$$

"Инстантонами" в данной модели являются монополи, которые взаимодействуют далекодействующим образом. Действие для конфигурации монополя - антимонополяного типа с учетом взаимодействия между монополями

$$S = \frac{m_w}{e^2} \varepsilon \left(\frac{\lambda}{e^2} \right) \sum_a q_a^2 + \frac{\pi}{2e^2} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|}.$$

В этой модели топологический заряд

$$Q = \int \partial_\mu N_\mu d^3x, \quad N_\mu(x) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \vec{\varphi} \vec{F}_{\nu\lambda} \frac{1}{m_w},$$

$$m_w = e \langle \varphi \rangle.$$

Если мы определим в данном случае обобщенное действие

$$S_\theta = S + i\theta \int Q(x) d^3x$$

и посмотрим, какова зависимость от θ , то, как следует из результатов работы / I3 /, вследствие учета взаимодействия между монополями производящий функционал

$$Z = \int \exp [-S_\theta] \mathcal{D}A \mathcal{D}\vec{\varphi}$$

не зависит от θ , т.е. проблемы с CP-нарушением в этой модели не возникает при учете монополь-монопольного взаимодействия. Монополь - антимонопольная плазма в целом является электронейтральной, что приводит к отсутствию зависимости от θ для физических величин. Не исключено, что подобный механизм может работать и в четырехмерии.

6. Заключение

Подводя итоги, следует сказать, что проблема CP и P-сохранения в квантовой хромодинамике еще не нашла, на наш взгляд, однозначного убедительного решения. Отметим, что, перечисляя пути решения этой проблемы, нельзя забывать и о том, что статус самого

θ - вакуума в КХД не является совершенно ясным. Не исключено, что учет конфигураций полей, ответственных за "невыветание" кварков, приводит к разрушению той простой структуры, которая описывается θ - вакуумом.

Литература

1. A.A.Belavin et al. Phys.Lett., 59B,85 (1975).
2. G.'t.Hooft . Phys.Rev.Lett., 37, 8 (1976).
3. C.G.Callan et al. Phys.Lett., 63B, 334 (1976).
4. K.D.Peccei and H.R.Quinn . Phys.Rev.Lett., 38,1440 (1977).
5. A.Zapeda . Phys.Rev.Lett., 41, 139 (1978).
6. F.Wilczek. Phys.Rev.Lett., 40, 279 (1978); S.Weinberg ibid, 40, 223 (1978).
7. W.Bardeen, S.Tye . Phys.Lett., 74B, 229 (1978).
8. G.Michelmacher and B.Pontecorvo . Dubna preprint E1-11318 (1978).
9. М.И.Высоцкий и др. Письма в ЖЭТФ, 27, 533 (1978).
10. P.Alibran et al. Phys.Lett., 74B, 134 (1978).
11. T.C.Yang .Phys.Rev.Lett. 41, 526 (1978).
12. P.N.Mohapatra and G.Senjanovic. Phys.Lett., 79B, 283 (1978).
13. A.M.Polyakov.Nucl. Phys. B120, 429 (1977).

СУПЕРГРАВИТАЦИЯ, ГЕОМЕТРИЯ И АКСИАЛЬНОЕ СУПЕРПОЛЕ

В.И. Огневский, Э. Сокачев

Объединённый институт ядерных исследований, Дубна

1. Введение

Супергравитация является теорией, основанной на объединении групп общекоординатных и суперсимметричных преобразований. Попытки адекватной группы супергравитации ведутся давно.

Вдохновляющие результаты были получены в т.н. "практическом", или "компонентном" подходе. В нем группа супергравитации была реализована как группа преобразований набора обычных полей. Вид этих преобразований и инвариантного действия были мастерски угаданы. Несколько авторам^{1/} удалось добавить к гравитационному супермультиплету $(2, 3/2)$ минимальную совокупность вспомогательных полей и замкнуть алгебру преобразований^{x)}. Однако несуперковариантные обозначения и отсутствие ясной геометрической картины затрудняют дальнейший прогресс в этом подходе.

В связи с этим суперполевым подходом остается желательным. Суперполевыми обозначения явно суперковариантны, и все вспомогательные поля включаются автоматически. Это дает возможность искать компактную формулировку супергравитации с прозрачной геометрической структурой.

x) Этот набор полей был подсказан полевым содержанием аксиального суперполя, предложенного нами ранее^{2/} в качестве простейшего гравитационного суперполя.

Уже было предложено большое число суперполюсных подходов (см. /3-8/ и указанные там ссылки). В них в той или иной форме используется формализм дифференциальной геометрии в суперпространстве $\{(x^m, \theta^A, \bar{\theta}^A)\}^X$. Их исходная группа очень широка - это об-щекординатная группа в суперпространстве вместе с локальной реперной группой Лоренца. Основные объекты - супертетрады и связности - суть слишком сложные суперполя. Они содержат спины $3,5/2$ и многие другие. Эти многочисленные лишние степени свободы исключаются путем наложения определенных условий на суперкривые и силь-ного закрепления калибровки. Все это показывает, что обсуждаемые подходы построены на основе, гораздо более широкой, чем нужно. Наиболее адекватная формулировка супергравитации должна быть как суперковариантной (т.е. выраженной в терминах суперполей), так и минимальной (т.е. связанной с минимальными суперполями и группой).

Отправляясь от этих основных требований, в 1976 году /2/ (на предыдущей конференции в Алуште) мы предложили наиболее экономный подход, основанный на аксиальном суперполе $\mathcal{H}^m(x, \theta, \bar{\theta})$, генериру-емом супертоком. Используя эту идею, мы впервые нанли замкнутую алгебру преобразований кирального скалярного суперполя. В 1978 году /9/ мы поняли, что имеем дело просто с об-щекординатными преоб-разованиями в двух сопряженных киральных суперпространствах. Мы отождествили гравитационное суперполе \mathcal{H}^m с мнимой частью комплексной пространственно-временной координаты, считая ее функ-цией остальных координат. Так была найдена чрезвычайно простая и ясная картина группы супергравитации.

В настоящее время мы знаем, как выразить все фундаментальные объекты (супертетрады, связности) в терминах одного аксиального суперполя \mathcal{H}^m . Таким образом, мы в состоянии записать ковариант-ные производные и инвариантные действия. Настоящий доклад посвя-щен краткому изложению этих результатов.

Мы хотели бы отметить интересную работу Зигеля и Гейтса (см. /10/ и ссылки в ней). Они предложили формулировку супергравита-ции с векторным и спинорным суперполями (последнее, по-видимому, несущественно). Хотя их подход менее геометричен, имеются сходст-ва с нашим и окончательные результаты эквивалентны.

X) Здесь мы используем в основном обозначения работы /3/.

Стоит заметить, что киральные координаты появились в ^{6/}, но нам кажется, что авторы недооценили их значение.

II. Теория супергравитации

I. Известно две причины описывать гравитационный супермультиплет $(2, 3/2)$ аксиальным суперполем $\mathcal{H}^m(x, \theta, \bar{\theta})$. Во-первых, это простейшее суперполе, содержащее спин 2. Вторая причина более фундаментальна. Хорошо известно, что гравитация Эйнштейна можно интерпретировать как теория симметричного тензорного поля, генерируемого тензором энергии-импульса. В суперсимметричном тензор энергии-импульса вместе с нетеровским током суперсимметрии объединяются в аксиальное суперполе, названное супертоком ^{x)}. По аналогии с эйнштейновским случаем мы постулировали ^{12/}, что супергравитация есть теория аксиального суперполя, генерируемого суперполем.

Следуя этой идее, мы вывели уравнение движения для \mathcal{H}^m в низшем порядке по константе связи \mathcal{G} , откуда было получено калибровочное преобразование \mathcal{H}^m в низшем порядке (аддитивное). Далее, изучая линейризованное взаимодействие \mathcal{H}^m с материальными киральными суперполями φ, φ^+ через их суперток, мы нашли законы преобразования для φ и φ^+ . Несмотря на то, что они были выведены в низшем порядке, оказалось, что алгебра этих преобразований замкнулась без поправок высшего порядка ^{12/}.

2. Чтобы понять этот замечательный факт, напомним, что киральные суперполя описываются наиболее естественно в левых и правых киральных базисах ^{13/} в суперпространстве:

$$\text{ЛБ: } \varphi = \varphi(x^L, \theta); \quad x^{mL} = x^m + i \theta \sigma^m \bar{\theta}; \quad (1)$$

$$\text{ПБ: } \varphi^+ = \varphi^+(x^R, \bar{\theta}); \quad x^{mR} = x^m - i \theta \sigma^m \bar{\theta}.$$

Очевидно, новые переменные x^{mL}, x^{mR} комплексные. Обобщая, мы выведем два "киральных" суперпространства: левое $\{(x^{mL}, \theta^m)\}$ и правое $\{(x^{mR}, \bar{\theta}^m)\}$. Здесь x^{mL} и x^{mR} — две комплексно-соп-

x) Концепция супертока была предложена Феррарой и Зумино ^{11/}. Мы нашли алгоритм нетеровского типа для вывода супертока, чем доказали его существование в общем случае ^{12/}.

пространственно - временные координаты. В такой записи преобразования киральных суперполей ^{/12/} соответствуют сдвигам их аргументов ^{/9/}:

$$\begin{array}{ll} \text{левое суперпространство} & \text{правое суперпространство} \\ \delta x^{mL} = \lambda^m(x^{nL}, \theta^\nu), & \delta x^{mR} = \bar{\lambda}^m(x^{nR}, \bar{\theta}^\nu), \\ \delta \theta^\mu = \lambda^\mu(x^{nL}, \theta^\nu), & \delta \bar{\theta}^{\dot{\mu}} = \bar{\lambda}^{\dot{\mu}}(x^{nR}, \bar{\theta}^\nu), \end{array} \quad (2)$$

где $\lambda^m(x^L, \theta)$ и $\lambda^\mu(x^L, \theta)$ и их сопряженные $\bar{\lambda}^m$ и $\bar{\lambda}^{\dot{\mu}}$ суть инфинитезимальные векторы и спиноры киральных суперфункций, ограниченные условиями

$$\frac{\partial}{\partial x^{mL}} \lambda^m - \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} \lambda^\mu \equiv \partial_m^\mu \lambda^m(-1)^m = 0; \quad \partial_m^{\dot{\mu}} \bar{\lambda}^{\dot{\mu}}(-1)^m = 0. \quad (3)$$

Ясно, что преобразования (2) образуют группы общих преобразований координат в левом и правом суперпространствах. Ограничения (3) означают, что групповые объемы сохранятся, т.е. безразличны (супердетерминанты) ^{/14/} преобразований (2) равны единице. Это имеет место в случае супергравитации Эйнштейна, которую мы рассматриваем здесь. Группы (2) без условия сохранения объема (3) соответствуют супергравитации Вейля ^{/15/}.

3. Итак, группа супергравитации есть прямое произведение двух обещкоординатных групп в двух сопряженных киральных суперпространствах. Однако нам необходима вещественная пространственно - временная координата x^m и вещественные суперполя, а не только киральные. Для этой цели сделаем замену переменных

$$x^m = \frac{1}{2}(x^{mL} + x^{mR}), \quad \mathcal{H}^m = \frac{1}{2i}(x^{mL} - x^{mR}), \quad \theta^\mu = \theta^\mu, \quad \bar{\theta}^{\dot{\mu}} = \bar{\theta}^{\dot{\mu}}. \quad (4)$$

Преобразования новых переменных получаются непосредственно из (2) и образуют ту же самую группу. Теперь можно отождествить вещественную часть x^m с вещественной пространственно-временной координатой и определить новое, вещественное суперпространство $\{x^m, \theta^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\mu}}\}$ (подпространство комплексного $\{x^{mL}, x^{mR}, \theta^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\mu}}\}$). Но что делать с оставшейся переменной, мнимой частью \mathcal{H}^m ? Мы не нуждаемся в еще одной независимой физической координате, поэтому будем считать \mathcal{H}^m функцией других переменных

$$\mathcal{H}^m = \mathcal{H}^m(x^n, \theta^\nu, \bar{\theta}^{\nu}). \quad (5)$$

Это означает, что большое комплексное суперпространство сведено к меньшему вещественному путем задания в нем произвольной суперповерхности. Теперь преобразование (2) можно переписать в виде

$$x'^m = x^m + \frac{1}{2} \lambda^m [x^n + i \mathcal{H}^n(x, \theta, \bar{\theta}), \theta^\nu] + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^m [x^n - i \mathcal{H}^n(x, \theta, \bar{\theta}), \bar{\theta}^{\nu}]; \quad (6.a)$$

$$\theta'^\mu = \theta^\mu + \lambda^\mu [x^n + i \mathcal{H}^n(x, \theta, \bar{\theta}), \theta^\nu]; \quad (6.б)$$

$$\bar{\theta}'^{\mu} = \bar{\theta}^{\mu} + \bar{\lambda}^{\mu} [x^n - i \mathcal{H}^n(x, \theta, \bar{\theta}), \bar{\theta}^{\nu}]; \quad (6.в)$$

$$\mathcal{H}'^m(x', \theta', \bar{\theta}') = \mathcal{H}^m(x, \theta, \bar{\theta}) - \frac{1}{2} \lambda^m [x^n + i \mathcal{H}^n(x, \theta, \bar{\theta}), \theta^\nu] + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^m [x^n - i \mathcal{H}^n(x, \theta, \bar{\theta}), \bar{\theta}^{\nu}]. \quad (6.г)$$

Геометрическая картина вполне ясна: когда точки суперповерхности сдвигаются по групповому закону (2), сама суперповерхность деформируется так, чтобы новые точки лежали на новой суперповерхности. Групповой характер преобразований, несомненно, сохраняется. Этот прием позволяет нам превратить одну из координат комплексного суперпространства в суперполе в вещественном суперпространстве. Как мы убедимся в дальнейшем, это суперполе определяет геометрию в вещественном суперпространстве.

Теперь ясно, как определять вещественные (общие) скалярные суперполя. Это объекты, преобразующиеся по закону

$$\varphi'(x', \theta', \bar{\theta}') = \varphi(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (7)$$

Далее, киральные суперполя (I), которые зависят от x^L , θ или от x^R , $\bar{\theta}$ в киральных суперпространствах, выделяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi^L(x, \theta, \bar{\theta}) &= \varphi(x^m + i \mathcal{H}^m(x, \theta, \bar{\theta}), \theta^\mu), \\ \varphi^R(x, \theta, \bar{\theta}) &= \varphi(x^m - i \mathcal{H}^m(x, \theta, \bar{\theta}), \bar{\theta}^\mu). \end{aligned} \quad (8)$$

Суперполя с внешними индексами будут определены в третьем разделе.

4. Чтобы установить физический смысл преобразований (6), следует выяснить, как они реализуются на полевых компонентах суперполя \mathcal{H}^m . Только после такого рассмотрения можно утверждать, что группа (6) соответствует супергравитации. Это важный, но преимущественно технический вопрос. Мы не будем приводить здесь каких-либо деталей. Отметим только, что для устранения неопределенности закона (6) необходимо закрепить частично калибровку так, чтобы несколько неравных компонент \mathcal{H}^m обратились в нуль. Случай конформной супергравитации уже был рассмотрен в $\sqrt{15}$, а эйнштейновский случай будет описан в последующей публикации. Подчеркнем, что окончательные преобразования компонент \mathcal{H}^m после закрепления калибровки и после подходящего переопределения полей и параметров совпадают с преобразованиями, угаданными в $\sqrt{14}$. Они сводятся к общекоординатным, локально-лоренцевым и локально-суперсимметричным преобразованиям.

III. Супертетрады, связности и инвариантное действие

В этом разделе мы выразим все фундаментальные геометрические объекты в терминах гравитационного суперполя \mathcal{H}^m . Сначала будут построены спинорные ковариантные производные скалярных суперполей. Потом мы определим суперполя с внешними лоренцевыми индексами и их спинорные ковариантные производные (тем самым вводятся связности). Векторная ковариантная производная будет задана антикоммутатором двух спинорных. Из этих ковариантных производных будут выведены выражения для супертетрад. Затем мы введем очень полезные понятия левых и правых супертетрад. С их помощью будет закончен вывод выражений для супертетрад. Наконец, мы приведем правила для построения инвариантного действия.

I. Начнем со спинорных производных.

Введем левый базис в физическое суперпространство. Это означает, что переменные x^m , θ^m , $\bar{\theta}^{\dot{m}}$ заменяются на $x^{m\dot{m}} = x^m + i\mathcal{H}^m$, $\theta^{\dot{m}}$, $\bar{\theta}^{\dot{m}}$. Теперь рассмотрим суперполе $\varphi(x^{\dot{m}}, \theta, \bar{\theta})$ и его производную $\partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}\varphi$. При инфинитезимальных преобразованиях (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}\varphi'(x^{\dot{m}}, \theta', \bar{\theta}') &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}\varphi(x^{\dot{m}}, \theta, \bar{\theta}) = \\ &= \frac{\partial x^{m\dot{m}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}\frac{\partial}{\partial x^{m\dot{m}}}\varphi + \frac{\partial\theta^{\dot{m}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{m}}}\varphi + \frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}\varphi \approx \frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{m}}}\varphi. \quad (9) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что эта производная преобразуется однородно. Возвратимся в симметричный базис $(x^m, \theta^A, \bar{\theta}^A)$, получаем

$$\varphi(x^m + i\mathcal{H}^m(x, \theta, \bar{\theta}), \theta^A, \bar{\theta}^A) = \varphi(x^m, \theta^A, \bar{\theta}^A),$$

$$\bar{\partial}_\mu \varphi = \bar{\partial}_\mu \varphi - i \bar{\partial}_\mu \mathcal{H}^m (1 + i\mathcal{H})_m^{-1 n} \partial_n \varphi \equiv -\bar{\Delta}_\mu \varphi. \quad (10)$$

Здесь использованы обозначения

$$\partial_m = \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad \bar{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^A}, \quad (\mathcal{H})_m^n = \partial_m \mathcal{H}^n.$$

Уравнения (6а)-(6в) приводят к (в левом базисе)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}^A}{\partial \bar{\theta}^A} &= \delta_{\mu}^{\nu} - \bar{\partial}_\mu^R \bar{\lambda}^{\nu} - \frac{\partial x^{mR}}{\partial \bar{\theta}^A} \partial_m^R \bar{\lambda}^{\nu} = \\ &= \delta_{\mu}^{\nu} - \bar{\partial}_\mu^R \bar{\lambda}^{\nu} + 2i \bar{\partial}_\mu \mathcal{H}^m (1 + i\mathcal{H})_m^{-1 n} \partial_n^R \bar{\lambda}^{\nu}, \end{aligned} \quad (11)$$

где ∂_m^R и $\bar{\partial}_\mu^R$ обозначают производные киральной суперфункции по ее киральным аргументам x^{mR} , $\bar{\theta}^A$. В симметричном базисе (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}^A}{\partial \bar{\theta}^A} &= \delta_{\mu}^{\nu} - \bar{\partial}_\mu \bar{\lambda}^{\nu} + i \bar{\partial}_\mu \mathcal{H}^m (1 + i\mathcal{H})_m^{-1 n} \partial_n \bar{\lambda}^{\nu} = \\ &= \delta_{\mu}^{\nu} + \bar{\Delta}_\mu \bar{\lambda}^{\nu}, \end{aligned}$$

так, что новые производные $\bar{\Delta}_\mu \varphi$ (10) преобразуются согласно

$$\delta(\bar{\Delta}_\mu \varphi) \equiv (\bar{\Delta}_\mu \varphi)' - \bar{\Delta}_\mu \varphi = -\bar{\Delta}_\mu \bar{\lambda}^{\nu} \bar{\Delta}_\nu \varphi. \quad (12)$$

Аналогично можно определить производную

$$\Delta_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i \partial_\mu \mathcal{H}^m (1 - i\mathcal{H})_m^{-1 n} \partial_n \varphi \quad (13)$$

с законом преобразования

$$\delta(\Delta_\mu \varphi) = -\Delta_\mu \lambda^{\nu} \Delta_\nu \varphi. \quad (14)$$

Новые производные Δ_μ и $\bar{\Delta}_\mu$ обобщают плоскосуперсимметричные ∂_μ° , $\bar{\partial}_\mu^{\circ}$. В этом можно убедиться, полагая $\mathcal{H}_m^{\circ} = \theta \sigma^m \bar{\theta}$ в (10), (13). Более того, можно показать, что плоские условия киральности $\partial_\mu^{\circ} \varphi^{\circ} = 0$, $\bar{\partial}_\mu^{\circ} \varphi^{\circ} = 0$ заменяются непосредственно

редотвещено на $\Delta_{\mu} \varphi^{\dagger} = 0, \bar{\Delta}_{\mu} \varphi = 0$. Все это указывает на то, что Δ_{μ} и $\bar{\Delta}_{\mu}$ имеют прямое отношение к ковариантным производным в искривленном суперпространстве. Последние получаются путем введения некоторых факторов F, \bar{F} ²¹:

$$\nabla_{\alpha} = F \delta_{\alpha}^{\mu} \Delta_{\mu}, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = \bar{F} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\mu}} \bar{\Delta}_{\dot{\mu}}, \quad (15)$$

для того, чтобы они преобразовались по локально-лоренцеву закону

$$\delta(\nabla_{\alpha} \varphi) = \frac{i}{2} \Omega^{ab} (\sigma_{ab})_{\alpha}{}^{\beta} \nabla_{\beta} \varphi, \quad (16.a)$$

$$\delta(\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \varphi) = \frac{i}{2} \Omega^{ab} (\tilde{\sigma}_{ab})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\nabla}_{\dot{\beta}} \varphi, \quad (16.б)$$

$$\Omega^{ab} = \frac{i}{4} (\Delta \sigma^{ab} \lambda + \bar{\Delta} \tilde{\sigma}^{ab} \bar{\lambda}). \quad (16.в)$$

Для этой цели факторы F и \bar{F} в (15) должны иметь законы преобразования

$$\delta F = -\frac{1}{2} (\Delta \lambda) F, \quad \delta \bar{F} = -\frac{1}{2} (\bar{\Delta} \bar{\lambda}) \bar{F}. \quad (17)$$

Их явный вид будет найден позднее (см. (29)).

2. Преобразования (16) подсказывают закон преобразования для суперполей с произвольными спинорными, векторными, тензорными и т.д.) внешними индексами i :

$$\delta \varphi_i = \Omega^{ab} (L_{ab})_i{}^j \varphi_j \equiv L_i{}^j \varphi_j, \quad (18)$$

где L_{ab} - соответствующий генератор Лоренца. Это определение обобщает плоское (Ω^{ab} в (16.в) в плоском пределе сводится именно к глобальному лоренцеву параметру). Уравнение (18) показывает, что в нашем подходе нет независимых локально-лоренцевых преобразований реперных (внешних) индексов суперполей; они индуцируются координатными преобразованиями (6) суперпространства. В

²¹ В нашем подходе довольно трудно отличить мировой (μ) от лоренцева (α) индекса, поскольку компонента $E_{\alpha}{}^{\mu}$ супертетрады будет пропорциональна $\delta_{\alpha}{}^{\mu}$.

этом заключается одно из главных различий между нашим подходом и подходами Весса и Зумино и других^{/3-8/}. У нас группа супертрансляции реализуется минимально в суперпространстве $\{(x^m, \theta^A, \bar{\theta}^{\dot{A}})\}$, тогда как реализация^{/3-8/} дивейная за счет привлечения реперных степеней свободы. Эта ситуация напоминает общую теорию относительности. Там спиноры реализуются либо минимально в пространстве-времени $\{(x^m)\}$ ^{/16/}, либо дивейно, но с привлечением дополнительной локальной группы Лоренца.

3. Следующий шаг состоит в определении ковариантных спинорных производных суперполя φ_i :

$$\mathcal{D}_\alpha \varphi_i = \nabla_\alpha \varphi_i + \omega_{\alpha i}{}^j \dot{\varphi}_j,$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \varphi_i = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \varphi_i + \bar{\omega}_{\dot{\alpha} i}{}^j \dot{\varphi}_j,$$

$$\omega_{\alpha i}{}^j = \omega_{\alpha ab} (L^{ab})_i{}^j, \quad \bar{\omega}_{\dot{\alpha} i}{}^j = \bar{\omega}_{\dot{\alpha} ab} (L^{ab})_i{}^j. \quad (19)$$

Они преобразуются правильно, если связности ω_α , $\bar{\omega}_{\dot{\alpha}}$ преобразуются по закону

$$\delta \omega_\alpha = L_\alpha{}^\beta \omega_\beta + [L, \omega_\alpha] - \nabla_\alpha L \quad (20)$$

и сопряженному к нему. Эти объекты также будут выражены через \mathcal{H}^m (см. (31)).

В плоской суперсимметрии векторная производная задается антикоммутатором спинорных. Мы перенесем это на неплоский случай и определим векторную ковариантную производную :

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{i}{4} (\tilde{\sigma}_\alpha)^{\dot{\alpha}\alpha} \{ \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}_\alpha \}. \quad (21)$$

В плоском пределе $\mathcal{D}_\alpha^0 = \partial/\partial x^\alpha$.

4. Мы уже готовы ввести супертетрады как коэффициенты в разложении ковариантных производных скалярного суперполя по обычным производным :

$$\mathcal{D}_A \varphi = E_A{}^M \partial_M \varphi. \quad (22)$$

Явный вид $E_A{}^M$ получается из (10), (13), (15), (19), (21):

$$E_a^{\mu} = F \delta_a^{\mu}; E_a^{\dot{\mu}} = 0; E_a^m = i \bar{\nabla}_a \mathcal{H}^m; \quad (23.a)$$

$$E_a^{\dot{\mu}} = 0; E_a^{\mu} = -\bar{F} \delta_a^{\mu}; E_a^m = -i \bar{\nabla}_a \mathcal{H}^m; \quad (23.б)$$

$$E_a^{\mu} = \frac{i}{4} [-(\sigma_a \bar{\nabla})^{\mu} F + (\tilde{\sigma}_a)^{\dot{\mu} \alpha} F \bar{\omega}_{\alpha \mu}^{\dot{\mu}}] \delta_{\dot{\mu}}^{\mu}; \quad (23.в)$$

$$E_a^{\dot{\mu}} = \frac{i}{4} [-(\tilde{\sigma}_a \nabla)^{\dot{\mu}} \bar{F} + (\tilde{\sigma}_a)^{\mu \alpha} \bar{F} \omega_{\alpha \dot{\mu}}^{\mu}] \delta_{\mu}^{\dot{\mu}}; \quad (23.г)$$

$$E_a^m = \frac{i}{4} F \bar{F} (\Delta \sigma_a \bar{\Delta} - \bar{\Delta} \sigma_a \Delta) \mathcal{H}^m + i E_a^{\mu} \Delta_{\mu} \mathcal{H}^m + i E_a^{\dot{\mu}} \bar{\Delta}_{\dot{\mu}} \mathcal{H}^m. \quad (23.д)$$

При выводе (23) использованы тождества

$$\{\Delta_{\mu}, \bar{\Delta}_{\dot{\mu}}\} = -i [\Delta_{\mu}, \bar{\Delta}_{\dot{\mu}}] \mathcal{H}^m \partial_m, \quad (24.a)$$

$$\Delta_{\mu} = \partial_{\mu} + i \Delta_{\mu} \mathcal{H}^m \partial_m, \quad \bar{\Delta}_{\dot{\mu}} = -\bar{\partial}_{\dot{\mu}} - i \bar{\Delta}_{\dot{\mu}} \mathcal{H}^m \partial_m. \quad (24.б)$$

Супертетрады E_A^M преобразуются по закону

$$\delta E_A^{\mu} = L_A^B E_B^{\mu} + E_A^N \partial_N \lambda^{\mu}; \quad \delta E_A^{\dot{\mu}} = L_A^B E_B^{\dot{\mu}} + E_A^N \partial_N \bar{\lambda}^{\dot{\mu}};$$

$$\delta E_A^m = L_A^B E_B^m + E_A^N \partial_N \frac{i}{2} (\lambda^m + \bar{\lambda}^m). \quad (25)$$

5. Исходная структура нашей группы и суперпространства существенно киральна. Эта киральность проявляется еще раз в существовании левых и правых супертетрад. Эти новые объекты $\ell_A^M (A = (\alpha, \dot{\alpha}), M = (m, \dot{m}))$ и $z_A^M (A = (\alpha, \dot{\alpha}), M = (m, \dot{m}))$ преобразуются следующим образом:

$$\delta \ell_A^M = L_A^B \ell_B^M + \ell_A^N \partial_N \lambda^M, \quad (26)$$

$$\delta z_A^M = L_A^B z_B^M + z_A^N \partial_N \bar{\lambda}^M.$$

Явные выражения для ℓ_A^M , z_A^M имеют вид

$$l_a^{\mu} = E_a^{\mu}; l_a^{\nu} = 2E_a^{\nu}; l_a^{\rho} = E_a^{\rho};$$

$$l_a^{\sigma} = -\frac{1}{2} F \bar{F} \hat{l}_a^{\sigma} + 2i E_a^{\mu} \Delta_{\mu} \mathcal{H}^{\sigma}; \quad (27.a)$$

$$z_a^{\mu} = E_a^{\mu}; z_a^{\nu} = 2E_a^{\nu}; z_a^{\rho} = E_a^{\rho};$$

$$z_a^{\sigma} = \frac{1}{2} F \bar{F} \hat{z}_a^{\sigma} + 2i E_a^{\mu} \bar{\Delta}_{\mu} \mathcal{H}^{\sigma}, \quad (27.б)$$

где

$$\hat{l}_a^{\sigma} = \bar{\Delta} \hat{\alpha}_a \Delta \mathcal{H}^{\sigma}, \quad \hat{z}_a^{\sigma} = \Delta \sigma_a \bar{\Delta} \mathcal{H}^{\sigma}. \quad (27.в)$$

6. С помощью l_A^M и z_A^M мы уже можем выразить величины F , \bar{F} , ω_{α} , $\bar{\omega}_{\dot{\alpha}}$ в терминах \mathcal{H}^M .
Рассмотрим березинианы l_A^M и z_A^M :

$$\text{Ber}(l_A^M) = \text{Det}(l_a^{\mu} - l_a^{\nu} l_{\mu}^{-1 \alpha} l_{\alpha}^{\nu}). \text{Det}^{-1}(l_a^{\mu}) =$$

$$-2^{-4} F^2 \bar{F}^2 \text{Det}(\hat{l}_a^{\sigma}), \quad (28.a)$$

$$\text{Ber}(z_A^M) = -2^{-4} \bar{F}^2 F^2 \text{Det}(\hat{z}_a^{\sigma}). \quad (28.б)$$

Они являются скалярами относительно преобразования (26).

Действительно,

$$\delta \text{Ber}(l_A^M) = \text{Ber}(l). l_M^{\Lambda} \delta l_{\Lambda}^M (-1)^M = \text{Ber}(l) [l_M^{\Lambda} L_{\Lambda}^{\beta} l_{\beta}^M (-1)^M +$$

$$+ l_M^{\Lambda} l_{\Lambda}^{\nu} \partial_{\nu}^{\lambda} \lambda^M (-1)^M] = \text{Ber}(l) \cdot [\partial_M^{\lambda} \lambda^M (-1)^M] = 0$$

в силу условия Эйнштейна (3). Поэтому, не теряя общности, можно положить

$$\text{Ber}(l_A^M) = \text{Ber}(z_A^M) = 2^{-4}.$$

Отсюда получаем

$$F = \text{Det}^{\frac{1}{2}}(\hat{z}_a^{\sigma}) \cdot \text{Det}^{\frac{1}{2}}(\hat{l}_a^{\sigma}); \quad \bar{F} = \text{Det}^{\frac{1}{2}}(\hat{l}_a^{\sigma}) \cdot \text{Det}^{-\frac{1}{2}}(\hat{z}_a^{\sigma}). \quad (29)$$

Теперь найдем явные выражения для связности ω_{α}^{ab} , $\bar{\omega}_{\dot{\alpha}}^{ab}$ (19). Нетрудно проверить, что следующие величины преобразуются по закону (20);

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} (\nabla_{\alpha} z_{\beta}^M \cdot z_{M\beta} - \nabla_{\alpha} z_{\beta}^M \cdot z_{M\alpha}), \\ \bar{\omega}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} (\bar{\nabla}_{\alpha} l_{\beta}^M \cdot l_{M\beta} - \bar{\nabla}_{\alpha} l_{\beta}^M \cdot l_{M\alpha}).\end{aligned}\quad (30)$$

(В частности, преобразования по мировому индексу M дают

$$\begin{aligned}\delta_M (\nabla_{\alpha} z_{\beta}^M \cdot z_{M\beta}) &= \nabla_{\alpha} (z_{\alpha}^N \partial_N^{\beta} \bar{\lambda}^M) z_{M\beta} - \nabla_{\alpha} z_{\beta}^M \cdot \partial_M^{\beta} \bar{\lambda}^N \cdot z_{N\beta} = \\ &= (-1)^N z_{\alpha}^N \nabla_{\alpha} \partial_N^{\beta} \bar{\lambda}^M \cdot z_{M\beta} = 0,\end{aligned}$$

поскольку $\bar{\lambda}^M$ киральна). Подставляя выражения (27) для l_{α}^M , z_{α}^M и для их обратных в (30), получаем алгебраические уравнения для ω_{α} и $\bar{\omega}_{\alpha}$. Их решения имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \hat{z}_{\beta}^m \cdot \hat{z}_{m\beta} - \nabla_{\alpha} \hat{z}_{\beta}^m \cdot \hat{z}_{m\alpha}) - \frac{i}{2} (\sigma_{\alpha\beta} \nabla)_{\alpha} \ln(F\bar{F}), \\ \bar{\omega}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_{\alpha} \hat{l}_{\beta}^m \cdot \hat{l}_{m\beta} - \bar{\nabla}_{\alpha} \hat{l}_{\beta}^m \cdot \hat{l}_{m\alpha}) - \frac{i}{2} (\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \bar{\nabla})_{\alpha} \ln(F\bar{F}),\end{aligned}\quad (31)$$

$$\text{где } \hat{l}_{\alpha}^m \hat{l}_{m\beta} = \hat{z}_{\alpha}^m \hat{z}_{m\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

7. Наконец, сформулируем правила для построения инвариантного действия. Рассмотрим в плоском суперпространстве лагранжиан \mathcal{L} , зависящий от набора суперполей и их производных. Заменив плоские производные ковариантными (19), (21), можно получить скаляр относительно группы супергравитации. Далее, в качестве скалярной плотности (аналога $\sqrt{-g}$ в ОТО) можно применить обратный березиниан супертетрад (23). Действительно,

$$\begin{aligned}\delta(\text{Ber } E_A^M)^{-1} &\equiv \delta E^{-1} = -E^{-1} E_M^{\beta} \delta E_A^M (-1)^M = \\ &= E^{-1} [E_M^{\beta} L_{\beta}^{\alpha} E_{\alpha}^M (-1)^M + E_M^{\beta} E_A^N \partial_N \frac{1}{2} (\lambda^M + \bar{\lambda}^M) - \\ &\quad - E_M^{\beta} E_A^N \partial_N \lambda^{\beta} - E_{\beta}^M E_A^N \partial_N \bar{\lambda}^{\beta}] = \\ &= E^{-1} [-\frac{1}{2} \partial_M (\lambda^M + \bar{\lambda}^M) + \partial_M \lambda^{\beta} + \bar{\partial}_{\beta} \bar{\lambda}^{\beta}].\end{aligned}$$

Тогда действие

$$S = \kappa^{-2} \int d^4x d^4\theta \cdot E^{-1} \mathcal{L}\quad (32)$$

инвариантно. Действие для чистой супергравитации просто совпадает с "объемом" в суперпространстве

$$S_{SG} = \kappa^{-2} \int d^4x d^4\theta. E^{-1}. \quad (33)$$

Этот важный факт был впервые замечен Вессом и Зумино^{/14/}. Однако этим авторам приходилось варьировать действие при дополнительных ограничениях. В нашем случае непосредственное варьирование по \mathcal{H}^m дает уравнения движения^{x)}.

Явное выражение для E получается из (23), (29) :

$$E = 2^{-4} \text{Det}^{\frac{1}{2}}(\hat{e}_a^m) \cdot \text{Det}^{\frac{1}{2}}(\hat{z}_a^m) \cdot \text{Det}^{-\frac{1}{2}}(1 + \mathcal{H}^2). \quad (34)$$

Запишем (33) в левом базисе (следуя работе^{/10/}):

$$\begin{aligned} S_{SG} &= \kappa^{-2} \int d^4x d^4\theta. E^{-1} = \kappa^{-2} \int d^4x^t d^4\theta. \text{Det}(\partial x^m / \partial x^{m'}) \cdot E^{-1} = \\ &= \kappa^{-2} \int d^4x^t d^4\theta. \text{Det}^{-1}(1 + i\mathcal{H}). E^{-1} = 2^{+4} \kappa^{-2} \int d^4x^t d^4\theta. \bar{F}^2 = \\ &= 2^{+4} \kappa^{-2} \int d^4x^t d^4\theta. \bar{\partial}_i \bar{\partial}^i (\bar{F}^2) = 2^{+4} \kappa^{-2} \int d^4x^t d^4\theta. \bar{\Delta} \bar{\Delta} (\bar{F}^2). \end{aligned}$$

Мы видим, что действие для супергравитации может быть записано и в киральной форме. Отметим, что существование этих двух форм действия и соответствие между ними были открыты в компонентном подходе^{/17/}.

IV. Заключение

В настоящем докладе мы показали, что простейшая теория супергравитации есть теория аномального суперполя, генерируемого супертоком. Благодаря замечательной киральной структуре группы супергравитации мы сумели выразить все интересующие нас величины в терминах \mathcal{H}^m . Введение левых и правых супертетрад оказалось адекватным и конструктивным шагом.

x) В низшем приближении уравнения движения, следующие из (33), совпадают с предложенными нами в^{/2/}. Более того, рассматривая взаимодействие супергравитации с материей (32) в этом же приближении, можно восстановить общую формулу для супертока, выведенную в^{/12/}.

Мы надеемся, что предлагаемый формализм существенно упростит анализ перенормируемости в супергравитации.

Авторы признательны Е.А. Иванову и Л. Мезинческу за полезные обсуждения.

Литература

1. K.S.Stelle, P.C. West. Phys. Lett., 74B, 330 (1978).
S.Ferrara, P. van Nieuwenhuizen. Phys. Lett., 74B, 333 (1978).
E.S. Fradkin, M.A. Vasiliev. Prepr. IAS-778-3PP (1978).
2. V.Ogievetsky, E.Sokatchev. Proc. IV Intern. Conf. on Nonlocal and Nonlinear Field Theory, Alushta, April, 1976 (JINR D2-9788, p 183, Dubna, 1976); Nucl. Phys., B124, 309 (1977).
3. J.Wess, B.Zumino. Phys. Lett, 66B, 361 (1977);
J.Wess. Supersymmetry - Supergravity in Proc VIII GIFT Seminar, Salamanca, June 1977.
4. J. Wess, B.Zumino. Phys. Lett, 74B, 51 (1978).
5. В.П. Акулов, Д.В. Волков, В.А. Сорока. Письма ЖЭТФ, 22, 396 (1975); ТМФ, 31, 12 (1977).
6. L.Brink, M. Gell-Mann, P.Ramond, J.Schwarz. Nucl. Phys., B145, 93 (1978).
7. S.Bedding, S. Downes-Martin, J.G.Taylor. Prepr. King's College, July, 1978.
J.G.Taylor. Phys. Lett, 79B, 399 (1978).
8. J. Ne'eman, T.Regge. Rivista del Nuovo Cimento I, I (1978).
9. V.Ogievetsky, E. Sokatchev. Prepr. JINR E2-II702 (July, 1978); Phys. Lett, 79B, 222 (1978).
10. W.Siegel, S.J.Gates. Nucl. Phys., B147, 22 (1979).
11. S.Ferrara, B. Zumino. Nucl. Phys., B87, 207 (1975).
12. В.И. Огивецкий, Э. Сокачев. ЯФ, 28, 825 (1978),
prepr. JINR E2-II528.
13. S.Ferrara, J. Wess, B. Zumino. Phys. Lett., 51B, 239 (1974).
В.И. Огивецкий, Л. Мезинческу. УФН, 117, 637 (1975).
14. В.Ф. Пахомов. Матем. заметки, 16, 65 (1974).
R.Aznovitt, P. Nath, B. Zumino. Phys. Lett, 56B, 81 (1975).
15. В.И. Огивецкий, Э. Сокачев. ЯФ, 28, 1631 (1978).
16. В.И. Огивецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 48, 1625 (1965).
А.Е. Борисов, В.И. Огивецкий. ТМФ, 21, 329 (1974).

17. S.Ferrara, P. van Nieuwenhuizen. Phys. Lett., 76B, 404 (1978).
K.S. Stelle, P.C. West. Phys. Lett., 77B, 376 (1978).
K.S. Stelle, P.C. West. Prepr. ICTP (77-78), 24 (1978).

КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

Фролов В.П.

Физический институт им. П.Н.Лебедева АН СССР, Москва

I. Черные дыры: определение и некоторые свойства

Черная дыра — это область асимптотически плоского пространства-времени, откуда никакой причинный сигнал не может выйти к удаленному наблюдателю, расположенному в асимптотически плоской части пространства.

Это определение будет строгим, если определить, что такое асимптотически плоское пространство, и описать более точно класс наблюдателей, о которых идет речь. Представлению об асимптотически плоском пространстве соответствует физическая ситуация, когда тело или тела, создающие гравитационное поле, сосредоточены в ограниченной части пространства, вдали от которой кривизна, убывая, стремится к нулю, а пространство становится почти плоским. В инвариантной форме соответствующее определение асимптотически плоского пространства было дано Пенроузом ^{/1/}. В асимптотически плоской области, точно так же как в плоском пространстве, можно выделить класс наблюдателей, движущихся по инерции / т.е. покоящихся или совершающих равномерное и прямолинейное движение /. Именно об этом классе наблюдателей идет речь в определении черной дыры.

Область, недоступная для наблюдений, если только она существует, оказывается одной и той же для любого наблюдателя из этого класса, и поэтому все эти наблюдатели согласятся между собой в том, какую часть пространства-времени следует назвать черной дырой. Строгое определение черной дыры было дано Хокингом ^{/2,3/}.

Черная дыра возникает, если тело с массой M сожмется до размера, меньшего $R_g = 2GM / c^2$ / гравитационного радиуса/. Процесс образования черной дыры схематически изображен на рисунке I.

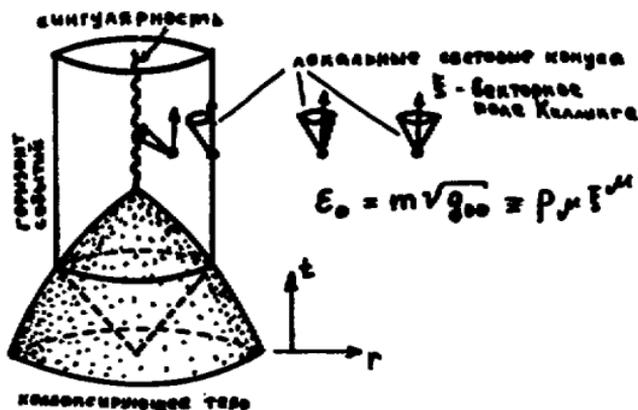


Рис. I

Трехмерная поверхность, разделяющая области видимого и невидимого для внешнего наблюдателя, получила название горизонта событий. Эта поверхность является световой.

Расположение локальных световых конусов, изображенных на рис. I, позволяет получить представление о распространении лучей света и частиц в гравитационном поле черной дыры. Характерной особенностью является то, что при приближении к поверхности черной дыры локальные световые конуса все сильнее наклоняются в сторону тяготеющего тела. На поверхности горизонта этот наклон столь велик, что идущие наружу лучи света уже не могут удалиться от тяготеющего тела и распространяются вдоль горизонта событий.

О том насколько сильно возрастает гравитационное поле при приближении к черной дыре можно также судить по следующему факту. Пусть тело массы m покоится в точке r вне черной дыры. Тогда энергия этого тела равна

$$E = m \sqrt{g_{00}} = m \left(1 - \frac{R_1}{r} \right)^{1/2}.$$

При $r \rightarrow R_1$ гравитационный дефект масс становится равным массе тела и полная энергия E обращается в ноль. Иначе говоря, если отбирать энергию от тела при его падении на черную дыру, то соответствующий коэффициент полезного действия превращения пол-

ной внутренней энергии в работу достигает ста процентов. Именно в этом состоит одна из причин, по которой астрофизики часто привлекают черные дыры для объяснения астрофизических процессов, приводящих к выделению огромных энергий /например, для объяснения природы ядер активных галактик и квазаров/.

Основной параметр, характеризующий черную дыру, - это ее масса. Если выразить массу в гравмах, то гравитационный радиус R_g есть

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} = 1,5 \cdot 10^{-28} \text{ см } (M_1).$$

В зависимости от массы удобно классифицировать черные дыры следующим образом:

Элементарные /"максимоны"/	Малые		Звездные	Массивные	Сверхмассивные
	Микро	Макро			
10^{-5} г	10^{-5} г - 10^{15} г	10^{15} г - $5 \cdot 10^{33}$ г	$5 \cdot 10^{33}$ г - $5 \cdot 10^{36}$ г	$5 \cdot 10^{36}$ г - 10^{37} г	10^{41} г
Максимально возможные "элементарные частицы"?	Возможны только как первичные		Результат коллапса звезд	Ядра звездных скоплений?	Ядра активных галактик и квазаров?

Черные дыры с массой, меньшей 10^{-5} г, нельзя рассматривать в рамках классической теории. Элементарные черные дыры /или "максимоны"/ будут рассмотрены более подробно в последнем разделе. Одним свойством, характерным для малых черных дыр, является то, что они, по-видимому, не могут образовываться в настоящее время и могут существовать только как первичные /то есть возникшие на ранних этапах эволюции Вселенной/.

2. Эффект Хокинга

Эффект Хокинга - это эффект неустойчивости вакуума в гравитационном поле черной дыры. В результате - черная дыра излучает как нагретое тело с температурой

$$\theta = \hbar c^2 / 8\pi G M \hbar = 10^{26} \text{ K } (M_{\odot})^{-1}.$$

Этот результат был получен Хокингом ^{/4,5/} при решении задачи о поведении квантованного поля на фоне гравитационного поля черной дыры.

В этом рассмотрении предполагалось, что пространство-время в малом является непрерывным. Если это не так, то размер области пространства-времени, в котором обычное соотношение перестает быть справедливым, можно было бы охарактеризовать некоторой постоянной размерности длины ℓ_f /фундаментальной длиной/. В этом случае не имело бы смысла рассматривать черные дыры размера меньше ℓ_f и возможная масса черной дыры была бы ограничена снизу величиной ^{/6/}

$$M_{(\ell_f)} = 10^{21} \text{ г } (\ell_f / 10^{-17} \text{ см}).$$

Рассмотрение Хокинга для черных дыр с массой $M \sim M_{(\ell_f)}$ требует изменения, и черные дыры с массой $M_{(\ell_f)}$ могли бы оказаться устойчивыми.

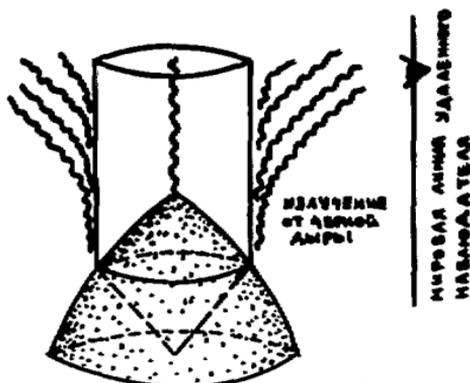
Другое возможное изменение, связанное с фундаментальной длиной, состоит в том, что существование фундаментальной длины ℓ_f делает, по-видимому, невозможным образование первичных черных дыр с массой M , меньшей величины $\tilde{M}_{(\ell_f)}$ ^{/7/}:

$$\tilde{M}_{(\ell_f)} = 10^{27} \text{ г } (\ell_f / 10^{-17} \text{ см})^2.$$

Важным является то обстоятельство, что для получения результата об излучении черной дыры не нужно делать никаких предположений об определении и свойствах вакуума в области сильного гравитационного поля. Это связано с тем, что в рассматриваемой задаче можно задать не-вакуумное состояние в момент времени в прошлом, когда коллапсирующее тело имело большой размер и его гравитационным полем можно пренебречь. Если нас, например, интересует величина потока энергии-импульса от черной дыры на бесконечности, то мы должны вычислить матричный элемент вида

$$T_{\mu\nu}(p) = \langle 0; in | \hat{T}_{\mu\nu}^{(reg)}(p) | 0; in \rangle,$$

где $\hat{T}^{\mu\nu}(\rho)$ - /регуляризованный/ оператор тензора энергии-импульса.



Потти в плоском пространстве-времени.
Вакуум $|0;in\rangle$ хорошо определен.

Рис.2

Поскольку точка ρ находится в асимптотической области, то можно использовать стандартную схему регуляризации оператора тензора энергии-импульса в плоском пространстве. Это приводит к тому, что выражение в правой части формулы для $T_{\mu\nu}(\rho)$ хорошо определено. Вычисление дает для потока энергии

$$T_{t\eta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi^2} B_{\ell}(\omega) \hbar\omega n(\omega) d\omega,$$

где

$$n(\omega) = [\exp(\hbar\omega/\theta) - \eta]^{-1}, \quad \eta = +1 \quad \text{для бозе- и}$$

$\eta = -1$ для ферми - частиц. Коэффициент $B_{\ell}(\omega)$ - вероятность поглощения черной дырой волны с квантовыми числами ω , ℓ .

3. Почему черная дыра рождает частицы?

В квантовой теории, если только данный процесс не запрещен какими-либо законами сохранения, то с некоторой вероятностью он может произойти.

Рассмотрим два различных состояния, схематично изображенных на рис.3.

ЧЕРНАЯ ДИРА

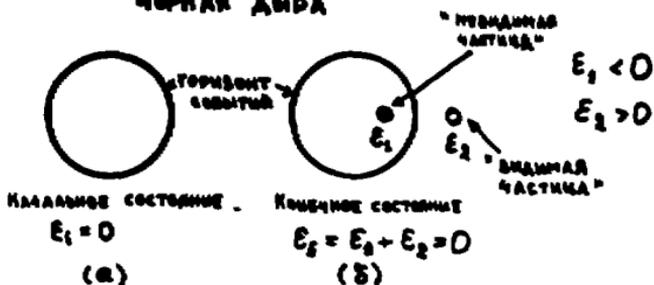


Рис.3

Первое /а/ - это состояние черной дыры без частиц, второе /б/ - это состояние, когда имеется пара - этиц, причем одна из них находится внутри, а другая - вне черной дыры. Внутри черной дыры имеется состояние с отрицательной энергией, и мы предположим, что $E_1 < 0$. Тогда можно выбрать состояние частицы вне черной дыры с $E_2 = -E_1 > 0$, так что полная энергия системы в первом и втором случае одинаковы. Закон сохранения энергии /и остальные законы сохранения/ не запрещают процесса образования такой пары. Конкретный расчет позволяет определить вероятность этого процесса.

Иногда при обсуждении проблемы рождения частиц в гравитационном поле приводится следующее рассуждение. В соответствии с принципом эквивалентности путем перехода в свободно падающую систему отсчета можно обратить напряженность гравитационного поля в ноль, и поэтому рождение частиц невозможно. Это рассуждение неверно, поскольку процесс рождения в статическом поле не локален. Образование пары возможно только в случае, когда частицы отделены друг от друга пространственно-подобным расстоянием. Избавиться же от гравитационного поля не локально, а глобально, как известно, невозможно.

4. Где рождаются частицы?

При описании рождения частиц черной дырой естественно возникает вопрос о том, с какой степенью точности можно локализовать место рождения частицы. Поскольку длина волны рожденного кванта порядка гравитационного радиуса, мы не имеем возможности с большой точностью локализовать место рождения частицы в пространстве.

Аналогичным образом невозможно локализовать момент рождения частиц с длиной волны $\lambda \sim R_g$ во времени с точностью, большей чем $\Delta t \sim R_g/c$. Однако, так как время жизни черной дыры с массой больше планковской значительно превосходит эту неопределенность, имеет смысл вопрос о том, каким образом "распределено" во времени рождение частиц. Возможны две альтернативные точки зрения, обсуждавшиеся в литературе. Согласно первой из них [8-10] все частицы рождаются в момент пересечения коллапсирующим телом горизонта событий /рис. 4а/, а затем излучаются с различной задержкой во времени, что приводит к стационарному тепловому потоку частиц на бесконечности.

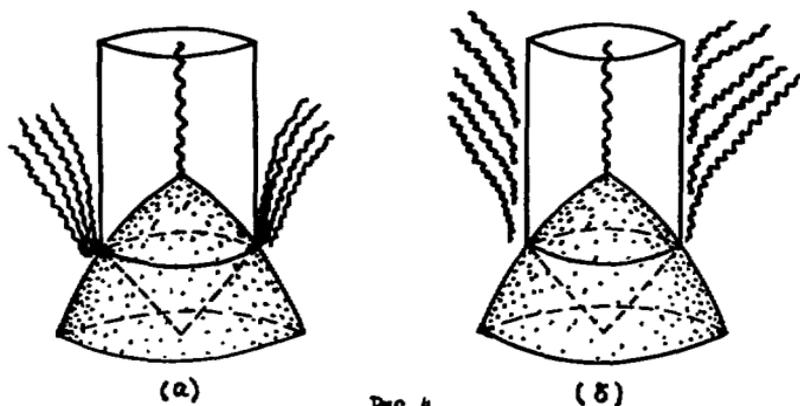


Рис. 4

Другая возможность, схематически изображенная на рис. 4б/, состоит в том, что частицы рождаются равномерно во времени вдоль поверхности горизонта [5].

Заметим, что аналогичные две возможности возникают при обсуждении вопроса о рождении заряженных частиц электрическим полем конденсатора. Для того, чтобы выяснить, рождаются ли все частицы во время включения (τ_1) и выключения (τ_2) конденсатора, когда поле переменное, или имеет место также равномерное рождение частиц в течение всего времени T , когда поле постоянно, необходимо найти зависимость числа рожденных частиц N от T . Оказывается, что при больших T имеет место поведение $N \sim T V_1 + V_0$, и V_1 не зависит от характера изменения поля на

интервалах времени τ_1 и τ_2 . Это показывает, что частицы в конденсаторе рождаются равномерно во времени. Аналогичное рассмотрение /11/ указывает на то, что в черной дыре частицы рождаются равномерно вдоль горизонта. Для аргументов в пользу этой точки зрения содержится также в работе /12/.

Более полную информацию можно получить, непосредственно вычислив тензор энергии-импульса частиц, рождаемых гравитационным полем черной дыры. Несмотря на процедуру регуляризации, удается получить осмысленное конечное выражение для тензора энергии-импульса. Проведенный анализ, содержащийся, например, в работах /13-15/, указывает на то, что соответствующий тензор энергии-импульса, вычисленный в локально падющей системе отсчета, остается конечным на горизонте событий. Поэтому в настоящее время есть все основания считать, что правильная точка зрения Хокинга и частицы рождаются не вблизи поверхности коллапсирующего тела, а в статическом гравитационном поле вдоль поверхности горизонта.

5. Почему излучение черной дыры тепловое?

Если пренебречь эффектами рассеяния рожденных частиц на статическом гравитационном поле, то не только спектр, но и все корреляционные функции излучения от черной дыры будут совпадать с соответствующими функциями чернотельного излучения. Естественно возникает следующий вопрос:

- а/ Каким образом возникает смешанное состояние, описываемое матрицей плотности, из первоначального чистого состояния $|0; in\rangle$?
- б/ Почему эта матрица плотности оказывается тепловой?

