



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA
Facoltà
di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Fisica

Effetti di Corda in Teorie di Gauge

RELATORE: Prof. Giuseppe Marchesini

RELATORE ESTERNO: Dott. Michele Pepe

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

CANDIDATO: Claudio Perego

MATRICOLA: 056417

Anno Accademico 2008 - 2009

Ai miei genitori

Indice

1	Teoria di Gauge su Reticolo	8
1.1	La QCD	8
1.2	Il confinamento dei quark	11
1.3	Teoria di gauge non-abeliana	13
1.3.1	Fermioni liberi	13
1.3.2	Teoria di gauge	14
1.3.3	L'azione di Yang-Mills	16
1.3.4	Osservabili della Teoria	17
1.4	Teoria di gauge non-abeliana su reticolo	18
1.4.1	L'azione di Wilson	19
1.4.2	Osservabili su reticolo	21
1.4.3	La Matrice di Trasferimento	22
1.4.4	Meccanica Statistica e Temperatura Fisica	23
1.5	Quark in Teoria di Yang-Mills	24
1.5.1	I Loop di Wilson	24
1.5.2	Sorgenti Statiche	26
1.5.3	Potenziale di Quark Statico	27
1.5.4	Potenziale e Loop di Wilson	28
1.6	Legge ad Area e Confinamento	29
1.7	Limite al continuo	31
1.8	Teoria in $2 + 1$ Dimensioni	34
2	Teoria Effettiva di Corda	36
2.1	Tubi di Flusso Cromo-elettrico	36
2.1.1	Larghezza del Tubo di Flusso	37
2.1.2	Transizione di "Roughening"	38
2.2	La Teoria Effettiva	39

2.2.1	Azione Effettiva di Corda	41
2.2.2	Delocalizzazione delle oscillazioni	45
2.3	Approssimazione di Corda Bosonica Libera	46
2.4	Correzioni di ordine superiore	49
2.4.1	L'azione di Nambu-Goto	50
2.5	Il Successo della Teoria Effettiva di Corda	52
3	Corde composte	55
3.1	N-alità di una Rappresentazione	55
3.2	Accoppiamento dei Gluoni con le Sorgenti	57
3.3	La 2-corda	60
3.3.1	La Rappresentazione $\{6\}$ di $SU(4)$	61
3.4	Potenziale in Rappresentazione $\{6\}$	62
4	La Simulazione	64
4.1	Simulazioni Monte Carlo	65
4.1.1	Integrazione Monte Carlo	65
4.1.2	Importance Sampling	66
4.1.3	Il Reticolo	67
4.2	Aggiornamento delle Variabili di Link	69
4.2.1	Algoritmi di Aggiornamento	72
4.2.2	Simulazione della teoria di Yang-Mills con simmetria $SU(2)$	74
4.2.3	Simulazione della teoria di Yang-Mills con simmetria $SU(N)$	77
4.2.4	Generazione di Numeri Casuali	81
4.3	Algoritmo Multilevel	82
4.3.1	La Riduzione Esponenziale dell'errore	84
4.3.2	Scomposizione di $G(R)$	86
4.3.3	Algoritmo a più livelli	90
4.3.4	Scomposizione degli operatori \mathcal{T}	91
4.4	Potenziale in Rappresentazione $\{6\}$ di $SU(4)$	94
5	Risultati Numerici	97
5.1	Le Grandezze Misurate	97
5.1.1	Le Funzioni Reticolari	101
5.2	Simulazione e Risultati	103

5.3 Discussione dei Risultati 104

Introduzione

Nel presente lavoro di tesi abbiamo studiato la fisica di bassa energia delle interazioni forti fra due sorgenti di colore statiche.

La teoria di campo che descrive le interazioni forti è la cromodinamica quantistica (QCD), in cui i gradi di libertà sono rappresentati dalla dinamica di 2 tipi di particelle: i quark, fermioni elementari che costituiscono gran parte delle particelle subatomiche conosciute, e i gluoni, che mediano le interazioni forti fra quark.

La QCD può essere studiata in due differenti regimi: ad alte energie, dove l'accoppiamento è debole e si possono utilizzare i metodi perturbativi della teoria di campo, oppure a energie più basse, dove l'accoppiamento è forte ed è necessario un approccio differente, che si definisce non-perturbativo.

Nel regime di bassa energia la fisica delle interazioni forti è dominata dal fenomeno del confinamento dei quark, per il quale è impossibile osservare un quark isolato. Gli unici stati fisici possibili sono gli adroni, che sono stati legati di quark o antiquark.

A partire dalle evidenze sperimentali risulta che l'energia del campo gluonico in una coppia quark-antiquark confinati aumenta con la distanza di separazione fra le due particelle. La densità di energia è concentrata in una regione tubolare che connette le due sorgenti detta tubo di flusso cromoelettrico. La fisica di questo tubo di flusso può essere studiata anche nel limite in cui i quark sono delle sorgenti statiche esterne infinitamente massive. La QCD viene allora approssimata dalla teoria di Yang-Mills in cui i gluoni sono gli unici gradi di libertà dinamici. La teoria di Yang-Mills risulta particolarmente interessante dato che consente di studiare il fenomeno del confinamento senza dover affrontare il problema molto complesso di avere fermioni dinamici.

Nel 1980 Luscher et al. proposero una teoria effettiva in cui si descrive

la fisica del tubo di flusso mediante le oscillazioni di una corda che connette il quark all'antiquark.

Tale descrizione fornisce previsioni quantitative precise per la fisica di bassa energia della coppia quark-antiquark confinata. Una di queste previsioni è il termine di Luscher: una correzione all'andamento del potenziale di interazione fra le due sorgenti, che risulta essere universale.

La verifica delle previsioni della teoria effettiva è possibile tramite il confronto con i risultati di una simulazione numerica della teoria di Yang-Mills, definita su uno spazio-tempo discretizzato.

Misurando con una simulazione Monte Carlo su reticolo le osservabili della teoria di Yang-Mills è infatti possibile estrarre il potenziale di interazione fra due sorgenti statiche, e verificare le correzioni dalla teoria effettiva di corda a partire dai principi primi della teoria di campo quantistica. Per ottenere risultati sufficientemente accurati è necessario l'utilizzo di tecniche di calcolo recenti, che permettono di ricavare valori in un intervallo estremamente ampio di ordini di grandezza.

L'interpretazione di corda effettiva viene proposta per un sistema di due sorgenti statiche in rappresentazione fondamentale e antifondamentale del gruppo di gauge della teoria di Yang-Mills. E' tuttavia possibile introdurre sorgenti in rappresentazioni più complesse, determinate dall'accoppiamento di più quark o anti-quark.

In questo lavoro abbiamo studiato un sistema di due cariche in rappresentazione $\{6\}$ del gruppo $SU(4)$. Infatti, fra sorgenti di questo tipo, si prevede la formazione di una corda composta detta k-corda, di cui non si conosce la struttura interna. Per studiare la k-corda abbiamo implementato una simulazione Monte Carlo della teoria di Yang-Mills con gruppo di gauge $SU(4)$, definita su un reticolo spazio-temporale in tre dimensioni.

In questo studio numerico abbiamo misurato il potenziale di interazione fra una coppia di sorgenti confinate in rappresentazione $\{4\}/\{\bar{4}\}$ e fra una coppia di sorgenti in rappresentazione $\{6\}$. Dal valore del potenziale misurato abbiamo estratto la forza di interazione fra le cariche e il termine di Luscher previsto dal modello effettivo di corda.

Il confronto delle correzioni di corda ricavate nel caso delle sorgenti in rappresentazione $\{6\}$ con quelle ricavate nel caso delle sorgenti in rappresentazione $\{4\}/\{\bar{4}\}$ permettono di trarre alcune conclusioni sulla struttura delle k-corde.

La struttura del lavoro è la seguente:
nel primo capitolo proponiamo un'introduzione della teoria di gauge su reticolo. Questa parte permette di delineare le basi formali su cui costruire la simulazione numerica. Vengono presentate le caratteristiche principali della teoria di Yang-Mills al fine di mostrare come si definisce il potenziale di interazione fra due cariche statiche, cioè la grandezza che vogliamo misurare numericamente.

Nel secondo capitolo illustriamo la teoria effettiva di corda, presentandone le previsioni principali riguardo all'interazione gluonica fra sorgenti nel limite infrarosso.

Dopo aver introdotto la teoria effettiva, nel capitolo 3, ci occupiamo di definire le k -corde. In particolare motiviamo la scelta di studiare sorgenti in rappresentazione $\{6\}$ di $SU(4)$.

Al termine di questo capitolo avremo delineato il quadro teorico in cui si colloca il presente lavoro. Nel quarto capitolo possiamo quindi discutere la fase di implementazione della simulazione numerica, trattando in dettaglio gli algoritmi utilizzati.

Nell'ultimo capitolo mostriamo infine i risultati ottenuti mediante questa simulazione e proponiamo alcune conclusioni riguardanti il modello effettivo applicato al caso di una k -corda.

Capitolo 1

Teoria di Gauge su Reticolo

In questo capitolo discutiamo il formalismo della teoria di gauge su reticolo.

In particolare vogliamo presentare la teoria di Yang-Mills che descrive la fisica dei campi gluonici, nell'approssimazione in cui si considerano i quark come sorgenti statiche. Questa teoria è infatti l'oggetto dell'analisi numerica che vogliamo intraprendere.

Prima di occuparci del formalismo vero e proprio, introdurremo gli aspetti essenziali della fisica delle interazioni forti, per delineare il contesto in cui si colloca questo lavoro.

In seguito descriveremo le teorie di gauge non-abeliane su uno spazio-tempo continuo, presentando in modo specifico la teoria di Yang-Mills.

Successivamente saremo in grado di definire questa teoria su uno spazio-tempo discreto, discutendone gli aspetti principali, cioè la formulazione dell'azione, la definizione delle osservabili e l'introduzione delle sorgenti statiche.

Infine, ci occuperemo del confinamento delle cariche statiche, che emerge nel contesto di teoria di gauge su reticolo e costituisce la base di partenza per la discussione teorica presentata nel successivo capitolo.

1.1 La QCD

L'interazione forte è una delle quattro forze fondamentali presenti in natura, insieme alla gravità, alla forza elettromagnetica e all'interazione debole.

Questa forza si associa all'interazione tra i quark, che sono i costituenti

elementari delle particelle sub-atomiche più massive, come il protone o il neutrone.

La teoria che descrive l'interazione forte è la QCD, una teoria di gauge in cui l'interazione fra i quark è mediata da bosoni vettori detti gluoni.

Nel corso degli anni '50 si ebbe un notevole sviluppo nella fisica delle particelle, con la messa a punto di esperimenti di scattering in grado di raggiungere energie sempre crescenti. Questi esperimenti permisero di osservare una serie di particelle nuove che vennero classificate con il nome di adroni.

Lo studio delle proprietà degli adroni portò a raggrupparli in multipletti con caratteristiche fisiche analoghe. La scoperta di un numero sempre più grande di adroni differenti spinse inoltre a supporre che tali particelle non fossero elementari. Nel 1963 Gell-Mann e Zweig proposero un modello in grado di interpretare la suddivisione in multipletti introducendo l'esistenza di poche particelle elementari dette quark.

Secondo questa ipotesi i quark sono fermioni elementari a spin $1/2$, caratterizzati e hanno carica elettrica frazionaria. Ogni adrone rappresenta lo stato legato di quark o anti-quark. In particolare si delineano due famiglie di adroni: i mesoni, formati dal legame di un quark e un anti-quark, e i barioni, formati da tre quark oppure tre anti-quark.

Esistono 6 tipi di quark, a cui si aggiungono le rispettive anti-particelle: i quark *up*, *charm* e *top*, con carica elettrica positiva, $q = +2/3$ e i quark *down*, *strange* e *bottom*, con carica negativa $q = -1/3$. La carica elettrica degli adroni osservati ha un valore intero, per questo motivo ai quark viene assegnato un valore di carica frazionario. Convenzionalmente la specie di appartenenza di un quark viene chiamata sapore.

La proposta dell'esistenza dei quark, oltre a fornire una notevole semplificazione nella classificazione delle particelle elementari, ebbe un grande successo nella predizione di nuovi stati adronici e nella spiegazione delle transizioni di natura elettro-debole fra adroni differenti.

Malgrado queste conferme, il modello originale non era in grado di dare un'interpretazione ai seguenti aspetti fenomenologici:

- non si era ancora riusciti ad osservare sperimentalmente un quark isolato;
- nello spettro barionico venne osservato uno stato eccitato del nucleone, il Δ^{++} , con spin $3/2$ e carica $+2$. Questo poteva essere interpretato

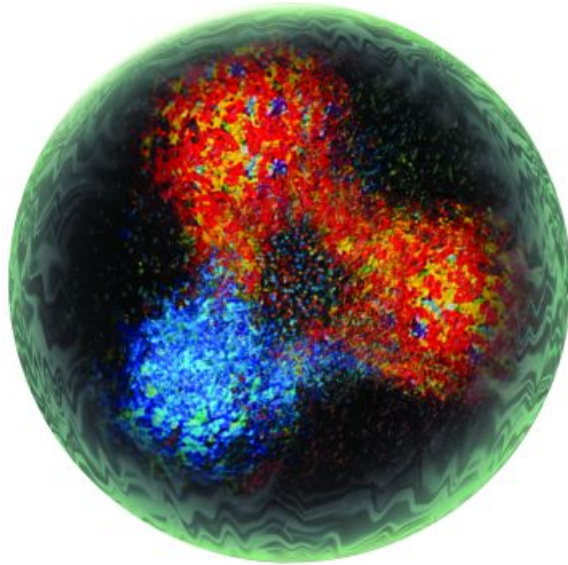


Figura 1.1: Rappresentazione di un protone formato dal legame fra 2 quark up, la cui distribuzione è raffigurata in rosso, e un quark down (blu).

solo come lo stato legato di tre quark up con spin paralleli. Ciò era però in contraddizione con l'ipotesi che i quark fossero fermioni¹.

La soluzione al secondo di questi problemi fu proposta nel 1965 da Han, Nambu e, indipendentemente, da Greenberg. Si ipotizzò di assegnare ai quark un nuovo numero quantico: il *colore*. Con questa assunzione, una funzione d'onda come quella del Δ^{++} , simmetrica rispetto ai numeri quantici osservati, può essere antisimmetrica per trasformazioni di colore, e quindi essere in accordo con la statistica di Fermi-Dirac.

Questa proposta, detta ipotesi di colore, prevede che i quark siano gli stati in rappresentazione fondamentale di una simmetria $SU(3)$ globale. Dato che questo nuovo numero quantico non viene osservato sperimentalmente, si richiede che gli adroni siano stati di singoletto, ovvero invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo $SU(3)$.

L'azione della teoria che descrive le interazioni forti deve quindi essere simmetrica sotto le trasformazioni di $SU(3)$, che viene detto gruppo di colore.

¹Infatti, il teorema di spin-statistica[1], prevede che la funzione d'onda di una particella formata da fermioni identici debba essere antisimmetrica rispetto allo scambio di questi ultimi. Nel Δ^{++} i numeri quantici dei singoli fermioni appaiono identici, lo stato è quindi simmetrico per scambio, contraddicendo il teorema.

Successivamente si ipotizzò che il gruppo $SU(3)$ fosse la simmetria di gauge di una teoria di campo per le interazioni forti, il che portò alla formulazione vera e propria della QCD. Poiché il gruppo di gauge è un gruppo non-abeliano, i cui elementi non commutano, la QCD si definisce teoria di gauge non-abeliana[1, 2].

Un'importante caratteristica di questa teoria per le interazioni forti è la libertà asintotica. Verso la fine negli anni '60, presso l'acceleratore SLAC di Stanford, furono realizzati esperimenti di diffusione ad alta energia di un fascio elettronico su un bersaglio contenente adroni². Questi test mostrarono che le sezioni d'urto relative a processi ad alto scambio di energia sono dominate da interazioni di tipo elettromagnetico, senza che vi sia influenza da parte della forza forte.

In seguito si scoprì che questo tipo di comportamento è previsto da una proprietà della QCD definita libertà asintotica, dimostrata nel 1973 da Gross, Wilczek e Politzer. In una teoria asintoticamente libera l'intensità dell'accoppiamento fra i quark in QCD dipende dell'energia a cui la teoria viene sondata. A brevi distanze, cioè per processi molto energetici, l'accoppiamento tende ad annullarsi, mentre a grandi distanze, quindi per processi a basse energie, assume un'intensità elevata[1, 2].

Questa caratteristica della teoria suggerisce che la QCD può essere studiata in due regimi differenti: ad alte energie l'accoppiamento è debole e determina il naturale parametro di sviluppo per una trattazione di tipo perturbativo. Ad energie più basse l'accoppiamento invece è forte ed è necessario un approccio differente che si definisce non-perturbativo. È proprio in quest'ultimo regime che emerge il confinamento dei quark.

1.2 Il confinamento dei quark

Fin dall'ipotesi di Gell-Mann e Zweig una delle caratteristiche più sorprendenti del modello a quark era l'impossibilità di osservare queste particelle isolate, come stato asintotico negli esperimenti di scattering. Abbiamo visto che gli unici stati fisici effettivamente osservati sono combinazioni di quark che formano un singoletto del gruppo $SU(3)$. Questo fenomeno, proprio del regime di bassa energia delle interazioni forti, si definisce *confinamento dei quark*.

²Il noto Deep Inelastic Scattering, indicato comunemente con la sigla DIS.

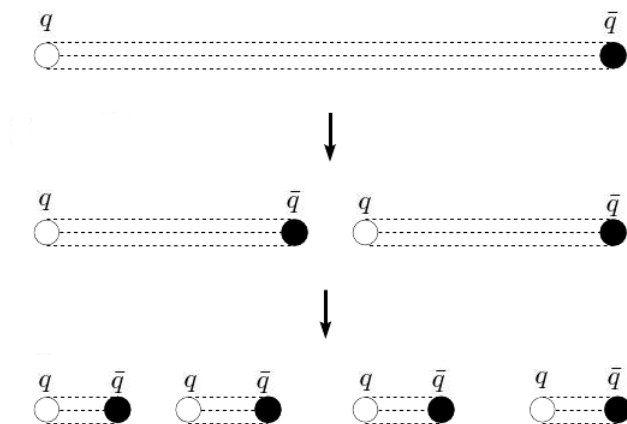


Figura 1.2: Separazione di una coppia quark/anti-quark tramite creazione di nuove coppie.

La QCD deve essere in grado di prevedere questa evidenza sperimentale, affinché possa fornire una descrizione corretta della fisica delle interazioni forti.

Consideriamo ora un adrone costituito da una coppia quark/anti-quark (q, \bar{q}), e indichiamo con $V(R)$ l'energia di questo stato, che dipende dalla distanza di separazione fra le due particelle.

Se V ha un andamento crescente con R allora la teoria si definisce confinante, ed è in grado di prevedere il confinamento dei quark.

Infatti, se proviamo a separare questo stato adronico allontanando gradualmente q da \bar{q} , il dispendio energetico cresce illimitatamente. Ciò significa che, oltre una certa distanza limite, l'energia contenuta nel campo gluonico è sufficiente alla creazione di una nuova coppia quark/anti-quark.

Se ciò si verifica, si ha la separazione del sistema di partenza in 2 coppie, secondo un fenomeno detto “adronizzazione” [1, 3], che viene rappresentato in figura 1.2. Questo può spiegare perché l'osservazione di un quark come stato asintotico isolato risulti impossibile.

Ad oggi il confinamento dei quark in QCD non è ancora stato dimostrato e consiste in uno dei problemi aperti più rilevanti nella fisica teorica.

Per fornire uno studio degli aspetti di bassa energia delle interazioni forti si può considerare la massa dei quark³ infinita. Ciò equivale a trascurare la dinamica di questi ultimi studiando solo la fisica dei gluoni. La teoria che

³Che varia dai 2.4Mev dell'up ai 171Gev del top.

descrive una realtà fisica di questo tipo è la teoria di Yang-Mills. In questo contesto i quark possono essere introdotti come sorgenti statiche.

Studi non-perturbativi della teoria di Yang-Mills [4], mostrarono che il potenziale di separazione fra due cariche statiche ha un andamento confinante. Lo studio della dinamica di confinamento in questa approssimazione può quindi risultare fondamentale per la comprensione del fenomeno del confinamento dei quark in QCD.

1.3 Teoria di gauge non-abeliana

In questa sezione si presenta la teoria di gauge non-abeliana, al fine di delineare il punto di partenza per la successiva formulazione reticolare.

1.3.1 Fermioni liberi

La cromodinamica quantistica descrive la dinamica relativistica dei quark, che sono gli stati in rappresentazione fondamentale di $SU(3)$. Queste particelle sono rappresentate da funzioni d'onda fermioniche a 3 componenti ψ_i , con $i = 1, 2, 3$. L'azione che vogliamo considerare è quella di Dirac [1, 2].

$$S = \int d^4x \{ \bar{\psi}(x) \cdot (i\rlap{/}{\partial} - m) \psi(x) \} \quad (1.1)$$

dove $\bar{\psi} = \gamma_0 \psi^\dagger$ e $\rlap{/}{\partial} = \partial_\mu \gamma^\mu$, e le γ^μ sono le matrici di Dirac. Il prodotto “ \cdot ” indica la contrazione dell'indice di colore:

$$\psi \cdot \psi' = \sum_{i=1}^3 \psi_i \psi'_i. \quad (1.2)$$

Generalizzando questa teoria per una simmetria globale $SU(N)$ scegliamo campi fermionici per cui l'indice di colore a varia da 1 a N . Il vettore $\psi(x)$ è dunque l'elemento di uno spazio vettoriale V_x isomorfo a \mathbb{C}^N . Questa teoria è quindi invariante per una trasformazione della forma

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda^{-1} \psi(x), \quad \Lambda \in SU(N) \quad (1.3)$$

1.3.2 Teoria di gauge

Per costruire una teoria di gauge è necessario che la simmetria venga resa locale richiedendo che l'azione sia invariante sotto una classe più ampia di trasformazioni, ovvero:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda^{-1}(x)\psi(x), \quad \Lambda \in SU(N) \quad (1.4)$$

dove $\Lambda(x)$ dipende dal punto x sulla varietà spazio-temporale. Per rendere simmetrica l'azione sotto queste trasformazioni locali è necessario sostituire le derivate ordinarie con derivate covarianti:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x) \quad (1.5)$$

in cui A_μ è il campo di gauge. Esso è un elemento appartenente all'algebra $su(N)$ del gruppo di gauge, è quindi una matrice hermitiana a traccia nulla. Spesso il campo A_μ viene definito potenziale, poiché ha un ruolo analogo al potenziale elettromagnetico in elettrodinamica.

La legge di trasformazione per A_μ è la seguente:

$$A'_\mu(x) = \Lambda^{-1}(x)(\partial_\mu + A_\mu(x))\Lambda(x) \quad (1.6)$$

dalla (1.6) si ricava che la derivata covariante trasforma secondo la:

$$D'_\mu \psi'(x) = \Lambda^{-1}(x)D_\mu \psi(x) \quad (1.7)$$

se operiamo la sostituzione $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ nella (1.1) l'azione diventa simmetrica rispetto alle trasformazioni di gauge locali:

$$S = \int d^4x \{ \bar{\psi}(x) \cdot (i\not{D} - m) \cdot \psi(x) \} \quad (1.8)$$

La sostituzione della derivata ordinaria con la derivata covariante viene richiesta poiché nella differenziazione è necessario calcolare $\psi(x+dx) - \psi(x)$. Dal momento che la trasformazione di gauge dipende da x la differenza fra $\Lambda(x+dx)$ e $\Lambda(x)$ deve essere presa in considerazione. Per fare questo si definisce l'operatore di trasporto parallelo, che mappa lo spazio vettoriale V_x , relativo al vettore $\psi(x)$, in V_{x+dx} .

Ad ogni curva \mathcal{C}_{yx} che va da x a y possiamo infatti associare una matrice

$\in SU(N)$ che definisca un mapping da V_x a V_y , questa matrice ha la seguente legge di trasformazione:

$$U(\mathcal{C}_{y,x}) \rightarrow U'(\mathcal{C}_{y,x}) = \Lambda^{-1}(y)U(\mathcal{C}_{y,x})\Lambda(x) \quad (1.9)$$

sotto una trasformazione di gauge locale data dalle due equazioni

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda^{-1}(x)\psi(x) \quad (1.10)$$

$$\psi(y) \rightarrow \psi'(y) = \Lambda^{-1}(y)\psi(y). \quad (1.11)$$

L'operatore di trasporto parallelo lungo il cammino rettilineo da x a $x + dx$, che indichiamo con $U(\mathcal{C}_{x+dx,x})$, permette di calcolare il differenziale covariante:

$$D\psi(x) = \psi(x + dx) - U(\mathcal{C}_{x+dx,x})\psi(x) \quad (1.12)$$

da cui si ricava la (1.5). Poiché il cammino $\mathcal{C}_{x+dx,x}$ è infinitesimo, l'operatore $U(\mathcal{C}_{x+dx,x})$ è una matrice infinitamente vicina all'identità, la cui forma è:

$$U(\mathcal{C}_{x+dx,x}) = \mathbf{1} - A_\mu(x)dx^\mu. \quad (1.13)$$

Dall'azione (1.8) possiamo osservare che il nuovo campo A_μ media le interazioni fra i campi fermionici, come risulta dal termine:

$$i\bar{\psi}(x) \cdot A_\mu(x) \cdot \psi(x) \quad (1.14)$$

questo campo appartiene all'algebra $su(N)$, può quindi essere scritto come combinazione degli $N^2 - 1$ generatori T_a del gruppo:

$$(A_\mu(x))_{ij} = -ig_s \sum_{a=1}^{N^2-1} A_{\mu,a}(x)T_{ij}^a \quad (1.15)$$

dove gli operatori T_a soddisfano le relazioni definitrici del gruppo di simmetria

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad \text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (1.16)$$

in cui appaiono le costanti di struttura dell'algebra f_{abc} .

Le $N^2 - 1$ componenti $A_{\mu,a}$ si identificano proprio con i gluoni. Esplicitando gli indici di colore nel termine di interazione fra i fermioni e il campo

A_μ (1.14), ricaviamo:

$$g_s \sum_{i,j,a} \bar{\psi}_i(x) A_{\mu,a}(x) T_{ij}^a \psi_j(x) \quad (1.17)$$

g_s si definisce costante d'accoppiamento fra gluoni e fermioni in questa teoria.

1.3.3 L'azione di Yang-Mills

A questo punto introduciamo l'azione che governa la dinamica dei gluoni indipendentemente dai campi ψ . Per fare questo si definisce il tensore di forza del campo mediante il commutatore fra due derivate

$$F_{\mu\nu}(x) = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (1.18)$$

dal punto di vista geometrico, questo tensore corrisponde alla trasformazione operata su un vettore nel trasporto parallelo intorno ad un parallelogrammo infinitesimo \mathcal{C}_{xx} [5]:

$$U(\mathcal{C}_{xx}) = \mathbf{1} - F_{\mu\nu}(x) dx^\mu dy^\nu \quad (1.19)$$

scriviamo la legge di trasformazione del tensore F :

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda^{-1}(x) F_{\mu\nu}(x) \Lambda(x) \quad (1.20)$$

esplicitando ancora una volta i generatori T_a di $SU(N)$ possiamo scomporre il tensore di forza:

$$(F_{\mu\nu}(x))_{ij} = -ig_s \sum_{a=1}^{N^2-1} F_{\mu\nu,a}(x) T_{ij}^a \quad (1.21)$$

in cui le componenti $F_{\mu\nu,a}$ hanno la forma:

$$F_{\mu\nu,a} = \partial_\mu A_{\nu,a} - \partial_\nu A_{\mu,a} + g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.22)$$

$F_{\mu\nu}$ si utilizza per costruire i termini invarianti di gauge, quadratici in A_μ e nelle sue derivate, che descrivono la dinamica del campo di gauge. La

scelta più semplice è rappresentata dall'azione di *Yang-Mills*:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g_s^2} \int d^4x \text{Tr} [(F_{\mu\nu})^2] = -\frac{1}{4} \int d^4x (F_{\mu\nu}^a)^2. \quad (1.23)$$

Ricordando la forma esplicita del tensore $F_{\mu\nu}$ (1.18), possiamo osservare che S_{YM} contiene un termine cinetico quadratico nelle derivate (∂A), più autointerazioni cubiche e quartiche del campo A_μ .

Una teoria di gauge non-abeliana può essere priva di campi di materia ed essere descritta solo dall'azione (1.23), in tal caso si definisce *pura*. In una teoria in cui sono presenti anche un certo numero di fermioni $\psi^{(f)}$ dobbiamo sommare la (1.8) per ogni campo fermionico. Si ottiene così l'azione per la QCD:

$$S_{QCD} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2g_s^2} \text{Tr} [(F_{\mu\nu})^2] + \sum_f \bar{\psi}^{(f)}(x) \cdot (i\not{D} - m_f) \cdot \psi^{(f)}(x) \right\}. \quad (1.24)$$

In questo lavoro ci siamo concentrati sulla teoria di Yang-Mills, considerando i quark come sorgenti statiche.

1.3.4 Osservabili della Teoria

Una volta introdotta l'azione (1.23) siamo in grado di definire il valore di aspettazione quantistico delle osservabili fisiche tramite integrali funzionali. Questi ultimi si definiscono comunemente in uno spazio-tempo euclideo [2, 6], effettuando una rotazione di Wick $t \rightarrow t' = i\tau$ e considerando la nuova coordinata temporale τ . I dettagli su questa operazione e sulla definizione formale degli integrali funzionali si trovano sui riferimenti indicati.

Definiamo le osservabili per la teoria di Yang-Mills, considerando uno spazio-tempo euclideo.

Un'osservabile della teoria è una funzione del potenziale di gauge $O(A_\mu(x))$ invariante per trasformazioni di $SU(N)$. Il valore di aspettazione è dato da:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int D[A_\mu] O(A_\mu) \exp(-S[A_\mu]) \quad (1.25)$$

dove Z è la funzione di partizione della teoria

$$Z = \int D[A_\mu] \exp(-S[A_\mu]) \quad (1.26)$$

il valore che osserviamo è quindi una media su tutte le configurazioni del campo di gauge, con una misura proporzionale al fattore $\{\exp(-S[A_\mu])\}$.

1.4 Teoria di gauge non-abeliana su reticolo

La definizione di una teoria di gauge su reticolo consiste nella discretizzazione dello spazio-tempo a formare un reticolo di punti chiamati “siti”, collegati da segmenti detti “link”.

Tipicamente si considera un reticolo ipercubico con passo reticolare a . Il campo di materia $\psi(x)$ risulta localizzato sui siti, che vengono indicati con la relativa coordinata spazio-temporale x (si veda la figura 1.3).

Questo procedimento induce un cut-off a , che costituisce la distanza minima considerata nella descrizione. L'imposizione di questo limite finito rimuove di fatto gli aspetti a piccole distanze della teoria. La discretizzazione dello spazio-tempo rende questa formulazione della teoria adatta ad una simulazione numerica.

