

RIITP Hiroshima University

November 1989



Proceedings of Workshop
on

Beyond Riemann Surfaces

Research Institute for Theoretical Physics
Hiroshima University, Takehara, Hiroshima 725, Japan
February 6 - 8, 1989

Edited by
Reijiro Kubo

Workshop Organizers

K. FUJIKAWA

A. HOSOYA

R. KUBO

S. UEHARA

はじめに

ワークショップ“Beyond Riemann Surfaces”は、1989年2月6日から8日までの3日間、約30名の数学および物理研究者が参加して広島大学理論物理学研究所において開催されました。

ワークショップの目的は、リーマン面を越えた所にある数学、たとえば3, 4次元多様体論、結び目理論などを相対論、共形場の理論、位相的場の理論、統計力学などの広い観点から考察し、あわよくば新しいアイデア、インスピレーションを得て、超弦理論以後の理論物理学が進むべき正しい道を見いだすということにありました。

この目的が今回のワークショップにおいて、どの程度果たされたか定かではありませんが、分野を異にする研究者の間に、期待以上の多くの示唆と刺激に富む議論や意見の交換が行なわれました。

この proceedings は、ワークショップのために用意された講師の論文と、ワークショップで成された講義（研究発表）の記録とに基づいて編集されています。講義の記録は、広大理論研の大学院生が担当しました。特に、吉井久博君と鈴木博君には、 \TeX による講義録の整理や Mac による描図のために、その才能を発揮してもらいました。

なお、ワークショップ開催のために要した諸費用は、1988年度科研費一般(C) [共形不変な場の理論の方法による弦理論の非摂動論的研究] (課題番号 63540220) 補助金によって負担しました。

1989年11月

久保 禮次郎

目 次

T.Deguchi & Y.Yamada	Link Polynomial, Crossing Multiplier and Surgery Formula	1
松本 堯生	3, 4 次元多様体のトポロジー	30
A.Hosoya & K.Nakao	(2 + 1)-Dimensional Quantum Gravity	39
砂田 利一	基本群とスペクトラム	54
岡本 清郷	SU(N+1,1) Kac-Moody Lie 群の Einstein-Maxwell 方程式の解空間への作用	61
久保 禮次郎 尾島 修一 S.K.Paul 吉井 久博	リーマン面上の場の理論と Krichever-Novikov 代数	68

Link Polynomial, Crossing Multiplier and Surgery Formula^{*}

TETSUO DEGUCHI

*Institute of Physics, College of Arts and Sciences,
University of Tokyo, Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153, Japan*

and

YASUHIKO YAMADA

*Theory Division, National Laboratory for
High Energy Physics, Tsukuba, Ibaraki 305, Japan*

ABSTRACT

Relations between link polynomials constructed from exactly solvable lattice models and topological field theory are reviewed. It is found that the surgery formula for a three-sphere S^3 with Wilson lines corresponds to the Markov trace constructed from the exactly solvable models. This indicates that knot theory intimately relates various important subjects such as exactly solvable models, conformal field theories and topological quantum field theories.

^{*} Based on Lectures given at the workshop "Beyond Riemann Surfaces" in Research Institute for Theoretical Physics, Hiroshima University, February 1989.

1. Introduction

A general theory has been established [1-6] to construct link polynomials, topological invariants for knots and links, from exactly solvable models in statistical mechanics. The theory, which is applicable to both vertex models and IRF models, consists of two steps. First, one makes a representation of the braid group from the Boltzmann weights of a solvable model. Second, one constructs the Markov trace on the representation. The Markov trace is essentially a trace of the braid group representation multiplied by the crossing multiplier of the model.

Recently, E. Witten has shown remarkable relations among three dimensional topological quantum field theory, two dimensional conformal field theory and link polynomials [7]. This topological field theory is the Chern-Simons gauge theory with non abelian gauge group G , whose abelian version is related to the fermi-bose transmutation and self-linking number [8].

Let us recall the formulation of the topological quantum field theory [7]. In a closed oriented 3-manifold M , we take a link L which consists of r oriented and non-intersecting knots $C_i, i = 1, 2, \dots, r$. We assign a representation R of group G to each C_i , and consider the following path integral over all gauge orbits

$$Z(M; L) = Z(M; C_i, R_i) = \int DA \exp(ikS[A]) \prod_{i=1}^r W_{R_i}(C_i). \quad (1.1)$$

Here, $S[A]$ is the Chern-Simons action,

$$W_R(C) = \text{Tr}_R [P \exp \oint_C A_i dx^i] \quad (1.2)$$

is the Wilson line which represents the holonomy around C and $k \in \mathbb{Z}$ is (topologically quantized) coupling.

By the method of geometric quantization, Witten has shown that the physical Hilbert space of this theory is isomorphic to the space of conformal blocks of

associated Wess-Zumino-Witten model [9] at level k , and hence the Hilbert space is of finite dimensions.

We can give another argument for this important result. Note that the Gauss law constraint of the canonical quantization is essentially equivalent to the (anomalous) Ward identity for the currents. We can show that the current Ward identity and integrability condition characterize the space of conformal blocks, and this space is shown to be of finite dimensions [10].

From the knowledge of eigenvalues of braid matrices, Witten has derived the skein relation for the expectation value of Wilson lines. For $G = SU(N)$ and Wilson lines in fundamental representation, he has explicitly given the skein relation defining the Jones polynomial [11-13]. For other gauge groups $G = SO(N)$ and $Sp(2n)$, this method can be extended straightforwardly, and yields the Kauffman polynomial [14].

Using "surgery" technique, Witten has presented the following formula:

$$Z(S^3; L) = \sum_j Z(S^2 \times S^1; R_j, B) S_0^j, \quad (1.3)$$

where $Z(S^2 \times S^1; R_j, B)$ is the partition function on $S^2 \times S^1$ of both the braid B and a parallel Wilson line in the R_j representation. The quantity S_i^j is the elements of the modular transformation matrix.

The main aim of this report is to compare Witten's results, in particular, the surgery formula (1.3) with the knot theory based on the exactly solvable models [15]. In §2, we shall briefly explain the knot theory based on exactly solvable models in statistical mechanics. In §3, the significances of the crossing symmetry will be exhibited. In §4, the relation between the surgery formula and the Markov trace constructed from solvable models is explained. In §5, graph-state IRF models are introduced to show the ubiquity of the crossing multiplier. The last section is devoted to discussions.

2. Exactly Solvable Models and Link Polynomials

We introduce braids to describe knots and links [16]. It is known that any oriented link can be expressed by a closed braid [17]. The equivalent braids expressing the same link are mutually transformed by successive applications of Markov moves, I and II (Fig.1) [18]. Markov trace is a linear functional on the representation of the braid group B_n which has the following properties (the Markov properties):

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \phi(AB) = \phi(BA), \quad A, B \in B_n, \\ \text{II.} \quad & \phi(Ab_n) = \tau \phi(A), \\ & \phi(Ab_n^{-1}) = \bar{\tau} \phi(A), \quad A \in B_n, \quad Ab_n^{\pm 1} \in B_{n+1}, \end{aligned}$$

where

$$\tau = \phi(b_i), \quad \bar{\tau} = \phi(b_i^{-1}), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (2.1)$$

From the Markov trace we obtain a link polynomial.

The Boltzmann weight $w(a, b, c, d; u)$ of IRF model is defined for the configuration of "spins" around a face (Fig.2), where u is the spectral parameter. The Yang-Baxter relation reads as (Fig.3) [19]

$$\begin{aligned} & \sum_g w(a, b, g, f; u) w(f, g, d, e; u+v) w(g, b, c, d; v) \\ &= \sum_g w(g, c, d, e; u) w(a, b, d, g; u+v) w(f, a, g, e; v), \end{aligned} \quad (2.2)$$

In addition to the Yang-Baxter relation, the Boltzmann weights of most of exactly solvable IRF models satisfy the following basic relations [19,6].

1) standard initial condition

$$w(a, b, c, d; u=0) = \delta(a, c), \quad (2.3)$$

where $\delta(a, b)$ is the Kronecker delta.

2) inversion relation

$$\sum_e w(e, c, d, a; u) w(b, c, e, a; -u) = \delta(b, d). \quad (2.4)$$

3) crossing symmetry (Fig.4)

$$w(a, b, c, d; u) = w(b, c, d, a; \lambda - u) \left(\frac{\psi(a)\psi(c)}{\psi(b)\psi(d)} \right)^{1/2}, \quad (2.5)$$

where $\{\psi(a)\}$ are the crossing multipliers and λ is the crossing parameter.

4) second inversion relation

$$\sum_e w(c, e, a, b; \lambda - u) w(a, e, c, d; \lambda + u) \frac{\psi(e)\psi(b)}{\psi(a)\psi(c)} = \delta(b, d). \quad (2.6)$$

The crossing multipliers of the model are introduced in the crossing symmetry and the second inversion relation. They are important in a general theory to construct link polynomials from the exactly solvable models. As will be shown in §3, the basic relations correspond to local moves, known as the Reidemeister moves, on the link diagrams.

Let us explain the constraint of the model. Nearest neighboring spins of IRF model satisfy the constraint. When spin b is allowed (or admissible) to be nearest neighbor of spin a , then we write it as $b \sim a$. Of course, the Boltzmann weight is equal to 0 if the configuration is not admissible. A sequence of spins $\ell = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$ is also called admissible if $\ell_i \sim \ell_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$).

Let us introduce the Yang-Baxter operators and construct representations of the braid group. The Yang-Baxter operator $X_i(u)$ for IRF models are defined by [2] (Fig.5)

$$[X_i(u)]_{\ell_0 \ell_1 \dots \ell_n}^{p_0 p_1 \dots p_n} = \left(\prod_{j=0}^{i-1} \delta_{\ell_j}^{p_j} \right) w(\ell_i, \ell_{i+1}, p_i, \ell_{i-1}; u) \left(\prod_{j=i+1}^n \delta_{\ell_j}^{p_j} \right), \quad (2.7)$$

Here and hereafter multi-indices (p_0, p_1, \dots, p_n) are assumed to be admissible. The Yang-Baxter operator $X_i(u)$ is a constituent of the transfer matrix $T(u)$

in a 2-dimensional lattice system. In terms of the Yang-Baxter operator the Yang-Baxter relation is written as [19,6]

$$\begin{aligned} X_i(u)X_{i+1}(u+v)X_i(v) &= X_{i+1}(v)X_i(u+v)X_{i+1}(u), \\ X_i(u)X_j(v) &= X_j(v)X_i(u), \quad |i-j| \geq 2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

We call this algebra the Yang-Baxter algebra. We see that the defining relations of the Yang-Baxter algebra (2.8) are analogous to the braid relations. From the Yang-Baxter operators $\{X_i(u)\}$ we can construct the representation of the braid group $\{G_i\}$ by the following formula [1]

$$G_i^{\pm 1} = \lim_{u \rightarrow \infty} X_i(\pm u). \quad (2.9)$$

The well-definedness of the limit requires that the model is critical, that is, the Boltzmann weight is parametrized by trigonometric (or hyperbolic) function.

Let us construct Markov trace $\phi(\cdot)$ on the braid group representation. Using the crossing multipliers of the model, we introduce a "constrained trace" $\tilde{\text{Tr}}(A)$ [2]:

$$\tilde{\text{Tr}}(A) = \sum_{\ell_1 \dots \ell_n}^{\sim} A_{\ell_0 \ell_1 \dots \ell_n}^{\ell_0 \ell_1 \dots \ell_n} \frac{\psi(\ell_n)}{\psi(\ell_0)} \quad (\ell_0 : \text{fixed}), \quad (2.10a)$$

then the Markov trace $\phi(\cdot)$ is written as

$$\phi(A) = \frac{\tilde{\text{Tr}}(A)}{\tilde{\text{Tr}}(I^{(n)})}, \quad A, I^{(n)} \in B_n, \quad (2.10b)$$

where $I^{(n)}$ is the identity. The symbol $\tilde{\Sigma}$ represents the summation over admissible multi-indices with ℓ_0 being fixed. We also have a formula of the Markov trace for vertex models [1,6], which is related to (2.10) by the Wu-Kadanoff-Wegner transformation [6,20].

We can show that the trace $\phi(\cdot)$ defined in (2.10) satisfies the Markov properties (2.1) by proving the extended Markov property:

$$\sum_{b \sim a} w(a, b, a, c; u) \frac{\psi(b)}{\psi(a)} = H(u; \lambda) \quad (\text{independent of } a, c), \quad (2.11)$$

where the function $H(u; \lambda)$ is called the characteristic function [6].

3. Crossing Symmetry, Temperley-Lieb Algebra and Graphical formulation

Let us discuss the meanings and consequences of the crossing symmetry: It has a remarkable significance to algebraic and graphical approaches in knot theory [6]. We use the notation of the factorized S-matrices. It is noted that the factorized S-matrices and solvable vertex models are equivalent. The discussion also holds for solvable IRF models [6].

We denote the amplitude of the scattering process $(\alpha, \beta) \rightarrow (\mu, \nu)$ by $S_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(u)$ (Fig.6). The Yang-Baxter relation for the factorized S-matrices reads as (Fig.7)

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} S_{\gamma\mu}^{\alpha\nu}(u) S_{\tau\gamma}^{\beta\lambda}(u+v) S_{\sigma\alpha}^{\rho\beta}(v) = \sum_{\alpha\beta\gamma} S_{\alpha\nu}^{\beta\lambda}(v) S_{\gamma\mu}^{\rho\beta}(u+v) S_{\tau\gamma}^{\sigma\alpha}(u). \quad (3.1)$$

The relation (3.1), often referred to as the factorization equation, was introduced as the consistency condition for the Bethe ansatz wavefunction [21]. The factorized S-matrices represent the elastic scattering of particles in that only the exchanges of momenta and the phase shifts occur.

For the factorized S-matrices, the Yang-Baxter operator $X_i(u)$ is defined by [1,6] (Fig.8)

$$[X_i(u)]_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\kappa_1 \dots \kappa_n} = \left(\prod_{j=1}^{i-1} \delta_{\mu_j}^{\kappa_j} \right) S_{\mu_{i+1} \kappa_i}^{\mu_i \kappa_{i+1}}(u) \left(\prod_{j=i+2}^n \delta_{\mu_j}^{\kappa_j} \right), \quad (3.2)$$

In terms of the Yang-Baxter operator the Yang-Baxter relation (3.1) is again expressed as (2.8).

Generally, the factorized S-matrices satisfy the following crossing symmetry and the standard initial condition.

1) crossing symmetry (Fig.9)

$$S_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(u) = S_{\nu\bar{\alpha}}^{\beta\mu}(\lambda - u) \left(\frac{r(\alpha)r(\mu)}{r(\beta)r(\nu)} \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

where we have introduced the notation $\bar{\alpha} = -\alpha$ for "charge conjugation" and $r(\alpha)$ are the crossing multipliers with a relation $r(-\alpha) = 1/r(\alpha)$.

2) standard initial condition (Fig.10)

$$S_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(u = 0) = \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu}. \quad (3.4)$$

The above relations have the following physical meanings. We can interpret u as the rapidity difference of the scattering particles. Also it can be considered as the scattering angle (Fig.6). The standard initial condition indicates that there is no scattering between two particles with zero relative velocity. The crossing symmetry describes the invariance of the system under 90 degree rotation in a 2-dimensional space. Note that from the standard initial condition and the crossing symmetry, the inversion relation and the second inversion relation for the factorized S-matrices (solvable vertex models) are derived.

It is important in the critical (vertex and IRF) models with the crossing symmetry that the Yang-Baxter operator becomes the Temperley-Lieb operator at the point $u = \lambda$ [6]. Setting

$$E_i = X_i(\lambda), \quad (3.5)$$

we find that the operators $\{E_i\}$ satisfy the following relations

$$E_i E_{i\pm 1} E_i = E_i,$$

$$\begin{aligned}
E_i^2 &= q^{1/2} E_i, \\
E_i E_j &= E_j E_i, \quad |i - j| \geq 2,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

where the quantity $q^{1/2}$ is related to the crossing multipliers $\psi(i)$ (or $\{r(\alpha)\}$) by

$$q^{1/2} = \sum_{\alpha} r^2(\alpha), \quad \text{for S matrix (vertex model),} \tag{3.7a}$$

$$= \sum_{b \sim a} \frac{\psi(b)}{\psi(a)}, \quad \text{for IRF model.} \tag{3.7b}$$

The relations (3.6) are the defining relations of the Temperley-Lieb algebra [21].

Furthermore, the relation (3.5) is of importance in an algebraic formulation of the knot theory [6]. We only point out two key observations. First, the operators $\{E_i, G_i\}$ form an braid-monoid algebra. Second, using the Temperley-Lieb operator E_i , we can show that the extended Markov property is equivalent to the relation (projection relation) [6]

$$X_i(u) E_i = \beta(u) E_i. \tag{3.8}$$

where $\beta(u)$ is a function which is related to the characteristic function $H(u; \lambda)$ by $\beta(u) = H(\lambda - u; \lambda)$.

Let us consider the graphical meanings of the relation (3.6) [6]. From the crossing symmetry and the standard initial condition we have (Fig.11)

$$S_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(\lambda) = \left(\frac{r(\alpha)r(\mu)}{r(\beta)r(\nu)} \right)^{1/2} S_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}^{\beta\mu}(0) = r(\alpha)\delta_{\beta}^{\bar{\alpha}} \cdot r(\mu)\delta_{\bar{\nu}}^{\mu}. \tag{3.9}$$

We can regard the elements $r(\alpha)\delta_{\beta}^{\bar{\alpha}}$ and $r(\mu)\delta_{\bar{\nu}}^{\mu}$ as the weights for the pair-annihilation and the pair-creation diagrams, respectively (Fig.12). Then, the Yang-Baxter operator at $u = \lambda$ is depicted as the monoid diagram, by which the Temperley-Lieb algebra is explained. This way of thinking is consistent with a fact that the energy at the point λ is related to the pair-creation energy. For IRF models, the weights $(\psi(a)/\psi(b))^{1/2}$ and $(\psi(c)/\psi(b))^{1/2}$ correspond to the pair-annihilation and pair-creation diagrams, respectively (Fig.13) [6].

Let us introduce link diagram \hat{L} , which is 2-dimensional projection of a link L (Fig.14). The writhe $w(\hat{L})$ is the sum of signs for all crossings $\{C_i\}$ in the link diagram (Fig.15):

$$w(\hat{L}) = \sum_i \epsilon(C_i), \quad (3.10)$$

We can formulate link polynomial directly on link diagrams. First we calculate statistical sum $Tr(\hat{L})$ on the diagram \hat{L} by the rules given in Fig.12 (Fig.13). The link polynomial for the link L is calculated as

$$\alpha(L) = c^{-w(\hat{L})} \frac{Tr(\hat{L})}{Tr(\hat{K}_0)}, \quad (3.11)$$

where \hat{K}_0 is the link diagram for the trivial knot (a loop) and the constant c is defined by

$$c = \lim_{u \rightarrow \infty} \beta(u). \quad (3.12)$$

or by a relation

$$G_i E_i = c E_i. \quad (3.13)$$

We can confirm $\alpha(L)$ is invariant under the Reidemeister moves of link diagrams (Fig.16), and hence $\alpha(L)$ is a topological invariant of the link L . Thus we have shown that a model with the crossing symmetry gives a graphical construction of the link polynomial.

