



Université Libre de Bruxelles  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématique

# **Boucles de Wilson et localisation en théorie des champs supersymétrique**

**Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Master en  
sciences mathématiques**

Micha Moskovic

Année académique 2009–2010

Promoteur de mémoire : Frank Ferrari



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon promoteur, Frank Ferrari, pour m'avoir guidé et encadré tout au long de cette année. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour sa disponibilité, sa pédagogie, et la patience dont il a fait preuve à mon égard.

Une autre personne à m'avoir accompagné (à cause de contraintes de type topologique) tout au long de cette année est Antonin Rovai. Je le remercie pour sa présence toujours chaleureuse, ainsi que pour nos nombreuses discussions, qu'elles fussent utiles pour l'avancement de ce mémoire ou au contraire pour penser à autre chose. Ses gaufrettes (imitation De Strooper) furent également très appréciées.

Ensuite, je remercie Frédéric Bourgeois et Riccardo Argurio pour avoir accepté de lire ce mémoire. J'espère ne pas leur avoir rendu la tâche trop ingrate.

Je remercie également tous mes proches, qu'ils soient de ma famille ou de mes amis, pour m'avoir soutenu depuis le début de mes études, et pour avoir été présents lors des moments difficiles.

Ce document est disponible en version électronique à l'adresse

<http://homepages.ulb.ac.be/~mmoskovi/docs/memoire.pdf>.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>1. Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2. Cohomologie équivariante et localisation</b>	<b>5</b>
2.1. Cohomologie équivariante . . . . .	5
2.1.1. L’algèbre extérieure et la cohomologie de de Rham . . . . .	5
2.1.2. La cohomologie $U(1)$ -équivariante . . . . .	7
2.2. Localisation équivariante . . . . .	9
2.3. La formule de Berline et Vergne . . . . .	12
2.4. Quelques applications . . . . .	15
2.4.1. La formule de Duistermaat–Heckman . . . . .	15
2.4.2. La formule de Harish-Chandra–Itzykson–Zuber . . . . .	19
2.4.3. Localisation d’intégrales fonctionnelles . . . . .	23
<b>3. Supersymétrie <math>\mathcal{N} = 4</math></b>	<b>27</b>
3.1. L’algèbre de supersymétrie . . . . .	27
3.1.1. Définitions . . . . .	27
3.1.2. Quelques conséquences . . . . .	28
3.1.3. Représentations de l’algèbre — Supermultiplets . . . . .	30
3.2. L’action de Super-Yang–Mills . . . . .	32
3.3. Supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ en dimension 10 . . . . .	33
3.3.1. Transformations de supersymétrie . . . . .	34
3.3.2. L’identité miraculeuse . . . . .	35
3.4. Supersymétrie $\mathcal{N} = 4$ en dimension 4 . . . . .	37
3.5. Invariance superconforme . . . . .	38
<b>4. La théorie sur la sphère</b>	<b>41</b>
4.1. La sphère : généralités . . . . .	41
4.1.1. Coordonnées stéréographiques . . . . .	41
4.1.2. Métrique sur la sphère . . . . .	42
4.2. Transformation de Weyl . . . . .	43
4.2.1. Champs sur un espace courbe . . . . .	43
4.2.2. La transformation de l’espace plat sur la sphère . . . . .	47

4.3. Supersymétrie au carré . . . . .	53
4.3.1. Sur les bosons . . . . .	53
4.3.2. Sur les fermions . . . . .	55
4.4. Fermeture hors de la couche de masse — Champs auxiliaires . . . . .	57
4.5. La boucle de Wilson supersymétrique . . . . .	61
<b>5. Localisation de la théorie</b>	<b>65</b>
5.1. Le choix de la fonctionnelle de localisation . . . . .	65
5.2. La fonctionnelle de localisation explicite . . . . .	67
5.2.1. Le terme en $KK$ . . . . .	67
5.2.2. Le terme en $FF$ . . . . .	68
5.2.3. Le terme en $F\Phi$ . . . . .	70
5.2.4. Le terme en $K\Phi$ . . . . .	71
5.2.5. Le terme en $FK$ . . . . .	71
5.2.6. Le terme en $\Phi\Phi$ . . . . .	71
5.2.7. Résumé . . . . .	72
5.3. La localisation . . . . .	72
5.4. Les fluctuations . . . . .	75
5.5. Conclusion et perspectives . . . . .	76
<b>A. Notations et conventions, spineurs</b>	<b>79</b>
A.1. La métrique . . . . .	79
A.2. (Anti)commutateurs, (anti)symétrisation . . . . .	79
A.3. Les indices . . . . .	79
A.4. L’algèbre de Clifford et les spineurs . . . . .	80
<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>