In uno spazio-tempo discreto è necessario ridefinire l'operazione di derivazione mediante una differenziazione di tipo finito:

$$\Delta_\mu^f f(x) \equiv \frac{1}{a}(f(x + a\hat{\mu}) - f(x)) \quad (1.27)$$

si può definire anche una derivata “all'indietro”:

$$\Delta_\mu^b f(x) \equiv \frac{1}{a}(f(x) - f(x - a\hat{\mu})). \quad (1.28)$$

Il prodotto scalare fra due funzioni assume una nuova forma, in termini di somma anziché di integrale:

$$(f, g) \equiv \sum_x a^4 f(x)g(x). \quad (1.29)$$

Le trasformazioni di gauge locali vengono definite sui siti x del reticolo:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda^{-1}(x)\psi(x). \quad (1.30)$$

Consideriamo ora il campo di gauge A_μ , abbiamo visto nella scorsa sezione che quest'ultimo deriva dalla forma del trasportatore parallelo infinitesimo (1.13). Sul reticolo, dove la distanza minima non nulla è finita, l'analogo

del campo di gauge è rappresentato dal trasportatore elementare associato al link b che collega 2 siti:

$$A_\mu \longrightarrow U(b) \in G \quad (1.31)$$

dove G è il gruppo di gauge della teoria. Questi elementi $U(b)$ si definiscono *variabili di link*. Associando una variabile di link a b si assegna a quest'ultimo un verso di percorrenza. Possiamo quindi indicare un link che va da x a y mediante la notazione $b \equiv b(y, x)$. L'inverso di $U(b)$ è dato dall'operatore associato al link b percorso nel verso opposto:

$$U^{-1}(b(y, x)) = U(b(x, y)). \quad (1.32)$$

La legge di trasformazione di gauge delle variabili di link è data da:

$$U'(b(y, x)) = \Lambda^{-1}(y)U(b(y, x))\Lambda(x) \quad (1.33)$$

A questo punto si può definire una derivata covariante discretizzata e rendere l'azione per il campo $\psi(x)$ simmetrica rispetto alla (1.30) [5]. Tuttavia non ci occupiamo di questa operazione e passiamo subito a trattare la formulazione su reticolo della teoria di Yang-Mills.

1.4.1 L'azione di Wilson

Per descrivere la dinamica delle variabili di link è necessaria un'azione che rappresenti la teoria di Yang-Mills (1.23) nella formulazione su reticolo.

Per definire tale azione occorre individuare l'analogo del tensore $F_{\mu\nu}$ su reticolo. Come spiegato in sottosezione 1.3.3, $F_{\mu\nu}$ rappresenta la trasformazione operata su un campo nel trasporto parallelo intorno a un parallelogramma infinitesimo (1.19).

Nella teoria su reticolo il percorso chiuso più breve è dato dal quadrato elementare di lato a delimitato da 4 link. Tale percorso è denominato placchetta. In figura 1.3 osserviamo una placchetta p individuata dai quattro vertici $x, x + \hat{\mu}a, x + \hat{\mu}a + \hat{\nu}a$ e $x + \hat{\nu}a$, dove $\hat{\mu}$ e $\hat{\nu}$ si riferiscono a due qualsiasi fra le direzioni spazio-temporali del reticolo.

Il trasporto parallelo intorno a p è dato dalla variabile di placchetta, cioè

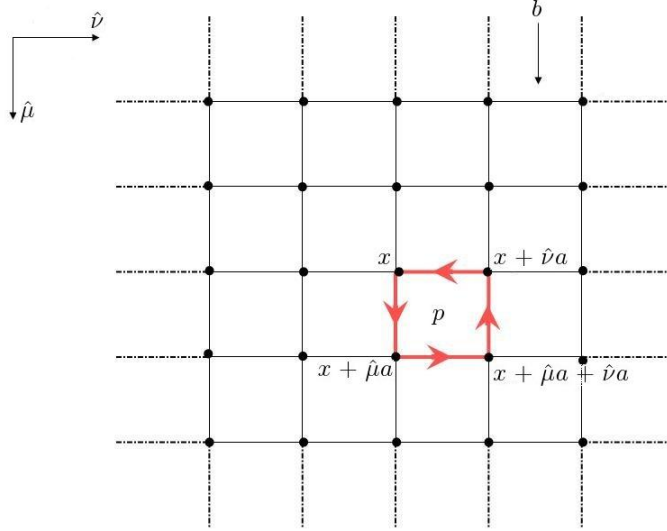


Figura 1.3: Struttura reticolare in cui si individuano siti x , link b e placchette p .

dal prodotto ordinato delle variabili di link che definiscono la placchetta:

$$U_p = U(b(x + \hat{\mu}a, x))U(b(x + \hat{\mu}a + \hat{\nu}a, x + \hat{\mu}a)) \cdot U(b(x + \hat{\nu}a, x + \hat{\mu}a + \hat{\nu}a))U(b(x, x + \hat{\nu}a)). \quad (1.34)$$

La variabile di placchetta è la componente principale dell'azione proposta da Wilson [4] per la teoria di pura gauge su reticolo, Essa è data da:

$$S[U] = \beta \sum_p \left\{ 1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } U_p \right\} \quad (1.35)$$

per gruppo di gauge $SU(N)$. La somma è intesa su tutte le placchette del reticolo, tenendo conto di una sola orientazione.

L'azione (1.35) è gauge invariante, poiché dipende unicamente dalle $\text{Tr } U_p$. Sotto trasformazione di gauge del tipo (1.33), la proprietà di ciclicità della traccia garantisce che

$$\text{Tr } U'_p = \text{Tr } U_p \quad (1.36)$$

di conseguenza S è gauge-invariante.

Scrivendo la variabile di link in termini di un campo vettoriale $A_\mu(x)$ definito sul reticolo otteniamo:

$$U(b(x + \hat{\mu}a, x)) \equiv e^{-aA_\mu(x)} \quad (1.37)$$

sostituendo questa espressione nell'azione (1.35) si ottiene [5]:

$$S = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^5) \quad (1.38)$$

quindi S coincide con l'azione di Yang-Mills per $a \rightarrow 0$ mediante la corrispondenza

$$\beta = \frac{2N}{g_s^2}. \quad (1.39)$$

Consistentemente, l'azione di Wilson costituisce quindi una forma discretizzata della (1.23).

1.4.2 Osservabili su reticolo

Ora che abbiamo introdotto l'azione (1.35) possiamo definire il valore delle osservabili fisiche mediante integrali funzionali sulle configurazioni delle variabili $U(b)$, in analogia con quanto affermato nella sottosezione 1.3.4.

Nello spazio-tempo discretizzato scegliamo una funzione $O(\{U(b)\})$ delle variabili di link $U(b)$ che sia invariante sotto trasformazione di gauge. Il suo valore di aspettazione ha la forma:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) O(\{U(b)\}) \exp(-S[U]) \quad (1.40)$$

con funzione di partizione

$$Z = \int \prod_b dU(b) \exp(-S[U]) \quad (1.41)$$

la misura di integrazione $dU(b)$ si definisce misura di Haar ed è invariante per trasformazioni di gauge. L'integrazione su $dU(b)$ somma su tutta la varietà del gruppo di gauge.

Notiamo che, su un reticolo di taglia finita, il numero delle variabili di integrazione è anch'esso finito. Per questa ragione, se la varietà del gruppo

di gauge è compatta (come nel caso di $SU(N)$), questi integrali sono ben definiti.

Inoltre, si può mostrare che, sotto trasformazioni di gauge, le espressioni (1.40) e (1.41) risultano invarianti [5]. Questo fatto determina la libertà di imporre alcuni vincoli alla dinamica delle variabili di link, mantenendo invariante il valore d'aspettazione $\langle O \rangle$ dell'osservabile. Si possono infatti fissare i link appartenenti ad un certo insieme e mediare sull'evoluzione dei rimanenti⁴. Questa operazione si definisce scelta del gauge.

Una possibile scelta è rappresentata dal *gauge temporale*, dove tutti i link in direzione temporale vengono fissati dalla condizione:

$$U(b) = \mathbf{1}, \quad \forall b = b(x + a\hat{t}, x). \quad (1.42)$$

1.4.3 La Matrice di Trasferimento

La matrice di trasferimento di una teoria definita su reticolo è l'analogo dell'operatore di evoluzione temporale per gli stati quanto-meccanici Ψ della teoria sullo spazio-tempo continuo.

Per introdurre questo operatore è necessario individuare le funzioni dei link che rappresentano tali stati Ψ su reticolo: indichiamo con B_t il set di link spaziali con coordinata temporale $x_4 = t$ e con $B_{t+1,t}$ il set di link temporali che connette B_t con B_{t+1} . Ad ognuno di questi set si associa una collezione di variabili di link:

$$\mathcal{U}_t \equiv \{U(b) | b \in B_t\} \quad (1.43)$$

$$\mathcal{U}_{t+1,t} \equiv \{U(b) | b \in B_{t+1,t}\} \quad (1.44)$$

possiamo quindi definire una funzione $\Psi[\mathcal{U}_t]$ che rappresenta uno stato quanto-meccanico della teoria all'istante t . La propagazione di questa $\Psi[\mathcal{U}_t]$ lungo la direzione temporale avviene mediante l'applicazione della matrice di trasferimento \mathbb{T} :

$$\Psi'[\mathcal{U}_{t+1}] = \mathbb{T} \cdot \Psi[\mathcal{U}_t] \quad (1.45)$$

infatti è possibile riscrivere l'azione (1.35) scomponendola in termini L di-

⁴A patto che questo insieme sia privo di loop chiusi.

pendenti dalla coordinata temporale [5]:

$$S = \sum_t L[\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_{t+1,t}, \mathcal{U}_t]. \quad (1.46)$$

Dalla (1.46) è possibile ricavare la forma esplicita della matrice di trasferimento:

$$\mathbb{T}[\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_t] = \int \prod_{b \in B_{t+1,t}} dU(b) \exp\{-L[\mathcal{U}_{t+1}, \mathbf{1}, \mathcal{U}_t]\} \quad (1.47)$$

se scegliamo il gauge temporale la (1.47) si semplifica e diventa:

$$\mathbb{T}[\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_t] = \exp\{-L[\mathcal{U}_{t+1}, \mathbf{1}, \mathcal{U}_t]\} \equiv \exp\{-Ha\} \quad (1.48)$$

dove si è definita l'hamiltoniana H del sistema come

$$H \equiv -\frac{1}{a} \ln \mathbb{T}. \quad (1.49)$$

L'utilizzo di questo formalismo permette di comprendere alcune caratteristiche della teoria che stiamo considerando. Per prima cosa possiamo analizzare gli aspetti termodinamici della nostra descrizione.

1.4.4 Meccanica Statistica e Temperatura Fisica

Le espressioni (1.40) o (1.41) sono formalmente identiche al valore di aspettazione e alla funzione di partizione statistica di un sistema quadridimensionale in condizioni di equilibrio termico. Il fattore $\exp(-S)$ è infatti analogo al fattore di Boltzmann, tramite la corrispondenza fra l'azione e $\beta\mathcal{H}$, dove \mathcal{H} è l'hamiltoniana classica del sistema statistico:

$$\exp\left\{-\frac{2N}{g_s^2} \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } U_p\right)\right\} \equiv \exp\{\beta\mathcal{H}\} \quad (1.50)$$

la costante d'accoppiamento al quadrato gioca lo stesso ruolo della temperatura β^{-1} , non a caso il coefficiente dell'azione di Wilson viene definito come β .

Questa temperatura è legata al sistema quantistico semplicemente da un'analogia formale, ma non ha niente a che vedere con la temperatura T del sistema.

L'integrale funzionale (1.40) dà infatti il valore d'aspettazione dell'osservabile quantistica sul vuoto, nel limite per volume infinito [1, 2, 6]. In questo caso la temperatura è nulla.

Se invece vogliamo considerare un sistema a temperatura finita T la funzione di partizione statistica ha la forma [5, 7]:

$$Z(T) = \text{Tr} \left(e^{-\frac{H}{T}} \right) \quad (1.51)$$

mediante il formalismo della matrice di trasferimento, possiamo scrivere la funzione di partizione quantistica per la teoria su un reticolo con estensione temporale $L_t = na$ e condizioni al bordo periodiche come [5]:

$$Z = \text{Tr} (\mathbb{T}^n) = \text{Tr} \left(e^{-n(aH)} \right) \quad (1.52)$$

confrontando le equazioni (1.51) e (1.52) si osserva che, considerando $T = L_t^{-1}$, le due funzioni risultano equivalenti. L'inverso della temperatura fisica corrisponde quindi all'estensione del reticolo in direzione temporale [5, 8].

1.5 Quark in Teoria di Yang-Mills

In questa sezione si discute l'introduzione di sorgenti statiche nella teoria di Yang-Mills e si definisce il potenziale di quark statico che lega due di queste sorgenti. A questo scopo occorre definire alcune osservabili fondamentali della teoria.

1.5.1 I Loop di Wilson

Le osservabili su reticolo sono funzioni invarianti di gauge delle variabili di link (si veda la sottosezione 1.4.2). La traccia dei trasportatori intorno a un cammino chiuso è proprio una funzione di questo tipo:

$$\text{Tr} U(\mathcal{C}) \quad (1.53)$$

il valore di aspettazione di questa funzione è detto *loop di Wilson*.

In seguito mostreremo che il loop di Wilson per un cammino rettangolare con lati R in direzione spaziale e L_w in direzione temporale, rappresenta la probabilità di propagazione per un tempo L_w di 2 *sorgenti statiche* a distanza R .

Un loop di Wilson particolare si ottiene quando il cammino \mathcal{C} corrisponde ad una placchetta. In tal caso è possibile effettuare una media dell'operatore $\text{Tr} U_p$ su tutte le placchette del reticolo e calcolarne il valore d'aspettazione, ricavando l'osservabile che si definisce placchetta⁵.

$$\langle \bar{p} \rangle = \left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_p} \sum_p \text{Tr} U_p \right\rangle \quad (1.54)$$

dove \mathcal{N}_p è il numero totale delle placchette del reticolo.

Se teniamo conto della forma dell'azione (1.35) possiamo ricavare anche l'energia interna, definita come:

$$\langle \epsilon \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_p} \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_p \right) \right\rangle. \quad (1.55)$$

La (1.55) è il valore di aspettazione dell'energia media per placchetta.

Se consideriamo un reticolo finito con condizioni al bordo periodiche, possiamo definire un altro tipo di loop, il loop di Polyakov:

$$P(x) = \text{Tr} \{ U(x, t) U(x + a\hat{t}, t) \cdots U(x + (L - a)\hat{t}, t) \} \quad (1.56)$$

dove il reticolo ha estensione L in direzione temporale (si veda in figura 1.4). Per ragioni di comodità abbiamo utilizzato una nuova notazione

$$U(b(x + a\hat{t}, x)) = U(x, t) \quad (1.57)$$

che ci tornerà utile anche in seguito. Se percorriamo la linea temporale nel senso opposto, dobbiamo considerare l'inverso del prodotto di variabili di link nella (1.56). L'operazione di traccia riduce questa inversione ad una coniugazione:

$$P^\dagger(x) = P^*(x) = \text{Tr} \left\{ [U(x, t) U(x + a\hat{t}, t) \cdots U(x + (L - a)\hat{t}, t)]^\dagger \right\}. \quad (1.58)$$

Una grandezza molto interessante è il correlatore di due loop di Polyakov in senso opposto

$$G(|x - y|) \equiv \langle P^*(x) P(y) \rangle \quad (1.59)$$

⁵Vi è un'evidente ambiguità nelle definizioni, al di fuori di questa sottosezione non ci riferiremo più all'osservabile \bar{p} , dunque con placchetta si intenderà sempre l'elemento geometrico del reticolo.

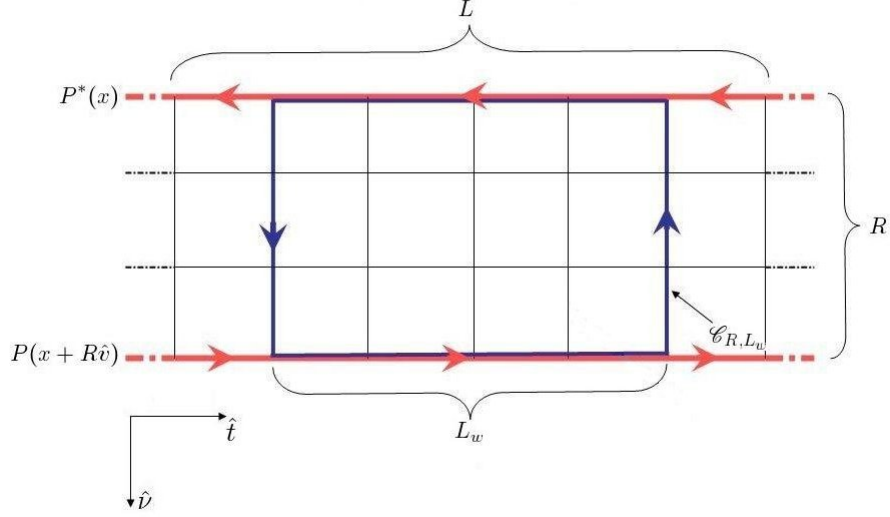


Figura 1.4: Rappresentazione su un reticolo ad estensione temporale L di un loop di Wilson rettangolare (in blu) e di 2 loop di Polyakov a distanza R (in rosso).

anche questa grandezza si può interpretare come l'ampiezza di probabilità della propagazione temporale di 2 cariche statiche. La temperatura fisica del sistema, secondo quanto detto in precedenza (1.4.4), è però da considerare finita.

1.5.2 Sorgenti Statiche

Ora definiamo le sorgenti statiche in teoria di pura gauge su reticolo. Per fare ciò utilizziamo il formalismo della matrice di trasferimento (si veda la sottosezione 1.4.3) con la scelta del gauge temporale definito nella (1.42).

Gli stati quanto-meccanici della teoria sono rappresentati da funzionali d'onda delle variabili di link $\Psi[\mathcal{U}_t]$, che evolvono nel tempo sotto l'azione dell'operatore \mathbb{T} :

$$\Psi'[\mathcal{U}_{t+1}] = \mathbb{T} \cdot \Psi[\mathcal{U}_t] = e^{-aH} \cdot \Psi[\mathcal{U}_t] \quad (1.60)$$

in cui H è l'hamiltoniana del sistema.

In questo contesto possiamo scegliere stati quanto-meccanici invarianti

per trasformazioni di gauge locali⁶, per cui vale la:

$$\Psi [\mathcal{W}'] = R(\Lambda)\Psi [\mathcal{W}] = \Psi [\mathcal{W}] \quad (1.61)$$

oppure, possiamo anche scegliere funzionali d'onda che trasformino secondo la rappresentazione fondamentale di $\Lambda(\vec{x})$ per un punto spaziale \vec{x} , quindi:

$$\Psi_\alpha [\mathcal{W}'] = R(\Lambda)\Psi_\beta [\mathcal{W}] = \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{x})\Psi_\beta [\mathcal{W}] \quad (1.62)$$

ciò determina che la Ψ acquisti un indice di colore α . Nelle (1.61) e (1.62) $R(\Lambda)$ è l'operatore associato all'elemento Λ dalla particolare rappresentazione dello stato Ψ .

In generale, è possibile considerare stati quanto-meccanici Ψ che trasformino secondo il prodotto di rappresentazioni qualsiasi di $SU(N)$, localizzate in differenti punti dello spazio. Per esempio, possiamo scegliere uno stato $\Psi_{\alpha\beta}$, per cui vale la:

$$\Psi_{\alpha\beta} [\mathcal{W}'] = \Lambda_{\alpha\gamma}(\vec{x})\Lambda_{\delta\beta}^{-1}(\vec{y})\Psi_{\gamma\delta}[\mathcal{W}]. \quad (1.63)$$

Il comportamento degli stati Ψ rispetto alle trasformazioni di gauge locali determina la presenza di cariche di colore statiche nel sistema.

Infatti, i funzionali d'onda invarianti (1.61) rappresentano gli stati quanto-meccanici in assenza di sorgenti esterne, mentre i funzionali d'onda con un indice di colore (1.62), descrivono gli stati in presenza di un *quark statico* situato in \vec{x} .

Secondo questa logica, il funzionale $\Psi_{\alpha\beta}$ (1.63), rappresenta uno stato a 2 sorgenti statiche: un quark in \vec{x} e un antiquark in \vec{y} .

Considerando funzionali d'onda in diverse rappresentazioni, è quindi possibile introdurre sorgenti statiche in ogni punto dello spazio e per ogni rappresentazione del gruppo di gauge [5].

1.5.3 Potenziale di Quark Statico

Concentriamoci ora sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\vec{x}\vec{y}}$, formato dagli stati caratterizzati da un quark in \vec{x} e un antiquark in \vec{y} . Per quanto detto poco fa,

⁶Siamo interessati alle trasformazioni $\Lambda(\vec{x})$ indipendenti dal tempo che agiscono sulle Ψ .

i funzionali d'onda appartenenti a $\mathcal{H}_{\vec{x}\vec{y}}$ trasformano secondo la relazione (1.63).

Sia $\{\Psi^{(n)}\}$, dove $\Psi^{(n)} \in \mathcal{H}_{\vec{x}\vec{y}}$, un set completo di autostati dell'hamiltoniana H . L'equazione agli autovalori è data quindi da:

$$H\Psi^{(n)} = E_n\Psi^{(n)} \quad (1.64)$$

l'energia E_0 associata allo stato fondamentale $\Psi^{(0)}$ dipende dalla posizione delle due cariche statiche. Supponiamo per semplicità che \vec{x} e \vec{y} siano sullo stesso asse del reticolo, questa energia dipende allora dalla distanza reticolare R fra il quark e l'antiquark.

E_0 definisce il *potenziale di quark statico*, che si indica con $V(R)$:

$$V(R) \equiv E_0 = \min_{\mathcal{H}_{\vec{x}\vec{y}}} H \quad (1.65)$$

lo studio di $V(R)$ in teoria di pura gauge fornisce informazioni sull'interazione fra quark, pur considerando unicamente la dinamica del campo gluonico.

1.5.4 Potenziale e Loop di Wilson

Procediamo ora a mostrare che la misura di un loop di Wilson rettangolare con lati R in direzione spaziale e L in direzione temporale permette di estrarre il potenziale $V(R)$.

Si è infatti già accennato al fatto che $W(\mathcal{C}_{R,L})$ corrisponde all'ampiezza di probabilità della propagazione per un tempo L di 2 un quark e un antiquark a distanza R . Andiamo a dimostrare tale affermazione.

Scegliamo uno stato arbitrario $\Psi \in \mathcal{H}_{\mathbf{xy}}$. L'ampiezza di probabilità che ci interessa è data dal valore d'aspettazione:

$$\langle \Psi | \exp(-LH) | \Psi \rangle = \sum_n \left| \langle \Psi^{(n)} | \Psi \rangle \right|^2 \exp(-LE_n) \quad (1.66)$$

considerando il limite per $L \rightarrow \infty$ possiamo isolare il termine dominante della somma:

$$\sim \left| \langle \Psi^{(0)} | \Psi \rangle \right|^2 \exp(-LV(R)), \quad L \rightarrow \infty \quad (1.67)$$

da questa ampiezza si può quindi estrarre il potenziale di quark statico.

Per calcolare il valore d'aspettazione (1.66) scegliamo una funzionale d'onda nel settore $\mathcal{H}_{\vec{x}\vec{y}}$, formato dallo stato di vuoto gauge invariante Ω e dal trasportatore parallelo $U_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y})$ fra \vec{x} e \vec{y} . Sostituendo questo funzionale otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \exp(-LH) | \Psi \rangle &= \langle U_{\alpha\beta}^*(\vec{x} + L\hat{t}, \vec{y} + L\hat{t}) U_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \rangle = \\ &= \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) U_{\alpha\beta}^*(\vec{x} + L\hat{t}, \vec{y} + L\hat{t}) U_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \exp(-S) \end{aligned} \quad (1.68)$$

dal momento che abbiamo fissato il gauge temporale (1.42), il valore d'aspettazione nella (1.68) è uguale a un loop di Wilson rettangolare con dimensioni R e L .

$$\langle \Psi | \exp(-LH) | \Psi \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) \text{Tr} U(\mathcal{C}_{R,L}) \exp(-S) = W(\mathcal{C}_{R,L}). \quad (1.69)$$

In conclusione il loop di Wilson $W(\mathcal{C}_{R,L})$ rappresenta la propagazione temporale di una coppia di sorgenti statiche e può essere utilizzato per la misura del potenziale $V(R)$ tramite il limite:

$$V(R) = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln W(\mathcal{C}_{R,L}) \quad (1.70)$$

1.6 Legge ad Area e Confinamento

Discutiamo ora il confinamento delle cariche statiche in teoria di Yang-Mills, risultato non-perturbativo dimostrato da Wilson nel regime di accoppiamento forte e verificato per mezzo delle simulazioni numeriche anche nel regime di accoppiamento debole.

Nel limite $\beta \rightarrow 0$, le osservabili della teoria possono essere scritte come sviluppo in serie di potenze di β , con un raggio di convergenza finito⁷. Questa procedura, analoga allo sviluppo per alte temperature in meccanica statistica, prende il nome di sviluppo in accoppiamento forte.

Come esempio di un risultato ricavato mediante questa tecnica, riportia-

⁷Per una trattazione dettagliata di questa tecnica si consultino i riferimenti di bibliografia [5, 9].

mo lo sviluppo in accoppiamento forte dell'energia interna $\langle \epsilon \rangle$ per la teoria di Yang-Mills con gruppo di gauge $SU(2)$, che è data dalla (1.55) con $N = 2$. L'espansione si riporta in termini della variabile u , che è definita in funzione di β come:

$$u = \frac{I_2(\beta)}{I_1(\beta)} = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta^3}{96} + \mathcal{O}(\beta^5) \quad (1.71)$$

dove le $I_n(\beta)$ sono le funzioni di Bessel modificate.

All'ordine β^9 si ottiene l'espressione [5]:

$$\langle \epsilon \rangle = 1 - u - 4u^5 + 8u^7 - \frac{188}{3}u^9 \quad (1.72)$$

all'interno del raggio di convergenza di questi sviluppi in serie è possibile calcolare espressioni analitiche ad alta precisione per osservabili in teoria di gauge su reticolo. Ciò permette di studiare con un approccio analitico le caratteristiche principali della dinamica non-perturbativa. Inoltre, lo sviluppo in accoppiamento forte è uno strumento molto accurato per testare la correttezza delle simulazioni computazionali.

Uno dei risultati più rilevanti ottenuto mediante sviluppo in accoppiamento forte è il confinamento dei quark statici.

Due sorgenti a distanza R si definiscono *confinate* quando il potenziale che si instaura fra di esse ha un andamento crescente con R .

In teoria di pura gauge possiamo ricavare questo potenziale $V(R)$ fra sorgenti di colore statiche. A tale scopo è necessario valutare l'osservabile $W(\mathcal{C}_{R,L})$, cioè il loop di Wilson lungo il cammino rettangolare $\mathcal{C}_{R,L}$. Questo, per grandi valori di L , ha infatti un andamento dato da:

$$W(\mathcal{C}_{R,L}) \sim Ce^{-LV(R)}, \quad L \rightarrow \infty \quad (1.73)$$

che si può ricavare direttamente dalla (1.69).

Per quanto detto precedentemente è possibile ricavare un'espressione analitica per questa osservabile mediante sviluppo in accoppiamento forte. Ad esempio, i calcoli per $SU(2)$ mostrano che, al quarto ordine in u , si ottiene [4, 5, 10]:

$$W(\mathcal{C}_{R,L}) \simeq 2 \exp(-\ln(u)RL) \{1 + 4u^4 RL\} \quad (1.74)$$

da cui osserviamo che il loop di Wilson segue la *legge ad area*:

$$W(\mathcal{C}_{R,L}) \sim C e^{-\sigma RL}, \quad R, L \rightarrow \infty \quad (1.75)$$

che è un risultato generale, valido anche per altri gruppi di simmetria $SU(N)$. Estraeendo il potenziale di quark statico tramite la (1.70) otteniamo:

$$V(R) \sim \sigma R, \quad R \rightarrow \infty \quad (1.76)$$

quindi $V(R)$ cresce linearmente con la distanza fra le cariche R , perciò la teoria nel limite $\beta \rightarrow 0$ è confinante. Questo andamento determina una forza limite σ di attrazione fra le due sorgenti:

$$\sigma \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} V(R) = - \lim_{R,L \rightarrow \infty} \frac{1}{RL} \ln W(\mathcal{C}_{R,L}) \quad (1.77)$$

questo limite si definisce *tensione di corda* ed è un parametro caratteristico del fenomeno di confinamento.

I risultati numerici presenti in letteratura (si veda [8] per esempio) mostrano che la legge ad area (1.75) fornisce il termine dominante dell'andamento del loop di Wilson anche al di fuori del regime di accoppiamento forte.

Ora che abbiamo introdotto il confinamento delle cariche statiche disponiamo delle basi per discutere la teoria effettiva di corda che è trattata nel capitolo successivo. Prima però, ci soffermiamo su due argomenti importanti nel contesto di questo lavoro: il limite al continuo, e la teoria di Yang-Mills su uno spazio-tempo tri-dimensionale.

1.7 Limite al continuo

Per passare dalla teoria di gauge pura su reticolo alla teoria su uno spazio-tempo continuo è necessario effettuare il limite $a \rightarrow 0$. Questa operazione non risulta però sufficiente a definire la teoria al continuo, poiché stiamo rimuovendo il cut-off che garantisce l'assenza di divergenze⁸. È quindi necessario un procedimento di rinormalizzazione.

Scegliamo un'osservabile fisica dimensionata, ad esempio una lunghezza

⁸Si ricordi che gli integrali funzionali su reticolo (1.41) e (1.40) sono ben definiti, sul continuo, invece sono divergenti [1, 2, 6].

ξ , questa avrà un'espressione del tipo

$$\xi = a \lambda(g_s) \quad (1.78)$$

dove $\lambda(g_s)$ è una funzione adimensionata del parametro di accoppiamento g_s . Possiamo definire un limite al continuo solo se, per $a \rightarrow 0$, il valore di g_s può essere aggiustato in modo da mantenere l'osservabile finita⁹. Deve esistere quindi un valore critico dell'accoppiamento $g_{s,cr}$ tale per cui:

$$\lim_{g_s \rightarrow g_{s,cr}} \lambda(g_s) = \infty \quad (1.79)$$

per fissare la dipendenza $g_s = g_s(a)$ imponiamo che ξ rimanga costante al continuo:

$$\xi = a \lambda(g_s(a)) = \text{const} \quad (1.80)$$

la (1.80) si definisce condizione di rinormalizzazione.

Ora, è necessario che la relazione $g_s(a)$ determini un limite ben definito per ogni osservabile del sistema, al tendere di a a 0. Se ciò si verifica si dice che il punto critico $g_{s,cr}$ ha proprietà di *scaling*.

Trovare un punto critico che ha questa natura è un problema non-banale, che in teoria di gauge non-abeliana si affronta mediante approccio perturbativo (si veda [2, 5]).

Si può mostrare che il valore critico dell'accoppiamento critico è $g_{s,cr} = 0$ e che, per accoppiamento debole, la funzione $g_s(a)$ viene ricavata dall'equazione del gruppo di rinormalizzazione:

$$a \frac{dg_s(a)}{da} = \gamma(g_s) = \gamma_0 g_s^3 + \gamma_1 g_s^5 + \mathcal{O}(g_s^7) \quad (1.81)$$

dove i coefficienti assumono i valori

$$\gamma_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11N}{3} \right), \quad \gamma_1 = \left(\frac{1}{16\pi^2} \right)^2 \left(\frac{34N^2}{3} \right) \quad (1.82)$$

per la teoria di gauge $SU(N)$ pura.

Dalla relazione (1.81) è possibile ricavare l'andamento del cut-off con

⁹La costante di accoppiamento di partenza non ha quindi un valore fisico reale, ma è solo un parametro della teoria che modella il sistema. Per questo si definisce "bare", ovvero nuda.

l'accoppiamento:

$$a(g_s) = \frac{1}{\Lambda} f(g_s) = \frac{1}{\Lambda} (g_s^2 \gamma_0)^{-\gamma_1/(2\gamma_0^2)} \exp\left(-\frac{1}{2\gamma_0 g_s^2}\right) (1 + \mathcal{O}(g_s^2)) \quad (1.83)$$

dove Λ è una costante di integrazione con le dimensioni di una massa.