To conclude this section, we again emphasize that the crossing symmetry has algebraic and graphical significances. Algebraically, it leads to the Temperley-Lieb algebra and the braid-monoid algebra. Graphically, the pair-creation and pair-annihilation diagrams are introduced through the crossing symmetry.

4. Modular Transformation, Fusion Rule and Crossing Multiplier

In this section we study the relation between the surgery formula and the Markov trace. In the surgery formula (1.3), modular transformation matrix S_i^j plays an essential role. For WZW model, conformal blocks on the torus are given by the characters of the Kac-Moody algebra. The modular transformation matrix of the characters is given by [9,23]

$$\frac{S_{j0}}{S_{00}} = \text{Tr}_{V_j}(\exp \frac{2\pi i \rho}{k+g}), \quad (4.1)$$

where ρ is the half sum of all positive roots, g is the dual Coxeter number, and k is the level of the integrable representation whose ground state is irreducible representation V_j of group G .

The quantity defined by (4.1) appears in several places in mathematics and physics. In the context of exactly solvable models, it is the crossing multiplier of critical 8VSOS model [24,19], and its generalizations, A, B, C and D IRF models [25]. Explicitly we find that the crossing multiplier and the matrix elements S_{ij} are related by

$$\frac{\psi(j)}{\psi(0)} = \frac{S_{0j}}{S_{00}}. \quad (4.2)$$

For the vertex models [26,1,28,29], the same correspondence also holds. It is known that the partition function $Z(S^2 \times S^1; R_j, B)$ on $S^2 \times S^1$ corresponds to the trace of the braid matrix

$$Z(S^2 \times S^1; R_j, B) = \sum_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_{n-1}} B_{\ell_0 \ell_1 \dots \ell_{n-1} \ell_n}^{\ell_0 \ell_1 \dots \ell_{n-1} \ell_n} \quad (\ell_0 = 0, \ell_n = j). \quad (4.3)$$

This braid matrix B is the monodromy matrix on the conformal blocks on S^2 . For the case of $SU(2)$, the monodromy matrix has been explicitly obtained [29] by solving the Knizhnik-Zamolodchikov equation [30], and the monodromy matrix is equivalent to the braid matrix appearing from 8VSOS model or IRF model

associated to $SU(2)$ [2,25]. Recently it has been shown [31] that the above equivalence between monodromy matrices in WZW models and the Boltzmann weights in IRF models (or the R -matrices in quantum groups) also holds for other gauge groups of type A, B, C and D. These facts indicate that the surgery formula (1.3) is expressed as [15]

$$\begin{aligned} Z(S^3; L) &= \sum_j Z(S^2 \times S^1; R_j, B) S_0^j \\ &\stackrel{\sim}{=} \sum_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n} B_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n}^{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n} \frac{\psi(\ell_n)}{\psi(\ell_0)} \quad (\ell_0 = 0), \end{aligned} \quad (4.4)$$

where the symbol $\tilde{\Sigma}$ denotes the constrained trace. Thus, the surgery formula of a link L in S^3 has the same form with the Markov trace given by the constrained trace (2.10) for the IRF models [15].

The skein relations of the link polynomials constructed from 8VSOS and A,B,C,D, IRF models can be explained by the conformal weights of the WZW models [15]. This fact also agrees with the correspondence between the surgery formula and the Markov trace for the IRF model [15].

The relation (4.2) can be also explained as follows. Recall the fusion algebra of the rational conformal field theory [32,33]:

$$\phi_i \phi_j = \sum_k N_{ij}^k \phi_k, \quad (4.5)$$

where generators $\{\phi_i\}$ correspond to primary fields, and N_{ij}^k counts the multiplicity of ϕ_k appearing in OPE of ϕ_i and ϕ_j . Let us consider one dimensional representations $\{\lambda_i^{(n)} \in \mathbb{C}\}$ of the fusion algebra

$$\lambda_i^{(n)} \lambda_j^{(n)} = \sum_k N_{ij}^k \lambda_k^{(n)}. \quad (4.6)$$

By the Verlinde's formula [32], the $\lambda_i^{(n)}$'s are given by modular transformation

matrix S_{ij} as follows

$$\lambda_i^{(n)} = \frac{S_{in}}{S_{0n}}. \quad (4.7)$$

The value $\lambda_i^{(0)} = S_{0i}/S_{00}$ can be seen as the relative dimension [33] of the representation space of the chiral algebra. On the other hand, the crossing multipliers $\{\psi(j)\}$ of the solvable IRF models are determined by the eigenvalue problem [6]

$$\sum_{\ell \sim j} \psi(\ell) = q^{1/2} \psi(j), \quad (4.8)$$

where the summation is over all states admissible to j . The admissibility condition can be described by the coefficients N_{ij}^k for corresponding conformal field theory. This fact explains the relation (4.2) between the matrix elements of the modular transformation and the crossing multipliers.

For the case of restricted 8VSOS model, the condition (4.8) is

$$\sum_{\ell} N_{1j}^{\ell} \psi(\ell) = q^{1/2} \psi(j), \quad (4.9)$$

with

$$N_{1j}^{\ell} = \delta_{j+1}^{\ell} + \delta_{j-1}^{\ell}. \quad (4.10)$$

Here N_{1j}^{ℓ} is nothing but the fusion coefficient for $SU(2)$ WZW model.

5. Graph State IRF Models

The theory to construct link polynomials from exactly solvable models takes advantage of the crossing multipliers of the models. To show a wide applicability of the theory, we shall present examples of solvable models other than A, B, C and D models. In fact, there exist various models with non-trivial crossing multipliers from which link polynomials can be constructed.

Let us introduce graph-state IRF models [6](Fig.17). The constraint on the model can be expressed by a graph [34,2,35]. Each point of the graph corresponds to a possible spin value of the model. The point for a spin b is connected to the point for a spin a , if and only if b is admissible to a : $b \sim a$. For any graph in any dimensions we consider the following relation [2]

$$\sum_{b \sim a} \psi(b) = q^{1/2} \psi(a), \quad (5.1)$$

where the summation is over all spin values admissible to a . This relation has already appeared in (3.7) and (4.8). From the solutions of the eigenvalue problem (5.1) we have the Temperley-Lieb operators by

$$[U_i]_{\ell_0 \ell_1 \dots \ell_n}^{p_0 p_1 \dots p_n} = \left(\prod_{j=0}^{i-1} \delta_{\ell_j}^{p_j} \right) \delta_{\ell_{i-1}}^{\ell_{i+1}} \frac{(\psi(\ell_i) \psi(p_i))^{1/2}}{\psi(\ell_{i-1})} \left(\prod_{j=i+1}^n \delta_{\ell_j}^{p_j} \right). \quad (5.2)$$

It is easy to see that the operator U_i satisfies the defining relations of the Temperley-Lieb algebra. Choosing the crossing parameter λ by

$$2 \cos \lambda = q^{1/2}, \quad (5.3)$$

and from the Temperley-Lieb operator U_i , we can construct Yang-Baxter operator $X_i(u)$ by [2]

$$X_i(u) = \frac{\sin(\lambda - u)}{\sin \lambda} \left(I + \frac{\sin u}{\sin(\lambda - u)} U_i \right) \quad (5.4)$$

Let us give an example. For a graph of the two-dimensional square lattice

depicted in Fig.17(f), the crossing multiplier is given by

$$\psi(\vec{a}) = \sin(\vec{a} \cdot \vec{n} + \omega_0), \quad (5.5)$$

where the lattice points on the two-dimensional square lattice are expressed in terms of

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, \quad (5.6)$$

and $\vec{n} = (n_1, n_2)$. For this model the quantity $q^{1/2}$ is given by

$$q^{1/2} = 2\cos n_1 + 2\cos n_2. \quad (5.7)$$

Thus we have shown that we can construct a solvable model for any graph. These models are generalizations of the 8VSOS models. When a graph has a finite size, the graph-state IRF model is a restricted solid-on-solid (RSOS) model.

Since the extended Markov property (2.11) holds for graph-state model, we can construct the Markov trace on the braid group representation. Therefore we have link polynomial corresponding to arbitrary graph. In other words, from the crossing symmetry, solvable models and then link polynomials are constructed in a systematic manner.

6. Discussions

1) For link polynomial given by the topological quantum field theory, we have found that its expression by the surgery formula corresponds to the general construction of link polynomial based on the exactly solvable models [15]. The crossing multiplier is the keypoint of the latter construction. Crossing multiplier and modular transformation matrix is closely related by the fusion algebra. Therefore, it seems that the construction of link polynomial by the surgery formula is as general as the knot theory based on the exactly solvable models.

2) An advantage of the knot theory based on the exactly solvable models is that the crossing multiplier and the crossing symmetry are naturally introduced. In §5, we have shown that from the crossing symmetry with non-trivial crossing multipliers solvable models and link polynomials are systematically derived.

3) We can construct composite solvable models. The key of the construction is that the projectors can be made from the Yang-Baxter operators [36,6]. The method is called composition method or fusion method. The projectors are considered as generalized Young operators [6]. We can construct "3-point vertex" using the projectors (Fig.18). For graph-state models, the projectors consist of the crossing multipliers. Further, it has been shown that the projectors satisfy the pass-through condition [6] (Fig.19) and also they are compatible with the Markov properties [6]. Therefore by using the projectors we have topological invariant for linking graphs.

4) The row-to-row transfer matrix $T(u)$ of two-dimensional lattice system is constructed from the Yang-Baxter operator as

$$T(u) = U(u)V(u), \quad (6.1)$$

where

$$U(u) = X_1(u)X_3(u) \cdots X_{2n-1}(u), \quad (6.2)$$

$$V(u) = X_2(u)X_4(u) \cdots X_{2n}(u), \quad (6.3)$$

The partition function of the system is written as

$$Z_N(u) = \text{Tr}((U(u)V(u))^n), \quad N = 2n \times 2n, \quad (6.4)$$

and then the free energy f per site is given by

$$f(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N(u). \quad (6.5)$$

We note that if we start from the Yang-Baxter operator for the graph-state model,

then the partition function is written as a summation of the crossing multipliers of the model.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank Professor M. Wadati for continuous encouragements, valuable comments and critical reading of the manuscript. We would also like to thank Professor A. Tsuchiya, Professor Y. Kanie and Doctor Y. Akutsu for stimulating discussions and valuable comments. We would like to thank Professor C. Itzykson, Professor D. Olive and Professor I.B. Frenkel for encouragements and helpful discussions.

References

- [1] Y. Akutsu and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 839, 3039; Commun. Math. Phys. **117** (1988) 243; Prog. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 1.
- [2] Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 1173.
- [3] T. Deguchi, M. Wadati and Y. Akutsu: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 1905, 2921; Adv. Stud. in Pure Math. **19** (1989) (to appear).
T. Deguchi, Y. Akutsu and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 757.
- [4] M. Wadati, T. Deguchi and Y. Akutsu: in "Nonlinear Evolution Equations, Integrability and Spectral Method", ed. by A. Fordy (Manchester University Press, 1989).
- [5] Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati: in "Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics", ed. by C.N. Yang and M.L. Ge (World Scientific Pub., 1989).
- [6] M. Wadati, T. Deguchi and Y. Akutsu: Exactly Solvable Models and Knot Theory, Physics Reports (to appear).
- [7] E. Witten: Princeton preprint IASSNS-HEP-88/33; Gauge Theories and Integrable Lattice Models, Princeton preprint.
- [8] A.M. Polyakov: Mod. Phys. Lett. **3A** (1988) 325.
- [9] D. Gepner and E. Witten: Nucl. Phys. **B278** (1986) 493.
- [10] A. Tsuchiya and Y. Yamada: KEK preprint KEK TH215.
- [11] V.F.R. Jones: Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985) 103.
- [12] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu: Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985) 239.
- [13] J.H. Przytycki and K.P. Traczyk: Kobe J. Math. **4** (1987) 115.

- [14] L.H. Kauffman: Trans. Amer. Math. Soc. (to appear). L.H. Kauffman:
"On Knots" (Princeton University Press, 1987).
- [15] M. Wadati, Y. Yamada and T. Deguchi: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989)
No. 4.
- [16] E. Artin: Ann. Math. **48** (1947) 101.
J.S. Birman: "Braids, Links, and Mapping Class Groups" (Princeton
University Press, 1974).
- [17] J.W. Alexander: Proc. Nat. Acad. **9** (1923) 93.
- [18] A.A. Markov: Recueil Math. Moscou **1** (1935) 73.
- [19] R.J. Baxter: "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics" (Academic
Press, London, 1982).
- [20] K. Sogo, Y. Akutsu and T. Abe: Prog. Theor. Phys. **70** (1983) 730,739.
- [21] C.N. Yang: Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1312.
- [22] H.N.V. Temperley and E.H. Lieb: Proc. Roy. Soc. London **A323** (1971)
251.
- [23] V.G. Kac and D.H. Peterson: Adv. Math. **53** (1984) 125.
V.G. Kac and M. Wakimoto: Adv. Math. **73** (1988) 156.
- [24] R.J. Baxter: Ann. of Phys. **70** (1972) 193.
G.E. Andrews, R.J. Baxter and P.J. Forrester: J. Stat. Phys. **35** (1984)
193.
- [25] M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado: Commun. Math. Phys. **116** (1988)
353.
- [26] V.F.R. Jones: Ann. Math. **126** (1987) 335.
- [27] V.G. Turaev: Invent. Math. **92** (1988) 527.

- [28] N.Yu. Reshetikhin: LOMI preprints E-4-87, E-17-87.
- [29] A. Tsuchiya and Y. Kanie: Adv. Stud. in Pure Math. **16** (1988) 297.
- [30] V. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov: Nucl. Phys. **B247** (1984) 83.
- [31] A. Tsuchiya and Y. Kanie: in preparation.
- [32] E. Verlinde: Nucl. Phys. **B300** [FS22] (1988) 360.
- [33] G. Moore and N. Seiberg: Phys. Lett. **B212** (1988) 451 and Princeton preprint IASSNS-HEP-88/39.
- [34] V. Pasquier: J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987): L217,L221 .
- [35] A. Kuniba and T. Yajima: J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988) 519;
J. Stat. Phys. **50** Nos. 3/4, (1988) 829.
- [36] P.P. Kulish and E.K. Sklyanin: in "Lecture Notes in Physics" **38** (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1982) p.61.

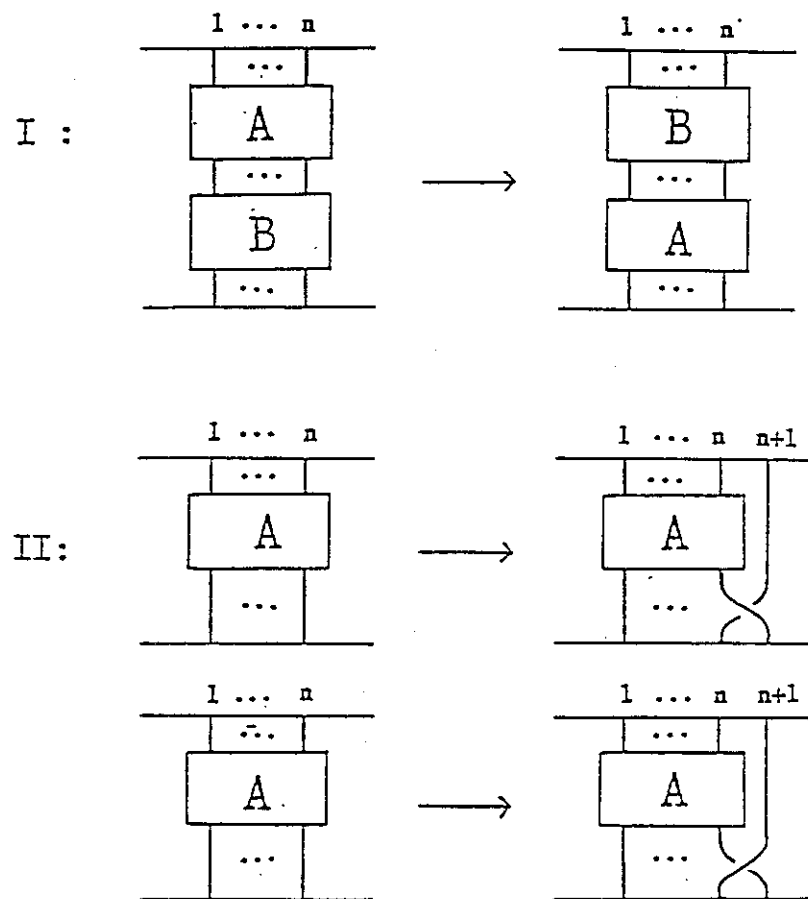


Fig.1 Markov moves I and II.

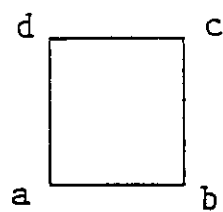


Fig.2 Boltzmann weight of IRF model.

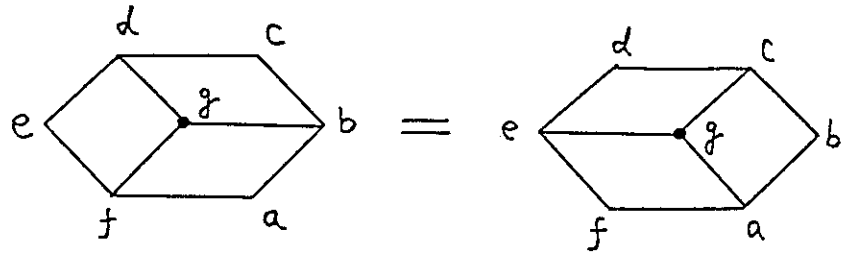


Fig.3 Yang-Baxter relation for IRF model.

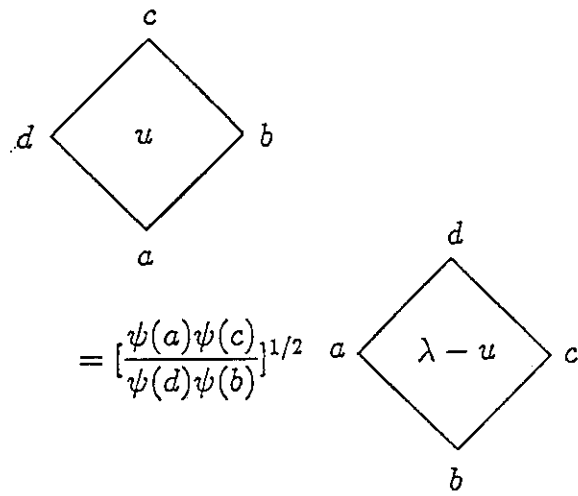


Fig.4 Crossing of IRF model.

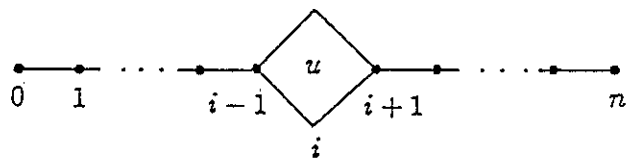


Fig.5 Yang-Baxter operator for IRF model.

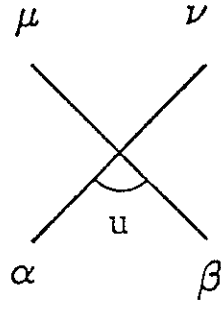


Fig.6 Scattering amplitude $S_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(u)$.