# 1. Introduction

La théorie quantique des champs est une théorie incroyablement fructueuse : elle fournit un cadre qui permet de décrire les interactions fondamentales à l'échelle microscopique et fait des prédictions très précises. Ainsi, le modèle standard, qui est la théorie quantique des champs qui modélise le comportement des particules élémentaires, prédit le moment magnétique de l'électron avec une précision de  $10^{-8}$  [1], qui est l'une des meilleures précisions atteintes en physique.

En théorie des champs, les grandeurs fondamentales d'où l'on peut déduire toute l'information physique sont les corrélateurs, et les corrélateurs sont donnés par les valeurs moyennes de fonctionnelles des champs, où la moyenne d'un opérateur donné est calculé dans le formalisme de l'intégrale de chemin en intégrant sur l'ensemble des champs de la théorie le produit de l'opérateur et d'un poids donné par l'exponentielle de l'action :

$$\langle \mathcal{O}[X] \rangle = \int \mathcal{D}X \mathcal{O}[X] e^{-S[X]}. \quad (1.1)$$

Comme l'intégrale de chemin est, dans une théorie en interaction, en général impossible à calculer exactement, on recourt à un système d'approximation, qui permet tout de même d'extraire de l'information de la théorie. Le système d'approximation habituel est une approche perturbative : on décompose l'action en la somme d'une partie quadratique et d'une certaine perturbation, supposée faible devant la partie quadratique. On connaît la formule exacte de l'exponentielle d'un terme quadratique (c'est une gaussienne), et on développe l'exponentielle de la perturbation en série de Taylor, et on se ramène ainsi à l'intégrale de moments d'une gaussienne, que l'on peut aussi intégrer explicitement ordre par ordre du développement.

Cependant, une telle approche perturbative repose sur l'hypothèse essentielle que la perturbation est petite. L'importance de la perturbation devant le terme quadratique est caractérisée par une certaine constante de couplage, et l'approche perturbative n'est valable que lorsque cette constante est petite : on est à couplage faible. À couplage fort, cette approximation ne fonctionne plus, et il faut alors se tourner vers d'autres méthodes.

On peut se demander s'il est réellement nécessaire de développer ces méthodes, outre pour la satisfaction purement mathématique de savoir que le résultat obtenu n'est pas une approximation mais est exact, étant donné le succès sus-mentionné des méthodes perturbatives en théorie des champs. La réponse est affirmative : certains phénomènes physiques apparaissent uniquement lorsque le couplage est fort, et il est donc indispensable de pouvoir comprendre la théorie des champs dans ce régime pour pouvoir les décrire. L'exemple principal est le confinement des quarks : dans le modèle standard, certaines

particules appelées hadrons, dont font notamment partie les protons et neutrons, ne sont pas des particules fondamentales mais sont composées de particules plus petites appelées quarks. Une caractéristique étonnante de ces quarks est qu'ils ne sont jamais observés en tant que tels, mais toujours groupés dans les hadrons : les quarks sont confinés. Il se trouve que le confinement n'apparaît que lorsque le couplage est fort : l'approche perturbative consiste à faire une perturbation autour d'une théorie libre, et il n'est donc pas très étonnant que dans une telle approche, les quarks sont, comme dans une théorie libre, non confinés.

Un opérateur qui permet de caractériser le confinement des quarks est la boucle de Wilson. En fonction de son comportement, on peut déterminer si la théorie de jauge se trouve dans une phase de confinement ou pas [2]. Par conséquent, il est intéressant de pouvoir calculer une telle boucle de Wilson exactement, sans faire d'approximations, par un traitement non perturbatif.