La (1.83), se invertita, delinea l'andamento di $g_s(a)$, ovvero la relazione cercata per definire il limite al continuo della teoria (si veda l'equazione (1.80)). Tale relazione, rappresenta proprio la libertà asintotica, poiché prevede che la costante di accoppiamento cresca con la scala di lunghezza a a cui si studia la teoria:

$$g_s^2(a) = 2N\beta^{-1} \sim \frac{C}{\ln(\Lambda a)} \quad (1.84)$$

dove C è una costante che si può estrarre in regime perturbativo.

A questo punto, se abbiamo un'osservabile O con dimensione $[m]^d$, questa viene data dall'espressione

$$O = a^{-d} K(g_s) \quad (1.85)$$

dove K è il valore adimensionato che l'osservabile assume in unità reticolari. Al tendere di g_s a 0, quindi nel regime perturbativo, la funzione $K(g_s)$ deve scalare secondo la relazione (1.83) affinché O tenda al suo valore fisico. Abbiamo quindi:

$$K(g_s) \approx c [f(g_s)]^d \quad (1.86)$$

da cui ricaviamo che il valore dell'osservabile al continuo è espresso in termini del parametro dimensionato Λ :

$$O = c\Lambda^d \quad (1.87)$$

una misura sperimentale della grandezza fissata nella condizione di rinormalizzazione 1.80 (nel nostro caso ξ) permette di ricavare la relazione $\Lambda(\xi)$. Tutte le osservabili della teoria vengono quindi unicamente determinate in termini del valore misurato di ξ .

In generale, nel contesto della teoria di gauge su reticolo, si utilizza una condizione di rinormalizzazione che coinvolge la tensione di corda σ , definita dalla (1.77) [8, 11]. Si impone infatti che il valore di σ rimanga fissato nel

limite $a \rightarrow 0$ al variare dell'accoppiamento g_s :

$$\sigma = a^{-2} \lambda_\sigma(g_s(a)) = \text{const} \quad (1.88)$$

in cui λ_σ è l'equivalente della funzione λ nella (1.80), relativamente alla tensione di corda. La scala di massa con cui vengono indicate le grandezze reticolari è dunque $\sqrt{\sigma}$, dal momento che la tensione di corda ha le dimensioni di una massa al quadrato.

1.8 Teoria in 2 + 1 Dimensioni

Per ragioni di rapidità nel calcolo computazionale la teoria simulata in questo lavoro è la teoria di Yang-Mills su reticolo in uno spazio-tempo a $d = 3$ dimensioni.

In questa sezione prendiamo in considerazione alcune differenze sostanziali fra casi $\{d = 3\}$ e $\{d = 4\}$. Così facendo vogliamo capire se la nostra analisi è in grado di produrre risultati significativi, nonostante la restrizione dello spazio-tempo rispetto al modello fisico vero e proprio.

Per prima cosa occorre sottolineare che, nel caso $\{d = 3\}$, la costante di accoppiamento forte $g_{s,3}$ è dimensionata, al contrario della teoria $\{d = 4\}$, dove g_s è adimensionata. Per comprendere questo consideriamo il termine a 4 campi dell'azione di Yang-Mills (1.23):

$$S_{4g} \sim \int d^3x g_{s,3}^2 f_{abc} f_{de}^a A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu} A^{e,\nu} \quad (1.89)$$

l'integrazione è effettuata sullo spazio-tempo tridimensionale. I campi vettoriali A_μ hanno le dimensioni di una massa quindi, affinché l'azione sia adimensionata, anche $g_{s,3}^2$ deve avere le dimensioni di una massa.

Per questa ragione, nel caso $\{d = 3\}$, la scala di massa è già presente nella teoria classica, a differenza della teoria $\{d = 4\}$, dove viene introdotta sotto forma di parametro Λ nel procedimento di rinormalizzazione (1.83). Di conseguenza un'osservabile O_m con le dimensioni di una massa nella teoria $\{d = 3\}$ è proporzionale a $g_{s,3}^2$:

$$O_m = c_m g_{s,3}^2. \quad (1.90)$$

Il fatto che la costante di accoppiamento $g_{s,3}$ sia dimensionata implica

che la β dell'azione di Wilson, che è adimensionata, sia uguale a

$$\beta \equiv \frac{2N}{g_{s,3}^2 a} \quad (1.91)$$

dove a è il passo reticolare, che fissa la scala di distanze. Questa caratteristica determina un comportamento simile alla libertà asintotica che si ricava in 4 dimensioni. Infatti, dalla (1.91), osserviamo che il limite per $a \rightarrow 0$ implica che β tenda all'infinito, come nell'equazione (1.84), valida per il caso $\{d = 4\}$. Aumentando la scala di distanza a invece, β diminuisce, e l'intensità dell'accoppiamento aumenta.

Siamo inoltre interessati alle proprietà di confinamento esibite nella teoria in 3 dimensioni. Risultati numerici [12] mostrano che il potenziale di quark statico $V(R)$ ha un andamento confinante di tipo

$$V(R) \sim \sigma R \quad (1.92)$$

anche nel caso $\{d = 3\}$. Quindi, anche in questo contesto, la teoria di Yang-Mills presenta le proprietà non-perturbative che vogliamo studiare.

Prima di concludere questa sezione sottolineiamo che per $\{d = 3\}$ l'interazione Coulombiana [1] che si instaura fra le cariche di colore ha un andamento logaritmico crescente in R :

$$V_C(R) \sim g_s^2 \ln(R) \quad (1.93)$$

vi è quindi una sostanziale differenza con il potenziale proporzionale a R^{-1} che si ritrova in 4 dimensioni. Ciò significa che anche questa interazione è confinante. L'interazione coulombiana è però un effetto presente solo in regime perturbativo, quindi per grandi R non si considera.

Capitolo 2

Teoria Effettiva di Corda

Nel capitolo precedente è stato introdotto il formalismo della teoria di gauge su reticolo, grazie al quale abbiamo potuto illustrare il fenomeno di confinamento delle sorgenti statiche di colore. In questo capitolo vogliamo discutere una descrizione effettiva che permette di effettuare previsioni sugli aspetti di bassa energia¹ dell'interazione forte tra cariche confinate.

Infatti, a partire dagli studi della dinamica di confinamento in teoria di Yang-Mills, si propone l'idea di interpretare l'interazione fra due sorgenti statiche mediante un modello teorico di corda, che si definisce *teoria effettiva di corda*.

Nelle prossime pagine presentiamo tale descrizione effettiva partendo dal concetto di tubo di flusso cromo-elettrico.

Una volta introdotta la teoria effettiva andremo poi a mostrare le principali previsioni quantitative a cui essa porta. Infine, individueremo le conferme ottenute da questa interpretazione negli ultimi anni.

2.1 Tubi di Flusso Cromo-elettrico

L'interazione fra due sorgenti statiche in teoria di Yang-Mills è determinata da uno scambio gluonico, rappresentato dalla dinamica del campo A_μ . Analogamente all'elettrodinamica possiamo associare dei campi vettoriali cromo-elettrico e cromo-magnetico alle derivate di questo potenziale gluoni-

¹Per indicare gli aspetti di bassa energia in teoria di campo quantistica, si utilizza spesso l'espressione "limite infrarosso della teoria". Ciò perché si intende considerare gli aspetti a grandi distanze della fisica del sistema studiato.

co A_μ . La distribuzione del campo cromo-elettrico in un sistema di questo tipo è caratteristica del fenomeno di confinamento.

La densità di energia del campo cromo-elettrico è infatti ben diversa da quella che si instaura fra due cariche elettromagnetiche. L'andamento lineare del potenziale di quark statico (1.76), suggerisce che il campo gluonico sia concentrato essenzialmente in una regione tubolare detta *tubo di flusso*, che connette le 2 sorgenti. Al di fuori di questa regione, la densità di energia cromo-elettrica è fortemente soppressa, a differenza del campo di dipolo generato in elettrodinamica.

La presenza di un potenziale confinante del tipo (1.76) fra due cariche di colore statiche può essere associata alla formazione di un tubo di flusso gluonico.

2.1.1 Larghezza del Tubo di Flusso

Analizziamo in modo più specifico la struttura del tubo di flusso. La densità energetica del campo cromo-elettrico può essere indicata tramite la funzione di correlazione connessa:

$$\rho(x) \propto \langle q\bar{q} | \text{Tr } E^2(x) | q\bar{q} \rangle - \langle q\bar{q} | q\bar{q} \rangle \langle \text{Tr } E^2(x) \rangle \quad (2.1)$$

dove $|q\bar{q}\rangle$ è lo stato fondamentale in presenza di una coppia quark-antiquark. Su reticolo questa equazione prende la forma:

$$\rho(x) \propto \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle \text{Tr } U(\mathcal{C}) \text{Tr } U_{p(x)} \rangle - \langle \text{Tr } U(\mathcal{C}) \rangle \langle \text{Tr } U_{p(x)} \rangle}{\langle \text{Tr } U(\mathcal{C}) \rangle} \quad (2.2)$$

dove \mathcal{C} è il cammino rettangolare del loop di Wilson e $p(x)$ è una placchetta localizzata in x^2 parallela al piano di appartenenza di \mathcal{C} .

Definita la funzione densità ρ , la larghezza del tubo di flusso è data da [13]:

$$w^2 = \frac{\int d^2 x_\perp x_\perp^2 \rho(x)}{\int d^2 x_\perp \rho(x)} \quad (2.3)$$

dove x_\perp è un vettore composto dalle coordinate di scostamento trasversale rispetto alla linea di congiungimento dei due quark. Si considera la coordinata longitudinale del tubo di flusso x_\parallel fissa nel punto medio fra le due

²Per "localizzata in x " intendiamo che il punto x corrisponda ad uno dei suoi vertici scelto convenzionalmente, per esempio quello più vicino all'origine.

cariche, ciò fornisce una stima ragionevole della larghezza della distribuzione ρ .

La larghezza w^2 può in generale dipendere dalla distanza R fra le sorgenti. Poiché la densità del campo ha una struttura tubolare, ci attendiamo che w^2 cresca più lentamente di R^2 nel limite $R \rightarrow \infty$.

Nella teoria di Yang-Mills con azione di Wilson (1.35), possiamo verificare questa previsione mediante lo sviluppo in accoppiamento forte di w^2 nel limite $R \rightarrow \infty$. Infatti, scegliendo $SU(2)$ come gruppo di gauge e $d = 4$ dimensioni, si ricava [13]:

$$w_\infty^2 = 4 \left\{ u^4 + 2u^6 + \frac{92}{3}u^8 + \dots \right\} \quad (2.4)$$

dove $u = \frac{\beta}{4} + \mathcal{O}(\beta^3)$ e β è il parametro d'accoppiamento dell'azione di Wilson. Per piccoli valori di β , quindi nel regime in cui lo sviluppo in accoppiamento forte è affidabile, la larghezza del tubo di flusso fra cariche distanti, non solo cresce più lentamente di R^2 , ma mostra di tendere ad un limite finito.

2.1.2 Transizione di “Roughening”

Nel regime di accoppiamento forte la larghezza del tubo di flusso tende quindi ad un valore costante all'aumentare della distanza fra le sorgenti. In questa sottosezione si discute se lo stesso comportamento è valido anche per valori di accoppiamento al di fuori di tale regime.

Per questo scopo utilizziamo i risultati ricavati con lo sviluppo in accoppiamento forte e osserviamo cosa succede all'aumentare di β , cioè al diminuire di g_s .

L'esistenza di un limite finito w_∞^2 , richiede che la grandezza $G \equiv \sigma \cdot w_\infty^2$, dove σ è la tensione di corda, rilassi ad una costante nel passaggio al regime di accoppiamento debole³.

Lo sviluppo in accoppiamento forte mostra, al contrario, che questa grandezza diverge ad un certo valore di β [13]:

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_r} G = \infty, \quad \beta_r \simeq 1.9 \quad (2.5)$$

se β_r si trova nella regione in cui lo sviluppo in accoppiamento forte è af-

³ σ rimane costante nel limite $g \rightarrow 0$, si veda la sezione 1.7.

fidabile la (2.5) dà indicazione del fatto che la larghezza limite w_∞^2 diverge per valori di β maggiori di un certo β_r .

Tramite simulazioni numeriche per la teoria $SU(2)$ in 4 dimensioni, si è mostrato che il passaggio fra il regime di accoppiamento forte e regime perturbativo si ha per $\beta \gtrsim 2$ [11]. Questo passaggio è però molto repentino: i risultati calcolati analiticamente nel regime di accoppiamento forte presentano infatti un buon accordo con i dati numerici anche per valori di β molto vicini a 2. È quindi ragionevole supporre che lo sviluppo in accoppiamento forte sia affidabile per $\beta \lesssim \beta_r$.

Per questa ragione il risultato (2.5) fornisce delle forti indicazioni che per $\beta > \beta_r$ la larghezza del tubo cresca indefinitamente con la distanza fra le cariche R . Questo comportamento si definisce delocalizzazione del tubo di flusso.

In β_r si delinea perciò una discontinuità nella fisica del sistema detta transizione di roughening⁴.

Possiamo concludere che la fase di confinamento di una teoria di gauge pura consiste in 2 regimi, separati da un certo valore dell'accoppiamento $g_r = \sqrt{\frac{2N}{\beta_r}}$, per cui lo sviluppo in accoppiamento forte cessa di convergere [13, 14].

2.2 La Teoria Effettiva

Nel 1980 Luscher et al. proposero [15, 16] una teoria effettiva per descrivere gli aspetti di bassa energia della dinamica confinante di due cariche statiche. Questa proposta venne avanzata a partire dai risultati analitici e computazionali che erano stati ricavati per la teoria di Yang-Mills da un lato, e dall'evidenza sperimentale delle traiettorie di Regge nella spettroscopia mesonica [17, 3] dall'altro.

L'idea fondamentale è di interpretare la dinamica del tubo di flusso gluonico mediante l'azione di oggetto sottile fluttuante, una corda che connette le due sorgenti di colore. Per oggetto "sottile" intendiamo che le dimensioni trasversali siano molto minori rispetto alla lunghezza (si veda la figura 2.1).

Secondo l'interpretazione proposta il potenziale di interazione fra le sorgenti di colore è l'effetto della dinamica di tale corda, e l'ampiezza delle

⁴Termine mutuato dalla meccanica statistica dei sistemi magnetici.

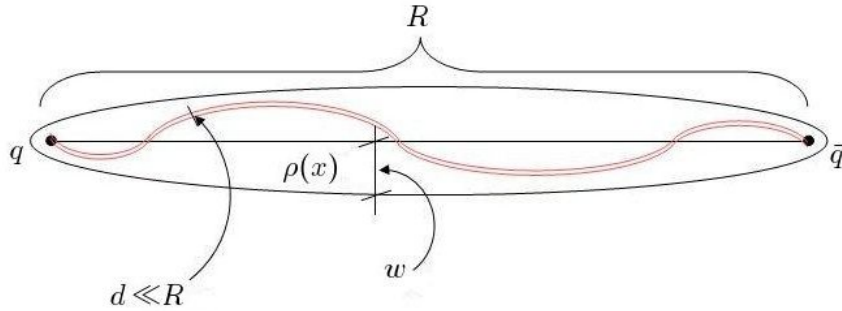


Figura 2.1: Corda oscillante fra due sorgenti statiche a distanza R . L'ampiezza delle oscillazioni determina la larghezza w della distribuzione $\rho(x)$ del campo cromoelettrico. Perché la descrizione sia valida lo spessore della corda d deve essere trascurabile rispetto ad R .

oscillazioni quanto-meccaniche di questo oggetto lineare comporta la distribuzione della densità di campo cromoelettrico $\rho(x)$.

Sottolineiamo che, una proposta di questo tipo, può essere valida solo nel limite infrarosso della teoria, in cui la distanza R fra le sorgenti è sufficientemente grande per poter considerare la corda sottile. La descrizione riguarda quindi gli aspetti di bassa energia delle interazioni forti.

Al fine di formulare l'azione del modello effettivo suddividiamo i gradi di libertà del sistema in due classi:

- I gradi di libertà interni, che descrivono lo stato fisico all'interno della corda.
- I gradi di libertà esterni, che descrivono la configurazione spaziale della corda come oggetto lineare.

L'azione che descrive la dinamica completa di questi gradi di libertà si definisce modello di stringa fondamentale.

Tuttavia, poiché siamo interessati alla fisica nel limite infrarosso del sistema, le grandi distanze considerate in questo regime permettono di trascurare

i gradi di libertà interni e di fornire una descrizione puramente geometrica della corda fluttuante.

Il modello così ottenuto si definisce *teoria effettiva di corda*.

Come abbiamo detto, secondo questa nuova interpretazione, la larghezza del tubo di flusso gluonico w^2 , dipende dall'ampiezza delle oscillazioni del sistema. La delocalizzazione della distribuzione ρ , che si verifica nella transizione di roughening, equivale quindi alla delocalizzazione delle oscillazioni trasversali della corda. Fisicamente questo significa che le fluttuazioni del tubo di flusso nella fase rough sono prive di massa.

2.2.1 Azione Effettiva di Corda

In questa sezione ricaviamo l'azione che descriva la dinamica della corda appena introdotta.

Abbiamo mostrato che in questo regime il loop di Wilson su un cammino rettangolare segue la legge d'area (1.75). Ciò significa che, fra due sorgenti statiche separate da una distanza R , si instaura un potenziale di attrazione $V(R)$ che cresce linearmente con R . Le due cariche così interagenti si dicono confinate.

In un sistema a temperatura finita T possiamo estrarre un risultato analogo tramite il correlatore di loop di Polyakov [18]:

$$G(R) \equiv \langle P(x)^* P(x+R) \rangle \equiv e^{-F(R,L)} \quad (2.6)$$

dove i due loop sono situati a distanza R , mentre il reticolo ha un'estensione temporale L , con condizioni al bordo periodiche. Per $T \rightarrow 0$ l'energia libera $F(R, L)$ della coppia di sorgenti è descritta dall'espressione⁵

$$F(R, L) \sim \sigma RL + k(L) \quad (2.7)$$

dove σ è la tensione di corda e $k(L)$ una quantità dipendente dalla temperatura del sistema L^{-1} . Il potenziale di quark statico è legato ad F dalla relazione:

$$V(R) \equiv \frac{1}{L} F(R, L) \equiv -\frac{1}{L} \ln G(R). \quad (2.8)$$

All'inizio di questo capitolo abbiamo mostrato che le equazioni (1.75)

⁵Come abbiamo visto nella sottosezione 1.4.4, $T = L^{-1}$ quindi il limite di temperatura nulla corrisponde a $L \rightarrow \infty$.

e (2.7), che rappresentano il confinamento delle cariche, possono essere interpretate considerando la presenza di un tubo di flusso gluonico fra le due sorgenti statiche. Abbiamo poi proposto di descrivere il tubo di flusso tramite un modello di corda fluttuante, le cui oscillazioni sono massive nel regime di accoppiamento forte, ma diventano prive di massa nella cosiddetta “fase rough”, quando $\beta \gtrsim \beta_r$.

In quest’ultimo regime, la dinamica delle oscillazioni senza massa della corda determina delle correzioni alla forma dell’energia libera F (2.7) che possono essere quantificate con precisione.

Si considerino due sorgenti statiche in uno spazio-tempo a d dimensioni, in cui x_0 rappresenta la coordinata temporale. Posizioniamo queste cariche a distanza R lungo la direzione spaziale \hat{x}_1 .

L’evoluzione temporale della corda descrive una superficie bi-dimensionale Γ parametrizzata dalle coordinate x_0 e x_1 che si definisce superficie universo della corda e ne determina ad ogni istante la configurazione geometrica.

Se l’evoluzione avviene per un periodo di tempo L , la superficie universo della configurazione di equilibrio della corda corrisponde a un rettangolo $\mathcal{R}_{R,L}$ di dimensioni $R \times L$ sul piano $z = (x_0, x_1)$ (si veda la figura 2.2).

In questo contesto, gli scostamenti della corda dalla configurazione di equilibrio, si possono rappresentare associando ad ogni punto del rettangolo $\mathcal{R}_{R,L}$ un vettore⁶ $h(z)$ a $d - 2$ componenti, poiché tale è il numero dei gradi di libertà trasversali del sistema.

$$h(z) = (0, 0, h_2(z), \dots, h_{d-1}(z)). \quad (2.9)$$

L’azione effettiva della corda deve quindi contenere un termine proporzionale all’area del rettangolo sommato ad un termine che governi la dinamica del campo vettoriale h :

$$S_{eff} = \sigma RL + S_h[h(z)]. \quad (2.10)$$

Con questo modello l’energia libera del sistema in assenza di oscillazioni, per $h \rightarrow 0$, è consistente con la legge d’area. Quando invece si considera la

⁶Si assume trascurabile l’effetto delle cosiddette “over-hangs” della corda, ossia le oscillazioni con sovrapposizione che non possono essere descritte con una funzione a valore singolo.

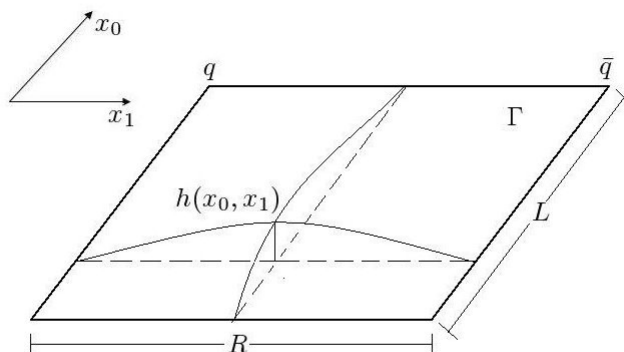


Figura 2.2: Superficie universo Γ della corda, con il campo h che rappresenta lo scostamento dalla superficie piana di equilibrio.

dinamica oscillante della corda, entra in gioco l'azione $S_h[h(z)]$ relativa ad una teoria di campo quantistica in due dimensioni.

Costruiamo questa azione S_h richiedendo che le seguenti proprietà vengano soddisfatte [16]:

- S_h deve essere locale, ovvero funzione di $h(x)$ e delle sue derivate.
- S_h deve essere invariante sotto le seguenti trasformazioni:
 1. Rotazioni e traslazioni⁷ su $z = (x_0, x_1)$.
 2. Rotazioni e traslazioni del campo vettoriale h .

Queste simmetrie soddisfano la richiesta che la teoria sia massless, poiché implicano che le componenti di S_h dipendano solamente dalle derivate del campo h , precludendo la presenza di un termine di massa proporzionale a h^2 .

L'azione che si cerca è quindi composta da un termine cinetico più eventuali termini di interazione:

$$S_h = \int_0^L \int_0^R d^2z \left\{ \frac{1}{2} \partial_a h \partial_a h + \text{termini di interazione} \right\} \quad (2.11)$$

⁷Siamo in uno spazio Euclideo, questo determinerà invarianza per il gruppo di Poincaré una volta ritornati alla metrica di Minkowski.

in cui a è sommato sulle direzioni \hat{x}_0 e \hat{x}_1 . I termini di interazione sono combinazioni del tipo [16]

$$g_1 (\partial_a^2 h \cdot \partial_b^2 h) \quad (2.12)$$

oppure

$$g_2 (\partial_a h \cdot \partial_a h)^2 \quad (2.13)$$

in generale l'aggiunta di queste componenti⁸ implica che l'azione (2.11) sia non-rinormalizzabile. Ma, dal momento che questa interpretazione di corda effettiva è valida esclusivamente nel limite infrarosso, possiamo considerare un cut-off che rimuova gli aspetti di brevi distanze della teoria, eliminando questi problemi di non-rinormalizzabilità.

Ora che abbiamo assegnato una descrizione alla dinamica del campo di fluttuazioni h possiamo calcolare le correzioni alla legge d'area. Secondo questo modello il correlatore di loop di Polyakov è dato dalla funzione di partizione della teoria effettiva:

$$G(R) \equiv \langle P(x)^* P(x+R) \rangle \equiv Z[-S_{eff}(R, L)] = e^{-\sigma RL+k} \cdot Z_h(R, L) \quad (2.14)$$

dove riconosciamo la legge d'area (2.7) corretta dal termine $Z_h(R, L)$, che è la funzione di partizione della teoria (2.11). Questa correzione è data dall'integrale funzionale sulle configurazioni del campo di fluttuazioni h :

$$Z_h(R, L) \equiv \int D[h] e^{-S_h}. \quad (2.15)$$

In accordo con la teoria effettiva di corda l'energia libera del sistema può quindi essere riscritta in questo modo:

$$F(R, L) = F_0 + \Delta F(R, L) = F_0 - \ln Z_h(R, L) \quad (2.16)$$

in cui abbiamo indicato con F_0 il termine indipendente dalle fluttuazioni. Dalla relazione (2.8) osserviamo che questo contributo $\Delta F(R, L)$ va a correggere il potenziale di quark statico.

⁸Questi termini di interazione si definiscono anche “di auto-interazione” poiché implicano che il campo h interagisca con se stesso.

2.2.2 Delocalizzazione delle oscillazioni

Le correzioni al potenziale di carica statica sono una delle previsioni principali del modello effettivo proposto. Un altro risultato importante di questa interpretazione riguarda l'andamento della larghezza w^2 definita nella (2.3).

Come visto nella sezione 2.1 la densità del campo cromo-elettrico $\rho(x)$ è proporzionale alla funzione di correlazione connessa fra un loop \mathcal{C} e una placchetta p :

$$\rho(x) \propto \langle \text{Tr } U(\mathcal{C}) \text{Tr } U_{p(x)} \rangle - \langle \text{Tr } U(\mathcal{C}) \rangle \langle \text{Tr } U_{p(x)} \rangle = G(\mathcal{C}, p(x)). \quad (2.17)$$

Nel limite infrarosso si considerano le sorgenti molto distanti, che si traduce nel porre le dimensioni del loop \mathcal{C} molto maggiori di quelle di $p(x)$.

Sotto questa assunzione la teoria effettiva di corda permette di ricavare un'approssimazione per la funzione di correlazione nella (2.17) [15], il cui termine dominante risulta essere:

$$G(\mathcal{C}, p(x)) \sim e^{-\sigma A(\mathcal{C}, p(x))} \quad (2.18)$$

dove $A(\mathcal{C}, p(x))$ è la superficie minimale che ha per contorno i due loop e σ è la tensione di corda.

L'aspetto geometrico rilevante di questo sistema è la grande differenza fra le dimensioni di \mathcal{C} e $p(x)$, è quindi possibile considerare i due loop circolari.

In questa approssimazione \mathcal{C} è un cerchio di raggio R , mentre $p(x)$ è un cerchio di raggio r , dove $R \gg r$. In questo contesto è possibile calcolare $A(\mathcal{C}, p(x))$ [13], da cui risulta:

$$A(\mathcal{C}, p(x)) = \pi(R^2 - r^2) + \frac{\pi x_1^2}{\ln \frac{R}{r}} + \mathcal{O} \left[\left(\ln \frac{R}{r} \right)^{-4} \right] \quad (2.19)$$

ciò significa che, per R grande, la densità di campo presenta una sezione trasversale gaussiana

$$\rho(x) \propto e^{-\sigma \frac{\pi x_1^2}{\ln \frac{R}{r}}} \quad (2.20)$$

la cui larghezza del cresce logicamente come:

$$w^2 \sim \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{R}{\lambda} \quad (2.21)$$

con λ costante.

Il modello effettivo di corda predice quindi la delocalizzazione del tubo di flusso che si ha nella fase rough, fornendo informazioni specifiche sull'andamento della larghezza w^2 .

Questo comportamento logaritmico è un altro segnale di validità della teoria effettiva proposta e viene studiato dettagliatamente nel lavoro [19] per il caso della teoria di spin. Ad oggi non esistono ancora studi numerici in grado di verificare questo effetto in teoria di Yang-Mills.

2.3 Approssimazione di Corda Bosonica Libera

La fisica effettiva della corda viene quindi descritta in questo modello mediante una teoria di campo quantistica a due dimensioni. La forma specifica dell'azione (2.10) non è nota, è infatti necessario definire i termini di interazione in modo da caratterizzare il comportamento dinamico del campo h .

In prima approssimazione è possibile tuttavia trascurare l'effetto di questi termini e considerare una teoria con $d - 2$ bosoni liberi.

Questa approssimazione si definisce “modello di corda bosonica libera”. L'azione associata al campo h diventa:

$$\begin{aligned} S_h &= \int_0^L \int_0^R d^2z \left\{ \frac{1}{2} \partial_a h \partial_a h \right\} \\ &= \int_0^L \int_0^R d^2z \left\{ \frac{1}{2} h (-\partial_a^2) h \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

in cui (∂_a^2) è il laplaciano relativo alla superficie bidimensionale su cui è definito h (il rettangolo $\mathcal{R}_{R,L}$ in figura 2.2). La funzione di partizione (2.15) diventa quindi un integrale funzionale di tipo gaussiano, la cui soluzione è:

$$Z_h(R, L) \propto [\det(-\partial_a^2)]^{-\frac{d-2}{2}}. \quad (2.23)$$

La forma del laplaciano ∂_a^2 dipende dal dominio di oscillazione della corda. Vi è dunque una diretta dipendenza della (2.23) dalle condizioni al contorno imposte sul rettangolo $\mathcal{R}_{R,L}$, che variano a seconda dell'osservabile reticolare considerata. Per esempio, nel caso del loop di Wilson, abbiamo a che fare con condizioni al bordo di Dirichelet su tutto il perimetro del rettangolo.

Per il correlatore del loop di Polyakov invece, abbiamo condizioni al bordo periodiche sui lati in direzione spaziale e condizioni di Dirichelet sui lati in direzione temporale.

Secondo la (2.23) il contributo delle fluttuazioni dipende esclusivamente dalle condizioni al contorno della superficie universo della corda, e dal numero dei gradi di libertà trasversali.

Il calcolo del determinante del laplaciano $-\partial_a^2$ è dato dal prodotto degli autovalori λ_{mn} di questo operatore:

$$\det(-\partial_a^2) = \prod_{mn} \lambda_{mn} \quad (2.24)$$

si consideri ora la geometria del correlatore di loop di Polyakov, il calcolo (2.24) può essere effettuato tramite una regolarizzazione. Per esempio si può introdurre un cut-off reticolare [16] oppure utilizzare il metodo della funzione ζ [20, 21]. Il risultato di questo calcolo è indipendente dal tipo di regolarizzazione utilizzata, e porta a riscrivere il determinante in termini della funzione η di Dedekind:

$$\det(-\partial_a^2) = \eta(q)^2, \quad q = e^{-\pi L/R} \quad (2.25)$$

dove la η ha la forma:

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (2.26)$$

Ciò permette di ricavare la correzione per l'energia libera dovuta alle fluttuazioni del tubo di flusso in approssimazione di corda bosonica libera:

$$\Delta F(R, L) = -\ln Z_h(R, L) = (d-2) \ln(\eta(q)). \quad (2.27)$$

La funzione di Dedekind ha due differenti sviluppi validi nelle regioni separate da $R = L/2$, che utilizziamo per riscrivere la correzione ΔF :

$$\Delta F(R, L) = (d-2) \left[-\frac{\pi L}{24R} + \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-\pi n L/R}) \right] \quad (2.28)$$

nel caso di $2R < L$, mentre

$$\Delta F(R, L) = (d-2) \left[-\frac{\pi R}{6L} + \frac{1}{2} \ln \frac{2R}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-4\pi n R/L}) \right] \quad (2.29)$$

nel caso $2R > L$.

Lontano dalla regione intermedia $R \sim L/2$ questi sviluppi possono essere troncati in modo efficace poiché i termini esponenziali risultano trascurabili. Questo permette di delineare due regimi:

- $2R \ll L$, in cui la temperatura fisica del sistema è molto bassa⁹
- $2R \gg L$, regime di temperatura finita.