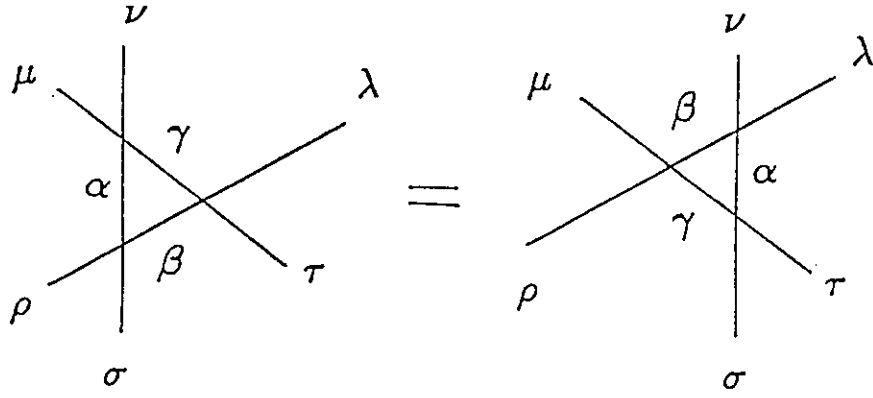


Fig.7 Yang-Baxter relation for S-matrix (vertex model).

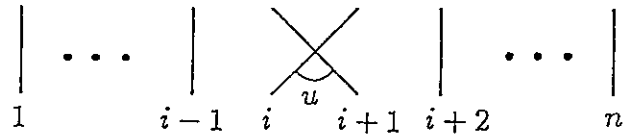


Fig.8 Yang-Baxter operator for S-matrix (vertex model).

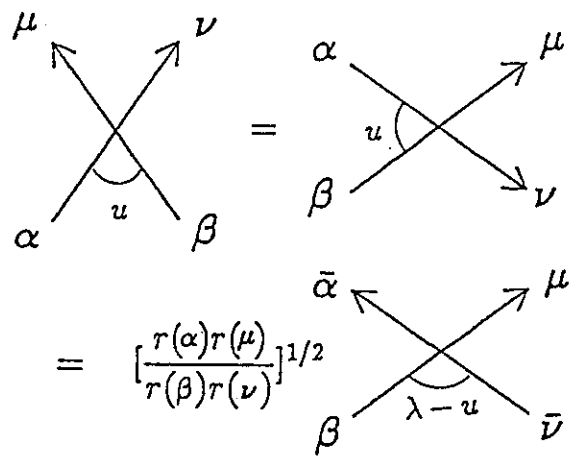


Fig.9 Crossing symmetry of S-matrix.

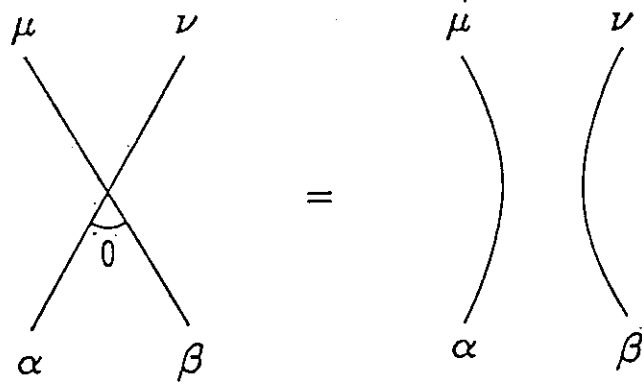


Fig.10 Standard initial condition.

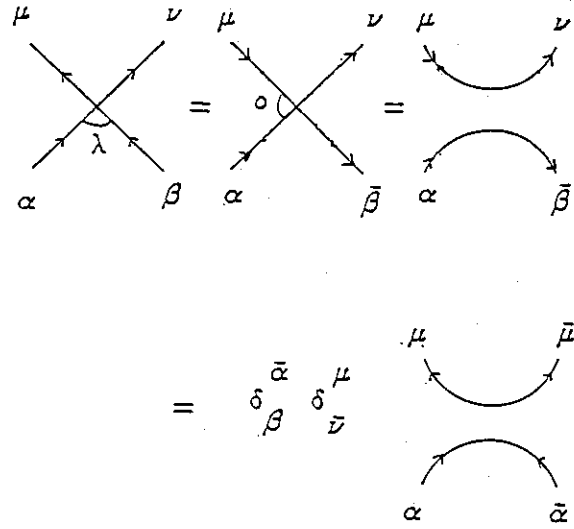


Fig.11 Scattering with $u = \lambda$ corresponds to annihilation-creation diagram (monoid diagram).

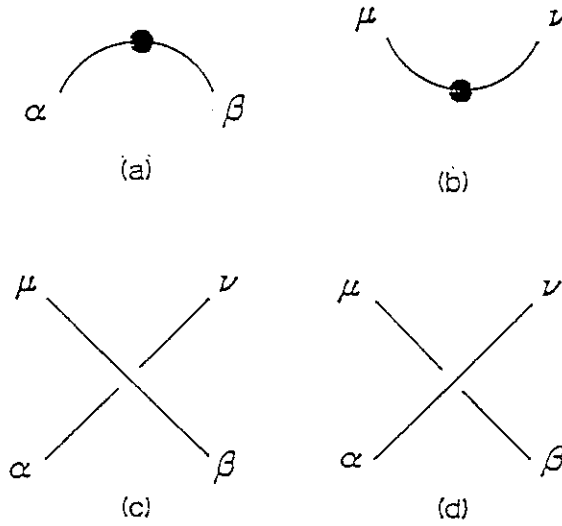


Fig.12 Weights for elements of link diagrams.

(a) pair-annihilation diagram $r(\alpha)\delta_{\beta}^{\alpha}$.

(b) pair-creation diagram $r(\mu)\delta_{\nu}^{\mu}$.

(c) braid diagram with $w = -1$, $G_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(+) = S_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(\infty)$.

(d) braid diagram with $w = 1$, $G_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(-) = S_{\beta\mu}^{\alpha\nu}(-\infty)$.

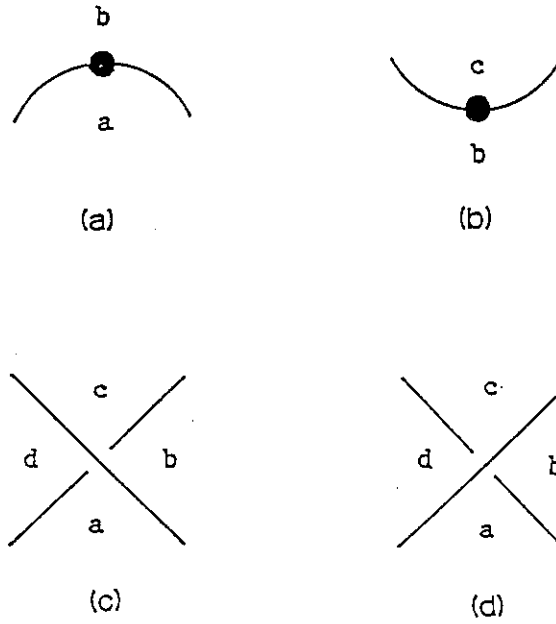


Fig.13 Weights for elements of link diagrams.

(a) pair-annihilation diagram $(\psi(a)/\psi(b))^{1/2}$.

(b) pair-creation diagram $(\psi(c)/\psi(b))^{1/2}$.

(c) braid diagram with $w = -1$, $G(a, b, c, d; +) = w(a, b, c, d; \infty)$.

(d) braid diagram with $w = 1$, $G(a, b, c, d; -) = w(a, b, c, d; -\infty)$.

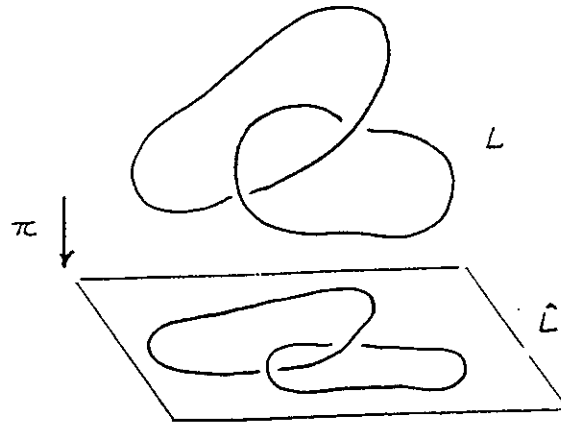


Fig.14 Link diagram \hat{L} .

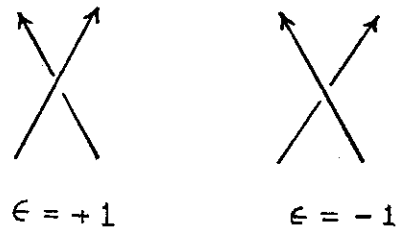


Fig.15 Sign $\epsilon(C)$ of crossings C .

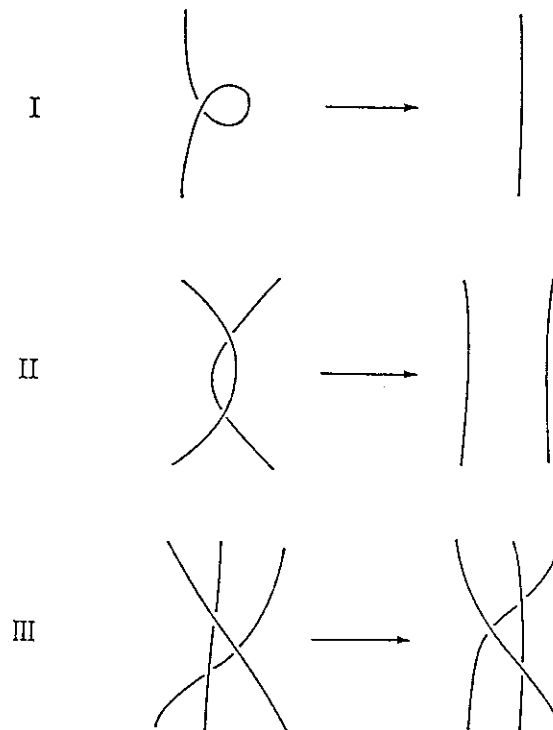


Fig.16 Reidemeister moves I, II and III.

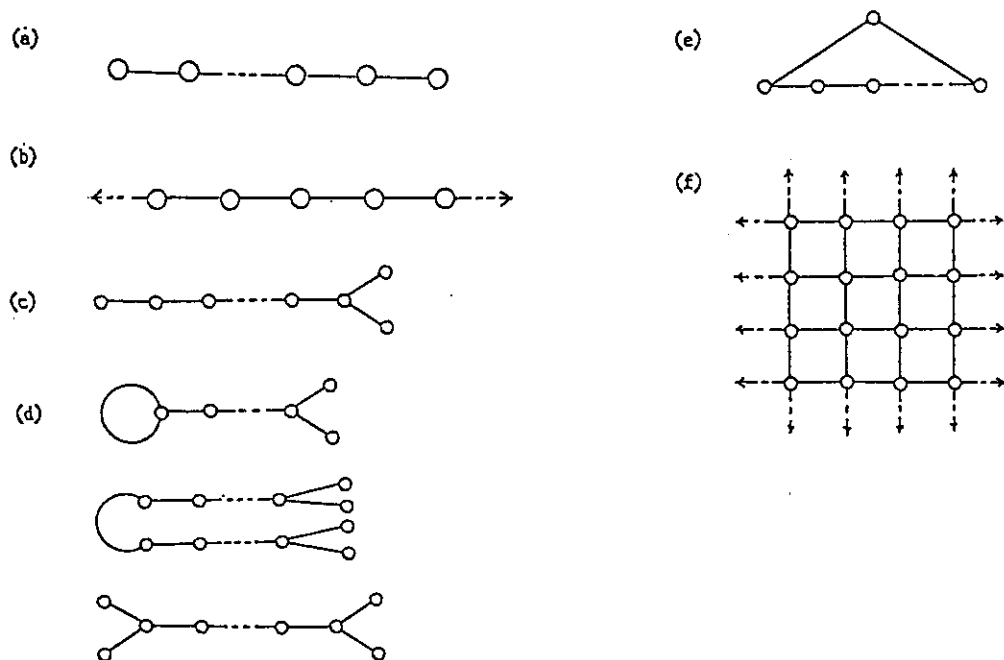


Fig.17 Graph-state models. (a) restricted 8VSOS model (A type), (b) unrestricted 8VSOS model, (c) D type model, (d) special S_2 -generation ($D^{(1)}$) model, (e) periodic 8VSOS model ($A^{(1)}$ type), (f) a two-dimensional square lattice.

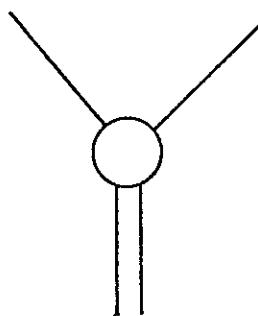


Fig.18 3-point vertex. Circle denotes the projector.

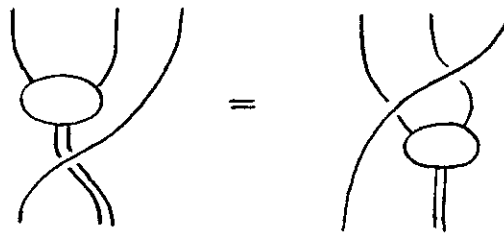


Fig.19 Pass-through condition.

3, 4 次元多様体のトポロジー

松本 堯夫 (広島大学理学部)

1. 結び目 (knot)
2. 3次元多様体 (の幾何とトポロジー) 主として Thurston
3. 4次元多様体

1. 結び目

1-1. 定義. 結び目 k とは S^1 と diffeo な $\mathbf{R}^3(S^3)$ の滑らかな部分多様体

$$k \cong S^1 \hookrightarrow \mathbf{R}^3(\text{or } S^3)$$

として定義される。(ここで滑らかとしたのは wild knot を除くためである。)

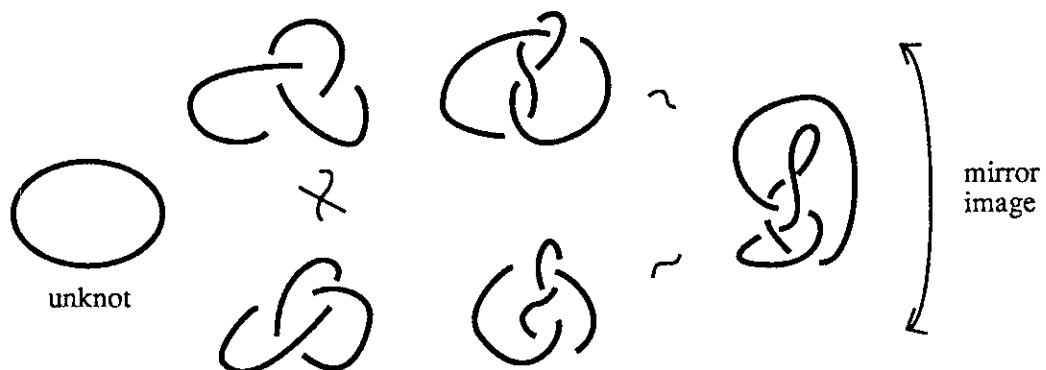
Definition. 2つの knot k_1, k_2 が同値 ($k_1 \sim k_2$) であるとは、向きを保つ (微分) 同相が存在し、

$$\exists f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \text{s.t.} \quad f(k_1) = k_2$$

であることとする。(向き付けを考えないとき k_1 と k_2 は同型と呼ばれる。)

(これはもう少し見易く言うと k_1 を \mathbf{R}^3 の中で k_2 に変形できることと同値)

例

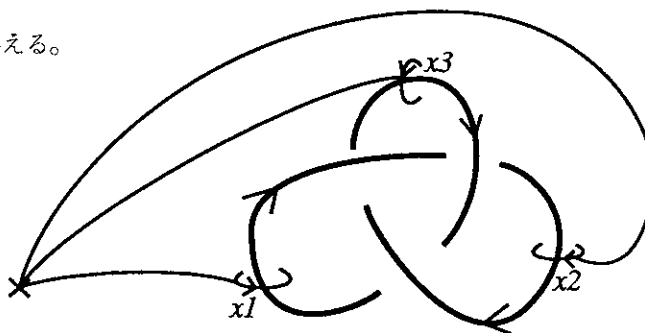


1-2. Knot の群 k_1 と k_2 が同値でないことを言うには上の定義から、 $\mathbf{R}^3 - k_1$ と $\mathbf{R}^3 - k_2$ が同相でないことを示せばよい。

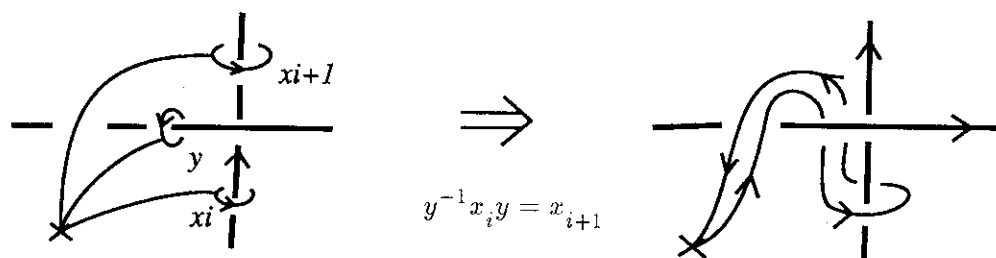
$$k_1 \sim k_2 \implies \mathbf{R}^3 - k_1 \approx \mathbf{R}^3 - k_2 \implies \pi_1(\mathbf{R}^3 - k_1) \simeq \pi_1(\mathbf{R}^3 - k_2)$$

従って基本群が異なれば 2 つの knot は同値でない。(Dehn の補題から $\pi_i(S^3 - k) = 0$ ($i \geq 2$) が示される。) 一般に基本群を計算するのは容易ではないが、knot 群の場合は簡単に記述する方法がある (Wirtinger 表示)。

1. k に向き付けを与える。
2. 基点を決める。



3. 生成元を knot の向き付けに対し、右ネジの法則で定める。生成元の間には次の関係があることがわかる。



4. 上の関係式を上 knot について書くと

$$G = \langle x_1, x_2, x_3; x_3^{-1} x_1 x_3 = x_2, x_1^{-1} x_2 x_1 = x_3, x_2^{-1} x_3 x_2 = x_1 \rangle$$

x_1 を消去すると

$$\simeq \langle x, y; xyx = yxy \rangle \simeq SL(2, \mathbf{Z})$$

identification

$$x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

により、上の knot に対する群は $SL(2, \mathbf{Z})$ と同型であることがわかる。

注意 unknot の場合

$$G = \langle x \rangle \simeq \mathbf{Z}$$

最近次の定理が証明されたらしい。

Theorem. (Gordon-Luecke 1988-9) K_1 と K_2 が *prime* であるとき

$$\pi_1(\mathbf{R}^3 - K_1) \simeq \pi_1(\mathbf{R}^3 - K_2) \implies K_1 \sim K_2 \quad \text{or} \quad K_1^* \sim K_2$$

但し K_1^* は K_1 の鏡像. (knot k が *prime* とは, k が 2 つの knot の和として表わせないこと)