Comme l'intégrale fonctionnelle est difficile à calculer explicitement, il faut faire appel à une autre technique, cette fois-ci non perturbative, qui permet tout de même de rendre le calcul faisable. La technique utilisée dans ce mémoire est la localisation : pour certaines intégrales bien particulières, on peut (et on va) montrer que l'intégrale fonctionnelle compliquée se ramène à une intégrale beaucoup plus simple. Au lieu d'avoir une intégrale fonctionnelle sur toutes les configurations des champs de la théorie, la seule contribution provient de champs constants : on a une intégrale sur une variété ordinaire. On dit que l'intégrale fonctionnelle localise sur cette variété.

La propriété de localisation est liée à la présence d'une symétrie importante, qui contraint l'intégrand suffisamment pour que cette localisation ait lieu. Dans le cas de l'intégrale fonctionnelle, une telle symétrie est une supersymétrie, une symétrie qui lie les bosons de spins entiers et les fermions de spins demi-entiers.

On en arrive ainsi au projet de ce mémoire : calculer la valeur moyenne d'une boucle de Wilson dans une théorie suffisamment symétrique, et avec une boucle de Wilson qui préserve une part assez importante de cette symétrie pour que l'intégrale localise.

La théorie supersymétrique considérée ici est la théorie de super-Yang–Mills  $\mathcal{N} = 4$ . Elle présente une caractéristique importante, qui rend le calcul possible : elle possède une invariance conforme au niveau quantique. Ceci permet d'étendre l'invariance sous supersymétrie de la théorie en une invariance superconforme, et les transformations superconformes se révéleront cruciales. La boucle de Wilson que l'on prend est une version supersymétrique de la boucle de Wilson habituelle,

$$W_R(\mathcal{C}) = \text{Tr}_R \mathcal{P} \exp \oint_{\mathcal{C}} \left( A_\mu dx^\mu + i\Phi_0^E ds \right), \quad (1.2)$$

où  $\mathcal{C}$  est une boucle qui parcourt un grand cercle de la 4-sphère<sup>1</sup> d'espace-temps de rayon  $r$ ,  $\text{Tr}_R$  désigne la trace dans la représentation  $R$  du groupe de jauge  $G$ ,  $\mathcal{P} \exp$  est l'exponentielle ordonnée le long du chemin,  $A_\mu$  est le champ de jauge et  $i\Phi_0^E$  est un des

---

1. On considère la sphère  $S^4$  plutôt que  $\mathbb{R}^4$  pour des raisons techniques expliquées plus loin.

champs scalaires de la théorie. On va montrer que, par localisation,

$$\langle W_R(\mathcal{C}) \rangle = \frac{\int_{\mathfrak{g}} da e^{-\frac{4\pi^2 r^2}{g_{YM}^2}(a,a)} \text{Tr}_R e^{2\pi r i a}}{\int_{\mathfrak{g}} da e^{-\frac{4\pi^2 r^2}{g_{YM}^2}(a,a)}}, \quad (1.3)$$

où l'intégrale est une intégrale tout à fait ordinaire sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe de jauge,  $g$  est la constante de couplage, et  $(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire invariante définie positive sur  $\mathfrak{g}$ . La boucle de Wilson peut donc se calculer dans le cadre d'un modèle de matrices, c'est-à-dire en évaluant une intégrale sur un espace de matrices.

Ceci fut conjecturé en premier lieu par Erickson, Semenoff et Zarembo [3]. Dans leur article, ils constatent en effet la chose suivante. Afin de calculer  $\langle W_R(\mathcal{C}) \rangle$  perturbativement, on développe l'exponentielle en série, et on évalue la valeur moyenne de chaque terme de la série. Si la boucle est paramétrée par le chemin  $x(t) = (r \cos t, r \sin t, 0, 0)$ , alors le premier terme non trivial est

$$\text{Tr}_R \int_0^{2\pi} dt \int_0^t dt' \left\langle \left[ A_\mu(x(t)) \dot{x}^\mu(t) + i\Phi_0^E(x(t)) |\dot{x}(t)| \right] \left[ A_\nu(x(t')) \dot{x}^\nu(t') + i\Phi_0^E(x(t')) |\dot{x}(t')| \right] \right\rangle. \quad (1.4)$$