Nel primo caso, l'approssimazione di corda bosonica libera determina una correzione al potenziale di quark statico proporzionale a R^{-1} . Infatti, rimuovendo la sommatoria trascurabile nella (2.28) ed estraendo il potenziale, otteniamo:

$$V(R) \simeq \sigma R + \mu + \frac{\gamma}{R}, \quad \gamma = -\frac{\pi(d-2)}{24}. \quad (2.30)$$

La correzione dall'andamento lineare è il noto “termine di Luscher” che fornisce una previsione quantitativa sulle correzioni sottodominanti del potenziale $V(R)$.

Il coefficiente γ risulta essere universale [15, 16], cioè indipendente dalla teoria di gauge trattata. Come vediamo, l'unico fattore che influisce sul termine di Luscher, è il numero dei gradi di libertà trasversali della corda oscillante.

Questa universalità di γ è insita nel procedimento con cui esso è ricavato. Scegliendo l'azione (2.22), abbiamo infatti deciso di non considerare alcun dettaglio sulla dinamica della corda, e di valutarne esclusivamente la cinematica. Questo implica che il risultato ottenuto sia valido in generale, per qualsiasi scelta dei termini di interazione.

Nella seconda regione, $2R \gg L$, le correzioni all'energia libera comportano che la tensione di corda dipenda dalla temperatura $T = L^{-1}$ del sistema. Se utilizziamo il termine dominante della (2.29) per ricavare il potenziale di

⁹Ricordiamo che, affinché la rappresentazione di corda sia valida, la distanza fra le sorgenti R deve essere sufficientemente grande. La condizione $2R \ll L$ presuppone quindi che L sia molto grande, e non R piccolo.

carica statica otteniamo:

$$V(R) \equiv \frac{1}{L}F(R, L) = \sigma R - \frac{\pi T^2(d-2)}{6}R + \mu \quad (2.31)$$

dove $\mu = \frac{k(L)}{L}$. La tensione di corda perciò riceve una correzione che varia con la temperatura. La (2.31) suggerisce inoltre che ad una certa temperatura critica T_c , ci sia una transizione di deconfinamento in cui la tensione di corda si annulla. Questa temperatura risulta essere:

$$T_c = \sqrt{\frac{6\sigma}{\pi(d-2)}}. \quad (2.32)$$

L'esistenza della transizione di deconfinamento è verificata mediante simulazioni numeriche anche nella teoria di Yang-Mills. Il valore di T_c previsto nella (2.32) però, si discosta di molto dai risultati delle simulazioni. Questa incongruenza si può spiegare sottolineando che la (2.32) deriva dall'assunzione errata che l'approssimazione di corda bosonica libera valga per tutte le temperature fino a T_c .

Nel presente lavoro ci siamo interessati principalmente al primo dei due regimi. Considereremo infatti reticoli con una certa estensione temporale, per cui la temperatura T si possa ritenere molto bassa.

2.4 Correzioni di ordine superiore

Il termine ricavato mediante l'ipotesi di corda bosonica libera è soltanto la parte dominante delle correzioni determinate dal modello effettivo di corda, indicate nell'equazione (2.16). Il risultato (2.30) è quindi un comportamento asintotico dell'interazione fra due cariche statiche, nel limite $R \rightarrow \infty$.

Se vogliamo una descrizione più dettagliata è necessario introdurre anche gli effetti di autointerazione delle fluttuazioni scegliendo la dinamica nell'azione (2.10). Questo porta a ricavare ulteriori correzioni al potenziale di quark statico, sottodominanti rispetto al termine di Luscher.

Procedere all'introduzione delle componenti di interazione nell'azione effettiva (2.10), significa affrontare la scelta del modello di corda fondamentale che governa la fisica del tubo di flusso, con la conseguente perdita di generalità nella descrizione.

2.4.1 L'azione di Nambu-Goto

La proposta più semplice in questo contesto è il modello di corda Nambu-Goto [22], la cui azione è proporzionale all'area della superficie universo:

$$S = \sigma \int_0^L d\tau \int_0^R d\zeta \sqrt{g} \quad (2.33)$$

dove g è il determinante della metrica bi-dimensionale sulla superficie Γ (si tenga sempre presente la figura 2.2), mentre σ è una costante delle dimensioni di un'area¹⁰.

La metrica g deriva dall'embedding di Γ nello spazio-tempo¹¹ e ha la forma:

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\mu \quad (2.34)$$

dove $\alpha, \beta = \tau, \zeta$ e $\mu = 0, \dots, d-1$. Fissiamo le coordinate di Γ

$$\begin{aligned} x^0 &= \tau \\ x^1 &= \zeta \end{aligned} \quad (2.35)$$

così possiamo scrivere il determinante g in funzione dei gradi di libertà trasversi x^i con $i = 2 \dots d-1$

$$g = 1 + \partial_\tau x^i \partial_\tau x^i + \partial_\zeta x^i \partial_\zeta x^i + \partial_\tau x^i \partial_\tau x^i \partial_\zeta x^j \partial_\zeta x^j - (\partial_\tau x^i \partial_\zeta x^i)^2. \quad (2.36)$$

La (2.35) richiede che la superficie non abbia overhangs e identifica le coordinate x^i con il campo delle fluttuazioni h^i introdotto nella (2.9), salvo per il coefficiente σ . Sottolineiamo che la scelta di coordinate (2.35) determina problemi di non rinormalizzabilità [23] nella teoria quantistica, questo però, come già detto, non invalida la trattazione effettiva.

Fissiamo, per semplicità, il numero delle dimensioni spazio-temporali d uguale a 3. In tal modo rimane un solo grado di libertà trasversale e si eliminano i termini del quarto ordine in g :

$$S[x] = \sigma \int_0^L d\tau \int_0^R d\zeta \sqrt{1 + (\partial_\tau x)^2 + (\partial_\zeta x)^2} \quad (2.37)$$

¹⁰Vedremo in seguito che corrisponderà alla tensione di corda nel tubo di flusso.

¹¹La superficie Γ si considera immersa nello spazio d -dimensionale della teoria trattata. Le sue coordinate intrinseche τ e ζ , sono quindi indicate in funzione delle coordinate spazio-temporali del sistema.

proseguiamo espandendo la radice, prima però definiamo le variabili adimensionate:

$$\begin{aligned}\phi &= \sqrt{\sigma} x, \\ \xi_0 &= \frac{\tau}{L} \\ \xi_1 &= \frac{\zeta}{R}\end{aligned}\tag{2.38}$$

questo porta a scrivere:

$$S[\phi] = \sigma RL \int_0^1 d\xi_0 \int_0^1 d\xi_1 \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma L^2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{\sigma R^2} (\partial_1 \phi)^2}\tag{2.39}$$

lo sviluppo della radice al secondo ordine determina:

$$S[\phi] = \sigma LR + S'(\phi).\tag{2.40}$$

Dal momento che il correlatore di loop di Polyakov è l'integrale funzionale su tutte le possibili configurazioni del tubo di flusso:

$$G(R) \equiv \int D[\phi] e^{-S[\phi]}\tag{2.41}$$

otteniamo proprio la (2.14). Il termine dominante dell'energia libera è quindi la legge d'area, mentre le correzioni provengono dalla dinamica del campo ϕ , che rappresenta proprio le fluttuazioni trasversali della corda. L'azione che governa la fisica di ϕ è data da:

$$S'(\phi) = S_{bs}(\phi) - \frac{1}{8\sigma LR} S_I(\phi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\sigma LR)^2}\right)\tag{2.42}$$

dove S_{bs} è il termine di corda bosonica libera¹²:

$$S_{bs}(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi_0 \int_0^1 d\xi_1 \left[\frac{R}{L} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{L}{R} (\partial_1 \phi)^2 \right]\tag{2.43}$$

mentre S_I è l'autointerazione del campo ϕ :

$$S_I(\phi) = \int_0^1 d\xi_0 \int_0^1 d\xi_1 \left[\frac{R}{L} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{L}{R} (\partial_1 \phi)^2 \right]^2.\tag{2.44}$$

¹²Tornando alle variabili dimensionate si ottiene facilmente l'azione (2.22).

Questa nuova componente dell'azione effettiva determina delle correzioni sottodominanti calcolabili [20]:

$$\Delta_I F(R, L) = -\frac{\pi^2 L}{1152\sigma R^3} [2E_4(q) - E_2^2(q)] \quad (2.45)$$

E_2 e E_4 sono funzioni di Eisenstein sviluppabili in serie di potenze:

$$E_2(q) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)q^n \quad (2.46)$$

$$E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n \quad (2.47)$$

dove $q = \exp(-\pi L/R)$, $\sigma(n)$ è la somma dei divisori di n e $\sigma_3(n)$ è la somma di questi elevati al cubo. È interessante notare che queste correzioni hanno un andamento proporzionale a R^{-3} , il che delinea l'entità degli effetti di autointerazione nel potenziale di quark statico.

Nelle pagine successive non saremo interessati a questi contributi sottodominanti, ma ci concentreremo piuttosto sulla correzione γ/R .

Abbiamo mostrato i risultati del modello di Nambu-Goto per esplicitare le conseguenze della scelta di un'azione di corda completa, comprendente anche termini di auto-interazione. In accordo con le previsioni, questa teoria implica sia la validità della legge d'area, che la presenza del termine universale di Luscher, con l'aggiunta di correzioni sottodominanti che incidono solo a brevi distanze.

2.5 Il Successo della Teoria Effettiva di Corda

In quest'ultima sezione riassumiamo i risultati di letteratura che più ci interessano nel contesto della teoria effettiva di corda.

Fin dagli articoli in cui la descrizione venne proposta [15, 16, 22], all'inizio degli anni '80, gli studi numerici della teoria di Yang-Mills hanno rappresentato lo strumento principale per testare la validità delle previsioni di questo modello.

Un aspetto cruciale da questo punto di vista è l'universalità del termine di Luscher. Tale correzione al potenziale non dipende infatti dall'azione effettiva adottata per la corda e ha carattere del tutto generale. Per questo

motivo lo studio numerico può essere condotto scegliendo fra teorie di gauge con gruppi di simmetria disparati, a partire da \mathbb{Z}_2 , fino ad arrivare a $SU(N)$.

Inizialmente i lavori sulle teorie con gruppo di simmetria discreto, in special modo \mathbb{Z}_2 , erano più diffusi, poiché la loro accessibilità dal punto di vista computazionale permetteva di sfruttare al meglio le limitate capacità di calcolo.

Studi numerici sulla teoria \mathbb{Z}_2 mostrarono che, nel limite infrarosso, il potenziale di quark statico presentava delle leggere deviazioni dalla legge d'area. Queste correzioni risultarono inoltre in accordo eccellente con l'approssimazione di corda bosonica libera [21, 24].

Negli anni successivi a questi lavori, un massiccio sviluppo dei metodi computazionali, nonché della potenza dei calcolatori, garantì un continuo miglioramento nelle prestazioni dell'approccio numerico.

Nel 2002 Luscher e Weisz [25] proposero l'algoritmo multi-level, che portò a un notevole progresso nell'ambito delle simulazioni Monte Carlo, migliorando decisamente l'efficienza dei calcoli.

Si ricavarono quindi conferme più robuste per l'approssimazione di corda bosonica libera nel regime infrarosso della teoria \mathbb{Z}_2 .

Dalla proposta di questa nuova tecnica numerica fu inoltre possibile studiare gli aspetti di autointerazione della corda, isolando le correzioni agli ordini superiori. Per esempio, nei lavori [23, 26, 27, 28] si è testato il modello di Nambu-Goto illustrato in sezione 2.4. Queste simulazioni produssero risultati compatibili con le previsioni della teoria effettiva nel regime di temperatura finita, ma si riscontrò un minore accordo per quanto riguarda il regime di temperatura zero.

Il miglioramento dell'efficienza di calcolo permise anche di ottenere risultati sufficientemente accurati dalla simulazione di teorie di gauge pure con gruppi di simmetria continui, molto più dispendiose dal punto di vista numerico.

L'interpretazione di corda effettiva venne quindi messa alla prova per gruppi di gauge $SU(2)$ e $SU(3)$ in 3 e 4 dimensioni spazio-temporali [18, 29, 30]. Anche in questi casi ciò che si ottenne diede conferma della validità dell'approssimazione di corda bosonica libera nel regime infrarosso.

Per quanto riguarda le correzioni di ordine superiore i risultati mostrarono invece deviazioni significative dalle previsioni del modello di Nambu-Goto, soprattutto nel regime in cui R non è più molto grande.

Furono condotti numerosi altri studi al fine di caratterizzare sempre meglio il potenziale di attrazione forte fra cariche di colore. Per esempio, nel lavoro [31] le simulazioni hanno analizzato gli stati eccitati del tubo gluonico rivelando un buon accordo con l'approssimazione di corda bosonica libera, seppur per distanze maggiori rispetto al caso dello stato fondamentale.

In definitiva, possiamo concludere che la proposta di una teoria effettiva di corda per il regime infrarosso dell'interazione forte è ampiamente supportata dai risultati computazionali.

L'approssimazione di corda bosonica libera ha ricevuto infatti conferme molto ampie sostanzialmente in tutti i lavori che abbiamo citato.

Sorgono però maggiori difficoltà quando si tratta di interpretare le correzioni di ordine superiore. In questo caso infatti, le previsioni del modello di Nambu-Goto non sono sempre in accordo con i dati numerici. Questa situazione suggerisce quindi di cercare un differente modello di corda per descrivere le autointerazioni del campo di fluttuazione.

Nel prossimo capitolo presentiamo il problema teorico di cui ci siamo occupati in questo lavoro, che riguarda la proposizione di una teoria effettiva per la descrizione del potenziale fra sorgenti composte da due quark.

Capitolo 3

Corde composte

Nella discussione presentata fino a questo momento, il potenziale di *quark* statico $V(R)$, ha giocato un ruolo cruciale. Abbiamo visto che questa funzione corrisponde all'energia che si instaura fra una coppia quark-antiquark, cioè fra due sorgenti rispettivamente in rappresentazione fondamentale e antifondamentale di $SU(N)$.

Tuttavia abbiamo anche sottolineato che è possibile scegliere una *qualsiasi rappresentazione* del gruppo di gauge per le due sorgenti statiche che generano il potenziale $V(R)$ (si veda la sottosezione 1.5.2).

Vogliamo dunque studiare come risponde la teoria effettiva di corda se si considerano sorgenti più complesse dei quark. In particolare, intendiamo scoprire che cosa succede al tubo di flusso gluonico se sovrapponiamo due coppie quark/anti-quark ad ottenere sorgenti composte.

L'intento di questo lavoro è proprio quello di affrontare tale questione studiando numericamente il comportamento del potenziale $V(R)$ che si instaura fra due sorgenti Q e \bar{Q} , costituite rispettivamente dal prodotto tensoriale di due quark e di due anti-quark (in figura 3.1).

A tale fine dobbiamo discutere le caratteristiche delle corde generate da sorgenti in rappresentazioni differenti dalla fondamentale. Per fare ciò, è necessario introdurre il concetto di *N-alità* di una rappresentazione.

3.1 N-alità di una Rappresentazione

Le rappresentazioni di $SU(N)$ si possono suddividere in *settori di N-alità*, in base alle proprietà di trasformazione rispetto al *centro* del gruppo di gauge.

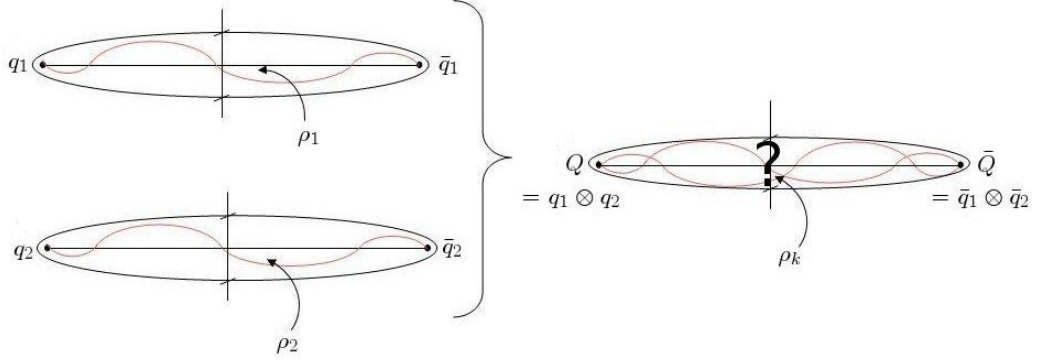


Figura 3.1: Rappresentazione schematica di due corde associate a sorgenti in rappresentazione fondamentale q e anti-fondamentale \bar{q} . Se vengono sovrapposte a formare un unico oggetto la struttura geometrica che costituisce il modello effettivo è sconosciuta.

Si definisce *centro* di un gruppo \mathcal{G} il sottogruppo abeliano formato dal set di elementi $C \in \mathcal{G}$ che commuta con tutti gli altri elementi di \mathcal{G} . Per $SU(N)$ il centro è il gruppo discreto \mathcal{Z}_N , che è costituito dagli elementi [32]:

$$C_n = \mathbf{1} \cdot e^{i\frac{2\pi n}{N}}. \quad (3.1)$$

In figura 3.2 sono riportati gli elementi del centro per i gruppi $SU(2), SU(3)$ e $SU(4)$.

Tutte le rappresentazioni di $SU(N)$ possono essere suddivise in N settori corrispondenti ad ognuno degli elementi di \mathcal{Z}_N . Rappresentazioni appartenenti allo stesso settore avranno la medesima *N-alità*.

L'*N-alità* di una rappresentazione si può definire come il numero k di *box* che compongono il rispettivo *Tableaux* di Young, modulo N [32, 3, 33, 17].

Diversi settori sono collegati dal *prodotto tensoriale* fra le differenti rappresentazioni del gruppo considerato. Se moltiplichiamo due rappresentazioni con *N-alità* k_1 e k_2 otteniamo una rappresentazione appartenente al settore relativo a $C_{k_1+k_2}$ (si vedano gli esempi riportati in tabella 3.1).

Si osserva quindi che il prodotto di una rappresentazione qualsiasi, con *N-alità* k , per una fondamentale, che ha $k_f = 1$, *incrementa* il settore a $k+1$. Secondo questa stessa logica il prodotto con l'antifondamentale ($k_{\bar{f}} = N-1$)

N-alità q_1	$\mathcal{R}(q_2)$	N-alità q_2	N-alità $q_1 \otimes q_2$
k_1	identità	0	k_1
k_1	fondamentale	1	$k_1 + 1$
k_1	anti-fond.	$N - 1$	$k_1 - 1$
k_1	aggiunta	0	k_1
k_1	fond \otimes fond	2	$k_1 + 2$

Tabella 3.1: N-alità del prodotto di una sorgente generica q_1 a N-alità k_1 , con una sorgente q_2 in rappresentazione $\mathcal{R}(q_2)$.

decrementa il settore¹, mentre l'accoppiamento con una rappresentazione ad N-alità nulla mantiene il risultato nel medesimo settore.

L'esempio più semplice di ciò che abbiamo appena illustrato si ha nelle rappresentazioni del momento angolare in meccanica quantistica. Il gruppo considerato è $SU(2)$, il cui centro è composto dagli elementi $\{+\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$. Le rappresentazioni di $SU(2)$ si suddividono a seconda del valore dello spin, *intero* o *semi-intero*. Le prime appartengono al settore dell'identità, a N-alità nulla, mentre le seconde appartengono al settore della fondamentale.

Dalle regole di composizione dei momenti angolari si ottiene la conferma di quanto detto prima: se si moltiplica una rappresentazione qualsiasi per una a spin intero il settore di N-alità di partenza rimarrà invariato. Se invece si moltiplica per una rappresentazione a spin semi-intero il risultato sarà una combinazione di rappresentazioni appartenenti al subset opposto.

3.2 Accoppiamento dei Gluoni con le Sorgenti

Sappiamo che in teoria di pura gauge gli unici gradi di libertà sono rappresentati dai gluoni, mentre i quark compaiono unicamente come *sorgenti statiche*. In questo contesto tali sorgenti non sono caratterizzate dalla loro struttura intrinseca, ma dal modo in cui i gluoni *interagiscono* con esse, ciò perché le osservabili fisiche dipendono solo dalla dinamica gluonica.

Ricordiamo che i gluoni vengono rappresentati dal campo di gauge, sono quindi elementi dell'algebra $su(N)$. Come tali, essi trasformano secondo la rappresentazione aggiunta del gruppo $SU(N)$.

Il tableaux di Young per l'aggiunta contiene N box [33, 17] quindi, secondo la definizione data precedentemente, l'N-alità corrispondente è pari a 0. Per questo motivo l'accoppiamento di un numero qualsiasi di gluoni con

¹Ricordiamo che l'N-alità è definita modulo N , quindi $k + N - 1 = k - 1$.

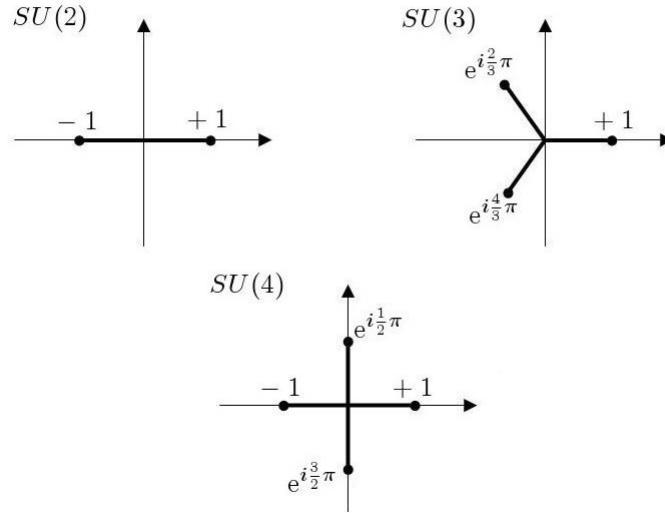


Figura 3.2: Rappresentazione del centro dei gruppi $SU(2)$, $SU(3)$ e $SU(4)$ mediante la fase degli elementi C_n nel piano complesso.

una sorgente a N-alità k non modifica il settore di quest'ultima (come si vede nella tabella 3.1). Questa informazione ci permette di comprendere l'importanza dell'N-alità delle sorgenti nello studio del tubo di flusso gluonico in teoria di Yang-Mills.

Per fissare le idee occupiamoci del caso di $SU(2)$, la stessa discussione si può generalizzare per gli altri gruppi di gauge.

Consideriamo 2 sorgenti $q_{3/2}$ nella rappresentazione $\{3/2\}$ di $SU(2)$. Quest'ultima si ottiene nella scomposizione del prodotto tensoriale fra 3 rappresentazioni fondamentali $\{1/2\}$. Per quanto detto nella sezione precedente l'N-alità di $q_{3/2}$ è quindi $k_{3/2} = 1$.

Indichiamo ora con $V_{3/2}(R)$ il potenziale che si instaura fra queste cariche, per distinguerlo dal $V(R)$ relativo alle sorgenti in rappresentazione $\{1/2\}$.

Mediante simulazioni numeriche si è osservato che il potenziale $V_{3/2}(R)$, per valori di R sufficientemente piccoli, cresce più rapidamente di $V(R)$ [34]. Infatti la tensione di corda $\sigma_{3/2}$ è maggiore rispetto a quella che si misura

fra sorgenti in rappresentazione fondamentale:

$$\sigma_{3/2} > \sigma \quad (3.2)$$

questo comportamento può essere interpretato considerando il fatto che le sorgenti $q_{3/2}$ hanno maggiore carica di colore.

A partire da un certo valore di R in poi però, l'andamento del potenziale $V_{3/2}(R)$ diventa *indistinguibile* da quello di $V(R)$. In questo caso si parla di *decadimento* della corda in rappresentazione $\{3/2\}$ verso la corda in rappresentazione fondamentale.

Si può interpretare questo decadimento come l'effetto dell'accoppiamento di un gluone con la sorgente $q_{3/2}$. Se infatti, mediante il formalismo dei Tableaux di Young, scomponiamo il prodotto tensoriale della rappresentazione $\{3/2\}$ con l'aggiunta ($\{1\}$) di $SU(2)$ otteniamo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \left\{ \frac{3}{2} \right\} \otimes \{1\} = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \oplus \left\{ \frac{3}{2} \right\} \oplus \left\{ \frac{5}{2} \right\} \end{array} \quad (3.3)$$

per via della minore tensione σ , la corda in rappresentazione fondamentale è *energeticamente favorita* rispetto alle corde in rappresentazione $\{3/2\}$ e $\{5/2\}$. Come risultato, la configurazione di flusso gluonico più probabile è quella della corda fondamentale e si ha il decadimento. Generalmente si dice che il gluone scherma la carica $q_{3/2}$.

Consideriamo ora la corda in rappresentazione fondamentale $\{1/2\}$: questa è la configurazione a *energia minore* nel settore di N-alità 1, quindi, dal momento che l'accoppiamento con i gluoni non modifica l'N-alità, non può verificarsi alcun decadimento. Questo discorso vale però unicamente nella teoria di Yang-Mills, poiché in modello con fermioni dinamici è possibile anche un decadimento della corda fondamentale, mediante la creazione di una coppia quark-antiquark che determina la *rottura della corda*.

Generalizzando la discussione precedente, possiamo affermare che, al crescere della distanza R , una corda in una rappresentazione \mathcal{R} di un dato settore ad N-alità k , tende a decadere nella corda in rappresentazione \mathcal{R}_s a dimensionalità minima di quel settore. Quest'ultima si definisce quindi *corda stabile* [35, 36, 37].

Nell'applicazione della teoria effettiva di corda per coppie di sorgenti

statiche in rappresentazioni più complesse della fondamentale, siamo quindi interessati all'N-alità delle sorgenti e non alla loro rappresentazione specifica.

Il tubo di flusso che congiunge due sorgenti ad N-alità k e $N - k$ si descrive tramite la dinamica corda che viene detta *k-corda*².

3.3 La 2-corda

Nel caso specifico che vogliamo studiare, rappresentato in figura 3.1, le sorgenti Q e \bar{Q} sono rispettivamente la sovrapposizione di 2 sorgenti in rappresentazione fondamentale e di 2 sorgenti in rappresentazione antifondamentale. Q appartiene al settore di N-alità 2 mentre \bar{Q} appartiene al settore $N - 2$. Nell'interpretazione effettiva le due sorgenti sono quindi connesse da una 2-corda.

Il prodotto tensoriale di due fondamentali appartenenti al gruppo \mathcal{G} determina una rappresentazione *riducibile* di \mathcal{G} . Per estrarne le componenti irriducibili scomponiamo tale prodotto utilizzando ancora una volta i Tableaux di Young :

$$\square \otimes \square = \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (3.4)$$

la rappresentazione risultante è un tensore a due indici di colore Q^{ij} , combinazione lineare delle componenti irriducibili $S^{ij} = Q^{\{ij\}}$ e $A^{ij} = Q^{[ij]}$, ottenute rispettivamente tramite simmetrizzazione e anti-simmetrizzazione degli indici.

La rappresentazione S^{ij} ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$, mentre la A^{ij} ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$. Di conseguenza la corda stabile si instaura fra due sorgenti nella rappresentazione A^{ij} .

Questa affermazione è verificata in letteratura (per esempio [38, 39, 40]), i dati numerici mostrano infatti che la 2-corda in rappresentazione simmetrica S^{ij} ha una tensione σ maggiore rispetto alla 2-corda in rappresentazione antisimmetrica A^{ij} , questo ne determina il decadimento verso la configurazione stabile.

²Osserviamo che una k-corda connette necessariamente una carica nel settore k con una carica nel settore $N - k$. Dal punto di vista della dinamica effettiva questi due settori sono equivalenti.

3.3.1 La Rappresentazione $\{6\}$ di $SU(4)$

Proviamo ora a costruire una sorgente ad N-alità 2 moltiplicando tensorialmente due rappresentazioni fondamentali q dei gruppi di gauge di grado 2, 3 e 4, prendiamo ancora in considerazione la figura 3.2:

SU(2) Abbiamo già trattato questo caso, sappiamo che il prodotto di due sorgenti in rappresentazione fondamentale di $SU(2)$ determina una sorgente nel settore di N-alità nulla, quindi l'unica corda stabile possibile per $SU(2)$ è la fondamentale. Di fatto il tableaux di Young di A^{ij} per $SU(2)$ corrisponde all'identità.

SU(3) Nel caso di $SU(3)$ osserviamo che la risultante di $q \otimes q$ è nel settore dell'anti-fondamentale. Dal punto di vista dell'N-alità è come se avessimo eseguito una semplice coniugazione di carica, che non porta alla costruzione di una K-corda.

SU(4) Il primo caso in cui è possibile formare una K-corda stabile è quindi la teoria con simmetria $SU(4)$. Sempre in figura 3.2 vediamo infatti che esiste un settore self-coniugato ad N-alità 2 che corrisponde all'elemento $C_2 = (\mathbf{1} \cdot e^{i\pi}) \in \mathcal{L}_4$. Scegliamo quindi di considerare questa teoria.

Il prodotto di due fondamentali di $SU(4)$ fornisce la combinazione delle rappresentazioni $\{10\}$ simmetrica e $\{6\}$ antisimmetrica³

$$\begin{aligned} \square \otimes \square &= \square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \{4\} \otimes \{4\} &= \{10\} \oplus \{6\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

la 2-corda stabile rappresenta quindi il tubo di flusso che si instaura fra due sorgenti nella rappresentazione $\{6\}$, in cui il gruppo agisce su tensori a due indici di colore anti-simmetrizzati.

Il nostro obiettivo è quello di misurare il potenziale di carica statica associato a queste tipo di sorgenti, al fine di investigare la dinamica della 2-corda che le connette.

³Le rappresentazioni solitamente si caratterizzano con un numero pari alla loro dimensionalità, a differenza del caso di $SU(2)$, dove, come abbiamo visto in dettaglio, si tende ad utilizzare il numero quantico semi-intero j .

3.4 Potenziale in Rappresentazione $\{6\}$

Abbiamo visto che in un sistema a due sorgenti in rappresentazione fondamentale la teoria effettiva di corda descrive la dinamica di interazione mediante l'azione di una corda fluttuante.

Analogamente, nel sistema di cariche Q/\bar{Q} possiamo proporre una descrizione effettiva in cui il tubo di flusso gluonico è determinato dalla dinamica di una 2-corda.

Sebbene la 2-corda risulti essere la sovrapposizione di due corde in rappresentazione fondamentale (si veda la figura 3.1) non si conosce la struttura geometrica di questo sistema. Infatti non si può stabilire a priori se queste due componenti possono essere risolte oppure se la 2-corda si comporta come un unico oggetto fluttuante.

In prima approssimazione possiamo tuttavia proporre un potenziale analogo al (2.30) ricavato nell'ipotesi di *corda bosonica libera* nel caso di sorgenti in rappresentazione fondamentale. Secondo questa descrizione l'andamento lineare confinante è corretto da un termine proporzionale a R^{-1} :

$$V_6(R) = \sigma_6 R + \mu + \frac{\gamma_6}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (3.6)$$

dove σ_6 è, come abbiamo spiegato, più grande della tensione della corda fondamentale. Anche in questo caso μ è una costante derivante dalla self-energia del sistema.

La correzione $\frac{\gamma_6}{R}$ è determinata dai gradi di libertà senza massa della 2-corda, analogamente a quanto discusso nel capitolo precedente.

Dal calcolo numerico del potenziale $V_6(R)$ vogliamo quindi misurare il valore della costante γ_6 per confrontarlo con il coefficiente γ del termine di Luscher nella corda di fondamentale. Questa misura ci porterà a trarre alcune conclusioni riguardanti la struttura di queste corde composte.

Non avendo indicazioni precise sulla struttura geometrica della 2-corda, a priori è possibile delineare solo alcune *ipotesi* plausibili sul comportamento che possiamo riscontrare.