а/ Стандартная задача о рождении частиц во внешнем поле состоит в нахождении S -матрицы, связывающей ин- и аут-состояния

$$\hat{a}_{in, \alpha} = \hat{S} \hat{a}_{out, \alpha} \hat{S}^{\dagger}, \quad \hat{S}^{\dagger} = \hat{S}^{-1}.$$

Здесь $\hat{a}_{in, \alpha}$ и $\hat{a}_{out, \alpha}$ - операторы уничтожения ин- и аут-частиц. Элементарные процессы рождения, поглощения пар и рассеяния частиц во внешнем поле, а также обозначения для соответствующих амплитуд приведены на рисунке. Общее выражение для \hat{S} -матрицы через амплитуды элементарных процессов имеет вид

$$\underline{S} = S_0 \exp\left(\frac{i}{2} \underline{a}^{\dagger} V \underline{a}\right) : \exp[\underline{a}^{\dagger} (M - I) \underline{a}] : \exp\left(\frac{i}{2} \underline{a} \Lambda \underline{a}\right).$$

Здесь $S_0 = \langle 0; out | 0; in \rangle$ и используются следующие обозначения: $\underline{a} \Lambda \underline{a} = \sum_{\alpha, \alpha'} \underline{a}_{out, \alpha} \Lambda_{\alpha \alpha'} \underline{a}_{out, \alpha'}, \dots$

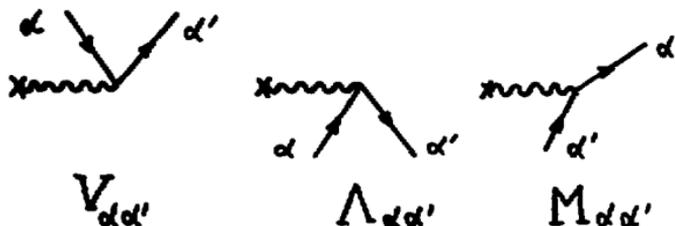


Рис.5

Наряду с этой "стандартной" задачей возможна также отличная постановка проблемы. Разделим по какому-либо признаку аут-состояния частот на два класса:

	"видимые"	"невидимые"
	○	●
Состояния нумеруют индекс	β, β', \dots	γ, γ', \dots
Операторы рождения и уничтожения	$\hat{b}_{\beta}^{\dagger} = \underline{a}_{out, \beta}^{\dagger}$ $\hat{b}_{\beta} = \underline{a}_{out, \beta}$	$\hat{c}_{\gamma}^{\dagger} = \underline{a}_{out, \gamma}^{\dagger}$ $\hat{c}_{\gamma} = \underline{a}_{out, \gamma}$

Матрицу V амплитуд рождения пары можно записать в виде

$$V = \begin{pmatrix} U_{\beta\beta'} & W_{\beta\gamma'} \\ \eta W_{\gamma\beta'} & Z_{\gamma\gamma'} \end{pmatrix},$$

где $\eta = +1$ / $\eta = -1$ / для бозе / ферми /-частиц. Постановка задачи, о которой идет речь, состоит в определении средних значений от операторов, зависящих только от состояний "видимых" частиц.

Для соответствующих средних можно получить следующее выражение

$$B_{\Psi} = \langle \Psi; in | B(\xi, \xi^+) | \Psi; in \rangle = S_{P\xi} (P_{\Psi} B).$$

Здесь след берется по пространству состояний "видимых" частиц. Для этой матрицы плотности можно получить явное выражение /16/. В случае, если $|\Psi; in\rangle = |0; in\rangle$, для $\rho_0 = P_{\Psi}$ имеем

$$\rho_0 = D \exp\left(\frac{1}{2} \xi^+ G \xi\right) : \exp(\xi^+ L \xi) : \exp\left(\frac{1}{2} \xi H \xi\right),$$

где

$$\begin{aligned} G &= U + W P Z^* W', & P &= (I - \eta Z^* Z)^{-1}, \\ H &= G^* = U^* + \bar{W} Z P W^*, & D &= [\det P]^{1/2} S_0, \\ L &= W P W^* - I, \end{aligned}$$

$()^t$ - транспонирование, $(\bar{\quad})$ - комплексное и $()^*$ - эрмитово сопряжения.

В случае черной дыры разделение на "видимые" и "невидимые" состояния производится естественным образом. "Видимые" частицы - это частицы, вылетающие на бесконечность, "невидимые" - частицы внутри черной дыры. Нетрудно убедиться, что матрица плотности ρ_{Ψ} не зависит от выбора вакуума "невидимых" частиц.

Резюмируя, можно сказать, что причина появления матрицы плотности та же самая, что и в квантовой механике, когда от рассмотрения системы переходят к рассмотрению подсистемы.

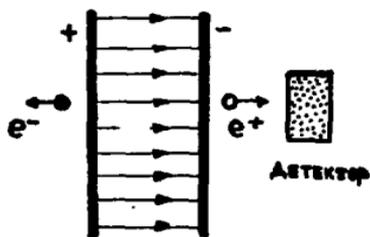
б/ В простейшем случае, когда рождение "видимой" частицы

сопровождается рождением "невидимой" и $U = Z = 0$, выражение для матрицы плотности ρ_0 упрощается:

$$\rho_0 = S_0 : \exp[\xi^\dagger (W W^\dagger - I) \xi] = S_0 \exp[\xi^\dagger \ln(W W^\dagger) \xi].$$

Чтобы понять, почему для излучения черной дыры матрица плотности ρ_0 является тепловой, полезно сравнить этот случай со случаем рождения заряженных частиц в электрическом поле.

Предположим, что детектор, регистрирующий рождаемые в конденсаторе с постоянным электрическим полем \vec{E} частицы, размещен справа от конденсатора /см. рис.6/. В этом случае "видимыми" будут состояния положительно заряженных частиц, а "невидимыми" - состояния отрицательно заряженных частиц. Соответствующая матрица плотности ρ_0 имеет вид /17/



Конденсатор с полем \vec{E} , рождающим пары

$$\rho_0 = S_0 \exp[-\sum_{\beta} (\ln(\exp \lambda_{\beta} + \eta)) \xi_{\beta}^{\dagger} \xi_{\beta}]$$

$$\beta = (\vec{p}, s),$$

$$\lambda = \frac{E_{\perp}^2}{|eE|},$$

$$E_{\perp}^2 = \vec{p}_{\perp}^2 + m^2.$$

Рис.6

Здесь \vec{p}_{\perp} - поперечная к полю \vec{E} компонента импульса. Когда $\lambda \gg 1$,

$$\rho_0^{(EM)} \approx S_0 \exp[-\sum_{\beta} \pi \frac{E_{\perp}^2}{|eE|} \xi_{\beta}^{\dagger} \xi_{\beta}].$$

В случае, когда черная дыра рождает частицы, можно выбрать вакуум "невидимых" частиц таким образом, что также выполняется условие $U = Z = 0$. При этом для W можно получить выражение /5, 18/.

$$W_{\beta\gamma} = \exp(-\frac{\pi E}{\omega}) \delta(\epsilon + \epsilon') \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{mm'},$$

где \mathcal{E} - поверхностная гравитация черной дыры / для невращающейся черной дыры $\mathcal{E} = c^4 / 4 G \hbar$ /, E, ℓ, m / $E', \ell', -m'$ - энергия, орбитальное и азимутальное квантовые числа "видимой" / "невидимой" / частицы. Для матрицы плотности имеем

$$\rho_0^{(EM)} = S_0 \exp \left[- \sum_{\beta=(E, \ell, m)} \left(\frac{2\pi}{\mathcal{E}} \varepsilon_{\beta} \ell_{\beta}^+ \ell_{\beta}^- \right) \right] = S_0 \exp \left(- \frac{H_0}{\theta} \right),$$

где H_0 - свободный гамильтониан частиц на асимптотической бесконечности и $\theta = \mathcal{E} / 2\pi = \hbar c^3 / 8\pi G M$ - температура черной дыры.

Существенное отличие $\rho_0^{(EM)}$ от $\rho_0^{(BN)}$ состоит в том, что вместо энергии ε_{β} в формуле для $\rho_0^{(EM)}$ стоит величина, пропорциональная квадрату /поперечной/ энергии. Причина этого в следующем. Из-за соотношения неопределенности имеется /экспоненциально малая/ вероятность "найти" два виртуальных кванта энергии E на расстоянии $\ell > \hbar c / E$ друг от друга. В том случае, когда работа сил внешнего поля на расстоянии ℓ равна $2E$, эти виртуальные частицы могут стать реальными и вероятность рождения частиц во внешнем статическом поле можно оценить следующим образом:

$$\text{/Вероятность рождения/} \sim \delta(E_f) \exp(-\alpha E \ell),$$

реальной пары

где α - коэффициент порядка 1. Если Γ - напряженность поля, а g - константа взаимодействия частиц с полем, то $E_f = 2E - g\Gamma\ell$ и значение ℓ , при котором частицы становятся реальными, есть

$$\ell_E = 2E / g\Gamma.$$

Сравнение формул, приведенных выше, показывает, что матрица плотности рожденных частиц может иметь тепловой вид только в

	Электрическое поле	Статическое гравитационное поле
Трёхмерная форма уравнения движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}$	$\frac{d\vec{p}}{dt_{\text{так}}} = \varepsilon \vec{z}$, $\varepsilon = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, $\vec{z} = \vec{\nabla} \ln(g_{00})^{1/2}$ - "напряжённость" гравитационного поля
Величина l_ε	$l_\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{ eE }$	$l_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon}$ /не зависит от энергии/
Вероятность рождения пропорциональна:	$\exp\left(-\frac{2d\varepsilon^2}{ eE }\right)$	$\exp\left(-2d\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right)$

случае, если константа взаимодействия частиц с полем пропорциональна их энергии. Именно это свойство вытекает из принципа эквивалентности для взаимодействия частиц с гравитационным полем.

6. Судьба испаряющейся черной дыры

В процессе квантового рождения частиц черная дыра теряет массу. При этом ее температура увеличивается и интенсивность излучения возрастает. Время жизни черной дыры /то есть прощя, в течение которого черная дыра полностью излучает всю свою первоначальную энергию/ есть

$$t \sim 10^{-43} \text{ сек } \left(M / 10^{-5} \text{ г} \right)^3.$$

Первичные черные дыры, возникшие в момент времени, близкий к моменту большого взрыва, доживут до настоящего времени только в том случае, если масса их не менее $5 \cdot 10^{14}$ г.

Интенсивность излучения черной дыры резко возрастает, когда

масса ее становится достаточно малой, и последний этап испарения черной дыры представляет собой по сути дела взрыв. К сожалению, в настоящее время мы не знаем, какая судьба ожидает черную дыру после её испарения. Она может: 1/ либо полностью испариться, 2/ либо оставить после себя "максимон", 3/ либо породить голую сингулярность.

7. Пространство-время внутри черной дыры

Если масса черной дыры значительно больше $M_{pl} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2}$, то её характеристики мало изменяются в процессе квантового испарения на характерном интервале времени R_g/c . Стационарные черные дыры могут быть охарактеризованы параметрами: массой M , угловым моментом J и электрическим зарядом Q . Все остальные характеристики, такие, как дипольный электрический и магнитный моменты, квадрупольные и более высокие электрические, магнитные и гравитационные моменты, в результате излучения в процессе коллапса исчезают. Это утверждение известно под названием "теоремы об отсутствии волос у черной дыры".

Аналогичным образом внутри черной дыры после прохождения коллапсирующего тела все возмущения, которые не связаны с сохраняющимися величинами и могут излучаться, вымирать, и отклонения геометрии от шварцшильдовской /для коллапса невращающегося тела/ вблизи особенности $r=0$ отретятся к нулю при удалении от поверхности коллапсирующего тела /19/.

Физическая причина "выпадения волос" снаружи и внутри черной дыры одна и та же: все физические поля /включая и гравитационное/"весят". Стационарная конфигурация возможна только в случае, если этот вес для каждого элемента объема компенсируется поверхностной силой натяжения поля /"силой Архимеда"/. В противном случае происходит перестройка поля, сопровождаемая излучением /"выпадение волос"/.

При описании пространства-времени в окрестности сингулярности $r=0$ внутри черной дыры следует принимать во внимание обратное влияние на метрику плотности энергии-импульса рожденных частиц и поляризации вакуума. Вычисления соответствующего тензора энергии-импульса для реального четырехмерного пространства затруднительны. Если для качественного анализа использовать полученное в работе /12/ выражение для тензора энергии-импульса

в двумерном пространстве-времени, то можно заключить, что плотность энергии-импульса рожденных частиц и поляризации вакуума оказывается порядка планковской уже на расстоянии $r \sim \ell_{pe} (R_g / \ell_{pe})^{2/3}$ от сингулярности. То есть уже на расстояниях, значительно \gg $(R_g / \ell_{pe})^{2/3}$ раз/превышающих планковские, квантовые эффекты могут существенно повлиять на структуру пространства-времени.

Более последовательно при нахождении геометрии вблизи сингулярности использовать выражение для эффективного действия гравитационного поля, получаемого с учетом квантовых поправок. Характерной особенностью этого действия является наличие высших производных. С учетом однопетлевых поправок эффективный лагранжиан гравитационного поля можно записать в виде

$$\mathcal{L} = -R + \ell_{pe}^2 (\alpha C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} + \beta R^2).$$

Хорошо известно, что сферически-симметричные уравнения в пустоте для этого лагранжиана в качестве точного решения допускают метрику Шварцшильда. Все остальные статические решения являются менее сингулярными. При $\beta = 0$ все сингулярности, кроме шварцшильдской, являются конформно устранимыми.

Поскольку метрика Шварцшильда является решением уравнений с квантовыми поправками, то какие могут быть основания считать, что квантовая гравитация может ослабить или даже устранить сингулярность при $r = 0$?

Рассмотрим простой пример, который позволяет пояснить с чем связаны эти надежды. Пусть скалярное статическое поле φ удовлетворяет уравнению

$$(1 + \ell_{pe}^2 \Delta) \Delta \varphi = 0.$$

Убывающее на бесконечности решение этого уравнения

$$\varphi = \frac{C_1}{r} + \frac{C_2 e^{-r/\ell_{pe}}}{r}$$

обладает в общем случае той же самой особенностью r^{-1} при $r \rightarrow 0$, что и решение $\tilde{\varphi}$ уравнения $\Delta \tilde{\varphi} = 0$. Решение φ удовлетворяет уравнению везде вне точки $r = 0$, более точно имеет

место соотношения

$$(1 + \ell_{pe}^2 \Delta) \Delta \varphi = -4\pi [C_1 \delta(\vec{r}) + \ell_{pe}^2 (C_1 + C_2) \Delta \delta(\vec{r})].$$

Если поле φ создает точечный источник положительной плотности, то следует положить $C_1 + C_2 = 0$ и решение

$$\varphi = \frac{c}{2} (1 - e^{-r/\ell_{pe}})$$

оказывается регулярным. Таким образом, физически реализуемому источнику соответствует более слабая /чем общего типа/ особенность. Имеются основания считать, что аналогичное утверждение справедливо и в квантовой гравитации.

8. Элементарные черные дыры /максимоны/

Элементарные черные дыры или максимоны /20, 21/ - это черные дыры с массой $M_{pe} = (\hbar c / G)^{1/2} \sim 10^{-5} \text{ г}$. Их гравитационный радиус совпадает с комптоновской длиной волны и равен $\ell_{pe} = (G \hbar / c^3)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ см}$. Если отсутствует фундаментальная длина /или, точнее, $\ell_s = \ell_{pe}$ /, то масса M_{pe} определяет нижнюю границу масс черных дыр, которые еще допускает классическое описание. Если максимоны, действительно, существуют и стабильны, то обнаружить их при непосредственном наблюдении крайне сложно ввиду малости сечения взаимодействия ($\sigma_{pe} \sim \ell_{pe}^2 \sim 10^{-66} \text{ см}^2$) /21, 22/.

В случае, если в момент времени, близкий к Большому Взрыву, имелось значительное количество устойчивых максимонов, то они могут образовывать гравитационно связанные системы - "максимонные рои" /23/. Время жизни такого рои зависит от размера рои R и от его массы M :

$$T \sim \left(\frac{R}{\ell_{pe}} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_{pe}} \right)^{1/2} \frac{\ell_{pe}}{c} \left[\ln \left(\frac{M}{M_{pe}} \right) \right]^{-1}.$$

В процессе эволюции часть максимонов рои приобретает энергию, достаточную для вылета из рои, в результате чего рои сжимается. При сжатии до размера порядка $4 G^2 M^3 / c^4 R$ может возникнуть черная дыра.

Если рои образовались в момент времени, близкий к Большому Взрыву, то они могут дожить до настоящего времени, если только его параметры удовлетворяют условию

$$\left(\frac{R}{r_p}\right)^{3/4} \left(\frac{M}{M_{pc}}\right)^{1/4} > 10^{34}.$$

Аккреция обычного вещества /нуклонов/ на рои приводит к его загрязнению, в результате чего перемещение максимонного рои в пространстве сопровождается перемещением налипшего на него вещества с плотностью

$$\rho \sim \left(\frac{M}{M_{pc}}\right)^{3/2} \left(\frac{R}{r_p}\right)^{-3/2} 10^{15} \text{ (г/см}^3\text{)}.$$

Наблюдение этой адронной компоненты загрязненного максимонного рои, по-видимому, является гораздо более простой задачей, чем обнаружение собственно максимонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Penrose R., Phys.Rev.Lett., 10, 66 /1963/.
2. Hawking S.W., Comm.Math.Phys., 25, 152 /1972/.
3. Hawking S.W., Ellis G.F.R. The Large scale structure of space-time, Cambridge Univ.Press., 1973.
/Русский перевод: Хокинг С., Эллис Дж. "Крупномасштабная структура пространства-времени", "Мир", М., 1977/.
4. Hawking S.W., Nature, 248, 30 /1974/.
5. Hawking S.W., Comm.Math.Phys., 43, 199 /1975/.
6. Гинзбург В.Л., Письма в ЖЭТФ, 22, 514 /1975/.
7. Гинзбург В.Л., Фролов В.П., Письма в АЖ, 2, 474 /1976/.
8. Boulware D.G., Phys.Rev., D13, 2169 /1976/.
9. Davies P.C.W., Proc.Roy.Soc., A351, 129 /1976/.
10. Gerlach V.H., Phys.Rev., D14, 1479 /1976/.
11. Волович И.В., Загребнов В.А., Фролов В.П., ТМФ, 33,3/1977/.
12. Unruh W.G., Phys.Rev., D15, 365 /1977/.
13. Davies P.C.W., Fulling S.A., Unruh W.G., Phys.Rev., D13, 2720 /1976/.
14. Christensen S.M., Fulling S.A., Phys.Rev., D15, 2089 /1977/.

15. Fulling S.A., Phys.Rev., D15, 2411 /1977/.
16. Frolov V.P., Fortschritte der Phys., 26, 455 /1978/.
17. Frolov V.P., Gitman D.M., J.Phys., A11, 1329 /1978/.
18. Hawking S.W., Phys.Rev., D14, 2460 /1976/.
19. Дорошкевич А.Г., Новиков И.Д., ЖЭТФ, 74, 3 /1978/.
20. Markov M.A. Progr.Theor.Phys., 85 Suppl., Commemoration Issue for 30-th Anniversary of the meson theory by H.Yukawa, 1965.
21. Марков М.А. ЖЭТФ, 51, 878 /1966/.
22. Марков М.А., Preprint IC/78/41, Trieste, 1978.
23. Марков М.А., Фролов В.П. Письма в ЖЭТФ, 29, 372 /1979/.

**IV. Неабелевы калибровочные
теории**



СОВРЕМЕННЫЙ СТАТУС КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

А. А. Славнов

Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР, Москва

Теория Янга-Миллса, сформулированная первоначально исключительно из соображений симметрии и долгое время рассматривавшаяся многими физиками как "математическая игрушка", стала с настоящего время общепризнанной основой физики элементарных частиц. В этом отношении она является единственным (и естественным) аналогом общей теории относительности. Теория Янга-Миллса по сути дела есть не что иное, как теория относительности в зарядовом пространстве. В ее основе лежит утверждение, что в зарядовом пространстве (например, изотопическом) не существует физически выделенной системы координат. Если $\Psi(x)$ - вектор в зарядовом пространстве, то в каждой точке x разложение на компоненты $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ может быть сделано произвольным образом.

Локальное изменение системы координат, т.е. вращение

$$\delta \Psi(x) = i \alpha^a(x) T^a \Psi(x), \quad (1)$$

где T^a - генераторы представления, реализуемого полями Ψ , а $\alpha^a(x)$ - параметры бесконечно малого калибровочного преобразования, эквивалентно появлению взаимодействия с некоторым полем

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow D_\mu \Psi = (\partial_\mu - i T^a \partial_\mu \alpha^a) \Psi. \quad (2)$$

Подобно тому, как в ОТО локальное изменение системы координат эквивалентно появлению дополнительного гравитационного поля, локальное изменение системы координат в зарядовом пространстве эквивалентно появлению дополнительного калибровочного поля. Это позволяет сформулировать принцип относительности в зарядовом пространстве^{1/1}; полевыми конфигурациями

$$\Psi(x), A_\mu(x) \quad (3)$$

$$\Psi'(x) = (1 + i\alpha(x)T^a)\Psi(x); \quad A_\mu' = A_\mu(x) - [A_\mu(x), \alpha(x)] + \partial_\mu \alpha(x)$$

описывают одну и ту же физическую ситуацию. В этой формуле используются обычные матричные обозначения

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)t^a, \quad \alpha(x) = \alpha^a(x)t^a \quad (4)$$

t^a - генераторы присоединенного представления алгебры Ли калибровочной группы.

При конечных преобразованиях $A_\mu(x)$ преобразуются аналогично символам Кристоффеля в общей теории относительности

$$A_\mu(x) \rightarrow \omega(x) A_\mu(x) \omega^{-1}(x) + \partial_\mu \omega(x) \omega^{-1}(x). \quad (5)$$

Поля $A_\mu(x)$ определяют параллельный перенос в зарядовом пространстве. Ковариантный тензор напряженности поля Янга-Миллса

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + [A_\mu, A_\nu] \quad (6)$$

является тензором кривизны зарядового пространства.

Принцип относительности фиксирует классическую динамику поля Янга-Миллса: взаимодействие вводится путем замены обычной производной на ковариантную

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \rightarrow i \bar{\Psi} \gamma^\mu D^\mu \Psi \equiv i \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - iT^a A_\mu^a) \Psi, \quad (7)$$

а лагранжиан самого поля Янга-Миллса представляет собой квадрат тензора кривизны

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (8)$$

Этот же принцип лежит в основе корректной процедуры квантования калибровочных полей^{/2/}. Наиболее обобщенное стандартной процедуры квантования приводит к выражению для S -матрицы в виде континуального интеграла

$$S = \int \exp\{i \int \mathcal{L}(x) dx\} dA d\Psi, \quad (9)$$

где интегрирование ведется по всем полям A_μ и Ψ с заданной асимптотикой на бесконечности. Однако этот интеграл сингулярен. Причина этого состоит в том, что согласно принципу относительности физическому состоянию соответствует не одна конфигурация, а целый класс калибровочно-эквивалентных полей A_μ^w, Ψ^w . Поэтому интегрировать нужно не по полям A_μ, Ψ , а по классам калибровочно-инвариантных полей A_μ^w, Ψ^w . В этом и состоит процедура Фаддеева-Попова, приводящая к модификации названного выражения (9)

$$S = \int \exp\{i \int L(x) dx\} \delta[\varphi(A, \Psi)] \Delta(A, \Psi) dA d\Psi. \quad (10)$$

Здесь $\varphi(A, \Psi)$ - условие калибровки (например, условие излучения $\partial_i A_i = 0$), выбирающее представителя в классе калибровочно-эквивалентных полей, а Δ - детерминант Фаддеева-Попова, возникающий за счет перехода к интегрированию по классам полей.

Процедура перенормировки теории Янга-Миллса также основана на учете принципа относительности. Принцип относительности для перенормированной теории эквивалентен существованию соотношений между функциями Грина, называемых обобщенными тождествами Уорда^{13/}. Их выполнение гарантирует унитарность и калибровочную инвариантность перенормированной S -матрицы.

Последовательное применение принципа относительности позволяет построить в теории возмущений квантовую динамику поля Янга-Миллса. Однако вне рамок теории возмущений в этой связи возникает одна проблема^{15/}.

Как уже упоминалось, для построения квантовой динамики нужно наложить на допустимые поля условие калибровки $\varphi(A) = 0$. Для того чтобы это условие действительно выбирало по одному представителю в каждом классе, необходимо, чтобы уравнение $\varphi(A^w) = 0$ при фиксированном A имело однозначное решение. В теории возмущений $|gA| \ll 1$, и для разумных калибровок типа кулоновской или лоренцевой это условие выполнено. Однако если не ограничиваться малыми флуктуациями поля, то однозначность решения этого уравнения может нарушиться. Было показано, что кривые $\partial_i A_i$ и $\partial_\mu A_\mu$ пересекают орбиты группы более одного раза. Более того, при некоторых дополнительных предположениях Зингер доказал, что не существует калибровки, которая бы глобально, т.е. при всех A_μ , однозначно выбирала представителей в калибровочно-эквивалентных классах.

Сейчас трудно сказать, насколько серьезна эта проблема. При практическом построении квантовой теории всегда делаются какие-либо дополнительные предположения (например предположение о малости $|gA|$ в теории возмущений). Поэтому вопрос об однозначности калибровочного условия следует решать с учетом этих дополнительных предположений. В рамках теории возмущений, которая является пока единственным регулярным методом исследования полей Инга-Миллса, однозначность обеспечена.

Другая возможность фиксации калибровочного произвола обсуждается в работах^{/6/}. Предлагается использовать гамильтонову калибровку $A_0=0$. Эта калибровка является допустимой и вне рамок теории возмущений, однако она не полностью уничтожает калибровочный произвол. Теория остается инвариантной относительно преобразований с калибровочной функцией $\omega(\vec{x})$, зависящей только от пространственных координат. Генератор этих преобразований

$$C(\vec{x}) = \partial_k \bar{F}_{0k}(x) - g [A_k, \bar{F}_{0k}] \quad (II)$$

коммутирует с гамильтонианом. Поэтому для полной фиксации калибровочного произвола можно наложить на допустимые вектора состояний условие связи

$$C(\vec{x}) \Psi = 0. \quad (I2)$$

Тем самым задача сводится к нахождению состояний, удовлетворяющих условию (I2). В теории возмущений связь асимптотически линеаризуется:

$$C \rightarrow \partial_k \bar{F}_{0k} = \partial_k E_k = 0, \quad (I3)$$

и уравнение (I2) легко решается. В работах^{/7/} был предложен метод решения уравнения (I2) без предположения о линеаризации связи. Допустимые состояния при этом неаналитически зависят от констант связи. На сегодня не ясно, может ли эта конструкция быть положена в основу какой-либо разумной схемы аппроксимаций.

II

Для решения уравнений теории поля необходимо задать граничные условия, что, в свою очередь, связано с вопросом о физическом вакууме. Обычно полагают, что классический вакуум отвечает кон-

фигурации $A = \varphi = 0$, а соответствующий квантовый вакуум $\langle A \rangle = \langle \varphi \rangle = 0$. Вблизи этого основного состояния строится теория возмущений. Хорошо известно, что в калибровочных теориях этот вакуум неустойчив, что проявляется в инфракрасной расходимости членов ряда теории возмущений.

Истинное основное состояние в теории Янга-Миллса существенно зависит от динамики. Его нахождение является основной проблемой для этой теории. С уверенностью мы знаем основное состояние лишь в одном случае - в модели Хиггса-Киббла^{77/}, построенной на основе лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM}(A, \psi, \varphi) - \lambda^2 (|\varphi|^2 - \mu^2)^2 \quad (14)$$

где \mathcal{L}_{YM} - калибровочно-инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие поля Янга-Миллса с полями φ, ψ . В этом случае конфигурация $A = \varphi = 0$ является седловой точкой для классического потенциала и соответствующее положение равновесия неустойчиво. Устойчивый минимум отвечает нулевым A_μ и постоянным φ^a , имеющим фиксированную длину $|\varphi|^2 = \mu^2$. Поля, отвечающие классическому вакууму, стремятся на бесконечности к константе $\vec{\varphi} \rightarrow \mu \vec{n}$, где \vec{n} - единичный вектор в зарядовом пространстве. Это означает, что симметрия спонтанно нарушена. Переход к полям с нулевой асимптотикой

$$\vec{\varphi} \rightarrow \mu \vec{n} + \vec{\varphi} \quad (15)$$

делает нарушение симметрии явным и порождает массовый член для полей Янга-Миллса. Теория возмущений, построенная вблизи этого основного состояния, свободна от инфракрасных расходимостей и допускает устранение ультрафиолетовых расходимостей путем стандартной процедуры перенормировки.

Механизм Хиггса-Киббла лежит в основе объединенных моделей слабых и электромагнитных взаимодействий, которые имеет в настоящее время столь же надежный теоретический фундамент, как и квантовая электродинамика. Имеющиеся здесь проблемы связаны с выбором конкретной модели и с геометрической интерпретацией механизма Хиггса.

Экспериментальные данные хорошо описываются в рамках модели Салама-Вайнберга^{78/}. Эти данные относятся, однако, главным образом к электронным и мюонным взаимодействиям. Ситуация с тяжелыми лептонами значительно менее ясна. Можно думать, что существует

дополнительная симметрия, фиксирующая вид взаимодействия как легких, так и тяжелых лептонов. Возможным кандидатом на роль такой симметрии является суперсимметрия.

Преобразования суперсимметрии связывают поля с целым и полуцелым спином. Поэтому суперсимметричная теория, описывающая взаимодействие фермионов (лептонов, кварков), с необходимостью включает также скалярные частицы, являющиеся естественными кандидатами на роль хиггсовских мезонов. Спонтанное нарушение суперсимметрии приводит к расщеплению по массе фермионов и бозонов и позволяет строить суперсимметричные модели слабых и электромагнитных взаимодействий^{9/}. Суперсимметрия накладывает жесткие ограничения на возможные калибровочные модели и устанавливает ряд соотношений между массами и константами связи различных частиц. Широкий класс суперсимметричных моделей был рассмотрен в работе^{10/}. Прямые экспериментальные данные оказываются моделями, основанные на группах $SU_2 \times U_1$ и $SU_2 \times SU_2 \times U_1$, дающие для легких лептонов предсказания, близкие к модели Салама-Вайнберга. Минимальное число заряженных лептонов в $SU_2 \times U_1$ -модели равно четырем, причем массы тяжелых лептонов E_1 и E_2 связаны с массой W -мезона правилом сумм

$$M_W^2 = \frac{1}{2} (M_{E_1}^2 + M_{E_2}^2). \quad (16)$$

Другую возможность геометрической интерпретации эффекта Хиггса дает использование киральных полей^{11/}. В качестве фундаментального выбирается лагранжиан, описывающий калибровочно-инвариантное взаимодействие кирального поля

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + |D_\mu \Psi|^2; \quad |\Psi|^2 = \frac{M^2}{g^2}. \quad (17)$$

В случае группы SU_2 , если поле Ψ представляет собой комплексный дублет, то в низшем порядке теории возмущений спектр содержит три векторных мезона с массой M . Скалярные поля Ψ отвечают чисто калибровочным степеням свободы и могут быть устранены подходящим выбором калибровки. Однако теория возмущений мало пригодна для анализа лагранжиана (17), т.к. он отвечает неперенормируемой теории.

Последовательную схему вычисления амплитуд перехода можно развить с помощью метода среднего поля. При этом оказывается, что истинный спектр теории существенно отличается от предсказаний

наибольшей теории возмущений. Вычисленная по методу среднего поля S -матрица совпадает с S -матрицей, отвечающей эффективному лагранжиану

$$\mathcal{L} = (D_{\mu} \varphi)^2 \pm m^2 |\varphi|^2 - \lambda \varphi^4 + \mathcal{L}_{YM}, \quad (18)$$

где величина m^2 определяется через параметры исходного лагранжиана и положения точек вычисления. Одному и тому же исходному лагранжиану отвечает два решения, отличающиеся знаком, $\pm m^2$. Знак $-$ соответствует безмассовому векторному полю, взаимодействующему с массивным скаляром, знак $+$ — модели Хиггса. Очевидно, что хиггсовская фаза отвечает меньшей энергии основного состояния и поэтому устойчива. Решение, отвечающее безмассовому векторному полю, неустойчиво.

III

Последовательная и самосогласованная схема вычислений для теории Янга-Миллса может быть развита также для области малых расстояний. Благодаря асимптотической свободе неабелевых калибровочных теорий при больших евклидовых импульсах, эффективная константа взаимодействия

$$\tilde{g}(k^2) = \frac{g^2}{1 + c^2 \ln \frac{k^2}{\mu^2}} \quad (19)$$

стремится к нулю. Благодаря этому, на малых расстояниях существенную роль играют лишь малые флуктуации поля и так же как и в случае модели Хиггса, теория возмущений является адекватным вычислительным методом.

Из формулы (19) следует, что при малых k эффективная константа растет и в этом случае нельзя ограничиться малыми флуктуациями поля. Поэтому область больших расстояний остается *terra incognita* для асимптотически свободной теории Янга-Миллса, относительно которой существует различные гипотезы.

В последние годы широко обсуждалась роль инстантонов^[12] в строении основного состояния калибровочных полей. Классическому вакууму для поля Янга-Миллса помимо состояния $A=0$ отвечает также состояния, представляющие собой "чистую калибровку". Например, в калибровке $A_0=0$ вакуумные конфигурации имеют вид $\partial_i \omega \omega^{-1} \partial_i$. Если калибровочная функция стремится к единице при $|x| \rightarrow \infty$, то

калибровочная группа разбивается на классы, отличающиеся значением топологического заряда

$$Q = \int d^3x \varepsilon^{ijk} T_k(T_i T_j T_k) ; \quad T_i = \partial_i \omega \omega^{-1}, \quad (20)$$

принимая целочисленные значения. Это значит, что калибровочная группа содержит помимо непрерывных преобразований, не выходящих за пределы данного класса, сдвиги, меняющие заряд Q на 1. Класс с топологическим зарядом n порождает свой классический вакуум $|n\rangle$.

Обычная теория возмущений учитывает лишь малые флуктуации поля и поэтому "чувствует" лишь один вакуум. Инстантоны — решения классических евклидовых уравнений Янга-Миллса с конечным действием — описывают туннельный переход из одного вакуума в другой:

$$A_i(\vec{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 ; \quad A_i(\vec{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \partial_i \omega_i \omega_i^{-1} ; \quad \omega_i = \exp \frac{\int \vec{x} \cdot \vec{c}}{\sqrt{x^2 + \rho^2}}. \quad (21)$$

Поэтому "вакуумы" $|n\rangle$ не являются истинными основными состояниями и в качестве такового следует взять когерентную суперпозицию

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta} |n\rangle. \quad (22)$$

Таким образом, в теории появляется новый параметр θ , отличающий разные θ -вакуумы^{/13/}.

На этом же пути можно разрешить^{/14/} так называемую $U(1)$ -проблему — отсутствие изоскалярного голдстоуновского мезона, связанного с спонтанным нарушением U_5 -инвариантности. Из-за наличия в U_5 -инвариантной теории аномалий аксиальный ток J_μ^5 не сохраняется и производная заряда равна

$$\partial_0 Q_5 = \partial_0 \int J_0^5 d^3x = -i \frac{g^2}{8\pi^2} \int F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} d^3x. \quad (23)$$

Однако если поле A_μ на бесконечности стремится к чистой калибровке, то для топологически тривиальных полей правая часть обращается в нуль и аксиальная аномалия не влияет на сохранение заряда

Q_5 . При наличии инстантонов ситуация меняется: правая часть представляет собой целочисленный топологический заряд. Поэтому преобразования $e^{i\alpha Q_5}$ с произвольным α не имеют смысла и остается лишь дискретная U_5 -инвариантность, спонтанное нарушение которой не сопровождается голдстоуновским мезоном.

Многие авторы^{/15/} высказывали гипотезу, что учет инстантонных конфигураций в теории Янга-Миллса может объяснить невилет кварков. С этой целью делались попытки вычислить континуальный интеграл, определяющий амплитуду перехода в окрестности инстантонных решений

$$S = \int \exp\{i \int [\mathcal{L}(A_{cl}) + A^2 \rho(A_{cl}) + \dots] dx\} dA, \quad (24)$$

где A_{cl} означает классические инстантонные решения, а A - квантовые флуктуации. Были найдены все самодуальные решения уравнений Янга-Миллса^{/16/}. Однако вычисление квантовых поправок в окрестности произвольного инстантонного решения остается нерешенной проблемой. До сих пор не найдено подходящей параметризации для решения с произвольным топологическим зарядом K . Неясно, имеет ли смысл рассматривать конфигурации с зарядом K как суперпозиции K инстантонов.

Наиболее подробно было исследовано приближение разреженного инстантонного газа^{/15/}, т.е. вычислялись квантовые поправки в окрестности конфигурации, содержащей далеко разведенные инстантоны и антиинстантоны малого размера. Основным результатом этих вычислений состоит в том, что даже при малой константе связи инстантоны могут давать большой вклад в наблюдаемые величины, но в этом приближении не возникает растущего потенциала и, следовательно, инстантоны не объясняют невилета кварков.

На сегодня вопрос о роли инстантонов в квантовой динамике окончательно не решен, но, скорее всего, они не имеют прямого отношения к проблеме невилета кварков. Более того, есть указания на то, что в точной квантовой задаче инстантонные эффекты вообще исчезают. В пользу этой точки зрения свидетельствует тот факт, что инстантоны отсутствуют в теории возмущений по N^{-1} , которая хорошо объясняет целый ряд эффектов, в том числе явление невилета кварков, во многих модельных теориях.

Примером может служить двумерная SU_N σ -модель, описываемая лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu n_i^* \partial_\mu n_i + (n_i^* \partial_\mu n_i)(n_j^* \partial_\mu n_j), \quad (25)$$

где n_i - комплексное N -компонентное киральное поле: $n_i^* n_i = 1$. В этой модели в классике при любом N существует инстантонные решения^{/17/}. Квантовые функции Грина вычисляются с помощью раз-

ложения по N^{-1} . Эффективный лагранжиан, учитывающий квантовые поправки, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{эф}} = |(\partial_\mu - i A_\mu) n_i|^2 - M^2 n_i^* n_i - \frac{N^2}{485 M^2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^2. \quad (26)$$

Квантовые поправки приводят к появлению массы у n -частиц и появлению дальнодействующего кулоновского взаимодействия между ними. В отличие от исходного лагранжиана (25) эффективный лагранжиан (26) порождает линейно растущий потенциал, обеспечивающий невилет "кварков". В то же время инстантонные решения для лагранжиана (26) отсутствуют^{/18/}.

Весьма возможно, что и в четырехмерной квантовой хромодинамике инстантоны являются артефактом. Стоит подчеркнуть, что на сегодня не существует ни одного недвусмысленного экспериментального факта, который подтверждал бы существование инстантонов. В частности, обсуждавшаяся выше $U(1)$ -проблема вполне может быть объяснена и без инстантонов. Для этого достаточно предположить, что вакуумная конфигурация для поля не является чистой калибровкой, т.е. $A_\mu \neq \partial_\mu \omega \omega^{-1}$ при $|x| \rightarrow \infty$: в этом случае правая часть равенства (23) не обязана равняться нулю и, следовательно, U_1 -инвариантность нарушена. Это позволяет дать альтернативное решение $U(1)$ -проблемы. Аналогия с двумерными моделями указывает на то, что в случае растущего потенциала (невилет кварков) естественно ожидать, что в конфигурации, отвечающей основному состоянию, существенную роль играет поле, отличное от чистой калибровки.

IV

Вопрос о том, какой динамический механизм может объяснить невилет кварков, остается неясным. На сегодня мы знаем лишь некоторые условия, которым должна удовлетворять теория, приводящая к невилету кварков.

Согласно Вильсону^{/19/} критерием невилета является поведение интеграла

$$\langle A(c) \rangle = \langle T_c P \exp \{ i g \oint A_\mu dx^\mu \} \rangle, \quad (27)$$

где C - замкнутый контур в евклидовом пространстве, а P означает упорядочение вдоль контура. Для прямоугольного контура со сторонами T и R при $T \rightarrow \infty$

$$A(c) \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} \exp\{-V(R)T\}, \quad (28)$$

где $V(R)$ - потенциал взаимодействия статических кварков. Если

$$A(c) \sim e^{-\lambda \Sigma(c)}, \quad (29)$$

где Σ - площадь контура, то потенциал линейно растет и кварки постоянно связаны. $V(R) \sim \text{const}$ отвечает случай свободных кварков.

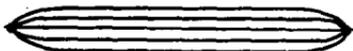


Рис. 1

Если имеет место (29), то силовые линии взаимодействия двух кварков имеет вид, изображенный на рисунке 1, т.е. кварки связаны глюонными струнами. Оператор $A(c)$, действуя на вакуум, создает тонкую трубку цветного электрического потока вдоль C . Такую ситуацию называют электрическим порядком.

Аналогичное явление известно в теории сверхпроводимости. В этом случае наблюдается эффект Мейснера - магнитное поле сосредоточено в вихревых трубках. Если поместить в сверхпроводящую среду магнитный монополь и антимонполь, то между ними возникнет трубка магнитного потока, имеющая постоянную энергию на единицу длины. Если обозначить оператор, порождающий такую трубку, через $B(c)$, то условие "невывлета монополей" будет иметь вид

$$\langle B(c) \rangle \sim e^{-\lambda \Sigma(c)}, \quad (30)$$

В этом случае имеет место "магнитный порядок". Электрический порядок отсутствует, т.к. электрическое поле локально поглощается плазмой, состоящей из куперовских пар. Среднее от оператора $A(c)$ пропорционально $e^{-\lambda L(c)}$, где $L(c)$ - длина контура C . Физические процессы, происходящие при этом в сверхпроводнике, иллюстрируются рис.2. Магнитный поток, возникающий между монополем и антимонополем, порождает круговые сверхпроводящие токи, эквивалентные магнитным диполям, локально нейтрализующим магнитные заряды. Локальная плотность заряда всюду равна нулю.

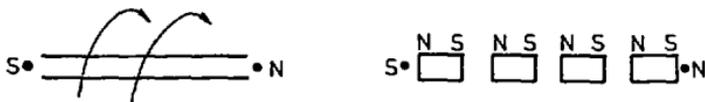


Рис.2

Каким образом может возникнуть аналогичная картина в квантовой хромодинамике - это вопрос, ответа на который мы пока не знаем. Более подробно он обсуждается в работах^{/20/}.

Частичный ответ на этот вопрос можно получить в моделях, в которых пространство-время заменено решеткой. Существует два основных варианта теорий, использующих решетки. В первом варианте рассматривается евклидово пространство, дискретное по всем четырём направлениям^{/21/}. С узлами решетки ассоциировано поле $\psi(x)$, преобразующееся при калибровочных преобразованиях с помощью матриц R :

$$\psi(x) \rightarrow R(x)\psi(x), \quad (31)$$

С каждым ребром решетки связано калибровочное поле, являющееся элементом калибровочной группы

$$A(x, x') \rightarrow R(x) A(x, x') R^{-1}(x'). \quad (32)$$

В другом варианте ^{/22/} решетка вводится лишь по пространственным направлениям, а время остается непрерывным, что позволяет сформулировать гамильтонову динамику.

Основным преимуществом решетчатых моделей является возможность построить помимо обычной теории возмущений разложение по обратной константе связи. В этом приближении в решетчатых моделях удается получить постоянно связанные кварки. При этом низшие бесцветные связанные состояния порождают стандартные мультиплеты.

Однако получающиеся при этом характерные массы $M \gg q^{-1}$, где q - постоянная решетки. Лоренц-инвариантность сильно нарушена, и предел $q \rightarrow 0$ не имеет смысла. Поэтому разложение сильной связи на решетке не может служить основой реалистической теории.

Вильсон ^{/23/} предложил оценить интеграл (27), не пользуясь разложением по какому-либо параметру, с помощью численного интегрирования по методу Монте-Карло. Им разработана программа вычисления этого интеграла для решетки, состоящей из ~ 16000 ребер. Это вычисление должно дать ответ на вопрос о наличии или отсутствии в квантовой хромодинамике электрического порядка.

Другое направление исследования решетчатых систем связано с использованием преобразования дуальности ^{/24/}. Преобразование дуальности является преобразованием Фурье, связывающим переменные порядка и беспорядка, примером которых могут служить уже упоминавшиеся переменные $A(c)$ и $\beta(c)$. Поэтому, чтобы изучить фазу, в которой какие-либо переменные упорядочены, достаточно изучить неупорядоченную фазу для дуальных переменных. При этом если в "прямых" переменных существует разложение по какому-либо малому параметру, то в дуальных переменных существует разложение по обратному параметру. Преобразование дуальности широко использовалось в задачах статистической механики, в частности в модели Изинга.

Для калибровочных теорий интересные результаты^{/25/} были получены с помощью преобразования дуальности для решетчатых моделей с калибровочной группой $Z(N)$, элементами которой являются диагональные матрицы $N \times N$: $\exp\{2\pi i h/N\}$, $h < N$. Исследование этих моделей представляет интерес, т.к. группа $Z(N)$ является центром для $SU(N)$ и, как было показано Г.Хофтом^{/20/}, наличие нетривиального центра существенно для объяснения невыхвата кварков. Для $Z(N)$ -моделей были явно построены переменные порядка и беспорядка и было продемонстрировано явление невыхвата.

У

Основная трудность в реализации аналогичной программы для теории Янга-Миллса в непрерывном случае состоит в том, что в этом случае не существует естественного параметра разложения. В связи с этим заманчивым кажется предположение о том, что теория Янга-Миллса точно решается. Надежды на это связаны с аналогией между теорией Янга-Миллса и двумерной нелинейной σ -моделью. Как известно, двумерная σ -модель допускает точное решение^{/26/}. Точная решаемость модели обусловлена существованием бесконечной системы сохраняющихся токов^{/27/}, что, в свою очередь, обусловлено наличием скрытой симметрии. Скрытая симметрия σ -модели становится явной, если сформулировать ее в других переменных. Нелинейную σ -модель можно формулировать в терминах пары комплексных полей V_μ, U_μ^* и одного вещественного поля A_μ ^{/28/}. Лагранжиан σ -модели в этих переменных имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{V}_\mu V_\mu, \quad (33)$$

где поля V_μ удовлетворяют дополнительным условиям

$$(\partial_\mu - i A_\mu) \tilde{V}_\mu = 0; \quad \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu V_\nu = \frac{1}{2} \bar{V}_\mu \tilde{V}_\mu, \quad (34)$$

\tilde{V}_μ обозначает дуальный вектор $\tilde{V}_\mu = i \epsilon_{\mu\nu} V_\nu$.

Лагранжиан (33) и дополнительные условия (34) инвариантны относительно преобразований

$$(V_\mu \pm \tilde{V}_\mu) \rightarrow e^{\pm i\psi} (V_\mu \pm \tilde{V}_\mu); \quad A_\mu \rightarrow A_\mu. \quad (35)$$

Как было показано в работе^{/29/}, эта инвариантность приводит к существованию бесконечной системы сохраняющихся токов, что позволяет найти точное решение в рамках этой модели.

Для четырехмерной теории Янга-Миллса аналогичную систему законов сохранения удается записать, если сформулировать эту теорию в терминах контурных переменных^{/30/}:

$$U(C_x) = \text{Pexp} \left\{ i \oint_C A_\mu dx^\mu \right\}, \quad (36)$$

где C_x - контур, начинающийся в точке x , а упорядочение понимается в смысле решетчатой аппроксимации. Тензор напряженности поля Янга-Миллса выражается через вариационную производную

$$F_{\mu\nu}(x) = U^{-1} \frac{\delta U}{\delta C_{\mu\nu}(x)}. \quad (37)$$

Это представление явно демонстрирует аналогию между $F_{\mu\nu}(x)$ и киральным током L_μ в нелинейной σ -модели: $L_\mu = \omega^{-1} \partial_\mu \omega(x)$. Уравнения движения, записанные в контурных переменных, совпадают по форме с уравнениями σ -модели после замены обычных производных вариационными:

$$\frac{\delta}{\delta C_{\mu\nu}(x)} \left\{ U^{-1}(C_y) \frac{\delta}{\delta C_{\mu\nu}(x)} U(C_y) \right\} = 0. \quad (38)$$

При этом число переменных очевидно понижается на единицу - т.е. двумерной σ -модели соответствует трехмерная теория Янга-Миллса.

Рассуждения, приводящие к существованию бесконечной системы сохраняющихся токов, почти без изменения переносятся на этот случай. Если в двумерной σ -модели из этого факта следовало отсутствие множественного рождения, то в теории Янга-Миллса контурные законы сохранения, по-видимому, должны приводить к сохранению числа струн. Простейшее приближение для уравнения (38) приводит к уравнению струны^{/31/}.

Использование контурных переменных открывает интересные возможности развития теории. Однако на сегодня здесь существует гораздо больше вопросов, чем ответов. Пока что удалось построить сохраняющиеся токи только для трехмерной модели и обобщение на четырехмерный случай неочевидно.

Неясно, как практически работать с контурными переменными. Сохраняющиеся величины выражаются в этом случае через континуальные интегралы, для которых отсутствуют регулярные методы вычислений.

Наконец, если даже удастся обойти все эти трудности, то результатом, по-видимому, должна быть теория взаимодействующих струн. Как известно, на сегодня не существует непротиворечивой квантовой теории струн в четырехмерном пространстве. Существующие модели страдают патологическими особенностями тахионного типа. Не исключено, однако, что струнная модель, полученная на основе теории Янга-Миллса, окажется свободной от патологических особенностей. Основанием для таких надежд может служить тот факт, что теория Янга-Миллса, несомненно, выделена из всех прочих теорий. В частности, она является единственной теорией безмассового векторного поля, в которой отсутствуют патологии, связанные с неположительной определенностью энергии.

Литература:

1. С.Н. Yang, R. Mills. Phys. Rev. 96, 191, 1954.
2. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. "Наука", 1978.
3. L. Faddeev, V. Popov. Phys. Lett., B25, 29, 1967. В. De Witt. Phys. Rev. 162, 1195, 1967.
4. А. А. Славнов. ТМФ, 10, 153, 1972. J. C. Taylor. Nucl. Phys., B33, 436, 1971.
5. В. Н. Грибов. Труды 12 школы ЛЯФ, 1977, Nucl. Phys., B139, 1, 1978. I. Singer. Comm. Math. Phys., 60, 7, 1976.
6. I. Goldstone, R. Jackiw. Phys. Rev. D16, 1080, 1978. Л. Д. Фаддеев и др. Препринт ЛОМИ, 1978.
7. R. W. Higgs. Phys. Rev. Lett., 13, 508, 1964. T. W. B. Kibble. Phys. Rev., 132, 1554, 1957.
8. S. Weinberg. Phys. Rev. Lett., 19, 1264, 1967. A. Salam. Elementary Particle Theory, Stockholm, 1968.
9. А. А. Славнов. Труды IX Совещания по нелокальным теориям. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976, стр. 165; Nuclear Phys., B124, 301, 1977.
10. E. Egorian, A. Slavnov. Annals of Phys., 116, 358, 1978.
11. A. Slavnov. Preprint Saclay, 1978.
12. A. A. Belavin et al. Phys. Lett., 59B, 85, 1975.
13. S. Callan et al. Phys. Lett., 63B, 334, 1976. R. Jackiw, R. Rebbi. Phys. Rev. Lett., 37, 172, 1976.
14. G't Hooft. Phys. Rev. Lett., 37, 8, 1976.
15. А. М. Polyakov. Nucl. Phys. B121, 429, 1977. S. Callan et al. Phys. Rev. D17, 2134, 1978.

16. M. Atiya et al. Phys. Lett., 65A, 185, 1978.
 A. Belavin, V. Zaharov. Preprint Chernogolovka, 1978.
17. В. Л. Голо, А. М. Переломов. Препринт ИТЭФ-45, 1978.
18. M. Lusher. Nordita preprint, 1978.
 E. Witten. Harvard Preprint, HUTP-78/A042, 1978.
19. K. Wilson. Phys. Rev., D10, 2445, 1974.
20. G't Hooft. Nucl. Phys., B140, 82, 1978; K. Huang. MIT Preprint, 1978.
21. K. Wilson. Erice Lecture Notes, 1975.
 R. Balian et al. Phys. Rev., D11, 2098, 1975.
22. J. Kogut, L. Susskind. Phys. Rev., D11, 395, 1975.
23. K. Wilson. Cornell Preprint, 1978.
24. S. Mandelstam. Phys. Rep. 23C, N 3, 1976.
 G't Hooft. Proceedings of Palermo Conference, 1975.
25. A. Casher. Preprint, DESY 78/43, 1978.
26. А. Замолодчиков, М. Замолодчиков. Препринт ИТЭФ-35, 1978.
27. K. Pohlemeyer. Comm. Math. Phys., 46, 207, 1976.
 M. Lusher. Nucl. Phys., B135, 1, 1978.
28. М. А. Семенов, Л. Д. Фаддеев. Вестник ЛГУ, №13, 81, 1977.
29. D'Adda et al. Nordita Preprint, 1978.
30. P. Dirac. Phys. Rev. 74, 817, 1948; S. Mandelstam. Phys. Rev., 175,
 1580, 1965; T. Wu, C. N. Yang. Phys. Rev., D12, 3845, 1975.
31. J. Nambu. Preprint UT-310, 1978.
 И. Арэфьева. Данный сборник, стр. 200.

ПОЛЕ ЯНГА-МИЛЛСА КАК КИРАЛЬНОЕ ПОЛЕ НА КОНТУРЕ
И ДУАЛЬНОСТЬ ХОФТА-МАНДЕЛЬСТАМА

И.Я.Арефьева

Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР, Москва

Введение

Квантовая хромодинамика (QCD) является общепринятым кандидатом на роль теории, описывающей сильные взаимодействия. Из этой теории должен следовать спектр адронов, согласующийся с гипотезой удержания кварков. От теории, претендующей на роль теории сильных взаимодействий, ожидается прежде всего различное поведение в разных режимах: на малых расстояниях должно отсутствовать взаимодействие кварков; на больших расстояниях должен существовать потенциал, удерживающий кварки. Хорошо известно, что на малых расстояниях (малая эффективная константа связи) теория возмущений дает правильные предсказания (асимптотическая свобода); в области больших расстояний (т.е. при больших константах связи) нет сколько-нибудь удовлетворительной схемы расчетов, дающей картину удержания кварков.

Обычно считается, что для описания удержания кварков достаточно рассмотреть сначала только свойства самодействующего калибровочного поля $A_\mu(x)$. Существуют различные попытки (пока безуспешные) работать с такой теорией, не будем здесь на них останавливаться, отметим только, что надежды связываются либо с квантоклассикой (инстантоны и др.^{1,3,4,5/}, либо с $1/N$ - теорией возмущений (N - число цветов)^{16,7/}, т.е. с той или иной модифицированной теорией возмущений для локального поля $A_\mu(x)$.

Есть основания надеяться, что для работы в области больших констант связи полезны переформулировка локальной калибровочной теории как нелокальной теории поля на контуре, а также понятие дуальности. Эти вещи и будут обсуждаться в настоящей лекции.

Напомним, что удержание кварков и спектр адронов хорошо феноменологически описываются в терминах протяженных объектов (мешков, струн, вихрей)^{12/}. Такие объекты правильно качественно отражают физику явления, но нет регулярных методов работы с ними. Желательно получить протяженный объект типа струн (т.е. струну "без патологий") при помощи регулярной процедур на основе калибровочной теории.

В работе /8/ было введено понятие главного кирального поля на контуре и показано, что теория Янга-Миллса может быть переформулирована как теория главного кирального поля на контуре. Таким образом, протяженный объект - контур - возникает в теории с самого начала. Такая формулировка, по-видимому, адекватна физике, и поэтому приводит к возможности получать точные результаты (например, полная интегрируемость уравнений Янга-Миллса при D (размерность пространства-времени), равном 3. В некотором приближении для полей на контуре получается уравнение типа струны, см. первый раздел (ср. /9, 10, 11/), но систематической схемы вычислений пока не построено.

Для построения такой схемы, по-видимому, будет полезным понятие дуальности. В решетчатых моделях статистической механики часто используется понятие дуального преобразования (преобразование Крамера-Ванье /12/, которое позволяет связать высоко- и низкотемпературные (т.е. большие и малые константы связи) характеристики теории. Важность изучения свойств дуальности модели теории поля очевидна, поскольку переход к дуальной теории позволяет для исследования данной модели в области сильной связи применять результаты, полученные в рамках дуальной ей модели в области слабой связи. Особенно богатая информация получается, если теория самодуальна. Например, в плоской модели Изинга таким образом определяется величина критической температуры. Кадановым /13/ было предложено элегантное описание фаз и критического поведения в модели Изинга при помощи пары дуальных переменных: σ -параметра порядка, μ -параметра беспорядка. Аналогичное описание фаз в квантовой хромодинамике было предложено Хоффом /14/ на основе алгебры операторов на контурах: $A(C)$ и $B(C')$, где $A(C)$ (вильсоновский оператор) - параметр порядка, $B(C')$ (оператор Нильсена-Олесена) - параметр беспорядка. Алгебра симметрична относительно замены $A \leftrightarrow B$, а также симметрична характеристика фаз: фаза, в которой среднее от оператора Нильсена-Олесена убывает как экспонента от минимальной площади S' поверхности, натянутой на замкнутый контур C' , когда контур становится большим, является хиггсовской фазой, а фаза, в которой среднее от вильсоновского оператора убывает как экспонента от площади S , соответствующей контуру C , является фазой удержания кварков. Во второй части лекции будет построена операторная реализация $B(C')$ для произвольного замкнутого кон-

тура C' и показано, что в отличие от модели Изинга гамильтониан не симметричен относительно замены "порядок" \leftrightarrow "беспорядок". Поэтому такую дуальность мы будем называть кинематической дуальностью. В абелевом случае, как будет видно из формул второго раздела, такая симметрия является и динамической, и, по существу, выражает в переносных на контуре хорошо известную симметрию гамильтониана относительно перестановки электрического и магнитного полей.