Comme les propagateurs dans l'eulidien sont donnés par

$$D_{\mu\nu}^{ij}(x) = \frac{g_{YM}^2 \delta_{\mu\nu} \delta^{ij}}{4\pi^2 |x|^2} \quad \text{pour le champ de jauge, et} \quad (1.5)$$

$$\Delta_{AB}^{ij}(x) = \frac{g_{YM}^2 \delta_{AB} \delta^{ij}}{4\pi^2 |x|^2} \quad \text{pour les champs scalaires,} \quad (1.6)$$

où  $i, j$  sont des indices de jauge, on a à l'ordre 0 en théorie des perturbations,

$$\left\langle \left[ A_\mu(x(t)) \dot{x}^\mu(t) + i\Phi_0^E(x(t)) |\dot{x}(t)| \right] \left[ A_\nu(x(t')) \dot{x}^\nu(t') + i\Phi_0^E(x(t')) |\dot{x}(t')| \right] \right\rangle \quad (1.7)$$

$$= \langle A_\mu(x(t)) A_\nu(x(t')) \rangle \dot{x}^\mu(t) \dot{x}^\nu(t') - \langle \Phi_0^E(x(t)) \Phi_0^E(x(t')) \rangle |\dot{x}(t)| |\dot{x}(t')| \quad (1.8)$$

$$= \frac{g_{YM}^2 \delta^{ij} \dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t') - |\dot{x}(t)| |\dot{x}(t')|}{4\pi^2 |x(t) - x(t')|^2} \quad (1.9)$$

$$= \frac{g_{YM}^2 \delta^{ij}}{4\pi^2 r^2} \frac{\sin t \sin t' + \cos t \cos t' - 1}{(\cos t - \cos t')^2 + (\sin t - \sin t')^2} = -\frac{g_{YM}^2 \delta^{ij}}{8\pi^2 r^2}. \quad (1.10)$$

On voit donc que, à cet ordre-ci, la boucle de Wilson circulaire ne dépend pas des coordonnées, même avant de faire l'intégrale. Ce fait suggère qu'il est possible de la calculer dans une théorie des champs de dimension nulle, c'est-à-dire un modèle de matrices.

Ensuite, Drukker et Gross [4] montrèrent, toujours dans un cadre perturbatif, mais pour une classe plus large de diagrammes, que les résultats sont cohérents avec un modèle de matrices.

Enfin, Pestun prouva [5] le résultat exact non perturbatif. Ce mémoire reprend en grandes parties sa preuve. Il y a tout de même quelques contributions originales. Premièrement, ce mémoire, en plus de montrer la localisation pour ce cas précis, reprend d'abord la théorie mathématique sur laquelle elle est basée, ce qui permet pour un non-spécialiste de comprendre (je l'espère !) l'argument. Deuxièmement, Pestun prouve un résultat plus général, valable pour la théorie  $\mathcal{N} = 2^*$  (la théorie de Yang–Mills supersymétrique avec un multiplet vectoriel et un hypermultiplet massif dans la représentation adjointe) et dont la théorie  $\mathcal{N} = 4$  est la limite de masse nulle. Sa preuve est donc plus compliquée à suivre parce que son action est plus compliquée, mais surtout parce que le déterminant des fluctuations qui apparaît après localisation n'est pas égal à 1. Le calcul de ce déterminant est très technique, et cache la raison pour laquelle il est trivial dans le cas  $\mathcal{N} = 4$ . Nous donnons quelques arguments en ce sens, le temps ayant malheureusement manqué pour obtenir une preuve complète.

Les grandes étapes de la preuve sont les suivantes :