Una prima possibilità è che le due componenti fondamentali della 2-corda siano trasparenti l'una all'altra, cioè siano libere di oscillare indipendentemente senza alcuna interazione.

Il coefficiente γ del termine di Luscher dipende dal numero $d - 2$ dei

gradi di libertà trasversali del tubo di flusso. Per questo motivo, se le corde non interagiscono, ci aspettiamo che il potenziale $V(R)$ estratto dai dati numerici sia tale per cui:

$$\gamma_6 \rightarrow 2\gamma_f, \quad R \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

infatti, in una situazione di questo tipo, ci troveremmo in presenza di un sistema con il *doppio* dei gradi di libertà.

Questa non è l'unica ipotesi che possiamo formulare, è infatti probabile che le corde fondamentali componenti la 2-corda *interagiscano* in qualche misura. È possibile che, per via di questa interazione, le due corde non siano più risolvibili e il sistema si comporti come un *unico oggetto oscillante*.

In questo caso il numero di gradi di libertà risolti a grandi distanze sarà quello di un'unica corda e i dati numerici ci forniranno un andamento di $V(R)$ per cui:

$$\gamma_6 \rightarrow \gamma_f, \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Accanto a queste due situazioni limite, vi sono altre possibilità con $\gamma_f < \gamma_6 < 2\gamma_f$. Vi è per esempio una congettura secondo cui il coefficiente γ_6 dipende dai valori intermedi delle tensioni delle k-corde [41] secondo la:

$$\gamma_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_f} \gamma_f \quad (3.9)$$

nel lavoro [41] troviamo anche un supporto numerico tramite simulazioni per \mathbb{Z}_4 a questa ipotesi.

Un'ulteriore possibilità, in uno spazio-tempo a dimensionalità $d = 4$, è che il tubo di flusso composto abbia gradi di libertà *rotazionali* privi di massa, che quindi contribuiscano ad aumentare il coefficiente γ_6 . Tuttavia, nelle nostre simulazioni, in cui consideriamo il caso $d = 3$, non possiamo mettere alla prova la presenza di questi gradi di libertà.

Capitolo 4

La Simulazione

Nel contesto della teoria di campo quantistica è possibile ottenere dei risultati analitici solo per sistemi molto semplici o tramite approssimazioni sostanziali, per questo motivo i lavori teorici vengono spesso affiancati da studi computazionali.

I dati prodotti dalle simulazioni numeriche permettono infatti di indirizzare lo studio teorico confutando o confermando le ipotesi proposte e, talvolta, aiutando a formularne delle nuove.

Il formalismo delle teorie di gauge su reticolo fornisce un contesto naturale in cui utilizzare un approccio numerico. Per via dello spazio-tempo discretizzato, gli integrali funzionali, che determinano il valore di aspettazione delle osservabili fisiche, possono essere calcolati numericamente.

La tecnica numerica che si utilizza in questi casi è il metodo Monte Carlo, che si basa su una stima statistica degli integrali funzionali.

Dopo aver introdotto gli aspetti principali di questo metodo illustreremo un algoritmo in grado di implementare il calcolo del potenziale di carica statica in teoria di gauge con simmetria $SU(N)$.

Per prima cosa metteremo a punto un programma che generi le configurazioni di una teoria di Yang-Mills con simmetria $SU(2)$. Dopodiché, tramite una tecnica algebrica proposta da Cabibbo e Marinari [42], generalizzeremo questo algoritmo per il caso di gruppo di simmetria $SU(N)$. A questo punto, descriveremo il metodo multi-level [25] che permette di ricavare il correlatore di loop di Polyakov con un'elevata efficienza di calcolo.

Infine, vedremo come passare dalle sorgenti in rappresentazione fondamentale di $SU(4)$ a sorgenti in rappresentazione $\{6\}$.

4.1 Simulazioni Monte Carlo

In questa sezione si presenta la tecnica computazionale che si utilizza per estrarre i valori di aspettazione delle osservabili in teoria di gauge. A tale scopo è necessario calcolare numericamente gli integrali funzionali (1.40) e (1.41), che rappresentano rispettivamente il valore d'aspettazione dell'osservabile fisica O e la funzione di partizione della teoria. Riscriviamoli qui sotto per comodità:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) O(\{U(b)\}) \exp(-S[U]) \quad (4.1)$$

$$Z = \int \prod_b dU(b) \exp(-S[U]) \quad (4.2)$$

In cui S è l'azione di Wilson (1.35). Si ricordi che l'integrazione è intesa su tutte le configurazioni delle variabili di link $U(b)$ del reticolo spazio-temporale.

L'approccio numerico impone che il reticolo su cui vogliamo effettuare questi calcoli sia un sistema finito, i valori d'aspettazione (4.1) e (4.2) sono quindi integrali multidimensionali a dimensione finita.

Nonostante il numero finito di variabili di integrazione, lo spazio delle configurazioni da sommare è eccessivamente esteso per il calcolo diretto di questo tipo integrali.

Consideriamo ad esempio un reticolo bidimensionale quadrato con lato 32, quindi con 1024 siti. In questo caso, il calcolo di un'osservabile richiede una somma sulle possibili configurazioni di 2048 variabili di link. Anche considerando variabili binarie, il numero delle operazioni richieste è $2^{2048} \sim 3 \times 10^{600}$, che è al di là delle attuali possibilità di calcolo.

Per questa ragione, per effettuare questo tipo di integrazioni si utilizza un approccio statistico chiamato metodo *Monte Carlo*.

4.1.1 Integrazione Monte Carlo

L'idea di base del metodo Monte Carlo è quella di campionare lo spazio delle configurazioni C possibili generando un insieme $\{C_i\}_{i=1}^N$. Il risultato dell'integrazione viene quindi stimato tramite una media aritmetica della funzione integranda, calcolata su ciascuna di queste configurazioni C_i .

Se, per esempio, si vuole calcolare con questo metodo l'integrale multi-

dimensionale

$$I = \int_D d^d x f(\vec{x}) \quad (4.3)$$

si campiona il dominio D selezionando N valori indipendenti del vettore \vec{x} . Con questi valori si calcola una stima I_{MC} di I :

$$I_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\vec{x}_n), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} I_{MC} = I \quad (4.4)$$

la varianza della funzione f permette di stimare l'errore di I_{MC} :

$$\sigma^2(f) = \int_D d^d x (f(\vec{x}) - I)^2 \quad (4.5)$$

possiamo infatti mediare lo scarto quadratico fra I_{MC} e I su tutti possibili sample $\{\vec{x}\}_{i=1}^N$, ricavando la varianza della stima dell'integrale:

$$\sigma^2(I_{MC}) = \int_D d^d x_1 \cdots \int_D d^d x_N (I_{MC} - I)^2 = \frac{\sigma^2(f)}{N} \quad (4.6)$$

per il teorema del limite centrale, se N è abbastanza grande, I_{MC} si distribuisce normalmente intorno al valore atteso I con deviazione standard pari a $\frac{\sigma(f)}{\sqrt{N}}$. L'accuratezza del risultato così ottenuto dipende quindi da $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Sottolineiamo che negli altri metodi di integrazione diffusi l'errore dipende dal crescente numero delle dimensioni, mentre nel Monte Carlo ciò non si verifica. Questo è il motivo per cui il calcolo di integrali funzionali è generalmente affrontato con questa tecnica.

4.1.2 Importance Sampling

Supponiamo di voler calcolare l'integrale (4.1) in teoria di Yang-Mills su reticolo. L'azione di questa teoria (1.35) può essere riscritta in funzione dell'energia media per placchetta $\epsilon[U]$, definita in sottosezione 1.5.1 come:

$$\epsilon[U] \equiv \frac{1}{\mathcal{N}_p} \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_p \right) \quad (4.7)$$

dove \mathcal{N}_p è il numero delle placchette del reticolo. Utilizzando ϵ otteniamo la seguente espressione per l'azione di Wilson:

$$S[U] = \mathcal{N}_p \beta \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_p \right) = \mathcal{N}_p \beta \epsilon[U]. \quad (4.8)$$

Definiamo ora la densità spettrale delle configurazioni:

$$D(\epsilon) \equiv e^{\mathcal{N}_p s(\epsilon)} \equiv \int \prod_b dU(b) \delta(\mathcal{N}_p \beta \epsilon - S[U]) \quad (4.9)$$

in cui $s(\epsilon)$ è una densità di entropia, in analogia con la meccanica statistica. Se sfruttiamo l'identità $\int d\epsilon \delta(\mathcal{N}_p \beta \epsilon - S[U]) = 1$ nell'espressione (4.1) possiamo utilizzare la definizione (4.9) per ottenere:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int d\epsilon D(\epsilon) e^{-S[U]} = \int d\epsilon e^{\mathcal{N}_p [s(\epsilon) - \beta \epsilon[U]]}. \quad (4.10)$$

Se il numero delle placchette \mathcal{N}_p si considera molto grande¹, l'integrale è determinato principalmente dal contributo delle configurazioni che minimizzano l'esponente dell'integranda. Un campionamento distribuito uniformemente risulta perciò molto poco efficiente.

Per aumentare l'efficienza di calcolo, è conveniente quindi generare il set $\{C_i\}_{i=1}^N$ con densità di probabilità proporzionale al fattore di Boltzmann $e^{-S[U]}$ della teoria. Con questa tecnica, che si chiama importance sampling [43], la stima I_{MC} converge più velocemente al valore atteso I , e il tempo di calcolo richiesto dalla simulazione risulta notevolmente ridotto.

4.1.3 Il Reticolo

Il metodo Monte Carlo si mostra quindi adatto allo studio della teoria di gauge su reticolo. Questo perché non si effettua alcuna approssimazione sull'azione e si vanno a calcolare le osservabili vere e proprie della teoria, seppur dopo un importance sampling delle configurazioni.

Applichiamo questa tecnica di integrazione alla teoria di pura gauge con azione di Wilson, definita su uno spazio-tempo reticolare a tre dimensioni.

Per fare ciò occorre definire le caratteristiche geometriche dello spazio-tempo:

¹Il reticolo per la simulazione è finito ma, come vedremo, abbastanza esteso perché questo numero si consideri grande.

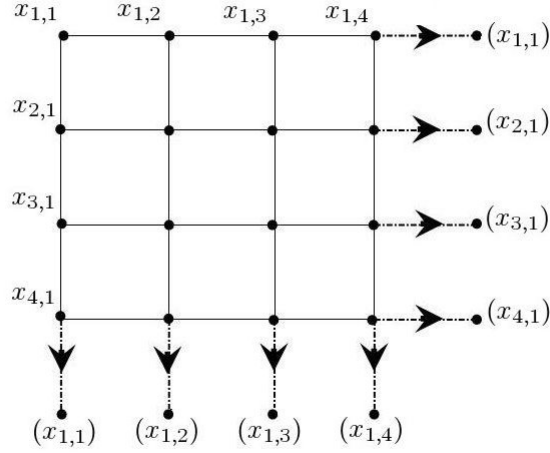


Figura 4.1: Condizioni al bordo periodiche nello spazio-tempo reticolare.

scegliamo un reticolo cubico finito in tre dimensioni, con passo reticolare a . Il sistema si estende in direzione temporale per n siti, quindi la lunghezza dello spigolo temporale è data da $L = na$. Nelle due direzioni spaziali invece l'estensione è di m siti, con una lunghezza risultante $L_s = ma$.

I due numeri n e m devono essere sufficientemente grandi da evitare che entrino in gioco effetti dovuti alla taglia finita del reticolo.

A tale scopo risultano molto importanti le condizioni di bordo. Per capire meglio consideriamo l'esempio di un reticolo cubico di lato $8a$. In questo caso avremo $8^3 = 512$ siti, di cui ben $8^3 - 6^3 = 296$, quindi più della metà, si trovano sulla superficie esterna del cubo.

Per ridurre gli effetti di bordo conviene quindi considerare condizioni periodiche, ovvero sia affiancare infinite copie del sistema in ogni direzione come in figura (4.1), trasformando la struttura geometrica complessiva da quella di un parallelepipedo a quella di un toro tridimensionale. Come si nota in figura, i siti che prima erano sul bordo, ora sono circondati in ogni direzione da altri siti.

Ad ogni sito x del reticolo corrispondono dunque 3 link, associati alle tre direzioni positive dello spazio-tempo (figura 4.2), per un totale di $N_b = 3m^2n$ link.

Una configurazione C_i del campo di gauge sul reticolo appena definito,

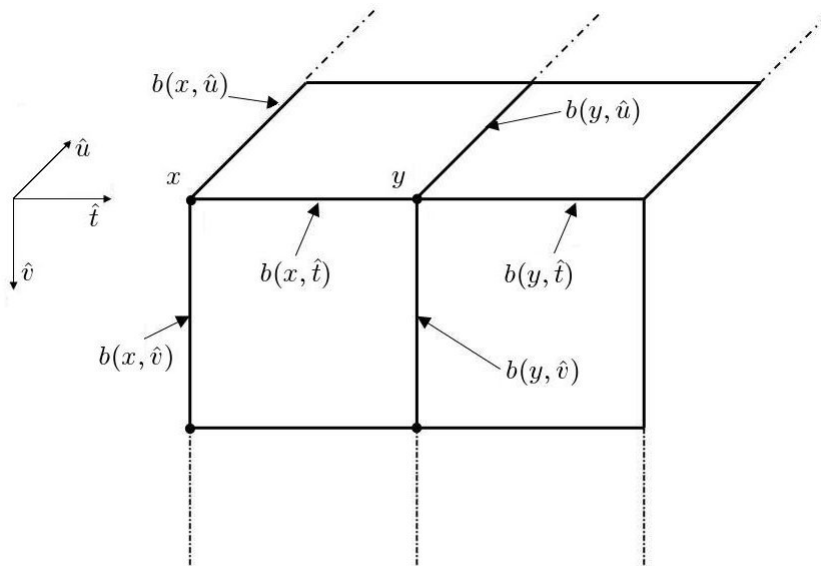


Figura 4.2: Notazione per indicare i link del reticolo utilizzata nella simulazione.

viene rappresentata da un set di N_b elementi $U(b) \in SU(N)$, associati a ciascuno dei link b . Nella memoria del computer dobbiamo considerare quindi un array \mathcal{U} che contenga N_b matrici.

Per il calcolo del valore di aspettazione (4.1) mediante integrazione Monte Carlo occorre generare una sequenza di configurazioni $\{C_i\}_{i=1}^N$ di questo vettore \mathcal{U} tramite algoritmi di aggiornamento che definiremo a breve. Per ogni C_i si memorizza quindi il valore dell'osservabile reticolare $O(C_i)$, ricavando un set di N misure $\{O(C_i)\}_{i=1}^N$. La stima dell'integrale si ottiene infine dalla media aritmetica di queste misure:

$$\langle O \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(C_i) \quad (4.11)$$

4.2 Aggiornamento delle Variabili di Link

Nella trattazione delle teorie di campo mediante simulazioni Monte Carlo non si è in grado di generare direttamente l'importance sampling $\{C_i\}_{i=1}^N$.

La tecnica che si utilizza prevede di ricavare la nuova configurazione C_{i+1} a partire dalla precedente C_i , tramite la trasformazione delle variabili di link.

La generazione dell'intera sequenza $\{C_i\}_{i=1}^N$ richiede quindi che il reticolo sia sottoposto ad una sorta di dinamica numerica. Questa evoluzione avviene lungo una direzione temporale, detta tempo Monte Carlo, che non ha nulla a che vedere con il tempo del sistema fisico.

Il set di configurazioni così prodotto si definisce catena markoviana, nella quale il passaggio dalla configurazione C_i alla nuova C_{i+1} viene determinata da una matrice di transizione T , per cui valgono le proprietà:

$$T(C_i \rightarrow C_{i+1}) \geq 0 \quad (4.12)$$

$$\int D[C_{i+1}]T(C_i \rightarrow C_{i+1}) = 1 \quad (4.13)$$

la prima condizione stabilisce che gli elementi della matrice T siano non-negativi, e che quindi possano essere interpretati come probabilità di transizione tra due configurazioni. Si può inoltre richiedere che la disuguaglianza (4.12) valga in senso stretto, il che significa che ogni configurazione ha probabilità $P > 0$ di comparire nella catena markoviana. Questa proprietà si definisce ergodicità in senso stretto. La seconda condizione normalizza la probabilità di transizione a 1.

La caratteristica tipica delle catene di Markov sta nel fatto che definiscono un processo a memoria breve: data la configurazione presente C_i gli stati passato C_{i-1} e futuro C_{i+1} risultano statisticamente indipendenti l'uno dall'altro.

La matrice T agisce sulla densità di probabilità di una configurazione C_i in modo che C_{i+1} sia determinata dalla media su tutte le possibili configurazioni precedenti:

$$P(C_{i+1}) = \int D[C_i]T(C_i \rightarrow C_{i+1})P(C_i) \quad (4.14)$$

possiamo considerare $P(C_i)$ un vettore che assegna ad ogni C_i una certa probabilità. Simbolicamente la contrazione (4.14) può essere scritta come:

$$P(C_{i+1}) = T(C_i \rightarrow C_{i+1}) \cdot P(C_i). \quad (4.15)$$

Se la catena markoviana è temporalmente omogenea, cioè descritta dalla

medesima matrice di transizione T in ogni istante del tempo Monte Carlo, allora esiste una distribuzione di equilibrio tale che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k \cdot P(C_i) = P_{eq}(C_i) \quad (4.16)$$

questo significa che $P_{eq}(C_i)$ è un autovettore di T con autovalore 1 e, in notazione simbolica, vale la:

$$T \cdot P_{eq} = P_{eq}. \quad (4.17)$$

Se la distribuzione all'equilibrio è proporzionale al fattore di Boltzmann

$$P_{eq}(C_i) \propto e^{-S[C_i]} \quad (4.18)$$

allora il processo markoviano genera un set di configurazioni $\{C_{i,m}\}_{i=1}^{N_m}$ che può essere utilizzato per il metodo Monte Carlo. Abbiamo introdotto il pedice m ad indicare che questa sequenza è una catena di Markov.

Sottolineiamo che le configurazioni $\{C_i\}_{i=1}^N$ del campionamento per l'integrazione Monte Carlo devono essere statisticamente indipendenti, mentre nel sample $\{C_{i,m}\}_{i=1}^{N_m}$, vi è correlazione fra elementi successivi. La definizione di catena di Markov prevede infatti che la configurazione $C_{i+1,m}$ sia decorrelata da $C_{i-1,m}$, ma non da $C_{i,m}$. La sequenza $\{C_{i,m}\}_{i=1}^{N_m}$ deve essere quindi campionata ulteriormente in modo da ottenere un set di configurazioni indipendenti.

Un metodo che implementa un processo markoviano al fine di generare il campionamento per un'integrazione Monte Carlo si definisce "Markov Chain Monte Carlo".

Per il calcolo degli integrali funzionali (4.1) e (4.2) l'obiettivo è determinare un algoritmo di aggiornamento di questo tipo, che generi una catena di Markov con distribuzione di equilibrio proporzionale al fattore di Boltzmann della teoria di gauge. Una condizione sufficiente affinché tale algoritmo soddisfi la (4.17) è il cosiddetto bilancio dettagliato:

$$e^{-S[C_i]} P(C_i \rightarrow C_{i+1}) = e^{-S[C_{i+1}]} P(C_{i+1} \rightarrow C_i) \quad (4.19)$$

la verifica di questa affermazione è immediata:

$$\begin{aligned} T \cdot P_{eq} &= \int D[C'] T(C' \rightarrow C) e^{-S[C']} \\ &= \int D[C'] T(C \rightarrow C') e^{-S[C]} = e^{-S[C]}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Presentiamo ora alcuni metodi di aggiornamento che soddisfano la richiesta (4.19) e sono quindi adatti per l'implementazione della simulazione.

4.2.1 Algoritmi di Aggiornamento

Nella dinamica della simulazione, l'aggiornamento dell'array \mathcal{U} è determinato dall'assegnazione di un nuovo elemento del gruppo di gauge $U'(b)$ ad ogni link b del reticolo. Un algoritmo che effettui questa operazione definisce quindi le regole con cui si determina la transizione $U(b) \rightarrow U'(b)$. La matrice T sarà data dal prodotto di tutte queste trasformazioni elementari.

Esistono differenti tipi di algoritmo che soddisfano la condizione di bilancio dettagliato. Descriviamo ora i due più diffusi, che abbiamo utilizzato nella simulazione.

L'algoritmo di Metropolis è forse l'esempio storicamente più conosciuto.

L'aggiornamento del link in questo metodo si può schematizzare in tre passi:

1. Si sceglie un nuovo candidato $U'(b)$ fra i possibili per la variabile dinamica.
2. Si calcola la variazione ΔS dell'azione determinata dalla transizione $U(b) \rightarrow U'(b)$

$$\Delta S = S[U(C')] - S[U(C)]. \quad (4.21)$$

3. Se $\Delta S < 0$ si accetta la transizione. Se $\Delta S > 0$, $U'(b)$ viene invece accettato con probabilità pari a $\exp(-\Delta S)$. Se il nuovo candidato non viene accettato la variabile $U(b)$ rimane invariata.

Tipicamente la nuova variabile $U'(b)$ viene selezionata moltiplicando la precedente $U(b)$ per un elemento di $SU(N)$ scelto casualmente entro un set limitato di possibilità, tuttavia si può anche operare in modo differente.

Per esempio, in una modifica del metodo, che prende il nome di overrelaxation[5, 44], si propone di scegliere la nuova variabile più “lontana” possibile da $U(b)$ lasciando invariata l’azione. L’intento è quello di velocizzare il processo di aggiornamento cercando di decorrelare le configurazioni successive. In questo caso non esiste un unico metodo per operare la scelta di $U'(b)$, anche perché sarebbe necessario specificare rigorosamente cosa si intende per “variabile lontana”.

Osserviamo che, dal momento che $\Delta S = 0$, la probabilità di accettazione del nuovo elemento è pari a 1. Un algoritmo che agisce in questo modo non permette però di produrre tutte le configurazioni possibili, ma limita la dinamica agli stati per cui l’azione S assume un certo valore costante. Un processo di questo tipo non soddisfa quindi l’ergodicità in senso stretto.

In effetti l’overrelaxation viene spesso utilizzato in alternanza a metodi come l’algoritmo di Metropolis tradizionale o l’heat bath, per cui vale l’ergodicità in senso stretto.

L’algoritmo Heat Bath prevede di selezionare la nuova configurazione C_{i+1} con una probabilità proporzionale al fattore di Boltzmann. Ciò significa che la matrice di transizione si scrive:

$$T(C_i \rightarrow C_{i+1}) = T(C_{i+1}) \sim e^{-S[C_{i+1}]} \quad (4.22)$$

osserviamo che nell’heat bath la richiesta di bilancio dettagliato (4.19) è soddisfatta immediatamente se si utilizza questa matrice di transizione (4.22).

Nella nostra simulazione abbiamo scelto di utilizzare un algoritmo misto, in cui si alternano un certo numero n_{hb} di iterazioni heat bath a n_{ov} iterazioni di overrelaxation.

Nelle prossime pagine presentiamo l’implementazione della fase di aggiornamento sulla nostra simulazione. Entreremo quindi negli aspetti tecnici dello sviluppo di un algoritmo Markov Chain Monte Carlo su reticolo.

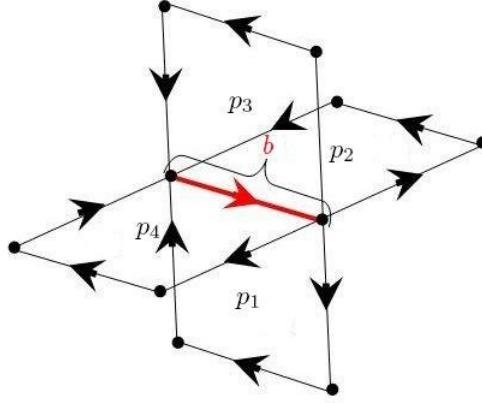


Figura 4.3: Le 4 placchette contenenti il link b in 3 dimensioni.

4.2.2 Simulazione della teoria di Yang-Mills con simmetria $SU(2)$

In questa sottosezione mostriamo come implementare l'algoritmo di aggiornamento heat bath per una simulazione di teoria di gauge $SU(2)$ su reticolo. Questo metodo fu introdotto da Creutz nel 1980 [11] e costituisce un elemento basilare per questo genere di simulazioni.

Abbiamo spiegato che nell'heat bath la regola di aggiornamento prevede di scegliere una nuova variabile di link $U'(b)$ con una densità di probabilità pari al fattore di Boltzmann, quindi:

$$dP(U') \sim \exp\{-\beta S[U']\} dU'. \quad (4.23)$$

La modifica dell'elemento associato al link b determina una variazione locale dell'azione ΔS . Infatti ΔS coinvolge esclusivamente i termini relativi alle $2(d-1)$ placchette di cui fa parte b (si osservi il caso tri-dimensionale in figura 4.3).

Ognuna di queste placchette può essere riscritta come:

$$U_p = U(b) \cdot s_p(b) \quad (4.24)$$

dove $s_p(b)$ è detta staple. Possiamo riscrivere l'azione di Wilson isolando la

parte che dipende da $U(b)$:

$$S[U] = \beta \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_p \right) = -\frac{\beta}{N} \text{ReTr } (U_b \cdot \mathcal{S}(b)) + \tilde{S} \quad (4.25)$$

in cui la somma delle staples relative al link b è indicata con $\mathcal{S}(b)$:

$$\mathcal{S}(b) = \sum_{i=1}^{2(d-1)} s_i(b) \quad (4.26)$$

operata questa scomposizione dell'azione, osserviamo che la probabilità infinitesima per la scelta di $U'(b)$ dipende soltanto dal primo termine, ossia:

$$dP(U') \sim dU'(b) \exp \left(\frac{\beta}{N} \text{ReTr } (U'_b \cdot \mathcal{S}(b)) \right). \quad (4.27)$$

Nel caso della teoria di Yang Mills con simmetria di gauge $SU(2)$, le variabili $U(b)$ sono matrici 2×2 speciali unitarie. Scegliamo di parametrizzare tali matrici con un quadri-vettore $a = (a_0, \vec{a})$:

$$U = a_0 \mathbf{1} + ia_i \sigma^i, \quad i = 1 \dots 3 \quad (4.28)$$

dove con σ_i si indicano le tre matrici di Pauli. La condizione di unitarietà degli elementi di $SU(2)$ implica che il quadrivettore abbia modulo 1:

$$a_0^2 + |\vec{a}|^2 = \det U(a) = 1 \quad (4.29)$$

con questa parametrizzazione la misura di integrazione sulla varietà del gruppo dU prende la forma:

$$dU(a) = \frac{1}{2\pi^2} \delta(a^2 - 1) d^4 a \quad (4.30)$$

la probabilità (4.27) può quindi essere calcolata in funzione del vettore a , prima però, occorre riscrivere la somma delle staples $\mathcal{S}(b)$.

Dal momento che la somma di elementi di $SU(2)$ è proporzionale ad un elemento di $SU(2)$, $\mathcal{S}(b)$ può essere espresso in questo modo:

$$\mathcal{S}(b) = k \bar{U} \quad (4.31)$$

dove $\bar{U} \in SU(2)$ e $k = \sqrt{\det(\mathcal{S}(b))}$.

Mediante il cambio di variabile:

$$U'(b) = U\bar{U}^{-1} = Uk\mathcal{S}(b)^{-1} \quad (4.32)$$

si ottiene la probabilità infinitesima per la scelta del nuovo elemento $U'(b)$:

$$dP(U(a)\bar{U}^{-1}) \sim \frac{1}{2\pi^2} \delta(a^2 - 1) d^4a \exp(\beta k a_0). \quad (4.33)$$

Quindi, una volta generato il quadrivettore a con probabilità (4.33) e calcolato l'elemento \bar{U} relativo al link b , la variabile $U'(b) = U\bar{U}^{-1}$ risulta distribuita correttamente secondo la (4.23).

Partendo dalla densità di probabilità (4.33) possiamo vedere come scegliere un vettore a in modo opportuno. Riscriviamo $dP(a)$ passando in coordinate sferiche per a . Da ciò risulta:

$$dP(a) \sim \delta(a^2 - 1) d^4a \exp(\beta k a_0) = da_0 |\vec{a}|^2 d|\vec{a}| d\Omega_a \delta(|\vec{a}|^2 - (1 - a_0^2)) \exp(\beta k a_0) \quad (4.34)$$

da cui possiamo integrare nel modulo di \vec{a} , ottenendo:

$$dP(a) \sim \frac{1}{2} da_0 d\Omega_a \sqrt{1 - a_0^2} \exp(\beta k a_0) \quad (4.35)$$

il problema è così ridotto alla generazione di un numero a_0 nell'intervallo $[-1, 1]$ con una probabilità pari a

$$dP(a_0) \sim \sqrt{1 - a_0^2} \exp(\beta k a_0) da_0. \quad (4.36)$$

Il rimanente tri-vettore \vec{a} ha il modulo determinato dal valore di a_0 per via della (4.29) e direzione scelta casualmente nello spazio tridimensionale.

Partiamo quindi dal calcolo di a_0 : si opera il cambio di variabile

$$a_0 = 1 + \frac{1}{\beta k} \ln(x) \quad (4.37)$$

con $e^{-2\beta k} < x < 1$. Questa sostituzione determina $da_0 = \frac{dx}{\beta k x}$ e , conseguentemente:

$$dP(x) \sim \sqrt{1 - a_0^2(x)} dx. \quad (4.38)$$

La scelta della x è pesata soltanto dal fattore $\sqrt{1 - a_0^2}$. Tramite una funzione di generazione di numeri pseudo-random questa operazione si intraprende

mediante un metodo di accept-reject, che si articola nei seguenti passi:

1. si estrae una x random con distribuzione uniforme compresa nell'intervallo $[e^{-2\beta k}, 1]$.
2. Si calcola $a_0(x)$ dalla (4.37).
3. Si estrae un nuovo numero random y distribuito uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$.
4. Se $y < \sqrt{1 - a_0^2(x)}$ si accetta $a_0(x)$ come valore di a_0 , altrimenti si ritorna al punto 1.

Il cambio di variabile (4.37) è richiesto per aumentare l'efficienza del metodo accept-reject appena descritto. Infatti avremmo potuto applicare le stesse 4 operazioni per generare a_0 secondo la distribuzione (4.36). L'andamento esponenziale avrebbe però ridotto notevolmente la frequenza di accettazione del numero generato, rallentando i tempi di calcolo.

A questo punto la scelta della direzione di \vec{a} determina completamente il vettore a . In questa operazione è necessario sfruttare ancora la generazione di numeri pseudo-casuali. Si estraggono due numeri: il primo, compreso fra 0 e 2π , indica l'angolo ϕ in coordinate sferiche. Il secondo numero, compreso fra -1 e $+1$, corrisponde invece al coseno dell'angolo θ . La direzione di \vec{a} è univocamente determinata da questi due numeri, che si distribuiscono uniformemente su una superficie sferica.

Come già detto, una volta identificato il vettore a , la nuova variabile di link si ottiene dalla (4.32). Ripetendo questo procedimento per tutto il reticolo si porta a termine un intero sweep Monte Carlo.

4.2.3 Simulazione della teoria di Yang-Mills con simmetria $SU(N)$

Abbiamo mostrato come implementare una simulazione per la teoria di pura gauge con simmetria $SU(2)$ su reticolo. Ora presentiamo un algoritmo di aggiornamento applicabile a teorie con generico gruppo di gauge $SU(N)$, con $N > 2$.

Nel 1984 Cabibbo e Marinari [42] proposero una tecnica per estendere il metodo presentato nella scorsa sottosezione ad un generico gruppo $SU(N)$. Illustriamo ora questo celebre risultato, che abbiamo sfruttato per costruire la nostra simulazione.