В третьей части лекции мы рассмотрим простейшую абелеву калибровочную теорию на решетке при $D=4 - \mathcal{Z}(N)$ - модель.

$\mathcal{Z}(N)_4$ - модель особенно интересна в связи с тем, что она является минимальной реализацией алгебры Хофта [14] и удовлетворяет уравнениям Эйлера для $SU(N)$ -инвариантной калибровочной теории на решетке. Не исключено, что именно ввиду $\mathcal{Z}(N)$ - возбуждений является определяющим в фазе удержания кварков в непрерывном пределе. Будет показано, что для $\mathcal{Z}(N)$ - модели можно, используя нелокальные объекты, ввести аналог онзагеровских (в двумерной модели Изинга^{/15/}) "фермионных переменных", в некотором смысле линейризуя задачу^{/16/}.

I. ГЛАВНОЕ КИРАЛЬНОЕ ПОЛЕ НА КОНТУРЕ

I. Поле на контуре и редукция

Будет показано, что свойства калибровочной теории могут быть изучены с помощью перехода от локального поля $A_\mu(x)$ к полю на контуре. Поле $g(\Gamma_x)$ называется главным киральным полем на контуре^{/8/}, если: 1) оно определено на контурах Γ_x в \mathbb{R}^D с фиксированной точкой x и при этом является представлением группы голономии петель со значениями в группе G ; 2) является решением вариационного уравнения (5), которое есть "контурный" аналог уравнения Эйлера для обычного локального главного кирального поля^{/17/}. Здесь мы повторим доказательство^{/8/} того, что $g(\Gamma_x)$, определенное как упорядоченный вдоль контура фазовый фактор^{/18/} $g(\Gamma_x) = \text{Pexp}(i\oint A_\mu dx^\mu)$, является главным киральным полем на контуре, если $A_\mu(x)$ - решение уравнений Янга-Миллса.

Уравнение движения для $g(\Gamma_x)$ в D -мерном случае содержит инфинитезимальные вариации контура только в $D-1$ независимых направлениях, ортогональных направлению контура. Таким образом, вводя поле на контуре, мы сделали редукцию D -мерной задачи для поля $A_\mu(x)$ к $D-1$ -мерной задаче для $g(\Gamma_x)$. Следовательно, мы можем результаты, полученные для локального

главного кирального поля при $D=2$, которое в этом случае вполне интегрируемо [19, 20], перенести на случай главного кирального поля на контуре в 3-мерном пространстве-времени. Все алгебраические соотношения, оправданные для локального главного кирального поля при $D=2$, переносятся на случай кирального поля на контуре, если заменить обычные производные на вариационные в фиксированной точке, а $\epsilon_{\mu\nu}$ на $\epsilon_{\mu\nu\rho}$, умноженное на касательный вектор контура в этой точке. В частности, так можно получить представление Лакса для главного кирального поля на контуре. В качестве примера мы приведем первый нетривиальный сохраняющийся заряд [8], который является обобщением заряда Лошера-Польмэстера [19] для локального кирального поля.

Чтобы осуществить редукцию 4-мерной задачи к 2-мерной, нужно, помимо направления контура Γ_x , фиксировать еще одно направление. Возможно, для этого будут полезны переменные $\tilde{q}(\Gamma'_x)$, такие, что $\text{Tr } \tilde{q}(C) = \mathcal{B}(C)$.*)

2. Главное киральное поле на контуре на решетке

Рассмотрим поле Янга-Миллса с периодическими граничными условиями, определенное на гиперкубической решетке в D -мерном евклидовом пространстве-времени [21]. Действие дается формулой

$$S = \sum_{\{P_{x;\mu\nu}\}} \text{Tr} [U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U_{x+\hat{\nu},\mu}^{-1} U_{x,\nu}^{-1}], \quad (1)$$

здесь индексы (x,μ) нумеруют ребра с началом в точке x и концом в $x+\hat{\mu}$, $P_{x;\mu\nu}$ - плакетн, задаваемые ребрами (x,μ) и (x,ν) ; $U_{x,\mu}$ обозначает элемент группы матриц G , который сопоставляется ребру (x,μ) .

Произвольному замкнутому контуру Γ_y на решетке, который начинается в точке y и проходит по вершинам решетки: $y, y+\hat{\mu}_1, \dots, y+\sum_{i=1}^{N-1} \hat{\mu}_i, \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i = 0$, мы ставим в соответствие элемент группы $g(\Gamma_y)$ по следующему правилу:

*) Здесь и ниже произвольный контур в D -мерном пространстве-времени мы обозначаем через Γ , а контур в $D-1$ -мерном пространстве при фиксированном времени - через C .

$$g(\Gamma_y) = U_{y, \mu_1} U_{y+\hat{\mu}_1, \mu_2} \dots U_{y+\sum_{i=1}^{N-1} \hat{\mu}_i, \mu_N}. \quad (2)$$

Заметим, что $g(\Gamma_y)$ преобразуются локально при калибровочных преобразованиях: $U_{x, \mu} \rightarrow V_x U_{x, \mu} V_{x+\hat{\mu}}^{-1}$, $g(\Gamma_y) \rightarrow V_y g(\Gamma_y) V_y^{-1}$.

Наряду с контуром Γ_y введем в рассмотрение контур $\Gamma_y + \Delta_\mu(x)$, который получается в результате "приставления" к контуру Γ_y в точке x пикета $\rho_{x, \mu t}$, t - направление ребра, принадлежащего контуру Γ_y и выходящего из точки x в заданном направлении обхода (рис. 1^а). Если $\mu = t$, то контур $\Gamma_y + \Delta_\mu(x)$ совпадает с исходным контуром Γ_y . Таким образом, операция "приставления" заменяет ребро (x, t) на три ребра (x, μ) , $(x+\hat{\mu}, t)$, $(x+\hat{\mu} + \hat{t}, -\mu)$.

В этих обозначениях имеет место соотношение: $g(\rho_{x, \mu \nu}) = g^{-1}(\Gamma_x) g(\Gamma_x + \Delta_\mu(x))$, где Γ_x - контур, выходящий из точки x в направлении ν , и $T_x g(\rho_{x, \mu \nu}) = T_x g^{-1}(\Gamma_y) g(\Gamma_y + \Delta_\mu(x))$, где Γ_y - контур, проходящий через точку x в направлении ν . Таким образом, для конечной решетки исходное действие (I) можно представить в виде

$$S = \frac{1}{C} \sum \sum T_x [g^{-1}(\Gamma_x) g(\Gamma_x + \Delta_\mu(x)) + g(\Gamma_x) g^{-1}(\Gamma_x + \Delta_\mu(x))], \quad (3)$$

$$S = \frac{1}{C'} \sum \sum T_x [g^{-1}(\Gamma_y) g(\Gamma_y + \Delta_\mu(x)) + g(\Gamma_y) g^{-1}(\Gamma_y + \Delta_\mu(x))], \quad (3')$$

В суммах по контурам мы включаем только контуры без повторяющихся циклов. В этом случае универсальные множители C и C' - конечны.

Из действия (3) мы получаем следующее уравнение Эйлера:

$$\sum_\mu g(\Gamma_x + \Delta_\mu(x)) - g(\Gamma_x) \sum_\mu g^{-1}(\Gamma_x + \Delta_\mu(x)) g(\Gamma_x) = 0. \quad (4)$$

Выбирая контур $\Gamma_x = \Gamma_x^{(0)}$, как показано на рис. 1^б, мы получаем уравнение Эйлера, соответствующее непосредственно действию (I).

$$\sum_\mu g(\rho_{x, \mu \nu}) = \sum_\mu g(\rho_{x, \nu, -\mu}). \quad (4')$$

Это уравнение позволяет нам записать уравнение для $g(\Gamma_y)$, когда "точка приставки" и начало контура не совпадают:

$$\sum_{\mu} g(\Gamma_y + \Delta_{\mu}(x)) - g(\Gamma_y) \sum_{\mu} g^{-1}(\Gamma_y + \Delta_{-\mu}(x)) g(\Gamma_y) = 0. \quad (5)$$

Заметим, что это уравнение также может быть выведено из вариационного принципа для действия (3), если учесть, что оба слагаемых в (3) не меняются, когда мы варьируем $U_{x,\mu}$, $x \neq x$.

3. Уравнение кирального поля на контуре

В непрерывном случае каждому замкнутому контуру мы сопоставляем элемент группы по формуле, аналогичной формуле (2):

$$g(\Gamma_y) = P \exp(i \oint_{\Gamma_y} A_{\mu} dx^{\mu}),$$

где A_{μ} - элемент алгебры Ли группы G и упорядочение понимается в смысле перехода к решетчатой аппроксимации и сопоставления каждому ребру (x, μ) элемента группы $\exp(iaA_{\mu}(x))$ (a - постоянная решетки), а затем упорядочению этих матриц, как в формуле (2). При этом аналогом операции "приставления" $\Delta_{\mu}(x)$ является вариация контура Γ_y в окрестности точки x в ортогональном направлении $-\delta^{\mu} \Gamma_{\mu t}(x)$, где t - касательное направление контура в точке x . Вариации $g(\Gamma_y)$ удовлетворяют уравнению, которое получается при переходе к непрерывному пределу в уравнении (5). При этом члены, линейные по параметру a , сокращаются и уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma_{\mu t}(x)} \left[g^{-1}(\Gamma_y) \frac{\delta}{\delta \Gamma_{\mu t}(x)} g(\Gamma_y) \right] = 0. \quad (5')$$

Уравнение (5') аналогично уравнению для локального главного кирального поля $\partial_{\mu}(g^{-1}(x)) \partial_{\mu} g(x) = 0$. Отметим, что в D -мерном случае суммирование в (5') идет только по $D-1$ независимым направлениям, нормальным к направлению контура в точке x . Таким образом, поле Янга-Миллса в терминах переменных на контуре аналогично главному киральному полю в $D-1$ -мерном пространстве-времени. Следовательно, вводя контур, мы эффективно понизили размерность системы на 1.

4. Высшие законы сохранения

Для простоты рассмотрим случай группы $SU(2)$ и введем параметризацию $g(\Gamma_j) = n_0(\Gamma_j) + i \tau_j n_j(\Gamma_j)$, где $\tau_j, j=1,2,3$ - обычные матрицы Паули. Поле n удовлетворяет условию $n^2(\Gamma_j) \equiv \sum_{a=0}^3 n_a^2(\Gamma_j) = 1$. В этой параметризации уравнение (5) имеет вид:

$$\sum_{\mu} [n_a(\Gamma_j + \Delta_{\mu}(x)) + n_a(\Gamma_j + \Delta_{-\mu}(x))] + \delta(\Gamma_j, x) n_a(\Gamma_j) = 0, \quad a=0,1,2,3, \quad (6)$$

где множитель Лагранжа $\delta(\Gamma_j, x)$ определяется из условия $n^2(\Gamma_j) = 1$.

В непрерывном пределе мы имеем

$$\sum_{\mu} \frac{\delta}{\delta \Gamma_{\mu t}(x) \delta \Gamma_{\mu t}(x)} n_a(\Gamma_j) + \delta(\Gamma_j, x) n_a(\Gamma_j) = 0. \quad (7)$$

Локальным аналогом уравнения (7) является уравнение кирального поля: $\partial_{\mu} \partial_{\mu} n_a(x) + \delta(x) n_a(x) = 0$, $n^2(x) = 1$. В двумерном случае это вполне интегрируемая система, бесконечная серия интегралов движения которой получается из представления Лакса^{19,20/}.

Здесь мы ограничимся построением контурного аналога первого нетривиального интеграла движения локального уравнения - заряда Лихнера-Польмайера^{19/}. Наш заряд будет функционалом от изотопического сохраняющегося тока:

$$\gamma_{\mu}^{ab}(\Gamma_j, x) = 2 \left[n_a(\Gamma_j) \frac{\delta n_b(\Gamma_j)}{\delta \Gamma_{\mu t}(x)} - n_b(\Gamma_j) \frac{\delta n_a(\Gamma_j)}{\delta \Gamma_{\mu t}(x)} \right],$$

$$\frac{\delta \gamma_{\mu}^{ab}(\Gamma_j, x)}{\delta \Gamma_{\mu t}(x)} = 0.$$

Нетрудно проверить, что ток $\gamma_{\mu}(\Gamma_j, x) = (\gamma_{\mu}^{ab}(\Gamma_j, x))$ удовлетворяет следующему важному соотношению:

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma_{\mu t}(z)} \gamma_{\mu}(\Gamma_j, x) - \frac{\delta}{\delta \Gamma_{\nu t}(x)} \gamma_{\mu}(\Gamma_j, z) + [\gamma_{\mu}(\Gamma_j, z), \gamma_{\nu}(\Gamma_j, x)] = 0. \quad (8)$$

Ток $J_{\mu}(\Gamma_y, x)$ можно интерпретировать как связность на многообразии контуров, а соотношение (8) — как обрешение в нуль кривизны этой связности. Таким образом, введя поле на контуре, мы свели задачу для локального поля с нетривиальной локальной кривизной ($F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}]$) к задаче для нелокального поля с тривиальной кривизной на многообразии контуров.

Каждой точке $x \in \mathbb{R}^3$ мы будем сопоставлять матрицу — "звезд" $Q(x)$, которая строится как сумма вкладов "плотностей зарядов" $Q(\Gamma, x)$, отвечающих пространственному контуру (т.е. контуру, лежащему в плоскости $x_0 = \text{const}$), проходящему через точку x .

$$Q(x) = \int_{\substack{\Gamma \in \{z|z_0 = \text{const}\} \\ \Gamma \ni x}} d\Gamma Q(\Gamma, x),$$

$\int d\Gamma$ мы понимаем как предел суммы по решетчатым контурам без повторяющихся циклов. Потребуем, чтобы $Q(x)$ не изменялось при изменении всех контуров во временном направлении в окрестности точки x . Для этого простейшее нетривиальное $Q(\Gamma, x)$ достаточно выбрать в следующем виде:

$$Q(\Gamma, x) = \varepsilon_{0ij} t_j(\Gamma_y, x) J_i(\Gamma_y, x) + \int_{\substack{\Gamma' \in \{z|z_0 = \text{const}\} \\ \Gamma' \ni x}} dr'_{\alpha} \times [J_0(\Gamma_y, x), J_0(\Gamma'_y, x)] f(\Gamma, \Gamma'),$$

где функция $f(\Gamma, \Gamma')$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \delta f(\Gamma, \Gamma') / \delta \Gamma_{it}(x) &= \varepsilon_{0ix} t_t(x) \delta(\Gamma, \Gamma'), \\ \delta f(\Gamma, \Gamma') / \delta \Gamma'_{it}(x) &= -\varepsilon_{0ix} t'_t(x) \delta(\Gamma, \Gamma'), \quad i=1,2, \\ \delta f(\Gamma, \Gamma') / \delta \Gamma'_{0t}(x) &= 0, \quad \delta f(\Gamma, \Gamma') / \delta \Gamma_{0t}(x) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$t_t(x)$, $t'_t(x)$ — касательные векторы контуров Γ , Γ' в точке x , $\varepsilon_{012} = 1$, $\varepsilon_{021} = -1$. Последние два уравнения, очевидно, будут удовлетворяться, если мы выберем функцию $f(\Gamma, \Gamma')$, зависящую только от проекций этих контуров на плоскость (1,2), проходящую через их общую точку x . Таким образом, достаточно

решить уравнения (9) только для пространственных контуров Γ, Γ' . Функция $f(\Gamma, \Gamma')$, удовлетворяющая этим условиям, является аналогом функции $\mathcal{E}(x_1 - x_1')$, входящей в заряд Дирака-Польмайера в локальном случае.

5. Квантовый случай

В квантовом случае основными величинами в контурной формулировке являются корреляционные функции $\langle g(\Gamma')g(\Gamma)\dots \rangle^*$. Различное поведение одноконтурной функции при больших контурах характеризует разные фазы каллобровочной теории Γ' . Контурные корреляционные функции удовлетворяют квантовому аналогу уравнения (5).

По-видимому, в разумном приближении, по аналогии с локальным полем Γ, Γ' естественно предположить, что в квантовом варианте уравнения (7) множитель Лагранжа $\mathcal{G}(\Gamma, x) = C \neq 0$. В этом приближении квантовый аналог уравнения (7) запишется следующим образом:

$$\sum_{\mu} \frac{\delta^2}{\delta \Gamma_{\mu t}(x) \delta \Gamma'_{\mu t}(x)} n_a(\Gamma_y) + C n_a(\Gamma_y) = 0. \quad (7)$$

Это уравнение по виду совпадает с уравнением Намбу Γ, Γ' первично квантованной струны.^{жж)} Однако в нашем случае $n_a(\Gamma_y)$ не являются независимыми переменными, т.к. для соответствующих $g(\Gamma)$ выполняются условия типа: $\langle g(\Gamma_x)g(\Gamma'_x) \rangle = g(\Gamma''_x)$, где контуры $\Gamma_x, \Gamma'_x, \Gamma''_x$ как на рис. 2. Таким образом, мы получаем линейное уравнение с дополнительным нелинейным условием и такая система определяет объект типа струны. Аналогично тому, как из справедливости в основном приближении для локальных корреляционных функций уравнения Клейна-Гордона следует существование массивных частиц в теории, так и справедливость уравнения (7') для контурных корреляционных функций означает существование "струн" в теории.

Можно выдвинуть гипотезу, что аналогия с локальным случаем может быть распространена и дальше. Для локального квантового кирального поля имеет место квантовые законы сохранения Γ, Γ' , кото-

*) Вопросы перенормировок для контурных величин в рамках стандартной теории возмущений обсуждаются в [29].

жж) По поводу других возможностей получения струн или вихрей из теории поля см., например, [25-27] и недавние работы [9-II, 28].

рые интерпретируются как законы сохранения числа частиц и набора импульсов. Возможно, физический смысл полученных нелокальных законов сохранения заключается в сохранении числа "струн" в трехмерном пространстве-времени. Если в локальном случае вывод и проверка интерпретации квантовых законов сохранения основана на существовании регулярной теории возмущений,^{*)} свободной от инфракрасных и ультрафиолетовых расходимостей^{/22/}, то теории возмущений, адекватной нелокальным киральным полям на контуре, пока не построено.^{**)} Одной из задач на этом пути является задача правильного квантования "струны".^{***)}

II. Дуальность Мандельштама-Хофта

I. Дуальность Мандельштама-Хофта и удержание кварков

Для объяснения удержания кварков в QCD Мандельштам^{/33,34/} и Хофт^{/35,14/} предложили использовать электромагнитную дуальность с тем, чтобы интерпретировать электрический конфайнмент (удержание кварков) как эффект, дуальный к эффекту Мейснера. При этом явлении дуальным эффектом сжатия магнитного потока в трубку (трубка потока имеет конечную постоянную энергию на единицу длины, об этом принято говорить, как о существовании у системы "магнитного параметра порядка") в фазе Хиггса будет сжатие электрического потока в трубку ("электрический параметр порядка") в фазе удержания кварков.^{****)} Дуальность Мандельштама-Хофта с

*) Недавнее успешное развитие квантового метода обратной задачи [30] позволяет надеяться на точные результаты.

**) Теория возмущений для взаимодействующих полей на контурах рассматривалась в [31].

***) Об одной возможности квантования обычной струны в 4-мерном случае см. [32].

****) Для компактной абелевой теории на решетке [1,3] в [36] показано, что существует преобразование (сводящееся к замене электрических полей на магнитные), которое связывает беспорядок в режиме сильной связи исходной теории с порядком в "замороженном" сверхпроводнике (см. также [3,26,37]).

самого начала формулируется, как кинематическая симметрия (т.е. симметрия алгебры, а не гамильтониана) между операторами, определенными на пространственных замкнутых контурах, которые создают вихри электрического и соответственно магнитного потоков. Первый из этих операторов - оператор Вильсона - $\mathcal{A}(C) = T\chi g(C)$, второй - $\mathcal{B}(C')$ - оператор рождения вихря Нильсена - Олесена.

Операторы $\mathcal{B}(C')$ определены в [14] действием на собственные векторы поля A_i :

$$\mathcal{B}(C')|A_i\rangle = |A_i^{\Omega(C')}\rangle, \quad A_i^{\Omega} \equiv \Omega^{-1} A_i \Omega + \Omega^{-1} \partial_i \Omega, \quad \Omega \in SU(N),$$

где $\Omega(C')$ - сингулярное на замкнутом контуре калибровочное преобразование в следующем смысле: если другой произвольный замкнутый контур C'' , параметризованный углом $0 \leq \theta \leq 2\pi$, зацепляет контур C' так, что число зацеплений равно n , то $\Omega(C')(2\pi) = \Omega(C')(0) e^{2\pi i n/N}$.

Операторы $\mathcal{A}(C)$ и $\mathcal{B}(C')$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\mathcal{A}(C)\mathcal{B}(C') = \mathcal{B}(C')\mathcal{A}(C) e^{2\pi i n(C,C')/N}, \quad (10)$$

где $n(C,C')$ - число зацеплений контуров.

Сравним эту дуальность с дуальностью Крамерса-Ванье в модели $\mathcal{Z}(2)_4$. В этой модели выражение для гамильтониана симметрично (с точностью до замены константы связи $\lambda \rightarrow 1/\lambda$) в терминах операторов $\mathcal{A}(\rho)$ (магнитный поток, сопоставляемый плакету ρ) и $\mathcal{B}(\beta^*)$ (электрический поток, сопоставляемый плакету дуальной решетки ρ^*). Эта симметрия проявляется как следствие симметрии относительно преобразования $\epsilon_3, \epsilon_1, \lambda \rightarrow \mu_3, \mu_1, 1/\lambda$ (самодуальность) [38, 39].

В абелевой калибровочной теории, как показано ниже, гамильтониан тоже симметричен относительно замены $\mathcal{A}(C) \leftrightarrow \mathcal{B}(C')$. В этом смысле можно говорить, что в электродинамике и в $\mathcal{Z}(2)_4$ -модели есть динамическая дуальность. На языке локальных полей это соответствует тривиальной симметрии относительно замены: электрическое поле \leftrightarrow магнитное поле.

В неабелевой калибровочной теории, как мы покажем, кинематическая дуальность не является динамической. Кинематическая симметрия между величинами на контурах соответствует кинематической симметрии между "электрическим" и "магнитным" вектор-потенциалами.

"Электрический" вектор-потенциал определяется (не единственным образом!) из нильсен-олесеновского оператора на контурах таким же образом, как обчный "магнитный" вектор может быть определен из вильсоновского оператора.

2. Дуальность Хофта-Мандельштама в абелевом случае

2а. Явная конструкция $\mathcal{B}(C')$ для произвольного замкнутого контура C'

В недавней работе Мандельштама^{134/} была предложена операторная реализация алгебры (IO). Заметим, что результаты в^{134/} были приведены для специального случая контура C' - бесконечной нити, параллельной Z -оси. Ниже мы приведем эти выражения для случая произвольного контура C' . Как и в^{134/}, начнем с абелева случая.

При построении дуальной переменной к $\mathcal{A}(C)$ полезно вспомнить формулы преобразования дуальности от модели Sin-Gordon к модели Тирринга^{133/}. В этом случае поля $\psi(x)$ (дуальные к полю $\varphi(x)$, удовлетворяющему уравнению Sin-Gordon) являются полями, сплетающимися вакуумный сектор и различные солитонные сектора, и поэтому оператор $\psi(x)$ должен действовать на вектора вакуумного сектора как оператор сдвига на функцию с нетривиальными асимптотиками, т.е. выводить из фоковского пространства. Таким образом,

$$\psi(x) \sim \exp i \int \pi(x') \varphi_{kl}(x' - x) dx',$$

где $\varphi_{kl}(x)$ - функция с нетривиальными асимптотиками и отличная от $O(\text{mod } 2\pi)$ в окрестности точки 0 . Аналогично и в случае электродинамики оператор $\mathcal{B}(C')$ - оператор рождения вихря, сосредоточенного на контуре C' (точнее, в окрестности контура C'), имеет простой вид:

$$\mathcal{B}(C') = \exp \frac{4\pi i}{g} \int E_j(x') \mathcal{A}_j(x'/C') d^3x', \quad (11)$$

E_j - канонический к A_i импульс, т.е. $[E_j(x), A_i(y)] = i\delta^3(x-y)$,
 \mathcal{A}_j - вектор-потенциал, описывающий поток магнитного поля вдоль контура C' (т.е. вихрь Нильсена-Олесена^{125/}). Такой потенциал легко записать. Для этого полезно вспомнить следующую классическую электродинамическую задачу. Известно, что если по контуру C течет постоянный электрический ток j , то магнитное по -

ле \mathcal{H} , удовлетворяющее уравнениям

$$\text{rot } \mathcal{H} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathcal{H} = 0, \quad (12)$$

описывается законом Био-Савара

$$\mathcal{H}_i(x) = \varepsilon_{ijk} \int_C \frac{(x'_j - x_j) dx'_k}{|x' - x|^3}.$$

Нам же надо найти вектор-потенциал $\mathcal{A}_i(x|C')$, создаваемый потоком магнитного поля вдоль контура C' и удовлетворяющий уравнениям

$$\text{rot } \mathcal{A} = \mathcal{H}, \quad \text{div } \mathcal{A} = 0. \quad (13)$$

Эти уравнения имеют тот же вид, что (12), если заменить $\mathbf{j} \rightarrow \mathcal{H}$, $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$, следовательно,

$$\mathcal{A}_i(x|C') = \frac{\varepsilon_{ijk}}{4\pi} \int_{C'} \frac{(x'_j - x_j) dx'_k}{|x' - x|^3}.$$

Если исходить из магнитного потока, имеющего конечный радиус (т.е. не вит, а трубка магнитного потока), то

$$\mathcal{A}_i(x|C'; a) = \frac{\varepsilon_{ijk}}{4\pi} \int_C \int_0^a \delta(\rho, \dot{x}) f(\rho/a) \frac{(x'_j - x'_j(s) - \rho_j)}{|x - x' - \rho|^3} dx'_k(s), \quad (14)$$

$$\dot{x}_i = dx_i/ds,$$

a - характерная толщина трубки, $f(y) = 0$ при $y \geq 1$. Заметим, что циркуляция вектор-потенциала вдоль замкнутой кривой

$$\int_C \mathcal{A}_i(x|C') dx_i \quad (15)$$

является целым числом, показывающим, сколько раз кривая C намотывается на кривую C' (обходу по часовой стрелке приписывается положительный знак, против - отрицательный). Действительно, натягивая на кривую C' пленку и вычисляя (15) по формуле Стокса с учетом первой формулы (13), получаем, сколько раз пленка "протыкается" контуром C , т.е.

$$\iint_{C C'} \frac{\varepsilon_{ijk} (x'_j - x_j) dx'_k dx_i}{|x' - x|^3} = \text{целое число} = n(C, C'); \quad (16)$$

$n(C, C')$ является инвариантом Хопфа [17].

Вычислим перестановочные соотношения между $A(C)$ и $B(C')$; исходя из канонических перестановочных соотношений, имеем

$$A(C)B(C') = B(C')A(C) \exp(2\pi i n(C, C')/g). \quad (17)$$

Заметим, что для $\mathcal{B}(C', a)$, построенного с помощью $\mathcal{A}(x|C', a)$ по (14), перестановочные соотношения (17) сохраняются, если C не пересекает трубки магнитного потока.

26. Уравнения движения и гамильтониан в терминах $\mathcal{A}(C)$ и $\mathcal{B}(C')$

Вычислим изменение $\mathcal{B}(C')$ при малом изменении контура C' .

Для этого полезно представить $\mathcal{B}(C')$ в виде

$$\mathcal{B}(C') = \exp i \oint_C B_i(x) dx^i, \quad (18)$$

где $B_i(x) = \frac{1}{g} \int \varepsilon_{ijk} \partial_j G(x-y) E_k(y) d^3y$.

Рассмотрим малую вариацию контура C' в точке x , $x \in C'$ (рис.3), в направлениях i, k :

$$\frac{\delta \mathcal{B}(C')}{\delta C'_{ik}(x)} = F_{ik}(B)(x) \mathcal{B}(C'),$$

где $F_{ik}(B) = \partial_i B_k - \partial_k B_i$. Вычисляя $F_{ik}(B)$, получаем

$$\frac{\delta \mathcal{B}(C')}{\delta C'_{ik}(x)} = \frac{1}{g} \varepsilon_{ikj} E_j(x) \mathcal{B}(C').$$

Напомним, что

$$\frac{\delta \mathcal{A}(C)}{\delta C_{ik}(x)} = \varepsilon_{ikj} H_j \mathcal{A}(C).$$

Следовательно, плотность гамильтониана $\frac{1}{2}(E^2 + H^2)$ может быть представлена с помощью переменных на контуре в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \left[g \mathcal{B}^{-1}(C') \frac{\delta \mathcal{B}(C')}{\delta C'_{ik}(x)} \right] + \frac{1}{2} \left[\mathcal{A}^{-1}(C) \frac{\delta \mathcal{A}(C)}{\delta C_{ik}(x)} \right]^2.$$

Уравнения Максвелла в терминах переменных на контуре запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_0} g \mathcal{B}^{-1}(C') \frac{\delta \mathcal{B}(C')}{\delta C'_{ik}(x)} \varepsilon_{ikj} \dot{t}_j(x) + \frac{\delta}{\delta C_{\alpha i}(x)} \left[\mathcal{A}^{-1}(C) \frac{\delta}{\delta C_{\alpha i}(x)} \mathcal{A}(C) \right] = 0.$$

Закон Гаусса для $E_i = \varepsilon_{ikj} \mathcal{B}^{-1} \frac{\delta \mathcal{B}}{\delta C_{kj}}$ выполняется автоматически.

3. Дуальность Хофта-Мандельштама в неабелевом случае

Чтобы провести аналогичное рассмотрение в неабелевом случае, например для группы $O(3)$, можно в соответствии с [34] ввести три дополнительных киральных поля $n^f, f=1,2,3, (n^f)^2 = 1 (n^f_\alpha, \alpha=1,2,3-$

компоненты) и с их помощью выделить абелево поле

$$A_\mu^n \equiv (A_\mu, n) + \text{Tr}(\Omega^{-1} \partial_\mu \Omega L^3), \quad [L^i, L^j] = \epsilon_{ijk} L^k,$$

где матрицы Ω определяются из условия $g^{ab} n_a = \delta_a^b$ (Ω связана с матрицей g , вращающей n -поле, соотношением $\text{Tr}(\Omega^{-1} L^a \Omega L^a) = g^{ab}$). Из этого условия матрица Ω находится с точностью до вращения вокруг Z -оси. Эти вращения соответствуют преобразованию $\Omega \rightarrow \Omega \exp(i \eta L^3)$, относительно которого A_μ^n преобразуется, как абелево поле: $A_\mu^n \mapsto A_\mu^n + i \partial_\mu \eta$.

По полю A_μ^n построим вильсоновский оператор

$$A^n(C) = \exp(i \oint A_i^n dx^i).$$

Вариация $A^n(C)$ относительно изменения контура C дает тензор Хофта [40]:

$$\frac{\delta A^n(C)}{\delta C_{ik}(x)} = [n(x), F_{ik}(x)] - (n, D_i n \wedge D_j n) A^n(C),$$

здесь кривизна F_{ik} и ковариантные производные построены по неабелевой связности $A_i(x)$.

Операторы $B^n(C')$ строятся по формуле (18) с использованием

$E_i^n = (n, E_i)$. Варьируя $B^n(C')$ за счет изменения контура, получаем

$$\frac{\delta B^n(C')}{\delta C'_{ik}(x)} = \epsilon_{ijk} E_j^n(x) B^n(C').$$

Отсюда видно, что абелевы магнитные и электрические петли входят в гамильтониан несимметрично.

Неабелева магнитная петля, определенная в [34] как предел произведения

$$M(C') = \text{Tr} \prod_z M(x_z), \quad M(x_z) = (M_{ab}(x_z)),$$

$$M_{ab}(x_z) = \frac{1}{2}(\delta_{ab} + 1) e^{i \Delta_{ab}^{\dagger} B_{np, i} dx_z^i} + \frac{1}{2}(\delta_{ab} - 1) e^{i \Delta_{ab}^{\dagger} B_{np, i} dx_z^i},$$

при вариации контура C' дает

$$\frac{\delta M(C')}{\delta C'_{ik}(x)} = \text{Tr} \left[\tilde{F}_{ik}(x) \prod_z M(x_z) \right],$$

$\tilde{F}_{ik}^{\dagger}(x) = L_{ip}^{\dagger} E_j^n \epsilon_{ijk} + \text{добавки}$. Сравнивая с формулой

$$\frac{\delta \text{Tr} g(c)}{\delta c_{ik}(x)} = \text{Tr} [g(c) F_{ik}(x)],$$

видим, что неабелевы электрические и магнитные петли входят в гаммильтониан также несимметричным образом.

Однако, по-видимому, существует область параметров, где дополнительные члены в гаммильтониане несут существенны и реализуется самодуальная фаза.

III. Контурные переменные в модели $\mathcal{Z}(N)_4$

I. Связь модели $\mathcal{Z}(N)_4$ с неабелевой калибровочной теорией на решетке

В этом разделе построены переменные на контуре в $\mathcal{Z}(N)_4$ -модели, уравнения движения для которых линейны. Есть основания надеяться, что они окажутся полезными при вычислении контурных корреляционных функций в непрерывном пределе.

Остановимся сначала на связи $\mathcal{Z}(N)_4$ -модели с моделью неабелевых калибровочных полей на решетке \mathbb{Z}^4 . Уравнение в случае, если сумма берется по $\mu > 0$ и $\mu < 0$, имеет локализованные решения

$$U_{x,\mu} = \sqrt{x} C_{x,\mu} V_{x+\mu}^+, \quad C_{x,\mu} = e^{2\pi i n_{x,\mu} / N} \mathbb{1},$$

где V_x - произвольные матрицы группы $SU(N)$, а $C_{x,\mu}$ - матрица центра $\mathcal{Z}(N)$ группы $SU(N)$. Рассмотрим вклад этих решений в статистическую сумму неабелевой калибровочной теории, получим

$$\mathcal{Z} = \sum_{C_{x,\mu} \in \mathcal{Z}(N)} \exp \left\{ \frac{\beta}{L} \sum_{\rho_{x,\mu}} C_{x,\mu} C_{x+\mu,\nu} C_{x+\nu,\mu}^+ C_{x,\nu}^+ \right\}, \quad (19)$$

что определяет статистическую сумму 4-мерного калибровочного аналога \mathbb{Z}^4 двумерной модели Изинга (IM_2).

2. T -матрица и гаммильтониан в модели $\mathcal{Z}(N)_4$

Напомним основные формулы для $\mathcal{Z}(N)_4$ / 41, 42, 43/. Поясним, как возникает T -матрица при вычислении (19). Выбрав калибровку $C_{x,0} = \mathbb{1}$ (что соответствует $A_0 = 0$ калибровке) и разделяя суммирование по пространственно-пространственным плакетам и пространственно-временным плакетам, можно представить \mathcal{Z} как след L -степени (L - число временных интервалов рассматриваемой решетки) матрицы, называемой в статистике трансфер-матрицей, действующей в про-

пространстве \mathcal{H} конфигураций на временном сечении решетки.

$\mathcal{Z} = \text{Tr}(T^L)$.

$\mathcal{H} = \prod_{\{x,i\}} |n_{x,i}\rangle$, i - пространственное направление. $|n_{x,i}\rangle$ - собственные векторы матрицы $C_{x,i}$: $C_{x,i}|n_{x,i}\rangle = e^{2\pi i n_{x,i}/N} |n_{x,i}\rangle$,
 $\langle n'_{x,i} | n_{x,i}\rangle = \delta_{n',n} \pmod{N}$. T -матрицу можно представить в виде

$$T = \prod_{\text{ребра}} e^{k(\beta, N)} e^{\frac{a}{2} B(e)} \prod_{\text{плакетки}} e^{\frac{a}{2} A(\rho)}$$

где $A(\rho; i, k) = C_{x,i} C_{x+i, k} C_{x, i+k}^{-1} C_{x+k, i}^{-1}$. $B(e)$ определяется равенством

$B(\alpha, i) |n_{x,i}\rangle = |(n_{x,i} + 1) \pmod{N}\rangle$, $N=2, 3, 4$, а константы a и β соответственно равны: $a = \beta$, $\beta = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2\beta}) / (1 - e^{-2\beta})^{-1}$ при $N=2$, а при $N=3, 4$ - см. [41].

Перейдем теперь к анизотропной решетке (разные постоянные в статистической сумме (19) по пространственно-пространственным и пространственно-временным плакетам β_1 и β_2 соответственно). Если перейти к пределу непрерывного времени $1/2t$, причем $\beta_2 \rightarrow \infty$, $\beta_1 \rightarrow \lambda \exp(-2\beta_2)$, λ - конечный параметр, то T - матрица представима в виде $T = 1 - atH$, $at \rightarrow 0$, где H - гамильтониан

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\text{ребра}} B(e) - \frac{1}{2} \sum_{\text{плакетки}} A(\rho).$$

Таким образом, в моделях $\mathcal{Z}(N)_4$, $N=2, 3, 4$, гамильтониан является суммой операторов $A(\rho)$ и $B(\rho^*)$, рассматриваемых только на плакетках и дуальных плакетках (в трехмерной решетке ребрам взаимно однозначно ставятся в соответствие плакетки дуальной решетки). Перестановочные соотношения между операторами $A(\rho)$ и $B(\rho^*)$ следуют из определений и имеют вид.

$$A(\rho) B(\rho^*) = B(\rho^*) A(\rho) e^{2\pi i n(\rho, \rho^*)/N},$$

где $n(\rho, \rho^*) = \pm 1, 0$ в зависимости от того, сопоставляется ли дуальному плакету ребро основной решетки, принадлежащее плакету ρ , или нет, а \pm зависит от выбранной ориентации.

3. Уравнения движения для $B(\rho^*)$ и $A(\rho)$

Для определенности будем рассматривать модель $\mathcal{Z}(2)_4$. Вычислим производные по времени операторов $B(e)$, $A(\rho)$ и $B(e)$.

$$\frac{d}{dt} C_{x,i} = [H, C_{x,i}] = B_{x,i} C_{x,i},$$

$$\frac{d}{dt} B_{x,i} = [H, B_{x,i}] = \lambda \sum_j A(\rho_{x,j}) B_{x,i},$$

$$\frac{d}{dt} A(\rho_{x,j}) = [H, A(\rho_{x,j})] = \sum_{\{\rho^* | n(\rho_{x,j}, \rho^*) \neq 0\}} A(\rho_{x,j}) B(\rho^*)$$

4. Контурные переменные

Отметим, что из определений $A(\rho)$ и $B(\rho^*)$ ясен их физический смысл: $A(\rho)$ описывает "магнитный" поток через пикет ρ , а $B(\rho^*)$ - "электрический" поток. Можно ввести "магнитный" и "электрический" потоки через произвольные контуры на решетке:

$A(C)$ и $B(C')$ (C' - петля на дуальной решетке),

$$A(C) = \prod_{\rho \in \mathcal{P}(C)} A(\rho) = \prod_C C_{x,i}, \quad \mathcal{P}(C) - \text{поверхность, ограниченная } C,$$

$$B(C') = \prod_{\rho^* \in \mathcal{P}'(C')} B(\rho^*), \quad \mathcal{P}'(C') - \text{поверхность, ограниченная } C',$$

которые удовлетворяют перестановочным соотношениям Хофта:

$$A(C)B(C') = B(C')A(C) e^{2\pi i n(C, C')/N},$$

где $n(C, C')$ - число зацеплений.

Введем в рассмотрение более сложные контурные переменные, а именно, функционал, зависящий от контура C и ℓ (ℓ - длина контура) и индексов $k_i, i=1, \dots, \ell$, принимающих значения 0 и 1 (для простоты рассматриваем только случай $Z(2)_1$)

$$\Psi_{k_1, \dots, k_\ell}(C) \equiv \prod_{n=1}^{\ell} [B(x_n, t_n)]^{k_n} C(x_n, t_n).$$

Если на заданном контуре $x_i = x_i(s)$, s - дискретное, $|x(s+1) - x(s)| = 1$, введено собственное время, то можно вычислять

$$\frac{d\Psi}{dt_s} = \Psi_{k_1, \dots, k_{s-1}}(C_{1, s-1}) [H, (B(x_s, t_s))^{k_s} C(x_s, t_s)] \Psi_{k_{s+1}, \dots, k_\ell}(C_{s+1, \ell})$$

где

$$\Psi_{k_1, \dots, k_s}(C_{i, s}) \equiv \prod_{n=i}^s (B(x_n, t_n))^{k_n} C(x_n, t_n).$$

При $k_s = 0$ имеем

$$\frac{d}{dx_s} \Psi_{k_1, \dots, k_s, \dots, k_n}(C) = \Psi_{k_1, \dots, k_{s-1}}(C_{1, s-1}) \mathcal{D}(x_s, t_s) \mathcal{C}(x_s, t_s) \Psi_{k_{s+1}, \dots, k_n}(C_{s+1, n}) = \\ = \Psi_{k_1, \dots, k_s, \dots, k_n}(C).$$

При $k_s = 1$ имеем

$$\frac{d}{dx_s} \Psi_{k_1, \dots, k_s, \dots, k_n}(C) = \sum_i \Psi_{k_1, \dots, k_{s-1}}(C_{1, s-1}) \mathcal{C}(x_s, t_s) \Psi_{k_{s+1}, \dots, k_n}(C_{s+1, n}) \times \\ \times \mathcal{C}(x_s t_s) \Psi_{k_{s+1}, \dots, k_n}(C_{s+1, n}) + \Psi_{k_1, \dots, k_{s-1}}(C_{1, s-1}) \mathcal{C}(x_s, t_s) \Psi_{k_{s+1}, \dots, k_n}(C_{s+1, n}) = \\ = \sum_i \Psi_{k_1, \dots, k_{s-1}, 0, 0, 0, 1, k_{s+1}, \dots, k_n}(C_{1, s-1}, \rho_{x_s, t_s i}, (x_s, x_{s+1}), C_{s+1, n}) + \\ + \Psi_{k_1, \dots, k_{s-1}, 0, k_{s+1}, \dots, k_n}(C). \quad (20)$$

В правой части стоит сумма слагаемых, первое из которых соответствует сумме контурных переменных, взятых на более длинных контурах, получающихся от вставки плакета в точке x_s (контур с самопересечением), а второе – контурная переменная, соответствующая тому же контуру, но с измененным индексом.

5. Линейные уравнения в формальном непрерывном пределе

Рассмотрим формальный непрерывный предел уравнений (20).

Как уже отмечалось в разделе I, "вставка" плакета $\rho_{x; \mu\nu}$ в точке x в непрерывном случае соответствует вариации контура $\delta C_{\mu\nu}(x)$. Следовательно, система уравнений (20) в непрерывном пределе принимает следующий вид:

$$\frac{d}{d\tilde{v}(s)} \Psi_{\{k\}}(C) = \Lambda_{\{k, k'\}}^{ij} \frac{\delta}{\delta C_{ij}(s)} \Psi_{\{k'\}}(C) + M_{\{k, k'\}} \Psi_{\{k'\}}(C). \quad (21)$$

Сделаем несколько замечаний по поводу перехода к непрерывному пределу. Такой переход естественно осуществлять в контурных корреляционных функциях в окрестности критической точки, т.е. именно для них в окрестности критической точки, по-видимому, про-

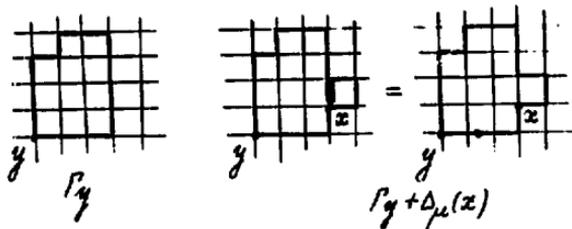


Рис. 1а

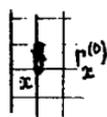


Рис. 1б

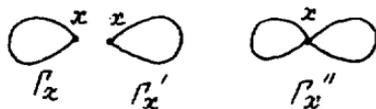


Рис. 2



Рис. 3

исходит смена режима $\langle A(C) \rangle \sim e^{-S(C) \times (\beta)}$, $\beta < \beta_c$, $\langle A(C) \rangle \sim e^{-\beta C} \gamma(\beta)$,
 $\beta \gg \beta_c$, $\alpha(\beta) = 0$; сравни со скейлинговым пределом в IM_2 :
 $\langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle \sim e^{-|x-y|/\xi(\beta)}$ и $\chi_2(\beta) = 0$.

Уравнение (21) является аналогом уравнения Дирака, получаемого в непрерывном пределе для онзагеровских переменных в модели IM_2 /15, 16/. Пока еще не ясно, будет ли уравнение (21) тоже полезно для определения контурных корреляционных функций в скейлинговом пределе. По-видимому, в этом направлении окажется полезной задача о монодромии уравнения (21) с дираковской поверхностью вместо дираковских нитей в двумерном случае /47/.

Другой вопрос - о том, насколько скейлинговое поведение модели $\mathcal{Z}(\lambda)$ ухватывает свойства непрерывного предела неабелевой калибровочной $SU(2)$ -теории, также открыт. В этой связи полезно вспомнить известное взаимоотношение предела сильной связи непрерывной модели $\lambda(\psi^2 - \gamma^2)^2$ и скейлингового поведения IM_2 (гипотеза универсальности /45, 46/). Формально, переходя в первой модели на решетку и рассматривая вклад в статистическую сумму классических решений $\Psi_{cl} = \pm \gamma$, существенных при $\lambda \rightarrow \infty$, мы получаем, что учет вкладов в континуальный интеграл всех ступенчатых функций эквивалентен вычислению статистической суммы IM_2 ,

$\beta = 1/\gamma$. Таким образом, имея корреляционные функции IM_2 в скейлинговом режиме, мы можем считать, что у нас имеются также корреляционные функции для предела сильной связи как для $\beta > \beta_c$, так и $\beta < \beta_c$ (фаза конфайнмента) модели \mathcal{Y}_2^4 .

Литература

1. K. Wilson, Phys. Rev., D10, 2445 (1974); J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D9, 3501 (1974).
2. Extended systems in field theory, ed. J. Garvais, A. Neveu, Phys. Rep. 23G, N 3, 1976.
3. A. M. Polyakov, Phys. Lett. 59B, 82 (1975). A. Belavin, A. M. Polyakov, A. Schwartz, Y. Tyupkin, Phys. Lett. 59B, 85 (1975).
4. A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B120, 429 (1977).
5. G. Callan, R. Dashen and D. Gross, Phys. Rev. D17, 2717 (1978).
6. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72, 461 (1974).
7. G. Thorn, MIT Preprint, CTP # 722 (ИМЛ 1978).

8. И.Я.Арефьева, Lett.Math.Phys., 4, 355 (1979).
9. Y.Nambu, Phys. Lett. 80, 372 (1979).
10. А.М.Поляков построил систему уравнений для функций Грина $\langle T_\mu \psi(r) T_\nu \psi(r') \dots \rangle$ и показал, что в пределе $D \rightarrow \infty$ возникает уравнение струны. Препринт ИТФ им.Ландау, Черноголовка, 1979.
11. А.А.Мигдал проанализировал систему уравнений для контурных функций Грина в пределе $N \rightarrow \infty$ и показал, что возникали уравнение типа струны. Препринт ИТФ им.Ландау, Черноголовка, 1979.
12. H.Kramers, G.Wannier, Phys. Rev. 60, 252 (1941).
13. L.Kadanoff, Phys. Rev. Lett. 23, 1430 (1969);
L.Kadanoff, H.Ceva, Phys. Rev. B3, 3918 (1971).
14. G.'tHooft, Nucl. Phys. B138, 1 (1978).
15. R.A.Ferrell, Jour. Stat. Phys. 8, 265 (1973);
B.Schroer, T.Truong, Nucl. Phys. B144, 80 (1978).
16. Впервые контурный аналог фермионных переменных в трехмерной модели Изинга был предложен А.М.Поляковым. Препринт ИТФ им.Ландау, Черноголовка, 1979.
17. Л.Д.Фаддеев, в сб. "Недокальные, нелинейные и неперенормируемые теории поля", СМЯИ, Д2-9788, Дубна, 207 (1976), стр.207.
18. M.Dirac, Phys. Rev. 74, 817 (1948); I.Bialynicki-Birula,
Bull. de l'acad. Polon. des Science, II, 135 (1963);
S.Mandelstam, Phys. Rev., 175, 1580 (1965), T.T.Wu, C.N.Yang,
Phys. Rev. D12, 3845 (1975).
19. K.Pohlmeier, Comm. Math. Phys. 46, 207 (1976);
M.Lüscher, K.Pohlmeier, Preprint DESY, 77/65 (1977).
20. В.Е.Зехаров, А.И.Михайлов, ЭТФ 74, 1953 (1978).
21. А.М.Поляков, Phys. Lett. 72B, 545 (1977); I.Ya.Aref'eva,
P.P.Kulich, E.P.Nissimov, S.I.Pacheva, Preprint LOMI, E-I-1978.
22. И.Я.Арефьева, ТМФ 29, 144 (1976); 36, 24 (1978).
23. E.Brezin, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D14, 2615 (1976); W.A.
Bardeen, B.W.Lee, R.E.Shock, Phys.Rev. D14, 985 (1976).
24. C.Rebbi, Phys. Rep. 126, 1 (1974); J.Scherk, Rev. Mod. Phys.
47, 123 (1975).
25. N.Nielsen. P.Olesen, Nucl. Phys. B61, 45 (1973).
26. В.Н.Попов, ЭТФ 64, 674 (1973).
27. L.D.Faddeev, Preprint IAS (1975); D.Forster, Preprint CLNS-
394 (1978); N.K.Nielsen, Phys. Lett. 79B, 304 (1978).

28. J.L.Gervais, A.Neveu, Preprint L PTE N5 78/24(1978);
E.Corrigan, B.Hasslacher, Preprint L PTE N5 78/25(1978);
Н.Б.Борисов, М.В.Юффе, М.И.Эйлес, ЯФ 29, 1426 (1979);
Г.П.Промько, Препринт ИВЭС (1979).
29. S.Naito, Phys.Rev.D14, 3584(1976).
30. Е.Н.Склянин, Л.А.Тухтаджян, Л.Д.Фаддеев. Препринт ЛОМН-Р-1-79.
31. М.Kaku, К.Kikkawa, Phys.Rev.D10, 1110, 1974;
Н.Н.Борисов, М.В.Юффе, М.И.Эйлес, Вестник ЛГУ, 3, II, 1976.
32. R.N.Andreo, F.Rohrlich, Phys.Rev, D18, 2967(1978).
33. S.Mandelstam, in: Extended Systems in Field Theory ,
eds.J.L.Gervais, A.Neveu, Phys.Rep.C23, n3(1976).
34. S.Mandelstam, Berkeley Preprint, 1978.
35. G.'t Hooft, in: High Energy Physics: Proceeding of the EPS
International Conference, Palermo, June, 1975, ed A.Zichichi,
Editrice Compositori, Bologna (1976).
36. M.E.Peskin, Ann.of Phys. 113, 122(1978).
37. R.Savit, Phys.Rev. Lett, 39, 55(1977); Phys.Rev.B17, 1340(1978).
38. F.Wegner, J.Math.Phys.12, 2259(1971).
39. R.Balian, J.M.Drouffe and Itzykson, Phys.Rev. 38C,
N3(1978).
40. G.'t Hooft, Nucl.Phys. B79, 276(1974).
41. T.Yoneya, Nucl.Phys.B144, 195(1978).
42. E.Fradkin, L.Susskind, Phys.Rev.D17, 2637(1978).
43. M.E.Green, Nucl.Phys.B144, 173(1978).
44. Строгое доказательство возможности анизотропного перехода в
скейлинговую область для $Z(l)_4$ модели отсутствует. Анало-
гичная задача для IM_2 решена в работе М.Suzuki, Phys.Lett.
34A, 94(1971); Prog.Theor.Phys.56, 1459(1976).
45. L.Kadanoff, Physics 2, 263(1966).
46. J.Glimm, A.Jaffe, Critical problem in quantum field ,
Preprint Harvard University (1975).
47. M.Sato, T.Miwa, M. Jimbo .Publ.RIMS Kyoto Univ. -14,
223(1978).

КВАНТОВАЯ ТОПОЛОГИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

В. Н. Первушин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Наиболее важной проблемой в теории Янга-Миллса^{/1/} является исследование поведения неабелевых полей на больших расстояниях. Обычная теория возмущений указывает лишь на неограниченный рост эффективной константы связи с увеличением расстояния (инфракрасная катастрофа).

Как известно из теории критических явлений и фазовых переходов, в системе с сильной связью неизбежно возникают дальнедействующие корреляции локальных возбуждений и кооперативные степени свободы, которые могут приводить к сингулярному поведению макроскопических параметров системы, в том числе к сингулярному бозе-конденсату.

В настоящей работе сделана попытка развить схему квантования неабелевых полей, в которой с самого начала предполагается наличие сингулярных калибровочных полей.

Мы будем считать также, что кооперативное возбуждение калибровочных полей возникает как голдстоуновская мода, сопровождающая топологическое вырождение вакуума.

1. Метод квантования^{/2,3/}

Рассмотрим лагранжиан теории Янга-Миллса:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c). \quad (1)$$

Поля A_μ^a в \mathcal{L} не имеют канонического импульса, $\pi_\mu^a = \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_0 A_\mu^a) \equiv 0$, поэтому выразим в \mathcal{L} A_μ^a через другие переменные с помощью классических уравнений Эйлера:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a} \equiv (\nabla^2 A_\mu^a)^a - (\nabla_i \partial_i A_\mu^a)^a = 0, \quad (2)$$

где

$$\nabla_i^{ab} \equiv \nabla_i^{ab}(A_i) = \delta^{ab} \partial_i + g \varepsilon^{abc} A_i^c.$$

Общее решение (2)

$$A_0^a = \dot{c} \Phi^a + \left(\frac{1}{\nabla^2} \nabla_i \partial_0 A_i \right)^a, \quad (3)$$

вообще говоря, содержит решение однородного уравнения

$$(\nabla^2 \Phi)^a = 0, \quad (4)$$

$\dot{c} = \frac{dc(t)}{dt}$ есть нулевая мода оператора ∇^2 .

Подставляя (3) в (1), нетрудно получить лагранжиан:

$$L = \int d^3x \mathcal{L} = L_{\text{н.м.}} + L_{\text{Rot}},$$

$$L_{\text{н.м.}} = \int d^3x \frac{1}{2} \left[(E_i^{(T)})^a{}^2 - (B_i^a)^2 \right], \quad (5)$$

$$L_{\text{Rot}} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{c}^2 (\nabla_i \Phi)^2 - \dot{c} (\nabla_i \Phi)^a E_i^{(T)a} \right], \quad (6)$$

где

$$E_i^{(T)a} = \left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right)^{ab} \partial_0 A_j^b; \quad B_i^a = \varepsilon_{ijk} \left(\partial_j A_k^a + \frac{g}{2} \varepsilon^{abc} A_j^b A_k^c \right). \quad (7)$$

Поля $E^{(T)}$, B удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_i^{ab} E_i^{(T)b} \equiv 0; \quad \nabla_i^{ab} B_i^b \equiv 0. \quad (8)$$

Возникает следующая альтернатива:

1) Предположим, что неабелевы поля регулярны. Тогда вследствие уравнений (4), (8) и теоремы Гаусса $L_{\text{Rot}} = 0$. Полученная теория описывается лагранжианом (5) с дополнительными условиями перпендикулярности (8). Мы имеем схему квантования, полностью эквивалентную общепринятой^{4/} в калибровке $A_0^a = 0$.