- dans le chapitre 2, on étudie la localisation sous l'angle mathématique. L'essentiel du chapitre est l'étude de la localisation dans le cadre d'intégrales ordinaires sur des variétés différentiables. La localisation repose sur la symétrie de ces intégrales, qui peut être caractérisée par une théorie de cohomologie, la cohomologie équivariante. Après avoir défini cette cohomologie, le principe de localisation est démontré, puis on en donne quelques exemples. Enfin, on regarde comment étendre l'argument au cas des intégrales de chemin.
- Le chapitre 3 présente la supersymétrie, qui est cruciale afin d'avoir la localisation dans le cadre de la théorie des champs. Après les définitions générales, quelques propriétés immédiates sont discutées, puis on présente la supersymétrie  $\mathcal{N} = 4$  en dimension 4, qui peut être vue comme une réduction dimensionnelle de la théorie  $\mathcal{N} = 1$  en dimension 10. Enfin, on voit qu'on peut étendre la supersymétrie dans le cas qui nous intéresse à une symétrie superconforme.
- Le chapitre 4 étudie la théorie sur la sphère  $S^4$ , car les transformations superconformes sont bien définies sur celle-ci et pas sur  $\mathbb{R}^4$ . On passe de l'action sur l'espace plat à celle sur la sphère par une transformation de Weyl, puis on regarde comment agissent les carrés des transformations superconformes sur les champs. Enfin, on regarde celles qui sont préservées par la boucle de Wilson circulaire.
- Dans le chapitre 5, on fait la localisation à proprement parler de la théorie, et on montre qu'elle se ramène à un modèle de matrices, dans laquelle la valeur moyenne de la boucle de Wilson est donnée par (1.3).
- Enfin, l'appendice contient les notations et conventions utilisées, et rappelle quelques formules utiles pour les spineurs en 10 dimensions.

## 2. Cohomologie équivariante et localisation

L'outil mathématique essentiel de ce mémoire, nécessaire pour obtenir un résultat non perturbatif, est celui de la localisation de l'intégrale fonctionnelle sur un sous-espace de dimension finie. La localisation d'intégrales fonctionnelles [6] sera discutée à la fin du chapitre. Au préalable, nous allons étudier la localisation de certaines intégrales sur des variétés différentiables ordinaires [7, 6] : ces intégrales sur toute la variété sont égales à des intégrales sur des sous-variétés spécifiques ; on dit qu'elles localisent sur ces sous-variétés. Cette propriété de localisation remarquable peut être expliquée par des arguments de nature cohomologique. La théorie de cohomologie qui joue un rôle ici est la cohomologie équivariante, qui est l'objet d'étude de la première section.

### 2.1. Cohomologie équivariante

#### 2.1.1. L'algèbre extérieure et la cohomologie de de Rham

La cohomologie équivariante est une généralisation de la cohomologie de de Rham, et on commence donc par rappeler la construction de celle-ci.<sup>1</sup>

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $m$ . Soit  $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k(M)$  son algèbre extérieure, dont les éléments de degré  $k$  sont les  $k$ -formes différentielles. On peut définir la différentielle extérieure  $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ , une application linéaire qui jouit des propriétés suivantes :

1.  $d(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k+1}(M)$  ;
2.  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$  où  $\alpha \in \Omega^{|\alpha|}(M)$  ;
3.  $d^2 = 0$ .

Les deux premières conditions sont résumées en disant que  $d$  est une antidérivation de

---

1. Cette section rappelle des choses normalement connues en géométrie différentielle, et a pour but essentiel de fixer les notations. Une discussion plus approfondie des sujets abordés se trouve par exemple dans [8] ou [9].

## 2. Cohomologie équivariante et localisation

---

degré 1. Explicitement, si les  $\xi_i$  sont des champs de vecteurs sur  $M$ ,

$$\begin{aligned} d\alpha(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \alpha(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k) \end{aligned} \quad (2.1)$$

où le chapeau désigne l'omission de la variable.

Ces propriétés permettent de définir la cohomologie associée au complexe  $(\Omega(M), d)$  : on a  $\text{Im } d|_{\Omega^{k-1}(M)} \in \text{Ker } d|_{\Omega^k(M)}$ . Le  $k^{\text{e}}$  espace de cohomologie de de Rham  $H^k(M)$  est alors défini par

$$H^k(M) = \frac{\text{Ker } d|_{\Omega^k(M)}}{\text{Im } d|_{\Omega^{k-1}(M)}}, \quad (2.2)$$

où le quotient a un sens par la remarque qui précède. Par le célèbre théorème de de Rham, les  $H^k(M)$  en tant que groupes sont isomorphes aux groupes de cohomologie singulière à coefficients réels de l'espace topologique  $M$ . Ce sont donc des invariants d'homotopie, qui permettent de caractériser la topologie de la variété.