Consideriamo una teoria $SU(N)$: le variabili di link sono rappresentate da matrici $N \times N$ a coefficienti complessi, che siano speciali e unitarie. L'aggiornamento heat bath di una di queste matrici $U(b)$ si può operare sfruttando gli elementi dei sottogruppi $SU(2)$ di $SU(N)$.

Il primo passo consiste nel selezionare un set F di questi sottogruppi $SU(2)$ che non abbia left ideale. Ossia non deve esistere un subset di $SU(N)$ che rimanga invariante se moltiplicato a sinistra per F . Per la nostra simulazione abbiamo scelto:

$$\{F : SU(2)_{ij}; j = 1 \dots N, i < j\} \quad (4.39)$$

dove $a_{ij} \in SU(2)_{ij}$ è una matrice le cui componenti sono date da:

$$(a_{ij})_{kl} = \begin{cases} \alpha_{kl} & \text{se } (k, l) = (i, j) \\ 1 & \text{se } (k, l) \neq (i, j) \wedge k = l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.40)$$

α appartiene a $SU(2)$ e può essere parametrizzata secondo la (4.28).

a_{ij} è quindi una matrice $N \times N$ in cui 4 componenti sono date dagli elementi α_{ij} di una matrice di $SU(2)$, mentre per i restanti elementi coincide con l'identità in N dimensioni. In questo modo si individuano $m = \frac{N(N-1)}{2}$ sottogruppi. Ad esempio, in $SU(4)$, ci ritroviamo con 6 sottogruppi.

La (4.39) non è l'unica scelta possibile, il set F può anche contenere meno elementi. Per comodità scegliamo di indicizzare i sottogruppi con un solo indice $k = 1 \dots m$ anziché due.

Una volta scelto questo set F l'aggiornamento di $U(b)$ si opera moltiplicando la variabile di partenza per m elementi selezionati da ciascuno dei sottogruppi:

$$U'(b) = a_m \cdot a_{m-1} \cdots a_1 \cdot U(b) \quad (4.41)$$

in m passi otteniamo quindi la nuova variabile di link. Al k -mo passo ci ritroviamo con:

$$U^{(k)} = a_k \cdot a_{k-1} \cdots a_1 \cdot U. \quad (4.42)$$

Per poter concludere che il metodo di aggiornamento è di tipo heat bath occorre selezionare le "rotazioni" a_k in modo che, se $dP(U(b))$ segue la distribuzione di Boltzmann, allora anche $dP(U'(b))$.

Al fine di soddisfare tale richiesta, la probabilità infinitesima con cui selezionare a_k è la seguente:

$$dP(a_k) = \frac{da_k}{Z_k(U^{(k-1)})} \exp \left[-\beta S(a_k \cdot U^{(k-1)}) \right] \quad (4.43)$$

dimostriamo questa affermazione:

poiché si sta generando una variabile stocastica a_k nello spazio del sottogruppo $SU(2)_k$, la funzione di partizione viene integrata sulla varietà del gruppo $SU(2)$:

$$Z_k(U^{(k-1)}) = \int_{SU(2)_k} da_k \exp \left[-\beta S(a_k \cdot U^{(k-1)}) \right] \quad (4.44)$$

la misura da_k coincide quindi con la misura invariante di Haar per $SU(2)$, che in questa parametrizzazione ha la forma (4.28) già incontrata.

Per trovare $dP(U^{(k)})$ occorre integrare lo spazio degli elementi di $SU(2)_k$ allo stesso modo:

$$dP(U^{(k)}) = \int_{SU(2)_k} da_k \frac{\exp \left[-\beta S(a_k \cdot U^{(k-1)}) \right]}{Z_k(U^{(k-1)})} dP(U^{(k-1)}). \quad (4.45)$$

Ora, supponendo che $U^{(k-1)}$ sia distribuita secondo la distribuzione di Boltzmann:

$$dP(U^{(k-1)}) = \frac{dU^{(k-1)}}{Z} \exp \left[-\beta S(\cdot U^{(k-1)}) \right] \quad (4.46)$$

la (4.45) diventa:

$$dP(U^{(k)}) = \int_{SU(2)_k} da_k \frac{\exp \left[-\beta S(U^{(k)}) \right]}{Z_k(a^{-1} \cdot U^{(k)})} \cdot \frac{d(a^{-1} \cdot U^{(k)})}{Z} \exp \left[-\beta S(a^{-1} \cdot U^{(k)}) \right]. \quad (4.47)$$

L'invarianza della misura di integrazione ci fornisce le tre relazioni:

$$d(a^{-1} \cdot U^{(k)}) = dU^{(k)} \quad (4.48)$$

$$da_k = d(a_k^{-1}) \quad (4.49)$$

$$Z_k(a_k U) = Z_k(U) \quad (4.50)$$

con cui si mostra che:

$$dP(U^{(k)}) = \frac{dU^{(k)}}{Z} \exp \left[-\beta S(U^{(k)}) \right] \quad (4.51)$$

ossia che l'elemento $U^{(k)}$ segue la distribuzione di Boltzmann. Ciò significa che $U'(b)$ generato secondo questa tecnica segue anch'esso la stessa distribuzione: il metodo di aggiornamento ha quindi le caratteristiche di un algoritmo heat-bath².

La generazione delle matrici a_k si ottiene sfruttando la tecnica di Creutz per $SU(2)$ illustrata nella sottosezione 4.2.2: innanzitutto isoliamo nella (4.43) la parte dell'azione che dipende dal link b da aggiornare.

$$dP(a_k) \sim da_k \exp \left[-\frac{\beta}{N} \text{ReTr} \left(a_k \cdot U^{(k-1)(b)} \cdot \mathcal{S}(b) \right) \right] \quad (4.52)$$

$\mathcal{S}(b)$ corrisponde ancora una volta alla somma delle staples relative al link b , è quindi una matrice $N \times N$ a coefficienti complessi. Lo stesso vale anche per il prodotto $U^{(k-1)(b)} \mathcal{S}(b) = R^{(k-1)}(b)$. L'argomento dell'esponenziale nella (4.52) può essere riscritto come:

$$\text{ReTr} \left(a_k \cdot R^{(k-1)}(b) \right) = \alpha_0 \rho_0 - \alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2 - \alpha_3 \rho_3 \quad (4.53)$$

dove le α_i sono i coefficienti della matrice a_k nella parametrizzazione (4.28). Le ρ_i invece, sono combinazioni lineari reali degli elementi di $R^{(k-1)}(b)$ che si possono ricavare svolgendo esplicitamente i calcoli algebrici.

nel metodo per $SU(2)$ la probabilità infinitesima del nuovo elemento è data da:

$$\begin{aligned} dP(U'(b)) &\sim dU'(b) \exp \left(\frac{\beta}{2} \text{ReTr} (U'_b \cdot \mathcal{S}(b)) \right) \\ &\sim d^4 \alpha \exp \left(\frac{\beta}{2} \text{ReTr} (\alpha_i \mathcal{S}_i(b)) \right) \\ &= d^4 \alpha \exp (\beta (\alpha_0 \mathcal{S}_0 - \alpha_1 \mathcal{S}_1 - \alpha_2 \mathcal{S}_2 - \alpha_3 \mathcal{S}_3)) \end{aligned} \quad (4.54)$$

dalle equazioni (4.52), (4.53) e (4.54) otteniamo che la generazione dei coeffi-

²Infatti la richiesta iniziale che non esista un subset di $SU(N)$ left-ideale a F garantisce che questo processo stocastico rilassi all'equilibrio [5, 7] perché ne determina l'ergodicità in senso stretto. Perciò è sufficiente il risultato (4.51) per dimostrare che il metodo soddisfa le nostre richieste.

cienti α_i si può implementare tramite il metodo già visto per $SU(2)$, a patto che gli S_i vengano sostituiti da $\frac{\rho_i}{N}$.

Schematizziamo l'algoritmo così ottenuto. Il nuovo elemento di $SU(N)$ associato al link b si ottiene tramite i seguenti passi:

1. si calcola la matrice $R(b) = U(b)\mathcal{S}(b)$.
2. A partire da $R(b)$ si ricavano i coefficienti ρ_i .
3. Si calcola l'elemento $a_1 \in SU(2)_1$ generando i coefficienti α_i tramite il solito algoritmo di Creutz.
4. Si sostituisce $U(b)$ con $a_1U(b)$.

A questo punto si ripete il procedimento m volte per tutti i sottogruppi del set F (4.39) e si ottiene la nuova variabile di link $U(b) = a_m \cdot a_{m-1} \cdots a_1 \cdot U(b)$. L'algoritmo è così completato.

Nella nostra simulazione vogliamo però alternare all'aggiornamento heat bath anche un metodo overrelaxation. Questo, come già accennato, dovrebbe diminuire la correlazione fra le configurazioni successive senza però modificare la distribuzione di probabilità del campione.

A partire dal metodo già visto l'introduzione dell'overrelaxation si ottiene in questo modo: le operazioni da compiere per la scelta della nuova variabile di link sono le stesse dello schema dell'heat bath appena esposto, a parte nella generazione dei coefficienti α_i al passo 3. Arrivati a questo punto infatti si fissa arbitrariamente $\alpha_i = \rho_i/N$, il che porta ad una variazione di $U(b)$ con $\Delta S = 0$. Un procedimento di questo tipo implementa l'aggiornamento overrelaxation dell'elemento $U(b)$.

4.2.4 Generazione di Numeri Casuali

Concludiamo questa sezione soffermandoci sulla generazione di numeri casuali che, come abbiamo visto, gioca un ruolo cruciale nell'integrazione Monte Carlo. Una struttura computazionale non può produrre una sequenza di numeri realmente casuali.

Gli algoritmi che si utilizzano generano infatti successioni di numeri totalmente determinate dai parametri di uno stato iniziale. Queste successioni, a seconda del metodo utilizzato, approssimano più o meno bene le proprietà matematiche e statistiche dei numeri casuali. Metodi di questo tipo si definiscono generatori di numeri pseudo-random.

Per via dell'importanza del loro ruolo nel contesto delle simulazioni numeriche sono stati sviluppati numerosi algoritmi di generazione, con proprietà statistiche e di affidabilità molto differenti.

La scelta del generatore diventa quindi una questione importante, poiché un cattivo algoritmo può determinare risultati affetti da errori sistematici. Per la nostra simulazione abbiamo scelto di utilizzare un algoritmo pseudo-random molto affidabile: il generatore *ranlux* [45, 46]. Questo generatore si tratta di un miglioramento del più noto algoritmo di Marsaglia-Zaman [47], ed è stato elaborato da Luscher appositamente per questo tipo di simulazioni.

4.3 Algoritmo Multilevel

Una volta implementata la fase di aggiornamento la simulazione è in grado di produrre la statistica di configurazioni $\{C_i\}_{i=1}^N$ delle variabili di link in teoria di gauge pura su reticolo con simmetria $SU(N)$. Su questa statistica vogliamo andare a misurare il valore di aspettazione di una particolare osservabile: il correlatore di due loop di Polyakov.

$$G(R) \equiv \langle P^*(x)P(x + R\hat{v}) \rangle \quad (4.55)$$

dove i loop di Polyakov sono definiti nella (1.56). Una volta estratto il valore di questa osservabile possiamo infatti ricavare il potenziale di quark statico $V(R)$ fra due sorgenti a distanza R . Studiando l'andamento di $V(R)$ si possono osservare eventuali effetti di corda.

È possibile calcolare il valore d'aspettazione $G(R)$ tramite una media aritmetica sulle N configurazioni generate dall'algoritmo di aggiornamento. Per estrarre una stima affidabile del potenziale è però necessario il valore del correlatore per un intervallo sufficientemente ampio di distanze R fra le due sorgenti. Da ciò sorge un notevole problema computazionale legato all'accuratezza dei risultati e quindi all'efficienza dei calcoli.

Come abbiamo discusso nei capitoli precedenti il segnale che vogliamo misurare ha un andamento esponenziale decrescente:

$$G(R) \sim e^{-\sigma A} \quad (4.56)$$

dove la σ è la tensione di corda e A l'area della superficie minimale racchiusa

dai 2 loop di Polyakov. Per un reticolo di estensione temporale L abbiamo $A = RL$. L'errore di questa grandezza è determinato dalla deviazione standard s e dal numero N di misure Monte Carlo:

$$\delta G \simeq \frac{s}{\sqrt{N}}. \quad (4.57)$$

L'errore relativo sulla nostra misura si può quindi stimare con la:

$$\frac{\delta G(R)}{G(R)} \sim \frac{s}{\sqrt{N}} e^{\sigma RL} \quad (4.58)$$

la fluttuazione s delle misure si può considerare indipendente dalla distanza fra le cariche. Questo significa che, se per esempio voglio raddoppiare R , mantenendo un'incertezza relativa dello stesso ordine, è necessario aumentare esponenzialmente la statistica N .

Vediamo infatti che l'errore relativo su $G(2R)$ è dato da:

$$\frac{\delta G(2R)}{G(2R)} \sim \frac{s}{\sqrt{N_{2R}}} e^{\sigma 2RL} \quad (4.59)$$

il numero di misure N_{2R} necessario a mantenere la stessa accuratezza (4.58) anche su questo valore è quindi

$$N_{2R} \sim N e^{2\sigma(A_f - A_i)} = N e^{2\sigma RL}. \quad (4.60)$$

Valutando qualche grandezza tipica si ha un'idea dell'entità reale di questo problema: consideriamo un reticolo di dimensioni temporali $L = 32a$, con le cariche a distanza $R = 3a$, secondo le misure (che troveremo nel capitolo 5, in tabella 5.2) il correlatore è dell'ordine di 10^{-10} .

Supponiamo che con appena 10 misure il risultato abbia la precisione voluta. Sempre dai dati numerici ricavati si può osservare che, aumentando la distanza a $R = 5a$, il correlatore diventa dell'ordine di 10^{-14} e, aumentando ancora a $R = 7a$ si raggiunge un ordine di 10^{-17} .

Questo significa che il campionamento per mantenere la stessa precisione nel caso di $G(5a)$ è di ben 10^9 configurazioni, mentre per $G(7a)$ si arriva addirittura fino a 10^{15} .

Un calcolo accurato del potenziale di quark statico può quindi richiedere un tempo di calcolo troppo grande con le tecnologie attualmente disponibili.

4.3.1 La Riduzione Esponenziale dell'errore

Per aggirare questo ostacolo computazionale è necessario un approccio differente nel calcolo dell'osservabile, che non viene più ricavata in modo diretto mediando le N configurazioni.

L'idea di base è quella di separare in fattori il segnale $G(R)$ disaccoppiando la dinamica dell'intero reticolo in sottoparti indipendenti. Supponiamo di poter scomporre il segnale misurato (4.56) in k fattori il cui valore può essere calcolato separatamente:

$$G(R) \sim e^{-\sigma A} = \left(e^{-\frac{\sigma A}{k}} \right)^k = (F)^k \quad (4.61)$$

se si estrae il valore di aspettazione di questi fattori su una statistica di N configurazioni l'errore relativo è dato da:

$$\frac{\delta F}{F} \sim \frac{s'}{\sqrt{N}} e^{\frac{\sigma A}{k}} \quad (4.62)$$

la fluttuazione s' si considera dell'ordine di s . Per la propagazione degli errori, l'errore relativo su G può essere stimato pari a:

$$\frac{\delta G(R)}{G(R)} \simeq \sqrt{\left(\frac{\delta F_1}{F_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta F_k}{F_k} \right)^2} \sim \frac{s'}{\sqrt{N}} e^{\frac{\sigma A}{k}} \sqrt{k} \quad (4.63)$$

il rapporto \mathcal{R} fra l'incertezza ottenuta in questo modo e dalla misura diretta di G è quindi:

$$\mathcal{R} = \frac{s'}{s} \sqrt{k} e^{-k} \quad (4.64)$$

abbiamo ottenuto una riduzione esponenziale dell'errore relativo.

Ciò si verifica poiché la moltiplicazione di k valori di aspettazione su N misure prende in considerazione una statistica molto più ampia, di ben N^k configurazioni distinte.

Questo ragionamento è applicabile soltanto se mostriamo che il valore d'aspettazione $G(R)$ è realmente scomponibile in fattori calcolabili separatamente.

Nel 2002 Luscher e Weisz [25] mostrarono che la logica di riduzione degli errori appena discussa può essere sfruttata nella misura del correlatore di loop di Polyakov o, analogamente, nel caso dei loop di Wilson. Per prima cosa è necessario scomporre il prodotto di loop di Polyakov $P^*(x)P(x + R\hat{v})$

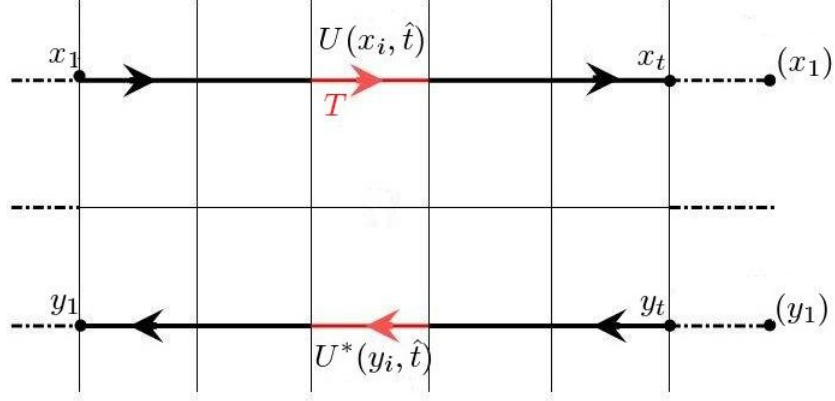


Figura 4.4: 2 loop di Polyakov. Si evidenzia uno degli operatori 2-link T (in rosso) che costituiscono la coppia di loop.

in un prodotto di operatori elementari: gli operatori 2-link.

Come rappresentato in figura 4.4 si individuano questi fattori di scomposizione come le coppie di link con la medesima coordinata temporale:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta_0}(t) = U_{\alpha\beta}^*(x, t) U_{\gamma\delta}(x + R\hat{v}, t) \quad (4.65)$$

in cui si è sottointeso che la direzione dei link è temporale. Scriviamo il prodotto dei due loop esplicitando questi nuovi operatori:

$$P^*(x)P(x + R\hat{v}) = \{U_{\alpha\epsilon_0}(x, 0) \cdots U_{\epsilon_{L-a}\alpha}(x, L-a)\}^* \cdot \\ \cdot \{U_{\gamma\rho_0}(x + R\hat{v}, 0) \cdots U_{\rho_{L-a}\gamma}(x + R\hat{v}, L-a)\} \quad (4.66)$$

gli indici ϵ_i e ρ_i sono contratti nelle moltiplicazioni di variabili di link lungo i loop di Polyakov, gli indici α e γ invece sono contratti all'inizio e alla fine del reticolo. Raccogliamo quindi gli operatori 2-link:

$$= \{U_{\alpha\epsilon_0}^*(x, 0)U_{\gamma\rho_0}(x + R\hat{v}, 0)\} \cdots \{U_{\epsilon_{L-a}\alpha}^*(x, L-a)U_{\rho_{L-a}\gamma}(x + R\hat{v}, L-a)\} \\ = T_{\alpha\epsilon_0\gamma\rho_0}(0) \cdots T_{\epsilon_{L-a}\alpha\rho_{L-a}\gamma}(L-a) \\ = \{T(0)T(a) \cdots T(L-a)\}_{\alpha\alpha\gamma\gamma} \quad (4.67)$$

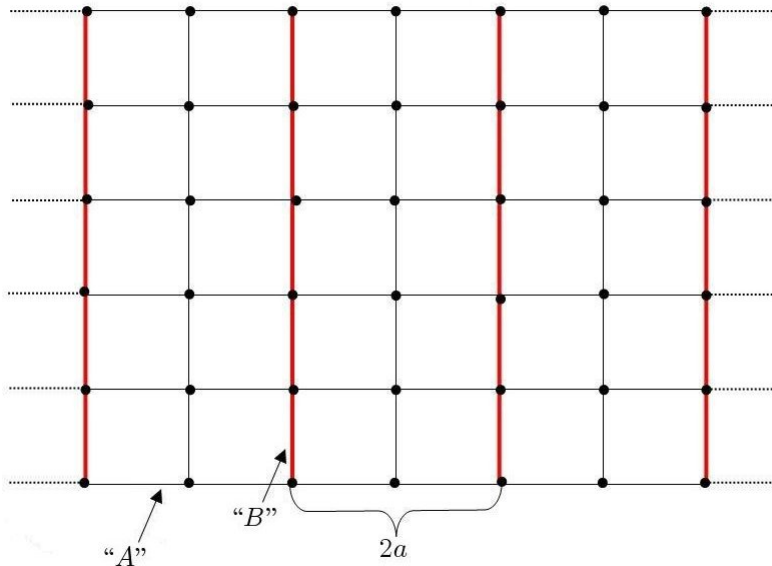


Figura 4.5: Suddivisione del reticolo in fette temporali con una dinamica indipendente. I link e le placchette appartenenti a ciascuna di queste fette saranno indicizzati con “A”, mentre quelli appartenenti alle superfici di separazione vengono indicizzati con “B”.

il prodotto di loop di Polyakov è stato così riscritto in funzione di operatori tensoriali a 4 indici, la cui legge di moltiplicazione è data da:

$$T_{\alpha\epsilon\gamma\rho} \cdot T'_{\epsilon\beta\rho\delta} = T''_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (4.68)$$

come si può vedere osservando gli indici in figura 4.4.

Questa suddivisione di $P^*(x)P(x + R\hat{v})$ è importante poiché permette di costruire i fattori F con cui scomporre il valore d’aspettazione vero e proprio $G(R)$.

4.3.2 Scomposizione di $G(R)$

Suddividiamo il reticolo in k “fette temporali” come in figura 4.5. In base al loro spessore queste sezioni reticolari conterranno il prodotto di uno o più operatori T .

Dato che l’azione di Wilson coinvolge la sola placchetta elementare, è possibile disaccoppiare la dinamica Monte Carlo nelle differenti fette temporali.

Ciò significa che possiamo fare evolvere indipendentemente le diverse sezioni del reticolo, mantenendo fissate le variabili di link che appartengono alle superfici di separazione. Di fatto possiamo campionare le configurazioni prodotte in questo modo e calcolare i valori di aspettazione ristretti alle fette temporali, come se avessimo k reticoli indipendenti.

Chiamiamo b_{ts} i link interni³ alla sezione considerata, e p_{ts} le corrispondenti placchette. Possiamo quindi definire un valore di aspettazione ristretto ai link b_{ts} :

$$[O] = \frac{1}{Z_{ts}} \int \prod_{b_{ts}} dU(b_{ts}) O(\{U(b_{ts})\}) \exp(-S_{ts}) \quad (4.69)$$

con

$$Z_{ts} = \int \prod_{b_{ts}} dU(b_{ts}) \exp(-S_{ts}) \quad (4.70)$$

e l'azione dipende solamente dalle placchette p_{ts}

$$S_{ts} = \beta \sum_{p_{ts}} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{p_{ts}} \right). \quad (4.71)$$

Ora, supponiamo che le sezioni abbiano uno spessore di h passi reticolari. Il prodotto dei loop di Polyakov si può scomporre in $k \equiv L/h$ tensori \mathcal{T} a 4 indici, ciascuno formato dal prodotto di h operatori 2-link:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}\}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= T_{\alpha\epsilon_0\gamma\rho_0}(0) \cdot T_{\epsilon_0\epsilon_1\rho_0\rho_1}(1) \cdots T_{\epsilon_{h-1}\beta\rho_{h-1}\delta}(h-1) \\ &= \{T(0) \dots T(h-1)\}_{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned} \quad (4.72)$$

ad esempio, se le fette temporali hanno spessore $2a$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} P^*(x)P(x + R\hat{v}) &= \{T(0)T(1)\}_{\alpha\epsilon_1\gamma\rho_1} \cdots \{T(L-2a)T(L-a)\}_{\epsilon_{L-2}\alpha\rho_{L-2}\gamma} \\ &= \{\mathcal{T}_1\}_{\alpha\epsilon_1\gamma\rho_1} \cdots \{\mathcal{T}_k\}_{\epsilon_k\alpha\rho_k\gamma} \end{aligned} \quad (4.73)$$

ciascuno di questi k tensori appartiene ad una delle sezioni temporali, la cui evoluzione è stata disaccoppiata. Possiamo quindi estrarre il valore d'aspettazione definito nella (4.69) per ciascuno degli operatori \mathcal{T} separatamente.

³Cioè i link compresi all'interno delle due facce che separano la fetta temporale dal resto del reticolo.

Con questi ultimi è possibile ricavare l'osservabile $G(R)$ tramite la:

$$G(R) = \langle P^*(x)P(x + R\hat{v}) \rangle = \langle [\mathcal{T}_1] \cdots [\mathcal{T}_k] \rangle_B \quad (4.74)$$

in cui il valore d'aspettazione $\langle \dots \rangle_B$ è mediato sulle differenti configurazioni delle variabili $U(b_B)$, associate ai link b_B che appartengono alle superfici di separazione fra le fette temporali. Queste variabili, che vengono mantenute fisse nel calcolo dei valori di aspettazione ristretti (4.69), costituiscono il cosiddetto campo di background.

L'errore statistico sul valore di $G(R)$ ricavato mediante la (4.74), dipende dal numero di configurazioni N_B su cui si calcola questa media sempre secondo la:

$$\delta G(R) = \frac{s_k}{\sqrt{N_B}} \quad (4.75)$$

il prodotto $[\mathcal{T}_1] \cdots [\mathcal{T}_k]$ però determina la riduzione esponenziale della deviazione standard s_k , secondo la discussione esposta in sottosezione 4.3.1.

Dimostriamo ora la validità della (4.74). Si consideri la figura 4.5, dove abbiamo indicato con l'indice B i link e le placchette appartenenti alle superfici di separazione fra le diverse fette temporali. Allo stesso modo, l'indice A individua i link e le placchette contenuti nelle diverse fette temporali. Questi ultimi si possono suddividere ulteriormente in b_1, \dots, b_k e p_1, \dots, p_k in base alla sezione a cui appartengono.

In base a questa notazione l'azione di Wilson si scompone nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S &= S_A + S_B \\ &= \beta \sum_{p_A} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_{p_A} \right) + \beta \sum_{p_B} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_{p_B} \right) \\ &= \beta \sum_{p_1} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_{p_1} \right) + \dots + \beta \sum_{p_k} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_{p_k} \right) + \\ &+ \beta \sum_{p_B} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_{p_B} \right) = S_1 + \dots + S_k + S_B \end{aligned} \quad (4.76)$$

è quindi possibile separare la funzione di partizione Z sempre sfruttando la

suddivisione dei link in b_A e b_B :

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_b dU(b) e^{-S} = \int \prod_{b_A} dU(b_A) \prod_{b_B} dU(b_B) e^{-S_A} e^{-S_B} = \\ &= \left(\int \prod_{b_A} dU(b_A) e^{-S_A} \right) \left(\int \prod_{b_B} dU(b_B) e^{-S_B} \right) = Z_A Z_B \end{aligned} \quad (4.77)$$

allo stesso modo Z_A può essere separata in fattori relativi ai link appartenenti alle diverse fette temporali $b_1 \dots b_K$:

$$Z_A = Z_1 \dots Z_K \quad (4.78)$$

ora riscriviamo il correlatore di due loop di Polyakov, che scriviamo esplicitando il valore di aspettazione e sfruttando la (4.73):

$$G(R) = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) e^{-S} \{\mathcal{T}_1\}_{\alpha\epsilon_1\gamma\rho_1} \dots \{\mathcal{T}_k\}_{\epsilon_k\alpha\rho_k\gamma} \quad (4.79)$$

separiamo l'integrale funzionale sempre in base alla suddivisione dei link, e applicando i risultati (4.77) e (4.78):

$$\begin{aligned} G(R) &= \frac{1}{Z_B Z_1 \dots Z_K} \int \prod_b dU(b) e^{-S} \{\mathcal{T}_1\}_{\alpha\epsilon_1\gamma\rho_1} \dots \{\mathcal{T}_k\}_{\epsilon_k\alpha\rho_k\gamma} = \\ &= \frac{1}{Z_B} \int \prod_{b_B} dU(b_B) e^{-S_B} \frac{1}{Z_1} \int \prod_{b_1} dU(b_1) e^{-S_1} \dots \frac{1}{Z_K} \int \prod_{b_K} dU(b_K) e^{-S_K} \cdot \\ &\quad \cdot \{\mathcal{T}_1\}_{\alpha\epsilon_1\gamma\rho_1} \dots \{\mathcal{T}_k\}_{\epsilon_k\alpha\rho_k\gamma} \end{aligned} \quad (4.80)$$

l'integrazione sull' i -esima fetta temporale agisce sull' i -esimo operatore \mathcal{T} appartenente a quella fetta, e sul fattore di Boltzmann relativo ai link b_i , questo determina il valore di aspettazione ristretto (4.69):

$$\frac{1}{Z_i} \int \prod_{b_i} dU(b_i) \{\mathcal{T}_i\}_{\epsilon_{i-1}\epsilon_i\rho_{i-1}\rho_i} e^{-S_i} = [\{\mathcal{T}_i\}_{\epsilon_{i-1}\epsilon_i\rho_{i-1}\rho_i}] \quad (4.81)$$

sfruttando questa relazione nella (4.80) ricaviamo la (4.74) concludendo così

la dimostrazione:

$$\begin{aligned}
G(R) &= \frac{1}{Z_B} \int \prod_{b_B} dU(b_B) [\{\mathcal{T}_1\}_{\alpha\epsilon_1\gamma\rho_1}] \cdots [\{\mathcal{T}_k\}_{\epsilon_k\alpha\rho_k\gamma}] e^{-S_B} = \\
&= \langle [\mathcal{T}_1] \cdots [\mathcal{T}_k] \rangle_B.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

4.3.3 Algoritmo a più livelli

Un algoritmo che calcola l'osservabile con il metodo appena descritto si definisce a 1 livello. Un punto di forza di questo schema sta nel fatto che è possibile introdurre nuovi livelli di calcolo. Infatti, per i valori di aspettazione sulle fette temporali, vale la seguente relazione:

$$[[\mathcal{T}_1]_{l_1} \cdots [\mathcal{T}_n]_{l_1}]_{l_2} = [\mathcal{T}_1 \cdots \mathcal{T}_n]_{l_2} \tag{4.83}$$

il valore di aspettazione $[\dots]_{l_2}$ è inteso su una fetta temporale di livello superiore, con spessore⁴ $2ha$. Il valore di aspettazione $[\dots]_{l_1}$ invece, riguarda la suddivisione al primo livello.

Ciò permette di annidare ulteriori livelli nel procedimento di calcolo, considerando fette temporali con spessore sempre più grande. Per questo motivo l'algoritmo prende il nome di *Multi-level*.

Sottolineiamo che, per ogni media $[\dots]_l$, siamo liberi di decidere la grandezza N_l del campione. La scelta di questi parametri deve essere operata in modo da ottimizzare l'efficienza della simulazione.

Scegliamo ad esempio un algoritmo a 2 livelli, in questo caso occorre impostare le dimensioni dei campionamenti N_{l_1} , N_{l_2} e N_B . Mantenendo fissati N_{l_2} e N_B è possibile che si ottenga la stessa precisione di calcolo sia con $N_{l_1} = 10$ che con $N_{l_1} = 20$.

L'accuratezza raggiunta per i valori d'aspettazione al primo livello $[\dots]_{l_1}$, che dipende da N_{l_1} , può essere infatti resa inutile dalle fluttuazioni delle misure al livello superiore, la cui media determina il valore d'aspettazione $[\dots]_{l_2}$. Queste misure dipendono infatti anche dalle variazioni dei link sulle superfici B_{l_1} , che separano le fette al livello 1 ma si trovano all'interno delle fette al livello 2 (si veda la figura 4.6). Vi è quindi un effetto dovuto alle fluttuazioni del campo di background su queste superfici, il quale non dipende da N_{l_1} .