2) Предположим, что поля сингулярны^{х)}. Тогда $L_{A_i} \neq 0$ и вводится новая динамическая переменная $\tilde{c}(t)$ (как нулевая мода оператора ∇^2), которая описывает кооперативное возбуждение полей во всем пространстве.

II. Обоснования введения новой переменной

Топологически нетривиальные классические решения в теории Янга-Миллса (инстантоны)^{/6/} свидетельствуют о существовании множества вакуумов. Группа инвариантности каждого из вакуумов - G_0 есть подгруппа группы инвариантности всего лагранжиана - G , причем фактор-группа G/G_0 является группой гомотопии $\pi_1(SU_2) = Z$ (где Z - бесконечная циклическая группа). Мы имеем здесь пример спонтанного нарушения симметрии вакуума. В соответствии с идеологией спонтанного нарушения симметрии^{/7/} нужно ввести голдстоуновскую динамическую переменную, которая имеет математический смысл элемента фактор-пространства G/G_0 , в нашем случае элемента фактор-группы $\pi_1(SU_2) = Z$. Именно такой смысл имеет индекс Понтрягина, который характеризует несингулярные классические решения с конечным евклидовым действием

$$\nu[A] = \frac{g^2}{64\pi^2} \int dt d^3x F_{\nu\sigma}^a F_{\rho\tau}^a \varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau}, \quad (9)$$

$$\nu[A_{\text{regular}}] \in Z. \quad (10)$$

Обобщая (9) на сингулярные поля (3), (7), мы трактуем ν как динамическую переменную, описывающую кооперативное возбуждение полей во всем пространстве.

Мы следуем здесь положению о том, что динамическое описание квантовой системы есть построение неприводимых представлений группы инвариантности лагранжиана в классической теории. (Простейшая иллюстрация этого положения дана в Приложении I).

х) Заметим, что в квантовой теории поля, и в частности в электродинамике, мы имеем дело с регулярными полями^{/5/}.

III. Вывод уравнений для бозе-конденсата

Отождествим голдстоуновскую моду \dot{c} в (6) с топологической переменной $\dot{v} = \frac{d\nu}{dt}$, подставляя общее решение для A (3) в определение числа Понтрягина (9):

$$v = \int dt \dot{v} ; \quad \dot{v} = \dot{c} \frac{g^2}{8\pi^2} \int d^3x (\nabla_i \phi)^* B_i^a - \mathcal{P}_B(A). \quad (11)$$

Здесь \mathcal{P}_B - функционал от калибровочных полей. Выражая с помощью (11) лагранжиан (6) L_{rot} в терминах $\dot{v} = (v + \mathcal{P}_B)$, получим

$$L_{rot} = \frac{(\dot{v})^2}{2} \left(\frac{8\pi^2}{g^2} \right)^2 \frac{1}{\langle B \rangle^2} - \dot{v} \frac{\langle E \rangle}{\langle B \rangle} \frac{8\pi^2}{g^2}, \quad (12)$$

где

$$\langle O \rangle^2 = \left[\int d^3x O_i^a (\nabla_i \phi)^* \right]^2 / \int d^3x (\nabla \phi)^2 ; \quad O_i^a = E_i^a, B_i^a. \quad (13)$$

Гамильтониан, соответствующий (12), не зависит от \mathcal{P}_B :

$$H_{rot}(p) \equiv L_{rot}(p) = \frac{1}{2} \left[p^2 \left(\frac{g^2}{8\pi^2} \right)^2 \langle B \rangle^2 - \langle E \rangle^2 \right]. \quad (14)$$

Здесь

$$p = \delta L_{rot}(\dot{v}) / \delta \dot{v}.$$

Мы квантуем переменную v , $[v, p] = i$, требуя, чтобы вектор состояния ψ преобразовывался по представлению циклической группы $Z: \psi(v+1) = e^{i\theta} \psi(v)$, и получаем спектр импульсов "ротатора" v :

$$p = 2\pi k + \theta, \quad (15)$$

где k - номер зоны Бриллюэна, θ - квазиимпульс.

Окончательно мы получим следующее эффективное действие.

$$S_{eff}^B = S_{v-n} + S_{rot} = \int dt L_{eff} = \int dt (L_{v-n} + L_{rot}),$$

$$L_{eff} = \frac{1}{2} \left[\int d^3x E^2 - \langle E \rangle^2 \right]_{(*)} - \frac{1}{2} \left[\int d^3x B^2 - \rho \langle B \rangle^2 \right]. \quad (16)$$

$$\rho = (2\pi k + \theta) \left(\frac{g^2}{8\pi^2} \right)^2. \quad (17)$$

Знак (*) в (16) относится к пространству Евклида.

Представим калибровочное поле A в виде суммы сингулярного фонового поля \underline{b} (бозе-конденсата) и регулярного поля \underline{a} , имеющего нулевые граничные условия на сингулярностях:

$$S_{Rot}(\underline{a} + \underline{b}) = S_{Rot}(\underline{b}). \quad (18)$$

Таким образом, мы имеем следующее формальное разложение S_{eff} :

$$S_{eff}(\underline{a} + \underline{b}) = S_{eff}(\underline{b}) + S'_{k,n}(\underline{b})\underline{a} + \frac{1}{2} S''_{k,n}(\underline{b})\underline{a}^2 + \dots$$

Процедура квантования, и в частности вариационная производная, хорошо определены только для регулярных полей \underline{a} ^{15/}. Если не использовать вариационный метод для определения \underline{b} , то условиями "конечности" $S'_{k,n}(\underline{b})_{E, B, \text{div}} = 0$ и "стабильности" $S'_{k,n}(\underline{b}) \cdot \alpha = 0$ можно удовлетворить лишь полагая в (16)

$$\rho = 1, \quad (19)$$

$$\int d^3x O^2 = \langle O \rangle^2; \quad O = E, B. \quad (20)$$

Тогда из неравенства Коши-Буняковского получим, что фоновые поля $E(\underline{b}), B(\underline{b}), \nabla(\underline{b})\Phi$ удовлетворяют стационарным уравнениям дуальности:

$$\pm E(\underline{b}) = \nabla(\underline{b})\Phi; \quad B(\underline{b}) = \nabla(\underline{b})\Phi. \quad (21)$$

Следует подчеркнуть, что квантование заряда (17), (19) необходимо для стабильности теории, т.к. поля с нулевым действием (21) одновременно удовлетворяют вне сингулярностей классическим уравнениям.

Рассмотрим точно решаемый пример цилиндрически-симметрических функций. В классе этих функций существует единственное сингулярное решение, описывающее "магнитные мешки"; $\underline{b}_i^a = (\varphi^a, b_i^a) / |B|$:

$$\varphi^a = \frac{2m}{g} n^a \left[\cot \frac{1}{2} (2mz) - \frac{1}{2mz} \right]; \quad b_i^a = \frac{2m}{g} \varepsilon_{i\alpha} n^\alpha \left[\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (2mz) - \frac{1}{2mz} \right] \quad (22)$$

где $n^2 = \chi^2 / \epsilon$, $\epsilon = \sqrt{\chi_i^2}$, $\chi_i^2 = \chi_{0i}^2 + \chi_i^2$; m , χ_{0i} - параметры решения. Оператор $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ не зависит от констант связи. Теория возмущений с "магнитными мешками" (22) качественно отличается от обычной теории возмущений^{14/} и в какой-то степени совпадает с ней лишь в пределе $m \rightarrow 0$, который соответствует малым расстояниям теории. Уравнения для квантованных полей \mathcal{Q} сводятся к одномерному уравнению Шредингера (по переменной z) для частицы в потенциале Пешля-Теллера^{19/}. Это уравнение точно решается и имеет дискретный спектр. Туннельные переходы запрещены, возбуждения локализованы в одной из ячеек периодического потенциала, и в этом смысле наша система эквивалентна идеальному изолятору. Условие (18) выполнено.

Заключение

Мы развивали здесь точку зрения, согласно которой правильное квантование теории Янга-Миллса должно учитывать сингулярности неабелевых полей, и предположили, что источником таких сингулярностей является коллективное возбуждение, описывающее бесконечно большую топологическую корреляцию локальных возбуждений. (В этом смысле топологически нетривиальная теория напоминает модели статистики в критической точке с бесконечной корреляционной длиной. Известно, что поведение системы в критической точке определяется не только видом гамильтониана, но, во многом, самим фактором существования коллективной степени свободы и ее природой).

Мы показали, что наличие сингулярных фоновых полей (бозе-конденсата) не противоречит конечности и стабильности теории, учитывающей квантование топологической переменной. Именно условия конечности и стабильности определяют уравнения для бозе-конденсата. Решениями этих уравнений в классе цилиндрически-симметричных функций является "магнитные мешки" - периодические сингулярные потенциалы. В этом случае теория Янга-Миллса эквивалентна идеальному изолятору. Локальные возбуждения имеют дискретный спектр. Отсутствует даже те нулевые моды, которые могли бы восстановить масштабную и трансляционную инвариантности. Вообще говоря, это еще не означает отсутствия трансляционной инвариантности для "бесцветных" связанных состояний, которые отождествляют с наблюдаемыми адронами. Сейчас трудно сказать, удастся ли доказать "свободу передвижения" для "бесцветных" состояний. Однако, если пове-

речь в возможность такого доказательства, то конформизм цвета можно было бы трактовать как следствие динамической реализации фундаментальной топологической группы пространства полей.

Приложение I. Квантование модели Швингера

Рассмотрим двумерную электродинамику в калибровке $A_0 = 0$ с лагранжианом $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 A)^2$. Решением уравнения Шредингера

$$H\psi = \varepsilon\psi, \quad H = \int dx E^2, \quad [E(x), A(y)] = -i\delta(x-y) \quad (I.1)$$

является "плоская волна":

$$\psi(x) = \exp\left\{i \int dx \mathcal{K}(x) A(x)\right\}; \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \int dx \mathcal{K}(x)^2 \quad (I.2)$$

Условие инвариантности относительно топологически тривиальных калибровочных преобразований $\partial_t E\psi = 0$ означает однородность "импульса" $\mathcal{K}(x)$; $\partial_x \mathcal{K}(x) = 0$, $\mathcal{K}(x) = \text{const}$, и приводит к корреляциям всех элементарных возбуждений. Решение (I.1) зависит лишь от контурной переменной $\frac{e}{2\pi} \int dx A_t(x) = N$ *, которая реализует представление полной группы топологически нетривиальных преобразований:

$$N[A^{(\nu)}] = N[A] + \nu$$

где $A^{(\nu)} = e^{i\lambda^{(\nu)}(x)} \left(A + \frac{1}{e} \partial \right) e^{-i\lambda^{(\nu)}(x)}$; функция $e^{i\lambda(x)}$ задает отображение $R(1) \rightarrow U(1)$; ν - степень отображения.

Условие ковариантности (I.2) ψ относительно циклической группы Z определяет спектр \mathcal{K} , ε :

$$\mathcal{K} = \frac{e}{2\pi} (2\pi k + \theta); \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (2\pi k + \theta)^2 \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 R, \quad (I.3)$$

где R - размер пространства. Таким образом, мы получили квантовое описание как построение представления группы инвариантности классического лагранжиана. Существует эквивалентное описание рассмотренной сильно коррелированной системы с помощью явного введения коллективной степени свободы. (Именно этот путь мы используем для квантования теории Янга-Миллса, топологически эквивалентной модели Швингера).

*/ Важность описания динамики с помощью переменной типа N была отмечена в работе Фаддеева^{10/}.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}^2 \quad ; \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (1.4)$$

для полей с топологическим индексом

$$\dot{v} = \int \dot{v} dt \quad ; \quad \dot{v} = \frac{e}{2\pi} \int F_{\alpha\beta} dx. \quad (1.5)$$

Так как поле A_0 не имеет канонического импульса, выразим A_0 через переменную A_1 с помощью уравнений Эйлера: $\partial_1^2 A_0 = \partial_0 \partial_1 A_1$.
В общем решении этого уравнения включим сингулярное решение однородного уравнения:

$$A_0 = \dot{c}(t)x + a(t) + \frac{1}{\partial_1^2} \partial_0 \partial_1 A_1.$$

Так что тензор напряжения $F_{\alpha\beta}$ зависит лишь от голдстоуновской моды \dot{c} :

$$F_{\alpha\beta} = \dot{c}. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.4) и (1.5), мы приходим к гамильтониану

$$H = \frac{1}{2} \rho^2 \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 R \quad \left(\rho = \frac{\delta \mathcal{L}(\dot{v})}{\delta \dot{v}} \quad , \quad \mathcal{L}(\dot{v}) = \frac{1}{2} \dot{v}^2 \left(\frac{2\pi}{e} \right)^2 \frac{1}{R} \right),$$

Квантование которого с условием периодичности $\psi(v+1) = e^{i\theta} \psi(v)$ воспроизводит результаты прямого квантования модели Швингера.

Приложение II. Включение фермионов

Применим предложенный метод квантования к лагранжиану

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 F_{\mu\nu}^2 + \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi + j_\mu^a A_\mu^a \quad ; \quad j_\mu^a = g \bar{\Psi} \frac{\sigma_\mu^a}{2} \Psi.$$

Получим эффективный лагранжиан в виде

$$\mathcal{L}'_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{eff}} + \mathcal{L}_a,$$

где \mathcal{L}_{eff} определено уравнением (16),

$$\mathcal{L}_a = -\bar{\Psi}^{(\tau)} \not{\partial} \Psi^{(\tau)} - j_i^{(\tau)a} \hat{A}_i^{(\tau)a} + \frac{1}{2} j_0^{(\tau)a} \left(\frac{1}{\nabla^2(\tau)} \right)^{ab} j_0^{(\tau)b}.$$

Все лагранжианы зависят от чисто поперечных полей $A^{(\tau)}$, $\psi^{(\tau)}$

$$\hat{A}_\mu^{(\tau)a} = U(A) (\hat{A}_\mu^a + \partial_\mu) U^{-1}(A) \quad ; \quad \hat{A} = g A^a \frac{\sigma^a}{2i} ;$$

$$\psi^{(\tau)} = U^{-1}(A) \Psi \quad ;$$

$$U(A) = T \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{\nabla^2} \nabla_{\nu} \partial_0 \hat{A}_{\nu} \right\};$$

$$\nabla(\tau) \equiv \nabla(A^{(\tau)}),$$

инвариантных относительно калибровочных преобразований.

Приложение III. Радиальные возбуждения цветных полей

Рассмотрим уравнение

$$[(\nabla_{\nu}(\hat{b}))^2]^{ac} \hat{Q}_{\mu}^c + 2g \varepsilon^{abcd} F_{\nu\sigma}^d(\hat{b}) \hat{Q}_{\nu}^c = -\kappa^2 \hat{Q}_{\mu}^a$$

для квантованного поля \hat{Q} во внешнем поле (22). В классе цилиндрически-симметричных функций с помощью подстановки

$$\hat{Q}_i^a = \left[\frac{2m}{\varepsilon \sin^2(mz)} \mathcal{U}(z) (\delta_{ia} - n_i n_a) + \left(\frac{\mathcal{U}(z)}{\varepsilon} \right)' n_i n_a \right] e^{iEt}; \quad \hat{Q}_0^a = n^a \frac{\mathcal{U}(z)}{\varepsilon} e^{iEt}$$

это уравнение сводится к точно решаемому уравнению Шредингера

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{dz^2} - 2m^2 \left[\frac{1}{\sin^2(mz)} + \frac{1}{\cos^2(mz)} \right] \mathcal{U} = -(E^2 + \kappa^2) \mathcal{U}$$

со спектром

$$(E^2 + \kappa^2) = 4m^2(2+n)^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Литература

1. Yang C.N., Mills R.L. Phys.Rev., 1956, 96, p.191.
2. Полубаринов И.В. ОИЯИ Р-242I, Дубна, 1965.
3. Первушин В.Н. ОИЯИ Р2-12225, Дубна, 1979.
4. Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, 25B, p.30.
5. Боголюбов Н.П., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", 1972.
6. Belavin A. et al. Phys.Lett., 1975, 59B, p.85.
Callan C.G., Jr. et al. Phys.Rev., 1978, D17, p.2717.
7. Волков Д.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, с.3.
Callan C.L. et al. Phys.Rev., 1969, 177, p.2247.
Coleman S. et al. Phys.Rev., 1969, 177, p.2239.

8. Witten E. Phys.Rev.Lett., 1977, 38, p.121.
Leshov A.N., Savelliev M.V. 1978, 79B, p.294.
Barbashov B.M. et al. JINR, 12-11669, Dubna, 1978.
9. Poshl G., Teller E. Zs.Phys., 1933, 83, p.143.
10. Феддеев Л.Д. Материалы IV Международного совещания по мелочальным теориям поля (1976). ОНЯИ, ДИ-9788, с.267, Дубна, 1976.

БЛОКАЛЬНОЕ СИГМА-МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕОРИИ ЯНГА-МИЛЛСА И КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ВАКУУМ

Е. А. Иванов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Одна из точек зрения на причину невыметания цвета в квантовой хромодинамике состоит в том, что у этой теории наблюдаемая лишь симметричная фаза, связанная с калибровочно-инвариантным вакуумом ^{1,2,3/}. Простые рассуждения ^{13/} показывают, что средние по калибровочно-инвариантному вакууму от произведений полевых операторов с цветовыми индексами, т.е. функции Грина, сводятся к комбинациям дельта-функций своих аргументов, что и означает удержание цвета.

В большинстве работ, посвященных выяснению физического спектра симметричной фазы, ее стремятся получить динамически, в рамках обычной теории Янга-Миллса — либо путем учета топологических флуктуаций вакуума (инстантонов, меронов, ...) ^{12/}, либо перехода к пределу сильной связи ^{11/}. При этом ввиду неприменимости стандартной теории возмущений (она отвечает несимметричной фазе) используются специальные методы типа перехода на решетку, построения аномальной теории возмущений около классических решений и т.п. Динамический подход, будучи наиболее перспективным, в то же время оставляет в тени алгебраические, теоретико-групповые аспекты проблемы. В частности, неясно, является ли потенцическое удержание цвета в симметричной фазе прямым следствием калибровочной инвариантности вакуума или же требует выполнения некоторых дополнительных динамических предположений (упомянутые выше формальные соображения ^{13/} не могут считаться доказательством).

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на возможность алгебраического описания симметричной фазы теории Янга-Миллса. Основное предположение состоит в том, что структура эффективных лагранжианов, описывающих различные фазы теории, должна в значительной мере определяться способом реализации калибровочной группы в данной фазе. Реализация, соответствующая несимметричной фазе, хорошо известна: это обычные калибровочные

преобразования. Возникает естественный вопрос: как реализуется калибровочная группа в симметричной фазе?

14,5/ Для его выяснения обратимся к часто отмечаемой в литературе аналогии между теорией Янга-Миллса и нелинейными G -моделями. У этих моделей в общем случае также существует две фазы: несимметричная, относящаяся к области применимости стандартной теории возмущений, и симметричная, в которой обычная теория возмущений не пригодна^{x)}. Эти фазы имеют прозрачный теоретико-групповой смысл. Первая отвечает нелинейной реализации исходной симметрии. Ее вакуум инвариантен относительно некоторой подгруппы исходной группы (подгруппы стабильности) и выроден по отношению к остальным преобразованиям, которые, таким образом, спонтанно нарушены. Спектр состоит из безмассовых голдстоуновских полей, число которых совпадает с числом спонтанно нарушенных генераторов. Симметричная фаза соответствует стандартной, алгебраической реализации группы, т.е. ее реализации на линейных мультиплеттах. Модель попадает в эту фазу, если эффективная константа связи превышает некоторое критическое значение 14,5,3/. При фазовом переходе вакуум перестраивается таким образом, что становится стабильным по отношению ко всем генераторам, голдстоуновские поля приобретают общую ненулевую массу, а в спектре появляются связанные хиггсовские состояния той же массы, дополняющие их до линейных мультиплетов всей группы. Важно подчеркнуть, что эффективным лагранжиан, описывающий симметричную фазу данной нелинейной G -модели, совпадает по виду с лагранжианом одной из соответствующих линейных G -моделей (его динамическое происхождение проявляется в дополнительных связях между различными параметрами лагранжиана).

Таким образом, в G -моделях фазы с различной симметрией основного состояния отвечают совершенно разным реализациям исходной группы. Зная, какими преобразованиями представляется группа в той или иной фазе, можно строить соответствующие эффективные лагранжианы и изучать структуру различных фаз независимо.

x) В специальном случае двумерного пространства-времени реализуется только симметричная фаза (для точного решения). Двумерные нелинейные G -модели обнаруживают наиболее тесную аналогию с теорией Янга-Миллса.

Ключ к пониманию причин аналогии между теорией Янга-Миллса и нелинейными G -моделями был дан в работе В.М.Огневского и автора /6,7/ X). Мы показали, что любая калибровочная теория в несимметричной фазе является нелинейной реализацией соответствующей локальной группы с группой глобальной симметрии в качестве группы стабильности вакуума, а калибровочное поле возникает как единственный существенный голдстоуновский, сопровождающий такое спонтанное нарушение. Таким образом, было выявлено генетическое единство нелинейных G -моделей и теорий Янга-Миллса: единственная разница между ними оказалась в том, что первые есть результат нелинейных реализаций конечно-параметрических групп, в то время как вторые - групп бесконечно-параметрических.

Раз возможна нелинейная реализация калибровочной группы, то естественно ожидать, что у нее существует и алгебраическая, линейная реализация /1/. Если аналогия с G -моделями простирается достаточно далеко, то именно такая реализация и должна описывать симметричную фазу теории Янга-Миллса.

Основная цель данной работы - показать, что подход, развитый в /6,7/, допускает элегантную переформулировку на языке биллокальных полей, в которой аналогия с нелинейными G -моделями становится почти буквальной и которая указывает путь построения линейных представлений калибровочных групп. Мы демонстрируем, что стандартная теория Янга-Миллса эквивалентна определенному сектору нелинейной G -модели для биллокального главного кирального поля на соответствующей глобальной группе. Исключение несущественных голдстоуновских полей в локальном формализме (за счет обратного эффекта Хиггса /8/) оказывается эквивалентным специальному представлению для биллокального кирального поля через контурный интеграл от поля Янга-Миллса вдоль прямого отрезка, связывающего биллокальные аргументы. Таким образом, струнный функционал калибровочных полей, интенсивно обсуждаемый последнее время /9-13/, естественно возникает в нашем подходе.

Из возможности G -модельного представления теории Янга-Миллса следует, что алгебраическая реализация соответствующей калибровочной группы должна действовать на биллокальных линейных мультиплетных группах глобальной симметрии. В третьем разделе построено несколько простейших реализаций такого рода. По X) Аналогичное рассмотрение с несколько иной точки зрения проведено в /8/.

казано, что в рамках линейных реализаций возникновение калибровочных полей связано с появлением ненулевых вакуумных средних у некоторых членов линейного мультиплетта - в полной аналогии с возникновением голдстоуновских полей в обычных линейных G -моделях.

2. Им вначале напомним основные моменты подхода, предложенного в [6,7].

Пусть $G_0 \subset \{Q^i\}$ - некоторая группа глобальной внутренней симметрии

$$[Q^i, Q^k] = i c^{ik\ell} Q^\ell, \quad (1)$$

а $G(x)$ - компонента соответствующей калибровочной группы, разложимая в ряд Тейлора около $x_\mu = 0$. Первое наблюдение состояло в том, что $G(x)$ является частной реализацией определенной константно-параметрической абстрактной группы $G \rightarrow G_0$ с бесконечным числом тензорных генераторов $Q^i, Q^i_{\mu_1}, Q^i_{\mu_1\mu_2}, \dots, Q^i_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$, удовлетворяющих соотношениям

$$[Q^i_{\mu_1\dots\mu_n}, Q^k_{\mu_{n+1}\dots\mu_\ell}] = i c^{ik\ell} Q^\ell_{\mu_1\dots\mu_\ell}, \quad (2)$$

$$[P_\rho, Q^i_\mu] = i \eta_{\rho\mu} Q^i \quad (\eta_{\rho\mu} = (1, -1, -1, -1)), \quad (3)$$

$$[P_\rho, Q^i_{\mu_1\dots\mu_n}] = i (\eta_{\rho\mu_1} Q^i_{\mu_2\dots\mu_n} + \dots + \eta_{\rho\mu_n} Q^i_{\mu_1\dots\mu_{n-1}}) \quad (n \geq 2), \quad (4)$$

где P_ρ - генератор 4-трансляций. Вместе с группой Пуанкаре \mathcal{P} группа G образует полупрямое произведение

$$K = G \ltimes \mathcal{P}.$$

Далее стандартными методами была построена нелинейная реализация группы K в фактор-пространстве $K/L \times G_0$ (L - группа Лоренца) с элементами

$$G(x, v) = e^{i x^\mu P_\mu} e^{i \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} v_{\mu_1\dots\mu_n}^i Q^i_{\mu_1\dots\mu_n}}, \quad (5)$$

где $v_{\mu_1}^i(x), v_{\mu_1\mu_2}^i(x), \dots, v_{\mu_1\dots\mu_n}^i, \dots$ - бесконечный набор симметричных тензорных полей, имеющих смысл параметров фактор-

пространства. Было показано, что связи векторного голдстонкона $\varphi_M^i(x)$ идентичны связям обычного поля Янга-Миллса, в то время как все остальные голдстонконы $\varphi_{M_1 M_2}^i(x), \dots, \varphi_{M_1 \dots M_n}^i(x), \dots$ являются не существенными в том смысле, что выражаются через $\varphi_M^i(x)$ и его производные после приравнивания нулю симметричных частей ковариантных производных (т.е. срабатывает обратный эффект Хиггса⁽¹⁸⁾).

Покажем, что весь формализм резко упрощается после введения конкретного представления для генераторов группы K :

$$P_\rho = i \frac{\partial}{\partial y^\rho}, \quad L_{\mu\nu} = i(y_\mu \partial_\nu - y_\nu \partial_\mu), \quad Q_{\mu_1 \dots \mu_n}^i = y_{\mu_1} y_{\mu_2} \dots y_{\mu_n} Q^i \quad (6)$$

где y_ρ - некоторый не зависящий от x_μ лоренц-вектор. Подчеркнем, что представление (6) диктуется обычным для нелинейных реализаций условием, чтобы генераторы, стоящие в показателях групповых экспонент, коммутировали с координатами факторпространства.

Нетрудно увидеть, что после введения представления (6) бесконечный набор голдстонконов в показателе элемента (5) сворачивается в одно билोकальное поле:

$$G(x, \varphi) = e^{-x^\mu \partial_\mu^y} e^{i \varphi(x, y)}, \quad (7)$$

где

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi^i(x, y) Q^i = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n} Q^i, \quad (8)$$

т.е. $\varphi(x, y)$ является фактически производящей функцией для голдстонконов:

$$\varphi(x, 0) = 0,$$

$$\partial_\mu^y \varphi(x, y) |_{y=0} = \varphi_\mu(x),$$

$$\partial_{\mu_1}^y \dots \partial_{\mu_n}^y \varphi(x, y) |_{y=0} = \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x),$$

Преобразования голдстонконов, индуцированные различными элементами группы K , действующей на элементах (5) как группа левых сдвигов, выражаются на билोकальном языке следующим образом:

$$4\text{-трансляции: } \psi(x, y) \rightarrow \psi'(x, y) = \psi(x - a, y), \quad (9)$$

$$\text{лоренц-вращения: } \psi(x, y) \rightarrow \psi'(x, y) = \psi(\Lambda^{-1}x, \Lambda^{-1}y), \quad (10)$$

G - преобразования:

$$e^{i\psi(x, y)} \rightarrow e^{i\psi'(x, y)} = e^{i\beta(x, y)} e^{i\psi(x, y)} e^{-i\beta(x, y)} \quad (11)$$

где $\beta(y) = \beta(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \beta_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(k)} y_{\mu_1} \dots y_{\mu_k}$ - матричная производящая функция константных параметров группы G .

Разложение, определяющее ковариантные формы Картана нелинейной реализации $K/L \times G_0$ (ковариантные производные) ^{16, 71}, принимает крайне простой вид:

$$e^{-i\psi(x, y)} (\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) e^{i\psi(x, y)} = i\omega_\mu(x, y), \quad (12)$$

где

$$\omega_\mu(x, y) = -\beta_\mu(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \nabla_\mu \beta_{\rho_1 \dots \rho_n}^{(n)} y_{\rho_1} \dots y_{\rho_n} \quad (13)$$

и $\nabla_\mu \beta_{\rho_1 \dots \rho_n}^{(n)}$ - ковариантные производные голдстокионов. Нетрудно проверить, что при преобразованиях (II) форма $\omega_\mu(x, y)$ преобразуется по закону

$$\omega_\mu'(x, y) = e^{i\beta(x)} \omega_\mu(x, y) e^{-i\beta(x)} + \frac{1}{i} e^{i\beta(x)} \partial_\mu^x e^{-i\beta(x)}, \quad (14)$$

откуда видно, что коэффициенты в ее разложении по y_μ преобразуются независимо друг от друга, причем $\omega_\mu(x, 0) = \beta_\mu(x)$ есть неоднородно преобразующееся поле Янга-Миллса, а все остальные коэффициенты преобразуются однородно. Форма $\omega_\mu(x, y)$ удовлетворяет уравнению Маурера-Картана:

$$(\partial_\mu^x - \partial_\mu^y) \omega_\rho(x, y) - (\partial_\rho^x - \partial_\rho^y) \omega_\mu(x, y) + i[\omega_\mu(x, y), \omega_\rho(x, y)] = 0, \quad (15)$$

которое, конечно, эквивалентно представлению (12).

Выясним теперь, чему на биллокальном языке соответствует исключение тензорных голдстокионов $\beta_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}$ ($n \geq 2$). Условие равенства нулю симметричных частей ковариантных производных с учетом структуры форм $\omega_\mu(x, y)$ (13) записывается как

$$y^M(\omega_M(x, y) + \nu_M(x)) \equiv y^M \bar{\omega}_M(x, y) = 0. \quad (16)$$

что в силу определения (12) эквивалентно следующему уравнению:

$$y^M(\partial_M^x - \partial_M^y) e^{-i\tilde{v}(x, y)} = i y^M \nu_M(x) e^{-i\tilde{v}(x, y)} \quad (17)$$

Нетрудно показать, что его решение имеет вид:

$$e^{-i\tilde{v}(x, y)} = T \exp \left\{ i \int_0^1 y^M \nu_M [x + (1-\beta)y] d\beta \right\}, \quad (18)$$

где символ T означает упорядочение по матрицам Q^i на интервале $0 < \beta < 1$. Показатель экспоненты в (18) есть контурный интеграл вдоль прямого отрезка $(x+y) \longrightarrow (x)$:

$$\int_0^1 y^M \nu_M [x + (1-\beta)y] d\beta = - \int_0^1 \frac{d\xi^M}{d\beta} \nu_M(\xi) d\beta = - \int_{x+y}^x \nu_M(\xi) d\xi^M. \quad (19)$$

Разлагая в (18) $\tilde{v}(x, y)$ в ряд по y_M , можно убедиться, что выражения для тензорных голдстокионов совпадают с теми, которые получаются в компонентном подходе после применения обратного эффекта Хиггса. Отметим, что (17) есть просто условие ковариантного постоянства функционала $\exp\{-i\tilde{v}(x, y)\}$ вдоль прямого пути от $(x+y)_M$ к x_M . Переписанная в терминах $\tilde{v}(x, y)$ форма Картана (12) принимает вид

$$\bar{\omega}_M(x, y) = -\nu_M(x) + \frac{1}{2} G_{MP} y^P + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n+1)!} \nabla_M \nabla_2 \dots \nabla_n G_{Mn} \omega_n y_n \dots y_n^{(20)}$$

где $G_{MP} = \partial_M \nu_P - \partial_P \nu_M - i[\nu_M, \nu_P]$ — обычный янг-миллсовский ротор, $\nabla_M^{ke} = \delta^{ke} \partial_M + G^{sek} \nu_s$.

Таким образом, в нашей схеме естественно возникает струнный функционал калибровочных полей, ставший последнее время предметом интенсивного исследования [9-13]. Его групповой смысл ясен: он реализует наиболее экономное представление смежных классов группы G по подгруппе G_0 . Действительно, общий элемент $e^{-i\tilde{v}(x, y)}$ можно эквивалентно перестроить к виду:

$$e^{i\tilde{V}(x,y)} = e^{i\tilde{V}(x,y)} e^{i\tilde{V}(x,y)}. \quad (21)$$

где $\tilde{V}(x,y)$ ($\tilde{V}(x,0) = \sum_{\mu} \tilde{V}^{\mu}(x,y)|_{y=0} = 0$) включает бесконечный набор тензорных полей $\tilde{V}_{\mu_1 \dots \mu_n}^i$ ($n \geq 2$), которые уже не носят гольдстоуновского характера, ибо преобразуются чисто однородно:

$$\tilde{V}'(x,y) = e^{i\beta(x)} \tilde{V}(x,y) e^{-i\beta(x)}$$

Заметим, что в киральной динамике прямым аналогом функционала $\exp\{i\tilde{V}(x,y)\}$ является объект $\exp\{i\frac{1}{2}\tilde{T}(x,y,\tau)\}$, представляющий левые смежные классы группы $SU^4(2) \times SU^R(2)$ по диагональной подгруппе $SU(2)$.

Обратный эффект Хиггса выбирает минимальный, прямой путь среди множества контуров, соединяющих точки $\lambda+y$, λ . Ясно, однако, что интеграл по любому другому, кривому пути обладает теми же трансформационными свойствами (9) - (11) и, следовательно, определяет некоторое частное представление гольдстоунована $\tilde{V}(x,y)$. Соответствующую экспоненту всегда можно расцепить по формуле (21), выделив минимальную, отвечающую прямому пути часть. Все отличие от прямого пути будет заключено в однородно преобразующемся факторе $\exp\{i\tilde{V}(x,y)\}$, причем показатель $\tilde{V}(x,y)$ будет начинаться с членов не ниже третьего порядка по y_{μ} . Коэффициенты в его разложении по y_{μ} будут выражаться через симметризованные комбинации высших ковариантов типа

$$\sim \gamma_{\mu\nu} \nabla^{\rho} G_{\rho\sigma} + \gamma_{\mu\sigma} \nabla^{\rho} G_{\rho\nu} + \gamma_{\rho\nu} \nabla^{\rho} G_{\sigma\mu} \quad (22)$$

с относительными весами, определяемыми выбором контура. На компонентном языке кривые контуры отвечают определенной модификации высших дифференциальных условий обратного эффекта Хиггса (при исключении тензорных гольдстоуновов можно приравнять симметричные части ковариантных производных не нулю, а ковариантным комбинациям типа (22)).

Заметим, что функционалы типа (18) появляются также в решеточных версиях калибровочных теорий I_1, I_4 , где они вводятся с самого начала как конечно-разностное обобщение полей Янга-Миллса. Важно подчеркнуть еще раз, что в нашем подходе струнное

представление не вводится "руками", а получается "само собой" в результате исключения несущественных параметров фактор-пространства $K / \mathcal{L} \times G_0$. Тем не менее в рамках чисто нелинейной реализации группы K эти функционалы, в отличие от их ренеточных аналогов, непосредственно не участвуют в построении инвариантных лагранжианов: коварианты различных степеней по производным в форме $\omega_{\mu}(x, y)$ (13) не перепутываются при преобразованиях (14) и поэтому приводят к независимым инвариантам (простейший инвариант - обычный лагранжиан Янга-Миллса $\sim G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu}$). Можно, однако, привести аргументы в пользу того, что в области фазового перехода к симметричной фазе соответствующий эффективный лагранжиан должен содержать весь бесконечный набор инвариантов, т.е. в игру должна включаться вся струна целиком.

Итак, мы показали, что намбу-голдстоуновская трактовка калибровочных полей естественно вводит в теорию бислокальные объекты. Получающийся формализм чрезвычайно напоминает стандартную схему нелинейных реализаций внутренних симметрий - с той разницей, что используются бислокальные голдстоуноны вместо локальных. Поле $\varphi(x, y)$ является бислокальным аналогом главного кирального поля на группе G_0 . Хотя трансформационный закон (II) несколько отличается от трансформационного закона кирального поля, основное разложение (12) и, следовательно, форма $\omega_{\mu}(x, y)$ является компонентами соответствующих объектов для такого поля. Иными словами, теория Янга-Миллса на группе G_0 можно рассматривать как сектор бислокальной нелинейной G -модели для главного кирального поля на этой группе, выделяемый условиями (15), (16), причем по определению $\varphi_{\mu}(x) \equiv \partial_{\mu}^{\alpha} \varphi(x, y) |_{y=0} = -\omega_{\mu}(x, 0)$. В этой связи интересно выяснить, какие дополнительные ограничения на форму $\tilde{\omega}_{\mu}(x, y)$ индуцирует обычное уравнение Янга-Миллса

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

Заманчиво предположить, что оно эквивалентно явно ковариантному условию поперечности по переменной y_{μ}

$$\partial_{\mu}^{\alpha} \tilde{\omega}_{\mu}(x, y) \stackrel{?}{=} 0. \quad (24)$$

Прямая проверка показывает, однако, что уже в третьем порядке по g_m в дивергенции (24) присутствуют члены, не обращающиеся в нуль в силу только (23)^{x)}. Их можно компенсировать, добавив к дивергенции нелинейный член:

$$-i \frac{1}{10} [(g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}) \bar{\omega}_\lambda, \bar{\omega}_\lambda],$$

причем эта добавка компенсирует и ненулевые члены в четвертом порядке по g_m . Однако члены пятого порядка не исчезают, и для их компенсации, по-видимому, необходимо добавить нелинейный член уже с двумя производными, что кажется не слишком удовлетворительным. Возможно, выход в отказе от условия "прямолинейности" (16), которое, может быть, является слишком жестким. Уравнение (23) может оказаться эквивалентным условию поперечности формы $\omega_m(x, y)$ при каком-то другом выборе контура. Во всяком случае, вопрос о том, можно ли сформулировать для формы $\omega_m(x, y)$ замкнутое уравнение, эквивалентное уравнениям Янга-Миллса (23), в настоящее время остается открытым.

3. Из того факта, что нелинейная реализация группы K на обычных полях сводится к нелинейной реализации группы G_0 на бидокальных полях, с достаточной очевидностью следует, что линейные представления группы K , если они существуют, реализуются на бидокальных линейных мультиплетях группы G_0 .

Детальное изучение таких представлений и построение соответствующих лагранжианов будет проведено отдельно. Здесь мы ограничимся рассмотрением простейших мультиплетов такого рода и покажем, как в рамках линейной реализации могут возникать калибровочные поля. Для простоты возьмем $G_0 = SU(2)$.

Простейший мультиплет может быть построен путем дополнения фактор-пространства $K/\mathbb{Z}_2 \times SU(2)$ до линейного пространства подобно тому, например, как векторный мультиплет группы $O(4)$ может быть получен дополнением сферы $O(4)/O(3)$ до 4-мерного евклидова пространства (к "пионам" добавляется G -частица).

^{x)} Возможно, что этот факт имеет прямое отношение к недавней работе Виттена ^{16/}. Я благодарен Д.И. Манину за это замечание.

Рассмотрим произвольную блочную матрицу 2×2 с трансформационными свойствами (II):

$$U'(x, y) = U_0'(x, y) + \frac{i}{2} \tau^i U_i'(x, y) = e^{i\beta(x+y)} U(x, y) e^{-i\beta(x)} \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что все компоненты в разложении полей $U_0(x, y)$ и $U_i(x, y)$ по y_μ преобразуются в отличие от компонент блочного голдстоуниона $\beta^i(x, y)$ линейно и однородно:

$$\delta U_0(x) = 0, \quad \delta U^k(x) = -(\vec{\beta}(x) \times \vec{U}(x))^k \quad (26)$$

$$G: \delta U_{\mu}^k(x) = U_0(x) \partial_{\mu} \beta^k(x) - (\vec{\beta}(x) \times \vec{U}_{\mu}(x))^k - (\partial_{\mu} \vec{\beta}(x) \times \vec{U})^k, \quad (27)$$

$$\delta U_{\mu\nu}^k(x) = U_0(x) \partial_{\mu}^* \partial_{\nu}^* \beta^k(x) + \dots,$$

реализуя тем самым линейное представление группы K .

Если $\langle U_0 \rangle \neq 0$, то преобразования полей $U_{\mu}^k(x), U_{\mu\nu}^k(x), \dots$ будут начинаться с неоднородных членов, характерных для компонент поля $\beta^i(x, y)$:

$$\delta U_{\mu}^k(x) = \langle U_0 \rangle \partial_{\mu}^* \beta^k(x) + \dots$$

$$\delta U_{\mu\nu}^k(x) = \langle U_0 \rangle \partial_{\mu}^* \partial_{\nu}^* \beta^k(x) + \dots$$

Тот факт, что в этом случае поля $U_{\mu}^k(x), U_{\mu\nu}^k(x), \dots$ канонически связаны с голдстоунионами $\beta_{\mu}^k(x), \beta_{\mu\nu}^k(x), \dots$, следует из возможности полярного разложения матрицы $U(x, y)$:

$$U(x, y) = e^{i\beta(x, y)} \left\{ \langle U_0 \rangle + \vec{U}_0(x, y) + \frac{i}{2} \tau^i U_i(x) \right\}, \quad (28)$$

где $\vec{U}_0(x, y)$ ($\langle \vec{U}_0 \rangle = 0$) является скаляром группы K (аналогом $\vec{\sigma}$ -поля в полярном разложении $O(4)$ -вектора). Матрица $U(x, y)$ принадлежит фактор-пространству G/G_0 при условиях

$$U(x, y) U^{\dagger}(x, y) = I, \quad U_i(x) = 0, \quad (29)$$

или на язве полярных компонент:

$$\vec{U}_0(x, y) = U_i(x) = 0.$$

Заметим, что вместо представления (25) мы могли бы рассмотреть матрицу с другим трансформационным законом:

$$\bar{U}'(x, y) = e^{i\beta(x+y)} \bar{U}(x, y), \quad (30)$$

который также есть реализация группы K . В этом случае, однако,

$$\delta \bar{U}^i(x) = \bar{U}_0(x) \beta^i(x) + \frac{1}{2} (\bar{\beta}^i(x) \times \bar{U}^i)^i \quad (31)$$

и при $\langle \bar{U}_0 \rangle \neq 0$ не только компоненты $\bar{U}_\mu^K(x), \bar{U}_{\mu\nu}^K(x), \dots$ становятся голдстонскими, но и скаляр $\bar{U}^i(x)$, что соответствует спонтанному нарушению не только группы G до G_0 , но и полному спонтанному нарушению группы глобальной симметрии G_0 , т.е. в данном случае возникает фактор-пространство K/L вместо $K/L \times G_0$. Векторный голдстоник становится массивным за счет поглощения $\bar{U}^i(x)$. Таким образом, модель, основанная на представлении (25), после спонтанного нарушения должна приводить к обычной теории Янга-Миллса, а модель, основанная на представлении (30), - к массивной теории Янга-Миллса с инвариантным способом введения массы¹⁷⁾.

В заключение заметим, что на самом деле пока не ясно, как корректно выделять компонентные поля из бислокального поля. По-видимому, для этой цели надо разлагать бислокальное поле не просто в ряд Тейлора по Y_μ , а по некоторой полной системе ортогональных полиномов от Y_μ . Нахождение удобных методов работы с бислокальными полями важно для исследования соответствующих инвариантных лагранжианов, которые, как уже говорилось, являются подходящими кандидатами на описание симметричной фазы теории Янга-Миллса, явным образом реализующих идеи калибровочно-инвариантного вакуума.

Я искренне благодарен И.А.Арефьевой, Б.М.Зупнику, В.И.Манину, В.А.Миранскому, В.Н.Первушину, А.М.Поликову, А.А.Славному, Л.Д.Фаддееву и особенно В.И.Огневцевскому за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. K.G.Wilson. Phys.Rev. D10,2445 (1974).
2. A.M.Ролуаков. Nucl.Phys. B120,429 (1977).
3. А.А.Славнов. Труды ХУШ Международной конференции по физике высоких энергий (том II). ОИЯИ Д1,2-10400, Дубна, 1977, т.12.
4. E.Brezin, J.Zinn-Justin. Phys.Rev.Lett. 36, 691 (1976).
E.Brezin, J.Zinn-Justin and J.C.Le Guillon, Phys.Rev. D14, 2614 (1976).

5. W.A.Bardeen, E.W.Lee, R.E.Shrock. Phys.Rev. D14, 985 (1976).
6. E.A.Manas, B.N.Ornosenkii. Известия в КЭТФ 23, 661 (1976).
7. E.A.Ivanov, V.I.Ogievetsky. Lett. in Math.Phys. 1, 309 (1976).
8. P.Kosinski et al. Journ.of Phys. 9A, 1187 (1976).
9. E.A.Manas, B.N.Ornosenkii. ТМФ 25, 164 (1975).
10. J.L.Servais, A.Nevou. Phys.Lett. 80B, 255 (1974).
11. Y.Nambu. Phys.Lett. 80B, 372 (1979).
12. A.M.Polyakov. Phys.Lett. 82B, 247 (1979).
13. E.Я.Арофова. Сфера в стем одержанке, с.200.
14. E.Corrigan, E.Hasslacher. Phys.Lett. 81B, 181 (1979).
15. J.Kogut and L.Susskind. Phys.Rev. D11, 395 (1975).
16. E.Witten. Phys.Lett. 77B, 395 (1978).
17. A.A.Cannon. ТМФ 10, 305 (1972).

**V. Классические решения в теории поля
и проблемы квантования**



КВАНТОВЫЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Л.Д. Фаддеев

Ленинградское отделение Математического института им. В.А. Стеклова

Метод обратной задачи, открытый в 1967 г.^{/1/} М.Крускалом и др., позволил найти обширный класс двумерных эволюционных уравнений, допускающих явное решение. В этом классе содержатся уравнения, квантование которых приводит к содержательным моделям квантовой теории поля, например, т.н. нелинейное уравнение Шредингера (модель N.S.)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi,$$

изученное методом обратной задачи в ^{/2,4/}, и уравнение sine-Gordon (модель S.G.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0,$$

которому посвящены работы^{/5-9/}. Гамильтонова интерпретация метода обратной задачи^{/3/} показала, что его преобразования можно рассматривать как переход к переменным типа "действие-угол". Это соображение привело к последовательной схеме квантования приведенных уравнений в рамках квазиклассического приближения^{/10-13/}.

Работая в этом направлении, я и мои сотрудники в Ленинградском отделении Математического института им. В.А. Стеклова не могли избавиться от ощущения, что непосредственное исследование квантовой задачи для моделей, решаемых методом обратной задачи, может оказаться легче, чем их косвенное рассмотрение, основанное на решении классической задачи и его последующем квантовании. Это убеждение поддерживалось в том числе и тем обстоятельством, что для модели N.S. решение квантовой задачи - определение собственных функций проблемы N частиц с парным взаимодействием в виде δ -функции - действительно проще классического решения (см. ^{/14-16/}).

Весной 1978 г. появилась новая интерпретация схемы Дакса^{/21/} и играющая важную роль в построении метода обратной задачи, в терминах геометрии группы Ли (см. ^{/17, 18/} и дальнейшее развитие в ^{/19, 20/}).

Оказалось, что фазовое пространство интегрируемых моделей является орбитой непрерывного действия бесконечномерной группы Ли. Последствием такого действия в конечномерном случае в свое время оказалось очень плодотворным и привело к созданию т.н. метода орбит в теории представлений группы Ли^{/22/}. Представление в этом методе интерпретируется как квантовомеханическая система, полученная при квантовании классического действия группы Ли. Естественно, что связь метода обратной задачи и метода орбит также указывает на возможность точного квантования моделей, возможные интегрируемые при помощи первого метода.

Эти обстоятельства заставили меня и моих сотрудников - В.Е.Корепинна, П.П.Кулиша и в особенности В.Е.Склянина, Л.А.Талхадкина - заняться разработкой квантового метода обратной задачи. Полученные в течение года результаты показали, что этот метод существует и применим почти ко всем задачам, решенным до сих пор классически. По мере работы выяснилась тесная связь метода обратной задачи с двумя другими методами одномерной математической физики (термины Миттиса и Либа^{/24/}):

1) идеями Олзагера, развитыми впоследствии главным образом Бакстером при решении двумерных решетчатых моделей в классической статистической физике (см. обзоры в ^{/23/} и оригинальные работы ^{/25, 26/});

2) явными формулами для собственных функций некоторых квантовомеханических проблем, введенными в 1932 Бете^{/27/}, полученными дальнейшее развитие в работах Хильтена^{/28/}, Янга и Янга^{/29/} и многих других, как это видно из обзоров^{/23, 24/}.

В результате оба этих замечательных достижения одномерной математической физики естественно сливаются с третьим - методом обратной задачи - еще больше подчеркивая его универсальность.

В данном обзоре я разберу характерные примеры, приводящие к формулировке квантового метода обратной задачи в работах^{/30-34/}. Кстати сказать, по мере развития этого метода роль собственно обратной задачи (т.е. задачи восстановления дифференциального оператора по его спектральным характеристикам) уменьшилась, так что сам метод возможно более естественно называть методом вспомогательной спектральной задачи. Однако первое название уже исторически укрепилось и его уже трудно изменить.

В § 1 сформулированы основные черты классического метода обратной задачи в форме, удобной для его квантовой переформулировки в дальнейшем. В § 2 обсуждаются общие соображения для такой переформулировки. Эти общие соображения подробно иллюстрируются в § 3 на примере модели N. S. как для взаимодействия с притяжением, так и с отталкиванием при конечной плотности. В § 4 более кратко разбираются два других примера: модель S. G. и модель Худжа квантовой теории магнетиков. Технические подробности по поводу этих интересных моделей публикуются отдельно^{33, 34}. В кратком заключении будут подведены итоги и отмечены нерешенные вопросы.

Мне хотелось бы поблагодарить В.Е.Корешкина, П.П.Кулима, А.Г.Рейнмана, М.А.Семенову-Гиньванского и в особенности Е.К.Склянина и Л.А.Тахтаджяна, обсуждения и совместные работы с которыми привели к результатам, описанным ниже.

§ 1. Основные черты классического метода обратной задачи

В основе метода обратной задачи лежит исследование вспомогательной спектральной задачи и установление связи между ее коэффициентами и спектральными данными. Для конкретности рассмотрим модель N. S. с уравнением

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2\alpha |\Psi|^2 \Psi. \quad (I.1)$$

Здесь $\Psi(x, t)$ - комплексная функция, которую мы будем сначала считать убывающей при $|x| \rightarrow \infty$, параметр α играет роль константы связи. Уравнение (I.1) - гамильтоново и порождено гамильтонианом

$$H = \int \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \alpha (\Psi^* \Psi)^2 \right) dx \quad (I.2)$$

и скобками Пуассона

$$\{ \Psi(x), \Psi^*(y) \} = i \delta(x-y). \quad (I.3)$$

Вспомогательная спектральная задача задается дифференциальным оператором X , действующим на столбец

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (I.4)$$

и содержащими Ψ^* и Ψ как коэффициенты:

$$X\dot{\Phi} = \left(\frac{d}{dx} + i \begin{pmatrix} \lambda/2 & 2\Psi^* \\ -\varepsilon 2\Psi & -\lambda/2 \end{pmatrix} \right) \Phi = 0. \quad (I.5)$$

Здесь λ - спектральный параметр, $2 = |x|^{1/2}$, $\varepsilon = \text{sign} x$.

Введем матрицу перехода $T_L(\lambda)$ для задачи (I.5) на интервале $(-L, L)$. Пусть $G_L(x, \lambda)$ - матричное решение системы (I.5), удовлетворяющее граничному условию

$$G_L(-L, \lambda) = I, \quad (I.6)$$

где I - единичная матрица. Матрицей перехода называется значение этого решения при $x = L$:

$$T_L(\lambda) = G_L(L, \lambda). \quad (I.7)$$

Можно показать, что вследствие специального вида матрицы-коэффициента в (I.5) матрица $T_L(\lambda)$ имеет вид

$$T_L(\lambda) = \begin{pmatrix} a_L(\lambda) & b_L(\lambda) \\ \varepsilon b_L^*(\lambda) & a_L^*(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (I.8)$$

где функции $a_L(\lambda)$, $b_L(\lambda)$ - т.н. коэффициенты перехода - являются целыми функциями параметра λ и при вещественных λ удовлетворяют условию "унитарности"

$$|a_L|^2 - \varepsilon |b_L|^2 = 1. \quad (I.9)$$

Для убывающих $\Psi(x)$ при вещественных λ существует предел

$$T(\lambda) = \lim_{L \rightarrow \infty} V(\lambda)^{-L} T_L(\lambda) V(\lambda)^{-L} = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ \varepsilon b^*(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (I.10)$$

где $V(\lambda)$ - числовая матрица

$$V(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda/2} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda/2} \end{pmatrix}. \quad (I.11)$$

Для коэффициентов $a_n(\lambda)$ и $b_n(\lambda)$ это означает, что существуют пределы

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\lambda) e^{ik}, \\ b(\lambda) &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(\lambda). \end{aligned} \quad (I.12)$$

Пределный коэффициент $a(\lambda)$ остается функцией, аналитической в верхней полуплоскости, а коэффициент $b(\lambda)$, вообще говоря, определен лишь при вещественных λ . Соотношение (I.9), конечно, остается в силе и для $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$.

При $\alpha < 0$ уравнение (I.1) имеет семейство солитонных решений

$$\Psi(x, t) = \frac{2\tau}{\sqrt{-\alpha}} \frac{\exp\{-2i[\sigma(x-x_0) + 2t(\sigma^2 - \tau^2)]\}}{\operatorname{ch}\{2\tau[x-x_0 + 4\sigma t]\}}. \quad (I.13)$$

Соответствующие коэффициенты перехода имеют вид

$$a(\lambda) = \frac{\lambda - \eta}{\lambda - \eta^*}, \quad \eta = \sigma + i\tau, \quad \tau > 0; \quad b(\lambda) = 0. \quad (I.14)$$

Коэффициенту перехода

$$a_n(\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \eta_j}{\lambda - \eta_j^*} \quad (I.15)$$

соответствует многосолитонное решение, явную формулу для которого мы не будем выписывать.

Систематическое вычисление коэффициентов $a_n(\lambda)$, $b_n(\lambda)$ по $\Psi^*(x)$, $\Psi(x)$ может быть основано на интегральном уравнении

$$G_n(x, \lambda) = V(x) + \int_{-1}^x V(x-y) \begin{pmatrix} 0 & \lambda \Psi^*(y) \\ -\varepsilon \lambda \Psi(y) & 0 \end{pmatrix} G_n(y, \lambda) dy, \quad (I.16)$$

которое можно решать итерациями. В частности, для $b(\lambda)$ получается выражение

$$b(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) e^{i\lambda x} dx + O(1/\lambda^2), \quad (I.17)$$

что показывает, что соотношение между $\Psi^*(x)$ и $b(\lambda)$ является нелинейным обобщением преобразования Фурье.

Удача преобразования от Ψ^* , Ψ к коэффициентам перехода $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ состоит в том, что (3, 4):

1. Гамильтониан H явно выражается через $a(\lambda)$. Положим

$$\ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda^{-n}. \quad (I.18)$$

Тогда

$$H = \frac{c_2}{i\alpha}. \quad (I.19)$$

2. Скобки Пуассона между коэффициентами перехода вычисляются явно. Приведем некоторые из них:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0; \quad (I.20)$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{-\alpha}{\lambda - \mu} a(\lambda) b(\mu). \quad (I.21)$$

В (I.21) мы считаем, что $\text{Im} \lambda > 0$.

Приведенные соотношения показывают, что $a(\lambda)$, рассматриваемый как функционал от Ψ^* и Ψ , является производящей функцией для коммутирующих (в смысле скобки Пуассона) интегралов движения рассматриваемой динамической системы. Далее, уравнение движения для $b(\mu)$ выглядит очень просто. Перепишем (I.21) в виде

$$\{ \ln a(\lambda), b(\mu) \} = \frac{-\alpha}{\lambda - \mu} b(\mu) \quad (I.22)$$

и разложим обе части в ряд по λ^{-1} . Сравнивая коэффициенты при λ^{-3} , получим

$$\{ H, b(\mu) \} = \frac{db(\mu)}{dt} = i\mu^2 b(\mu), \quad (I.23)$$

откуда имеем знаменитый ответ:

$$b(\mu, t) = \exp\{i\mu^2 t\} b(\mu). \quad (I.24)$$

Итак, в переменных $b(\mu)$, $b^*(\mu)$ уравнение движения становится линейным и явно решается. Именно в этом смысле они являются переменными типа "действие-угол" для рассматриваемой динамической системы.