特別な場合の重要な定理を述べておくと、

結び目解消定理. (Papa, Homma)

$$K \text{ is unknot} \iff \pi(\mathbf{R}^3 - K) \simeq \mathbf{Z}$$

これは Dehn's lemma (C. D. Papakyriakopoulos, 本間龍雄 1957) の corollary として得られる。

注意

- a. The Brownian motion on $S^3 - K$ is recurrent $\iff K$ is unknot
- b. LS Category of $S^3 - K = 1 \iff K$ is unknot

1-3. Alexander and Conway polynomial Jones polynomials が定義される以前は Alexander polynomials (= Conway polynomials) が主流であった。

$G = \pi_1(S^3 - k)$ を knot 群, G の交換子群を $G' = [G, G]$ とするとき, $G/G' \simeq \mathbf{Z}$ (可換化). G' の交換子群を $G'' = [G', G']$ とすれば G'/G'' はやはり G' の可換化になっている。このとき Alexander polynomial は G'/G'' の $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}] = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ 上の加群としての構造から定義されるが、同じものを Jones Polynomial の帰納的定義と同様に knot の射影図から組合せ的に定義したとき Conway polynomial と呼ぶ。

2. 3-manifold

2-1. 定義

Definition. (irreducible)

M^3 is irreducible \iff If $S^2 \subset M^3$ then $\exists D^3 \subset M^3$ s.t. $\partial D^3 = S^2$

Definition. (incompressible)

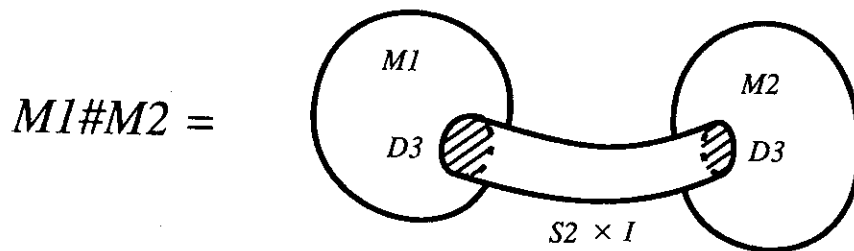
$F^2(\subset M^3)$ is incompressible (非圧縮) $\iff \pi_1(F^2) \hookrightarrow \pi_1(M^3)$ (injection)

Prime decomposition theorem. (Kneser-Milnor)

任意の閉 3 次元多様体 M は irreducible あるいは $S^1 \times S^2$ と diffeo な M_1, \dots, M_n をとって

$$M \cong M_1 \# \dots \# M_n \quad \text{difeo}$$

と出来る。しかもこの仕方は unique. ただし $M_1 \# M_2$ は次のように定義される。



2-2. Irreducible 3-manifold Irreducible 3-manifold とはどんなものかを調べるために、2 次元の場合を思いだそう。2 次元では M^2 に metric を入れると conformal flat (等温座標が入る) になるから、 M^2 が orientable なら複素 1 次元多様体とみなせる。Riemann の写像定理により、単連結な複素 1 次元多様体は次の 3 つの場合に限られる。

1. Riemann sphere $= S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = CP^1$
2. Complex plane $= \mathbb{C} = E^2$
3. Upper half plane $= H = \{x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$

Riemann 多様体としてみると、曲率はそれぞれ正、0、負。

	$\chi(S^2/\Gamma) > 0$	$\chi(S^2/\Gamma) = 0$	$\chi(H/\Gamma) < 0$
曲率	1	0	-1

実は3次元多様体もこれと同様に分類される：

Thurston 予想.

irreducible な M^3 を incompressible $S^1 \times S^1$ に沿って分解すると、各々の成分は8つの geometry をもつものに分解する

$\chi_{orb} > 0$	$\chi_{orb} = 0$	$\chi_{orb} < 0$	Euler 数
$S^2 \times E^1$	E^3	$H^2 \times E^1$	$e = 0$
S^3	$Nil = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbf{R}) \right\}$	$\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$	$e \neq 0$

$Sol =$ Solvable 3-dim Lie group

$$H^3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z > 0\}$$

ここで χ_{orb} は base orbifold の Euler 数, また e は (Seifert) bundle としての Euler 数である. H^2 は 2 次元上半平面. Nil はいわゆる Heisenberg 群で、 T^3 でない T^2 上の S^1 束を含む. $\widetilde{SL(2, \mathbf{R})}$ は 3 次元 Lie 群 $SL(2, \mathbf{R})$ の universal covering. 上の 6 つのクラスは Seifert manifold と呼ばれる (S^1 を leaf にもつ葉層構造が入る) ものになっている.

Sol は $t \in \mathbf{R}$ の $\mathbf{R}^2 \ni (x, y)$ への作用を $(x, y)^t = (e^t x, e^{-t} y)$ で定めた Lie 群

$$1 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \longrightarrow Sol \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow 1 .$$

で、これを \mathbf{R}^3 と identify したとき群演算は $(x, y, t)(x', y', t') = (x + e^{-t} x', Y + e^t y', t + t')$, また invariant metric は $e^{2t} dx^2 + e^{-2t} dy^2 + dt^2$ で与えられる. Sol は S^1 上の T^2 束のあるクラスを含む.

H^3 は上半平面に計量 $(dx^2 + dy^2 + dz^2)/z^2$ を入れた空間で、等長群は $PSL(2, \mathbf{C})$ である. ($PSL(2, \mathbf{C})$ の離散部分群を Klein 群と呼ぶ.) 2 次元の場合と同様に、3 次元多様体では H^3 が generic なものになっている. しかし 2 次元とは違い、一般に H^3 の moduli は discrete になっている等、相当複雑な様相を示す. 2 次元の場合そうであったように、compact M が上半平面 H^3 の Klein 群による商空間に同相になることがある.

"Theorem". (*Thurston monster theorem*)

- (I) M は irreducible,
- (II) $|\pi_1(M)| = \infty$,
- (III) $\partial M = \cup(S^1 \times S^1)$ (incompressible tori),
- (IV) $\pi_1(M) \supset \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ なら ∂H^3 のどれかの $S^1 \times S^1$ で生成される部分群と共役.
- (V) $M \not\cong T^2 \times I$, Klein bottle 上の I 束 (但し, $I = [0, 1]$).
- (VI) M が Haken (=incompressible smooth surface を含む)

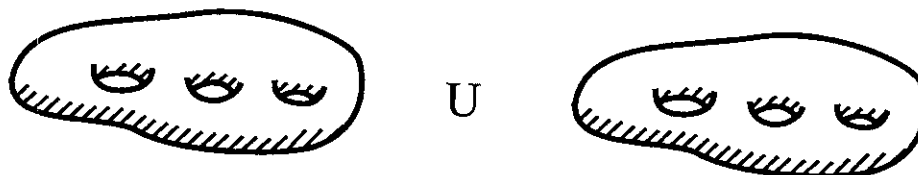
$\implies \exists \Gamma : SO(4, 1)$ の離散部分群 (Klein 群) s.t.

$$M \cong H^3/\Gamma, \quad \text{vol}(H^3/\Gamma) < \infty$$

(Thurston 予想および Monster theorem に関しては解説 [2][3] がある.)

補足

- 1) 任意の閉 3 次元多様体は 2 つの genus の等しい solid torus に分解できる。(Heegaard splitting).



- 2) 任意の閉 3 次元多様体は S^3 内の framed link の surgery で得られる。

3. 4-manifold

1) 3次元との違い.

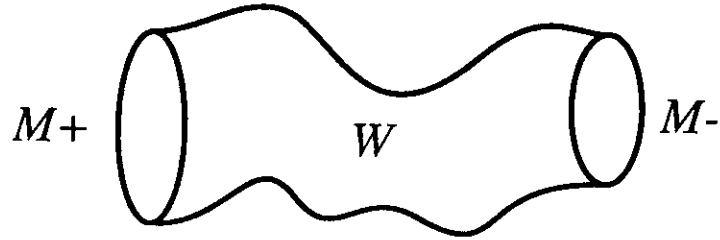
- a. 単連結な多様体は多数ある (Poincaré予想: 3次元では単連結なのは S^3 だけ)
- b. $\pi_1(M)$ は任意 (任意の有限表示群を基本群に持つ n 次元多様体が存在 ($n \geq 4$)) (Markov)

2) 高次元との違い. h-cobordism theorem を準備する。

h-cobordism theorem. (Smale)

(W, M_+, M_-) manifold with boundary $\partial W = M_+ \cup M_-$ ($M_+ \cap M_- = \emptyset$).

- 1) $i_{\pm} : M_{\pm} (\subset \partial W) \hookrightarrow W$ (inclusion) はホモトピー同値
 - 2) $\pi_1(W) = 0$
 - 3) $\dim W \geq 6$
- $\implies W \cong M_{\pm} \times I$



h-cobordism 定理を単連結でない場合に拡張したものが次の定理である。

s-cobordism theorem. (Barden, Mazur 1963, Stallings 1965)

(W, M_+, M_-) manifold with boundary $\partial W = M_+ \cup M_-$ ($M_+ \cap M_- = \emptyset$).

- 1) $i_{\pm} : M_{\pm} (\subset \partial W) \hookrightarrow W$ (inclusion) はホモトピー同値
 - 2) $Wh(\pi_1(W)) \ni \tau(i_{\pm}) = 0$ (単純ホモトピー同値)
 - 3) $\dim W \geq 6$
- $\implies W \cong M_{\pm} \times I$

但し $Wh(\pi_1(W))$ は $\pi_1(W)$ の Whitehead 群. $\tau(i_{\pm})$ は i_{\pm} の Whitehead torsion.

s-cobordism th には $n = 4$ または 5 で反例がある (松本-Siebenmann)。

Poincaré 予想.

$$M^n \simeq S^n (\text{ホモトピー同値}) \stackrel{?}{\implies} M^n \cong D^n \cup D^n (\text{diffeo})$$

特に M^n は S^n と homeo.

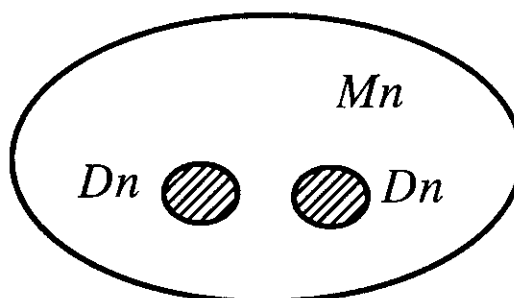
$n \geq 6$: OK! h-cobordism を使って簡単に証明できる:

ホモトピー球面 M^n から 2 つの開球体を除いたものを W とすると h-cobordism 定理から

$$\begin{aligned} W &= M^n - (D^n \cup D^n) \\ &\cong S^{n-1} \times I \quad (\partial D^n = S^{n-1}) \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} M^n &\cong D^n \cup (S^{n-1} \times I) \cup D^n \\ &\cong D^n \cup D^n \end{aligned}$$



$n = 5$: OK! (Kervaire-Milnor, Wall)

$n = 4$: $M^4 \approx S^4$ (homeo) は OK (Freedman 1982). しかし diffeo かどうかは不明.

$n = 3$: 不明 (但し 3 次元では homeo と diffeo は同値).

3) exotic differentiable structure

\mathbf{R}^n 上の smooth structure の数.

$n \neq 4$: unique (smooth manifold が \mathbf{R}^n と homeo なら \mathbf{R}^n と diffeo)

$n = 4$: \mathbf{R}^4 に homeo な非可算個の異なる smooth manifold がある。

4 次元の exotic differentiable structure は次の 2 つの定理の帰結である.

Th. (Freedman 1982)

s -cobordism th. が topological な意味では 4 次元でも "成り立つ".

Th. (Donaldson 1983)

単連結可微分 4 次元多様体 M の交叉形式 $Q(M)$ が正 (負) 定値ならば、交叉形式は整数係数上で対角化可能 i.e.

$$Q(M) \sim (1) \oplus \dots \oplus (1)$$

もう1つ交叉形式の制限に関する有名な定理をあげておく。

Th. (Donaldson)

$K3$ 曲面の交叉形式 $H_2(M; \mathbf{Z}) \times H_2(M; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$ は

$$E_8^- \oplus E_8^- \oplus U \oplus U \oplus U, \quad \text{但し } U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に同型 (E_8^- は負定値) であるが、 $E_8^- \oplus E_8^- \oplus U \oplus U$ を実現する *smooth manifold* は存在しない。

(Donaldson の仕事に関しては解説 [5] がある。)

文献

1 章 (knot 理論)

- [1] 河内明夫編 「結び目理論」 (1989 年シュプリンガー東京 KK より出版予定)

2 章 (3 次元多様体)

- [2] Scott, "The geometry of 3-manifold," *Bull. Lond. Math.* **15**(1983), 401-487.
[3] 小島定吉 数学 **34**(1982) 301.

3 章 (4 次元多様体)

- [4] D. S. Freed and K. K. Uhlenbeck, "Instanton and Four-Manifolds," *Springer Verlag* (1984).
[5] 古田幹雄 数学 **39**(1987) 16.

(2+1)-Dimensional Quantum Gravity

AKIO HOSOYA

*Research Institute for Theoretical Physics
Hiroshima University, Takehara, Hiroshima 725, Japan*

KEN-ICHI NAKAO

*Research Institute for Theoretical Physics
Hiroshima University, Takehara, Hiroshima 725, Japan*

and

*KEK, Tsukuba, National Laboratory for
High Energy Physics, Ibaraki 305, Japan*

ABSTRACT

The (2+1)-dimensional pure Einstein gravity is studied in the canonical ADM formalism, assuming that the space-time topology is $\Sigma^2(\text{a closed and compact 2-surface}) \times R^1$. The dynamical variables are reduced to the moduli parameters of the 2-surface. Upon quantization, the system becomes a quantum mechanics of moduli parameters in a curved space endowed with the Weil-Petersson metric. In the case of torus in particular, the superspace, on which the wave function of universe is defined, turns out to be the fundamental region in the moduli space. The solution of the Wheeler-DeWitt equation is explicitly given as the Maass form which is perfectly regular in the superspace.

1. Introduction and Outline

Quantum gravity¹⁾ is still in its infancy. There remain many conceptual and technical difficulties to overcome.²⁾ In this talk, I would like to concentrate on the clarification of the structure of superspace,^{1), 2)} the functional space of the spatial metric modulo diffeomorphism, on which the wave function of the universe is defined.

Let the spatial metric be $h_{ij}(x)$ and let us remind the audience of the Hamiltonian (Wheeler-DeWitt) and the momentum constraints to the wave function $\psi[h_{ij}]$:

$$H(h_{ij}(x), \delta/\delta h_{ij}(x)) \psi[h_{ij}] = 0, \quad (1.1)$$

$$H^k(h_{ij}(x), \delta/\delta h_{ij}(x)) \psi[h_{ij}] = 0. \quad (1.2)^*$$

with i, j, k being spatial indices. As is well known, the momentum constraint (1.2) implies that the wave function is invariant under the infinitesimal spatial coordinate transformation, since H^k is its generator. So it is natural to further demand that $\psi[h_{ij}]$ is also invariant under the global diffeomorphism. Then the wave function of the universe is a functional defined in the superspace.

In the present work, we shall study the (2+1)-dimensional pure Einstein gravity as a testing ground for the real (3+1)-dimensional gravity with matter degrees of freedom. We assume that the topology of the space-time is $\Sigma^2 \times R^1$, where Σ^2 is a closed compact 2-surface and R^1 is time. In this simple model, we can make explicit the structure of the superspace, now the space of the 2-metric modulo diffeomorphism. This is nothing but the moduli space of the 2-surface in the theory of Riemann surfaces,⁵⁾ if it is divided by the conformal group. In the case of torus for the 2-surface, we can explicitly solve the Wheeler-DeWitt equation.

In a sense, the (2+1)-dimensional pure Einstein gravity is an ideal toy model to see the global structure of space-time. The (2+1)-dimensional Einstein gravity

* For precise forms of the constraints, see *e.g.*, Ref. [2].

contains no gravitational waves which are only local deformation modes in space-time and therefore irrelevant to the more interesting global motion of the spatial manifold.* In that model, only a finite number of degrees of freedom remain corresponding to the Teichmüller deformations of the spatial surface. Roughly speaking, the Teichmüller deformation describes the change of shape of the spatial manifold modulo local conformal expansion. In the case of torus for the 2-surface, for instance, the Teichmüller deformations induce a change from a fat torus to a slim torus and also a twist.

In our previous work,⁶⁾ we solved the classical (2+1)-dimensional Einstein equation employing York's time slice,⁷⁾ the trace of the extrinsic curvature = const. over the 2-manifold. It was shown there that the motion of the moduli parameters follow the geodesic curve defined by the Weil-Petersson metric in the moduli space.⁸⁾ In the present work, we shall investigate the action in phase space rather than the equation of motion, which we studied in the previous work. This turns out to be more illuminating so that we can see the canonical structure and the Hamiltonian and therefore easily go over to quantum mechanics of the moduli parameters. We shall show that, in the case of torus for the 2-surface, the action reduces to

$$S = \int dt \left[P_{(\alpha)} \dot{\rho}^{(\alpha)} + \tau \dot{v} - N(g^{(\alpha)(\beta)} P_{(\alpha)} P_{(\beta)} - \tau^2 v^2) \right], \quad (1.3)$$

where $\rho^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) are the moduli parameters of the torus and $v = \int d^2x \sqrt{h}$ is the total volume of the 2-space. As they stand in the action (1.4), $\rho^{(\alpha)}$ and τ are conjugate momenta to $\rho^{(\alpha)}$ and τ , respectively, while τ originally has a geometrical meaning of the trace of the extrinsic curvature. $g^{(\alpha)(\beta)}$ is the inverse of the Weil-

* Actually, the (2+1)-dimensional Einstein space is locally flat.⁹⁾ This can be most easily seen by looking at the identity to the Riemann tensor:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} + \frac{R}{2} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma})$$

which holds only for the three dimensional space-time. The space-time is locally flat, because the Riemann tensor vanishes due to the vacuum Einstein equation. Therefore our 2-surface sweeps a part of the full Minkowski space. The motion of the 2-surface is not at all trivial, however, if its topology is nontrivial, *i.e.* its genus is non zero.

Petersson metric:

$$ds^2 = \frac{1}{(\rho^{(2)})^2} \left((d\rho^{(1)})^2 + (d\rho^{(2)})^2 \right) \equiv g_{(\alpha)(\beta)} d\rho^{(\alpha)} d\rho^{(\beta)}, \quad (1.5)$$

which coincides with the Poincaré metric in the Lobachevsky geometry. The Lagrange multiplier N is essentially a homogeneous component of the lapse function in the ADM formalism.¹⁰⁾ The action (1.4) is analogous to the one for a relativistic point particle in a curved space-time with the metric:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -v^{-2} & 0 \\ 0 & g_{(\alpha)(\beta)} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Therefore we see that the trajectory of the moduli parameters is a geodesic, a semi-circle in the upper $(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$ -plane with its center on the $\rho^{(1)}$ -axis.

The constraint equation, which is obtained from the variation of the action (1.4) with respect to N ,

$$g^{(\alpha)(\beta)} P_{(\alpha)} P_{(\beta)} - \tau^2 v^2 \approx 0 \quad (1.7)$$

is replaced by the differential equation via $P_{(\alpha)} \rightarrow -i\partial/\partial\rho^{(\alpha)}$, $\tau \rightarrow -i\partial/\partial v$, as

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - (\rho^{(2)})^2 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \rho^{(1)}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \rho^{(2)}} \right)^2 \right\} \right] \psi(s, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}) = 0 \quad (1.8)$$

with $s = \log v$.