⁴Ricordiamo che la fetta temporale considerata fino ad ora ha spessore ha .

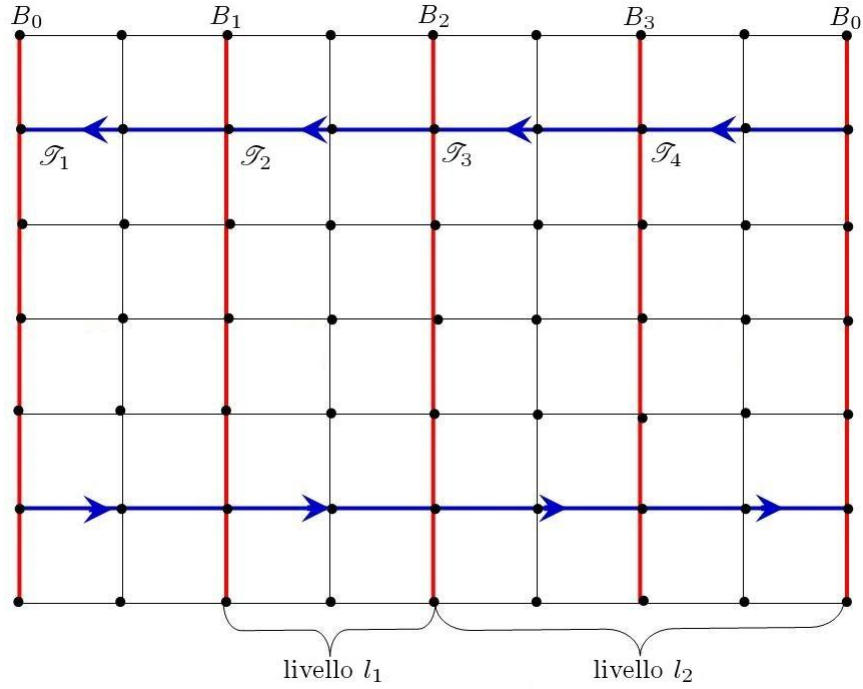


Figura 4.6: Suddivisione di un reticolo a spessore temporale $L = 8a$ per una simulazione a 2 livelli. Al livello più basso le sezioni temporali hanno spessore $2a$ mentre al secondo livello hanno spessore $4a$. Si evidenziano in rosso le 4 superfici B_i che separano le fette temporali (B_0 compare due volte) e in blu i link che costituiscono gli operatori \mathcal{T} .

Per questo motivo esiste un valore ottimale di campionamenti \tilde{N}_{l_1} oltre il quale l'aumento delle misure non incide più sul valore finale.

Oltre alla scelta dei parametri N_{l_i} l'utente può fissare il numero di cicli di aggiornamento fra configurazioni successive ad ogni livello. Anche l'aggiustamento di queste variabili può determinare notevoli cambiamenti nell'efficienza del programma.

4.3.4 Scomposizione degli operatori \mathcal{T}

Possiamo apportare un ulteriore miglioramento all'algoritmo appena presentato scomponendo gli operatori \mathcal{T} , definiti dalla (4.72), sotto forma di prodotti tensoriali.

In una fetta temporale a spessore ha l'operatore \mathcal{T} si scrive, esplicitando i

4 indici, nel seguente modo:

$$\{\mathcal{T}\}_{\alpha\beta\gamma\delta} = T(0)_{\alpha\epsilon_0\gamma\rho_0} T(1)_{\epsilon_0\epsilon_1\rho_0\rho_1} \dots T(h-1)_{\epsilon_{h-1}\beta\rho_{h-1}\delta} \quad (4.84)$$

dove si è scelta una slice con coordinate temporali $t \in (0, h-a)$. Scrivendo per esteso gli operatori 2-link otteniamo:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}\}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (U_{\alpha\epsilon_0}^*(x, 0)U_{\gamma\rho_0}(x + R\hat{v}, 0)) (U_{\epsilon_0\epsilon_1}^*(x, a)U_{\rho_0\rho_1}(x + R\hat{v}, a)) \dots \\ &\dots (U_{\epsilon_{h-1}\beta}^*(x, (h-1)a)U_{\rho_{h-1}\delta}(x + R\hat{v}, (h-1)a)) \end{aligned} \quad (4.85)$$

ora possiamo raccogliere le variabili di link che si trovano sullo stesso loop di Polyakov:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}\}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \{U^*(x, 0)U^*(x, a) \dots U^*(x, (h-1)a)\}_{\alpha\beta} \cdot \\ &\cdot \{U(x + R\hat{v}, 0)U(x + R\hat{v}, a) \dots U(x + R\hat{v}, (h-1)a)\}_{\gamma\delta} \quad (4.86) \\ &= \{\mathcal{U}^*(x)\}_{\alpha\beta} \{\mathcal{U}(x + R\hat{v})\}_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

In notazione simbolica l'equazione (4.86) si può riscrivere:

$$\mathcal{T} = \mathcal{U}^*(x) \otimes \mathcal{U}(x + R\hat{v}). \quad (4.87)$$

Le \mathcal{U} sono quindi segmenti di loop di Polyakov formate dal prodotto di un certo numero di variabili di link. In questo modo abbiamo scomposto l'operatore di fetta temporale \mathcal{T} in due componenti separate.

Analogamente al caso del multilevel tradizionale è possibile disaccoppiare la dinamica Monte Carlo delle \mathcal{U} al fine di calcolarne i valori di aspettazione separatamente. Per fare questo però, occorre suddividere di nuovo il reticolo.

Possiamo quindi introdurre un nuovo livello di calcolo, utilizzando la suddivisione rappresentata in figura 4.7. Si osservi che abbiamo selezionato due ulteriori superfici di separazione, C_1 , a cui appartengono i link fra $\mathcal{U}^*(x + R\hat{v})$ e $\mathcal{U}(x)$, e C_2 , a cui appartengono i link della superficie laterale del reticolo⁵. A questo livello l'aggiornamento interessa solo le variabili di link che appartengono alle semi-fette temporali s_1 e s_2 in cui risulta scomposto il sistema. L'evoluzione Monte Carlo di queste sezioni produce quindi

⁵Ricordiamo che le condizioni al bordo periodiche implicano che i link di C_2 siano in contatto con entrambe le sottoparti del reticolo individuate da C_1 .

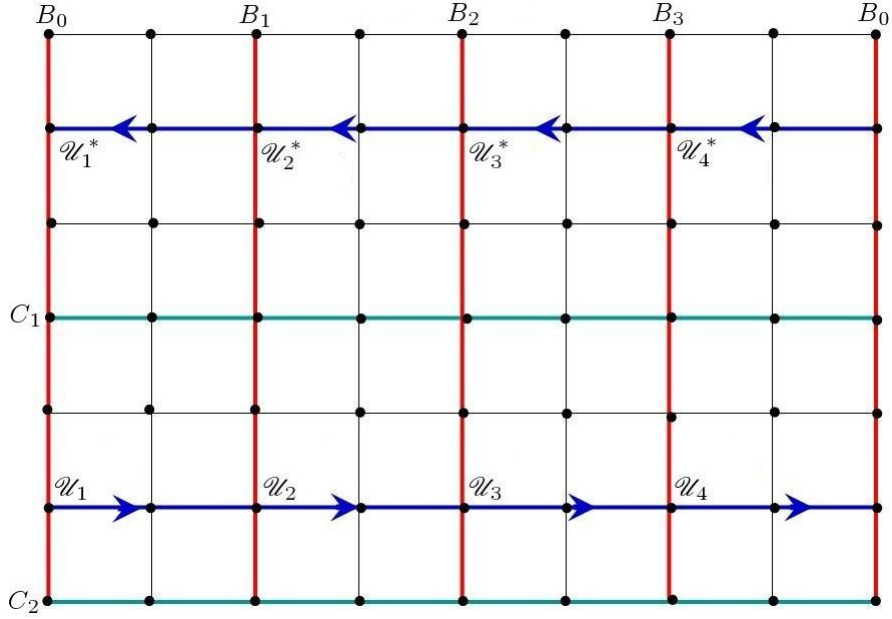


Figura 4.7: Suddivisione spaziale del reticolo in figura 4.6 con l'aggiunta del nuovo livello di calcolo. Si evidenziano le superfici di separazione C_1 e C_2 (di colore azzurro) e gli operatori \mathcal{U} , prodotto di 2 variabili di link.

i valori di aspettazione

$$[\mathcal{U}^*(x + R\hat{v})]_{s_1}, [\mathcal{U}(x)]_{s_2}. \quad (4.88)$$

in questo schema una formula analoga alla 4.74 permette di ricavare le medie al livello superiore:

$$[\mathcal{I}]_{l_1} = [[\mathcal{U}^*(x + R\hat{v})]_{s_1} \otimes [\mathcal{U}(x)]_{s_2}]_{l_1} \quad (4.89)$$

questa relazione, secondo la stessa logica della sezione 4.3.1 porta ad un'ulteriore riduzione dell'incertezza sulla misura finale.

Poiché una tale modifica sia efficace è però necessario un accorgimento. Sappiamo che i link sulle superfici di separazione C_1 e C_2 si mantengono fissati nel calcolo dei valori (4.88). Ciò determina un effetto di fondo analogo a quello prodotto dal campo di background sulle superfici B_i nel procedimento multilevel. Come illustrato precedentemente, un effetto di questo tipo può compromettere l'aumento di accuratezza garantito dalla presente tecnica di calcolo.

In questo caso specifico è però possibile minimizzare l'incidenza del campo di background considerando soltanto le coppie di loop di Polyakov disposte simmetricamente⁶ rispetto al piano di C_1 , come si può vedere in figura 4.7.

Come ultima osservazione aggiungiamo che questo nuovo livello di calcolo “spaziale” può essere annidato nel procedimento al pari dei livelli “temporali”⁷. Infatti, queste semi-fette s_i , possono essere suddivise ulteriormente lungo la direzione temporale. Ciò permette di inserire altri livelli di calcolo nella stima degli operatori (4.88).

Per rendere più chiara questa ultima affermazione proponiamo l'esempio di uno schema tipico della simulazione. Consideriamo il reticolo in figura 4.7, il procedimento di calcolo può essere articolato in 3 livelli, uno dei quali è determinato dalla nuova suddivisione spaziale:

- al livello inferiore si calcolano, per ogni fetta temporale, le grandezze $[\mathcal{W}^*(x + R\hat{v})]_{s_1}$ e $[\mathcal{W}(x)]_{s_2}$.
- Al livello successivo si procede con il prodotto tensoriale per ottenere gli operatori $[\mathcal{T}]_{l_1} = [[\mathcal{W}^*(x + R\hat{v})]_{s_1} \otimes [\mathcal{W}(x)]_{s_2}]_{l_1}$.
- Al terzo livello lo spessore delle fette temporali raddoppia e si ricavano i valori $[[\mathcal{T}]_{l_1} [\mathcal{T}_{i+1}]_{l_1}]_{l_2}$.
- Infine si estrae $G(R)$ mediando sul campo di background.

Questo è solo uno dei numerosi schemi possibili per organizzare la nostra simulazione. L'individuazione dello schema più efficiente per il calcolo di un'osservabile è una questione di notevole importanza poiché permette di risparmiare molto tempo di calcolo.

4.4 Potenziale in Rappresentazione $\{6\}$ di $SU(4)$

Le variabili di link coinvolte nel calcolo del correlatore $G(R)$ sono elementi di $SU(N)$ in rappresentazione fondamentale. In questo contesto la simulazione permette di estrarre il potenziale di quark statico nella teoria di Yang-Mills per $SU(N)$, per sorgenti a distanza R .

⁶Se R è dispari optiamo naturalmente per la situazione più simmetrica possibile, in cui una delle due cariche dista da da C_1 mentre l'altra $(d+1)a$.

⁷Con le espressioni spaziale e temporale ci riferiamo alla direzione in cui si suddivide il reticolo per la scomposizione dell'osservabile.

In questo lavoro vogliamo simulare una teoria con simmetria $SU(4)$. Per questo gruppo di gauge intendiamo calcolare:

1. il potenziale V_4 fra due sorgenti in rappresentazione fondamentale $\{4\}$ e anti-fondamentale $\{\bar{4}\}$.
2. Il potenziale V_6 , fra due sorgenti in rappresentazione⁸ $\{6\}$.

Per il calcolo di V_6 è necessario estrarre dall'elemento $U(b)$, che è una matrice in rappresentazione fondamentale, la corrispondente matrice $U_6(b)$ nella rappresentazione $\{6\}$. I calcoli delle osservabili vengono quindi condotti utilizzando questi operatori anziché matrici 4×4 a coefficienti complessi.

Illustriamo il procedimento algebrico con cui si ottengono le matrici $U_6(b)$.

Un elemento della rappresentazione fondamentale è una matrice con coefficienti:

$$U_{ij} = \text{Re } U_{ij} + i \text{Im } U_{ij} \quad (4.90)$$

che agisce su uno spazio di quadrivettori ψ_i con $i = 1 \dots 4$. Moltiplicando tensorialmente due di questi elementi U , otteniamo una matrice A di dimensione 16×16 , che opera sullo spazio dei tensori a 16 componenti del tipo $\psi_i \psi_j$, con $i, j = 1 \dots 4$.

Ora, sappiamo dalla sottosezione 3.3.1 che la rappresentazione $\{6\}$ è presente nella decomposizione del prodotto tensoriale di 2 fondamentali, secondo la relazione

$$4 \otimes 4 = 10 \oplus 6 \quad (4.91)$$

la (4.91) ci dice che lo spazio dei tensori $\psi_i \psi_j$ è la somma diretta dei sottospazi su cui agiscono le rappresentazioni irriducibili $\{10\}$ e $\{6\}$. Ricordiamo che la rappresentazione $\{10\}$ agisce su tensori a due indici di colore simmetrizzati, mentre la $\{6\}$ sul restante sottospazio di tensori a due indici antisimmetrizzati.

Al fine di isolare le matrici in queste due rappresentazioni è necessario quindi passare dalla base $\{\psi_i \psi_j\}$ alla:

$$\{\phi_{ij}\} = \begin{pmatrix} S_{ij} \\ A_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

⁸Ricordiamo dal precedente capitolo che la $\{6\}$ è self-coniugata.

dove le S_{ij} sono le 10 componenti simmetriche rispetto allo scambio di indici, mentre le A_{ij} sono le 6 antisimmetriche rimanenti. Deve quindi esistere una matrice cambio di base B per cui:

$$\phi_{ij} = (B \cdot \psi\psi)_{ij} \quad (4.93)$$

una volta calcolati i coefficienti B_{ij} possiamo riscrivere la matrice A nella base $\{\phi_{ij}\}$ tramite la:

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = A' \quad (4.94)$$

questa A' risulta essere una matrice a blocchi della forma:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} U_{10} & 0 \\ \hline 0 & U_6 \end{array} \right) \quad (4.95)$$

in cui compaiono distintamente gli operatori nelle due rappresentazioni irriducibili.

Svolgendo i calcoli appena mostrati in maniera esplicita si possono quindi ricavare i coefficienti della matrice U_6 in funzione delle U_{ij} . Una volta nota questa relazione il calcolo del correlatore $G(R)$ in rappresentazione $\{6\}$ è identico al caso della rappresentazione fondamentale.

Con quest'ultima discussione abbiamo mostrato come si costruisce la simulazione adatta al nostro scopo, nel prossimo capitolo si riportano i risultati numerici ottenuti mediante l'utilizzo delle tecniche presentate.

Capitolo 5

Risultati Numerici

In questo capitolo presentiamo i risultati ricavati mediante le simulazioni su reticolo della teoria di Yang-Mills con gruppo di gauge $SU(4)$.

Per prima cosa specifichiamo le grandezze che intendiamo estrarre dai dati numerici, in modo da collocarle nel contesto della teoria effettiva di corda. Dopodiché mostreremo i risultati ottenuti specificando i parametri del sistema simulato. Infine forniremo un'interpretazione a questi risultati traendo alcune conclusioni teoriche riguardanti il modello effettivo discusso nel corso di questo lavoro.

5.1 Le Grandezze Misurate

La teoria che abbiamo simulato è la teoria di Yang-Mills con simmetria di gauge $SU(4)$, definita su un reticolo cubico tridimensionale con passo reticolare a . L'azione scelta è l'azione di Wilson:

$$S[U] = \beta \sum_p \left\{ 1 - \frac{1}{4} \text{Re Tr } U_p \right\} \quad (5.1)$$

dove U_p è l'operatore di placchetta (si veda la sottosezione 1.4.1). Il parametro adimensionato β dipende dall'accoppiamento $g_{s,3}$ della teoria in tre dimensioni, e dal passo reticolare a secondo l'equazione:

$$\beta = \frac{8}{g_s^2 a} \quad (5.2)$$

come possiamo ricavare dall'equazione (1.91) in sezione 1.8.

Nel capitolo precedente si è spiegato che l'osservabile reticolare misurata dalla simulazione è il correlatore di loop di Polyakov a distanza R :

$$G(R) = \langle P^*(x)P(x + R\hat{v}) \rangle \quad (5.3)$$

sappiamo che da questa osservabile è possibile ricavare l'energia dello stato fondamentale di un sistema a 2 sorgenti statiche a distanza R . Questa energia si definisce potenziale di quark statico e si ricava mediante l'equazione:

$$V(R) = -\frac{1}{L} \ln G(R). \quad (5.4)$$

Lo scopo delle nostre simulazioni è misurare l'andamento del potenziale $V(R)$ fra due cariche in rappresentazione $\{4\}$ e $\{\bar{4}\}$ nonché fra due cariche in rappresentazione $\{6\}$. A partire da questa funzione è possibile quantificare gli effetti di corda e confrontarli con le previsioni del modello effettivo proposto nei capitoli 2 e 3.

Nel caso delle sorgenti in rappresentazione fondamentale ci aspettiamo che il potenziale abbia un andamento del tipo:

$$V(R) = \sigma R + \mu + \frac{\gamma}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right). \quad (5.5)$$

Decidiamo di non considerare le correzioni di ordine $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right)$, adottando l'approssimazione di corda bosonica libera (sezione 2.3): il termine di Luscher è l'effetto di corda che vogliamo estrarre a partire dal potenziale misurato. Per isolare tale effetto occorre calcolare il valore della forza F , che è data dalla derivata rispetto ad R del potenziale V :

$$F(R) = V'(R) \quad (5.6)$$

trascurando i termini di ordine superiore nell'equazione (5.5) per la forza si ottiene:

$$F_{bs}(R) \simeq \sigma - \frac{\gamma}{R^2} \quad (5.7)$$

che, come vediamo, rilassa verso il valore della tensione di corda per $R \rightarrow \infty$. Il pedice "bs" si riferisce al fatto che la funzione è calcolata in approssimazione di corda bosonica libera. Con un'ulteriore derivata è possibile isolare il coefficiente γ della correzione di Luscher. Per questo motivo, un'altra

grandezza considerata nella nostra analisi è la funzione $c(R)$, data da:

$$c(R) \equiv \frac{1}{2}R^3 F'(R) \quad (5.8)$$

sostituendo l'espressione della derivata di F_{bs} in approssimazione di corda bosonica libera si verifica che:

$$c_{bs}(R) \equiv \gamma. \quad (5.9)$$

quindi la funzione c è l'osservabile adatta per i nostri scopi.

Per quanto riguarda il caso delle sorgenti in rappresentazione¹ $\{6\}$ non si conosce la struttura geometrica della 2-corda, non abbiamo quindi un modello teorico preciso con cui calcolare delle previsioni. Tuttavia, come discusso in sezione (3.4), è lecito prevedere che il potenziale $V_6(R)$ abbia un andamento analogo a quello mostrato in equazione (5.5):

$$V_6(R) = \sigma_6 R + \mu_6 + \frac{\gamma_6}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right). \quad (5.10)$$

In questo caso non conosciamo a priori il coefficiente γ_6 ma, confrontandone la misura con il valore atteso per la corda fondamentale, ci aspettiamo di ottenere delle indicazioni riguardo a una descrizione effettiva della 2-corda. Per questo motivo, anche nel caso delle sorgenti in rappresentazione $\{6\}$, misuriamo il valore della forza e della funzione c .

Sottolineiamo che $F(R)$ e $c(R)$ devono essere definite su uno spazio reticolare, per cui è necessario sfruttare la definizione di derivata discretizzata di una funzione ϕ :

$$\phi'(R) \equiv \frac{\phi(R) - \phi(R - a)}{a} \quad (5.11)$$

tramite questa definizione si può ricavare la forma delle (5.6) e (5.8) su

¹Per evitare ambiguità, ci riferiamo alle osservabili relative alle sorgenti in rappresentazione $\{6\}$ utilizzando il pedice "6".

reticolo:

$$F(\bar{R}) \equiv \frac{V(R) - V(R-a)}{a} = -\frac{1}{La} \ln \left(\frac{G(R)}{G(R-a)} \right) \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} c(\tilde{R}) &\equiv \frac{\tilde{R}^3}{2} \frac{V(R+a) + V(R-a) - 2V(R)}{a^2} = \\ &= -\frac{\tilde{R}^3}{2a^2L} \ln \left(\frac{G(R+a)G(R-a)}{G^2(R)} \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Le funzioni così definite sono calcolate nei punti \bar{R} e \tilde{R} , che rappresentano distanze scelte in modo da minimizzare gli effetti dovuti alla discretizzazione dello spazio-tempo. Ecco la forma di queste distanze [48, 49]:

$$\bar{R}(R) = \left[2\pi \frac{\Delta_2(R-a) - \Delta_2(R)}{a} \right]^{-1} = R - \frac{a}{2} + \mathcal{O}(a^2) \quad (5.14)$$

$$\tilde{R}(R) = \left[2\pi \frac{\Delta_2(R+a) + \Delta_2(R-a) - 2\Delta_2(R)}{a^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = R + \mathcal{O}(a^2) \quad (5.15)$$

Dove $\Delta_2(\vec{x})$ è la funzione di Green del laplaciano bi-dimensionale su reticolo calcolata fra l'origine dello spazio-tempo e il punto $(0, \vec{x})$.

Con questa definizione delle funzioni F e c occorre ritornare sulle previsioni (5.7) e (5.9) per modificarle. L'andamento della forza che si ricava dalle equazioni (5.5) e (5.12) è dato da:

$$F_{bs}(\bar{R}(R)) \simeq \left(\sigma + \frac{\gamma}{R(R-a)} \right) \quad (5.16)$$

anche su reticolo è quindi previsto che la forza rilassi verso il valore della tensione di corda nel limite $R \rightarrow \infty$. Dall'equazione (5.13), sempre considerando il potenziale (5.5) si ricava l'andamento previsto per la funzione $c(R)$:

$$c_{bs}(\tilde{R}) = \tilde{R}^3 \frac{\gamma}{R(R^2 - a^2)} \quad (5.17)$$

che, per $R \rightarrow \infty$, rilassa verso il valore di γ , ma non coincide con esso come nel caso al continuo. Per via dell'equazione (5.10), le medesime previsioni valgono per il caso delle sorgenti in rappresentazione {6}, a patto che si considerino le sostituzioni $\sigma \rightarrow \sigma_6$ e $\gamma \rightarrow \gamma_6$.

5.1.1 Le Funzioni Reticolari

Occorre tenere presente che la quantità estratte tramite calcolo numerico sono tutte numeri puri, quindi grandezze adimensionate. Per ricavare le osservabili fisiche dimensionate che corrispondono a queste quantità è necessario sfruttare la lunghezza del passo reticolare a .

Ad esempio il potenziale $V(R)$ è una quantità delle dimensioni di un'energia. La corrispondente funzione reticolare adimensionata $v(r)$ si ottiene quindi in questo modo:

$$v(r) \equiv aV(ar) = -\frac{1}{l} \ln G(r) \quad (5.18)$$

dove G è il correlatore di loop di Polyakov che, essendo un numero puro, non necessita di alcun tipo di conversione. Nella (5.18) sono state definite le distanze adimensionate:

$$l \equiv \frac{L}{a}, \quad r \equiv \frac{R}{a} \quad (5.19)$$

queste distanze corrispondono ai parametri della simulazione che indicano l'estensione temporale del reticolo (l) e la distanza fra le sorgenti (r) in unità di passo reticolare a .

Ricaviamo ora le funzioni reticolari che si associano alla forza F e alla funzione c . La forza ha le dimensioni di $[a]^{-2}$, quindi la funzione adimensionata corrispondente ha la forma:

$$f(\bar{r}) \equiv a^2 F(a\bar{r}) = -\frac{1}{l} \ln \left(\frac{G(r)}{G(r-1)} \right) \quad (5.20)$$

dove la quantità \bar{r} è definita come:

$$\bar{r} \equiv \frac{\bar{R}(ar)}{a}. \quad (5.21)$$

La funzione c è invece una grandezza adimensionata, la sua corrispondente reticolare è quindi identica alla (5.13), con la definizione delle distanze r e \tilde{r} :

$$c(\tilde{r}) = -\frac{\tilde{r}^3}{2l} \ln \left(\frac{G(r+1)G(r-1)}{G^2(r)} \right) \quad (5.22)$$

in cui abbiamo definito \tilde{r} come

$$\tilde{r} \equiv \frac{\tilde{R}(ar)}{a}. \quad (5.23)$$

L'estrazione delle osservabili fisiche dai dati numerici avviene quindi quantificando la lunghezza del passo reticolare in unità fisiche.

Per fare ciò occorre fissare la scala della teoria simulata. Una scelta possibile è quella di assegnare alla radice della tensione di corda $\sqrt{\sigma}$, che ha le dimensioni di una massa, il valore sperimentale di circa 440 MeV [3].

Una volta imposta questa condizione possiamo determinare il valore del passo reticolare sfruttando la misura della tensione di corda adimensionata K ricavata dalla simulazione. Questa grandezza, per quanto detto poco fa, si definisce come:

$$K \equiv a^2 \sigma \quad (5.24)$$

Da cui ricaviamo il passo reticolare in funzione di K :

$$a = \frac{\sqrt{K}}{(\sqrt{\sigma})_{exp}} \simeq \frac{\sqrt{K}}{440} \text{ MeV}^{-1} \simeq (0.448 \times \sqrt{K}) \text{ fm} \quad (5.25)$$

in cui il pedice *exp* specifica che la tensione di corda che si considera è un valore sperimentale. Una volta misurato il valore di K è quindi possibile convertire in quantità fisiche tutti i risultati delle simulazioni e valutare l'ordine di grandezza dei fenomeni studiati².

Riscriviamo ora le previsioni della teoria effettiva di corda per le funzioni reticolari adimensionate. Le equazioni che ricaviamo possono essere direttamente comparate con i risultati della simulazione. Il comportamento previsto per il potenziale è dato da:

$$v_{bs}(r) \simeq Kr + a\mu + \frac{\gamma}{r} \quad (5.26)$$

Partendo dalla (5.16) possiamo ottenere le previsioni di corda bosonica libera per la forza adimensionata f :

$$f_{bs}(\bar{r}) \simeq K - \frac{\gamma}{r(r-1)} \quad (5.27)$$

dove la tensione di corda viene sostituita dalla quantità K .

Infine, per quanto riguarda la funzione c , che è già adimensionata, l'andamento previsto si ricava dalla (5.17) sostituendo le distanze dimensionate

²Nel nostro caso specifico, questa operazione non è rigorosa, ricordiamo infatti che abbiamo a che fare con una teoria di Yang-Mills in tre dimensioni, con gruppo di simmetria $SU(4)$. Le grandezze che misuriamo non sono quindi quantità fisiche realmente presenti in natura. Può essere comunque interessante avere un'idea degli ordini di grandezza coinvolti.

Livello	Spessore fetta	Numero misure
1	$2a$	400
2	$4a$	45
3	$8a$	15
4	$8a$	32

Tabella 5.1: Parametri relativi ai livelli di calcolo della simulazione.

con le distanze reticolari:

$$c_{bs}(\tilde{r}) = \tilde{r}^3 \frac{\gamma}{r(r^2 - 1)}. \quad (5.28)$$

5.2 Simulazione e Risultati

In questa sezione presentiamo i parametri della simulazione e riportiamo i risultati ottenuti.

La taglia del reticolo simulato è di 32^3 , quindi l'estensione in direzione temporale e spaziale è la medesima $L = la = 32a$. Il valore dell'accoppiamento adimensionato β nell'azione di Wilson si è scelto pari a 21.0. La struttura dell'algoritmo multilevel si articola in 4 differenti livelli di calcolo, in tabella 5.1 riportiamo i parametri relativi a ciascun livello, lo spessore delle fette temporali e il numero delle misure campionate.

La separazione della dinamica Monte Carlo relativa nelle due sezioni spaziali del reticolo (si veda la sottosezione 4.3.4) viene rimossa nell'ultimo livello di calcolo, dove si effettua il prodotto tensoriale fra gli operatori $[\mathcal{U}]$ (equazione (4.87)). Infine i valori di aspettazione di sottoreticolo $[\mathcal{S}]$ vengono moltiplicati per costruire l'osservabile $G(R)$.

I dati numerici ricavati per il correlatore di loop di Polyakov sono riportati in tabella 5.2 per sorgenti in rappresentazione $\{4\}, \{\bar{4}\}$ e in rappresentazione $\{6\}$. L'andamento delle funzioni $G(r)$ per queste due serie di dati è mostrato in figura (5.1).

Come premesso nella scorsa sezione da questi risultati numerici si estraggono le grandezze adimensionate $v(r)$, $f(r)$ e $c(r)$ i cui valori vengono riportati rispettivamente nelle tabelle 5.3, 5.4 e 5.5.

L'andamento di tali grandezze è rappresentato in funzione della distanza r nelle figure 5.3 per il potenziale, 5.4 per la forza e 5.5 per la funzione c .

L'incertezza sui risultati riportati è calcolata mediante un'analisi jack-

$G(r)$		
r	$\{4\}, \{\bar{4}\}$	$\{6\}$
2	$4.577(22) \times 10^{-8}$	$1.772(11) \times 10^{-10}$
3	$3.570(28) \times 10^{-10}$	$2.695(28) \times 10^{-13}$
4	$3.979(43) \times 10^{-12}$	$6.53(10) \times 10^{-16}$
5	$5.182(76) \times 10^{-14}$	$1.925(39) \times 10^{-18}$
6	$7.29(13) \times 10^{-16}$	$6.25(16) \times 10^{-21}$
7	$1.072(23) \times 10^{-17}$	$2.132(65) \times 10^{-23}$
8	$1.620(39) \times 10^{-19}$	$7.513(26) \times 10^{-26}$
9	$2.491(67) \times 10^{-21}$	$2.70(10) \times 10^{-28}$
10	$3.89(11) \times 10^{-23}$	$9.84(41) \times 10^{-31}$
11	$6.11(19) \times 10^{-25}$	$3.62(16) \times 10^{-33}$
12	$9.68(33) \times 10^{-27}$	$1.340(67) \times 10^{-35}$
13	$1.542(58) \times 10^{-28}$	$4.99(28) \times 10^{-38}$
14	$2.46(10) \times 10^{-30}$	$1.84(17) \times 10^{-40}$
15	$3.94(20) \times 10^{-32}$	$0.96(42) \times 10^{-42}$
16	$1.46(82) \times 10^{-33}$	

Tabella 5.2: Risultati numerici per il correlatore $G(r)$ con le relative incertezze indicate fra parentesi (si riferisce alle ultime cifre del valore indicato).

knife che fornisce una stima affidabile dell'errore per quantità secondarie come $v(r)$, $f(r)$ o $c(r)$ [5].

Si è deciso di tralasciare alcuni valori di $f(r)$ e $c(r)$ che presentavano un'incertezza relativa eccessiva, a causa della propagazione dell'errore.