Обратное преобразование от переменных $b(\lambda)$, $b^*(\lambda)$ к исходным переменным $\Psi(x)$, $\Psi^*(x)$ и представляет собственно решение обратной задачи для вспомогательной линейной системы (I.5), давшее название

всему методу. Мы не будем описывать соответствующий формализм, основанный на линейном уравнении Гельфанда-Левитака-Марченко, так как в этом обзоре нашей целью является описать квантовый вариант уже приведенных формул, в частности, соотношений типа (I.19), (I.20) и (I.21). Получение квантового аналога формализма решения обратной задачи представляет несомненный интерес и находится в стадии разработки.

Наряду с быстро убывающими при $|x| \rightarrow \infty$ $\Psi^*(x, t)$, $\Psi(x, t)$ для задачи (I.1) рассматривают также и решения, периодические по

$$\Psi(-L, t) = \Psi(L, t). \quad (I.25)$$

Роль спектральных данных в этом случае играет матрица перехода $T_L(\lambda)$, а производящей функцией для коммутирующих интегралов движения является ее след

$$f_L(\lambda) = \text{tr} T_L(\lambda) = a_L(\lambda) + a_L^*(\lambda). \quad (I.26)$$

Скобки Пуассона между коэффициентами перехода вычисляются явно, однако не существует такой линейной комбинации $\tilde{v}(\mu)$ коэффициентов перехода, для которой выполнялось бы соотношение типа (I.21)

$$\left\{ \ln f_L(\lambda), \tilde{v}(\mu) \right\} = c(\lambda, \mu) \tilde{v}(\mu) \quad (I.27)$$

с числовой функцией $c(\lambda, \mu)$. Поэтому простые переменные типа "действие-угол" для периодической задачи еще не получены и для описания динамики приходится использовать более изощренные средства, по поводу которых мы отсылаем читателя к оригинальной литературе (см. обзор^{35, 36/}). Ниже мы убедимся, что в квантовом варианте периодическая задача выглядит достаточно просто и с ней удастся разобратся, практически оставаясь в рамках уже приведенных объектов и формул.

Приведем теперь эти формулы для ряда других интересных моделей:

I. Ферромагнетик Гейзенберга (модель F. H.)^{37/}.

Динамические переменные - вектор спина $\vec{S}(x)$ - представляет собой набор трех функций $\vec{S}(x) = (S^1(x), S^2(x), S^3(x))$, удовлетворяющих дополнителюму условию

$$(\vec{S})^2 = (S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2 = 1. \quad (I.28)$$

Уравнение движения

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{S} \times \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2}, \quad (I.29)$$

где используется векторное произведение

$$(\vec{a} \times \vec{b})^i = \varepsilon^{ijk} a^j b^k, \quad (I.30)$$

является гамильтоновым и порождено гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 dx \quad (I.31)$$

и скобками Пуассона

$$\{ S^i(x), S^j(y) \} = \varepsilon^{ijk} S^k(x) \delta(x-y). \quad (I.32)$$

Вспомогательная линейная задача имеет вид

$$\chi \Phi = \left(\frac{d}{dx} + i\lambda \hat{S} \right) \Phi = 0, \quad (I.33)$$

где

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^3 S^i(x) \sigma^i \quad (I.34)$$

и σ^i , $i = 1, 2, 3$ - матрицы Паули. Естественные граничные условия

$$\hat{S}(x) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow \sigma^3 \quad (I.35)$$

отвечают вектору спина, имеющему фиксированное значение на бесконечности.

При выполнении этого условия уравнение (I.29) имеет матричное решение $G(x, \lambda)$, такое, что

$$G(x, \lambda) \Big|_{x \rightarrow -\infty} \cong E(x, \lambda); \quad G(x, \lambda) \Big|_{x \rightarrow \infty} \cong E(x, \lambda) T(\lambda), \quad (I.36)$$

где

$$E(x, \lambda) = \exp \{ -i\lambda \sigma^3 \}, \quad (I.37)$$

а матрица перехода $T(\lambda)$ имеет вид

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ -b^*(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (I.38)$$

Коэффициенты перехода $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам этих коэффициентов для модели N.S., в частности, скобки Пуассона, аналогичные (I.20), (I.21), выглядят следующим образом:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \quad (I.39)$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} a(\lambda) b(\mu). \quad (I.40)$$

Таким образом, сохраняется роль коэффициента $a(\lambda)$ как производящей функции коммутирующих интегралов движения и коэффициентов $b(\lambda)$, $b^*(\lambda)$ как переменных типа "действие-угол".

2. Модель S.G. (5-9). Уравнение движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta u = 0 \quad (I.41)$$

содержит два параметра m и β , играющих роль массы и константы связи соответственно. Это уравнение является гамильтоновым и порождено гамильтонианом

$$H = \int \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta u) \right) dx \quad (I.42)$$

и скобками Пуассона

$$\{ \pi(x), u(y) \} = \delta(x-y). \quad (I.43)$$

Здесь подразумевается, что

$$\pi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t). \quad (I.44)$$

Вспомогательная линейная задача имеет вид

$$\left[\frac{d}{dx} + \frac{i}{4} \left(\beta \pi \sigma^3 + m \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \sin \beta u \frac{\sigma^1}{2} + m \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \cos \beta u \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \Phi = 0. \quad (I.45)$$

При условиях

$$u(x) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \pmod{\frac{2\pi}{\beta}}; \quad \pi(x) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (I.46)$$

уравнение (I.45) имеет матричное решение $G(x, \lambda)$, аналогичное введенному в предыдущих моделях, посредством которого вводится матрица перехода

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ -b^*(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Коэффициенты перехода $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ обладают дополнительным свойством при вещественных λ :

$$a(-\lambda) = a^*(\lambda); \quad b(-\lambda) = -b^*(\lambda), \quad (1.48)$$

так что они определяются своими значениями на полуоси $0 \leq \lambda < \infty$. Основные скобки Пуассона имеют вид

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0; \quad (1.49)$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{\beta^2}{4} \cdot \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} a(\lambda)b(\mu). \quad (1.50)$$

Коммутирующие интегралы движения даются коэффициентами разложения $\ln a(\lambda)$ как при $\lambda \rightarrow \infty$, так и при $\lambda \rightarrow 0$:

$$\ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda^{-n}; \quad (1.51)$$

$$\ln a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} \lambda^{-n}. \quad (1.52)$$

В частности, гамильтониан H имеет следующее выражение:

$$H = \frac{2im}{\beta^2} (c_{-1} - c_1). \quad (1.53)$$

Во всех примерах, приведенных до сих пор вспомогательная спектральная задача формулируется для двумерной вектор-функции Φ и матрица перехода $T_\lambda(\lambda)$ является матрицей 2×2 . В литературе обсуждаются примеры динамических систем с вспомогательной спектральной задачей, матрица перехода для которой имеет большую размерность (см., например, /38-44/). В этом обзоре мы эти системы обсуждать не будем.

Наряду с непрерывными моделями теории поля метод обратной задачи позволяет рассматривать модели на решетке. Наиболее знаменитый пример дает цепочка Тода /45/, исследованная методом обратной задачи в /46, 47/. Уравнения движения

$$\dot{q}_n = e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}} \quad (1.54)$$

являются гамильтоновыми и порождены гамильтонианом

$$H = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2} + e^{q_{n+1} - q_n} \right) \quad (1.55)$$

и обычными скобками Пуассона

$$\{p_n, q_m\} = \delta_{nm}. \quad (1.56)$$

Различают три типа граничных условий:

а) бесконечная цепочка $-\infty < n < \infty$,

$$q_n \rightarrow 0, \quad p_n \rightarrow 0, \quad |n| \rightarrow \infty, \quad (1.57)$$

в гамильтониане следует сделать простое вычитание для того, чтобы суммы (1.55) сходились;

б) периодическая цепочка длиной N

$$p_{N+1} = p_1, \quad q_{N+1} = q_1; \quad (1.58)$$

в) свободная цепочка длиной N , где гамильтониан дается выражением (1.55), причем член $\exp\{q_{N+1} - q_N\}$ опущен.

Роль вспомогательной линейной задачи играет система

$$\Phi_{n+1} = L_n \Phi_n, \quad (1.59)$$

где

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \end{pmatrix} - \quad (1.60)$$

по-прежнему двумерный вектор, а L_n -матрица 2×2 ,

$$L_n = \begin{pmatrix} p_n - \lambda & -e^{q_n} \\ e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Матрица перехода $T_N(\lambda)$ определяется как произведение локальных матриц:

$$T_N(\lambda) = \prod_{1 \leq n \leq N} L_n(\lambda) = L_N(\lambda) \dots L_1(\lambda) = \begin{pmatrix} a_N(\lambda) & b_N(\lambda) \\ c_N(\lambda) & d_N(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

и ее матричные элементы являются функциями канонических переменных p_n и q_n . Нетрудно убедиться, что гамильтонианы свободной и периодической цепочек просто связаны с выражениями:

$$\frac{d^{N-2}}{d\lambda^{N-2}} a_n(\lambda) \Big|_{\lambda=0}, \quad (1.63)$$

$$\frac{d^{N-2}}{d\lambda^{N-2}} (a_n(\lambda) + d_n(\lambda)) \Big|_{\lambda=0}, \quad (1.64)$$

соответственно. Для рассмотрения периодической цепочки, возможно, полезно более симметричное эквивалентное выражение для матрицы

$$L'_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_n - \lambda - 2i \operatorname{ch} q_n & i(p_n - \lambda) - 2 \operatorname{sh} q_n \\ -i(p_n - \lambda) - 2 \operatorname{sh} q_n & p_n - \lambda + 2i \operatorname{ch} q_n \end{pmatrix}, \quad (1.65)$$

совместное с общим выражением типа (1.8). Матрицы L'_n и L_n подобны

$$L'_n = M^{-1} L_n M, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.66)$$

так что подобны и соответствующие матрицы перехода, а выражение (1.64) для гамма-функции остается неизменным.

Для бесконечной цепочки матрица перехода определяется как предел

$$T(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} f^{-1} V(\lambda)^{-N} T'_N(\lambda) V(\lambda)^N f = \begin{pmatrix} a(\lambda), & b(\lambda) \\ b^*(\lambda), & a^*(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

где

$$T'_N(\lambda) = \prod_{-N \leq n \leq N} L'_n(\lambda); \quad V(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\lambda - 2i & -i \\ i\lambda & -\lambda + 2i \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

а f - матрица собственных векторов $V(\lambda)$. Можно показать, что $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ совпадают с коэффициентами перехода, введенными в [46, 47, 48] другим способом, где выяснена их роль как производящих функций для интегралов движения и переменных типа "действие-угол". Основные скобки Пуассона выглядят следующим образом [48, 49]:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \quad (1.69)$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{1}{4} \frac{\cos \theta \cos \varphi - 1}{\sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \sin \theta \sin \varphi} a(\lambda) b(\mu); \quad \begin{matrix} \lambda = -2i \cos \theta, \\ \mu = -2i \cos \varphi, \end{matrix} \quad (1.70)$$

так что роль коэффициентов перехода как переменных типа "действие-угол" сохраняется.

Перечисленные модели представляют собой набор характерных примеров, которые наряду с уравнением Кортевега-де-Фриса послужили основным тренировочным материалом для математического раз-

вита метода обратной задачи. К счастью, все они также имеют несомненный интерес для физики. В этом смысле они представляют идеальное поле деятельности для математической физики; но-видимому, этим объясняется тот интерес к ним со стороны современных специалистов по математической физике, свидетелем которого мы являемся.

§ 2. Общая программа квантового поля.

В предыдущем параграфе была выписана динамическая роль коэффициентов перехода, введенных при помощи вспомогательной спектральной задачи, для решения нелинейных эволюционных уравнений в классической теории поля. Здесь мы будем рассматривать квантовые модели, соответствующие этим уравнениям. Данные Коши: $\Psi^{\pm}(x)$, $\chi(x)$ для (N.S.); $\bar{Z}(x)$ для (H.F.); $\psi(x)$, $\bar{\chi}(x)$ для (S.G.); p_n , q_n для (T.C.) — становятся операторами, перестановочные соотношения для которых получаются по правилу.

$$\{ , \} = \frac{i}{\hbar} [,], \quad (2.1)$$

где \hbar — константа Планка, которую в дальнейшем мы не будем явно записывать, полагив ее формально равной 1. Эти операторы мы будем называть преддирегеровскими каноническими операторами.

Перестановочные соотношения (2.1) реализуются в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , характерном для каждой модели. В этом параграфе мы посмотрим, в какой мере классические преобразования с вспомогательной линейной задачей переносятся на квантовый случай.

Линейный оператор

$$X = \frac{d}{dx} + Q(x, \lambda) \quad (2.2)$$

для непрерывных моделей (см. (1.5), (1.33), (1.45)) теперь имеет своими коэффициентами операторы в \mathcal{H} . Поэтому, если мы будем рассматривать вспомогательную спектральную задачу для матрицы-оператора $G_L(x, \lambda)$

$$\left(\frac{d}{dx} + Q(x, \lambda) \right) G_L(x, \lambda) = 0, \quad G(-L, \lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где I — единичный оператор в \mathcal{H} , то мы должны помнить о некоммутативности коэффициентов матриц Q и G_L и ввести определенное упорядочение. Мы будем считать, что такое упорядочение дается

одним параметром λ , так что формальное решение уравнения (2.3) дается выражением

$$G_L(x, \lambda) = \widehat{\exp} \left\{ - \int_{-l}^x Q(y, \lambda) dy \right\}, \quad (2.4)$$

где $\widehat{\exp}$ символизирует усреднение по x : операторы $Q(x, \lambda)$ расставлены справа налево по мере возрастания параметра x .

Более корректное определение этого усреднения мы получим после перехода на решетку. Разделим интервал $(-l, l)$ на $2N$ равных промежутков длиной

$$\Delta = \frac{l}{N} \quad (2.5)$$

и положим

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} - \int_{x_n - \Delta}^{x_n} Q(x, \lambda) dx, \quad n = -N+1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Здесь x_{-N}, \dots, x_N — координаты вершин решетки, которую в данном одномерном случае было бы более естественно называть цепочкой. Матричные элементы матрицы 2×2 L_n действуют в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_n , в котором представлены усредненные по интервалу $(x_n - \Delta, x_n)$ локальные вейнштейновские канонические операторы. Все гильбертово пространство \mathcal{H}_N , где действуют вейнштейновские операторы, заданные на интервале $(-l, l)$, представляется как тензорное произведение:

$$\mathcal{H}_N = \prod_{-N+1 \leq n \leq N} \mathcal{H}_n. \quad (2.7)$$

Через I_n в (2.6) обозначен единичный оператор в \mathcal{H}_n .

Важнейшим свойством матриц $Q(x, \lambda)$ вспомогательных спектральных задач является их "ультралокальность": матричные элементы $Q(x, \lambda)$ не содержат производных от вейнштейновских канонических операторов. Поэтому коммутаторы матричных элементов матриц $Q(x, \lambda)$ и $Q(y, \mu)$ пропорциональны $\delta(x-y)$, а коэффициенты матриц $L_n(\lambda)$ и $L_m(\mu)$ коммутируют при $m \neq n$.

Аппроксимация (2.6) матрицы перехода на инфинитезимальном отрезке $(x_n - \Delta, x_n)$ иногда слишком наивна. Ниже для модели S. G. мы выберем более изощренную формулу для L_n .

Матрица-оператор перехода $T_L(\lambda)$ определяется следующим образом:

$$T_L(\lambda) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \widehat{\prod_{n=1,2,\dots,N} L_n(\lambda)}, \quad (2.8)$$

где $\widehat{}$ символизирует упорядочение, согласно которому операторы $L_n(\lambda)$ располагаются справа налево с ростом номера n .

Проявляем эти введенные объекты на конкретных моделях.

1. Модель N S

Ирвингеровские локальные операторы $\Psi^{\pm}(x), \Psi(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\Psi(x), \Psi^{\pm}(y)] = \delta(x-y) I. \quad (2.9)$$

Усредненные операторы

$$\chi_n = \int_{x_n - \Delta}^{x_n} \Psi(x) dx; \quad \chi_n^* = \int_{x_n - \Delta}^{x_n} \Psi^*(x) dx, \quad (2.10)$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\chi_n, \chi_m^*] = \Delta \delta_{mn} I_n, \quad (2.11)$$

так что можно считать, что χ_n и χ_m^* имеют порядок $\Delta^{1/2}$ при $\Delta \rightarrow 0$. Пространство \mathcal{H}_n есть попросту гильбертово пространство \mathcal{L} для квантовомеханической системы с одной степенью свободы, которое можно реализовать как $\mathcal{L} = L_2(\mathbb{R}^1)$.

В введенных обозначениях матрица L_n записывается в виде

$$L_n = \begin{pmatrix} (1 - i^{1/2} \Delta) I_n & -i \Delta \chi_n^* \\ i \Delta \chi_n & (1 + i^{1/2} \Delta) I_n \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

2. Модель H.F.

Ирвингеровские канонические операторы $S^i(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[S^i(x), S^j(y)] = -i \varepsilon^{ijk} S^k(x) \delta(x-y) \quad (2.13)$$

и дополнительному условию

$$\sum_{i=1}^3 (S^i(x))^2 = I, \quad (2.14)$$

совместному с (2.13). Усредненные операторы

$$S_n^i = \int_{x_n-\Delta}^{x_n} S^i(x) dx \quad (2.15)$$

удовлетворяют соотношениям

$$[S_n^i, S_n^j] = -i \epsilon^{ijk} S_n^k \delta_{nm} \quad (2.16)$$

и дополнительному условию

$$\sum_i (S_n^i)^2 = \Delta^2 \quad (2.17)$$

(с точностью до младших членов при $\Delta \rightarrow 0$). Гильбертово пространство \mathcal{H}_n представляет собой пространство C^{2l+1} представлений группы вращений, соответствующее полному спину $l = \Delta$

Матрица L_n выглядит следующим образом:

$$L_n = \begin{pmatrix} I_n - i\lambda S_n^3 & -i\lambda (S_n^1 - iS_n^2) \\ -i\lambda (S_n^1 + iS_n^2) & I_n + i\lambda S_n^3 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

3. Модель S G.

Эрдингеровы канонические операторы $u(x)$, $\pi(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[u(x), \pi(y)] = i\delta(x-y)I. \quad (2.19)$$

Введем усредненные операторы

$$q_n = \frac{1}{\Delta} \int_{x_n-\Delta}^{x_n} u(x) dx, \quad p_n = \int_{x_n-\Delta}^{x_n} \pi(x) dx, \quad (2.20)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$[q_n, p_m] = i\delta_{nm}I_n. \quad (2.21)$$

В главную матрицу L_n (2.6), как видно из (1.45), входят операторы

$$\tilde{v}_n^\pm = \int_{x_n-\Delta}^{x_n} \exp\left\{\pm \frac{i\beta u(x)}{2}\right\} dx; \quad \tilde{u}_n^\pm = I_n \pm \frac{i\beta}{H} \int_{x_n-\Delta}^{x_n} \pi(x) dx. \quad (2.22)$$

Вместо них мы используем вейлевские операторы

$$V_n^\pm = \Delta \exp\left\{\pm i\sqrt{2}q_n\right\}, \quad u^\pm = \exp\left\{\pm i\sqrt{\epsilon/2}p_n\right\}, \quad (2.23)$$

где мы ввели удобный параметр

$$\gamma = \frac{1}{8} \beta^2, \quad (2.24)$$

Операторы v_n^{\pm}, u_n^{\pm} коммутируют при $n \neq m$; при $n=m$ нетривиальные соотношения коммутируют следующим образом:

$$u_n^{\pm} v_n^{\pm} = v_n^{\pm} u_n^{\pm} \exp\{i \pm \varepsilon \gamma\}, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm, \quad (2.25)$$

и пространство \mathcal{H}_n опять реализуется как пространство \mathcal{L} квантово-механической одномерной частицы. Очевидно также, что

$$v_n^+ = (v_n^-)^*, \quad u_n^+ = (u_n^-)^*, \quad (2.26)$$

и ниже мы будем использовать обозначения

$$v_n = v_n^-; \quad v_n^+ = v_n^+; \quad u_n = u_n^-; \quad u_n^+ = u_n^+. \quad (2.27)$$

В этих обозначениях локальная матрица перехода записывается в виде

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} u_n & \frac{m}{4} \left(\frac{1}{\lambda} v_n - \lambda v_n^+ \right) \\ \frac{m}{4} \left(\lambda v_n - \frac{1}{\lambda} v_n^+ \right) & u_n^+ \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Для дискретных моделей, как это видно из классического рассмотрения цепочки Тоде, локальная матрица перехода L_n задается с самого начала. Для этой модели не возникает никаких проблем при замене классических переменных p_n и q_n соответствующими квантовомеханическими операторами, которые мы будем обозначать теми же буквами, и их подстановке в выражения (1.61) или (1.65) для L_n . Таким образом, квантовая модель Т. Сн. характеризуется набором пространства $\mathcal{H}_n = \mathcal{L}$, где действуют операторы p_n и q_n с перестановочными соотношениями

$$[q_n, p_m] = i \delta_{nm} I_n \quad (2.29)$$

и локальной матрицей перехода

$$L_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_n - \lambda - 2i \operatorname{ch} q_n & i(p_n - \lambda) - 2 \operatorname{sh} q_n \\ -i(p_n - \lambda) - 2 \operatorname{sh} q_n & p_n - \lambda + 2i \operatorname{ch} q_n \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Мы видим, что в квантовом подходе непрерывные модели и модели на решетке рассматриваются аналогично. Единственное отличие моделей на решетке от непрерывных состоит в том, что нестационарная решетка в первом случае остается конечной, так что в выражении (2,8) для матрицы перехода $T_L(\lambda)$ нет предельного перехода при $\Delta \rightarrow 0$, а сама эта формула приобретает вид

$$T_N(\lambda) = \prod_{L_n \in N} L_n(\lambda), \quad (2.31)$$

где \curvearrowright по-прежнему символизирует упорядочение по n , а N - длина цепочки.

Матричные элементы матрицы перехода - операторные аналоги коэффициентов перехода $a_L(\lambda)$ и $b_L(\lambda)$ - мы будем обозначать через $A_L(\lambda), B_L(\lambda), C_L(\lambda), D_L(\lambda)$:

$$T_L(\lambda) = \begin{pmatrix} A_L(\lambda) & B_L(\lambda) \\ C_L(\lambda) & D_L(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Для большинства рассматриваемых нами моделей при вещественных λ выполняются соотношения

$$A_L^*(\lambda) = D_L(\lambda); \quad B_L^*(\lambda) = \pm C_L(\lambda). \quad (2.33)$$

Действительно, они выполняются для матричных элементов инфинитесимальных матриц перехода L_n и сохраняются при перемножении таких матриц.

Интересно, что конкретные объекты типа (2.31) недавно возникли в квантовой теории динамических систем на решетке независимо от метода обратной задачи. Так, при исследовании цепочки спинов с гамма-тоннелем

$$H_N = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\gamma_x \sigma_{n+1}^x \sigma_n^x + \gamma_y \sigma_{n+1}^y \sigma_n^y + \gamma_z \sigma_{n+1}^z \sigma_n^z) \quad (2.34)$$

(модель XYZ), где $\sigma_n^x = \sigma_n^1$, $\sigma_n^y = \sigma_n^2$, $\sigma_n^z = \sigma_n^3$ - спиновые матрицы Паули, действующие в двумерном пространстве $\rho_{1n} = C^2$, Бакстер в [25, 26] ввел набор матриц

$$L_p(\lambda) = \begin{pmatrix} w_1(\lambda) \bar{I}_n - w_2(\lambda) \sigma_n^z & w_1(\lambda) \sigma_n^+ - i w_2(\lambda) \sigma_n^y \\ w_2(\lambda) \sigma_n^+ + i w_2(\lambda) \sigma_n^y & w_1(\lambda) \bar{I}_n - w_2(\lambda) \sigma_n^z \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

где коэффициенты $w_p(\lambda)$, $p=0,1,2,3$, выражаются через эллиптические функции Якоби $sn(u, k) = k^{-1/2} H(u) / \theta(u)$ (см., например, [5]) с модулем k и вещественным периодом K . Если ввести комбинации

$$a = w_0 + w_3, \quad b = w_0 - w_3, \quad c = w_2 + w_2, \quad d = w_2 - w_2, \quad (2.36)$$

то

$$\begin{aligned} a &= p \operatorname{sn}(\lambda + \eta, k) = \Theta(2\eta) \Theta(\lambda - \eta) H(\lambda + \eta), \\ b &= p \operatorname{sn}(\lambda - \eta, k) = \Theta(2\eta) H(\lambda - \eta) H(\lambda + \eta), \\ c &= p \operatorname{sn}(2\eta, k) = H(2\eta) \Theta(\lambda - \eta) \Theta(\lambda + \eta), \\ d &= p^{-2} k a b c = H(2\eta) H(\lambda - \eta) H(\lambda + \eta). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Параметр p несуществен; параметры k, η однозначно связаны с отношением $J_x : J_y : J_z = J_x : J_y : J_z$. Несколько нелинейных формул даются соотношениями

$$\begin{aligned} J_x : J_y : J_z &= \\ &= 1 + k \operatorname{sn}(2\eta, k) : 1 - k \operatorname{sn}(2\eta, k) : \operatorname{cn}(2\eta, k) \operatorname{dn}(2\eta, k). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Бакстер показал, что гамильтониан периодической задачи для цепочки длины N ($\sigma_{n+1}^p = \sigma_n^p$, $p=1,2,3$) дается формулой

$$H = 2 \operatorname{sn}(2\eta, k) \frac{d}{d\lambda} \ln \operatorname{tr} T_N(\lambda) \Big|_{\lambda=\eta} + \operatorname{const} I, \quad (2.39)$$

аналогичной (1.64), при $J_z = \operatorname{cn}(2\eta, k) \operatorname{dn}(2\eta, k)$.

Бакстер в своих работах исходил из связи задач квантовой механики на одномерных цепочках с задачами классической статистической физики на двумерных решетках. Эта связь, установленная Онзагером на знаменитом примере модели Изинга, помогла ему найти точное решение этой модели. Мы видим, таким образом, интригующую связь идей Онзагера и метода обратной задачи в его квантовом варианте.

Вернемся к исследованию матрицы перехода $T_L(\lambda)$. Ее матричные элементы являются операторами в \mathcal{H}_L и достаточно сложно зависят от уреднигеровских канонических операторов. Тем не менее для этих матричных элементов оказывается возможным вывести явные перестановочные соотношения. Более того, соответствующие вычисления проще, чем вычисления скобок Пуассона коэффициентов перехода $Q_L(\lambda)$ и $V_L(\lambda)$ в классическом случае. Именно, для получения общих перестановочных соотношений достаточно посчитать перестановочные соотношения для инфинитезимальных матриц перехода $L_n(\lambda)$. Поясним это подробнее.

Для универсальной записи перестановочных соотношений удобно использовать тензорное произведение; для двух матриц 2×2 M и N с матричными элементами M_{ij} и N_{ij} , $i, j = 1, 2$, матрицу $M \otimes N$ реализуем как матрицу 4×4 с блоками

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} M_{11} N & M_{12} N \\ M_{21} N & M_{22} N \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

В этих обозначениях перестановочные соотношения матричных элементов матриц $L_n(\lambda)$ и $L_n(\mu)$ выглядят следующим образом:

$$R(\lambda, \mu) (L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda))' R(\lambda, \mu). \quad (2.41)$$

Здесь $R(\lambda, \mu)$ — числовая матрица 4×4 , не зависящая от n . Справедливость соотношения (2.41) проверяется непосредственно, и при вычислениях мы не выходим за рамки квантовомеханической задачи для системы с одной степенью свободы. Ясно, что сам факт справедливости соотношения (2.41) является отражением весьма специальной структуры матриц L_n .

Для задач на решетке (модели Т.Сн и XYZ) соотношение (2.41) является точным. Матрица $R(\lambda, \mu)$ для модели XYZ записывается в виде

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & e & c & 0 \\ 0 & c & e & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \theta(2\eta)\theta(1-\mu)H(\lambda-\mu+2\eta), & b &= H(2\eta)\theta(1-\mu)\theta(\lambda-\mu+2\eta), \\ c &= \theta(2\eta)H(\lambda-\mu)\theta(\lambda-\mu+2\eta), & d &= H(2\eta)H(\lambda-\mu)H(\lambda-\mu+2\eta). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Такой же смысл для $R(\lambda, \mu)$ имеет и для остальных рассматриваемых моделей, в которых различаются только левым видом коэффициентов $a(\lambda, \mu)$, $b(\lambda, \mu)$, $c(\lambda, \mu)$ и $d(\lambda, \mu)$.

Для модели T. Ch. эти коэффициенты даются формулами:

$$a=1, \quad d=0, \quad b = \frac{-i}{\lambda-\mu+i}, \quad c = \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu+i}. \quad (2.44)$$

Для непрерывных моделей соотношение (2.41) выполняется приближенно с точностью до членов, дающих исчезающий вклад при $\Delta \rightarrow 0$. Коэффициенты a , b , c и d матрицы $R(\lambda, \mu)$ даются следующими формулами:

1. Модель N. S.

$$a=1, \quad d=0; \quad b = -\frac{i\alpha}{\lambda-\mu-i\alpha}, \quad c = \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu-i\alpha} \quad (2.45)$$

2. Модель H. F.

$$a=1; \quad d=0; \quad b = \frac{i\beta\mu}{\mu-\lambda+i\beta\mu}, \quad c = \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu+i\beta\mu}. \quad (2.46)$$

3. Модель S. G.

$$a=1; \quad d=0; \quad b = \frac{i\sin\gamma}{\text{sh}(d-\beta+i\gamma)}, \quad c = \frac{\text{sh}(d-\beta)}{\text{sh}(d-\beta+i\gamma)}; \quad (2.47)$$

$$d = \ln \lambda, \quad \beta = \ln \mu.$$

Локальное соотношение коммутации (2.41) немедленно приводит к аналогичному соотношению для полных матриц перехода $T_n(\lambda)$. Действительно, для матриц L_n с числовыми (коммутирующими) матричными элементами выполняется соотношение

$$(\prod L_n) \otimes (\prod L'_n) = \prod (L_n \otimes L'_n). \quad (2.48)$$

Но оно выполняется и в нашем случае для $L_n = L_n(\lambda)$ и $L'_n = L_n(\mu)$, так как матричные элементы матриц $L_n(\lambda)$ и $L_n(\mu)$ при $n \neq m$ коммутируют. Это свойство ультралокальности матриц L_n уже отмечалось выше. Из (2.8), (2.41) и (2.48) следует, что для матриц

перехода $T_L(\lambda)$ справедливо соотношение

$$R(\lambda, \mu) (T_L(\lambda) \otimes T_L(\mu)) = (T_L(\mu) \otimes T_L(\lambda)) R(\lambda, \mu), \quad (2.49)$$

которое приводит к набору перестановочных соотношений для матричных элементов $A_L(\lambda)$, $B_L(\lambda)$, $C_L(\lambda)$, $D_L(\lambda)$.

Явный вид этих соотношений мы распишем в следующих параграфах при рассмотрении конкретных моделей. При этом мы убедимся, что (2.49) действительно является квантовым аналогом скобок Пуассона для коэффициентов перехода $a_L(\lambda)$ и $b_L(\lambda)$. Параллельно простым вывод соотношения (2.49), фактически основанный на подсчете нескольких простых коммутаторов, показывает, что квантовая динамика, как правило, описывается проще, чем соответствующая ей классическая.

В заключение этого параграфа сделаем несколько комментариев по поводу соотношений (2.41) и (2.49).

Для модели XYZ соотношение (2.49) получено в работе Бакстера^{125/}, однако там оно используется только для доказательства коммутативности следа матрицы перехода $A_n(\lambda) + D_n(\lambda)$ — производящей функции коммутирующих интегралов движения. В нашем подходе мы будем использовать соотношение (2.49) в полной мере.

Простое исследование выражений для матричных элементов матрицы $R(\lambda, \mu)$ для рассмотренных нами моделей показывает, что фактически мы имеем дело с одной универсальной матрицей R . Действительно, наиболее общее выражение (2.43) переходит в (2.47) при $k \rightarrow 0$, где k — модуль эллиптических функций, так как при этом

$$\operatorname{Sh}(u, k) \rightarrow \sin u, \quad (2.50)$$

В свою очередь, (2.47) вырождается в (2.45) при $k \rightarrow \infty$. Матрица (2.46) отличается от (2.45) заменой переменных $\lambda \rightarrow \frac{1}{\lambda}$, а (2.44) является частным случаем (2.45) при $\alpha = i$.

Заметим еще, что матрица (2.43) практически совпадает с оператором-матрицей L_n для модели XYZ . Действительно, в этом случае пространство \mathcal{H}_n двумерно и L_n можно записать в виде матрицы 4×4 , если каждый матричный элемент этой матрицы представить в виде матрицы 2×2 . Из (2.35) ясно, что при подстановке в это выражение явных формул для матриц Паули L_n записывается в виде

$$L_n = \begin{pmatrix} w_0 + w_3 & 0 & 0 & w_1 - w_2 \\ 0 & w_0 - w_3 & w_1 + w_2 & 0 \\ 0 & w_1 - w_2 & w_3 - w_5 & 0 \\ w_1 - w_2 & 0 & 0 & w_3 + w_5 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

после чего наше утверждение следует из сравнения (2.42), (2.43) и (2.37).

Матрицу-оператор типа L (мы опускаем несущественный номер n спинового пространства \mathcal{H}_n) для модели XYZ естественно считать матрицей с двумя наборами индексов: два "вспомогательных" и два "квантовых". Введем матрицу

$$S_{ij}^{dp}(\lambda) = \langle e_\alpha | L_{ij}(\lambda + n) | e_\beta \rangle. \quad (2.52)$$

Здесь e_α , $\alpha = 1, 2, -$ базис в спиновом пространстве, оператор L_{ij} - матричный элемент матрицы L . Соотношение (2.41) для модели XYZ в этих обозначениях переписывается следующим образом:

$$S_{ip}^{iq}(\lambda - \mu) S_{pm}^{dr}(\lambda) S_{qn}^{sp}(\mu) = S_{ip}^{dr}(\mu) S_{jq}^{sp}(\lambda) S_{qm}^{pn}(\lambda - \mu). \quad (2.53)$$

Это соотношение уже встречалось в литературе^{/51/} при обсуждении многочастичных факторизующихся S -матриц. Мы видим здесь еще одну интригующую связь квантового варианта метода обратной задачи с другими приемами одномерной математической физики.

А.Замолодчиков^{/52/} показал, что соотношение (2.53) интерпретируется как условие ассоциативности алгебры с формальными образующими $A_i(\lambda)$, удовлетворяющими соотношениям

$$A_\alpha(\lambda) A_i(\mu) = S_{ik}^{dp}(\lambda - \mu) A_\alpha(\mu) A_\beta(\lambda). \quad (2.54)$$

Образующие $A_i(\lambda)$ в его работе играли роль операторов рождения a_n и a_n^\dagger состояний многочастичной системы. Соотношения (2.53) в дальнейшем исследовались как самим А.Замолодчиковым, так и другими авторами^{/52,53/}. При этом найдем примеры, когда индексы i, k, α, β пробегает не два, а произвольное число значений. Эти обобщения, возможно, приведут к новым вполне интегрируемым

моделям, описывающим частицы с внутренними степенями свободы.

Сказанного достаточно для того, чтобы показать, что с квантовыми вполне интегрируемыми системами связаны интересные математические объекты, требующие дальнейшего исследования.

В следующем параграфе мы возвращаемся к основной теме и посмотрим, как полученные уже свойства коэффициентов матрицы перехода позволяют находить спектры квантовых гамильтонианов для рассматриваемых моделей.

§ 3. Модель N. S.

В этом параграфе мы исследуем подробно модель N. S. в квантовом варианте. Сначала мы рассмотрим случай притяжения $\alpha < 0$. Уравнение

$$H\psi = E\psi \quad (3.1)$$

эквивалентно набору уравнений Шредингера в конфигурационном представлении

$$\left(-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2\alpha \sum_{i,j} \delta(x_i - x_j)\right)\psi(x_1, \dots, x_N) = E\psi(x_1, \dots, x_N), \quad (3.2)$$

изученному в [14, 15]. Мы покажем, как метод обратной задачи быстро приводит к известным ответам для их спектра.

В случае отталкивания задача о спектре в подпространстве с конечным числом частиц неинтересна. Поэтому мы рассмотрим задачу о бозе-газе с положительной плотностью. Для этого мы введем химический потенциал A , заменяя гамильтониан обычным образом:

$$H \rightarrow H_A = H - AN, \quad (3.3)$$

где N - оператор числа частиц, и найдем реализацию гильбертова пространства, в котором оператор H_A неотрицателен. В результате мы естественно придем к формулам, полученным Либом и Линегером [54, 55] и Янгом и Янгом [56].

Начнем с первой задачи. Мы можем сразу работать в бесконечном объеме, используя в качестве пространства состояний Ω фокковское пространство, порожденное операторами $\Psi^*(x)$ из вакуума Ω , удовлетворяющего условию

$$\Psi(x)\Omega = 0; \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.4)$$

формальное условие

$$\chi_n = \int_{x_n-\Delta}^{x_n} \chi(x) dx \rightarrow 0; \quad \chi_n^* = \int_{x_n-\Delta}^{x_n} \Psi^*(x) dx \rightarrow 0, \quad |n| \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

символизирует тот факт, что частицы в рассматриваемом случае удерживаются в конечном объеме. При этом условия матрица L_n при $|n| \rightarrow \infty$ перестает зависеть от n и превращается в числовую матрицу

$$L_n(\lambda) \rightarrow V(\lambda) = \begin{pmatrix} (1 - i\lambda/2\Delta)I_n & 0 \\ 0 & (1 + i\lambda/2\Delta)I_n \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

и мы можем перейти к пределу $L \rightarrow \infty$ в матрице перехода подобно тому, как это было сделано в классическом случае (см. (I.10)). Положим

$$T(\lambda) = \lim_{L \rightarrow \infty} V(\lambda)^{-N} T_L(\lambda) V(\lambda)^{-N} = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ -B^*(\lambda) & A(\lambda) \end{pmatrix}; \quad N = \frac{L}{\Delta}. \quad (3.7)$$

Матрица $T(\lambda)$ является квантовым аналогом классической матрицы перехода, составленной из коэффициентов перехода $a(\lambda)$ и $e(\lambda)$. Наша задача состоит в определении коммутационных соотношений ее матричных элементов $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $B^*(\lambda)$ и $A^*(\lambda)$, обобщающих скобки Пуассона (I.20) и (I.21). Для этого нам надо корректно перейти к пределу $L \rightarrow \infty$ в соотношении (2.49).

Прежде чем это сделать, дадим альтернативное определение матрицы $T(\lambda)$, основанное на квантовом обобщении интегрального уравнения (I.16). Нам следует рассмотреть решение $G_n(\lambda)$ системы

$$G_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda) G_n(\lambda), \quad (3.8)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$G_n(\lambda) \rightarrow V(\lambda)^n, \quad n \rightarrow -\infty. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) с условием (3.9) можно записать в виде одного соотношения:

$$G_n(\lambda) = V(\lambda)^n + \sum_{m < n} V(\lambda)^{n-m-1} (L_m(\lambda) - V(\lambda)) G_m(\lambda), \quad (3.10)$$

которое можно решать последовательными приближениями. При $n \rightarrow \infty$ решение $G_n(\lambda)$ имеет асимптотику

$$G_n(\lambda) \rightarrow V(\lambda)^n T(\lambda), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

где матрица $T(\lambda)$ дается выражением

$$T(\lambda) = I + \sum_{m=-\infty}^{\infty} V^{-m-1} (L_m - V) G_m(\lambda), \quad (3.12)$$

которое служит для конструктивного определения матрицы перехода. Предельный переход при $\Delta \rightarrow 0$ следует делать уже в этом выражении.

Граничное условие (3.5) выполняется лишь в слабом смысле. Поэтому его нельзя naивно использовать при определении предела в тензорном произведении $L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)$. При перемножении этих матриц по правилу (2.40) мы встретимся с операторными выражениями $\chi_n^* \chi_n$ и $\chi_n \chi_n^*$. Первое можно считать исчезающим при $|n| \rightarrow \infty$. Второе же переписывается в виде

$$\chi_n \chi_n^* = \Delta + \chi_n^* \chi_n \quad (3.13)$$

и сходится к Δ при $|n| \rightarrow \infty$. В результате мы можем сказать, что при $|n| \rightarrow \infty$

$$L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu) \rightarrow W(\lambda, \mu), \quad (3.14)$$

где матрица $W(\lambda, \mu)$ дается формулой

$$W(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 - i(\lambda + \mu)/2 \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - i(\lambda - \mu)/2 \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa \Delta & 1 + i(\lambda - \mu)/2 \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + i(\lambda + \mu)/2 \Delta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

и удовлетворяет соотношению

$$R(\lambda, \mu) W(\lambda, \mu) = W(\mu, \lambda) R(\lambda, \mu). \quad (3.16)$$

Из (3.14) следует, что существует предел при $L \rightarrow \infty$ у выражения

$$W(\lambda, \mu)^{-N} (T_L(\lambda) \otimes T_L(\mu)) W(\lambda, \mu)^{-N}, \quad N = L/\Delta. \quad (3.17)$$

Перепишем теперь основное коммутационное соотношение (2.49) приближенно в виде

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mu) (V(\lambda)^N T(\lambda) V(\lambda)^N \otimes V(\mu)^N T(\mu) V(\mu)^N) = \\ = (V(\mu)^N T(\mu) V(\mu)^N \otimes V(\lambda)^N T(\lambda) V(\lambda)^N) R(\lambda, \mu), \end{aligned} \quad (3.18)$$

используя (3.7) и умножим обе части на $W(\mu, \lambda)^{-N}$ слева и на $W(\lambda, \mu)^{-N}$ справа. Учитывая (3.16), мы пронесем в левой части $W(\mu, \lambda)^{-N}$ через $R(\lambda, \mu)$, заменив его на $W(\lambda, \mu)^{-N}$, и сделаем аналогичную операцию в правой части. После этого слева и справа возникнут коммутации вида (3.17), так что мы можем перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$. Очевидно, для этого нам надо посчитать пределы

$$U(\lambda, \mu) = \lim_{N \rightarrow \infty} W(\lambda, \mu)^{-N} (V(\lambda)^N \otimes V(\mu)^N); \quad (3.19)$$

$$\tilde{U}(\lambda, \mu) = \lim_{N \rightarrow \infty} (V(\lambda)^N \otimes V(\mu)^N) W(\lambda, \mu)^{-N}. \quad (3.20)$$

В этих обозначениях соотношение (3.18) приводит к формуле

$$R_2(\lambda, \mu) (T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda)) R_2(\lambda, \mu), \quad (3.21)$$

где

$$R_2(\lambda, \mu) = U(\mu, \lambda)^{-1} R(\lambda, \mu) U(\lambda, \mu); \quad R_2(\lambda, \mu) = \tilde{U}(\mu, \lambda) R(\lambda, \mu) \tilde{U}(\lambda, \mu)^{-1}. \quad (3.22)$$

Вычислим эти матрицы.

Вследствие блочной структуры матриц $R(\lambda, \mu)$, $W(\lambda, \mu)$ и $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ достаточно перемножать их средние блоки. Имеем из (3.15)

$$\begin{aligned} W(\lambda, \mu)_{mid}^{-N} &= \begin{pmatrix} 1 - i(\lambda - \mu)/2 \Delta & 0 \\ \alpha \Delta & 1 + i(\lambda + \mu)/2 \Delta \end{pmatrix}^{-L/\Delta} \cong \\ &\cong \exp \left\{ \begin{pmatrix} i \frac{\lambda - \mu}{2} & 0 \\ -\alpha & -i \frac{\lambda + \mu}{2} \end{pmatrix} L \right\} = \begin{pmatrix} e^{-i(\lambda - \mu)/2 L} & 0 \\ -\frac{2\alpha}{\lambda - \mu} \operatorname{sh} \frac{\lambda - \mu}{2} L & e^{-i(\lambda + \mu)/2 L} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

так что пределы (3.19) и (3.20) дают

$$U(\lambda, \mu)_{\text{mid}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{U}(\lambda, \mu)_{\text{mid}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta' & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

где

$$\beta(\lambda, \mu) = \frac{i\alpha}{1-\mu}; \quad \beta'(\lambda, \mu) = \beta(\mu, \lambda) = -\beta(\lambda, \mu). \quad (3.25)$$

Из (3.25) видно, что

$$U(\lambda, \mu) = \tilde{U}(\lambda, \mu)^{-1}, \quad (3.26)$$

откуда ясно, что

$$R_2(\lambda, \mu) = R_2(\mu, \lambda) = R_\infty(\lambda, \mu). \quad (3.27)$$

При этом

$$R_\infty(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1/c' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

где

$$c'(\lambda, \mu) = c(\mu, \lambda) = \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu + i\alpha}. \quad (3.29)$$

Мы получили большой набор перестановочных соотношений

$$R_\infty(\lambda, \mu) (T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda)) R_\infty(\lambda, \mu) \quad (3.30)$$

для матричных элементов $A(\lambda)$, $A(\mu)$, $B(\lambda)$ и $B(\mu)$ матрицы перехода $T(\lambda)$, введенной в (3.7). Приведем некоторые из них:

$$[A(\lambda), A(\mu)] = 0; \quad [B(\lambda), B(\mu)] = 0; \quad (3.31)$$

$$[A(\lambda), A(\mu)] = 0; \quad A(\lambda)B(\mu) = B(\mu)A(\lambda) \frac{\lambda - \mu + i\alpha}{\lambda - \mu}; \quad (3.32)$$

$$B^*(\lambda)B(\mu) = B(\mu)B^*(\lambda) \frac{(\lambda - \mu)^2 + \alpha^2}{(\lambda - \mu)^2}. \quad (3.33)$$

Все эти соотношения получены при $\lambda \neq \mu$; последняя формула становится сингулярной при $\lambda = \mu$. Более внимательное исследование только что проделанного предельного перехода показывает, что (3.32) имеет место при $\int_{\mu}^{\infty} \lambda > 0$, а при вещественных λ понимается в смысле предела из верхней полуплоскости. Соотношению (3.33) трудно придать смысл при $\lambda = \mu$ непосредственно. Однако если ввести оператор

$$R(\lambda) = B(\lambda) A^{-1}(\lambda), \quad (3.34)$$

то это соотношение дает

$$R^*(\lambda) R(\mu) - R(\mu) R^*(\lambda) \left(\frac{\lambda - \mu - i\alpha}{\lambda - \mu + i\alpha} \right)^2 = 2\pi \delta(\lambda - \mu). \quad (3.35)$$

Соотношения (3.32) являются квантовыми аналогами соотношений (I.20) и (I.21). Они показывают, что $A(\lambda)$ является производящей оператор-функцией для коммутирующих интегралов движения и что оператор $B(\lambda)$ просто меняется со временем, если гамильтониан H вычисляется по $A(\lambda)$ по формулам, аналогичным классическим (I.18) и (I.19).

Используя интегральное уравнение (3.10), можно исследовать поведение при $\lambda \rightarrow \infty$ оператора $\ln A(\lambda)$ и показать, что он имеет асимптотику

$$\ln A(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda^{-n}, \quad (3.36)$$

где, в частности,

$$N = \frac{1}{i\alpha} C_1; \quad H = \frac{1}{i\alpha} C_3 + C_2 + \frac{1}{\alpha} i\alpha C_1. \quad (3.37)$$

За недостатком места не будем здесь приводить эти вычисления.

Соотношение (3.32) позволяет дать полную характеристику спектра оператора $A(\lambda)$ - а вместе с ним всех коммутирующих операторов C_n и, в частности, H . В силу (3.4) локальная матрица перехода L_n , примененная к вакууму Ω , превращается в треугольную:

$$L_n \Omega = \begin{pmatrix} 1 - i\lambda/2 A & -i\alpha \chi_n^* \\ 0 & 1 + i\lambda/2 A \end{pmatrix} \Omega. \quad (3.38)$$

В результате, действие диагональных элементов $A_L(\lambda)$ и $A_L^*(\lambda)$ матрицы $T_L(\lambda)$ на Ω сводится к перемножению диагональных элементов матрицы L_n , так что

$$A_L(\lambda) \Omega = (1 - i\lambda/2 A)^{2\lambda/2} \Omega \approx e^{-i\lambda h} \Omega \quad (3.39)$$

и, как следует из определения (3.7),

$$A(\lambda) \Omega = \Omega. \quad (3.40)$$

Покажем теперь, что оператор $B(\lambda)$ играет роль оператора рождения. Пусть

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_n) \Omega. \quad (3.41)$$

Из соотношений (3.32) и (3.40) имеем

$$A(\lambda) \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{j=1}^n a(\lambda, \lambda_j) \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (3.42)$$

где

$$a(\lambda, \mu) = \frac{\lambda - \mu - i\gamma}{\lambda - \mu}, \quad \gamma = -\alpha > 0. \quad (3.43)$$

Таким образом, состояния $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ являются собственными для всех операторов $A(\lambda)$. Собственные значения операторов C_n получаются, если представить $\ln a(\lambda, \mu)$ в виде

$$\ln a(\lambda, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\mu) \lambda^{-n}. \quad (3.44)$$

Из сравнения (3.36), (3.42) и (3.44) ясно, что

$$C_n \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^n c_n(\lambda_j) \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (3.45)$$

В частности,

$$N \Psi = n \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad H \Psi = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (3.46)$$

Эти формулы показывают, что состояние $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ описывает n свободных частиц с импульсами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Заметим, что собственное значение $a(\lambda, \mu)$ оператора $A(\lambda)$ на одночастичном состоянии $\Psi(\mu)$ является аналитической функцией λ в верхней полуплоскости и имеет там один нуль. Именно таким свойством обладает классический коэффициент перехода $a(\lambda)$ для солитонного потенциала (I.13).

Для большего сходства классических и квантовых формул удобно видоизменить оператор $A(\lambda)$:

$$A(\lambda) \rightarrow \tilde{A}(\lambda) = A(\lambda - i\gamma/2). \quad (3.47)$$

Мы будем в дальнейшем использовать оператор $\tilde{A}(\lambda)$. Его одночастичное собственное значение имеет вид

$$\tilde{\alpha}(\lambda, \mu) = \frac{\lambda - \mu - i\gamma/2}{\lambda - \mu + i\gamma/2} \quad (3.48)$$

и совпадает с (I.14) при $\eta = \mu + i\gamma/2$. При вещественных λ

$$|\tilde{\alpha}(\lambda, \mu)| = 1, \quad (3.49)$$

что является квантовым аналогом свойства безотрицательности солитона.

Двумя свойствами: 1) аналитичность при $\text{Im} \lambda > 0$ и обращение в ноль один раз; 2) $|\alpha| = 1$, $\text{Im} \lambda = 0$ — обладает также и многочастичное собственное значение

$$a_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{j=1}^n \tilde{\alpha}(\lambda, \lambda_j) \quad (3.50)$$

при специальном выборе комплексных параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\lambda_j = \frac{\mu}{n} + \frac{i\gamma}{2} \left(\frac{n+1}{2} - j \right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.51)$$

Эти λ_j подобраны из того расчета, что полюса отдельных сомножителей в (3.50) сокращаются нулями соседних сомножителей, в результате чего (3.50) превращается в

$$a_n(\lambda, \mu) = \frac{\lambda - \frac{\mu}{n} - i\frac{\gamma}{2}n}{\lambda - \frac{\mu}{n} + i\frac{\gamma}{2}n} \quad (3.52)$$

и опять совпадает с (I.14) при $\eta = \mu/n + i\gamma/2n$.

Собственные значения операторов N и H для состояния

$$\Psi_n(\mu) = \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (3.53)$$

где λ_j , $j = 1, \dots, n$, даны в (3.51), имеет вид

$$N_n = n; \quad E_n(\mu) = \frac{\mu^2}{n} - \alpha^2 \frac{n^3 - n}{12} \quad (3.54)$$

и соответствует связанным состояниям n частиц с полным импульсом μ . Значение энергии связи

$$\varepsilon_n = -\alpha^2 \frac{n^3 - n}{12}, \quad (3.55)$$

которое мы вычислили из (3.52), (3.44) и (3.37), совпадает с точным значением, полученным в ¹⁴ при решении уравнения Шредингера.

Собственное состояние операторов $A(\lambda)$ в общем виде дается формулой (3.42), где λ_j комбинируются в несколько цепочек вида (3.51) разных длин n_1, \dots, n_p . Такой вектор описывает состояние связанных комплексов, каждый из которых состоит из n_p частиц. Собственное значение оператора энергии H получается как сумма выражений $E_{n_p}(\mu_p)$, данных в (3.54), μ_p играет роль импульса связанного комплекса.

Квантование мнимых частей параметра η в характеризующих односолитонное решение

$$\text{Im } \eta = \frac{\gamma}{2} n \quad (3.56)$$

отмечалось в^{/10/} в квазиклассическом приближении. Мы убедились здесь, что это квантование в определенном смысле точное. Также разъяснилась мистерия совпадения одночастичных состояний, получаемых квантованием "непрерывного спектра", и низшего состояния квантованного солитона.

Состояния (3.41) не ортонормированы, что явно отражено в (3.33). Соотношение (3.35) наводит на мысль, что ортонормированные состояния можно получить в виде

$$\tilde{\Psi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = R(\lambda_1) \dots R(\lambda_n) \Omega. \quad (3.57)$$

Однако операторы $R(\lambda)$ при разных λ не коммутируют и формула (3.57) нуждается в уточнении. Теория возмущений для уравнения (3.10) позволяет находить точно первые члены разложения операторов $B(\lambda)$ и $R(\lambda)$ в ряд по нормальным произведениям операторов $\Psi^*(x)$ и $\Psi(x)$. В результате мы получаем возможность сравнивать векторы вида (3.41) или (3.57) с решениями уравнения Шредингера $\Psi(x_1, \dots, x_n | \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ из^{/14/}, используя формулу

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \int \Psi(x_1, \dots, x_n | \lambda_1, \dots, \lambda_n) \Psi^*(x_1) \dots \Psi^*(x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.58)$$

При этом выясняется, что при $\text{Re } \lambda_i > \text{Re } \lambda_{i+1}$, векторы $\tilde{\Psi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ совпадают с in-состояниями, а при $\text{Re } \lambda_i < \text{Re } \lambda_{i+1}$, $i=1, \dots, n-1$, - с out-состояниями. В результате мы получаем возможность вычислять S -матрицу, используя соотношение

$$R(\mu)R(\lambda) = R(\lambda)R(\mu) \frac{\lambda - \mu - i\gamma}{\lambda - \mu + i\gamma}, \quad (3.59)$$

которое следует из (3.31) и (3.32). Мы не будем приводить подробности, так как еще не умеем обходиться без ссылок на теорию возмущений. Отметим только, что (3.59) является простейшей реализацией соотношений А.Замолодчикова (2.54).

Мы убедились, что квантовый метод обратной задачи, действительно, дает точное решение квантовой задачи для модели N.S., приводя к точным выражениям для собственных векторов, собственных значений и S-матриц. Формулы классического метода обратной задачи при их квантовой интерпретации приобрели большую элегантность и наглядность.

Перейдем теперь к случаю бозе-газа и рассмотрим гамильтониан (3.3). Основное отличие от случая притяжения состоит в том, что в гильбертовом пространстве, где оператор H_A представляется в виде

$$H_A = E_0 + H_{ex},$$

где E_0 - константа (энергия основного состояния), а H_{ex} - положителен, не верны соотношения (3.5). Более того, вакуум Ω не имеет никакого отношения к основному состоянию Ω_{phys} , для которого

$$H \Omega_{phys} = E_0 \Omega_{phys}.$$

В результате теряет смысл процедура предельного перехода при $\lambda \rightarrow \infty$, которая привела нас к переменным типа "действие-угол" в случае притяжения.