The wave function of the torus universe $\psi(s, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$ is manifestly invariant under the infinitesimal diffeomorphism. As is well known, however, there remains the global diffeomorphism corresponding to the $SL(2, \mathbf{Z})$ modular transformation:⁵⁾

$$\rho \rightarrow \rho' = \frac{a\rho + b}{c\rho + d} \quad (1.9)$$

$$a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - bc = 1$$

with $\rho = \rho^{(1)} + i\rho^{(2)}$.

Therefore the true superspace, $\{h_{ij}\}/\text{Diffeo} = \{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}\}/SL(2, \mathbf{Z})$, is the fundamental region F in the complex ρ -plane as depicted in Fig. 1.

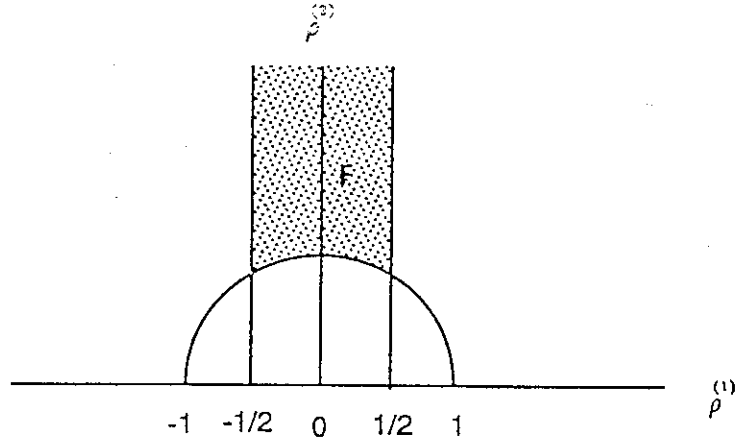


Fig.1

The fundamental region in the Teichmüller space of torus

For ψ to be well-defined in the superspace, it has to be invariant under the $SL(2, \mathbf{Z})$ transformation;

$$\psi(s, \rho) = \psi\left(s, \frac{a\rho + b}{c\rho + d}\right) \quad (1.10)$$

and it must vanish at $\rho^{(2)} \rightarrow \infty$ (cusp) :

$$\psi(s, \rho^{(2)} \rightarrow \infty) = 0 \quad (1.11)$$

so that it is squarely integrable. Such functions called cusp forms are now well understood in mathematics.¹¹⁾ Therefore we understand the functional space of the wave function of the torus universe.

The organization of this paper is as follows. We recapitulate the ADM canonical formalism of gravity in the case of the (2+1)-dimensional pure Einstein gravity in §2. In §3, we shall demonstrate the reduction of the dynamical variables to moduli parameters in the case of general Riemann surfaces for the 2-surface. In §4, we will discuss the quantum mechanics of the moduli of the torus in greater detail. §5 is devoted to summary and discussions.

2. ADM formalism

In this section we recapitulate the ADM canonical formalism¹⁰⁾ of the (2+1)-dimensional Einstein gravity. The (2+1) decomposition of the metric reads

$$ds^2 = -(N dt)^2 + (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt)h_{ij}, \quad (2.1)$$

where N, N^i and h_{ij} are the lapse, shift functions and the spatial metric. The spatial suffix i runs from 1 to 2. We obtain the decomposition of the Einstein-Hilbert action^{*} as

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} R^{(3)} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^3x N \sqrt{h} \left(K_{ij} K^{ij} - K^2 + R^{(2)} \right) \\ &\quad + \text{surface term,} \end{aligned} \quad (2.2)$$

where $K_{ij} = \frac{1}{2N}(h_{ij,0} - N_{i|j} - N_{j|i})$ is the extrinsic curvature and $K = K_{ij}h^{ij}$ is its trace. $R^{(3)}$ and $R^{(2)}$ denote the three and two dimensional scalar curvatures, respectively. Hereafter we will take the unit $16\pi G = 1$. The stroke indicates the covariant derivative defined by the spatial metric h_{ij} . The canonical conjugate

* We follow the conventions in the textbook by Wald.¹²⁾

momentum π^{ij} to h_{ij} is given by

$$\pi^{ij} = \sqrt{h}(K^{ij} - h^{ij}K). \quad (2.3)$$

It is straightforward to obtain the action in the phase space,

$$S = \int d^3x \left[\pi^{ij} \dot{h}_{ij} - NH - N_i H^i \right], \quad (2.4)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{h}}(\pi^{ij}\pi_{ij} - \pi^2) - \sqrt{h}R^{(2)}, \quad (2.5)$$

$$H^i = -2\pi^{ik}{}_{|k} \quad (2.6)$$

with $\pi \equiv \pi^i_i = -\sqrt{h}K^i_i$. Note that the form of the super Hamiltonian (2.5) is slightly different from the four dimensional gravity. (π^2 instead of $\frac{1}{2}\pi^2$). In what follows, it is more convenient to use the traceless part of the extrinsic curvature $\tilde{K}^{ij} \equiv K^{ij} - \frac{1}{2}h^{ij}K^m_m$ and its trace $\tau = -K^i_i$ instead of the canonical momenta π^{ij} . The action becomes

$$\begin{aligned} S = \int d^3x & \left[\tilde{K}^{ij} \frac{\partial \tilde{h}_{ij}}{\partial t} h + \tau \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial t} \right. \\ & \left. - \sqrt{h}N \left\{ \tilde{K}_{ij}\tilde{K}^{ij} - \frac{\tau^2}{2} - R^{(2)} \right\} \right. \\ & \left. + 2\sqrt{h}N_i \tilde{K}^{il}{}_{|l} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

with $\tilde{h}_{ij} = h_{ij}/\sqrt{h}$. Here we have employed the time slice $\tau = \text{const}$ over the spatial surface following York. Variations with respect to the Lagrange multipliers N and N_i would give the Hamiltonian and the momentum constraints

$$\tilde{K}_{ij}\tilde{K}^{ij} - \frac{\tau^2}{2} - R^{(2)} = 0, \quad (2.8)$$

$$\tilde{K}^{it}_{|t} = 0. \quad (2.9)$$

These equations are nothing but the Gauss and Coddazzi equations which are required for the embedding of the 2-surface Σ^2 into the (2+1)-dimensional Minkowsky space-time.

3. Reduction to moduli parameters

We restrict our phase space so that the transversality holds for the traceless part of the extrinsic curvature;

$$\tilde{K}^{it}_{|t} = 0.$$

It is well known that there exist $6g - 6$ independent traceless transverse tensors (holomorphic quadratic differentials) on the closed Riemann surface genus $g \geq 2$, while the number becomes zero for the sphere and 2 for the torus ($g = 1$).⁸⁾ Hereafter we assume $g \geq 1$, since we can see that the sphere case is impossible due to the Hamiltonian constraint (2.8). Therefore we can expand \tilde{K}^{ij} in terms of the basis $\{\phi^{(\alpha)ij}\}$ of the quadratic differentials

$$\tilde{K}^{ij} = \sum_{\alpha} P_{(\alpha)} \phi^{(\alpha)ij} / 2v \quad (3.1)$$

with $v = \int d^2x \sqrt{h}$. The denominator $2v$ is introduced just for convenience. The tensor \tilde{h}_{ij} is arranged so that it is invariant under the Weyl transformation $h_{ij} \rightarrow \Omega h_{ij}$. The deformation of \tilde{h}_{ij} is therefore so-called Teichmüller deformations modulo diffeomorphism,

$$\frac{\partial \tilde{h}_{ij}(x)}{\partial t} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \rho^{(\alpha)}}{\partial t} \mu_{(\alpha)i}^{\ell}(x) \tilde{h}_{\ell j}(x) + \text{diffeo}. \quad (3.2)$$

The equation (3.2) defines the Teichmüller parameters $\rho^{(\alpha)}$ and the corresponding Beltrami differentials $\mu_{(\alpha)i}^{\ell}$. The term “+ diffeo” indicates the redundancy in the form $\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i - h_{ij} \nabla_m \xi^m$ which does not contribute to the action because of

the transversality and the tracelessness of \tilde{K}^{ij} . With $\{\mu_{(\alpha)i}{}^\ell\}$ defined by Eq. (3.2), we can arrange the linear combinations of the holomorphic quadratic differentials $\{\phi^{(\alpha)ij}\}$ in a standard way,

$$\langle \mu_{(\alpha)}, \phi^{(\beta)} \rangle \equiv \int d^2x \sqrt{h} \mu_{(\alpha)i}{}^\ell \phi_{\ell j}^{(\beta)} h^{ij} / 2v = \delta_\alpha^\beta \quad (3.3)$$

i.e.

$\{\phi^{(\alpha)}\}$ is dual to $\{\mu_{(\beta)}\}$ with respect to the Petersson inner product.

We can introduce a natural metric $g^{(\alpha)(\beta)}$ called the Weil-Petersson metric in the Teichmüller parameter space⁸⁾ as

$$g^{(\alpha)(\beta)} = \int d^2x \sqrt{h} \phi_{ij}^{(\alpha)} \phi_{k\ell}^{(\beta)} h^{ik} h^{j\ell} / 2v, \quad (3.4)$$

which is a function of ρ 's and v , in general. Some of the properties of the Weil-Petersson metric have been known to mathematicians. For example, the metric (3.4) is Kählerian and the sectional curvature composed from it is negative definite and the Weil-Petersson metric is incomplete in the moduli space, namely the moduli space is geodesically incomplete.

From now on we will concentrate on the torus case. In this particular case, we can choose the gauge such that $N(t, x) = N(t)$ *i.e.* the lapse function is constant on Σ^2 . For a general Riemann surface with an arbitrary number of genus this gauge is not possible and certain amount of modification is necessary to our argument. However, we believe that essential idea will go through and the conclusion may hold. Furthermore, we have to impose the constraint (2.8) to the initial value, which reduces to a constraint equation to the conformal factor.

Substitute the expansions (3.1) and (3.2) for \tilde{K}^{ij} and $\partial \tilde{h}_{ij} / \partial t$ into the action (2.7) in the phase space. Due to the special gauge $N = N(t)$, the integration over the spatial coordinates can be explicitly carried out. We obtain, with the help of Eqs. (3.3) and (3.4),

$$S = \int dt \left[\sum P_{(\alpha)} \partial \rho^{(\alpha)} / \partial t + \tau \partial v / \partial t - N' \left(\sum P_{(\alpha)} P_{(\beta)} g^{(\alpha)(\beta)} - v^2 \tau^2 \right) \right], \quad (3.5)$$

where

$$v = \int d^2x \sqrt{h} \quad (2\text{-volume}),$$

$$N' = N/2v, \quad (3.6)$$

It is clear from the expression for the action that $(P_{(\alpha)}, \tau)$ are conjugate momenta to $(\rho^{(\alpha)}, v)$. N' plays the role of the Lagrange multiplier, which produces upon variation the constraint equation,

$$\sum g^{(\alpha)(\beta)} P_{(\alpha)} P_{(\beta)} - v^2 \tau^2 \approx 0. \quad (3.7)$$

As Eqs. (3.5) and (3.7) reveal, the dynamics of the Riemann surface Σ^2 is very similar to the one for a massless point particle in a curved space-time. The “background metric” $g^{(\alpha)(\beta)}$ is now given by the Weil-Petersson metric (3.4). The total 2-volume v of Σ^2 plays the role of time. As we alluded to in the introduction, the classical trajectory of the moduli parameters $\rho^{(\alpha)}$ is a geodesic curve given by the “space-time” metric

$$\begin{pmatrix} -v^{-2} & 0 \\ 0 & g_{(\alpha)(\beta)} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Let us write everything explicitly. In the torus case, there are two Teichmüller parameters $\rho^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) with the Poincaré metric:

$$ds^2 = \frac{1}{(\rho^{(2)})^2} \left(d\rho^{(1)^2} + d\rho^{(2)^2} \right) \quad (3.9)$$

In order to simplify the notation we write $\rho^{(1)} = x$, $\rho^{(2)} = y$ with which we may not confuse the real coordinates on Σ^2 . Then the constraint (3.7) becomes

$$y^2(P_x^2 + P_y^2) - v^2 P_v^2 = 0, \quad (3.10)$$

where we write $P_v = \tau$ to make it explicit as a conjugate momentum to the volume v .

The geodesic of the Lobachevski geometry is a semi-circle in the upper $x - y$ plane with its center on the x -axis, as is well known.

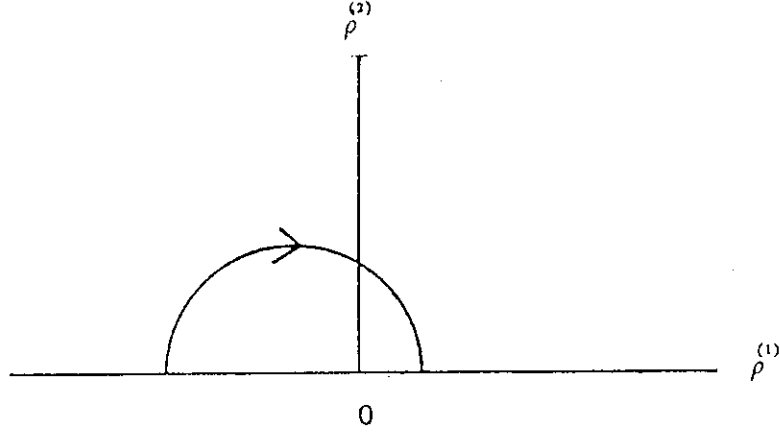


Fig.2

The classical trajectory of the torus universe is the geodesic curve in the moduli space, which is a semi-circle in the figure.

4. Quantum theory of the torus universe

We follow Dirac's prescription for the constraint equations in quantization. The momenta are replaced by differential operators;

$$P_{(\alpha)} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \rho^{(\alpha)}} \quad (4.1)$$

$$\tau \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial v}.$$

The constraint (3.10) is interpreted as a wave equation to the state vector;

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - y^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2) \right] \psi(x, y, s) = 0 \quad (4.2)$$

with $s = \log v$ and (x, y) defined above eq. (3.10). The wave equation (4.2) is the Wheeler-DeWitt equation in the (2+1)-dimensional quantum gravity in the case of torus universe. The wave function of the universe ψ is a function of the Teichmüller parameters x and y and the 2-volume v of Σ^2 . The latter plays the role of time. As briefly discussed in the introduction, there remain a global diffeomorphism $SL(2, \mathbf{Z})$

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.3)$$

$$ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

with $z \equiv x + iy$. The operator ordering of the laplacian in (4.2) is fixed so that it is $SL(2, \mathbf{Z})$ invariant. The wave function $\psi(x, y, s)$ has also to be $SL(2, \mathbf{Z})$ invariant in order to be well defined in the superspace

$$\begin{aligned} \{h_{ij}\}/\text{Diff} \times \text{Conf} &= \{h_{ij}\}/\text{Diff} \times \text{Conf}/SL(2, \mathbf{Z}) \\ &= \{\text{Teichmüller}\}/SL(2, \mathbf{Z}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

As is well known in the theory of automorphic functions, the quotient space $\{\text{upper half plane}\}/SL(2, \mathbf{Z})$ is the fundamental region. Therefore, for the torus universe, the superspace is nothing but the fundamental region F . The region $y \rightarrow \infty$ ("cusp") corresponds to the limit of the fattest torus and also of the thinnest one. Actually they are identified by an element of $SL(2, \mathbf{Z})$, the inside-out operation of the torus.

Separating variables, we can easily find a solution of Eq. (4.3) as

$$u_{\nu}^{(n)}(s, x, y) = \sqrt{y} K_{i\nu}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x} e^{-iEs}, \quad (n = \text{integer})$$

$$\text{with } \nu = \sqrt{E^2 - \frac{1}{4}}. \quad (4.5)$$

Here K is the so-called modified K Bessel function which approaches zero exponentially when its argument goes to infinity. The number n has to be an integer

due to the periodicity $x \rightarrow x + 1 \in SL(2, \mathbf{Z})$. Of course (4.6) itself is not invariant under the full $SL(2, \mathbf{Z})$. We have to superpose (4.6) so that it satisfies the $SL(2, \mathbf{Z})$ invariance;

$$U_\nu(s, x, y) = \sum_{n \neq 0} \rho_\nu(n) \sqrt{y} K_{i\nu}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x} e^{-i E s}, \quad (4.6)$$

The coefficients $\rho_\nu(n)$ have not been analytically given and the discrete eigenvalues ν are known only numerically. (The smallest one is 13,7797513 ...). However, their properties are fairly well studied by mathematicians in number theory. The automorphic function (4.7) is called the Maass form.¹¹⁾ Note that we have excluded $n = 0$ mode in the sum (4.7), because we wanted the boundary condition $u_\nu(s, x, y) \rightarrow 0$ as $y \rightarrow \infty$. That is, we demand the singular universe has no chance to appear. The idea behind this boundary condition is similar to Hartle and Hawking's.¹³⁾ In a sense the singularity of the space-time is circumvented in quantum cosmology of the torus universe. Our wave function of the universe is perfectly regular everywhere in the superspace. Although it is not unique, its variety is only discrete rather than continuous.

It is amusing to point out that the system of the differential equation (4.3) defined in the fundamental region is one of the examples of quantum chaos.¹⁴⁾ This resembles the mixmaster model¹⁵⁾ or the Bianchi type IX model of homogeneous and anisotropic universe.

5. Summary and discussions

Assuming that the topology of space-time is Σ^2 (closed compact) $\times R^1$, we have studied the (2+1)-dimensional pure Einstein gravity on the basis of the canonical ADM formalism. In the torus case, at least, the dynamical variables reduce to the moduli parameters and the system becomes analogous to the one for the massless point particle in a curved space-time endowed with the Weil-Petersson metric. The logarithm of the 2-volume and the Teichmüller parameters play roles of the time and spatial coordinates, respectively. Going over to quantum gravity is straightforward and we find that the Wheeler-DeWitt equation becomes analogous to the Klein-Gordon equation. The operator ordering problem is at least partially solved by

imposing the remaining discrete symmetry to the Laplacian. In the case of a torus universe, the operator ordering is essentially unique. The solution to the Wheeler-DeWitt equation is explicitly given as the Maass form which is modular invariant and perfectly regular in the fundamental region of the Teichmüller space *i.e.* in the superspace. Therefore we have found an example of the wave function of universe in which the singularity is avoided.

We have heavily used the special time slicing, $\tau = \text{const.}$. It is an open question whether we can choose more general time slicing.

Recently, Witten¹⁸⁾ found that the Einstein action can be written as a Chern-Simons form and claimed that the wave function can be obtained by the conformal bloc. At the moment, we do not know the precise relationship between our method and his approach.

REFERENCES

- 1) B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113.
- 2) K. Kuchař, in *Quantum Gravity 2*, edited by C.J. Isham, R. Penrose, and D.W. Sciama (Clarendon Press, Oxford, 1981), p.329.
- 3) M.A.H. MacCallam, in "Quantum gravity; an Oxford Symposium", C.J. Isham, R. Penrose, and D.W. Sciama, eds. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- 4) S.W. Hawking, *Nucl. Phys.* **B239** (1984) 257;
A. Vilenkin, *Phys. Rev.* **D30** (1984) 508.
- 5) e.g. H.M. Farkas and I. Kra, "Riemann Surfaces" New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag.
- 6) A. Hosoya and K. Nakao, "(2+1)-Dimensional Pure Gravity for an Arbitrary Closed Initial Surface", to appear in *Classical and Quantum Gravity*, (1989).
- 7) J.W. York, Jr., *J. Math. Phys.* **14** (1973) 456.
- 8) A.E. Fischer and A.J. Tromba, *Trans. Amer. Math. Soc.* **284** (1984) 319.