5.3 Discussione dei Risultati

Dai grafici di $G(r)$ in scala logaritmica (figura 5.1) e di $v(r)$ (figura 5.3) si possono osservare il fenomeno del confinamento e l'andamento pressochè lineare del potenziale di quark statico.

Abbiamo raccolto dati che vanno da un ordine di grandezza di 10^{-8} fino a 10^{-43} , in figura 5.2 ne riportiamo l'incertezza relativa. Osservando questa figura si rileva che, in un intervallo di 30 ordini di grandezza³, l'errore relativo sul risultato rimane al di sotto del 6%. Infatti si va da un'incertezza

³È come se stessimo misurando con il medesimo strumento grandezze come il raggio della Via Lattea (dell'ordine di 10^{20} m) e il raggio atomico del carbonio (dell'ordine di $\sim 10^{-10}$ m).

Correlatore di loop di Polyakov

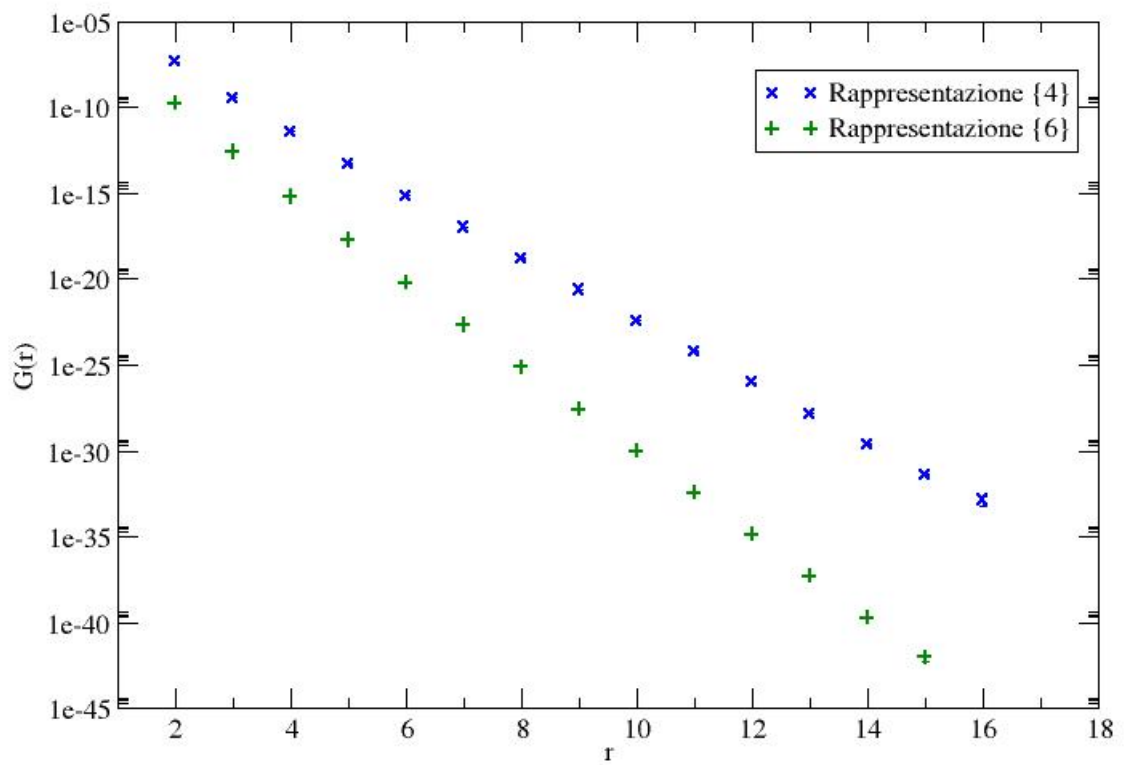


Figura 5.1: Andamento del correlatore di loop di Polyakov G con la distanza di separazione r in unità reticolari. L'asse delle ordinate è in scala logaritmica.

Errore Relativo su $G(r)$

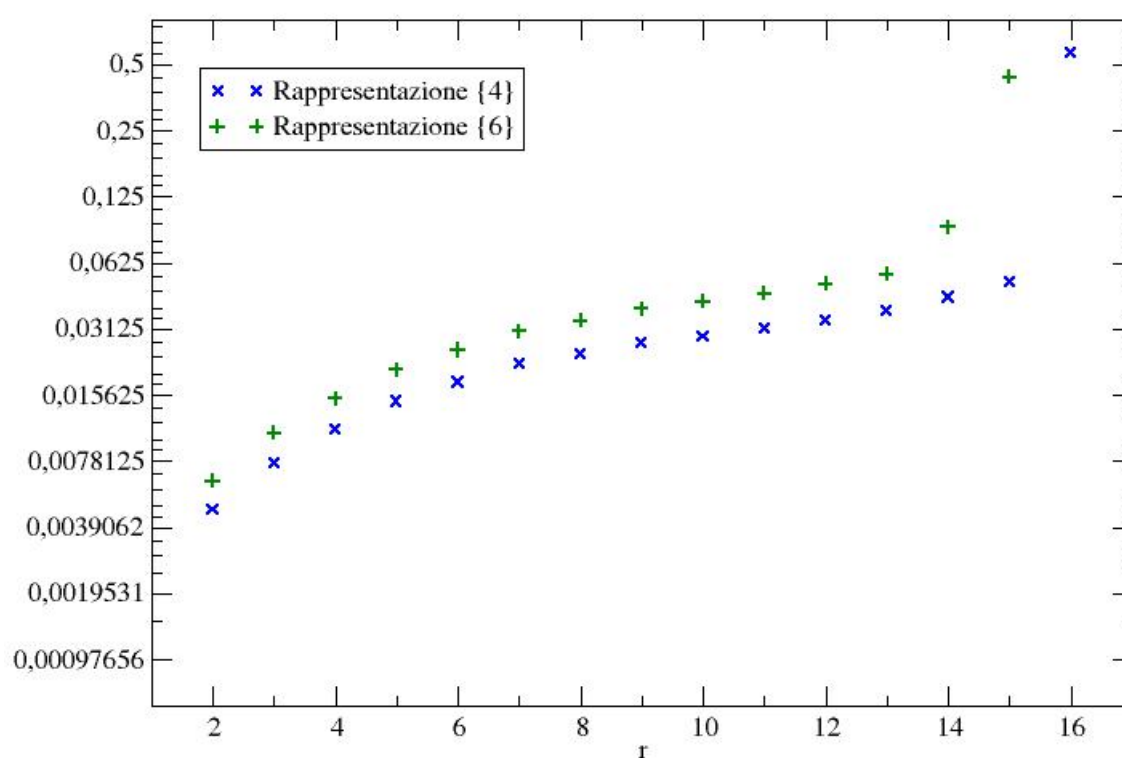


Figura 5.2: Andamento dell'errore relativo sulle misure del correlatore G con la distanza di separazione r in unità reticolari. L'asse delle ordinate è in scala logaritmica.

Potenziale

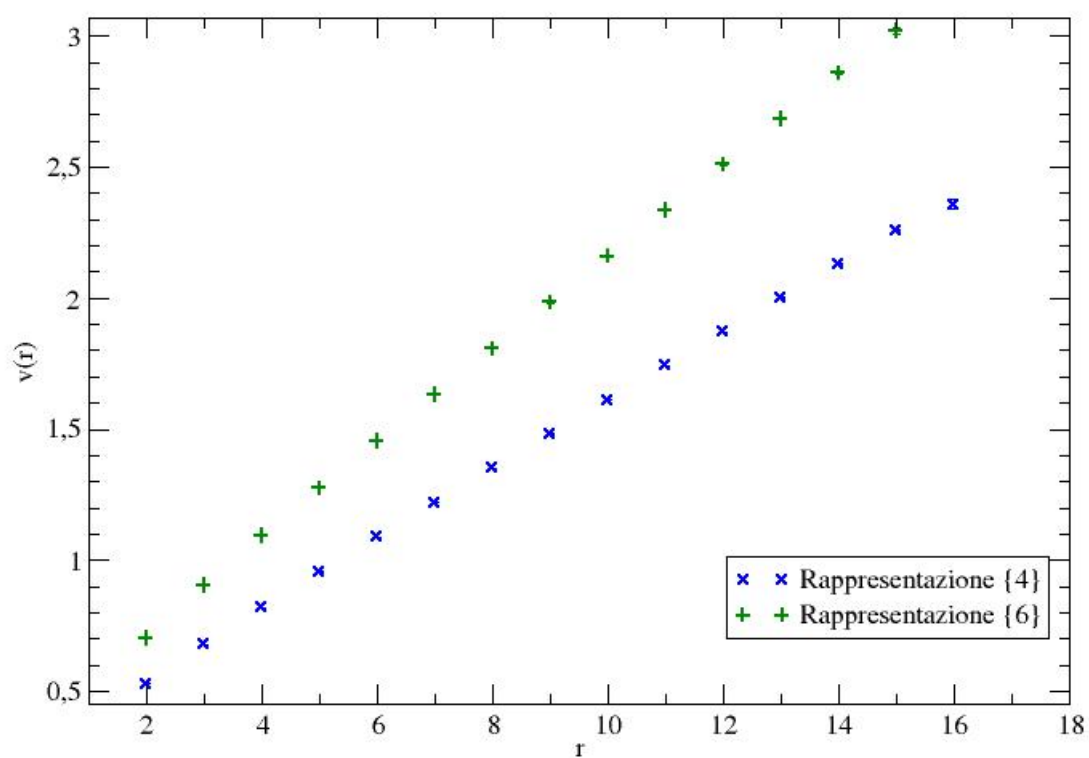


Figura 5.3: Andamento del potenziale adimensionato v con la distanza di separazione r in unità reticolari.

$v(r)$		
r	$\{4\}, \{\bar{4}\}$	$\{6\}$
2	0.52811(15)	0.70168(20)
3	0.67979(24)	0.90444(33)
4	0.82031(34)	1.09267(47)
5	0.95596(46)	1.27473(64)
6	1.08919(56)	1.45381(79)
7	1.22107(68)	1.63131(96)
8	1.35207(76)	1.8078(11)
9	1.48254(85)	1.9837(12)
10	1.61256(91)	2.1592(13)
11	1.74231(98)	2.3343(14)
12	1.8718(11)	2.5093(16)
13	2.0012(12)	2.6841(18)
14	2.1305(14)	2.8590(29)
15	2.2597(16)	3.020(14)
16	2.3574(19)	

Tabella 5.3: Risultati numerici per il potenziale adimensionato $v(r)$ con le relative incertezze.

$f(\bar{r})$		
\bar{r}	$\{4\}, \{\bar{4}\}$	$\{6\}$
2.379	$1.5167(10) \times 10^{-1}$	$2.0276(14) \times 10^{-1}$
3.407	$1.4052(11) \times 10^{-1}$	$1.8823(16) \times 10^{-1}$
4.432	$1.3566(13) \times 10^{-1}$	$1.8206(18) \times 10^{-1}$
5.448	$1.3323(13) \times 10^{-1}$	$1.7909(18) \times 10^{-1}$
6.458	$1.3188(14) \times 10^{-1}$	$1.7750(19) \times 10^{-1}$
7.464	$1.3100(12) \times 10^{-1}$	$1.7650(18) \times 10^{-1}$
8.469	$1.3047(12) \times 10^{-1}$	$1.7591(19) \times 10^{-1}$
9.473	$1.3002(12) \times 10^{-1}$	$1.7542(19) \times 10^{-1}$
10.475	$1.2975(12) \times 10^{-1}$	$1.7514(20) \times 10^{-1}$
11.478	$1.2953(13) \times 10^{-1}$	$1.7497(27) \times 10^{-1}$
12.480	$1.2937(15) \times 10^{-1}$	$1.7479(28) \times 10^{-1}$
13.481	$1.2925(24) \times 10^{-1}$	$1.7499(20) \times 10^{-1}$
14.483	$1.2925(32) \times 10^{-1}$	

Tabella 5.4: Risultati numerici per la forza adimensionata $f(\bar{r})$ con le relative incertezze.

Forza

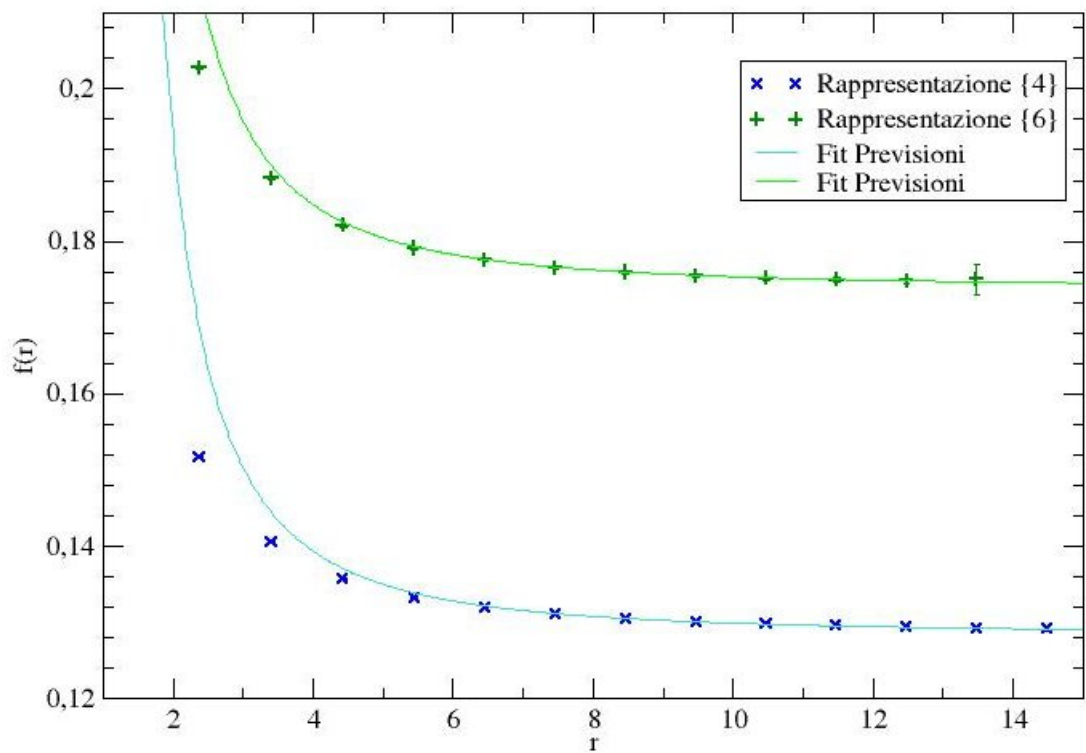


Figura 5.4: Andamento della forza di interazione adimensionata f con la distanza di separazione r in unità reticolari. Sono stati rappresentati i fit non-lineari riguardanti le previsioni date dall'espressione (5.27).

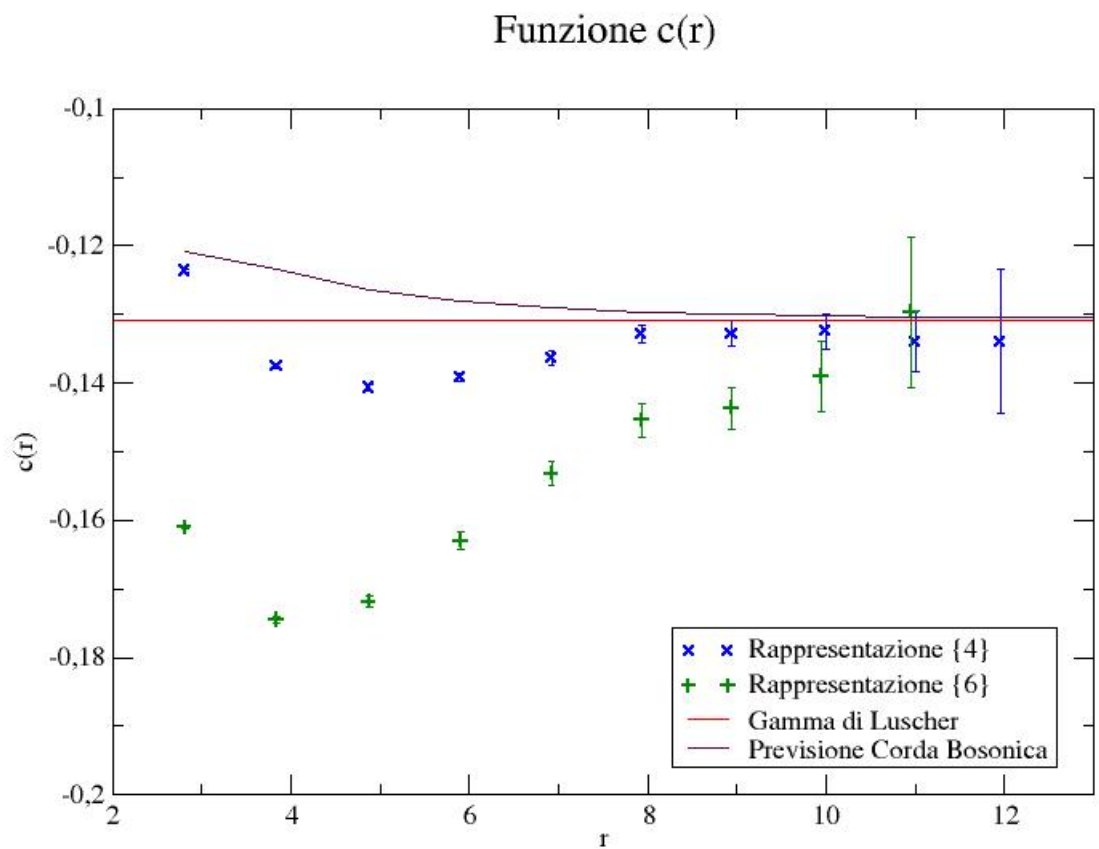


Figura 5.5: Andamento della funzione c con la distanza di separazione r in unità reticolari. Si è rappresentato anche il valore di γ del termine di Luscher e la curva di previsione dell'approssimazione di corda bosonica (5.28).

$c(\tilde{r})$		
\tilde{r}	$\{4\}, \{\bar{4}\}$	$\{6\}$
2.808	$-1.2363(19) \times 10^{-1}$	$-1.6104(25) \times 10^{-1}$
3.838	$-1.3759(31) \times 10^{-1}$	$-1.7447(42) \times 10^{-1}$
4.875	$-1.4068(50) \times 10^{-1}$	$-1.7186(80) \times 10^{-1}$
5.902	$-1.3913(65) \times 10^{-1}$	$-1.630(12) \times 10^{-1}$
6.920	$-1.3635(95) \times 10^{-1}$	$-1.532(18) \times 10^{-1}$
7.932	$-1.328(13) \times 10^{-1}$	$-1.454(24) \times 10^{-1}$
8.941	$-1.328(19) \times 10^{-1}$	$-1.437(30) \times 10^{-1}$
9.948	$-1.324(25) \times 10^{-1}$	$-1.391(50) \times 10^{-1}$
10.953	$-1.339(45) \times 10^{-1}$	$-1.30(11) \times 10^{-1}$
11.957	$-1.34(11) \times 10^{-1}$	

Tabella 5.5: Risultati numerici per funzione $c(r)$ con le relative incertezze.

del 5‰ per sorgenti in rappresentazione $\{4\}/\{\bar{4}\}$ a distanza $2a$, fino ad arrivare a un’incertezza del 5% per sorgenti in rappresentazione $\{6\}$ a distanza $13a$. Da questi dati risultano evidenti le grandi potenzialità dell’algoritmo di calcolo utilizzato.

Osserviamo ora i grafici relativi alla forza adimensionata $f(r)$ (figura 5.4) e alla funzione $c(r)$ (figura 5.5). Discutiamo per primo il caso delle sorgenti in rappresentazione fondamentale e anti-fondamentale.

Per quanto riguarda la forza f si osserva un accordo soddisfacente con le previsioni dell’approssimazione di corda bosonica libera in equazione (5.27). I risultati presentano infatti un andamento decrescente che rilassa verso un valore costante. Tale valore corrisponde alla misura della tensione di corda adimensionata K .

I dati raccolti per la funzione $c(r)$ mostrano di essere consistenti con le previsioni in equazione (5.28) a partire da una distanza pari a $r \simeq 8.941a$.

Per distanze superiori, i dati confermano la validità dell’interpretazione effettiva e dell’approssimazione di corda bosonica libera. Per distanze inferiori invece i risultati raccolti mostrano che il modello effettivo non è più adatto alla descrizione della dinamica gluonica fra le due sorgenti.

Partendo da queste considerazioni possiamo estrarre il valore di K mediante una regressione non-lineare sui dati numerici per $f(r)$, ottenuti a distanze maggiori o uguali a $9.473a$. Il valore così ricavato è

$$K = 0.128 \pm 0.004 \tag{5.29}$$

l'andamento del fit è rappresentato anch'esso in figura 5.4.

Sfruttando l'equazione (5.25) possiamo stimare in unità fisiche il passo reticolare a , che risulta essere di circa 0.16 fm. Ciò significa che il modello effettivo di corda fornisce delle previsioni in accordo con la teoria di Yang-Mills per distanze di separazione dell'ordine di 1.4 fm.

Passiamo ora a trattare il caso delle sorgenti in rappresentazione {6}.

Osservando i dati numerici per la forza adimensionata f_6 troviamo conferma della stabilità della 2-corda, dal momento che l'andamento dei risultati rilassa verso un valore costante. Tale costante corrisponde alla tensione adimensionata $K_2 = a^{-2}\sigma_2$ della 2-corda.

Dal grafico si evince anche che la tensione σ_2 è maggiore rispetto alla tensione della corda fondamentale σ .

I risultati più significativi di questo lavoro riguardano l'andamento della funzione $c_6(r)$, poiché permettono di trarre alcune conclusioni circa la struttura della 2-corda.

Partendo dalla forma del potenziale data dall'equazione (5.10), in analogia con le previsioni della teoria effettiva per la corda fondamentale, possiamo ipotizzare che la correzione γ_6/R sia determinata dai gradi di libertà senza massa del tubo di flusso composto. Il valore di c_6 può quindi essere associato al numero di gradi di libertà senza massa N_g secondo l'equazione:

$$\gamma_6 \simeq -N_g \frac{\pi}{24}. \quad (5.30)$$

Osservando i risultati ottenuti in figura 5.5 possiamo constatare che, per $r \simeq 11.957$, c_6 assume un valore compatibile con $-\pi/24$, analogamente a quanto succede nel caso della corda in rappresentazione fondamentale.

Questo dà indicazione del fatto che la 2-corda presenta un solo grado di libertà senza massa, può quindi essere interpretato come un unico oggetto fluttuante.

Pertanto possiamo affermare che la 2-corda non è la sovrapposizione di due corde fondamentali non interagenti, poiché questo avrebbe richiesto $\gamma_6 = -\pi/12$. Inoltre anche la congettura del lavoro [41], in cui la γ dipende dal rapporto σ_2/σ , non è confermata dai nostri dati.

Per quanto riguarda i valori di $c_6(r)$ a distanze inferiori di $r \simeq 11.957$ abbiamo una fase di transiente in cui l'interpretazione effettiva non è ancora valida.

Confrontiamo l'andamento della funzione $c_6(r)$ con i risultati di $c(r)$ per sorgenti in rappresentazione fondamentale. Possiamo notare innanzitutto che la distanza di validità del modello effettivo aumenta nel caso della 2-corda. È inoltre evidente che le misure di $c_6(r)$ hanno valori più bassi rispetto alle misure in rappresentazione $\{4\}/\{\bar{4}\}$.

Per spiegare questo comportamento possiamo fornire un'interpretazione plausibile per la struttura della 2-corda, considerandola come stato legato di due corde fondamentali interagenti.

A piccole distanze i gradi di libertà individuali di queste due componenti risultano visibili, il che determina il disaccordo con il comportamento della corda in rappresentazione fondamentale.

Per grandi distanze invece, la dinamica delle singole corde non è più risolvibile, e la 2-corda si comporta come un unico oggetto che fluttua lungo un unico grado di libertà trasversale.

Bibliografia

- [1] Michael E Peskin and Daniel V Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory; 1995 ed.* Westview, 1995.
- [2] Michel Le Bellac. *Quantum and Statistical Field Theory.* Oxford University Press, USA, 1992.
- [3] J. Greensite. The confinement problem in lattice gauge theory. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 51:1, 2003.
- [4] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Phys. Rev.*, D10:2445–2459, 1974.
- [5] I. Montvay and G. Munster. *Quantum fields on a lattice.* Cambridge University Press, 1997.
- [6] Ashok K. Das. *Field theory: A Path integral approach.* World Sci. Lect. Notes Phys., 1993.
- [7] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics.* Edward Arnold, 1980.
- [8] Michael Creutz, Laurence Jacobs, and Claudio Rebbi. Monte Carlo Computations in Lattice Gauge Theories. *Phys. Rept.*, 95:201, 1983.
- [9] M. Creutz. *Quarks, Gluons and Lattices.* Cambridge University Press, 1983.
- [10] K. Osterwalder and E. Seiler. Gauge Field Theories on the Lattice. *Ann. Phys.*, 110:440, 1978.
- [11] M. Creutz. Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory. *Phys. Rev.*, D21:2308, 1980.

- [12] Michael J. Teper. SU(N) gauge theories in 2+1 dimensions. *Phys. Rev.*, D59:014512, 1999.
- [13] M. Luscher, G. Munster, and P. Weisz. How Thick Are Chromoelectric Flux Tubes? *Nucl. Phys.*, B180:1, 1981.
- [14] Anna Hasenfratz, Etelka Hasenfratz, and Peter Hasenfratz. Generalized Roughening Transition And Its Effect On The String Tension. *Nucl. Phys.*, B180:353, 1981.
- [15] M. Luscher, K. Symanzik, and P. Weisz. Anomalies of the Free Loop Wave Equation in the WKB Approximation. *Nucl. Phys.*, B173:365, 1980.
- [16] M. Luscher. Symmetry Breaking Aspects of the Roughening Transition in Gauge Theories. *Nucl. Phys.*, B180:317, 1981.
- [17] Cheng. *Gauge theory of elementary particle physics: Problems and solutions*. 2000. Oxford, UK: Clarendon (2000) 306 p.
- [18] Martin Luscher and Peter Weisz. Quark confinement and the bosonic string. *JHEP*, 07:049, 2002.
- [19] M. Caselle, F. Gliozzi, Ulrika Magnea, and S. Vinti. Width of Long Colour Flux Tubes in Lattice Gauge Systems. *Nucl. Phys.*, B460:397–412, 1996.
- [20] K. Dietz and T. Filk. On The Renormalization Of String Functionals. *Phys. Rev.*, D27:2944, 1983.
- [21] M. Caselle, R. Fiore, F. Gliozzi, M. Hasenbusch, and P. Provero. String effects in the Wilson loop: A high precision numerical test. *Nucl. Phys.*, B486:245–260, 1997.
- [22] Yoichiro Nambu. QCD and the String Model. *Phys. Lett.*, B80:372, 1979.
- [23] M. Caselle, M. Hasenbusch, and M. Panero. String effects in the 3d gauge Ising model. *JHEP*, 01:057, 2003.
- [24] M. Caselle et al. Rough interfaces beyond the Gaussian approximation. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 42:755, 1995.

- [25] Martin Lüscher and Peter Weisz. Locality and exponential error reduction in numerical lattice gauge theory. *JHEP*, 09:010, 2001.
- [26] M. Caselle, M. Hasenbusch, and M. Panero. Short distance behaviour of the effective string. *JHEP*, 05:032, 2004.
- [27] M. Caselle, M. Panero, P. Provero, and M. Hasenbusch. String effects in Polyakov loop correlators. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 119:499–501, 2003.
- [28] Michele Caselle, Martin Hasenbusch, and Marco Panero. Effective string picture for confinement at finite temperature: Theoretical predictions and high precision numerical results. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 129:593–595, 2004.
- [29] M. Caselle, M. Pepe, and A. Rago. Static quark potential and effective string corrections in the (2+1)-d SU(2) Yang-Mills theory. *JHEP*, 10:005, 2004.
- [30] N. D. Hari Dass and Pushan Majumdar. String-like behaviour of 4d SU(3) Yang-Mills flux tubes. *JHEP*, 10:020, 2006.
- [31] K. Jimmy Juge, Julius Kuti, and Colin Morningstar. Excitations of the static quark antiquark system in several gauge theories. 2003.
- [32] J F Cornwell. *Group theory in physics*. Techniques Phys. Academic Press, London, 1984.
- [33] Morton Hamermesh. *Group theory and its application to physical problems*. Dover, New York, NY, 1989.
- [34] M. Pepe and U. J. Wiese. From Decay to Complete Breaking: Pulling the Strings in SU(2) Yang-Mills Theory. 2009.
- [35] A. Armoni and M. Shifman. On k-string tensions and domain walls in $N = 1$ gluodynamics. *Nucl. Phys.*, B664:233–246, 2003.
- [36] A. Armoni and M. Shifman. Remarks on stable and quasi-stable k-strings at large N . *Nucl. Phys.*, B671:67–94, 2003.
- [37] M. Shifman. k strings from various perspectives: QCD, lattices, string theory and toy models. *Acta Phys. Polon.*, B36:3805–3836, 2005.

- [38] Luigi Del Debbio, Haralambos Panagopoulos, Paolo Rossi, and Ettore Vicari. Spectrum of confining strings in SU(N) gauge theories. *JHEP*, 01:009, 2002.
- [39] L. Del Debbio, Manfred Faber, J. Greensite, and S. Olejnik. Casimir Scaling vs. Abelian Dominance in QCD String Formation. *Phys. Rev.*, D53:5891–5897, 1996.
- [40] Manfred Faber, J. Greensite, and S. Olejnik. Casimir scaling from center vortices: Towards an understanding of the adjoint string tension. *Phys. Rev.*, D57:2603–2609, 1998.
- [41] Pietro Giudice, Ferdinando Gliozzi, and Stefano Lottini. The conformal anomaly of k-strings. *JHEP*, 05:010, 2007.
- [42] N. Cabibbo and E. Marinari. A New Method for Updating SU(N) Matrices in Computer Simulations of Gauge Theories. *Phys. Lett.*, B119:387–390, 1982.
- [43] Stefan Weinzierl. Introduction to Monte Carlo methods. 2000.
- [44] Michael Creutz. Overrelaxation and Monte Carlo Simulation. *Phys. Rev.*, D36:515, 1987.
- [45] Martin Luscher. A Portable high quality random number generator for lattice field theory simulations. *Comput. Phys. Commun.*, 79:100–110, 1994.
- [46] Mark Galassi, Jim Davies, James Theiler, Brian Gough, Gerard Jungman, Michael Booth, and Fabrice Rossi. *Gnu Scientific Library: Reference Manual*. Network Theory Ltd., 2003.
- [47] George Marsaglia, B. Narasimhan, and Arif Zaman. A random number generator for PC's. *Comput. Phys. Commun.*, 60:345–349, 1990.
- [48] R. Sommer. A New way to set the energy scale in lattice gauge theories and its applications to the static force and alpha-s in SU(2) Yang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, B411:839–854, 1994.
- [49] Silvia Necco and Rainer Sommer. Testing perturbation theory on the $N(f) = 0$ static quark potential. *Phys. Lett.*, B523:135–142, 2001.

Ringraziamenti

Ringrazio il professore Giuseppe Marchesini per avermi offerto l'opportunità di questo lavoro di tesi. Un ringraziamento particolare va al dottor Michele Pepe, che mi ha seguito assiduamente in quest'anno. La sua preziosa disponibilità e la sua pazienza mi hanno accompagnato durante tutto il lavoro. Ringrazio il dottor Andrea Banfi, per la lettura del testo e per gli utili consigli.

Ringrazio infine tutti coloro che mi sono stati vicini in questi mesi: Ilaria, i miei amici e la mia famiglia.