В этих условиях мы вынуждены более подробно рассматривать задачу в конечном объеме $L < \infty$. Посмотрим, что мы уже имеем. Во-первых, у нас есть одно собственное состояние для операторов $A_L(\lambda)$ и $D_L(\lambda)$ - вектор Ω :

$$A_L(\lambda)\Omega = e^{-i\lambda L}\Omega; \quad D_L(\lambda)\Omega = e^{i\lambda L}\Omega \quad (3.62)$$

(ср. (3.39) и предшествующие рассуждения). Во-вторых, выполняются перестановочные соотношения (2.49) и, в частности,

$$A_L(\lambda)B_L(\mu) = \alpha(\lambda, \mu)B_L(\mu)A_L(\lambda) + \beta(\lambda, \mu)B_L(\lambda)A_L(\mu), \quad (3.63)$$

$$D_L(\lambda)B_L(\mu) = \alpha(\mu, \lambda)B_L(\mu)D_L(\lambda) - \beta(\lambda, \mu)B_L(\lambda)D_L(\mu), \quad (3.64)$$

где

$$\alpha(\lambda, \mu) = \frac{1}{c(\mu, \lambda)} = \frac{\lambda - \mu + i\alpha}{\lambda - \mu}; \quad \beta(\lambda, \mu) = -\frac{b(\mu, \lambda)}{c(\mu, \lambda)} = \frac{i\alpha}{\lambda - \mu}. \quad (3.65)$$

Этих данных хватит для того, чтобы построить богатый набор собственных векторов оператора

$$F_L(\lambda) = A_L(\lambda) + D_L(\lambda), \quad (3.66)$$

квантового аналога функции $f_L(\lambda)$ из (1.26), возникшей при формулировке модели N. S. с периодическими данными Коши. Операторы $F_L(\lambda)$ и $B_L(\lambda)$ коммутируют при разных λ :

$$[F_L(\lambda), F_L(\mu)] = 0; [B_L(\lambda), F_L(\mu)] = 0, \quad (3.67)$$

и без дальнейших комментариев мы будем считать, что $F_L(\lambda)$ является производящей оператор-функцией для коммутирующих интегралов движения.

Рассмотрим снова вектор

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = B_L(\lambda_1) \dots B_L(\lambda_n) \Omega \quad (3.68)$$

и покажем, что он является собственным вектором оператора $F_L(\lambda)$, если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют некоторой системе трансцендентных уравнений. Для этого заметим, что в силу (3.62) и (3.63) имеем, пронося $A_L(\lambda)$ через все $B_L(\lambda_j)$ в (3.68),

$$A_L(\lambda) \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \sum_{j=1}^n \Lambda_j(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i \neq j} B(\lambda_i) \Omega, \quad (3.69)$$

где

$$\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = e^{-i\lambda L} \prod_{i=1}^n \alpha(\lambda; \lambda_i) \quad (3.70)$$

и

$$\Lambda_j(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \beta(\lambda; \lambda_j) \prod_{i \neq j} \alpha(\lambda_j; \lambda_i) e^{-i\lambda_j L} \quad (3.71)$$

Первое слагаемое справа в (3.69) получается, когда мы проносим $A_L(\lambda)$ через $B_L(\lambda_j)$, используя только первое слагаемое справа в (3.63). Второе слагаемое комбинируется из всех остальных перестановок. При этом операторное выражение

$$B_L(\lambda_1) \dots B_L(\lambda_n) B(\lambda) \Omega \quad (3.72)$$

возникает, если мы переставим $A_L(\lambda)$ с $B_L(\lambda_1)$, используя второе слагаемое в (3.63), а при дальнейших перестановках будем использовать первое слагаемое. Это наблюдение приводит к выражению

(3.71) для $\Lambda_1(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Справедливость остальных формул следует из симметрии всех выражений по отношению к перестановке $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Аналогичное вычисление показывает, что $\mathcal{D}_1(\lambda)\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ выражается в виде, аналогичном (3.69), с заменой $\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ на

$$\Lambda'(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^n \alpha(\lambda_i, \lambda) e^{i\lambda h} \quad (3.73)$$

и $\Lambda_j(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ на

$$\Lambda'_j(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = -\beta(\lambda, \lambda_j) \prod_{i \neq j}^n \alpha(\lambda_i, \lambda_j) e^{i\lambda_j h} \quad (3.74)$$

В результате мы видим, что $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является собственным вектором оператора $F_L(\lambda)$ с собственным значением

$$E(\lambda) = \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) + \Lambda'(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \quad (3.75)$$

$$= e^{-i\lambda h} \prod_{i=1}^n \alpha(\lambda, \lambda_i) + e^{i\lambda h} \prod_{i=1}^n \alpha(\lambda_i, \lambda),$$

если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\Lambda_j(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Lambda'_j(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (3.76)$$

которая более явно переписывается в виде

$$e^{-i\lambda_j h} \prod_{i \neq j} \alpha(\lambda_j, \lambda_i) = e^{i\lambda_j h} \prod_{i \neq j} \alpha(\lambda_i, \lambda_j), \quad (3.77)$$

или

$$e^{2i\lambda_j h} = \prod_{i \neq j} \frac{\alpha(\lambda_j, \lambda_i)}{\alpha(\lambda_i, \lambda_j)} = \prod_{i \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_i + i\pi}{\lambda_j - \lambda_i - i\pi} \quad (3.78)$$

и не содержит λ , являясь условием только на $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Уравнение (3.78) является основным средством исследования в теории одномерного бозе-газа в работах Либа и Линнигера^{/54,55/}. Оно возникло там при наложении условий периодичности на собственные функции уравнения Шредингера (3.2), полученные при помощи знаменитой подстановки Бете^{/27/}. Мы можем сказать, что формула (3.68) дает алгебраизованную форму этой подстановки. Таким образом, мы видим еще одну замечательную связь квантового метода обратной задачи с другими достижениями одномерной математической физики: он дает алгебраическую интерпретацию подстановки Бете и тем самым указывает ее место в теории вполне интегрируемых квантовых систем.

Дальнейшее изложение не содержит усовершенствований рассуждений из 54,55/ или 56/ и мы приведем лишь основные формулы. Энергия состояния $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ имеет вид

$$E_A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 - A). \quad (3.79)$$

Из рассмотрения нормировки вектора $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ следует, что он исчезает, если совпадают какие-либо два значения λ_j . Другими словами, мы можем считать, что в выражениях (3.68) и (3.79) все λ_j разные, и, используя терминологию свободного ферми-газа, говорить о том, что в состоянии $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ заполнены уровни с импульсами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Из (3.79) ясно, что в основном состоянии должны быть заполнены все уровни с малыми λ_j . При $L \rightarrow \infty$ эти λ_j сгущаются и заполняют интервал $-q < \lambda \leq q$, где q определяется из того условия, что возбуждения основного состояния имеют положительную энергию.

Итак, мы имеем основное состояние Ω_{phys} в виде

$$\Omega_{phys} = \prod_{|\lambda_j| < q} B(\lambda_j) \Omega \quad (3.80)$$

и считаем, что λ_j удовлетворяют системе (3.78), оставаясь при $L \rightarrow \infty$ в интервале $-q < \lambda \leq q$. Нетрудно убедиться, что $\lambda_{j+1} - \lambda_j$ имеет порядок $1/L$ и для асимптотической плотности

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)}, \quad \lambda \sim \lambda_j, \quad (3.81)$$

выполняется уравнение

$$2\pi\rho(\lambda) = 1 + \int_{-q}^q K(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu, \quad (3.82)$$

где

$$K(\lambda) = -\frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{\lambda + i\alpha}{\lambda - i\alpha} = \frac{2\alpha}{(\lambda - \mu)^2 + \alpha^2}. \quad (3.83)$$

Элементарные возбуждения основного состояния можно искать в виде (частица)

$$\Psi_p(\xi) = B(\xi) \prod_{|\lambda_j| < q} B(\lambda_j) \Omega, \quad |\xi| \geq q, \quad (3.84)$$

или (дырка)

$$\Psi_h(\xi) = \prod'_{|\lambda_j| < q} B(\lambda_j) \Omega, \quad |\xi| \leq q, \quad (3.85)$$

где в последней формуле показывает, что в произведении опущен оператор $B(\lambda_j)$ при $\lambda_j = \xi$. Заполнения основного состояния λ_j и λ_j' в этих состояниях отличаются от заполнения в (3.80). Различия (поляризация вакуума) проявляются при решении системы (3.78). Введем функции

$$F_p(\lambda) = \frac{\lambda_j - \lambda_j'}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}, \quad F_h(\lambda) = \frac{\lambda_j - \lambda_j''}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}. \quad (3.86)$$

При $L \rightarrow \infty$ эти отношения имеют конечный предел. При этом функция $F_p(\lambda)$ отрицательна при $\xi > \eta$ и положительна при $\xi < -\eta$. Мы рассмотрим ниже первый случай. Функция $F_h(\lambda)$ имеет разрыв при $\lambda = \xi$; она отрицательна при $\lambda > \xi$ и положительна при $\lambda < \xi$. Разрыв в точке ξ равен 1. Введем производные от этих функций $F_p'(\lambda)$ и $F_h'(\lambda)$; мы считаем эти функции непрерывными, вычитая вклад скачка во втором случае.

Из рассуждений Лива^{55/} вытекает, что, как следствие (3.78), в пределе при $L \rightarrow \infty$ F_p' и F_h' удовлетворяют интегральным уравнениям

$$2\pi F_p'(\lambda) = \int_{-\eta}^{\eta} K(\lambda - \mu) F_p'(\mu) d\mu + K(\lambda - \xi); \quad (3.87)$$

$$2\pi F_h'(\lambda) = \int_{-\eta}^{\eta} K(\lambda - \mu) F_h'(\mu) d\mu - K(\lambda - \xi) \quad (3.88)$$

с тем же ядром K^q , что участвует в уравнении (3.82).

Рассмотрим собственные значения $E_0(\lambda)$, $E_p(\lambda, \xi)$ и $E_h(\lambda, \xi)$ оператора $F_L(\lambda)$ в состояниях $\Omega_{m, \eta, \xi}$, $\Psi_p(\xi)$, $\Psi_h(\xi)$. Будем считать, что $\sum_m \lambda > 0$; в этом случае в выражении (3.75) для собственных значений можно пренебречь вторым слагаемым при $L \rightarrow \infty$. В результате для собственного значения $E_0(\lambda)$ получаем

$$E_0(\lambda) = \exp\{-i\lambda L + 2L \int_{-\eta}^{\eta} \ln d(\lambda, \mu) \rho(\mu) d\mu\}; \quad (3.89)$$

для отношения $E_p(\lambda, \xi)$ к $E_0(\lambda)$ имеем выражения

$$\ln \left(\frac{E_p(\lambda, \xi)}{E_0(\lambda)} \right) = \ln d(\lambda, \xi) + \int_{-\eta}^{\eta} \ln d(\lambda, \mu) F_p'(\mu) d\mu; \quad (3.90)$$

отношение $E_h(\lambda, \xi)/E_0(\lambda)$ выглядит аналогично при замене F_p' на F_h' . Из этих формул и формулы (3.37) получаем собственные значения оператора энергии;

$$E_0 = \varepsilon_0 L; \quad \varepsilon_0 = \int_{-\eta}^{\eta} (\lambda^2 - A) \rho(\lambda) d\lambda; \quad (3.91)$$

$$\varepsilon_p(\xi) = E_p(\xi) - E_0 = \xi^2 - A + \int_0^\xi (\lambda^2 - A) F_p'(\lambda) d\lambda; \quad (3.92)$$

$$\varepsilon_h(\xi) = E_h(\xi) - E_0 = A - \xi^2 + \int_0^\xi (\lambda^2 - A) F_h'(\lambda) d\lambda. \quad (3.93)$$

Теперь мы можем определить параметр q , потребовав чтобы энергии возбуждения $\varepsilon_p(\xi)$ и $\varepsilon_h(\xi)$ были положительны при всех ξ , и $|\xi| \geq q$ соответственно. Из результатов Лиса^{/56/} и Лига и Янга^{/56/} следует, что для этого достаточно положить

$$\varepsilon_p(q) = 0 \quad (3.94)$$

или

$$\varepsilon_h(q) = 0. \quad (3.95)$$

Уравнения (3.94) и (3.95) приводят к одному и тому же соотношению, позволяющему выразить максимальный импульс заполнения основного состояния q через химический потенциал A .

На этом мы закончим разбор теории бозе-газа. Читатель найдет технические подробности в цитированных оригинальных работах. Наша цель состояла в том, чтобы проиллюстрировать квантовый метод обратной задачи на примере системы в конечном объеме. Остается нерешенной привлекательная задача получить основные формулы, переходя к пределу $\lambda \rightarrow \infty$ более непосредственно, подобно тому, как мы это сделали в первой половине этого параграфа на примере модели с притяжением. Мы надеемся, что такой подход существует.

§ 4. Другие модели

В этом параграфе мы кратко опишем основные черты квантового метода обратной задачи в приложении к наиболее интересным моделям: S.G. и XYZ. Мы уже видели выше, что последняя модель является наиболее универсальной - остальные рассматриваемые нами модели получаются из нее подходящими предельными переходами.

В то же время, как мы увидим, модель XYZ требует наиболее изощренной схемы исследования, так что интересные сами себе модели N.S. и S.G. имеет смысл рассматривать отдельно, что мы и делаем. Одновременно по мере их изучения мы более естественно и поэтапно приходим к усложнению основного метода.

Итак, рассмотрим модель S.G. с локальной матрицей перехода L_n , данной в (2.28). Мы не знаем заранее асимптотического по-

ведения L_n при $|n| \rightarrow \infty$, и нам придется применять вариант исследования, уже использованный на примере бозе-газа, рассматривая систему в конечном объеме и переходя к пределу при $L \rightarrow \infty$.

Введем матрицу перехода $T_L(\lambda)$ и попытаемся найти набор собственных векторов для оператора $F_L = t_L T_L(\lambda)$ посредством алгебраизованной подстановки Бете. Перестановочные соотношения типа (3.63), (3.64) верны и для нашего примера, как это следует из (2.47).

При этом

$$\alpha(\lambda, \mu) = \frac{\text{sh}(d-p+i\delta)}{\text{sh}(d-p)}; \beta(\lambda, \mu) = \frac{-i \sin \delta}{\text{sh}(d-p)}, \lambda = e^u, \mu = e^p. \quad (4.1)$$

Остается понять, существует ли аналог состояния Ω . В случае модели N.S. состояние Ω имело вид произведения

$$\Omega = \prod_n \otimes \Omega_n \quad (4.2)$$

локальных вакуумов $\Omega_n \in \mathcal{H}_n$, удовлетворяющих условию

$$\chi_n \Omega_n = 0. \quad (4.3)$$

Для модели S.G. не существует состояния в \mathcal{H}_n , которое аннулировалось бы оператором в левом нижнем углу матрицы L_n . Такое состояние, однако, существует для матрицы перехода на два шага $L_{n+2} L_n$.

Реализуем пространство $\mathcal{H}_{n+2} \otimes \mathcal{H}_n$ как пространство функций $f(q_1, q_2)$ двух переменных q_1 и q_2 $-\infty < q_i < \infty$, причем операторы v_n и u_n действуют на q_1 , а v_{n+2} , u_{n+2} - на q_2 . Левый нижний угол матрицы $L_{n+2} L_n$ имеет вид

$$C_{n+2, n} = \frac{m}{4} \left[\lambda (v_{n+2} u_n + u_{n+2} v_n) - \frac{1}{\lambda} (v_{n+2}^* u_n + u_{n+2}^* v_n^*) \right] \quad (4.4)$$

и реализуется в этом пространстве следующим образом:

$$C_{n+2, n} f(q_1, q_2) = \frac{m\Delta}{4} \left(e^{-iq_2} f(q_1 - \delta, q_2) + e^{-iq_1} f(q_1, q_2 + \delta) \right) - \frac{m\Delta}{4\lambda} \left(e^{iq_2} f(q_1 - \delta, q_2) + e^{iq_1} f(q_1, q_2 + \delta) \right). \quad (4.5)$$

Уравнение

$$C_{n+2, n} f_{n+2, n} = 0 \quad (4.6)$$

имеет решение

$$f_{n+1,n} = \left(1 + \frac{m^2 \Delta^2}{16} \left(\frac{e^{i(q_1+q_2)}}{1-e^{-2i\delta}} + \frac{e^{-i(q_1+q_2)}}{1-e^{2i\delta}} \right) \right) \delta_{(q_1+q_2+\delta)} \quad (4.7)$$

Мы подобрали члены порядка Δ^2 в последней формуле так, что $f_{n+1,n}$ является собственным вектором диагональных матричных элементов $a_{n+1,n}$ и $d_{n+1,n}$ матрицы $L_{n+1} L_n$

$$a_{n+1,n} f_{n+1,n} = \left(1 + \frac{m^2 \Delta^2}{16} \left(\lambda^2 e^{i\delta} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-i\delta} \right) \right) f_{n+1,n}; \quad (4.8)$$

$$d_{n+1,n} f_{n+1,n} = \left(1 + \frac{m^2 \Delta^2}{16} \left(\lambda^2 e^{-i\delta} + \frac{1}{\lambda^2} e^{i\delta} \right) \right) f_{n+1,n}. \quad (4.9)$$

Премножая локальные вакуумы $f_{n+1,n}$, мы получаем состояние

$$\Omega_L = \prod_{\substack{\times \\ \frac{N}{2}+1 \leq n \leq \frac{N}{2}}} f_{2n,2n-1}, \quad (4.10)$$

собственное для $A_L(\lambda)$ и $D_L(\lambda)$:

$$A_L(\lambda) \Omega_L = \left(1 + \frac{m^2 \Delta^2}{16} \left(\lambda^2 e^{i\delta} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-i\delta} \right) \right)^{L/4} \Omega_L \approx \exp \left\{ \frac{m^2 \Delta}{8} \operatorname{ch}(2\delta + i\delta) \right\} \Omega_L, \quad (4.11)$$

$$D_L(\lambda) \Omega_L = \exp \left\{ \frac{m^2 \Delta}{8} \operatorname{ch}(2\delta - i\delta) \right\} \Omega_L, \quad (4.12)$$

где

$$\delta = \ln \lambda. \quad (4.13)$$

Дальнейшее рассмотрение лишь техническими деталями отличается от случая бозе-газа. Мы не будем проводить его здесь, отсылая читателя к оригинальной работе^{/33/}. Роль работы Либа^{/55/} здесь играет работа^{/57/}, где исследуется координатная форма подстановки Бете для массивной модели Тирринга, эквивалентной модели SG^{/58/}. Полученные результаты для спектра уточняют квазиклассические ответы работ^{/11,12/}. S-матрицы, предсказанные А. Замолодчиковым^{/59/} вычислены В. Корепиным^{/60/} из формул, эквивалентных (3.57) и (3.59)

Перейдем теперь к модели XYZ и рассмотрим для этого локальную матрицу перехода L_n (2.35). Будем считать, что

$$\omega_1 \neq \omega_2, \quad (4.14)$$

так как в случае равенства $\psi_1 = \psi_2$ коэффициент d в матрице R из (2.42) исчезает и существует локальный вакуум \mathcal{L}_n , так что этот случай можно рассмотреть уже описанным способом. Более того, в этом случае, как показали Е.К.Склянин и П.П.Кулиш^{/32/}, можно развить вариант подхода, аналогичный тому, который мы применяли к модели N.S. с притяжением, основываясь на простых асимптотических условиях для локальных шредингеровских операторов и существовании матриц $V(\lambda)$ и $W(\lambda_n)$.

При выполнении условия (4.14) нет надежды получить локальный вакуум ни для матрицы L_n , ни для конечного произведения таких матриц. Мы используем поэтому следующее соображение: матрица перехода $T_N(\lambda)$ вычисляется, если вместо локальных матриц перехода L_n использовать матрицы L'_n , калибровочно эквивалентные L_n :

$$L'_n = M_{n+1}^{-1} L_n M_n. \quad (4.15)$$

Здесь матрицы M_n - произвольные невырожденные числовые матрицы 2×2 . Действительно, новая матрица перехода

$$T'_N(\lambda) = \prod_n L'_n(\lambda) \quad (4.16)$$

отличается от матрицы T_N лишь простым линейным преобразованием

$$T'_N(\lambda) = M_{N+1}^{-1} T_N(\lambda) M_1. \quad (4.17)$$

Оказывается, что калибровочные преобразования M_n можно подобрать так, чтобы каждая матрица L'_n имела локальный вакуум, аннулируемый ее нижним левым элементом. Соответствующие формулы можно вычитать в работах Бакстера^{/25,61/}. Выясняется, что таких матриц много, мы в дальнейшем будем использовать семейство

$$M_n^l(\lambda) = M_{n+l-1}(\lambda); \quad M_l = \begin{pmatrix} x_l^1 & y_l^1 \\ x_l^2 & y_l^2 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

где

$$x_l^1 = H(2\eta - \lambda), \quad x_l^2 = \ominus(2\eta - \lambda); \quad (4.19)$$

$$y_l^1 = \frac{H(2\eta + \lambda)}{g(2\eta - K)}, \quad y_l^2 = \frac{\ominus(2\eta + \lambda)}{g(2\eta - K)}, \quad (4.20)$$

и $g(u) = H(u)\Theta(u)$, где $H(u)$ и $\Theta(u)$ — уже упомянутые в §2 Θ -функции Якоби. Нормирующий множитель $1/g$ в (4.20) введен для удобства и не играет важной роли.

Соответствующие локальные матрицы перехода L_n^l будем обозначать через

$$L_n^l = M_{n+l}^{-1} L_n M_{n+l-1} = \begin{pmatrix} \alpha_n^l & \beta_n^l \\ \gamma_n^l & \delta_n^l \end{pmatrix}; \quad (4.21)$$

полную матрицу перехода — через $T_N^l(\lambda)$:

$$T_N^l(\lambda) = M_{N+l}^{-1} T_N(\lambda) M_l, \quad (4.22)$$

а ее матричные элементы — через $A_N^l(\lambda)$, $B_N^l(\lambda)$, $C_N^l(\lambda)$ и $D_N^l(\lambda)$. Локальный вакуум $\Omega_n^l \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяющий уравнению

$$\gamma_n^l \Omega_n^l = 0, \quad (4.23)$$

существует и дается формулой

$$\Omega_n^l = H(2(l+n)\eta - \eta) e_n^+ + \Theta(2(l+n)\eta - \eta) e_n^-, \quad (4.24)$$

где e_n^\pm — собственные векторы спинового оператора S_n^3 , но в отличие от случая модели N.S. он не является собственным вектором для операторов L_n^l и S_n^l . Однако он просто преобразуется под действием этих операторов

$$\alpha_n^l(\lambda) \Omega_n^l = h(\lambda + \eta) \Omega_n^{l-1}; \quad (4.25)$$

$$\delta_n^l(\lambda) \Omega_n^l = h(\lambda - \eta) \Omega_n^{l+1}; \quad (4.26)$$

$$h(u) = \Theta(0) g(u) = \Theta(0) H(u) \Theta(u). \quad (4.27)$$

Последние формулы проверяются на основании следующих формул:

$$\begin{aligned} \Theta(u)\Theta(v)H(w)H(u+v+w) + H(u)H(v)\Theta(w)\Theta(u+v+w) = \\ = \Theta(0)\Theta(u+v)H(u+w)H(v+w); \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \Theta(u)\Theta(v)\Theta(w)\Theta(u+v+w) + H(u)H(v)H(w)H(u+v+w) = \\ = \Theta(0)\Theta(u+v)\Theta(u+w)\Theta(v+w); \end{aligned}$$

$$g(K) \left(\Theta(u+v)H(u-v) - \Theta(u-v)H(u+v) \right) = 2g(u-K)g(v),$$

которые представляет собой удобную запись формул сложения для Θ -функций, введенную Бакстером.

На основании (4.25) и (4.26) мы видим, что векторы

$$\Omega_N^e = \prod_{1 \leq k < l \leq N} \otimes \Omega_k^e \quad (4.29)$$

удовлетворяет соотношениям

$$A_N^e(\lambda) \Omega_N^e = (h(\lambda + \eta))^N \Omega_N^{e-1}; \quad (4.30)$$

$$D_N^e(\lambda) \Omega_N^e = (h(\lambda - \eta))^N \Omega_N^{e+1}. \quad (4.31)$$

и, к сожалению, не являются собственными ни для A_N^e , ни для D_N^e . Однако с их помощью мы все же сможем построить набор собственных векторов коммутирующих операторов

$$F_N(\lambda) = \text{tr } T_N(\lambda) = A_N(\lambda) + D_N(\lambda). \quad (4.32)$$

Коммутативность $F_N(\lambda)$ следует из подобия матриц-операторов $T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)$ и $T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda)$, отмеченного в (2.49). Остальные коммутационные соотношения, следующие из (2.49), выглядят более сложно, чем, скажем, (3.63) и (3.64), и ниже нам придется перейти от операторов $B_N(\lambda)$ к другим линейным комбинациям коэффициентов матрицы перехода $T_N(\lambda)$.

Введем для этого набор матриц

$$T_{k,e}(\lambda) = M_k^{-1}(\lambda) T_N(\lambda) M_e(\lambda) \quad (4.33)$$

и будем обозначать их матричные элементы через $A_{k,e}(\lambda)$, $B_{k,e}(\lambda)$, $C_{k,e}(\lambda)$ и $D_{k,e}(\lambda)$. Имеем, очевидно,

$$F_N(\lambda) = A_{e,e}(\lambda) + D_{e,e}(\lambda) \quad (4.34)$$

при любом e . Далее введенные выше операторы $A_N^e(\lambda)$ и $D_N^e(\lambda)$ записываются в новых обозначениях следующим образом:

$$A_N^e(\lambda) = A_{N+e,e}(\lambda); \quad D_N^e(\lambda) = D_{N+e,e}(\lambda). \quad (4.35)$$

Коммутационные соотношения (2.49) приводят к следующим формулам для только что введенных операторов:

$$B_{k,e+1}(\lambda) B_{k+1,e}(\mu) = B_{k,e+1}(\mu) B_{k+1,e}(\lambda); \quad (4.36)$$

$$A_{k,e}(\lambda) B_{k+1,e-1}(\mu) = d(\lambda, \mu) B_{k,e-1}(\mu) A_{k+1,e-1}(\lambda) - \quad (4.37)$$

$$- \beta_{e-1}(\lambda, \mu) B_{\kappa, e-2}(\lambda) A_{\kappa+1, e-1}(\mu);$$

$$\mathcal{D}_{\kappa, e}(\lambda) B_{\kappa+1, e-1}(\mu) = \alpha(\mu, \lambda) B_{\kappa+2, e}(\mu) \mathcal{D}_{\kappa+2, e-1}(\lambda) + \beta_{\kappa+1}(\lambda, \mu) B_{\kappa+2, e}(\lambda) \mathcal{D}_{\kappa+1, e-1}(\mu); \quad (4.38)$$

где

$$\alpha(\lambda, \mu) = \frac{h(\mu - \lambda + 2\eta)}{h(\mu - \lambda)}; \quad \beta_{\kappa}(\lambda, \mu) = \frac{h(2\eta)g(2\kappa\eta + \eta - K)}{h(\mu - \lambda)g(2\kappa\eta - K)}. \quad (4.39)$$

Для доказательства следует использовать явные выражения элементов \mathcal{R} -матрицы через Θ -функции и теоремы сложения (4.26).

Эти формулы обобщают на рассматриваемый случай формулы (3.63), (3.64) и (3.67), которые мы использовали в § 3 для построения алгебраизованной подстановки Бете. Сейчас мы с их помощью построим обобщенную подстановку Бете.

Рассмотрим для этого вектор

$$\Psi_e(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = B_{e+1, e-1}(\lambda_1) \dots B_{e+n, e+n}(\lambda_n) \mathcal{D}_N^{e-n}, \quad (4.40)$$

где $n = N/2$ (мы считаем, что N -четно). Этот вектор симметричен по отношению к перестановкам параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ в силу (4.36). Подчеркнем, что в отличие от (3.68) число операторов в (4.40) не произвольно, а равно в точности $N/2$. Используя перестановочные соотношения (4.37) и (4.38), а также (4.34), получаем, действуя по аналогии с рассуждениями в § 3, что

$$\begin{aligned} F_N(\lambda) \Psi_e(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \\ &= \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \Psi_{e-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \tilde{\Lambda}(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \Psi_{e+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (4.41) \\ &+ \sum_{j=1}^n \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \Psi_{e-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \tilde{\Lambda}(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \Psi_{e+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = (h(\lambda + \eta))^N \prod_{j=1}^n \alpha(\lambda, \lambda_j); \quad (4.42)$$

$$\tilde{\Lambda}(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = (h(\lambda - \eta))^N \prod_{j=1}^n \alpha(\lambda_j, \lambda) \quad (4.43)$$

и

$$\Lambda_j^e(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = -\beta_{e-1}(\lambda, \lambda_j) (h(\lambda_j + \eta))^N \prod_{i \neq j}^n \alpha(\lambda_j, \lambda_i); \quad (4.44)$$

$$\tilde{\Lambda}_j^e(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \beta_{e+1}(\lambda, \lambda_j) (h(\lambda_j - \eta))^N \prod_{i \neq j}^n \alpha(\lambda_i, \lambda_j). \quad (4.45)$$

Умножим соотношение (4.41) на $\exp\{i\theta\ell\}$, где θ - вещественный параметр из интервала $(0, 2\pi)$, и просуммируем по всем целым ℓ . Тогда мы видим, что вектор

$$\Psi_\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \Psi_\ell(\lambda_1, \dots, \lambda_n) e^{i\ell\theta} \quad (4.46)$$

является собственным для оператора $F_\ell(\lambda)$ с собственным значением

$$e^{i\theta} \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) + e^{-i\theta} \tilde{\Lambda}(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (4.47)$$

если параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют системе трансцендентных уравнений

$$\left(\frac{h(\lambda_j + \eta)}{h(\lambda_j - \eta)} \right)^N = \prod_{i \neq j} \frac{d(\lambda_i, \lambda_j)}{d(\lambda_j, \lambda_i)} e^{-2i\theta} \quad (4.48)$$

Уравнения (4.48) были получены Бакстером в [25] методом, далеким от подстановки Бете. Затем в [61] он предложил координатную форму подстановки Бете, приводящую опять к уравнению (4.48). Рассуждения в этих работах очень трудоемкие. Их простая расшифровка, полученная здесь на пути развития квантового метода обратной задачи, опять показывает его плодотворность.

Сходимость ряда (4.46), конечно, следует исследовать. Можно думать, что этот ряд суммируется к нулю для почти всех θ . Результаты Бакстера показывают, что основное состояние находится среди (4.46) при $\theta=0$. Ситуация упрощается, если предположить вместе с Бакстером, что константа связи η рационально выражается через периоды K и K' θ -функций, т.е. удовлетворяет соотношению

$$Q\eta = 2pK + iqK', \quad (4.49)$$

где Q , p и q - целые числа. При достаточно большом Q произвольное η можно аппроксимировать числом, удовлетворяющим (4.49). Для таких η все введенные нами объекты $M_\ell(\lambda)$, $T_{\ell\ell}(\lambda)$ и $\Psi_\ell(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ зависят от номера ℓ периодически с периодом Q . В силу этого в формуле (4.40) для подстановки Бете достаточно считать, что $2n$ сравнимо с N по модулю Q :

$$N = 2n \pmod{Q}. \quad (4.50)$$

Далее, в суммах типа (4.46) достаточно суммировать по периоду, однако в качестве θ теперь можно брать лишь числа вида

$$\theta = \frac{2\pi m}{Q}, \quad m < Q, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.51)$$

Уравнение (4.48) для заполнения основного состояния и элементарных возбуждений $X\bar{Y}Z$ модели подробно исследовано методом интегральных уравнений в работе^{/62/}, к которой мы отсылаем читателя за техническими подробностями. Нашей целью в этом параграфе было лишь показать, как метод обратной задачи естественно приводит к обобщенной подстановке Бете для модели $X\bar{Y}Z$ — наиболее универсальной квантовой вполне интегрируемой системе на решетке.

Заключение

Материал, собранный в этом обзоре, показывает, что метод обратной задачи решения нелинейных эволюционных уравнений теории поля в одномерном пространстве имеет естественное квантовое обобщение. Более того, квантовый вариант делает многие приемы этого метода более простыми и наглядными и устанавливает интересные связи с другими методами одномерной математической физики: методами Онзагера-Бакстера исследования матриц перехода в задачах классической статистической физики на плоских решетках, методами Бете-Хильтена и др. решения задач для квантовых одномерных магнетиков и т.д. Можно сказать, что все достижения одномерной математической физики по поводу точно решаемых квантовых моделей в той или иной степени укладываются в рамки квантового метода обратной задачи.

Это бесспорно проливает новый свет на всю обширную деятельность по методу обратной задачи, которую мы наблюдаем в литературе по математической физике в последние десять лет.

Скажем несколько слов о перспективах метода и нерешенных задачах.

I. Во введении уже отмечалась связь метода обратной задачи и метода орбит в теории представлений групп Ли. Дальнейшее развитие и уточнение этой связи будет плодотворным для обеих теорий. Квантовый метод обратной задачи приведет к новым результатам по представлениям бесконечномерных представлений групп Ли. В свою очередь, метод орбит может дать инвариантную интерпретацию конкретным приемам метода обратной задачи, полезную для их дальнейшего обобщения.

Наиболее удобной моделью для отработки такой связи является цепочка Тода. Она имеет простую групповую интерпретацию^{/17-19/} и простую локальную матрицу L_n (см. (I.6I)). Однако разработанные до сих пор приемы не привели к подходящей формулировке подстановки Бете для периодической задачи.

2. В данном обзоре мы не рассматривали матричных эволюционных уравнений, соответствующих системам с несколькими сортами фундаментальных частиц. Квантовые модели, соответствующие таким системам, представляют несомненный интерес. В частности, в классической формулировке они допускают распадающиеся солитоны (см. /39-42/), которые после квантования должны приводить к нестабильным частицам. Но наиболее актуальной задачей является квантование нелинейной S^2

G -модели, или теории n -поля. Динамической переменной в модели является поле $n(x)$ со значениями на двумерной сфере S^2

$$n = (n_1, n_2, n_3), \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Уравнение движения

$$\square n_i + n_i (\partial_\mu n_k \partial_\mu n_k) = 0, \quad i=1,2,3,$$

представляется как условие нулевой кривизны

$$[X, T] = 0,$$

где матричные операторы

$$X = X_1, \quad T = X_2;$$

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{1}{1-\lambda^2} (L_\mu + \lambda \varepsilon_{\mu\nu} L_\nu), \quad L_\mu = \varepsilon_{ijk} \partial_\mu n_i n_k G_j$$

введены Полямайером /43/ и Захаровым и Михайловым /42/ в более общей ситуации (см. также /63/). Оператор X содержит производные от n -поля по X и не является ультралокальным в смысле, объясненном в основном тексте. Поэтому следует или найти новый ультралокальный оператор X для этой модели, или научиться работать со слабо некоммутирующими локальными матрицами перехода. Возможно, в этом направлении будет полезна связь n -поля и матричного обобщения цепочки Тода, которую неоднократно подчеркивал Поляков.

3. В моделях с поляризацией вакуума, рассмотренных в основном тексте, нам приходилось работать в конечном объеме, решая квантовую периодическую задачу, и лишь затем делать предельный переход к бесконечному объему. Несмотря на успехи на этом пути и, в частности, определение общей формулировки подстановки Бете, меня это положение не удовлетворяет. Было бы интересно проследить, какие асимптотические условия на локальные предингеровские операторы возникают в гильбертовом пространстве, надстроенном над поляризованным вакуумом (основным состоянием), найти правильные аналоги матриц $V(\lambda)$ и $W(\lambda, \mu)$ из теории модели $N S$ и ввести правильную матрицу перехода $T(\lambda)$ для вспомогательной спектральной задачи на всей оси $-\infty < x < \infty$.

4. Я уже отмечал в основном тексте, что квантовое обобщение до сих пор получила лишь "прямая" часть метода обратной задачи, т.е. преобразование от локальных шредингеровских операторов к спектральным данным - операторным матричным элементам матрицы перехода - $T(\lambda)$ или $T_L(\lambda)$. "Обратная" часть метода, т.е. восстановление начальных шредингеровских и зависящих от времени гейзенберговских операторов по спектральным данным, также очень интересна. Во-первых, она послужит для доказательства полноты собственных векторов, найденных при помощи подстановки Бете и ее обобщений. Во-вторых - и это главное - она приведет к выражению для гейзенберговских операторов через данные рассеяния, что позволит вычислить такие интересные характеристики квантовой системы, как функции Грина.

5. При исследовании модели $S, G.$, как это следует из^{/33,57/}, найдены до сих пор лишь собственные векторы гамильтониана в секторе с нулевым топологическим зарядом. Хотя этого хватает для ответа на физические вопросы (например, для вычисления всей S -матрицы), остается важная методическая задача построения заряженных секторов в гильбертовом пространстве и, в частности, односолитонного состояния.

Задачи, возникающие в связи с квантовой формулировкой метода обратной задачи, можно перечислять и дальше. Конечно, главная из них состоит в поисках путей для многомерного обобщения всего формализма. Не исключено, что квантовый метод обратной задачи в этом отношении окажется счастливее, чем классический.

Существует указание, пока, к сожалению, очень смутное, на то, что роль параметра X во вспомогательной спектральной задаче будут играть контуры или поверхность в многомерном пространстве (см. /64,65/).

Мои сотрудники в Ленинграде и я ведем активную работу по дальнейшему развитию квантового метода обратной задачи и, в частности, по решению сформулированных только что задач. Мы будем рады каждому, кто вместе с нами займется этой интригующей и многообещающей областью современной математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C., Greene J., Kruskal M., Miura R. Phys.Rev.Lett., 1967, 19, 1095.
2. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1967, 61, 118; 1973, 64, 1627.
3. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Функциональный анализ и прилож. 1971, 5, 18.
4. Захаров В.Е., Манахов С.В. ТМФ, 1974, 19, 332.
5. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. Phys.Rev.Lett., 1973, 30, 1262.
6. Тахтаджян Л.А., ЖЭТФ, 1974, 66, 476.
7. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. ДАН СССР, 1974, 219, 1334.
8. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1974, 21, 160.
9. Kaup D.J. Stud.Appl.Math., 1975, 54, 165.
10. Кулиш П.П., Манахов С.В., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1976, 28, 38.
11. Dashen R.J., Hasslacher B., Neveu A. Phys.Rev., 1975, D11, 3424.
12. Корепин В.Е., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1975, 25, 143.
13. Faddeev L.D., Koropin V.E. Phys.Rep. 1978, 28С, 3.
14. Березин Ф.А., Похил Г.П., Финкельберг В.М. Вестник МГУ, 1964, сер. I, № I, с. 21.
15. Mc Guire J.V. Journ.Math.Phys., 1964, 5, 622.
16. Yang C.N., Yang C.P. Phys.Rev., 1966, 150, 321.
17. Adler M., Inventiones Math., 1979, 50, 219.
18. Kostant B. Inventiones Math., 1978, 48, 101.
19. Reiman A.G., Semenov-Tyanshansky M.A. Inventiones Math. (to be published).
20. Манин И.И., Лебедев Д.Р., 1978. Preprint ИТФ-155.
21. Lax P.D. Comm.Pure Appl.Math., 1968, 21, 467.
22. Кириллов А.А. Элементы теории представлений групп Ли. Наука, 1972.
23. Phase Transitions and Critical Phenomena. Ed. by S.Domb and M.S.Green Academic Press, London-New York, 1972.
24. Mathematical Physics in One Dimension, ed. E.H.Lieb, D.C.Mattis, Academic Press, New-York and London, 1966.
25. Baxter R.J. Annals of Physics, 1972, 70, 193.
26. Baxter R.J. Annals of Physics, 1972, 70, 323.
27. Bethe H. Zs.Physik, 1931, 71, 205.

28. Hulten L. Arkiv Mat.Astron.Fysik, 1938, 26A,1.
29. Yang C.N., Yang C.P. Phys.Rev.,1966,150,321.
30. Склянин Е.К., Фаддеев Л.Д. ДАН СССР, 1978, 243, 1430.
31. Склянин Е.К. ДАН СССР, 1979, 244,1337.
32. Kulish P.P., Sklyanin E.K.Phys.Lett.A.1979, 70, p.461.
33. Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Препринт ЛОМИ, Е-1-79, 1979.
34. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. УМН, 1979, т.34, вып.5, стр.3.
35. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П., УМН, 1976,37,55.
36. Кричевер И.М. УМН, 1977, т.32, 183.
37. Takhtajan L.A. Phys.Lett., 1977, 64A,235.
38. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1973, 65, 505.
39. Захаров В.Е., Манаков С.В. ЖЭТФ, 1975, 69,1654.
40. Будагов А.С., Тахтаджян Л.А. ДАН СССР, 1977, 235,805.
41. Будагов А.С. Записки научных семинаров ЛОМИ, 1978, т.77,с.24.
42. Захаров В.Е., Михайлов А.В. ЖЭТФ, 1978, 74,1953.
43. Pohlmeier K.Comm.Math.Phys.,1976,46,207.
44. Lund F.Phys.Rev.,1977, D15, 1540.
45. Toda M. Progr.Theor.Phys.Suppl.1970, 45,174.
46. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1973, 65, 1392.
47. Flashka H. Progr.Theor.Phys., 1974,51,703.
48. Манаков С.В. ТМФ, 1976, 28, 172.
49. Mc Laughlin. Journ.Math.Phys.,1975,16,96.
50. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа, т. II . М., Физматгиз, 1963.
51. Yang C.N.Phys.Rev.Lett.,1967,19,1312.
52. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al.B., Nucl.Phys.,1978, B133, 525.
53. Karowski M., Thun H.J., Truong T.T., Weisz P.H., Phys.Lett., 1977, 67B, 321.
54. Lieb E.H., Liniger W. Phys.Rev.,1963, 130, 1605.
55. Lieb E.H. Phys.Rev.,1963,130,1616.
56. Yang C.N., Yang C.P. Journ.Math.Phys.,1969,10,1115.
57. Bergkhoff H., Thacker B. Rev.Lett., 1979, 42,135.
58. Coleman S. Phys.Rev.,1975, D11, 2088.
59. Zamolodchikov A.B. Comm.Math.Phys., 1977, 55,183.
60. Корепин В.Е. ТМФ, 1979, 42, III.
61. Baxter R.J. Annals of Physics, 1973,76,2; 25;48.

62. Johnson J.D., Krinsky S., Mo Coy B.M. Phys.Rev., 1973, A8, 2556.
63. Семенов-Тяньшанский М.А., Фаддеев Л.Д. Вестник ЛГУ, 1977, № 13, 81-88.
64. Polyakov A.M. Phys.Lett, 1979, v.82, 247 .
65. Арефьева И.Я. Настоящий сборник, с.200.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЕВЫЕ МОДЕЛИ

Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Введение

Геометрические методы всегда были эффективным средством как при построении новых физических теорий, так и при решении конкретных математических и физических проблем. Данный обзор посвящен использованию методов дифференциальной геометрии в теории двумерных нелинейных полевых моделей. Основная идея этого подхода состоит в следующем.

С геометрической точки зрения полевая функция, зависящая от двух переменных, описывает двумерную поверхность, вложенную в некоторое пространство, которое в общем случае является римановым. Конкретные свойства этого объемлющего пространства определяются видом взаимодействия в рассматриваемой полевой модели. Теорема вложения дифференциальной геометрии гласит, что поверхность, вложенную в объемлющее риманово пространство, можно описать не только ее радиус - вектором Δ в теории поля это означает с помощью полевой функции), но и основными квадратичными формами поверхности. Коэффициенты этих форм, как функции координат, заданных на поверхности, должны удовлетворять определенным дифференциальным уравнениям Гаусса, Петерсона - Кодаци и Риччи. Рассматривая эти коэффициенты как динамические переменные, а уравнения, которым они удовлетворяют, - как уравнения движения, мы получаем описание исходной полевой модели на языке новых дифференциальных уравнений, существенно отличающихся от уравнений Лагранжа - Эйлера в обычном подходе.

Более того, в дифференциальной геометрии уравнения Гаусса,

Петерсона - Кодаци и Ритчи возникают как условия совместности системы уравнений в частных производных первого порядка, которые описывают движение подлинного репера по поверхности. Оказывается, что последние уравнения дают конструктивный метод построения операторов (пары операторов Лакса или L, M - пары), которые необходимы для решения нелинейных уравнений движения, возникающих в этом подходе, методом обратной задачи рассеяния. Этот факт является весьма примечательным, если учесть, что задача нахождения операторов Лакса для заданного нелинейного уравнения (или системы уравнений) в общем случае не решена.

Обзор начинается с изложения необходимых сведений из дифференциальной геометрии римановых многообразий. Основное внимание при этом уделяется теореме вложения римановых многообразий и построению операторов Лакса для нелинейных уравнений, определяющих квадратичные формы поверхности.

Геометрический метод используется в теории двумерной δ -модели с $O(3)$ - и $O(4)$ -симметрией, а также в теории релятивистской струны в трех- и четырехмерном пространстве - времени. Обсуждается возможность решения нелинейных уравнений, возникающих здесь, методом обратной задачи рассеяния. Рассматриваются солитонные решения в этих моделях и их вклад в спектр масс в квазиклассическом приближении. Обсуждается обобщение струнной модели в рамках геометрического подхода.

2. Теоремы вложения дифференциальной геометрии ^{IV}

Декартовы координаты n -мерного евклидова пространства E_n обозначим x^μ , $\mu = 1, 2, \dots, n$. Метрическая форма этого пространства диагональна:

$$\varphi_i = \sum_{\mu=1}^n c_\mu dx^\mu dx^\mu, \quad c_\mu = \pm 1. \quad (2.1)$$

На двумерной поверхности, вложенной в E_n , введем криволинейные координаты u^i , $i = 1, 2$. Параметрическое задание поверхности означает задание следующих функций:

$$x^\mu = x^\mu(u^1, u^2), \quad \mu = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Эти уравнения индуцируют на поверхности риманову метрику

$$g_{ij} = \sum_{\mu=1}^n c_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^i} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^j}. \quad (2.3)$$

В каждой точке поверхности можно построить $(n-2)$ взаимноортогональных единичных нормалей η_{α}^{μ} , $\alpha=1, \dots, n-2$:

$$\sum_{\mu=1}^n c_{\mu} \eta_{\alpha}^{\mu} \eta_{\beta}^{\mu} = \begin{cases} e_{\alpha}, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad e_{\alpha} = \pm 1, \quad (2.4)$$

$$\sum_{\mu=1}^n c_{\mu} \eta_{\alpha}^{\mu} x_{,i}^{\mu} = 0, \quad i=1, 2.$$

Все производные от радиуса - вектора поверхности $x^{\mu}(u^i)$, начиная со вторых, могут быть разложены по базису $x_{,1}^{\mu}, x_{,2}^{\mu}, \eta_{\alpha}^{\mu}$ (дифференциальные формулы Гаусса):

$$x_{,ij}^{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{n-2} e_{\alpha} b_{\alpha ij} \eta_{\alpha}^{\mu}, \quad (2.5)$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование по отношению к метрике (2.3). По этому же базису можно разложить и производные от нормалей (дифференциальные формулы Вейнгартена):

$$\eta_{\alpha,i}^{\mu} = -b_{\alpha ij} g^{jm} x_{,m}^{\mu} + \sum_{\beta=1}^{n-2} e_{\beta} v_{\beta \alpha i} \eta_{\beta}^{\mu}. \quad (2.6)$$

Тензор $b_{\alpha ij}$ в (2.5) является тензором второй квадратичной формы поверхности в нормальном направлении η_{α}^{μ} : $b_{\alpha ij} = b_{\alpha ji}$. Величины $v_{\beta \alpha i} = -v_{\beta \alpha i}$ являются векторами по индексу i и называются векторами кручения. Уравнения (2.5) и (2.6) описывают движение по поверхности базиса $(x_{,1}^{\mu}, x_{,2}^{\mu}, \eta_{\alpha}^{\mu})$. Очевидно, что интегрирование этих уравнений позволяет восстановить радиус - вектор поверхности $x^{\mu}(u^i; u^j)$. Такая операция будет однозначной (с точностью до движения всей поверхности как целого), если выполнены условия совместности уравнений (2.5) и (2.6). Эти условия даются уравнениями Гаусса:

$$R_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^{n-2} e_{\alpha} (b_{\alpha ijk} b_{\alpha jil} - b_{\alpha ilj} b_{\alpha jik}), \quad (2.7)$$

Петерсона - Кодацки:

$$b_{\alpha\beta\gamma k} - b_{\alpha\beta k\gamma} = \sum_{\rho=1}^{n-2} e_{\rho} (v_{\rho\alpha k} b_{\beta\gamma} - v_{\rho\alpha\gamma} b_{\beta k}), \quad (2.8)$$

и Риччи :

$$v_{\rho\alpha\beta\gamma k} - v_{\rho\alpha k\beta\gamma} + \sum_{\rho=1}^{n-2} e_{\rho} (v_{\rho\beta\gamma} v_{\rho\alpha k} - v_{\rho\beta k} v_{\rho\alpha\gamma}) + \\ + g^{lm} (b_{\beta\alpha l} b_{\alpha m k} - b_{\beta l k} b_{\alpha m j}) = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема вложения: для того, чтобы симметричный тензор g_{ij} , $(n-2)$ симметричных тензоров $b_{\alpha\beta\gamma}$ и $(n-2)(n-3)/2$ векторов кручения $v_{\alpha\beta\gamma} (= -v_{\beta\alpha\gamma})$ определяли с точностью до движения двумерную поверхность, вложенную в n -мерное плоское пространство, необходимо, чтобы эти величины удовлетворяли уравнениям (2.7)-(2.9).

3. Нелинейная двумерная ϕ - модель

Эта модель описывает N безмассовых полей $n^{\alpha}(u^i, u^k)$, подчиненных условию

$$n^2 = \sum_{\alpha=1}^N (n^{\alpha})^2 = 1. \quad (3.1)$$

Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (d_i n^{\alpha})^2 + \lambda (n^2 - 1). \quad (3.2)$$

С геометрической точки зрения поля $n^{\alpha}(u^i, u^k)$ являются координатами двумерной поверхности, вложенной в $(N-1)$ -мерную единичную сферу (3.1). На этой поверхности можно ввести метрику

$$ds^2 = \sin^2 \Theta (dt)^2 + \cos^2 \Theta (dx)^2, \quad (3.3)$$

где

$$t = u^i, \quad x = u^k, \quad \Theta(t, x) = \arctg \sqrt{n_t^2 / n_x^2}.$$

Оказывается, что если есть всего три поля n^a , $a = 1, 2, 3$ (\mathcal{G} - модель с $O(3)$ -симметрией), то для задания нольовой поверхности достаточно всего одной функции $\theta(t, x)$, которая должна подчиняться уравнению Гаусса (2.7). Учитывая, что для двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве вторая квадратичная форма пропорциональна первой, легко свести (2.7) для метрики (3.3) к уравнению sine-Gordon

$$\alpha_{,11} - \alpha_{,22} = 2 \sin \alpha, \quad (3.4)$$

где $\alpha = 2\theta$.

С помощью дериационных формул (2.5), (2.6) это уравнение можно представить как условие совместности следующих линейных уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u^j} = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \Omega_k^j(\theta, \gamma) \sigma_k \psi, \quad j=1, 2, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_k^1 &= 2(\gamma \cos \theta, \theta_{,2}, \gamma + \sin \theta), \\ \Omega_k^2 &= 2(-\gamma \cos \theta, \theta_{,1}, -\gamma \sin \theta), \quad \gamma_{\pm} = \frac{1}{4} \left(\gamma \pm \frac{1}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эти уравнения дают все необходимое для решения (3.4) методом обратной задачи рассеяния.

В случае \mathcal{G} - модели с $O(4)$ -симметрией уравнения Гаусса (2.7) и Петерсона - Кодаши (2.8) сводятся к системе двух нелинейных уравнений ^{2,3}:

$$\theta_{,11} - \theta_{,22} - \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} (\lambda_{,1}^2 - \lambda_{,2}^2) = 0, \quad (3.7)$$

$$(\operatorname{ctg}^2 \theta \lambda_{,1})_{,1} = (\operatorname{ctg}^2 \theta \lambda_{,2})_{,2}. \quad (3.8)$$

Соответствующие линейные задачи опять имеют вид (3.5) с Ω_k^j , определяемыми формулами

$$\Omega_k^1 = 2 \left[\sin \theta \gamma_+ + \frac{1}{\cos \theta} (b_{1k} \gamma_+ - b_{1k} \gamma_-), -\cos \theta \gamma_- - \frac{1}{\sin \theta} (b_{2k} \gamma_+ - b_{2k} \gamma_-), -\frac{\Theta_k}{2} \right],$$

$$\Omega_k^2 = 2 \left[-\sin \theta \gamma_- + \frac{1}{\cos \theta} (-b_{1k} \gamma_+ + b_{1k} \gamma_-), \cos \theta \gamma_+ + \frac{1}{\sin \theta} (-b_{2k} \gamma_+ + b_{2k} \gamma_-), -\frac{\Theta_k}{2} \right],$$

где

$$b_{1k} = \sigma g_{0k}, \quad b_{2k} = \sigma g_{1k}.$$

Прямая и обратная задачи рассеяния для системы (3.7), (3.8), солитонные решения этих уравнений исследовались в работах^{3,4}.

4. Релятивистская струна в геометрическом подходе

Поиски динамической основы дуально-резонансных моделей и исследование механизма удержания кварков в адронах⁵⁻⁷ привели к рассмотрению одномерно протяженного релятивистского объекта — струны с действием

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} = -\gamma \iint d^2u \sqrt{-g}, \quad (4.1)$$

где $\dot{x}^\mu = \partial x^\mu / \partial \tau$, $x'^\mu = \partial x^\mu / \partial \sigma$, $g = \det g_{ij}$, $g_{ij} = (\partial x^\mu / \partial u^i)(\partial x^\mu / \partial u^j) = x_{,i}^\mu x_{,j}^\mu$; g_{ij} — метрический тензор на мировой поверхности струны; $u^i = \tau$, $u^j = \sigma$.

В обычном подходе, когда динамическими переменными считаются координаты струны $x^\mu(\sigma, \tau)$, задача сводится к линейным уравнениям движения

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0 \quad (4.2)$$

с нелинейными дополнительными условиями

$$(\dot{x}^\mu \pm x'^\mu)^2 = 0. \quad (4.3)$$

С геометрической точки зрения мировая поверхность, покрываемая струной в процессе движения, является минимальной^{1/1}, так как из уравнений Эйлера $\delta \sqrt{-g} / \delta x^\mu = 0$ следует, что средняя кривизна этой поверхности в любом нормальном направлении равна нулю^{1/1}:

где $g_{\alpha\beta}^{ij}$ - тензор второй квадратичной формы, связанной с нормалью ν_{α}^{ij} , $\alpha = 1, 2$. Такие взаимно ортогональные нормали к мировой поверхности струны в каждой ее точке можно построить две, причем обе они будут пространственно - подобными

$$g_{\alpha}^{\mu} g_{\beta}^{\nu} = \begin{cases} -1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \nu_{\alpha}^{\mu} x_{,i}^{\mu} = 0, i=1,2. \quad (4.4)$$

В качестве величин, определяющих мировую поверхность струны в пространстве - времени с точностью до ее движения как целого, можно взять фундаментальные тензоры этой поверхности g_{ij} , ν_{α}^{ij} и вектор кручения $\nu_{\alpha\beta i}^j = (-\nu_{\beta\alpha i}^j)$, $i, j = 1, 2$; $\alpha, \beta = 1, 2$. Набор этих переменных описывает движение базиса $(x_{,i}^{\mu}, x_{,j}^{\nu}, \nu_{\alpha}^{\mu}, \nu_{\beta}^{\nu})$ по мировой поверхности струны. Выбор специальной системы координат x^{μ} позволит значительно уменьшить число независимых величин в данном наборе. Не теряя общности, можно взять такую координатную систему, в которой

$$g_{11} = -g_{22} = a, \quad g_{12} = 0, \quad \nu_{\alpha 111}^j = \nu_{\alpha 122}^j, \quad (4.6)$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 (\nu_{\alpha 111}^j \pm \nu_{\alpha 122}^j)^2 = q_{\pm}^2, \quad (4.7)$$

где q_{\pm} - константы $\neq 0$.