- 9) S. Giddings, J. Abbott and K. Kuchač, *Gen. Rel. Grav.* **16** (1984) 751.
- 10) R. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner in "GRAVITATION " ed. by L. Witten, Wiley, New York-London (1962).
- 11) H. Iwaniec, "Non-holomorphic forms and their applications" in "Modular Forms", p.157, ed. R.A. Rankin, Wiley, New York-Chichester-Bribane-Toronto.
- 12) R.M. Wald, "General Relativity", The University of Chicago Press, Chicago and London.
- 13) J.E. Hartle and S.W. Hawking, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2960.
- 14) N.L. Balazs and A. Voros, *Phys. Rep.* **143** (1986) 109.
- 15) C.W. Misner, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1972) 497.
- 18) E. Witten,, *Nucl. Phys.* **B311** (1988) 46.

基本群とスペクトラム

砂田 利一 (名古屋大学理学部)

ゼータ関数に関するリーマン予想の幾何学的類似は、コンパクトなリーマン多様体 M と、その普遍被覆 \tilde{M} を考えたとき

$$\lambda_1(M) \geq \lambda_0(\tilde{M})$$

という形で述べられる。ここで $\lambda_1(M)$ はラプラシアン Δ_M の正の第一固有値、 $\lambda_0(\tilde{M})$ は $\Delta_{\tilde{M}}$ のスペクトラムの下限である。実際、 M を恒等的に -1 の曲率をもつリーマン面とすると、 \tilde{M} は上半平面

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\}$$
$$ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$$

と同一視され、スペクトラム $\sigma(\Delta_{\tilde{M}})$ は $[\frac{1}{4}, \infty)$ となるから $\lambda_0(\tilde{M}) = 1/4$ で上記の不等式は

$$\lambda_1(M) \geq 1/4$$

になる。一方、セルバーグのゼータ関数

$$Z(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_g (1 - e^{-(s+k)l(g)})$$

(g は素な測地サイクル全体を動く)

を考えると、 $Z(s)$ は $0 \leq \Re s \leq 1$ において

$$s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_k(M)} \quad k = 0, 1, 2,$$

という形の零点をもつから、 $Z(s)$ に関してリーマン予想 ($\iff 0 < \Re s < 1$ における零点はすべて $\Re s = \frac{1}{2}$ 上にある) が成立するための条件がちょうど $\lambda_1(M) \geq 1/4$ となっている。

このようなことが、 M とその被覆空間 X 上のラプラシアン (もっと一般にシュレーディンガー作用素) のスペクトラムの関係を考察しはじめた動機の 1 つである (もっと詳しくは [7][9] を参照されたい).

ここではもう 1 つの典型例を与えて、この方向の研究が全く無意味ではないことを示そう.

Floquet の理論によれば、Hill の方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q\right)u = \lambda u, \quad q(x+1) = q(x)$$

には

$$u(x+1) = \alpha u(x) \quad \alpha \in \mathbf{C} \setminus (0)$$

をみたす自明でない解が必ず存在する. 実際、2次元ベクトル空間

$$S_\lambda = \{u \in C^\infty(\mathbf{R}); \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q\right)u = \lambda u\}$$

に作用する線形写像 $M_\lambda : S_\lambda \longrightarrow S_\lambda$ (モノドロミーという) を $(M_\lambda u)(x) = u(x+1)$ により定義すれば M_λ の固有ベクトルが求める u を与える ($\det M_\lambda = 1$ に注意).

Floquet の理論は、被覆写像

$$\mathbf{R} \longrightarrow S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

とその被覆変換群 \mathbf{Z} の表現に関する言葉で記述することができる. これを見るため、一般の正規被覆

$$X \longrightarrow M$$

と、その被覆変換群 Γ の表現

$$\rho : \Gamma \longrightarrow GL(V)$$

を考える. X 上の C^∞ -関数 q で Γ -不変なもの (M 上の関数と自然に見なせる) を 1 つ取り、方

程式

$$(\Delta_X + q)u = \lambda u$$

を考えよう. ただし u は X 上で V に値を取る関数である.

$$u(\sigma x) = \rho(\sigma)u(x) \quad \sigma \in \Gamma, x \in X$$

をみたす u は, M 上の ρ に付随する平坦ベクトル束 E_ρ の切断と同一視され, E_ρ の切断に自然に作用するラプラシアンを Δ_ρ としたとき

$$(\Delta_\rho + q)u = \lambda u \quad u \in C^\infty(E_\rho)$$

の解を求めることと,

$$(\Delta_X + q)u = \lambda u \quad u(\sigma x) = \rho(\sigma)u(x)$$

の解を求めることは同じことである. 特に

$$S = \mathbf{R}, \quad M = S^1, \quad \Gamma = \mathbf{Z}$$

$$\rho(n) = \alpha^n \quad n \in \mathbf{Z}$$

の場合が Hill の方程式に対応している.

では Floquet の理論はどの程度一般化されるだろうか. $\dim M \geq 2$ のときは $S_\lambda = \{u \in C^\infty(X, V); (\Delta_X + q)u = \lambda u\}$ は無限次元となってモノドロミー M_λ は用をなさない. しかし Γ がアーベル群のときには次の部分的結果が得られる.

定理 1. $X \xrightarrow{\Gamma} M$ をアーベル被覆とし, H_X, H_M をそれぞれ $\Delta_X + q, \Delta_M + q$ の自己共役拡張とする.

(1) (Agmon) $\lambda \leq \lambda_0(H_X)$ ならば実表現

$$\rho: \Gamma \longrightarrow \mathbf{R} \setminus (0)$$

が存在して $(\Delta_\rho + q)u = \lambda u$ は自明でない解を持つ.

(2) (Sunada) $\lambda \in \sigma(H_X)$ ならば 1 次元ユニタリー表現

$$\rho: \Gamma \longrightarrow U(1)$$

が存在して $(\Delta_\rho + q)u = \lambda u$ は自明でない解を持つ.

この定理に関して次のことも言える.

定理2. (1) $\lambda_0(H_M) = \lambda_0(H_X)$

(2) (Bloch の性質) $\lambda \in \sigma(H_X)$ であるための条件は $(\Delta_X + q)u = \lambda u$ が自明でない有界な解を持つことである.

定理1, 2 の (2) を適用して

$$\sigma(H_X) = \bigcup_{\rho \in \hat{\Gamma}} \sigma(H_\rho)$$

を得る. ここで $\hat{\Gamma}$ は Γ の1次元ユニタリ表現全体であり, H_ρ は $\Delta_\rho + q$ の自己共役拡張である. Hill の作用素の場合には, 同一視

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma} & \leftrightarrow & [0, 2\pi) \\ \cup & & \cup \\ \rho & \leftrightarrow & \mu \end{array} \quad \rho(1) = e^{\sqrt{-1}\mu}$$

を利用して

$$\begin{aligned} \bigcup_{\rho \in \hat{\Gamma}} \sigma(H_\rho) &= \bigcup_{0 \leq \mu < 2\pi} \{\lambda \in \mathbf{R}; \exists u \in S_\lambda, M_\lambda u = e^{\sqrt{-1}\mu} u\} \\ &= \bigcup_{0 \leq \mu < 2\pi} \{\lambda : \det(M_\lambda - e^{\sqrt{-1}\mu}) = 0\} \\ &= \bigcup_{0 \leq \mu < 2\pi} \{\lambda : \Delta(\lambda) = 2 \cos \mu\} \end{aligned}$$

を得る. ここで $\Delta(\lambda) = \text{Tr} M_\lambda$ は discriminant である. $L^2(\mathbf{R})$ に作用する Hill の作用素のスペクトラムがこれに等しいことは古典的に知られたことである [1].

定理2 は周期的シュレーディンガー作用素, すなわち $X = \mathbf{R}^n$, $M = \mathbf{R}^n/L$, $\Gamma = L = \text{a lattice}$ の場合によく知られた事実である. さらにこの場合, 固有値を持たないことも証明されている. しかし一般のアーベル被覆では H_X が固有値を持つこともある [3].

もっと一般の被覆 $X \xrightarrow{\Gamma} M$ を考えよう.

定理3. (Sunada) $\lambda_0(H_M) \leq \lambda_0(H_X)$. 等号は Γ が amenable のときのみ成立. Γ が amenable のときには $\sigma(H_M) \subset \sigma(H_X)$ が成立する.

この定理の内容は一般の楕円型作用素と比較して、著しい事実である。

念のため amenability の定義を与えておこう:

Γ が amenable $\iff \Gamma$ が不変平均 $m \in L^\infty_\Gamma(\Gamma)^*$ を持つこと.

ここで、 m は

- (1) $m(1) = 1$
- (2) $f \geq 0 \implies m(f) \geq 0$
- (3) $m(\sigma f) = m(f)$
 $(\sigma f)(\theta) = f(\sigma^{-1}\theta)$

を満たす.

アーベル群や有限群は amenable であり、非可換な自由群は amenable ではない.

定理 3 の証明のため、 Γ のユニタリ表現 ρ と自明な表現 $\mathbf{1}$ との間の距離に相当する量 $\delta(\rho, \mathbf{1})$ を導入しよう:

$$\delta(\rho, \mathbf{1}) = \inf_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \sup_{\sigma \in A} \|\rho(\sigma)v - v\|$$

ここで A は Γ の生成元の有限集合である. 定理 3 は次の一般的定理に帰着する.

定理 4. (Sunada [3][6]). 表現 ρ にはよらない正定数 C_1, C_2 が存在して

$$C_1 \delta(\rho, \mathbf{1})^2 \leq \lambda_0(H_\rho) - \lambda_0(H_1) \leq C_2 \delta(\rho, \mathbf{1})^2$$

がすべての表現 ρ に対して成り立つ. 特に

$$\lambda_0(H_\rho) = \lambda_0(H_1) \iff \delta(\rho, \mathbf{1}) = 0$$

実際次の補題が成り立つ.

補題 1) $H_1 = H_M$

2) $\rho = \rho_r$ が正則表現であるとき ($V = L^2(\Gamma)$, $(\rho_r(\sigma)f)(\mu) = f(\mu\sigma)$),

$$(H_{\rho_r}, L^2(E_{\rho_r})) \cong (H_X, L^2(X))$$

unitary equivalent

3) $\delta(\rho_r, \mathbf{1}) = 0 \iff \Gamma$ は amenable

定理4の証明には $\lambda_0(H_M)$ の特殊性を使う. $\lambda_0(H_M)$ は単純な固有値であり, その固有関数として正のものがとれる:

$$(\Delta_M + q)f = \lambda_0(H_M)f \quad f > 0$$

このとき

$$\begin{aligned} \lambda_0(H_\rho) &= \inf_{\substack{s \in C^\infty(E_\rho) \\ s \neq 0}} \frac{\int_M \|df s\|^2 + q \|f s\|^2}{\int_M \|f s\|^2} \\ &= \lambda_0(H_M) + \inf \frac{\int_M f^2 \|ds\|^2}{\int_M f^2 \|s\|^2}. \end{aligned}$$

このことから定理4が得られる.

ここでは詳しくは述べないが, スペクトラム $\sigma(H_X)$ の構造の研究には被覆 $X \rightarrow M$ に対する(セルバーグ型の)跡公式が役に立つ([4][5][7][8]). こうして, もとのリーマン面にたちもどれば, 再びセルバーグのゼータ関数にたどりつくのである. この研究会のテーマは「リーマン面を越えて」であるが, これを「セルバーグを越えて」におきかえると, 「越える」ことは大変なことなのである.

文献

1. M. S. P. Eastham, *The spectral theory of periodic differential equations*, Scottish Academic Press 1973
2. A. Katsuda and T. Sunada, *Homology and closed geodesics in a compact Riemann surface*, Amer. J. Math. **109** (1987), 145-156
3. T. Kobayashi, K. Ono and T. Sunada, *Periodic Schrödinger operators on a manifold*, Forum Math. **1** (1989), 69-79
4. T. Sunada, *Trace formula for Hill's operator*, Duke Math. J. **47**(1980), 529-546
5. T. Sunada, *Trace formula, Wiener integrals and asymptotics*, Proc. "Spectra of Riemannian manifolds," (1983), 103-113

6. T. Sunada, *Unitary representations of fundamental groups and the spectrum of twisted Laplacians*, Topology **28** (1989), 125-132
7. T. Sunada, *Fundamental groups and Laplacians*, Proc. "Geometry and Analysis on Manifolds," Springer Lect Note **1339** (1988), 248-277
8. T. Sunada, *The spectrum of a periodic Schrödinger operator on a manifold*, preprint 1989 Aug. Nagoya
9. 砂田利一, 基本群とラプラシアン, 紀伊国屋書店 1988

SU(N+1, 1) KAC-MOODY LIE 群の EINSTEIN-MAXWELL 方程式の解空間への作用

岡本 清郷 (広島大学理学部)

Cartan Weyl の古典的表現論は量子力学の出現によって Harish-Chandra の unitary 表現などの新たな発展をみた。量子力学レベルの表現論では、扱う群は有限次元の Lie 群で、表現空間は一般に無限次元のヒルベルト空間であった。自由度が無限大の場の量子論に対応する unitary 表現論とはどのようなものであろうか？場の量子論に行くためのステップとして古典的場の理論に対する Kac-Moody 群の表現論を考える。

Einstein-Maxwell theory

ここでは古典場の理論として Einstein-Maxwell 理論を扱う。

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi T_{ij} \quad (1)$$

$$\nabla_j F^{ij} = 0 \quad (2)$$

定常軸対称時空

$$ds^2 = (dt \ d\phi \ dz \ d\rho) \begin{pmatrix} h_{00}(z, \rho) & h_{01}(z, \rho) & & \\ h_{10}(z, \rho) & h_{11}(z, \rho) & & \\ & & -e^{2\gamma(z, \rho)} & 0 \\ & & 0 & -e^{2\gamma(z, \rho)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ d\phi \\ dz \\ d\rho \end{pmatrix} \quad (3)$$

但し

$$h_{00}(0, 0) > 0, \ h_{01} = h_{10}, \ \det h(z, \rho) = -\rho^2 \quad (4)$$

を仮定して厳密解を求める。 $(z, \rho) = (0, 0)$ を起点とする。

Maxwell 場の条件として

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i,$$

$$(A_0, A_1, A_2 = 0, A_3 = 0)$$

と仮定しておく。 $\mathbf{F} = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ として微分形式を用いて書けば、 $d\mathbf{F} = 0$ (Bianchi identity). また Maxwell 方程式は、 δ を d の dual とすれば、 $\delta\mathbf{F} = 0$ と書ける。

Einstein 方程式は

$$(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - 8\pi T_{ij}) = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

ただし R_1, R_2 は 2×2 対称行列。従って Maxwell 方程式とあわせて 5 個の未知関数 ($A_0, A_1, h_{00}, h_{01} = h_{10}, h_{11}$) の 8 方程式系を解くことになる。

方針は

1. 方程式を全微分の形で表わす.
2. EM 方程式と同値な anti-self-dual 方程式をもとめる.
3. Anti-self-dual 方程式を線形化し、解を求める.
4. Kac-Moody 群の作用により、全ての解を構成する.

1. 方程式を全微分の形で表わす

以下 $z \rightarrow x, \rho \rightarrow y$ とし、 $x-y$ 平面の上半面の原点近傍を考える。 R_1 に対する方程式は、

$$\begin{aligned} 0 &= 2y^{-1}e^{2\gamma}h\epsilon R_1 dx dy \\ &= d(y^{-1}h\epsilon * dh + 2(y^{-1}h\epsilon * dA)^t A + 2A * d^t A \epsilon y^{-1}h) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし

$$\epsilon = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

また Hodge 作用素 $*$ は $*dx = dy, *dy = -dx$. 上の方程式で、右辺には γ が現われないことに注意せよ。また右辺第二項は Maxwell 方程式そのものであることがわかる:

$$\delta\mathbf{F} = 0 \iff d(y^{-1}h\epsilon * dA) = 0, \quad (7)$$

R_2 に対しても同様に、 γ に対する方程式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma}{\partial x} &= \dots \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= \dots \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} &= \dots\end{aligned}\tag{8}$$

右辺は (h, A) の成分およびそれらの偏導関数で表わされている。5 個の未知関数に対し、8 方程式あるから、これらの微分方程式は可積分条件を満たさなければならない。実際 Einstein-Maxwell の解 (h, A) を、 R_2 に対する方程式 (8) に代入すると R_2 の条件は可積分 (R_2 の方程式系は解が存在し、解 (h, A) に対し可積分) であることがわかる。 γ は (h, A) より定まる。今 (4) の条件を満たす E-M 方程式の解を S_{EM} で表わす。

2. Anti-self-dual 方程式の形でかく

Hauser-Ernst 方程式

$$\sharp d\theta = -id\theta\tag{9}$$

を考える。但し

$$\begin{aligned}\sharp &= y^{-1}h\epsilon^*, \sharp^2 = -1 \\ \theta &= (\eta, \alpha) \begin{cases} \eta & : 2 \times 2 \text{ matrix-valued } C^\omega \text{ at } (0, 0) \\ \alpha & : 2 \times N \text{ matrix-valued } C^\omega \text{ at } (0, 0) \end{cases}\end{aligned}$$

N は Maxwell 場の数で、gauge symmetry は $SU(N+1, 1)$ を扱う。

θ に対し条件

$$\begin{aligned}h &= \frac{1}{2}(\eta + \eta^*) - ix\epsilon + \alpha\alpha^*, \\ h_{00}(0, 0) &> 0, \det h = -y^2\end{aligned}$$

を課すと EM 方程式と HE 方程式の同値を得る。

$$S_{EM} \simeq S_{HE}.$$

3. Lax 表示 (非線形方程式の線形化)

HE 方程式 (9) の線形化を考える。いま $Y(\lambda)$ を $(N+2) \times (N+2)$ 行列値関数として

$$\begin{aligned} dY(\lambda) &= Y(\lambda)\Omega(\lambda) \\ Y(\lambda)(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x, y)\lambda^{-n} \\ Y_0(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

を考えると、HE 方程式 (9) はこの方程式系の可積分条件になっている。(10) の d をとることにより可積分条件 $d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0$ が得られ、Lorentz 計量の空間での十分条件として、 $\Omega(\lambda) = \pm i * \Omega(\lambda)$ なる解がとれる。 $\Omega(\lambda)$ は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上の高々 simple poles を $\lambda = x \pm iy$ にもつ meromorphic function に拡張され、一般に (anti-)self-dual solution の線形結合で書ける。

$$\Omega(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\Phi + i * d\Phi}{\lambda - (x + iy)} + \frac{d\Phi - i * d\Phi}{\lambda - (x - iy)} \right\} \quad (011)$$

これを (10) に代入すれば $\Phi = Y_1$ を得る。

4. Kac-Moody group

ループ群 $G = \text{Map}(S^1 \rightarrow SL(N+2, \mathbf{C}))$ の解空間への作用を調べる。 G の central extension \hat{G} が Kac-Moody リー群である。Minkowski 解への G の作用により、全ての解が構成される。 $g(\lambda) \in G$ ($\lambda \in S^1$) 及び $(N+2) \times (N+2)$ matrix

$$\delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、(10) の解は

$$g(\lambda)\delta(\lambda)Y(\lambda) = \delta(\lambda)\tilde{Y}(\lambda)X_+(\lambda)$$