При переходе от одной точки мировой поверхности струны к другой изменение подвижного базиса

$$e_1^{\mu} = \frac{x_{,1}^{\mu}}{\sqrt{a}}, \quad e_2^{\mu} = i \frac{x_{,2}^{\mu}}{\sqrt{a}}, \quad e_3^{\mu} = i \nu_{\alpha}^{\mu}, \quad e_4^{\mu} = i \nu_{\beta}^{\mu} \quad (4.8)$$

определяется следующими деривационными формулами:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^1} = -i \frac{a_{,1}}{2a} e_2 + i \frac{\nu_{\alpha 111}^{\mu}}{\sqrt{a}} e_3 + i \frac{\nu_{\beta 111}^{\mu}}{\sqrt{a}} e_4,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_2}{\partial u^2} &= i \frac{a_{22}}{2a} e_1 - \frac{b_{112}}{\sqrt{a}} e_3 - \frac{b_{212}}{\sqrt{a}} e_4, \\ \frac{\partial e_3}{\partial u^2} &= -i \frac{b_{111}}{\sqrt{a}} + \frac{b_{112}}{\sqrt{a}} e_2 - \nu_1 e_4, \\ \frac{\partial e_4}{\partial u^2} &= -i \frac{b_{211}}{\sqrt{a}} e_1 + \frac{b_{212}}{\sqrt{a}} e_2 + \nu_1 e_3; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial u^2} = -i \frac{a_{11}}{2a} e_2 + i \frac{b_{112}}{\sqrt{a}} e_3 + i \frac{b_{212}}{\sqrt{a}} e_4,$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial u^2} = i \frac{a_{11}}{2a} e_1 - \frac{b_{112}}{\sqrt{a}} e_3 - \frac{b_{212}}{\sqrt{a}} e_4,$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial u^2} = -i \frac{b_{112}}{\sqrt{a}} e_1 + \frac{b_{112}}{\sqrt{a}} e_3 - \nu_2 e_4,$$

$$\frac{\partial e_4}{\partial u^2} = -i \frac{b_{212}}{\sqrt{a}} e_1 + \frac{b_{212}}{\sqrt{a}} e_2 + \nu_2 e_3. \quad (4.10)$$

Условие совместности системы (4.9), (4.10) дается уравнениями Гаусса, Петерсона - Кодаши, Риччи (27)-(29):

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \dot{u}'' &= 2q_+ q_- e^u \cos \theta, \\ \ddot{\theta} - \dot{\theta}'' &= 2q_+ q_- e^u \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $u = e^u$, $\nu_1 = \nu_{2112}$, $\nu_2 = \nu_{2112}$, $b_{111} \pm b_{112} = q_{\pm} \cos \alpha_{\pm}$, $b_{211} \pm b_{212} = q_{\pm} \sin \alpha_{\pm}$, $\theta = \alpha_+ - \alpha_-$, $\nu_+ + \nu_- = \alpha_+ + \alpha_-$, $\nu_+ - \nu_- = \alpha_+ - \alpha_-$.
 Два уравнения (4.11) можно объединить в одно уравнение Лувуэля на комплекснозначную функцию $w = u + i\theta$:

$$\ddot{w} - \dot{w}'' = R e^w, \quad (4.12)$$

где $R = 2q_+ q_-$. Интересно, что в случае трехмерного пространства - времени $\theta = 0$ и мы получаем одно действительное уравнение Лувуэля на функцию $u(3,7)$.

Нелинейное уравнение (4.12) имеет общее решение, тем не ме-

нее его можно исследовать методом обратной задачи рассеяния /II-13/. Этот подход представляет интерес как для нахождения N - солитонных решений в уравнении (4.12), так и для выяснения, является ли эта система вполне интегрируемой. Последний вопрос возникает в связи с предположением о том, что поле Янга - Миллса, по-видимому, является вполне интегрируемой системой. При формулировке этой теории в терминах функционалов, заданных на контурах, как одно из приложений возникает вторично-квантованная теория струн. Поэтому естественно вначале выяснить, является ли вполне интегрируемой системой релятивистская струна.

Деривационные формулы (4.9), (4.10) позволяют построить вспомогательную линейную спектральную задачу и линейное эволюционное уравнение, необходимые для решения (4.12) методом обратной задачи рассеяния. Основным прием, используемый здесь, состоит в переходе к синхронному описанию вращения подвижного базиса при движении его начала по мировой поверхности струны. Для простоты вначале можно рассматривать трехмерное пространство-время, полагая в конце функцию ψ комплекснозначной. В результате получаем, что уравнение Лувилля (4.12) является условием совместности следующей системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u^j} = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \Omega_k^j(u, \gamma) \sigma_k \psi, \quad j = 1, 2, \quad (4.13)$$

$$u^1 = \tau = t, \quad u^2 = \sigma = x,$$

где

$$\Omega_k^1 = \left[-\frac{1}{\sqrt{a}} (b_{12} \operatorname{ch} \alpha + b_{22} \operatorname{sh} \alpha); \frac{i}{\sqrt{a}} (b_{12} \operatorname{sh} \alpha - b_{11} \operatorname{ch} \alpha); -\frac{i a_{12}}{a} \right],$$

$$\Omega_k^2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{a}} (b_{12} \operatorname{sh} \alpha - b_{11} \operatorname{ch} \alpha); -\frac{i}{\sqrt{a}} (b_{12} \operatorname{ch} \alpha - b_{11} \operatorname{sh} \alpha); -\frac{i a_{11}}{a} \right],$$

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = 2 \operatorname{ch} \alpha, \quad \gamma - \frac{1}{\gamma} = 2 \operatorname{sh} \alpha, \quad \alpha = \exp(-w).$$

Уравнение (4.13) следует дополнить естественными граничными условиями

$$w(t, x) \rightarrow -\infty, \quad w_t \rightarrow c, \quad w_x \rightarrow d, \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

где c и d - комплексные константы. При $|x| \rightarrow \infty$ уравнения (4.13) упрощаются:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -d \sigma_3 \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -c \sigma_3 \psi. \quad (4.14)$$

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что в правой части (4.14) исчезла зависимость от спектрального параметра γ . Тем не менее можно ввести фундаментальные матрицы - решения $U_{\pm}(x)$, определяемые своим асимптотическим поведением:

$$U_{+}(x) \rightarrow e^{-c\theta_3 x}, \quad U_{-}(x) \rightarrow e^{-c\theta_3 x}, \quad \det U_{\pm}(x) = 1.$$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty$

В силу этих асимптотик матрица перехода $S(\gamma)$

$$U_{+}(x) = U_{-}(x) S(\gamma)$$

будет обладать необычными аналитическими свойствами по спектральному параметру γ . Поэтому применение здесь метода обратной задачи рассеяния требует особого рассмотрения.

Эту трудность можно обойти, если вместо релятивистски - инвариантных калибровочных условий (4.7) взять временную калибровку $t = \tau$. Наиболее прост случай трехмерного пространства - времени. Уравнения обычной теории релятивистской струны в этой калибровке имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{x}'' - \vec{x}'' &= 0, \\ \vec{x}_{,\tau}^2 + \vec{x}_{,\sigma}^2 &= 1, \quad \vec{x}_{,\tau} \vec{x}_{,\sigma} = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\vec{x}(t = u^1, \sigma = u^2)$ - двумерный радиус - вектор струны. Если ввести одну скалярную функцию $\Theta(u^1, u^2)$,

$$\vec{x}_{,\tau}^2 = \sin^2 \Theta, \quad \vec{x}_{,\sigma}^2 = \cos^2 \Theta, \quad (4.16)$$

то из (4.15) получаем

$$\Theta_{,\tau\tau} - \Theta_{,\sigma\sigma} = 0. \quad (4.17)$$

Это уравнение является фактически уравнением Гаусса (2.7) для плоскости ($\beta_{ij} = 0$) с метрикой

$$ds^2 = \sin^2 \Theta (du^1)^2 + \cos^2 \Theta (du^2)^2.$$

Интересно отметить, что один и тот же объект - релятивистская струна - в разных калибровках описывается или уравнением Лиувилля

$$u_{,\tau\tau} - u_{,\sigma\sigma} = R e^u, \quad (4.18)$$

или уравнением Д'Аламбера (4.15). Это указывает на то, что между этими уравнениями должна быть определенная связь. Действительно, существует преобразование Беклунда, связывающее решение уравнений (4.17) и (4.18).

В четырехмерном пространстве - времени теория релятивистской струны в калибровке $t = \bar{t}$ в геометрическом подходе сводится к системе двух нелинейных уравнений (3.7) и (3.8)^{14/}. Единственное отличие в случае свободной струны состоит в том, что в (3.7) нет члена $\sin \theta \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \theta_{,11} - \theta_{,22} + \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} (\lambda_{,1}^2 - \lambda_{,2}^2) &= 0, \\ (\operatorname{ctg}^2 \theta \lambda_{,1})_{,1} &= (\operatorname{ctg}^2 \theta \lambda_{,2})_{,2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Очевидно, что должна существовать тесная связь между системой (4.19) и комплексовозначным уравнением Лунвилля (4.12). Метод обратной задачи рассеяния для системы (3.7) и (3.8) рассматривался в работах^{14,14,15/}.

5. Обобщение струнной модели в рамках геометрического подхода

Релятивистская струна с действием (4.1) в процессе своего движения описывает двумерную минимальную поверхность в пространстве Минковского. С геометрической точки зрения такая поверхность характеризуется тем, что ее средняя кривизна в любом нормальном направлении равна нулю^{16/}:

$$b_{\alpha ij} g^{ij} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-2,$$

где n - размерность пространства - времени. Следующей по сложности, очевидно, будет поверхность с ненулевой постоянной средней кривизной. Для простоты будем считать, что такая поверхность вложена в трехмерное псевдоевклидово пространство. В этом случае

$$\frac{1}{2} b_{ij} g^{ij} = H = \text{const}. \quad (5.1)$$

В качестве динамических переменных опять будем рассматривать тензоры основных квадратичных форм поверхности b_{ij} и g_{ij} . Анализируя уравнения Гаусса, Петерсона - Кодацци, можно показать, что на поверхности с постоянной средней кривизной координатная сеть из линий кривизны ($g_{\alpha\alpha} = b_{\alpha\alpha} = 0$) является в то же время и изомет-

рической сетки $g_{11} = -g_{22} = 16l^2$. В этих координатах основные квадратичные формы поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{e^u}{4H} [(du^1)^2 - (du^2)^2], \\ \varphi_2 &= \frac{1}{4}(1+e^u)(du^1)^2 + \frac{1}{4}(1-e^u)(du^2)^2, \quad H > 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Уравнения Петерсона - Кодаци (2.8) для квадратичных форм (5.2) тождественно удовлетворяются, а из уравнения Гаусса (2.7) получаем

$$u_{,11} - u_{,22} = H \sinh u. \quad (5.3)$$

Это уравнение следует рассматривать как основное динамическое уравнение в предложенной модели.

Уравнение (5.3) является условием совместности дериационных формул Гаусса и Вейнгартена для радиуса - вектора поверхности

$x^\mu(u^1, u^2)$ и нормали $\eta^\mu(u^1, u^2)$, $\mu = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} x_{,11}^\mu &= \frac{2u_{,1}}{2} x_{,1}^\mu + \frac{2u_{,2}}{2} x_{,2}^\mu - \frac{1}{4}(1+e^u)\eta_{,1}^\mu, \\ x_{,12}^\mu &= \frac{2u_{,2}}{2} x_{,1}^\mu + \frac{2u_{,1}}{2} x_{,2}^\mu, \\ x_{,22}^\mu &= \frac{2u_{,1}}{2} x_{,1}^\mu + \frac{2u_{,2}}{2} x_{,2}^\mu - \frac{1}{4}(1-e^u)\eta_{,2}^\mu, \\ \eta_{,1}^\mu &= -H(e^{-u}+1)x_{,1}^\mu, \quad \eta_{,2}^\mu = H(e^{-u}-1)x_{,2}^\mu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Эти уравнения можно трактовать как уравнения движения одномерно протяженного релятивистского объекта, который покрывает мировую поверхность с постоянной средней кривизной. Однако построить лагранжиан, из которого следовали бы уравнения (5.4), не представляется возможным. Здесь как раз и проявляется преимущество геометрического подхода, в котором данная задача сводится к одному нелинейному уравнению (5.3).

6. Солитоны в теории струн

Уравнение Лукиля (4.18), описывающее мировую поверхность струны в геометрическом подходе, имеет общее решение^[17]:

$$u(x, t) = \ln \left(\frac{8}{R} \frac{f'(x+t)g'(x-t)}{[f(x+t)g(x-t)]^2} \right), \quad (6.1)$$

где f и g - произвольные функции, а штрих означает дифференци-

рование по аргументу функции. Однако с физической точки зрения представляет интерес не формула (6.1), а частные решения этого уравнения - солитоны, имеющие вид $u(x;t) = F(x-vt)$, или $u = F(x-vt)/9.10/$. Функция F определяется из уравнения

$$(1-v^2)F'' = -R.$$

Для $R > 0$ получаем

$$e^{u_2} = \frac{m^2}{32R} \operatorname{sech}^2\left(\frac{m}{8} \frac{x-vt-x_0}{\sqrt{1-v^2}}\right), \quad (6.2)$$

где m - произвольная константа, которая, как будет показано в дальнейшем, есть масса солитона (6.2). Если $R < 0$, то имеем солитоны двух типов:

$$e^{u_2} = \frac{m^2}{32|R|} \operatorname{csch}^2\left(\frac{m}{8} \frac{x-vt-x_0}{\sqrt{1-v^2}}\right), \quad (6.3)$$

$$e^{u_3} = \frac{m^2}{32|R|} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{m}{8} \frac{x-vt-x_0}{\sqrt{1-v^2}}\right). \quad (6.4)$$

Решения (6.2) и (6.3) представляют собой уединенные волны, движущиеся со скоростью, меньшей скорости света. Решение (6.4) есть периодический солитон, описывающий "гребенку" волн. Следует отметить, что (6.3) и (6.4) имеют неинтегрируемые особенности

$$e^{u_i} \sim z^{-2} \text{ при } z \rightarrow 0, \quad z = (x-vt-x_0)/\sqrt{1-v^2}, \quad i=1,2;$$

и тем самым формально не удовлетворяют требованиям, которые обычно предъявляются к солитонным решениям $^{11/}$. Однако, чтобы не усложнять терминологию, и эти решения мы будем называть солитонами и покажем, что их особенности не приводят к принципиальным трудностям при попытке трактовать эти решения как пространственно протяженные частицы.

Помимо односолитонных решений уравнение (4.18), как это следует из результатов работы $^{18/}$, имеет и n -солитонные решения. Такое решение описывает один солитон, движущийся с произвольной скоростью, и $n-1$ солитонов, движущихся со скоростью света. Из n -солитонного решения при $n=1$ следует только солитон (6.2), в то время как (6.3) и (6.4) таким путем получить нельзя. Для простоты и наглядности мы ограничимся здесь рассмотрением только односолитонных решений.

Уравнение Дирака соответствует лагранжиана плотности

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2) + R\psi^2 \quad (6.5)$$

Тензор энергии - импульса для солитонов возьмем в следующем виде:

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{m^2}{32} \eta^{\mu\nu} - \frac{m^2}{16} v^{\mu} v^{\nu}, \quad (6.6)$$

где $T^{\mu\nu}$ - канонический тензор энергии - импульса поля $u(x,t)$, соответствующий лагранжиану плотности (6.5):

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)} \partial^\nu u - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

$\mu, \nu = 0, 1, \eta^{00} = -\eta^{11} = 1$, v^μ - вектор скорости солитона $v^0 = 1/\sqrt{1-v^2}$, $v^1 = v/\sqrt{1-v^2}$. Добавка к $T^{\mu\nu}$ в формуле (6.6) не зависит от координат x, t и приводит к сходящимся на бесконечности интегралам для энергии и импульса солитонов:

$$P^i = \int \Theta^{i0} [u_c(x,t)] dx. \quad (6.7)$$

Подставляя в (6.7) решения $u_i(x,t)$ (6.2)-(6.3), получаем

$$E_1 = -\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad P_1 = -\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (6.8)$$

$$E_i = \frac{m I_i}{\sqrt{1-v^2}}, \quad P_i = \frac{m I_i v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad i=2,3,$$

где $I_2 = \int dx / \sqrt{1-x^2}$, $I_3 = \int dx (ct \sqrt{1-x^2} - 1)$. Таким образом, в первом случае массой солитона можно считать постоянную m , а для солитонов (6.3) и (6.4) масса равна $m I_i$, $i=2,3$. Расходящиеся в нуле интегралы I_i можно регуляризовать, введя, например, обрезание, однако в дальнейшем будет достаточно того, что между E_i и P_i в формулах (6.8) есть правильное релятивистское соотношение. Именно этот факт позволяет уже в классической теории сопоставлять солитонам частицы с отличной от нуля массой покоя.

Перейдем к исследованию устойчивости солитонов. Вначале рассмотрим статические солитонные решения, которые определяются формулами (6.2)–(6.4) при $v=0$. Для этого представим решение уравнения (4.18) в следующем виде:

$$u(x,t) = u_i(x) + e^{i\omega t} \psi(x). \quad (6.9)$$

Подстановка (6.9) в (4.18) приводит к уравнению на $\psi(x)$, эквивалентному виду одномерного уравнения Шредингера с потенциалом $V[u_i(x)] = -R \exp(u_i(x))$:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V[u_i(x)]\right) \psi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad (6.10)$$

где

$$V[u_1(x)] = -\frac{m^2}{32} \operatorname{sech}^2\left(\frac{m}{8}x\right), \quad (6.11)$$

$$V[u_2(x)] = \frac{m^2}{32} \operatorname{csch}^2\left(\frac{m}{8}x\right), \quad (6.12)$$

$$V[u_3(x)] = \frac{m^2}{32} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{m}{8}x\right). \quad (6.13)$$

Если в уравнении (6.10) $\omega^2 > 0$, то решение $u_i(x)$ устойчиво в классической теории и в силу релятивистской инвариантности устойчиво и $u_i(x,t)$. При $\omega^2 < 0$ поправка к $u_i(x)$ в (6.9) экспоненциально растет по времени и солитон неустойчив.

Уравнение (6.10) с потенциалом (6.11)–(6.12) решается точно [19]. В первом случае ω^2 имеет одно отрицательное значение $\omega_1^2 = -m^2/64$ и непрерывный спектр, начинающийся с трансляционной моды с $\omega_0^2 = 0$. Так как $\omega_1^2 < 0$, то солитонное решение $u_1(x,t)$ неустойчиво уже в классической теории.

Для потенциала (6.12) ω^2 имеет непрерывный спектр $\omega^2 > 0$ и трансляционную моду $\omega = 0$, которая опять граничит с непрерывным спектром. Решение $u_2(x,t)$ устойчиво.

Потенциал (6.13) сводится к потенциалу Пенджа – Теллера [19]. Периодичность этого потенциала оказывается несущественной для ре-

леной уравнения (6.10), так как соседние потенциальные ямы разделены непроницаемыми барьерами. Поэтому можно ограничиться рассмотрением одной из таких ям. В этом случае есть только дискретный спектр $\omega_n^2 = m^2(n+1)^2/64$, $n = 1, 2, \dots$, и транзитивная мода $\omega_0 = 0$. Решение $u_3(x, t)$ устойчиво.

Таким образом, солитону $u_2(x, t)$ в классике соответствует нестабильная частица с массой m и с временем жизни $\sim 8m^{-2}$. Солитоны $u_2(x, t)$ и $u_3(x, t)$ описывают устойчивые частицы.

Кратко рассмотрим квантовую теорию. Поле $u(x, t)$ представим в виде

$$u(x, t) = u_c(x-x_0) + \psi(x, t), \quad (6.14)$$

где $u_c(x-x_0)$ — солитонные решения (6.2)–(6.4) при $v=0$. В качестве координат системы выбирается положение центра масс солитона $x_0(t) = x_0 + vt$ и поле $\psi(x, t)$; им сооставляются канонически сопряженные импульсы $p(t)$ и $\pi(t)$ соответственно.

После подстановки (6.14) в (6.6) полный гамильтониан разбивается на свободную часть и гамильтониан взаимодействия

$$H = H_0 + H_I,$$

где $H_0 = m + \frac{1}{2} \int dx (\pi^2 + \psi'^2 - \psi^2 R e^{\psi})$ — гамильтониан частицы с массой m и поля $\psi(x, t)$, помещенного во внешнее классическое поле $-R e^{\psi(x)}$. Гамильтониан H_I , описывающий взаимодействие $\psi(x, t)$ с солитоном, зависит от $x_0(t)$, $p(t)$, $\psi(x, t)$ и $\pi(x, t)$. Явный вид довольно сложен^[20], и выписывать его здесь мы не будем.

Из уравнений Гамильтона с H_0 следует

$$\ddot{\psi} - \psi'' = R e^{\psi} \psi.$$

Далее используется стандартный метод квантования во внешнем поле^[21] с помощью разложения

$$\psi(x, t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[b_k \psi_k(x) e^{-i\omega_k t} + b_k^+ \psi_k^+(x) e^{i\omega_k t} \right],$$

$$\pi(x, t) = \sum_k (-i) \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[b_k \psi_k(x) e^{-i\omega_k t} - b_k^+ \psi_k^+(x) e^{i\omega_k t} \right],$$

где $\psi_k(x)$ — полный набор решений уравнения (26), из которого ко-

ключена нулевая мода

$$\sum_k \psi_k(x) \psi_k^+(y) = \delta(x-y) - \frac{1}{m} u_c'(x) u_c'(y).$$

Здесь знак суммы \sum_k означает одновременно и интегрирование по k , если оно необходимо. Постулируем канонические коммутационные соотношения

$$[b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'}, \quad [b_k, b_k] = [b_k^+, b_k^+] = 0$$

и отроится гильбертово пространство состояний $|P, \{k_i\}\rangle = b_{\{k_i\}}^+ |P\rangle$, характеризуемых общим импульсом P и набором импульсов мезонов $\{k_i\}$. На этой основе стандартным путем можно развить теорию возмущений.

Свободный гамильтониан H_0 после перехода к нормальному произведению операторов b_k принимает вид

$$H_0 = m + \sum_k \omega_k b_k^+ b_k. \quad (6.15)$$

Вычисляя матричные элементы H_0 по векторам состояний $|P, \{k_i\}\rangle$, получаем энергетический спектр системы в нулевом приближении теории возмущений. Очевидно, что он полностью определяется спектром ω в уравнении (6.10).

Солитон (6.2), неустойчивый в классике, тем более будет неустойчив в квантовой теории, так как вклад в энергию (31) от дискретного спектра в этом случае чисто отрицательный.

Решению (6.3) в квантовой теории соответствует стабильная частица с массой m , а поле $\psi(x, t)$ описывает безмассовые мезоны.

Наиболее богатый спектр дает периодический солитон (6.4):

$$E_0 = m, \quad E_n = m + \frac{m}{8}(n+1), \quad n=1, 2, \dots$$

Интересно, что этот спектр эквидистантный, если не рассматривать нижнее состояние с энергией E_0 . Расстояние между энергетическими уровнями определяется массой солитона $m/8$ и может принимать любые значения. Состояния этого спектра стационарны только в пренебрежении взаимодействием H_I , которое должно приводить к переходам между ними, то есть реально здесь есть серия резонансов.

Периодический солитон и порождаемый им спектр естественно рассматривать в теории замкнутой релятивистской струны¹¹⁾. В общем подходе эта модель имеет эквидистантный спектр стационарных состояний, который служит основой для построения дуальных моделей. Тот факт, что энергетические уровни в дуально-резонансном подходе имеют нулевую ширину, с физической точки зрения является существенным недостатком. В этом отношении более реалистичен спектр масс, получаемый при явном учете солитонных решений в теории релятивистской струны.

7. Заключение

Кратко рассмотренные примеры нелинейных двумерных моделей показывают, что геометрический подход позволяет не только переформулировать полевыми модель на языке новых дифференциальных уравнений, но и применить к их исследованию такой эффективный математический аппарат, как метод обратной задачи рассеяния. Этот метод может быть использован, вероятно, не только на классическом, но и на квантовом уровнях.

К сожалению, применимость этого подхода теряется при переходе от двумерных моделей к более реалистичным теориям в трех- и четырехмерном пространстве - времени, так как в этом случае резко возрастает число компонент тензорных величин, с которыми приходится иметь дело.

Литература

1. Л.П. Эвэнхарт. Риманова геометрия III, М., 1948.
2. F.Lund. Phys. Rev., D15, 1540 (1977).
3. K.Pohlmeyer. Com. Math. Phys., 46, 209 (1976).
4. F.Lund. Phys. Rev. Lett., 38, 1175 (1977).
5. J. Scherk. Rev. Mod. Phys., 47, 123 (1975).
6. C. Rebbi. Phys. Rep., SI2, 3 (1974).
7. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. ЭЧАЯ, т. 9, в. 5, 709 (1978).
8. Б.М. Барбашов, А.Л. Кожмарев. Препринт ОИЯИ, P2-II430, Дубна, 1978.
9. В.М. Barbashov, V.V. Nesterenko, A.M. Chervjakov. JINR Preprint E2-II669, Dubna, 1978.
10. В.М. Barbashov, V.V. Nesterenko. JINR, Preprint E2-II706, Dubna, 1978.

11. A.C.Scott, F.Y.Chu, D.W.McLaughlin. Proc IEEE, 61, 1443 (1973).
12. P.D.Lax. Comm Pure Appl. Math., 21, 467 (1968).
13. А.А. Тихонов, А.А. Федосов. ТМФ, 21, 160 (1974).
14. F.Lund, T.Regge. Phys. Rev., D14, 1524 (1976).
15. F.Lund. Ann. Phys., 115, 251 (1978).
16. Н.Н. Векуа. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. "Наука", 1978.
17. J.Liouville. Journ. Math., p. appl., 18, 71 (1953).
18. В.А. Андреев. ТМФ, 29, 213 (1976).
19. S.Flügge. Practical Quantum Mechanics I, Springer - Verlag, Berlin (1971).
20. E. Tomboulis. Phys. Rev., D12, 1678 (1975).
21. С. Шнебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИИ, М., 1963.

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. Т. Филиппов

Объединённый институт ядерных исследований, Дубна

§ I. Введение

В большинстве прикладных задач используются нелинейные уравнения. Богатый набор таких задач даёт классическая механика / движение небесных тел, ракет и искусственных спутников, автоколебания, движение гироскопов и т.д. /, гидродинамика и теория упругости, нелинейная электродинамика и оптика, статистическая механика. Существенно нелинейны проблемы математической биологии, математической экологии и математической экономики. При решении этих проблем были разработаны мощные аналитические и численные методы, которые до последнего времени сравнительно мало использовались в квантовой физике. Отчасти это объясняется тем, что уравнения квантовой механики можно представить в линейной форме / исключение составляла теория многоэлектронных атомов в приближении самосогласованного поля, где нелинейность возникает за счёт уменьшения числа независимых переменных /. В квантовой теории поля из-за бесконечного числа степеней свободы избавиться от нелинейностей практически невозможно, но учитывались они в основном с помощью теории возмущений / исключение составляли методы "бутстрапа"/.

Попытки выделить и исследовать существенно нелинейные явления в квантовой теории поля и в квантовой теории многих тел начались лет тридцать назад. В теории поля исследовались нетривиальные / т.е. не описываемые теорией возмущений / решения классических уравнений и была поставлена задача получения квантовых поправок / Гайзенберг, Скирм, Финкельштейн, Шифф, Иваненко и др./ . В теории многих тел в основном изучались нетривиальные эффекты нелинейности, описываемой феноменологическими уравнениями / Ландау, Гинзбург, Абрикосов и др./ или

уравнениями самосогласованного поля / БРШ, Боголюбов, Горьков и др. /. В упомянутых работах были получены и исследованы локализованные в пространстве решения нелинейных уравнений теории поля, вихри в сверхтекучей жидкости и в сверхпроводнике второго рода, нелинейные поправки к ядерным силам и т.п. Многие результаты и методы этих работ сохранили значение и на сегодня, некоторые из них будут использованы в этом докладе.

Отдельные нелинейные задачи эквивалентны линейным. Напомним несколько примеров. Заметим, что, говоря о нелинейных уравнениях, мы обычно будем подразумевать дифференциальные уравнения / обыкновенные, о.д.у., или уравнения в частных производных, у.ч.п./-. Простейший пример: уравнение Риккати эквивалентно линейному дифференциальному уравнению второго порядка. На этом основано сведение задачи о рассеянии для уравнения Шрёдингера к нелинейному фазовому уравнению первого порядка / Бабиков, Калоджеро /. Вообще, для упрощения решения иногда полезно усложнить уравнения. На этом основаны методы погружения. Так, линейная краевая задача для о.д.у. сводится к нелинейной задаче Коши для о.д.у. Нелинейную краевую задачу для о.д.у. можно свести к нелинейной задаче Коши для у.ч.п. первого порядка и весьма специального вида. Решение таких усложненных задач проще, т.к. задача Коши легче поддается аналитическим и численным методам / см.Каста, Калаба, "Методы погружения в прикладной математике", Мир, М.,1976 /.

Нелинейное уравнение Кортвега и Де Вриза можно свести к линейному уравнению Шрёдингера - последний факт послужил отправной точкой для глубоких и плодотворных исследований по теории вполне интегрируемых систем / Забуски, Крускал, Гарднер, Лэкс, Миура, Фаддеев и др. /. Большое влияние на современное развитие "нелинейных" идей в квантовой теории поля оказывает начавшиеся тоже примерно тридцать лет назад систематические исследования простейших моделей магнетиков, в особенности модели Ленца-Изинга, обычно называемой моделью Изинга. Наиболее интересное развитие этих работ также связано с вполне интегрируемыми классическими и квантовыми системами. Этим направлениям посвящены многочисленные обзоры, новейшее их развитие отражено в докладе Фаддеева^{х)}. В нашем докладе этот круг идей не затрагивается.

Наша основная цель - изложение некоторых специальных "нелиней-

х) См. настоящий сборник, стр. 249.

ных" методов получения и исследования решений нелинейных задач с характерными особенностями, нетипичными для линейных проблем или не встречающимися в них. Сначала мы обсудим основные отличия нелинейных задач от линейных, затем рассмотрим вихревые решения и решения с особенностью на конечном расстоянии, обеспечивающей удержание кварков в простейших моделях, в заключение изучим некоторые уравнения самосогласованного поля в квантовой электродинамике. Мы в основном сосредоточим внимание на аналитических методах, изредка обращаясь к простым численным расчетам. Топологоалгебраические, функционально-аналитические и теоретико-групповые методы, несомненно, понадобятся при рассмотрении более сложных реалистических задач, но в простых проблемах, обсуждаемых ниже, можно обойтись более простыми и привычными средствами, использование которых к тому же больше способствует развитию "нелинейной" интуиции.

§ 2. Некоторые математические результаты и замечания

Нелинейные задачи существенно отличаются от линейных прежде всего огромным разнообразием свойств, не описываемых достаточно общей теорией. Рассмотрим некоторые особенности нелинейных задач, представляющие интерес для теории поля.

1. Решения нелинейных уравнений обычно имеют особенности по константе взаимодействия g или другим параметрам. Это явление наблюдается и в линейных задачах с достаточно сильными особенностями коэффициентов в координатном или импульсном пространстве / уравнение Шрёдингера с сингулярным потенциалом, уравнение Бете - Солпитера в перенормируемых и неперенормируемых теориях поля и т.п. /. Отличие нелинейного случая от линейного - в том, что такая особенность может возникнуть и при голоморфной зависимости уравнения от независимых и зависимых переменных. Как и в случае сингулярных линейных задач, разложения по параметрам могут не существовать или расходиться. При этом характерна неравномерность таких разложений. В одной области они могут сходиться или давать хорошее приближение в асимптотическом смысле, тогда как в другой они могут стать абсолютно неприменимыми / пограничный слой/. Такая ситуация чаще всего возникает, когда малый параметр стоит при старшей производной / сингулярное возмущение /. Пограничный слой встречается как в линейном, так и в нелинейном случае. Однако для линейных краевых задач имеется простая общая теория, в

то время как нелинейные задачи такой общей трактовке не поддаются. Приведём для наглядной иллюстрации этого утверждения два простых примера краевых задач, не имеющих аналогов в линейной теории / см. Вазов, "Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений", Мир, М., 1968 /. Задача

$$\varepsilon \ddot{y} = -y^3 - y, \quad y(0) = a, \quad y(1) = b,$$

при $\varepsilon = 0$ имеет очевидное решение $y_< = a, y_> = b$, однако при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и $a \neq b$ задача не имеет ни одного решения. Решение задачи

$$\varepsilon \ddot{y} = 1 - \dot{y}^2, \quad y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad |b - a| < 1,$$

при $\varepsilon = 0$ есть $y = (a-t)\theta(t_0-t) + (t+b-1)\theta(t-t_0)$, где $t_0 = \frac{1}{2}(a-b+1)$, и к этому пределу стремятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения краевой задачи с $\varepsilon \neq 0$. Таким образом, "пограничный" слой / разрыв производной \dot{y} в точке $t = t_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ / возникает внутри интервала (a, b) .

2. Ещё более существенное отличие нелинейных задач - появление "движущихся" особенностей по координатным или импульсным переменным, т.е. особенностей, положение которых зависит от начальных данных или краевых условий. В решениях линейных уравнений особенности возникают лишь в точках, где коэффициенты уравнения не аналитичны / теорема Коши для о.д.у., теорема Ковалевской для у.ч.п. /. Нелинейные уравнения могут иметь движущиеся особенности, так как теоремы Коши и Ковалевской обеспечивают лишь локальное существование регулярных решений в окрестностях точек, где уравнения при данных начальных условиях регулярны.

Приведём несколько примеров решений с движущимися особенностями / $\dot{y} \equiv dy/dt$ /. 1/ $\dot{y} + y^n/(n-1) = 0, y = (t-c)^{-1/(n-1)}$. 2/ $\dot{y} = y^n, n > 1; y = a(t-c)^{-2/(n-1)}, a = [2(n+1)/(n-1)^2]^{1/(n-1)}$. При $n=2$ общее решение уравнения $\dot{y} = y^2$ можно выразить через эллиптическую функцию Вейерштрасса $y = \wp(\sqrt{b}(t-c_2), 0, c_1)$, мероморфную в комплексной плоскости t . 3/ $\ddot{y} = \exp(y); y = \ln(2c_2^2) + c_1 t - c_2 - 2 \ln(\exp(c_1 t - c_2) - 1)$. Это - общее решение. Движущаяся особенность при $t = c_2/c_1$ называется критической, т.к. вблизи этой особенности решение в комплексной плоскости не однозначно. 4/ $\dot{y} = \dot{y}^2(2y-1)/(y^2+1)$. Общее решение этого довольно простого уравнения $y = \operatorname{tg}(\ln(c_1 t - c_2))$ имеет весьма сложные особенности. 5/ Классическим примером являются уравнения для эллиптических функций Якоби $\dot{y}_1 = y_2 y_3, y_2 = -y_1 y_1, y_3 = -k^2 y_1 y_2$. Эти функции мероморфны, и все их полюсы - простые.

Все приведенные выше примеры относятся к автономным динамическим системам, не зависящим явно от t :

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, \dots, y_n), \quad i=1, \dots, n.$$

Все особенности решений таких уравнений обязательно движущиеся, так как всякому решению $y_i(t)$ соответствует другое решение $y_i(t+c)$ при произвольной постоянной c . Теория двумерных автономных систем разработана исключительно полно / Пуанкаре, Бендиксон и др. / и будет нами систематически использоваться. При $n \geq 3$ такой полной теории нет, однако имеется достаточный для интересных приложений запас точных результатов и эффективных методов. Основы теории таких систем были заложены Ляпуновым и Пуанкаре и существенно развиты в работах Биркгофа, Хопфа, Боголюбова и Крылова, Андронова, Понтрягина, Колмогорова, Петровского и др. В последнее время успешно развивается абстрактная теория динамических систем, называемая иногда дифференциальной динамикой / Арнольд, Аносов, Мозер, Синай, Смейл и др.^{x)}. Приложение полученных в этой теории глубоких результатов в физике сдерживается её оторванностью от аналитических методов и малым знакомством с ней физиков.

В случае неавтономных систем

$$dy_i/dx \equiv y_i' = f_i(y_1, \dots, y_n; x), \quad i=1, \dots, n;$$

особенности, вообще говоря, также движущиеся. Для нелинейных о.д.у. первого и второго порядка Пенлеве выделил и исследовал класс уравнений, не имеющих критических движущихся особенностей. Один из примеров уравнений Пенлеве, не сводящихся к более простым,

$$y'' = ay^3 + by \cdot x + c,$$

где a, b, c — константы. Интегралы этого уравнения — мероморфные трансцендентные функции с подвижными полюсами. Точка $x = \infty$ существенно особая / см. Голубев, "Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений", ГИТТЛ, М., 1941 /. Подчеркнём, что даже очень простые нелинейные уравнения могут иметь подвижные критические особенности / см. примеры, приведенные выше /.

3. Наличие подвижных особенностей существенно осложняет теорию граничных задач. Весьма осложняется и решение задачи Коши, если её рассматривать глобально, а не локально. Для доказательства существования решения задачи Коши требуются довольно ограничительные условия / условие Липшица и т.п. /, при этом длина интервала, на котором удаётся доказать существование решения, оказыва-

^{x)} См., например, В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. "Наука", М., 1978.

ется ограниченной. На языке теории динамических систем это связано с возможностью ухода точки на бесконечность за конечное время. Например, так можно понять появление особенности при конечном значении t в примерах 2,3, если истолковать t как время, а правую часть уравнений как силу / см. подробнее ниже /. Происхождение таких особенностей очень важно понять для лучшего понимания более сложных задач.

Приведём две типичные теоремы существования решений краевых задач для о.д.у. Теорема Гаммерштейна - Чинквини: задача

$$y'' = f(x, y), \quad y(0) = y(a) = 0$$

разрешима, если $f(x, y)$ - непрерывная функция и если существуют числа $c_0 > 0, c_1 > 0$, для которых

$$\int_0^a f(x, y') dy' \geq -c_1 y^2 - c_0, \quad 0 < a < \pi / \sqrt{2c_1}$$

/ границу $\pi / \sqrt{2c_1}$ улучшить нельзя /.

Теорема Мамбриани - Тонелли: решение задачи

$$y'' = \varphi(x, y) \psi(x), \quad y(0) = y_0, \quad y(+\infty) = 0$$

существует и единственно, если выполнены следующие условия: $\varphi(x, y)$ непрерывна при $x \geq 0, y \geq 0$; $\varphi(x, y) > 0$ при $x > 0, y > 0$; $\varphi(x, 0) = 0$ при $x \geq 0$; $\varphi(x, y_1) > \varphi(x, y_2)$, если $y_1 > y_2$; $\varphi(x, c) > \varepsilon_c > 0$ при $x \in [0, +\infty), c > 0$; $\psi(x)$ интегрируема и $\int_0^{\infty} \psi dx = +\infty$. Другие теоремы существования и единственности можно найти в многочисленных руководствах по теории дифференциальных уравнений.

4. Выше мы обсуждали лишь о.д.у. Для у.ч.п. теория разработана значительно хуже. Результатов о глобальном решении задачи Коши для гиперболических систем и краевых задач для эллиптических систем получено сравнительно мало. Известна теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения

$$\ddot{u} - \Delta u + f(u) = 0,$$

обобщенная недавно / напр., Паренти и др. / на системы вида

$$\ddot{u}_i - \Delta u_i + \frac{\partial U}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n; x) = 0, \quad x = \{x_1, \dots, x_N\}.$$

Помимо некоторых стандартных требований функция $U(z; x)$ должна удовлетворять ограничению $U(z; x) \geq -\alpha(x) - \beta(x) \|z\|$ и некоторым ограничениям по модулю сверху, усиливающимся с ростом размерности x -пространства. Например, при $N=3$:

$$\sup \|\nabla_z^2 U(z; x)\| < C (1 + \|z\|^2).$$

Приведём пример трёхмерной задачи:

$$\ddot{u} - \Delta u + m^2 u = -\lambda |u|^2 u, \quad u(x, t=0) = \varphi(x), \quad \dot{u}(x, t=0) = \psi(x).$$

При $\lambda > 0$ существуют глобальные решения задачи Коши, при $\lambda < 0$ решения за конечное время уходят на бесконечность / ор. с механической задачей $\dot{q}(t) = -\lambda q^2(t)$ /. Результат при $\lambda > 0$ очевиден из существования интеграла энергии, все члены которого > 0 .

В эллиптическом случае решение задачи Дирихле для конечной области \mathcal{D}

$$\Delta u = f(u; x), \quad u|_{\partial \mathcal{D}} = \varphi, \quad \mathcal{D} \approx \mathbb{D}^n$$

можно гарантировать лишь при достаточно сильных ограничениях на $f(u; x)$ / ограниченность / или на область / достаточная малость /. Причина этих ограничений та же, что и в случае о.д.у. Подробнее см. руководства по у.ч.п.

Пример сильного ограничения на решения нелинейного уравнения даёт теорема Альфорса: если при $|x| < R$ удовлетворено уравнение $\Delta u \geq \alpha e^{2u}, n=2$, то $R \leq 2/\sqrt{\alpha} e^{u(0)}$, причём эту границу нельзя улучшать. Аналогичные утверждения можно доказать и для уравнений более общего вида.

Понятие ухода на бесконечность за конечное время позволяет доказать следующую теорему. / Келлер - Оссерман /: если $f(u) > 0$ и непрерывна при всех u , монотонно растёт при $u > u_0$ и если

$$\int_0^\infty \left[\int_0^w f(v) dv \right]^{-1/2} dw < \infty, \quad (*)$$

то дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$ не может удовлетворять уравнению $\Delta u = f(u)$ во всём пространстве / это утверждение можно значительно усилить в духе теоремы Альфорса /. Условие (*) существенно. Если $f(u)$ ему не удовлетворяет, то уравнение имеет решения, определённые при всех значениях x . Природа условия (*) ясна из простой модели: рассмотрим уравнение движения материальной точки $\ddot{q} = f(q)$. Его решение удовлетворяет уравнению

$$t - t_0 = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \left[2 \int f(q) dq \right]^{-1/2} dq.$$

Отсюда ясно, что при условии (*) $q(t)$ обращается в ∞ при некотором конечном значении t , зависящем от начального условия. Теорема Келлера - Оссермана была уточнена и обобщена во многих направлениях.

Из этих теорем следует важный вывод: решения обширного класса нелинейных уравнений / ниже мы увидим, что именно такие уравнения наиболее интересны для физических приложений / должны иметь сингулярности — обращаться в ∞ на конечном расстоянии, испытывать сильные или слабые / в производных первого и второго порядков / разрывы. Теория таких решений почти не разработана.

Изучая различные примеры нелинейных гиперболических задач Коши и соответствующих им при $t = \text{const}$ эллиптических краевых задач, можно сделать любопытное наблюдение. Если задача Коши имеет глобальное решение, то часто не существует всюду определённых решений соответствующей эллиптической задачи / т.е. при $t = \text{const}$ /. Простейший пример — теория с взаимодействием $\lambda|u|^4$. Число таких примеров можно увеличить, можно было бы попытаться охватить многие такие случаи теоремой о "дополнительности" сингулярностей во времени и в пространстве для некоторого класса задач. Интересно, что эта дополнительность тесно связана с релятивистской инвариантностью. Таким образом, похоже, что если мы хотим, чтобы решение задачи Коши / зависимость от времени / было глобальным, мы должны быть готовы к появлению сингулярностей в решениях стационарной задачи / зависимость от координат /

§ 3. Вихревые решения

Рассмотрим сначала Ψ -теорию сверхтекучей жидкости вблизи λ -точки / см., напр., Гинзбург, Собянин, УФН, 120, 153, 1976 /. Аналогичные уравнения были получены Питаевским для сверхтекучего бозе-газа на основе теории Боголюбова. Уравнения для параметра порядка Ψ можно получить из вариационного принципа для энергии / термодинамического потенциала /

$$E = \int_D d^2z \left[|\nabla \Psi|^2 + \frac{1}{2} f(|\Psi|^2) \right] + \frac{1}{\lambda} \oint_{B=\partial D} |\Psi|^2 d^2s, \quad /3.1/$$

где в простейшем случае $f(z) = \frac{\mu}{2} z^2 - z + c$. Более точная теория, соответствующая современным представлениям о критических показателях, получается при $f(z) = \mu \frac{z^2}{3} + (1-\mu) \frac{z^2}{2} + c$. Заметим, что мы выбрали единицы, в которых равновесное значение параметра порядка равно $\Psi_c = 1$. Из вариационного принципа $\delta E = 0$ следует, что

$$\Delta \Psi = \frac{df}{dz}(|\Psi|^2) \cdot \Psi \quad (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi + \frac{1}{\lambda} \Psi)_B = 0. \quad /3.2/$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ получается "естественное" граничное условие

$(\nabla\psi \cdot \vec{n})_0 = 0$, где \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности. Выбирая в /3.1/ другие выражения для поверхностного члена, можно получить другие граничные условия.

Обычно решались следующие задачи. Либо определялось решение во всём пространстве с естественным граничным условием на ∞ . Либо ставилось условие $\psi|_0 = 0$ на границе некоторого заданного объёма / скажем, стенки сосуда /. Более общие граничные условия систематически не изучались, хотя они представляют значительный интерес не только в проблемах сверхтекучести, но и в других задачах, связанных с фазовыми переходами. В частности, исследование таких более общих краевых задач может дать ответ на вопрос о существовании решений типа "доменов" в магнетиках или "мешков" в теории поля. Отвлекаясь от специфики магнитных доменов, мы будем называть доменами решения, заданные в некоторой конечной части пространства, с некоторыми граничными условиями на поверхности. При этом на поверхности домена может испытывать разрыв сам параметр порядка / поле / или его производные. Такой домен должен соответствовать локальному минимуму $E(\psi)$ относительно вариаций его формы: $\delta E / \delta \psi = 0$, $\delta^2 E / \delta \psi^2 > 0$.

Задача определения подобных минимумов исключительно сложна, возможно, что для её решения потребуются принципиально новые подходы. Даже в простейших случаях - одномерная система, задачи с цилиндрической или сферической симметрией - нелинейность уравнений приводит к серьёзным трудностям. Во-первых, далеко не всякая краевая задача имеет решение, и весьма непросто установить, существует ли решение некоторой данной краевой задачи. Во-вторых, даже если краевая задача решена, отыскание минимума относительно вариаций формы оказывается непростым делом. В этом докладе мы приведём некоторые методы решения краевых задач для конечной области, позволяющие в принципе вычислить функционал энергии $E(\psi)$. Однако задача определения локальных минимумов $E(\psi)$ здесь по существу не обсуждается. Известное решение такого типа - массачузетский "мешок", который, однако, стабилизируется посредством введения дополнительной объёмной энергии, не содержащейся в исходных уравнениях для полей. В будущем "мешке", обсуждавшемся на прошлой конференции, стабилизация достигается за счёт упругости его поверхности, что приводит к необходимости введения новых, не полевых переменных в лагранжиан / "мембрана" /.

Близкие задачи изучались в теории станфордского "мешка" и в теории топологических "солитонов". В последнем случае стабилизация солитона связана с сохранением некоторого топологического заряда.

Вернёмся к теории сверхтекучести и рассмотрим отдельный цилиндрически-симметричный вихрь. Он может составлять ячейку решетки вихрей, простирается до стенок или не иметь свободную поверхность / в последнем случае вопрос о его стабильности не изучен /. Полагая $\Psi(\tilde{r}) = F(\tau) e^{i\theta}$, получим следующую краевую задачу :

$$F'' + \tau^{-2} F' - \tau^{-2} F + F - F^3 = 0, \quad /3.3/$$

$$F'(R) + \lambda^{-2} F(R) = 0, \quad F(\tau) \sim \tau \quad \tau \rightarrow 0 \quad /3.4/$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ воспроизводится естественное граничное условие $F'(R) = 0$, пригодное для описания решетки вихрей в приближении Вигнера - Зейтца, а при $\lambda \rightarrow 0$ получаем граничное условие $F(R) = 0$, используемое на границе с твёрдой стенкой.

При $R \gg 1$ можно получить хорошее приближённое решение задачи /3.3/, /3.4/, используя разложение в ряд по степеням малого параметра $\epsilon \equiv R^{-2} \ll 1$. Чтобы это разложение было равномерно пригодным при $0 \leq \tau \leq R$, необходимо использовать достаточно тонкие методы.

Заменой $\ln(\tau/R) \equiv t$ преобразуем /3.3/ к виду

$$\epsilon^2 (\ddot{F} - F) + e^{2t} (F - F^3) = 0. \quad /3.5/$$

При $\epsilon = 0$ получаем равновесное решение $F \equiv 1$, которое, однако, не удовлетворяет граничным условиям. Найдём сначала пограничный слой при $\tau \sim R$. Для его описания введём вторую переменную, $\tau \equiv t/\epsilon$ / метод двух масштабов /, и будем искать F в виде

$$F = f(t, \epsilon^2) + g(\tau, \epsilon), \quad /3.6/$$

считая t и τ независимыми переменными. Полагая

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \epsilon^{2n}, \quad f_0 = 1; \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \epsilon^n, \quad /3.7/$$

находим для f_n алгебраические соотношения

$$f_n - (f^3)_n = e^{-2t} [f_{n-1} - f_{n-1}], \quad (f^3)_n = \sum_{m_1+m_2+m_3=n} f_{m_1} f_{m_2} f_{m_3}. \quad /3.8/$$

В прежних переменных находим асимптотическое разложение

$$f(\tau) = \left(1 - \frac{1}{2\tau^2} - \frac{9}{8\tau^4} - \frac{161}{16\tau^6} - \frac{12209}{64\tau^8} - \dots \right), \quad \tau \gg 1. \quad /3.9/$$

Уравнение для g .

$$\frac{d^2 g_0}{d\tau^2} = 2g_0 + 3g_0^2 + g_0^3 \quad /3.10/$$

легко решается; убывающее вдали от $\tau = R$ решение есть

$$g_0 = 2 \left\{ 1 - (R/\tau)^{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{2}{g_0(R)} \right) \right\}^{-2}. \quad /3.11/$$

Уравнения для g_n при $n \geq 1$ линейны, например:

$$\frac{d^2 g_1}{d\tau^2} = g_1(\tau) [2 + 6g_0 + 3g_0^2] + 2\tau \frac{d^2 g_0}{d\tau^2}.$$

Решение /3.6/ в нулевом приближении может удовлетворять граничным условиям. При конечном λ достаточно взять $g_0(R) = \sqrt{2}/\lambda$. Чтобы получить $F(R) = 0$, достаточно положить $g_0(R) = 0$, а условие $F(R) = 0$ выполнено, если $g_0(R) = -1$.

Найденное решение, однако, непригодно при малых τ . В этом случае его удобно искать в виде степенного ряда

$$F(\tau) = \tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^{2n} = a_0 \tau \left(1 - \frac{\tau^2}{8} + \dots \right), \quad /3.12/$$

где a_0 - неизвестный параметр и

$$a_n = \frac{1}{4n(n+1)} \left\{ (a^3)_{n-2} - a_{n-1} \right\}, \quad n \geq 2.$$

Радиус сходимости этого степенного ряда конечен. Простое сшивание решений /3.12/ и /3.9/ невозможно, так как у этих решений нет общей области применимости. Можно было бы попытаться преобразовать оба ряда каким-либо методом, расширяющим область сходимости, например, с помощью приближений Падэ. Это проще всего сделать, используя Q-D алгоритм, дающий последовательные приближения Падэ $[N-1, N]$, $[N, N]$, представленные в виде удобных для вычислений непрерывных дробей / см. Рутисхаузер, "Алгоритм частных и разностей", ИЛ, М., 1960 /.

Мы поступим несколько иначе, воспользуемся методом, который может оказаться полезным и в других задачах. Найдём специальную функцию, которая при $\tau \rightarrow 0$ разлагается в степенной ряд типа /3.12/, а при $\tau \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое разложение типа /3.9/. Удобно для этой цели брать обобщённые гипергеометрические функции. В нашем случае легко воспроизвести по два члена в каждом из рядов с помощью вырожденной гипергеометрической функции

$$F_{int} = \tau \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \Phi \left(3/2; 2; \tau^2/2 \right). \quad /3.13/$$

Точность полученного приближения можно оценить с помощью правила сумм

$$2a_0(R) = R^{-1}F(R) + F'(R) + \int_0^R dz F(z)[1 - F^2(z)],$$

вытекающего из дифференциального уравнения. Улучшить приближение можно, домножив $F_{int}(z)$ на $P_N(z^2)/Q_N(z^2)$, где P_N и Q_N - полиномы, неизвестные коэффициенты которых определяются по коэффициентам разложений /3.9/ и /3.12/. Например, для воспроизведения третьих членов в разложениях /3.9/ и /3.12/ достаточно взять $P_3/Q_3 = (\beta/\alpha)(4 + \alpha z^2)(4 + \beta z^2)^{-1}$, где $\beta^{-1} - \alpha^{-1} = 3/16$, $48(\alpha - \beta) + 2 = \pi \beta^2/\alpha^2$. Точность определения $a_0 \leq 4\%$.

При малых значениях R можно построить более простую теорию возмущений, записав /3.5/ в виде

$$\ddot{F} - F = R^2(F^2 - F)e^{2t}. \quad /3.5'/$$

Чтобы в нулевом приближении удовлетворить граничным условиям при $z = R$, перепишем это уравнение немного иначе:

$$\ddot{F} - F + R^2 e^{2t} (1 - f_0^2) F = R^2 e^{2t} (F^2 - f_0^2) F, \quad /3.6''/$$

где f_0 - пока произвольное число. Если пренебречь правой частью, то получим решение $F^{(0)} = C_0 J_1(\kappa z)$, где параметр $\kappa = \sqrt{1 - f_0^2}$ определяется из граничного условия при $z = R$. Очевидно, что F удовлетворяет уравнению

$$F(z) = C_0 J_1(\kappa z) - \frac{2}{\pi} J_1(\kappa z) \int_0^z \rho d\rho N_1(\kappa \rho) [F^2(\rho) - f_0^2] F(\rho) + \frac{2}{\pi} N_1(\kappa z) \int_0^z \rho d\rho J_1(\kappa \rho) [F^2(\rho) - f_0^2] F(\rho). \quad /3.14/$$

Это уравнение можно решать итерациями, подставляя под интегралом вместо $F(\rho)$ нулевое приближение $F^{(0)}(\rho)$. Граничное условие при $z = R$ выполнено, если

$$C_0^2 \int_0^R \rho d\rho J_1^4(\kappa \rho) = f_0^2 \int_0^R \rho d\rho J_1^2(\kappa \rho).$$

Разумеется, аналогично можно построить и следующие приближения. Однако уже построенное приближение достаточно точно, так что, пользуясь при больших R выражением /3.6/ а при малых - только что описанной теорией возмущений, можно получить хорошее аналитическое приближение для описания структуры вихря при всех значениях R .

Заметим, что для вихря во вращающемся сосуде R обычно фиксируется условием квантования циркуляции / подобным условием

квантования магнитного потока в сверхпроводнике / . Мы сознательно не учитывали это условие, стремись показать, что методы применяемые для построения решений более общей природы.

Например, вихревую решётку Абрикосова в сверхпроводнике второго рода можно описать уравнениями / F - параметр порядка, магнитное поле равно $H = dp/dz$, z - параметр Гинзбурга - Ландау /

$$F'' + z^{-1}F' + (1 - z^{-2}p^2(z))F - F^3 = 0, \\ p'' - z^{-1}p' = \frac{1}{2z^2}F^2p \quad /3.15/$$

с крайними условиями $F(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^2$, $F'(R) = 0$, $p(0) = -1$, $p(R) = 0$. Условие квантования магнитного потока позволяет выразить R через среднее значение $\langle H \rangle \equiv B$, так что $R = (2H_c2/B)^{1/2}$. Описанные методы с надлежащими изменениями были применены к этой задаче в работе Гальперн и автора / препринт ОИЯИ, P2-10938, Дубна, 1977 /, в которой можно найти подробные вычисления.

Уравнения /3.14/ при некоторой модификации обозначений описывают вихревое решение Нильсена - Олесена, причём роль параметра порядка играет поле Хиггса. Такие же уравнения описывают вихри в теории взаимодействия хиггсовых и неабелевых калибровочных полей.

Аналогичным уравнениям подчиняются сферически симметричные монополи Полякова - 'т Хоффта:

$$z^2 K'' = H^2 K + K(K^2 - 1), \\ z^2 H'' = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - e^2 z^2). \quad /3.16/$$

Наиболее просты уравнения для монополя Богомольного - Прасада - Сомерфилда:

$$z K' = -HK, \quad z H' = H - (K^2 - 1). \quad /3.17/$$

Несколько более сложными уравнениями описываются дионные решения. В работе Лезнова и Савельева^{х)} на этой конференции были приведены уравнения для обобщённых монополей в теории Янга - Миллса, соответствующей компактной простой группе G Картановского списка:

$$z^2 K_i'' = K_i \left(\frac{1}{2} \sum_j \delta_j k_{ij} K_j^2 + H_i^2 - 1 \right), \\ z^2 H_i'' = \sum_j \delta_j k_{ij} K_j^2 H_j, \quad /3.18/$$

где $\delta_i = 2 \sum_j k_{ij}^{-1}$, k_{ij} - матрица Картана для G . Заменой $\ell_n(\alpha_n/\alpha) \equiv t$ системы /3.17/, /3.18/ и /3.16/ при $\lambda = 0$ сводятся к автономным. Для решения всех перечисленных уравнений

^{х)}Препринт ИФВЭ 78-177, Серпухов, 1979.

можно применять элементарные интегральные методы. Однако все эти уравнения имеют также решения с сильной особенностью / образом в ∞ / при некотором конечном значении z . Изучим теперь такие решения.

§4. Решения с особенностью на конечном расстоянии

Рассмотрим свободное статическое поле Янга - Миллса в калибровке $A_0 = 0$. Семейство решений / где $z^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ /

$A_i = \varepsilon_{ijk} I_j x_k z^{-1} \chi(z)$, $[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k$, /4.1/
можно получить, решая уравнение χ)

$$z^2 \xi'' + \xi - \xi^3 = 0, \quad \xi \equiv 1 + ez \chi(z). \quad /4.2/$$

Очевидные частные решения получаются при $\xi = 0, \pm 1$. Лишь решение $\chi = -\frac{1}{ez}$ ($\xi = 0$) метривально, т.е. соответствует ненулевому полю F_{ij} . Мы покажем, что все остальные решения, кроме двух исключительных, имеют особенности при $z = z_0$, где z_0 можно взять произвольным. Вблизи особенности

$$\xi(z) \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} \pm \sqrt{2} z_0 (z - z_0)^{-1} + O(1). \quad /4.3/$$

Положим $t = \vartheta_1(z_0/z)$, переходя к автономной системе

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = \xi^3 - \xi - \eta. \quad /4.4/$$

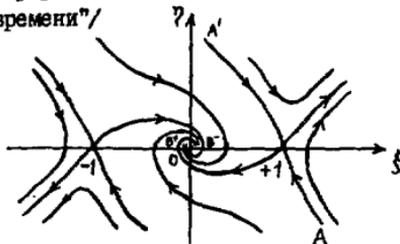
Первый интеграл этой системы равен

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{2} \xi^4 + 2 \int_{\xi_0}^{\xi} \eta(\xi') d\xi' = C, \quad /4.5/$$

откуда нетрудно получить фазовый портрет системы. Ещё проще воспользоваться тем, что она описывает движение некоей фиктивной точки $\xi(t)$ в поле с потенциалом $\frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{4} \xi^4$ и с затуханием $\sim \dot{\xi}$:

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi} = -\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{4} \xi^4 \right). \quad /4.6/$$

Нарисуем фазовый портрет / стрелки направлены в сторону движения при возрастании "времени"/



x) G.Rosen.Journ.Math.Phys., 13, 595, 1972.

Видно, что лишь решения, соответствующие траекториям $\xi=0, \pm 1, \eta=0$ и двум траекториям, выходящим из ± 1 и идущим в 0, останутся конечными при любых t . Остальные за конечное "время" уходят на бесконечность. Покажем, например, как найти решение, соответствующее траектории $(A, +1)$. Легко показать, что

$$\eta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \xi^2 + \frac{1}{3} \xi - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad /4.7/$$

$$\eta = -2(\xi-1) - \frac{3}{5}(\xi-1)^2 + \dots, \quad \xi \rightarrow 1. \quad /4.8/$$

Возьмём в качестве нулевого приближения

$$\eta_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \xi^2 + a\xi + b, \quad /4.9/$$

где a и b определим из требования, чтобы при $\xi \rightarrow 1$ воспроизводился первый член асимптотики /4.8/

$$a = -2 + \sqrt{2}, \quad b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}. \quad /4.10/$$

Подставляя /4.9/ в /4.5/, где $\xi_0=1, c=1/2$ / см. граничные условия /, получим первое приближение, которое после некоторых вычислений приводит к следующему выражению для ξ :

$$\xi(\tau) = 1 + \frac{16\beta/\tau^2}{(\beta/\tau^2 - \alpha)^2 - 8}, \quad \alpha = 2 + \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \beta = 2 + 7\frac{\sqrt{2}}{3}. \quad /4.11/$$

Заметим, что первое приближение η_1 отличается от нулевого, η_0 , меньше чем на 3%. Аналогично находим, что $|(\eta_2 - \eta_1)/\eta_2| \leq 0,33\%$, т.е. итерации очень быстро сходятся.

Другой способ получения приближенного решения состоит в том, что строится разложение при $\tau \rightarrow 0$:

$$\xi = 1 + \left(\frac{\tau}{R}\right)^2 + \frac{3}{10} \left(\frac{\tau}{R}\right)^4 + \frac{1}{10} \left(\frac{\tau}{R}\right)^6 + \dots, \quad /4.12/$$

которое легко преобразовать в сходящуюся непрерывную дробь с помощью Q-D алгоритма.

Для построения решений, идущих в 0, требуются чуть более сложные расчёты. При достаточно малых значениях ξ уравнения для траекторий легко определяются линеаризацией

$$(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2)^{\eta^2} = \bar{c} \exp\left\{\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Чтобы построить аккуратное приближение для траекторий $(-1, 0), (+1, 0)$, достаточно найти численно или с помощью полиномиального приближения их куски $(-1, B^-), (+1, B^+)$.

Нетрудно убедиться, что все найденные решения имеют бесконечную энергию / напомним, что плотность энергии $\sim [2(\xi')^2 + \tau^{-2}(\eta')^2]$ /.

Сверх этого, мы доказали, что все нетривиальные решения, кроме трёх $(a, (+1, 0), (-1, 0))$, обращаются в ∞ при некотором конечном значении τ ($\neq 0, \infty$). Три исключительных решения определены явным образом, кроме $\tau=0$. Все три решения $\chi(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ ведут себя, как $-1/\epsilon\tau$; при $\tau \rightarrow \infty$ второе решение удовлетворяет условию $\chi(\tau) \rightarrow 0$, а третье $\approx -2/\epsilon\tau$. Наконец, существует набор решений, определённых и отличных от нуля при $0 \leq \tau \leq R / \chi=0$ при $\tau > R$ и имеющих конечную энергию. Эти решения разрывны при $\tau=R$. Имеются также разрывные решения с конечной энергией, отличные от нуля при $0 < R_1 < \tau < R_2$. Представляет интерес задача о поиске локальных минимумов $E(R)$ на решениях подобного типа при различных граничных условиях.

С помощью потенциалов, обращаясь в ∞ на конечном расстоянии, можно устроить запертые кварки. Рассмотрим простую модель, изученную в другой связи Фридбергом, Ли и Сирлими^{x)}.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \dot{\psi}_\mu \dot{\psi}_\mu - \frac{1}{2} (\chi, \mu)^2 - \frac{1}{2} \chi^2 \dot{\psi} \dot{\psi} - \frac{g^2}{8} (\chi^2 - \chi_{vac}^2)^2. \quad /4.13/$$

Положим $\mu = g \chi_{vac}$, $m = f \chi_{vac}$, $\kappa = m/\mu$, $\nu = \omega/\mu$, $\vec{\rho} = \mu \vec{r}$,

$$\chi = \frac{\mu}{g} A(\vec{\rho}), \quad \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{g} B(\vec{\rho}) e^{-i\omega t}. \quad /4.14/$$

Сферически-симметричные решения удовлетворяют уравнениям

$$A'' + 2\rho^{-1} A' - \frac{1}{2} (A^2 - 1) A = \kappa^2 B^2 A, \quad /4.15/$$

$$B'' + 2\rho^{-1} B' - \kappa^2 A^2 B + \nu^2 B = 0. \quad /4.16/$$

Пренебрегая в первом приближении членом $\kappa^2 B^2 A$ в /4.15/, найдём A в виде

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{2n}, \quad a_n = \frac{1}{4n(2n+1)} \{ (a^3)_{n-1} - a_{n-1} \}, \quad /4.17/$$

где $(a^3)_n$ - коэффициенты степенного ряда $A^3(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} (a^3)_n \rho^{2n}$ и a_0 - произвольное число. С помощью Q-D алгоритма можно получить очень хорошее приближение, используя лишь небольшое число членов ряда /4.17/: скажем, 5 членов. Положение особой точки зависит от a_0 , при больших значениях a_0 радиус сходимости ряда можно определить с помощью приближённой формулы

$$\rho_0^2 \approx \frac{a_2}{a_3} = 84 (3a_0^2 - 1) (19a_0^4 - 16a_0^2 + 1). \quad /4.18/$$

^{x)} R. Friedberg et al. Phys. Rev, D13, 2739, 1976.

Уравнение /4.16/ имеет вид уравнения Шрёдингера в поле сингулярного потенциала, не выпускающего поле B за пределы области радиуса ρ_0 , при этом $B(\rho_0)=0$ и $B=0$ при $\rho > \rho_0$. Заметим, что полная энергия, соответствующая таким решениям, бесконечна, но её часть, зависящая от B , конечна. Можно надеяться, что подобный механизм существует и для поля Янга - Миллса. Важная нерешённая задача - учёт квантовых эффектов рождения и, возможно, конденсации пар ψ частиц вблизи сингулярности потенциала. Эта задача реально интересна, если заменить ψ на спинорное поле, а χ - на поле Янга - Миллса.

Заключая это краткое обсуждение необычных решений нелинейных уравнений, напоминающих решение Шварцшильда в ОТО /кстати, сингулярность Шварцшильда имеет ту же природу, что и обсуждавшиеся выше /, можно сказать, что, помимо тех возможностей удержания кварков в адронах, которые рассмотрены в докладах Дрефьевой^{X)} и Славнова^{XX)}, существуют по крайней мере две другие. Первая основана на возникновении сингулярности на конечном расстоянии / обращение "потенциала" в ∞ /. При квантовом подходе такая сингулярность должна приводить к полной перестройке вакуума, конденсации зарядов на сингулярной поверхности и т. п. / ср. с эффектами, изученными в книге А.Б.Мигдала: "Фермионы и бозоны в сильных полях". ГФМЛ, М., 1978 /. В результате квантовая теория поля, образующего сингулярность, может принципиально отличаться от классической. В пользу того, что потенциал, удерживающий кварки, может быть в классическом приближении сингулярным на конечном расстоянии, можно добавить следующее замечание. Такой потенциал был нами ранее предложен на основании совсем других соображений. В дуальных резонансных моделях спектр масс адронов $\epsilon(m)$ экспоненциально растёт, $\epsilon(m) \sim e^{ma}$, а это значит, что обменный потенциал $V(r)$ имеет сингулярность при $r=a$, т.к. $V \sim \int e^{-mr} \epsilon(m) \frac{1}{r-a} (r-a)^{-1}$. Это в точности совпадает с сингулярностью, создаваемой полем Янга - Миллса /или полем Хиггса/. Эмпирический спектр масс, действительно, экспоненциально возрастает, причём эмпирический параметр $a \sim 3 \div 4 \text{ ГэВ}^{-1}$ хорошо согласуется с величиной, требуемой для описания наблюдаемых эффектов /низко лежащие состояния, наклон траекторий Редже и т.п. /.

Другая возможность состоит в том, что поле "стремится" избежать сингулярности и "прячется" от неё в "мешок" / "домен" /. На

X) См. настоящий сборник, стр. 200.

XX) Там же, стр. 183.

классическом или полуклассическом языке эти две возможности резко отличны друг от друга. Не исключено, что на квантовом уровне, благодаря перестройке вакуума, они отличаются не столь сильно.

§5. Пропагатор электрона в "конечной" квантовой электродинамике

В приближении самосогласованного поля и в предположении о равенстве нулю затравочной массы электрона массовый оператор электрона $\alpha(x)$ подчиняется уравнению $\not{x} \equiv P_{евкл}^2, g \equiv \frac{3}{4\pi} \frac{e^2}{4\pi}$ /

$$(\not{x}\alpha)'' + g\alpha(\alpha^2 + x)^{-1} = 0. \quad /5.1/$$

Это уравнение впервые получено Байкером, Джонсоном и Виллеем, которые, однако, подвергли его линеаризации и регуляризации. В безразмерных переменных граничное условие имеет вид

$$\alpha(0) = 1. \quad /5.2/$$

Это условие на самом деле вводит в теорию размерный параметр / "трансмутация" размерности l и определяет единственное решение в евклидовой области

$$\alpha(x) = 1 - \frac{g^2}{2}x + \frac{g^2(2-g^2)}{12}x^2 - \frac{g^2(3-5g^2+g^4)}{36}x^3 + \dots \quad /5.3/$$

Преобразование этого степенного ряда в цепную дробь / опять Q-2 алгоритм! / показывает, что радиус сходимости конечен, но особенность лежит не на положительной оси x . Характер этой особенности оказывается весьма сложным. Для выяснения его положим

$$x \equiv -y, \alpha \equiv y^{1/2} \varphi(y), t \equiv \ln(y/y_0). \quad \text{Тогда} \quad /5.4/$$

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} + \frac{3}{4}\beta = \frac{g\beta}{g^2-1},$$

$$\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} y_0^{-1/2} e^{-t/2}.$$

Это уравнение сводится к автономной системе. Мы воспользуемся её первым интегралом и для получения оценки положения особой точки в комплексной плоскости x рассмотрим приближение $g < 1$. Нетрудно показать, что при $g \rightarrow 0$

$$\alpha(y) \approx 1 + g[1 + y^{-1}(1-y)\ln(1-y)] + \dots \quad /5.5/$$

Отсюда $\alpha(1) = 1 + g + \dots$; $\alpha'(1) \sim -g \ln g / l$. Эти условия можно использовать как начальные для определения решения в комплексной плоскости y или t . Удобнее, однако, учесть начальное условие в точке \bar{y} , в которой $\dot{\varphi}(\bar{y}) = 0$. Легче всего найти эту точку из уравнения первого порядка

$$\dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} = -2\dot{\beta} - \frac{3}{4}\beta + \frac{g\beta}{\beta^2-1} \quad /5.6/$$

к его первого интеграла

$$\dot{\beta}^2 + \frac{3}{4}\beta^2 - g \ln(\beta^2-1) + 4 \int_{\beta_0}^{\beta} \dot{\beta}(\beta') d\beta' = C \quad /5.7/$$

Отсюда, кстати, видно, что особенностей на вещественной оси t быть не может - достаточно рассмотреть предел $\beta^2 \rightarrow 1$. Так как при малом g функция β близка к 1, то удобно положить $\beta = 1 + v$. В интересующей нас области v удовлетворяет приближенному уравнению

$$\dot{v} \cong - \left[g \ln \frac{v}{v_0} + \frac{1}{2}(v-v_0) + v_1^2 \right], \quad /5.8/$$

где $v_0 \cong g$, $v_1 \cong -1/2$. Отсюда

$$t \cong v_0 \int_{v/v_0}^1 d\xi \left\{ g \ln \xi + \frac{v_0}{2}(\xi-1) + v_1^2 \right\}^{-1/2} \quad /5.9/$$

При уменьшении v/v_0 мы упрямся в точку ветвления. Чтобы, при дальнейшем уменьшении, v оставалось вещественным, необходимо брать в дальнейшем чисто мнимые значения t . Это происходит при $\dot{v}(\bar{t}) = 0$, т.е. при $\dot{\beta}(\bar{t}) = 0$. Заметим, что используя уравнения /5.6/, /5.7/, можно найти \bar{t} и $\bar{\beta} = \beta(\bar{t})$ и при не малых значениях g с помощью любого численного метода. Особая точка определяется теперь условием $v=0$, откуда можно найти, что особенность расположена при

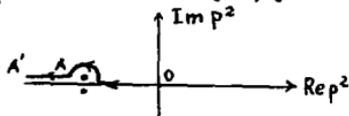
$$y \cong \bar{y} \left(1 \mp i \bar{v} \sqrt{\frac{\pi}{g}} \right). \quad /5.10/$$

При малом g имеем простое приближение

$$\bar{v} \cong v_0 e^{-v_1^2/g} \sim g e^{-\frac{1}{4g}}, \quad /5.11/$$

т.е. при $g \rightarrow 0$ мнимая часть особенности /5.10/ экспоненциально убывает. Хотя, вообще говоря, особенности пропагатора в комплексной плоскости не позволяют придать теории физический смысл, при $g \ll 1$ такие комплексные особенности практически невозможно отличить от вещественных. Отметим также, что если обойти точку

ветвления в p^2 -плоскости по пути, указанному на рисунке,



то на линии AA' мнимая часть $\alpha(x)$ окажется положительной.

Аналогичное уравнение можно получить для пропагатора кварков, взаимодействующих с классическим полем, образующим сингулярность на конечном расстоянии. Их отличие в том, что сингулярность в потенциале вводит размерный параметр в уравнение для массового оператора. В связи с этим характер решений оказывается существенно иным. В частности, можно показать, что особенность в конечной части p^2 плоскости не появляется, но зато $p^2 = \infty$ - существенно особая точка.

§6. Заключение

Выше мы показали, какие неожиданные явления могут проявиться в нелинейных проблемах. Наиболее интересно появление особенностей в конечной области пространства, которые интересны сами по себе и, по-видимому, могут объяснить образование таких объектов, как "мешки" с кварками. Мы показали также, что нелинейность может привести к появлению и нежелательных особенностей, типа рассмотренных в §5.

На этих примерах можно проследить, какой стратегии стоит придерживаться и какие приемы использовать при решении нелинейных задач. Хотя таких общих и эффективных методов, как в линейной теории, мы здесь не имеем, все же "Прием, примененный хотя бы дважды, становится методом, а двукратное применение одного и того же метода - это уже теория" /Поля/. Все изложенные приемы мы применили не менее двух раз в довольно разных задачах, представляющих интерес для физических приложений.

В частности, полезно сводить задачу к решению автономной системы дифференциальных уравнений, использовать разложения в степенные ряды и асимптотические разложения по параметрам, выделяя пограничный слой. Эффективна интерполяция по краевым

условиям - не только с помощью полиномов, но и специальными функциями /последний прием, по-видимому, нов, хотя имеет определенное сходство с развитым нами ранее методом дифференциальной интерполяции/. При построении сингулярных решений исключительно эффективно преобразование степенного ряда в цепную дробь с помощью Q-D алгоритма. Все эти приемы, или, если угодно, "методы", полезны и при решении более сложных задач. Они дают приближения, качественно правильно воспроизводящие особенности точного решения, и могут служить хорошими первыми приближениями при численных расчетах.

ЛИНЕЙНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Н.А. Черников, Н.С. Мавохина

Объединённый институт ядерных исследований, Дубна

Линейным потенциалом взаимодействия двух частиц называем потенциал, пропорциональный расстоянию между частицами. В связи с проблемой удержания кварков возникает вопрос о поведении такого потенциала при высоких энергиях. Точнее говоря, идет речь о релятивизации уравнений Ньютона

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{x}_1}{dt^2} = G \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}, m_2 \frac{d^2 \mathbf{x}_2}{dt^2} = G \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}, \quad (I)$$

где $G = const$, причем нас будет интересовать случай $G > 0$, когда частицы притягиваются.

В работе^{/1/} уравнения (I) представлены в виде частного случая (нерелятивистского варианта) краевой задачи для минимальной поверхности. Немедленно находятся релятивистский вариант этой же задачи, и тем самым решается вопрос о релятивизации уравнений (I), т.е. уравнений механики двух материальных точек с потенциалом взаимодействия

$$U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|. \quad (2)$$

I. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Приведем нерелятивистские и релятивистские уравнения движения в форме, удобной для сравнения. В обоих вариантах минимальную поверхность задаем в виде

$$x = x(\eta, t), \quad \xi_1(t) \leq \eta \leq \xi_2(t). \quad (3)$$

Для края, $\eta = \xi_1(t)$ и $\eta = \xi_2(t)$, этой поверхности является мировыми траекториями $X = X_1(t)$ и $X = X_2(t)$ первой и второй частиц. Показано, что

$$X_1(t) = X(\xi_1(t), t), \quad X_2(t) = X(\xi_2(t), t). \quad (4)$$

В нерелятивистском варианте

$$x(\eta, t) = X(t) + n(t)\eta, \quad n^2(t) = 1. \quad (5)$$

Краевые условия имеют вид

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = G n(t), \quad \frac{d}{dt} P_2(t) = -G n(t), \quad (6)$$

где импульсы P_1 и P_2 частиц вычисляются через их массы и скорости по формулам

$$P = P^0 \frac{dx}{dt}, \quad P^0 = m. \quad (7)$$

нерелятивистской механики материальной точки.

Уравнения (5)-(7) эквивалентны уравнения Ньютона (I). Это следует из того, что

$$x_2(t) - x_1(t) = [\xi_2(t) - \xi_1(t)] n(t). \quad (8)$$

В релятивистском варианте

$$x(\eta, t) = \frac{c}{2} \left[A\left(t + \frac{\eta}{c}\right) + B\left(t - \frac{\eta}{c}\right) \right], \quad (9)$$

причем

$$a'(t) = 1, \quad b'(t) = 1, \quad a(t) = \frac{d}{dt} A(t), \quad b(t) = \frac{d}{dt} B(t), \quad (10)$$

Крайние условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_1(t) &= \frac{G}{2} \left\{ a(u_1(t)) \frac{d}{dt} u_1(t) - b(v_1(t)) \frac{d}{dt} v_1(t) \right\}, \\ \frac{d}{dt} P_2(t) &= \frac{G}{2} \left\{ b(v_2(t)) \frac{d}{dt} v_2(t) - a(u_2(t)) \frac{d}{dt} u_2(t) \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_1(t) &= t + \frac{\xi_1(t)}{c}, & v_1(t) &= t - \frac{\xi_1(t)}{c}, \\ u_2(t) &= t + \frac{\xi_2(t)}{c}, & v_2(t) &= t - \frac{\xi_2(t)}{c}, \quad (12) \end{aligned}$$

а импульсы P_1 и P_2 частиц вычисляются через их массы и скорости по формулам

$$P = \rho^0 \frac{dx}{dt}, \quad \rho^0 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}} \quad (13)$$

релятивистской механики материальной точки.

Уравнения (9)–(13) заменяют уравнения Ньютона (I) при высоких энергиях.

2. СКОРОСТИ ЧАСТИЦ

Дифференцируя (4), ввиду (9) получаем следующие выражения для скоростей частиц:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= \frac{c}{2} \left\{ a(u_1(t)) \frac{d}{dt} u_1(t) + b(v_1(t)) \frac{d}{dt} v_1(t) \right\}, \\ \frac{d}{dt} x_2(t) &= \frac{c}{2} \left\{ a(u_2(t)) \frac{d}{dt} u_2(t) + b(v_2(t)) \frac{d}{dt} v_2(t) \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

В силу (10) имеем

$$1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \frac{1 - a(u_i) b(v_i)}{2} \dot{u}_i \dot{v}_i,$$

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 = \frac{1 + \alpha(u_1)\beta(v_1)}{2} \left[c^2 - \left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 \right] \quad (15)$$

и также из формулы с заменой номера 1 на 2. В соответствии с этими формулами полагаем

$$\xi_1^2 \leq \dot{x}_1^2 \leq c^2, \quad \xi_2^2 \leq \dot{x}_2^2 \leq c^2. \quad (16)$$

3. Энергетический смысл переменных ξ_1 и ξ_2

Из (13) следует формула

$$\frac{dx}{dt} \frac{dP}{dt} = c^2 \frac{dP^0}{dt}. \quad (17)$$

Перемножая (14) и (11), в силу (10) находим

$$\frac{dx_1}{dt} \frac{dP_1}{dt} = G \frac{c}{4} \left[\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2 \right] = G \frac{d\xi_1}{dt},$$

$$\frac{dx_2}{dt} \frac{dP_2}{dt} = G \frac{c}{4} \left[\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2 \right] = G \frac{d\xi_2}{dt}.$$

Отсюда следует, что каждая из величин

$$\xi_1 = P_1^0(t) - \frac{G}{c^2} \xi_1(t), \quad \xi_2 = P_2^0(t) + \frac{G}{c^2} \xi_2(t) \quad (18)$$

не зависит от времени t .

4. Ускорения частиц

Из (13) следует формула

$$P^0 \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dP}{dt} - \frac{dP^0}{dt} \frac{dx}{dt}. \quad (19)$$

Подставляя сюда (11), (14) и (18), находим ускорения частиц

$$\rho_1^0 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{G}{c} \{ a(u_1) - b(v_1) \} \dot{u}_1 \dot{v}_1, \quad (20)$$

$$\rho_2^0 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{G}{c} \{ b(v_2) - a(u_2) \} \dot{u}_2 \dot{v}_2.$$

5. Некоторые следствия

Получим ряд следствий для второй частицы.

В силу (20) и (10)

$$[b(v_2) + a(u_2)] \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0. \quad (21)$$

Согласно (11) и (14) имеем

$$\frac{dP_2}{dt} + \frac{G}{c} \frac{dx_2}{dt} = G b(v_2) \dot{v}_2, \quad \frac{dP_2}{dt} - \frac{G}{c} \frac{dx_2}{dt} = -G a(u_2) \dot{u}_2.$$

Дифференцируя это по времени t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_2}{dt^2} + \frac{G}{c} \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= G b(v_2) \ddot{v}_2 + G \dot{b}(v_2) (\dot{v}_2)^2, \\ \frac{d^2 P_2}{dt^2} - \frac{G}{c} \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -G a(u_2) \ddot{u}_2 - G a(u_2) (\dot{u}_2)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Следовательно, в силу (10)

$$\begin{aligned} b(v_2) \left[\frac{d^2 P_2}{dt^2} + \frac{G}{c} \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right] &= G \ddot{v}_2, \\ -a(u_2) \left[\frac{d^2 P_2}{dt^2} - \frac{G}{c} \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right] &= G \ddot{u}_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как $\ddot{u}_2 + \ddot{v}_2 = 0$, то отсюда и из (21) получаем

$$[b(v_2) - a(u_2)] \frac{d^2 P_2}{dt^2} = 0, \quad (24)$$

а значит, и

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} \frac{d^2 p_2}{dt^2} = 0. \quad (25)$$

Далее, умножив первое из равенств (22) на $\dot{\alpha}(u_2)$, а второе на $\dot{\theta}(v_2)$ и учитывая (21) и (24), приходим к следствию

$$\alpha(u_2) \dot{\theta}(v_2) \dot{v}_2^2 + \theta(v_2) \dot{\alpha}(u_2) \dot{u}_2^2 = 0. \quad (26)$$

Возведя (22) в квадрат и учитывая (25), приходим к другому следствию, а именно:

$$|\dot{\alpha}(u_2)|^2 (\dot{u}_2)^4 = |\dot{\theta}(v_2)|^2 (\dot{v}_2)^4,$$

а значит,

$$|\dot{\alpha}(u_2)| (\dot{u}_2)^2 = |\dot{\theta}(v_2)| (\dot{v}_2)^2. \quad (27)$$

В свою очередь, из (26) и (27) следует, что

$$\alpha(u_2) \frac{\dot{\theta}(v_2)}{|\dot{\theta}(v_2)|} + \theta(v_2) \frac{\dot{\alpha}(u_2)}{|\dot{\alpha}(u_2)|} = 0. \quad (28)$$

Геометрический смысл условия (28) очевиден.

Также те следствия получаются и при замене номера 2 на 1.

6. Главный вектор

Согласно (18) сохраняется энергия системы, равная

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = P_1^0(t) + P_2^0(t) + \frac{G}{c^2} [\xi_1(t) - \xi_2(t)]. \quad (29)$$

Докажем, что сохраняется импульс системы, равный

$$\mathcal{P} = P_1(t) + P_2(t) + \frac{G}{c^2} \int_{\xi_2(t)}^{\xi_1(t)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\eta, t) d\eta. \quad (30)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\eta, t) = \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[A\left(t + \frac{\eta}{c}\right) - B\left(t - \frac{\eta}{c}\right) \right], \quad (31)$$

то

$$P = P_1(t) + P_2(t) + \frac{G}{2} \{ A(u_1(t)) + B(u_2(t)) - A(u_1(t)) - B(u_2(t)) \} \quad (32)$$

Но легко видеть, что уравнения (II) один раз интегрируются:

$$P_1(t) = \frac{G}{2} \{ A(u_1(t)) - B(u_2(t)) \} + P_1,$$

$$P_2(t) = \frac{G}{2} \{ B(u_2(t)) - A(u_1(t)) \} + P_2, \quad (33)$$

где P_1 и P_2 - константы интегрирования. Подставляя (33) в (32), находим

$$P = P_1 + P_2. \quad (34)$$

Следовательно, утверждение доказано.

Наличие двух констант, P_1 и P_2 , объясняется тем, что при замене функций $A(t)$ и $B(t)$ на $A(t) + C$ и $B(t) - C$, где $C = \text{const}$, уравнения (9)-(13) не меняются, а в уравнениях (33) константы P_1 и P_2 меняются на $P_1 + GC$ и $P_2 - GC$. Поэтому, подобрав C , можно положить

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2} P. \quad (35)$$

Энергия E и импульс P составляют вектор P^μ в пространственно-временном мире СТО. Будем называть его главным вектором рассматриваемой системы. Так как

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 = c^2 \frac{1 + \alpha(u) \beta(v)}{2} \leq c^2 \quad (36)$$

и $G > 0$, то главный вектор направлен в "будущее". Можно выбрать инерциальную систему, в которой $P=0$.

7. Главный бивектор

Момент системы, равный

$$M = [x_1(t), P_1(t)] + [x_2(t), P_2(t)] + \frac{G}{c^2} \int_{S_1(t)}^{\xi(t)} [x(\eta, t), \frac{\partial}{\partial t} x(\eta, t)] d\eta, \quad (37)$$

сохраняется. Действительно, из (13) следует формула

$$\frac{d}{dt} [x, p] = [x, \frac{dP}{dt}] . \quad (38)$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M} = [x_1, q_1] + [x_2, q_2] + \frac{G}{c^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [x, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}] d\eta ,$$

где

$$q_1 = \frac{dP_1}{dt} - \frac{G}{c^2} \frac{d\xi_1}{dt} x_2(\xi_1, t) ,$$

$$q_2 = \frac{dP_2}{dt} + \frac{G}{c^2} \frac{d\xi_2}{dt} x_2(\xi_2, t) .$$

Согласно (9) и (II) отсюда получаем

$$q_1 = \frac{G}{2} \{ a(u_1) - b(v_1) \} = G x_7(\xi_1, t) ,$$

$$q_2 = \frac{G}{2} \{ b(v_2) - a(u_2) \} = -G x_7(\xi_2, t) .$$

Поэтому

$$[x_1, q_1] + [x_2, q_2] = -G \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial}{\partial \eta} [x, \frac{\partial x}{\partial \eta}] d\eta = -G \int_{\xi_1}^{\xi_2} [x, \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}] d\eta ,$$

а значит,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M} = G \int_{\xi_1}^{\xi_2} [x, \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}] d\eta .$$

Так как функция (9) удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 , \quad (39)$$

то момент (37) сохраняется.

Далее рассмотрим функцию

$$\mathcal{N}(t) = P_1^0(t)x_1(t) + P_2^0(t)x_2(t) + \frac{G}{c^2} \int_{\xi_0}^{\xi(t)} x(\tau, t) d\tau \quad (40)$$

и ее производную

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{N} = & P_1^0 \frac{dx_1}{dt} + P_2^0 \frac{dx_2}{dt} + \frac{G}{c^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial x}{\partial t} d\tau + \\ & + x_1 \left(\frac{dP_1^0}{dt} - \frac{G}{c^2} \frac{d\xi_1}{dt} \right) + x_2 \left(\frac{dP_2^0}{dt} + \frac{G}{c^2} \frac{d\xi_2}{dt} \right). \end{aligned}$$

На основании (18), (13) и (30) заключаем, что

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N} = \mathcal{P}. \quad (41)$$

Следовательно, комбинация

$$\mathcal{N}(t) - \mathcal{P}t \quad (42)$$

не зависит от времени t .

Шесть величин:

$$\begin{aligned} M^{10} = N^1 - P_1^1 t, \quad M^{20} = N^2 - P_2^1 t, \quad M^{30} = N^3 - P_3^1 t, \\ M^{12} = M^8, \quad M^{31} = M^2, \quad M^{23} = M^1, \end{aligned} \quad (43)$$

составляют антисимметричный тензор $M^{\alpha\beta}$ в пространственно-временном мире СТО. Назовем его главным бивектором системы.

8. Собственная ось времени

Главный вектор и главный бивектор задают собственную ось времени рассматриваемой системы как решение уравнения

$$x^\alpha(\mathcal{P}, \mathcal{P}) - \mathcal{P}^\alpha(\mathcal{P}, x) = M^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\beta, \quad (44)$$

где обозначено

$$(\mathcal{P}, x) = \mathcal{P}^\alpha \theta_{\alpha\beta} x^\beta = \mathcal{E}t - \frac{\mathcal{P}x}{c^2}, \quad \mathcal{P}_\alpha = \theta_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\beta \quad (45)$$

Собственная ось времени параллельна главному вектору. В инер-

циальной системе, где $\mathcal{P} = 0$, она задается уравнением

$$\mathbf{x} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{E}}. \quad (46)$$

Если координатная ось времени совпадает с собственной, то

$$\mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{N} = 0. \quad (47)$$

9. Случай $m_1 = \infty$

В этом случае собственная ось времени совпадает с мировой траекторией первой частицы. Принимая ее за координатную, полагаем

$$\mathbf{x}_1(t) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\xi}_1(t) = 0. \quad (48)$$

В силу этого

$$\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t) = 0. \quad (49)$$

Значит, функция (9) принимает вид

$$\mathbf{x}(\eta, t) = \frac{c}{2} \left\{ \mathbf{B}\left(t - \frac{\eta}{c}\right) - \mathbf{B}\left(t + \frac{\eta}{c}\right) \right\}, \quad (50)$$

а мировая траектория второй частицы задается условием

$$\mathbf{P}_2(t) = \frac{G}{2} \left\{ \mathbf{B}(v_2(t)) + \mathbf{B}(u_2(t)) \right\}. \quad (51)$$

При этом сохраняются энергия

$$\mathcal{E}_2 = P_2^0(t) + \frac{G}{c^2} \xi_2(t) \quad (52)$$

и момент

$$\mathcal{M}_2 = [\mathbf{x}_2(t), \mathbf{P}_2(t)] + \frac{G}{c^2} \int_0^{\xi_2(t)} [\mathbf{x}(\eta, t), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\eta, t)] d\eta \quad (53)$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{K}(t) = P_2^0(t) \mathbf{x}_2(t) + \frac{G}{c^2} \int_0^{\xi_2(t)} \mathbf{x}(\eta, t) d\eta \quad (54)$$

и ее производную

$$\dot{\mathcal{K}}(t) = P_2(t) + \frac{G}{c^2} \int_0^{\xi_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{X}(\eta, t) d\eta. \quad (55)$$

Подставляя (50) и (51) в (55), получаем

$$\dot{\mathcal{K}}(t) = G B(t). \quad (56)$$

Следовательно, в силу (10)

$$|\dot{\mathcal{K}}(t)| = G. \quad (57)$$

Теперь имеем

$$\mathcal{X}(\eta, t) = \frac{c}{2G} \left\{ \dot{\mathcal{K}}\left(t - \frac{\eta}{c}\right) - \dot{\mathcal{K}}\left(t + \frac{\eta}{c}\right) \right\}, \quad (58)$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathcal{K}}(v_2(t)) + \dot{\mathcal{K}}(u_2(t)) \right\}, \quad (59)$$

$$\mathcal{X}_2(t) = \frac{c}{2G} \left\{ \dot{\mathcal{K}}(v_2(t)) - \dot{\mathcal{K}}(u_2(t)) \right\}. \quad (60)$$

Далее, так как согласно (58)

$$\mathcal{X}(\eta, t) = -\frac{c^2}{2G} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \mathcal{K}\left(t - \frac{\eta}{c}\right) + \mathcal{K}\left(t + \frac{\eta}{c}\right) \right\}, \quad (61)$$

то (54) равняется

$$\mathcal{K}(t) = P_2^{\circ}(t) \mathcal{X}_2(t) - \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{K}(v_2(t)) + \mathcal{K}(u_2(t)) \right\} + \mathcal{K}(t).$$

Следовательно,

$$P_2^{\circ}(t) \mathcal{X}_2(t) = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{K}(v_2(t)) + \mathcal{K}(u_2(t)) \right\}. \quad (62)$$

Наконец, интегрируя по частям, преобразуем выражение (53)

к виду

$$M_2 = \frac{1}{4G} \int_0^{\xi_2(t)} \left[\dot{\mathcal{K}}\left(t - \frac{\eta}{c}\right) + \dot{\mathcal{K}}\left(t + \frac{\eta}{c}\right), \dot{\mathcal{K}}\left(t - \frac{\eta}{c}\right) + \dot{\mathcal{K}}\left(t + \frac{\eta}{c}\right) \right] d\eta. \quad (63)$$

Ю. Случай $m_1 = m_2$

В этом случае всем условиям задачи можно удовлетворить, считая $\mathcal{X}_2(t)$, $P_2(t)$ и $\xi_2(t)$ теми же функциями, что и в предыдущем случае, и полагая

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -x_2(t), \\
 p_1(t) &= -p_2(t), \\
 \xi_1(t) &= -\xi_2(t).
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

В предыдущем случае функцию (58) мы рассматривали в пределах $0 \leq \eta \leq \xi_2(t)$. Теперь мы должны рассматривать ее в пределах $-\xi_2(t) \leq \eta \leq \xi_2(t)$.

Очевидно, что выполняются равенства (47), так что собственная ось времени совпадает с координатной. Остальные сохраняющиеся величины равны

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_2, \quad \mathcal{M} = 2\mathcal{M}_2,
 \tag{65}$$

где \mathcal{E}_2 и \mathcal{M}_2 представлены формулами (52) и (63). Замечательно, что собственная ось времени лежит на минимальной поверхности и является ее осью симметрии.

II. Нерелятивистский предел

Формулы, полученные в разделе 9, позволяют составить для функции $\mathcal{K}(t)$ дифференциальное уравнение с отклоняющимися аргументами. Посмотрим, что дают эти формулы в нерелятивистском пределе $c \rightarrow \infty$.

В этом пределе формулы (54) и (62) дают одно и то же:

$$\mathcal{K}(t) = m_2 x_2(t).
 \tag{66}$$

Формулы (55) и (59) также дают одно и то же, а именно:

$$\dot{\mathcal{K}}(t) = p_2(t),
 \tag{67}$$

что согласуется с (66) и (7). Формула (60) переходит в

$$x_2(t) = -\frac{\ddot{\mathcal{K}}(t)}{G} \xi_2(t).
 \tag{68}$$

Поскольку сохраняется условие (57), то из (68) следует

$$\xi_2(t) = |\mathbf{x}_2(t)|. \quad (69)$$

Сравнивая (68), (66) и (69), получаем уравнение

$$\ddot{\mathbf{K}}(t) = -G \frac{\mathbf{K}(t)}{|\mathbf{K}(t)|}, \quad (70)$$

согласующееся с уравнениями Ньютона (I).

Что касается функции (58), то в нерелятивистском пределе она принимает вид

$$\mathbf{x}(\eta, t) = -\frac{\ddot{\mathbf{K}}(t)}{G} \eta, \quad (71)$$

согласный с (5).

12. Струна или минимоны?

Мы изложили задачу так, как будто некая минимальная поверхность представляет собой историю нити или струны, что находится в согласии с общепринятым сейчас толкованием теории минимальных поверхностей^{2,3/}. Однако существует ли на самом деле такая нить? Не есть ли это ложный образ, наподобие эфира в теории электромагнетизма? Не лучше ли говорить, что минимальная поверхность состоит из мировых траекторий особых частиц — минимонов, которыми обмениваются два данных тела? Мы думаем, что лучше. Постараемся пояснить представление о минимонах.

В нерелятивистской теории минимоны распространяются мгновенно. Мировые траектории минимонов прямолинейны. Минимальная поверхность представляет собой сплошной образ лестничного графа Фейнмана (см. рис. I). Странно было бы представлять себе нить непременно прямолинейной.

В релятивистской теории минимоны распространяются со скоростью света c . Через каждую точку (u, u_0) минимальной поверхности

$$t = \frac{u+v}{2}, \quad x = \frac{c}{2} [A(u) + B(v)] \quad (72)$$

проходят мировые траектории

$$t = \frac{u+u_0}{2}, \quad x = \frac{c}{2} [A(u) + B(u_0)] \quad (73)$$

и

$$t = \frac{u_0+v}{2}, \quad x = \frac{c}{2} [A(u_0) + B(v)] \quad (74)$$

ровно двух минимонов. Первый минимон излучается первым телом и поглощается вторым телом. Второй минимон излучается вторым телом и поглощается первым телом. Минимоны взаимодействуют друг с другом, поскольку их мировые траектории непрямолинейны. Минимальная поверхность представляет собой сплошной образ решетчатого графа Фейнмана (см. рис. 2.).

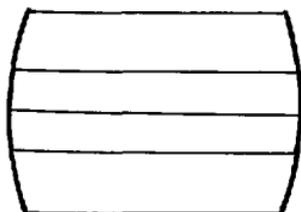


Рис. 1

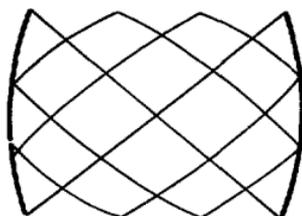


Рис. 2

Литература

1. Н.А. Черников, Н.С. Шавахина. Препринт ОИЯИ, Р2-10375, Дубна, 1977.
2. Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ, Р2-7852, Дубна, 1974.
3. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1978, том. 9, вып. 5, стр. 709-758.

СПИСОК УЧАСТНИКОВ СОВЕЩАНИЯ

1. Атакишев И.М.	СССР
2. Арефьева И.А.	СССР
3. Биленький С.М.	ОИЯИ
4. Барабашов Б.М.	ОИЯИ
5. Боголюбский И.П.	ОИЯИ
6. Боголюбов Н.Н. /мл./	СССР
7. Боголюбов П.Н.	СССР
8. Богацкая М.Г.	СССР
9. Бажанов В.В.	СССР
10. Березин Ф.А.	СССР
11. Ближницки-Бируля И.	ПНР
12. Волков И.К.	ОИЯИ
13. Владимиров А.А.	ОИЯИ
14. Воронцов Б.Л.	СССР
15. Васильев А.Н.	СССР
16. Волков Д.В.	СССР
17. Валл А.Н.	СССР
18. Вицорек Э.	ГДР
19. Герасимов С.Б.	ОИЯИ
20. Говорков А.Б.	ОИЯИ
21. Герджиков В.	НРБ
22. Грибов В.Н.	СССР
23. Гапонов Ю.В.	СССР
24. Гайер Б.	ГДР
25. Гетманов Б.С.	ОИЯИ
26. Динейхан М.	ИИР
27. Дорн Х.	ГДР
28. Донков А.	ОИЯИ
29. Ефремов А.В.	ОИЯИ
30. Ефимов Г.В.	ОИЯИ
31. Дуравлев В.И.	ОИЯИ
32. Жижин Е.Д.	СССР
33. Захаров В.Е.	СССР
34. Захаров В.И.	СССР
35. Зиновьев Г.М.	СССР
36. Зупник Б.М.	СССР
37. Зинн-Жюстен Д.	Франция
38. Иванов Е.А.	ОИЯИ
39. Иванов М.А.	ОИЯИ
40. Исаев П.С.	ОИЯИ
42. Каджешевский В.Г.	ОИЯИ
43. Казаков Д.И.	ОИЯИ
44. Красников Н.В.	СССР
45. Карчев Н.	НРБ
46. Курбатов А.М.	СССР
47. Киржниц Д.А.	СССР
48. Кириллов А.А.	СССР
49. Кафиев Ю.Н.	СССР
50. Конопельченко Б.Г.	СССР
51. Кути Д.	ВНР
52. Лапидус Л.И.	ОИЯИ
53. Лезнов А.Н.	СССР

54. Ломсадзе Ю.М.	СССР
55. Липатов Л.Н.	СССР
56. Лукерски Е.	ГНР
57. Лопушански А.	ГНР
58. Марков М.А.	СССР
59. Мешеряков В.А.	ОМЯИ
60. Меллер-Пройскер М.	ОМЯИ
61. Мельников В.К.	ОМЯИ
62. Михов С.Г.	НРБ
63. Мавродиев С.	ОМЯИ
64. Матвеев В.А.	СССР
65. Маннин Ю.И.	СССР
66. Манько В.И.	СССР
67. Медведев Б.В.	СССР
68. Мигдал А.А.	СССР
69. Минеев В.С.	СССР
70. Мельников В.Н.	СССР
71. Матинян С.Г.	СССР
72. Перлт Х.	ГДР
73. Мику Л.	СРР
74. Нестеренко В.В.	ОМЯИ
75. Никитин Ю.П.	СССР
76. Намсрай Х.	ОМЯИ
77. Ногова А.	ЧССР
78. Огиевецкий В.И.	ОМЯИ
79. Окунь Л.Б.	СССР
80. Первушин В.Н.	ОМЯИ
81. Поливанов М.К.	СССР
82. Погребков А.К.	СССР
83. Павлов В.П.	СССР
84. Петров В.А.	СССР
85. Поляков А.И.	СССР
86. Попов В.Н.	СССР
87. Петрина Д.Я.	СССР
88. Пашнев А.И.	СССР
89. Парфенов Ю.В.	СССР
90. Политцер Д.	США
91. Паризи Г.	Италия
92. Ризов В.	НРБ
93. Радошкин А.В.	ОМЯИ
94. Рутенберг Н.Л.	СССР
95. Сокачев Э.	ОМЯИ
96. Смондрев М.А.	ОМЯИ
97. Славнов А.А.	СССР
98. Славнов Д.А.	СССР
99. Соловьев Л.Д.	СССР
100. Соколов С.Н.	СССР
101. Савельев Н.В.	СССР
102. Соловьев М.А.	СССР
103. Смородинский Я.А.	ОМЯИ
104. Суханов А.Д.	СССР
105. Семенов-Тяньшанский А.	СССР
106. Серебряков В.В.	СССР
107. Сушко В.Н.	СССР
108. Скаржинский В.Д.	СССР
109. Терентьев М.В.	СССР
110. Тимофеевская О.Д.	СССР

111. Филиппов А.Т.	ОМЯИ
112. Фейнберг В.А.	СССР
113. Фролов В.П.	СССР
114. Федоров Ф.И.	СССР
115. Фаддеев Л.Д.	СССР
116. Фаустов Р.И.	СССР
117. Халилов В.Р.	СССР
118. Хазенфератц П.	ВНР
119. Шенков Д.В.	ОМЯИ
120. Шапкина Н.С.	ОМЯИ
121. Шагири Н.С.	СССР
122. Шенков Ю.И.	СССР
123. Шелест В.П.	СССР
124. Шимановски Л.	ПНР
125. Черников Н.А.	ОМЯИ
126. Четыркин К.Г.	СССР
127. Эберт Д.	ОМЯИ
128. Экснер П.	ОМЯИ

СПИСОК ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

1. В.П.Акулов, Д.В.Волков.
Суперпространства Эйнштейна минимальных размерностей.
V.P.Akulov, D.V.Volkov.
Einstein Superspaces of Minimal Dimensions.
2. В.В.Бажанов, В.Н.Бородулин, Г.П.Пронько, Л.Д.Соловьев.
Электрон-монополярное рассеяние на малых углах в квантовой теории монополя.
V.V.Bazhanov, V.I.Borodulin, G.P.Pron'ko, L.D.Soloviev.
Electron-Monopole Scattering at Small Angles in Quantum Monopole Theory.
3. П.Н.Боголюбов.
Современное состояние кварковых моделей.
P.N.Bogolubov.
Present-Day Status of Quark Models.
4. Д.Бухгольц, Я.Т.Лопушански.
Нелокальные заряды - новая концепция в квантовой теории поля.
D.Bucholtz, J.Lopuszansky.
Nonlocal Charges: A New Concept in Quantum Field Theory.
5. В.Бялунитски-Бируля.
Нелинейная волновая механика.
Byalunitsky-Birulya V.
Nonlinear Wave Mechanics.
6. А.А.Владимиров, Д.И.Казакон, О.В.Тарасов.
О вычислении критических индексов методами квантовой теории поля.
A.A.Vladimirov, D.I.Kazakov, O.V.Tarasov.
On Calculation of Critical Exponents by Quantum Field Theory Methods.
7. Д.В.Волков, А.И.Пашнев.
О суперсимметричном лагранжиане для частиц в собственном времени.
D.V.Volkov, A.I.Pashnev.
On Supersymmetric Lagrangian for Particles in Proper Time.
8. А.Б.Говорков.
Принцип неразличимости тождественных частиц и ли-алгебраический подход к квантованию полей.
A.B.Govorkov.
The Principle of Indistinguishability of Identical Particles and the Lee-Algebraic Approach to Field Quantization.
9. Х.Дорн, Х.Отто, Е.Вицорек.
О суммировании нелидирующих логарифмов в КХД.
H.Dorn, H.-J.Otto, E.Wieczorek.
On the Summation of Non-Leading Logarithms in QCD.
10. Г.В.Ефимов, М.А.Иванов.
Нелокальная модель кварков.
G.V.Efimov, M.A.Ivanov.
Nonlocal Quark Model.
11. О.И.Завьялов.
Перенормировка и вильсоновские разложения в безмассовых теориях.
O.I.Zavjalov.
Renormalization and the Wilson Expansion in Massless Theories.

12. В.Е.Захаров.
Метод обратной задачи рассеяния в теории гравитации.
V.E.Zakharov.
Methods of Inverse Scattering Problem in the
Theory of Gravitation.
13. Ж.Зинн-Жестен.
Свойства некоторого класса калибровочно-инвариантных сигма-моделей.
Zinn-Justin J.
Properties of a Class of Gauge-Invariant Non-Linear Sigma-Models.
14. В.М.Зурник.
Билокальные калибровочные поля.
V.M.Zurnik.
Bilocal Gauge Fields.
15. В.И.Журавлев.
Нелокальные дисперсионные соотношения и фундаментальная длина.
V.I.Zhuravlev.
Nonlocal Dispersion Relations and Fundamental Length.
16. А.Н.Лезнов, Н.А.Савельев.
Центрально-симметричные уравнения калибровочных теорий.
A.N.Leznov, N.A.Saveliev.
Spherically-Symmetric Equations of Gauge Fields.
17. А.А.Логунов, В.В.Медведев, В.П.Павлов, М.К.Поливанов, А.Д.Суханов.
Аналитическая структура амплитуды $3-3$ и обобщенная оптическая теорема.
A.A.Logunov, V.V.Medvedev, V.P.Pavlov, M.K.Polivanov, A.D.Sukhanov.
Analytical Structure of $3-3$ Amplitude and Generalized
Optical Theorem.
18. Е.Лукерски.
Кварки и фермионная геометрия.
J.Lukierski.
Quarks and Fermionic Geometry.
19. В.К.Мельников.
Симметрия и законы сохранения.
V.K.Melnikov.
Symmetries and Conservation Laws.
20. В.Н.Мельников.
Несингулярная космология как результат квантовых свойств вакуума.
V.N.Melnikov.
Nonsingular Cosmology as Quantum Properties of Vacuum.
21. А.А.Мигдал.
Многоцветная хронодинамика.
A.A.Migdal.
Manycolour QCD.
22. А.А.Мигдал.
Коллективные возбуждения в КХД.
A.A.Migdal.
Collective Excitations in QCD.
23. Л.Мику.
Ковариантная нелокальная модель кварков.
L.Micu.
Consistent Relativistic Formalism for Quark Models.

24. Г.Паризи.
Значения фундаментальных констант.
G.Parisi.
The Value of Fundamental Constants.
25. М.К.Полыванов, А.К.Погребков.
Сингулярные решения уравнения Лиувилля и динамика особенностей.
M.K.Polivanov, A.K.Pogrebkov.
Singular Solutions of the Liouville Equation
and Dynamics of Singularities.
26. Д.Политцер.
Малые расстояния в квантовой хромодинамике.
H.D.Politzer.
Short Distances and QCD.
27. А.М.Поляков.
Струнное представление и скрытые симметрии калибровочных полей.
A.M.Polyakov.
String Representation and Hidden Symmetries of
Gauge Fields.
28. Д.А.Славнов и др.
Причинные свойства S-матрицы с не локальными источниками.
D.A.Slavnov.
Causal Properties of the S-Matrix with Nonlocal Sources.
29. А.В.Радюшкин.
Факторизация и формфактор пиона в квантовой хромодинамике.
A.V.Radyushkin.
Factorization and Pion Form Factor in QCD.
30. С.Н.Соколов.
Теория релятивистского прямого взаимодействия.
S.N.Sokolov.
Theory of Relativistic Direct Interaction.
31. М.А.Соловьев.
О теореме Руэля.
M.A.Soloviev.
On the Ruelle Theorem.
32. М.В.Терентьев.
Динамика на группе и интеграл по траекториям.
M.V.Terentyev.
Dynamics on the Group Manifolds and Path Integral.
33. Р.Н.Фаустов.
Адронная поляризация вакуума и проверка квантовой электродинамики.
R.N.Faustov.
Hadronic Polarization of Vacuum and Verification
of Quantum Electrodynamics.
34. П.Хазенфратц.
Загадочная комбинация: Беспорядок - порядок.
P.Hasenfratz.
A Puzzling Combination: Disorder - Order.
35. К.Г.Четыркин.
Трехпетлевые поправки к полному сечению аннигиляции e^+e^- - адроны
в квантовой хромодинамике.
K.G.Chetyrkin.
Three-Loop Corrections to $\sigma_{tot}(e^+e^- \text{ - hadrons})$ in Quantum Chromodynamics.

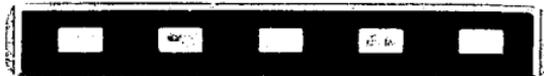
СО Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие	III
Д. И. Блохинцев. Конспект вводного доклада	VII
I. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ПРОБЛЕМА СИЛЬНОЙ СВЯЗИ	
Г. В. Ефимов. Нелокальная квантовая теория поля и сильные взаимодействия	3
В. Г. Кадышевский. Калибровочная теория электромагнитных взаимодействий с фундаментальной длиной	21
Д. И. Казаков, Д. В. Ширков. Суммирование асимптотических рядов квантовой теории возмущений	42
II. ДИНАМИКА МАЛЫХ РАССТОЯНИЙ	
А. В. Ефремов, А. В. Радванкин. Партоны в КХД. Теория и эксперимент	65
А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман. Кварковый и глюонный конденсат в вакууме	81
III. ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ	
С. М. Биленький. Экспериментальный статус единых теорий	103
М. К. Волков, Д. Эберт. Описание сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий мезонов в квантовой киральной теории	117
Н. В. Красников, В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе. Проблема P - и CP -сохранения в калибровочных теориях	137
В. И. Огиевецкий, Э. С. Сокачев. Супергравитация, геометрия и аксиальное суперполе	148
В. П. Фролов. Квантовые эффекты в черных дырах	163
IV. НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ	
А. А. Славнов. Современный статус калибровочных полей	183
И. Я. Арефьева. Поле Янга-Миллса как киральное поле на контуре и дуальность Хофта-Мандельстама	200
В. Н. Первушин. Квантовая топология калибровочных полей	223
Е. А. Иванов. Бипокальное σ -модельное представление теории Янга-Миллса и калибровочно-инвариантный вакуум	233

V. КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ И ПРОБЛЕМА КВАНТОВАНИЯ

Л. Д. Фаддеев. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля	240
Б. Н. Барбашов, В. В. Нестеренко. Дифференциальная геометрия и нелинейные полевые модели	300
А. Т. Филиппов. Нетривиальные решения некоторых нелинейных задач в классической и квантовой теории поля	319
Н. А. Черников, Н. С. Швакина. Линейный потенциал при высоких энергиях	340
Список участников совещания	35А
Список докладов, не вошедших в сборник	357

Рукопись поступила в издательский отдел
16 мая 1979 года.



Ответственный за подготовку сборника к печати М.К.Волков

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Заказ 26735. Тираж 400. Уч.-изд. листов 22,5.
Редактор Н.Н.Зрелова.
Макет В.А.Халякиной.
Обложка художника Ю.Г.Мешенкова. Подписано к печати 5.07.79 г.