ここで、 $\delta(\lambda)^{-1}g(\lambda)\delta(\lambda) \in G$ および

$$\tilde{Y}(\lambda) : \text{holomorphic on } \Gamma_+$$

$$X_+(\lambda) : \text{holomorphic on } \Gamma_-$$

従って G の作用により (10) の解は Γ_+ で正則な部分と Γ_- で正則な部分に分解された。さらに

$S^1 \ni \lambda = e^{i\theta}$, g を $SL(N+2, \mathbf{C})$ の Lie 環とすれば G の Lie 環 $g \otimes [\lambda, \lambda^{-1}]$ を得る。いま $X_k \in g \otimes [\lambda, \lambda^{-1}]$

$$P_+ := \left\{ \sum_{k>0} X_k \lambda^k \right\} = \text{positive root vectors}$$

とすれば、 G/P_+ は flag manifold となり、Borel-Weil の定理から Kac-Moody リー群 \hat{G} の既約表現は G/P_+ 上の holomorphic sections の空間で構成できる。

Γ_+ 及び Γ_- への G の作用を調べるために第2種 Siegel space を準備する。

$$\mathcal{G} = \{g \in SL(N+2, \mathbf{C}) | g * Jg = J\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i & & & \\ -i & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば $\mathcal{G} \simeq SU(N+1, 1)$ である。

第2種 Siegel space は

$$\begin{aligned} M_+ &= \{(z_0, z_1, \dots, z_N) \in \mathbf{C}^{N+1} | \operatorname{Im} z_0 - \frac{1}{2}(|z_1|^2 + \dots + |z_N|^2) > 0\} \\ &\simeq \{(w_0, \dots, w_N) \in \mathbf{C}^{N+1} | (|w_0|^2 + \dots + |w_N|^2) < 1\} \end{aligned}$$

で定義される空間で、上で定義した \mathcal{G} が transitive に作用している。

$$M_+ \ni z \longmapsto (az + b)(cz + d)^{-1} \in M_+, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$$

今

$$M_- := \{z \in \mathbf{C}^{N+1} | \operatorname{Im} z_0 - \frac{1}{2}(|z_1|^2 + \dots + |z_N|^2) < 0\}$$

とし、 \mathbf{C}^{N+1} を3つの部分空間に分解する：

$$\mathbf{C}^{N+1} = M_+ \cup M_0 \cup M_-$$

このとき $N > 0$ ならば $M_+ \neq M_-$ 。このことは次のようにして理解できる。等質空間 $\mathbf{P}(\mathbf{C})^{N+1}$

を考え、これを上と同様に $SU(N+1, 1)$ の作用により 3 つの部分空間に分ける。

$$\mathbf{P}(\mathbf{C})^{N+1} = X_+ \cup X_0 \cup X_-$$

このとき

$$\begin{aligned} X_+ &\cong M_+ \\ X_0 &\cong M_0 \cup \mathbf{P}(\mathbf{C})^{N-1} \\ X_- &\cong M_- \cup \mathbf{C}^N \end{aligned}$$

であり、 $M_+ \neq M_-$ がわかる。

いま $SL(N+2, \mathbf{C})$ の自己準同型

$$\sigma(g) = Jg^{*-1}J, \quad g \in SL(N+2, \mathbf{C})$$

を定義し、 $\sigma(g)(\lambda) = \sigma(g(\lambda))$ と書けば上の定義から

$$G_0 = \{g \in G \mid \sigma(g(\lambda)) = g(\lambda)\}$$

は $SU(N+1, 1)$ に同型で ($J = g^*Jg$) M_+ に transitive に作用する。

$$\delta Y = Z$$

とすれば、

$$\begin{cases} (\sigma(Z)^{-1}Z)_- = 0 \\ (\sigma(Z)^{-1}dZ)_- = 0 \end{cases} \quad (012)$$

但し $(\)_-$ は λ の負べき係数を意味する。このとき (012) は G_0 -不変, since

$$\begin{aligned} \sigma(gZ)^{-1}gZ &= \sigma(Z)^{-1}\sigma(g)^{-1}gZ \\ &= \sigma(Z)^{-1}Z \end{aligned}$$

結局 (012) と HE が 1 対 1 に対応する。

次に

$$Y_1(x, y) = \begin{pmatrix} u_0(x, y) & \dots & u_N(x, y) \end{pmatrix}$$

と書くと

$$\operatorname{Im} u_0(x, y) - \frac{1}{2}(|u_1(x, y)|^2 + \dots + |u_N(x, y)|^2) < 0$$

すなわち $\vec{u} \in M_-$ であるから、群

$$g(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} \in G$$

の作用により $u(x, 0) \in Y$ は

$$\tilde{u}(x, 0) = (a(x)u(x, 0) + b(x))(c(x)u(x, 0) + d(x))^{-1}.$$

$\tilde{u}(x, 0)$ は M_- の外に出て、affine symmetric space $M_- \cup \{\text{something}\}$ を動く (Riemann symmetric space では global 座標がとれる).

Central extension

S_{EM} 上の line bundle $\mathcal{L} \rightarrow S_{EM}$ の section $e^{2\gamma(h,A)}$, $(h, A) \in S_{EM}$ を考えれば Kac-Moody 群 \hat{G} がその空間に作用することが分かり、これは KP 方程式に対する τ 関数の類似と考えられる。

リーマン面上の場の理論と KN 代数

久保 礼次郎、尾島 修一^{*}、Samir K. PAUL^{**}、吉井 久博
(広島大学 理論物理学研究所)

1. 序論

量子化された弦理論において、経路積分の方法と演算子を用いる形式とは、基本的でしかも相補的な役割を果たしてきた。経路積分の方法では、多重ループ散乱振幅をリーマン面上の計量とリーマン面上に定義された場の量の積分によって計算することができる。グリーン関数や相関関数等も計算の結果、テータ関数や、いわゆる prime form を用いて表現できることがわかっている [1],[2]。

一方、演算子を用いる方法 [3],[4],[5] は、2 次元の共形不変な場の理論において発展したのであるが、弦理論に対して大変有効に応用されてきた。場の演算子は、いわゆる Virasoro algebra の表現となっており、リーマン面が球またはトーラスの場合には、適当な共形不変量によって弦理論が定式化されるのである。

高い genus のリーマン面は、低い genus のリーマン面を“縫い合わせて”生成していくことができる。しかし、この“縫い合わせ法” [6] は実際のところ困難で、結果は大変複雑な表現となって記述される。Alvarez-Gaume, Gomez, Moore および Vafa [7] は、場の演算子に Bogoliubov 変換を施すことによって、高い genus のリーマン面上の共形理論の定式化が可能であることを示し、経路積分の方法で得られた結果が、彼らの方法で確かに再生されることを計算してみせた。実際、経路積分の方法と Bogoliubov 変換の方法との間には、緊密な対応関係を見ることができる。

ところで、共形場の理論においては、相関関数の計算は、いわゆる演算子の近距離積展開の方法に基づいて実行される。一方、伝統的な場の量子論は、正準量子化に基づいて定式化され、そこに定義された 2 体の T -積を用いて、相関関数が計算される。そこで、共形場の理論を伝統的な正準量子化に基づく場の理論として定式化できないものであろうかということが考えられる。正準量子化による場の量子論においては、時間変数が存在し、従って、時間変位の生成演算子としてハミルトニアンが明確に定義されている。

^{*} 現在、大阪大学理学部

^{**} 現在、Institute of Physics, Sachivalaya Marg, Bhubaneswar 7510005, India

一方、共形理論においては、時間の概念が明確ではなかったのである。局所的には、一点を囲む円の半径の大きさによって時間の順序を決めることができる。リーマン面が円筒の場合には、大域的な時間をそこに設定できるであろう。しかし、高い genus を持つリーマン面上に、大域的な時間を持ち込むことが可能かどうか知られていなかった。

1987 年、Krichever と Novikov[8] とによって開発された KN formalism においては、任意の genus を持つリーマン面上に、global な時間を明確に定義できることが示され、リーマン面がこの時間変数によって一意的に parametrize されることがわかった。したがって、リーマン面上にハミルトニアンを定義することができ、正準量子化が可能になる。この結果、任意の genus を持つリーマン面上の場の量子論を定式化することができる。これらの事情を以下に概説し、私共の最近の試みを紹介したい。

2. Krichever-Novikov Algebra

Compact なリーマン面 $M(\text{genus } g)$ 上に 2 点 P_+ と P_- を一般の位置にとる。これら 2 点での局所座標を、それぞれ z_+, z_- ($z_+(P_+) = 0, z_-(P_-) = 0$) とする。このリーマン面上には、有理型関数 f_i の他にベクトル場 e_i 、アーベル微分 ω_i 、半微分 χ_i 、2-形式 Ω_i 等々を定義することができる。ここで、index i は genus の偶奇に従って整数又は半整数の値をとり、 f_i, e_i, \dots 等はそれぞれ有理型関数、ベクトル場、... 等の基底を構成している。点 P_\pm 以外で正則な λ -微分 (λ -形式) に対する基底を $f_i^{(\lambda)} = f_i^{(\lambda)}(z)(dz)^\lambda$ ($f_i^{(0)} = f_i, f_i^{(2)} = \Omega_i, \text{etc.}$) と書くことにする。

有理型関数 f_i 及び アーベル微分 ω_i の P_\pm の近傍での振舞いは、

$$f_i(z_\pm) = \alpha_i^\pm z_\pm^{\pm i - g/2} [1 + O(z_\pm)], \quad (2.1a)$$

$$\omega_i(z_\pm) = \beta_i^\pm z_\pm^{\mp i + g/2 - 1} [1 + O(z_\pm)], \quad (2.1b)$$

となる。ここで、 α_i, β_i は定数である。 $i = -g/2, \dots, g/2 - 1$ 、に対しては、Weierstrass gap theorem により pole の次数が少し変わり、

$$f_i(z_-) = \alpha_i^- z_-^{-i - g/2 - 1} [1 + O(z_-)], \quad (2.1c)$$

$$\omega_i(z_-) = \beta_i^- z_-^{i + g/2} [1 + O(z_-)], \quad (2.1d)$$

となるのである。ここでは特に、

$$f_{g/2}(z) = 1, \quad (2.1e)$$

$$\omega_{g/2}(z) = \omega(z), \quad (2.1f)$$

と選ぶことにする。ここで、 $\omega(z)$ は M 上に定義された第 3 種アーベル微分である。ベクトル場、2-形式、半微分の P_{\pm} の近傍における振舞いは、それぞれ、

$$e_i(z_{\pm}) = \gamma_i^{\pm} z_{\pm}^{\pm i - g_0 + 1} [1 + O(z_{\pm})], \quad (2.2a)$$

$$\Omega_i(z_{\pm}) = \delta_i^{\pm} z_{\pm}^{\mp i + g_0 - 1} [1 + O(z_{\pm})], \quad (2.2b)$$

そして

$$\chi_i(z_{\pm}) = \epsilon_i^{\pm} z_{\pm}^{\mp i - 1/2} [1 + O(z_{\pm})], \quad (2.3)$$

で与えられる。ここで、 $g_0 = 3g/2$ 、 $\gamma_i, \delta_i, \epsilon_i$ は定数である。

ベクトル場 e_i は次の KN commutation relations:

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{ij}^s e_{i+j-s}, \quad (2.4)$$

を満足する。 C_{ij}^s は構造定数である。即ち、ベクトル場 $\{e_i\}$ は KN 代数を構成する。この式の central extension は交換関係、

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{ij}^s e_{i+j-s} + \chi(e_i, e_j), \quad (2.5)$$

によって与えられる。ここで、 $\chi(e_i, e_j)$'s は cocycles を成し $|i+j| > 3g$ で 0 になることが知られている。

リーマン面がトーラスの場合、ベクトル場 e_n は具体的に、Weierstrass σ -関数を使って書ける。

$$e_n = e_n(z) \partial / \partial z, (n \neq -1/2)$$

ここで、 n は半整数値をとり、 $e_n(z)$ は次のような楕円関数によって与えられる。

$$e_n(z) = \frac{\sigma^{n-1/2}(z-z_o)\sigma(z+2nz_o)}{\sigma^{n+1/2}(z+z_o)} \frac{\sigma^{n+1/2}(2z_o)}{\sigma((2n+1)z_o)}$$

特に、 $e_{1/2}(z) = 1$ で

$$e_{-1/2}(z) = \frac{\sigma^2(z)}{\sigma(z+z_o)\sigma(z-z_o)} \frac{\sigma(2z_o)}{\sigma^2(z_o)}$$

はトーラス上の第 3 種アーベル微分である。 $\pm z_o$ は、トーラス上の 2 点 P_{\pm} に対応する。このようにして与えられるトーラス上のベクトル場 e_n は交換関係、

$$[e_m, e_n] = \sum_{l=-3/2}^{3/2} C_{mn}^l e_{m+n-1}$$

を満足する。但し、 $m \neq \pm 1/2, n \neq \pm 1/2, m+n \neq -2$. 構造定数 C_{mn}^l は

$$\begin{aligned} C_{mn}^{3/2} &= n - m, \\ C_{mn}^{1/2} &= 3(m-n)\zeta(2z_o) + (n-m+1)\zeta((2m+1)z_o) \\ &\quad + (n-m-1)\zeta((2n+1)z_o) + (m-n)\zeta(2(m+n-1)z_o), \\ C_{mn}^{-1/2} &= -\frac{\lambda(m)\lambda(n)}{\lambda(m+n+1/2)\sigma(2z_o)} [3(m-n)\zeta(2z_o) \\ &\quad + (m-n+1)\zeta((2m-1)z_o) + (m-n-1)\zeta((2n-1)z_o) \\ &\quad - (m-n)\zeta(2(m+n+1)z_o)], \\ C_{mn}^{-3/2} &= \frac{(m-n)\lambda(m)\lambda(n)}{\lambda(m+n+3/2)\sigma^3(2z_o)}, \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\lambda(m) = \frac{\sigma((2m-1)z_o)}{\sigma((2m+1)z_o)}$$

そして、

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

リーマン面 M 上には一般に次のような性質をもつ第 3 種アーベル微分 ω が存在する。即ち ω は $M \setminus \{P_+, P_-\}$ 上で正則で、点 P_+ での留数が $+1$, P_- で -1 、そして imaginary periods を持っている。 ω のこの特別な性質を利用して、 M 上に (固有) 時間を

$$\tau(P) = \frac{1}{2} \int_{P_0}^P (\omega + \bar{\omega}), (P_0 \neq P_{\pm}). \quad (2.6)$$

によって定義することが出来る。特に、 $P \rightarrow P_{\pm}$ のとき、 $\tau \rightarrow \mp\infty$ となる。そこで、

$$C_{\tau} = \{P \in M; \tau(P) = \tau \in \mathbf{R}\}. \quad (2.7)$$

として、 M 上に閉等時曲線 C_{τ} を描くことができる。 C_{τ} の M 上における動きは、閉じた紐の運動であると考えることができる。更に、この C_{τ} を使えば、 M 上に新しい座標近傍を

$$w(P) = \tau(P) + i\sigma(P) = \int_{P_0}^P \omega, \quad (2.8)$$

によって導入することができる。ここで、

$$\sigma(P) = \frac{1}{2i} \int_{P_0}^P (\omega - \bar{\omega}). \quad (2.9)$$

は紐 C_{τ} 上の座標である。変換 $z \rightarrow w$ は、共形的な reparametrization である。

先に導入した種々の基底は、次のような双対関係を満足する。

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\tau}} f_i(\tau, \sigma) \omega_j(\tau, \sigma) d\sigma = \delta_{ij}, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\tau}} e_i(\tau, \sigma) \Omega_j(\tau, \sigma) d\sigma = \delta_{ij}, \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\tau}} \chi_i(\tau, \sigma) \chi_{-j}(\tau, \sigma) d\sigma = \delta_{ij}. \quad (2.12)$$

量子電磁力学における ” D - functions” に対応して、” K - functions” を M 上に次のように定義しよう。

$$K(w, w') = K^{(+)}(w, w') + K^{(-)}(w, w') , \quad (2.13)$$

ここで、

$$K^{(+)}(w, w') = \sum_{l=-g_0+2}^{\infty} e_l(w) \Omega_l(w') , \tau > \tau' , \quad (2.14a)$$

$$K^{(-)}(w, w') = \sum_{l=-\infty}^{-g_0+1} e_l(w) \Omega_l(w') , \tau < \tau' . \quad (2.14b)$$

w と w' が level line C_τ 上にあるときには、

$$K^{(+)}(w, w')_{C_\tau} = \frac{1}{i} \left[\frac{P}{\sigma - \sigma'} + i\pi \delta(\sigma - \sigma') \right] , \quad (2.15a)$$

$$K^{(-)}(w, w')_{C_\tau} = \frac{1}{i} \left[-\frac{P}{\sigma - \sigma'} + i\pi \delta(\sigma - \sigma') \right] . \quad (2.15b)$$

そして

$$K(w, w')_{C_\tau} = 2\pi \delta(\sigma - \sigma') . \quad (2.16)$$

となる。 K_R , K_A , K_F については、

$$K_R(w, w') = -\theta(\tau - \tau') K(w, w') , \quad (2.17)$$

$$K_A(w, w') = \theta(\tau' - \tau) K(w, w') , \quad (2.18)$$

$$K_F(w, w') = \theta(\tau - \tau') K^{(+)}(w, w') - \theta(\tau' - \tau) K^{(-)}(w, w') , \quad (2.19)$$

によって定義される。但し、

$$\theta(\tau - \tau') = \begin{cases} 1 & \text{for } \tau > \tau' , \\ 0 & \text{for } \tau' < \tau . \end{cases} \quad (2.20)$$

3. b-c system の場の理論

この section において、 $b-c$ system に対する場の量子論を、一般の genus g のリーマン面 M 上で定式化しよう。前節と同じように、 M 上に 2 点 P_+ と P_- を一般の位置にとり、その周りでの局所座標 z_+ 及び z_- が $z_+(P_+) = 0$ 、 $z_-(P_-) = 0$ となるように選ぶ。計量は、暫く共形的にユークリッド系:

$$ds^2 = \rho(z, \bar{z}) dz d\bar{z} . \quad (3.1)$$

にとっておく。

このリーマン面上に ふたつの form: $b = b(z)(dz)^\lambda$ 及び $c = c(z)(dz)^{1-\lambda}$ を考える。ここで、 $b(z)$ と $c(z)$ はお互いに共役な場であって、それぞれコンフォーマルスピンの λ 及び $1-\lambda$ を持っている。この系の action は

$$S[b, c] = \frac{1}{2} \int_M d^2 z \sqrt{g(z)} b(z) \nabla^z c(z) , \quad (3.2)$$

で与えられる。ここで、 $\nabla^z = \rho^{-1}(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}}$ 。ストレス-エネルギーテンソル $t(z)$ は、

$$t(z) = -\lambda b(z) \nabla^z c(z) + (1-\lambda)(\nabla_z b(z))c(z) . \quad (3.3)$$

となる。場 $b(z)$ と $c(z)$ は、KN bases によって次のように展開することができる。

$$b(z) = \sum_k b_k f_k^{(\lambda)}(z) , \quad (3.4a)$$

$$c(z) = \sum_l c_l f_l^{(1-\lambda)}(z) , \quad (3.4b)$$

ここで、 b_k 及び c_l は、反交換関係

$$\{b_k, c_l\} = \delta_{k+l, 0} , \quad (3.5a)$$

$$\{b_k, b_l\} = \{c_k, c_l\} = 0 . \quad (3.5b)$$

を満足する。 k と l は、genus の偶奇に従って両方共整数、あるいは両方とも半整数値をとる。

ストレス-エネルギーテンソル $t(z)$ も KN basis $\Omega_n(z)$ によって

$$t(z) = \sum_n K_n \Omega_n(z) . \quad (3.6)$$

のように展開される。今後は特に、コンフォーマルスピン $\lambda = 2$ の場合すなわち bosonic string theory の ghost system に対応する場合を考えよう。 $\lambda = 2$ の時、

$$b(z) = \sum_k b_k \Omega_{-k}(z) , \quad (3.7a)$$

$$c(z) = \sum_l c_l e_l(z) , \quad (3.7b)$$

と書けるが、ここで $\{e_l(z)\}$ は ベクトル場に対する KN basis である。ストレス-エネルギーテンソル $t(z)$ は

$$t(z) = -2 \sum_{k,l} b_k c_l \Omega_{-k} \partial_z e_l - \sum_{k,l} b_k c_l \partial_z \Omega_{-k} e_l . \quad (3.8)$$

となる。(3.6) と (3.8) から

$$K_n = \sum_k \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{kn}^s b_{-k-n+s} c_k , \quad (3.9)$$

となることがわかる。ここで、双対関係 (2.11) を使った。

ところで、ストレス-エネルギーテンソル $t(z)$ は、フェルミ場同士の近距離相互作用から生ずる量子的な効果によって、真の意味の共変テンソルにはなっていない。実際、 $t(z)$ は holomorphic な変換 $z \rightarrow w$ の下で

$$t(w) = t(z) \left(\frac{dz}{dw} \right)^2 + \kappa S(z; w) , \quad (3.10)$$

のように変換されるのである。ここで、

$$S(z; w) = \frac{(d^3 z / dw^3)}{(dz/dw)} - \frac{3}{2} \left[\frac{(d^2 z / dw^2)}{(dz/dw)} \right]^2$$

はシュワルツ微分と呼ばれる量であって、 κ は或る定数である。 $t(z)$ は 厳密な意味で 2-form にはなっていないことがわかる。(3.6) からわかるように K_n は変換 $z \rightarrow w$ の下で \tilde{K}_n に変わ

る。しかしながら、 \tilde{K}_n 's と K_n 's は両方とも次の同じタイプの交換関係

$$[K_m, K_n] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{mn}^s K_{m+n-s} + \kappa \chi_{mn}, \quad (3.11)$$

を満足する。これは、(3.9) と ヤコビ恒等式を使って示すことができる。 m と n は、整数あるいは半整数値をとる。また、 $\kappa = \frac{13}{6}$

$$\chi_{mn} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} e_{-m}(w) \partial_\sigma^3 e_{-n}(w) d\sigma \quad (3.12)$$

は KN コサイクル であって、 $|m+n| > 3g$ のとき 0 になる。

次に、ゴーストに対する真空 $|\phi_0\rangle$ を条件

$$\oint_{C_r} b(z) v(z) |\phi_0\rangle = 0, \quad (3.13a)$$

$$\oint_{C_r} c(z) q(z) |\phi_0\rangle = 0, \quad (3.13b)$$

によって定義しよう。ここで、 $v(z)$ 及び $q(z)$ は、それぞれ点 P_+ だけに pole を持つベクトル場と 2-form を表わす。即ち、

$$v(z) = \{e_j(z); j \leq -g_0 + 1\}, \quad (3.14a)$$

$$q(z) = \{\Omega_j(z); j \geq -g_0 + 2\}, \quad (3.14b)$$

であればよいが、これは次の条件と同等である。

$$b_j |\phi_0\rangle = 0 \text{ for } j \geq g_0 - 1, \quad (3.15a)$$

$$c_j |\phi_0\rangle = 0 \text{ for } j \geq -g_0 + 2. \quad (3.15b)$$

$\langle \phi_0 |$ に対する条件は、点 P_- だけに pole を持つベクトル場と 2-form を用いて得ることができる。結果は次のように纏められる。

$$\langle \phi_0 | b_j = 0 \text{ for } j \leq g_0 - 2, \quad (3.15c)$$

$$\langle \phi_0 | c_j = 0 \text{ for } j \leq -g_0 + 1 . \quad (3.15d)$$

さて、ここで新しい座標系

$$w = \tau(P) + i\sigma(P) \quad (2.8)$$

を導入しよう。 $\tau(P)$ および $\sigma(P)$ はすでに (2.6) と (2.9) に与えられている。この座標系を用いて $b-c$ system の場の量子論を定式化しよう。パラメータ $\tau(P)$ はリーマン面上で”時間”の役目を果たす。その結果、 M 上の場の”時間順序積”を明確に定義することができ、リーマン面上における時空構造についての具体的なイメージが得られる。

まず、 M 上に Lagrangian 密度 \mathcal{L} を

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2\pi} b(w) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) c(w) . \quad (3.16)$$

によって導入する。 $c(w)$ に共役な運動量は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}} = \frac{i}{2\pi} b(w) , \quad (3.17)$$

で与えられる。Hamiltonian 密度は従って

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}} \dot{c} - \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} b(w) \frac{\partial c(w)}{\partial \sigma} , \quad (3.18)$$

となる。ここで、 $\dot{c} = \partial c(\sigma, \tau) / \partial \tau$. Hamiltonian H は \mathcal{H} を level curve C_τ で積分することにより得られる。

$$H = \oint_{C_\tau} \mathcal{H} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\tau} d\sigma b(\sigma, \tau) \frac{\partial}{\partial \sigma} c(\sigma, \tau) . \quad (3.19)$$

通常の正準量子化の処方に従って同時刻反交換関係

$$\{c(w), b(w')\}_{\tau=\tau'} = 2\pi \delta(\sigma - \sigma') , \quad (3.20)$$

を設定する。ここで σ 及び σ' は同じ level curve C_τ 上にあるとする。Heisenberg 方程式は

場の正則性を表現するものとして次のようになる。

$$\partial_w \phi(w) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \phi(w) = 0 \quad (3.21)$$

ここで $\phi(w)$ は $b(w)$ または $c(w)$ を表わす。系の運動量は

$$P = \frac{i}{2\pi} \oint_{C_\tau} d\sigma b(\sigma, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} c(\sigma, \tau) . \quad (3.22)$$

こうして得られた Hamiltonian H と運動量 P は保存量になっている。(3.19) 及び (3.22) 中の被積分関数は点 P_\pm での pole を除いて正則であって H 及び P は τ に依存しないことがわかる。この事実は Bonora, Russo, Lugo[9],[10] や Konishi, Saito, Takahashi[11] 達によって得られた結果と異なる。彼らの場合には、第3種アーベル微分 ω に含まれる $2g$ 個の零点を通して H は τ に依存することになる。一方、我々の場合には、被積分関数は ω を露には含まず H の値は、 C_τ が ω の $2g$ 個の零点を通りすぎる時に変化しない。

次に、 $b-c$ 系に対するプロパゲーター $K_F(w, w')$ を

$$\begin{aligned} K_F(w, w') &= \langle \phi_0 | T(c(w)b(w')) | \phi_0 \rangle \\ &= \theta(\tau - \tau') \langle \phi_0 | c(w)b(w') | \phi_0 \rangle \\ &\quad - \theta(\tau' - \tau) \langle \phi_0 | b(w')c(w) | \phi_0 \rangle . \end{aligned} \quad (3.23)$$

として定義する。(3.8) 式をこれに代入して

$$\begin{aligned} K_F(w, w') &= \theta(\tau - \tau') \sum_{k=-g_0+2}^{\infty} e_k(w) \Omega_k(w') \\ &\quad - \theta(\tau' - \tau) \sum_{k=-\infty}^{-g_0+1} e_k(w) \Omega(w') . \end{aligned} \quad (2.19)$$

を得る。これはまた微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) K_F(w, w') = 2\pi \delta^2(w - w') . \quad (3.24)$$

を満たす。また、(3.7) を反交換関係に入れると

$$\{c(w), b(w')\} = K(w, w') \quad (3.25)$$

を得る。但し

$$K(w, w') = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k(w) \Omega_k(w') . \quad (3.26)$$

(3.25) において極限 $\tau \rightarrow \tau'$ をとれば、再び同時刻反交換関係 (3.20) を得る。

ストレス-エネルギーテンソル $t(w)$ は、前節に述べたように共変テンソルではないが、 M 上で holomorphic であって、次の簡単な微分方程式

$$\nabla^w t(w) = 0 , \quad (3.27)$$

を満足する。一方よく知られているように、共変テンソル $T(w)$ は微分方程式

$$\nabla^w T(w) = -\frac{\kappa}{4} \nabla_w R , \quad (3.28)$$

を満足する。ここで、 R は面の計量によって決まる曲率である。 $T(w)$ と $t(w)$ の違いは計量に依存する local counterterm $t_\rho(w)$ で与えられ

$$T(w) = t(w) + t_\rho(w) , \quad (3.29)$$

$$t_\rho = \kappa \{ (\partial_w \log \rho_w)^2 - 2 \partial_w^2 \log \rho_w \} . \quad (3.30)$$

と書ける。

$t(w)$ を含む交換関係は (3.25) を使えば次のように書けることがわかる。

$$[t(w), b(w')] = -2 \partial_w K(w, w') b(w') + K(w, w') \partial_{w'} b(w') , \quad (3.31a)$$

$$[t(w), c(w')] = \partial_w K(w, w') c(w') + K(w, w') \partial_{w'} c(w') , \quad (3.31b)$$

同時刻交換関係は

$$[t(w), b(w')]_{\tau=\tau'} = 2\pi \{ -2 \partial_w \delta(\sigma - \sigma') + \delta(\sigma - \sigma') \partial_{w'} \} b(w') , \quad (3.32a)$$

$$[t(w), c(w')]_{\tau=\tau'} = 2\pi\{\partial_w \delta(\sigma - \sigma') + \delta(\sigma - \sigma')\partial_{w'}\}c(w'). \quad (3.32b)$$

となる。但し、これらに付随する正則項はすべて省いた。 $t(w)$ と $t(w')$ の間の交換関係は

$$\begin{aligned} [t(w), t(w')] &= -\kappa\partial_w^3 K(w, w') - 2\partial_w K(w, w')t(w') \\ &\quad + K(w, w')\partial_{w'} t(w'), \end{aligned} \quad (3.33)$$

で与えられ、従って同時刻交換関係は

$$\begin{aligned} [t(w), t(w')]_{\tau=\tau'} &= -2\pi\kappa\partial_w^3 \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad - 4\pi\partial_w \delta(\sigma - \sigma')t(w') \\ &\quad + 2\pi\delta(\sigma - \sigma')\partial_{w'} t(w'). \end{aligned} \quad (3.34)$$

となる。

4. b-c system に対する Ward-Takahashi 恒等式

この section では、前節までに得られた結果を使って一連の Ward-Takahashi 恒等式 (WT) を導いてみよう。考える対象はエネルギーテンソル $t(w)$ を含む相関関数の期待値 $\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \rangle$ や $\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \rangle$ 等である。ここで、 $\langle T(\cdots) \rangle = \langle \phi_0 | T(\cdots) | \phi_0 \rangle$ は時間順序積 $T(\cdots)$ の真空期待値を表し、 $\phi_k(w_k)$ は $b(w_k)$ 、 $c(w_k)$ いずれかを表す。

$t(w)$ を唯一つ含む Ward-Takahashi 恒等式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &\partial_{\bar{w}} \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &= \left\langle T(\partial_{\bar{w}} t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_{k-1}(w_{k-1})[t(w), \phi_k(w_k)]\phi_{k+1}(w_{k+1})\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \delta(\tau - \tau_k) \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^N \{h_k \partial_w \delta^2(w - w_k) + \delta^2(w - w_k)\partial_{w_k}\} \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで

$$h_k = \begin{cases} -2 & \text{for } b(w_k) , \\ 1 & \text{for } c(w_k) , \end{cases} \quad (4.2)$$

この導出にあたって、前節の (3.27) および (3.31) を使った。この恒等式の積分形は

$$\begin{aligned} & \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &= \sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \Omega_j(w) \left\langle T(K_j\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^N \{h_k \partial_{w_k} K_F(w_k - w) + K_F(w_k - w) \partial_{w_k}\} \\ &\quad \times \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle . \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。

相関関数に対する Teichmüller deformation は $3g - 3$ 個の Teichmüller parameters y_j と partition function Z を用いて

$$\sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \delta y_j \left\langle T(K_j\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle = \frac{1}{Z} \delta(\left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle Z) . \quad (4.4)$$

と書けることが知られている。これはまた、次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \left\langle T(K_j\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle - \left\langle K_j \right\rangle \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle , \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで

$$\left\langle K_j \right\rangle = \frac{\partial}{\partial y_j} \log Z . \quad (4.6)$$

(4.6) を (4.4) に代入すれば

$$\left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle t(w) \rangle \left\langle T(\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle + \sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \Omega_j(w) \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle T(\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&+ \sum_{k=1}^N \{ h_k \partial_{w_k} K_F(w_k - w) + K_F(w_k - w) \partial_{w_k} \} \\
&\quad \times \left\langle T(\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.7}$$

を得る。ストレス-エネルギーテンソルを 2 つ含む Ward-Takahashi 恒等式は同じ方法で求めることができ次のように書ける。

$$\begin{aligned}
&\partial_x \left\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&= \left\langle T(\partial_x t(x)t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle T([t(x), t(w)]\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \delta(\tau_x - \tau_w) \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_{k-1}(w_{k-1})[t(x), \phi_k(w_k)] \right. \\
&\quad \quad \left. \times \phi_{k+1}(w_{k+1}) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \delta(\tau_x - \tau_w) .
\end{aligned} \tag{4.8}$$

この式に (3.27) , (3.32), (3.34) 等を代入すれば

$$\begin{aligned}
&\partial_x \left\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\left\{ -\frac{\pi\kappa}{6} \partial_x^3 \delta(\sigma_x - \sigma_w) - 4\pi \partial_x \delta(\sigma_x - \sigma_w) t(w) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\pi \delta(\sigma_x - \sigma_w) \partial_w t(w) \right\} \phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N) \right] \right\rangle \delta(\tau_x - \tau_w) \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \{ h_k \partial_{w_k} \delta(\sigma_k - \sigma_x) + \delta(\sigma_k - \sigma_x) \partial_{w_k} \} \\
&\quad \times \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.9}$$

となり、この積分形は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
&\left\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&= \sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \Omega_j(x) \left\langle T(K_j t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\kappa\partial_x^3 K_F(x-w) \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& -\{2\partial_x K_F(x-w) - K_F(x-w)\partial_w\} \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& + \sum_{k=1}^N \{h_k \partial_{w_k} K_F(w_k-x) + K_F(w_k-x)\partial_{w_k}\} \\
& \quad \times \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

これに更に (4.5) を代入すれば次のような表現が得られる。

$$\begin{aligned}
& \left\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& = \langle t(x) \rangle \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& + \sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \Omega_j(x) \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& - \kappa\partial_x^3 K_F(x-w) \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& - \{2\partial_x K_F(x-w) - K_F(x-w)\partial_w\} \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& + \sum_{k=1}^N \{h_k \partial_{w_k} K_F(w_k-x) + K_F(w_k-x)\partial_{w_k}\} \\
& \quad \times \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

5. 結論

以上 KN 形式 (代数) とそれを利用したリーマン面 M 上の場の量子論について概説した。場の量子論は、ゴーストシステムに限ったが、この他にも例えばスカラー場に対しても以上と殆ど同じ定式化が可能である。但し、スカラー場については、Weierstrass gap の問題を注意深く考慮する必要があるため多少複雑になる。

複雑な構造をもつ一般のコンパクトなリーマン面上に、グローバルに時間 τ を導入することができるということは驚くべきことである。この結果、正準量子化が M 上で可能になった。このことは、リーマン面上に場の量子論を構築するについて基本的に重要である。正準量子化ができることにより、同時刻交換関係も自動的に計算でき、WT の導出も通常の共形理論に依るよりも極めて容易になる。

KN 形式は、リーマン面上で重要な役割を果たしていることがわかった。KN 代数の更に広範な研究により、リーマン面上の物理について更に深い知識が得られるものと考えられる。紙数の都合により、KN 形式とその応用について重要な結果の一部だけしか述べることができなかった。詳細は、以下の文献を見られたい。

参考文献

- [1] T. Eguchi and H. Ooguri, *Phys. Lett.* **B187** (1987) 127.
- [2] E. Verlinde and H. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B288** (1987) 357.
- [3] T. Eguchi and H. Ooguri, *Nucl. Phys.* **B282** (1987) 308.
- [4] P. Ginsparg, "Applied Conformal Field Theory", Harvard University preprint HUTP-88/A054,
- [5] D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B271** (1986) 93.
D. Friedan, in Recent Advances in Field Theory and Statistic Mechanics, ed. J. B. Zuber and R. Stora, Proc. of 1982 Les Houches Summer School (Elsevier).
- [6] A. Cohen, G. Moore, P. Nelson and J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B281** (1987) 127,
G. Moore, *Phys. Lett.* **B176** (1986) 369.
- [7] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, G. Moore and C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B303** (1988) 455.
- [8] I. M. Krichever and S. P. Novikov, *Funk. Anal. Pril.* **21 No.2** (1987) 46 ;
21 No.4 (1988) 47.
- [9] L. Bonora, A. Lugo, M. Matone and J. Russo, SISSA preprint "A global operator formalism on higher genus Riemann surface; $b - c$ systems",
A. Lugo and J. Russo, "Hamiltonian formulation and scattering amplitudes in string theory at genus g ", Trieste preprint,
J. Russo, "Hamiltonian, supercharge and scattering amplitudes in superstring theory at genus g ", Trieste preprint.

- [10] L. Bonora, M. Bregola, P. Cotta-Ramusino and M. Martellini, *Phys. Lett.* **B205** (1988) 53,
T. Saito and K. Wu, *Phys. Lett.* **B220** (1989) 93,
G. Konishi, T. Saito and W. Takahashi, preprint, " KN algebras derived from Virasoro Algebra with Vertex Operators ".
- [11] L. Bonora, M. Rinaldi, J. Russo and K. Wu, *Phys. Lett.* **B208** (1988) 440.
L. Mezincescu, R. I. Nepomechie and C. K. Zachos, " (Super)conformal Algebra on the (Super)torus ", preprint, UMTG-144,
R. I. Nepomechie, " Conformal Algebra on the Torus and its Supersymmetric Generalizations ", preprint, UMTG-145,
L. Bonora, M. Martellini, M. Rinaldi and J. Russo, *Phys. Lett.* **B206** (1988) 444,
G. Konishi, T. Saito and W. Takahashi, preprint, " KN Superalgebras with Vertex Operators ".
- L. Bonora, M. Matone and M. Rinaldi, *Phys. Lett.* **B216** (1989) 313,
R. Kubo, S. Ojima and S.K. Paul, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 1423.