En se restreignant à la sous-algèbre des formes différentielles à support compact  $\Omega_c(M)$ , on peut définir de la même manière la cohomologie à support compact de  $M$  :

$$H_c^k(M) = \frac{\text{Ker } d|_{\Omega_c^k(M)}}{\text{Im } d|_{\Omega_c^{k-1}(M)}}. \quad (2.3)$$

On définit également la somme des espaces de cohomologie  $H^*(M)$  :

$$H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^m H^k(M) \quad (2.4)$$

et de même pour la cohomologie à support compact. Comme  $d$  est une antidérivation, le produit  $\wedge$  est bien défini en cohomologie et donc  $H^*(M)$  est une algèbre.

À côté de la différentielle extérieure, on peut définir deux autres opérations intéressantes sur l'algèbre extérieure. Premièrement, on définit le produit intérieur  $i_\xi$  (ou contraction) avec le champ de vecteurs  $\xi$  :

$$i_\xi \alpha(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \alpha(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}), \quad (2.5)$$

qui obéit aux propriétés suivantes :

1.  $i_\xi(\Omega^k(M)) \in \Omega^{k-1}(M)$  ;
2.  $i_\xi(\alpha \wedge \beta) = i_\xi \alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge i_\xi \beta$  ;
3.  $i_\xi \circ i_\xi = 0$ .

Les deux premières propriétés signifient que le produit intérieur est une antidérivation de degré  $-1$ . Ensuite, on peut combiner les deux opérations qui précèdent dans la dérivée de Lie  $\mathcal{L}_\xi$  par la formule de Cartan :

$$\mathcal{L}_\xi = d \circ i_\xi + i_\xi \circ d. \quad (2.6)$$

Cette définition implique que  $\mathcal{L}_\xi(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_\xi \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_\xi \beta$ , c'est-à-dire que la dérivée de Lie est une dérivation.

Pour finir cette section, rappelons que par le théorème de Stokes l'intégrale d'une  $m$ -forme différentielle exacte est nulle, et donc l'intégration est bien définie sur  $H^m(M)$  (si  $M$  est orientable et sans bord) :

$$\int_M (\alpha + d\beta) = \int_M \alpha + \int_{\partial M} \beta = \int_M \alpha. \quad (2.7)$$

### 2.1.2. La cohomologie $U(1)$ -équivariante

On veut généraliser la cohomologie de de Rham au cas où la variété est munie d'une structure additionnelle, à savoir l'action d'un groupe de Lie sur celle-ci.

**Définition 2.1** (Action de groupe). Soit  $G$  un groupe de Lie,  $M$  une variété différentiable. Une action (à gauche) de  $G$  sur  $M$  est une application différentiable  $\theta : G \times M \rightarrow G$  :  $(g, p) \mapsto \theta_g(p) = g \cdot p$  telle que

- $e \cdot p = p, \forall p \in M$  où  $e$  est le neutre du groupe ;
- $g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p, \forall g_1, g_2 \in G, \forall p \in M$ .

Ces conditions impliquent que  $\theta_g : M \rightarrow M$  est un difféomorphisme, et on peut donc voir de manière équivalente une action de groupe comme un homomorphisme  $G \rightarrow \text{Diff}(M)$  où  $\text{Diff}(M)$  est le groupe des difféomorphismes de  $M$ .

L'action de  $G$  sur  $M$  induit une application de son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  dans l'algèbre des champs de vecteurs : si  $g(t)$  est un chemin dans  $G$  tel que  $g(0) = e$  et  $\frac{d}{dt}g(t)|_{t=0} = X \in T_p M = \mathfrak{g}$ , alors  $\tilde{X}_p = \frac{d}{dt}g(t) \cdot p|_{t=0}$  définit un champ de vecteurs sur  $M$ .<sup>2</sup>

On peut préciser comment  $G$  agit sur  $M$  :

**Définition 2.2.**

- l'action de  $G$  sur  $M$  est dite transitive si l'orbite de tout point est la variété toute entière :  $G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\} = M, \forall p \in M$  ;
- l'action de  $G$  sur  $M$  est dite libre si le stabilisateur de tout point est réduit au neutre :  $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\} = \{e\}, \forall p \in M$  ;
- l'action de  $G$  sur  $M$  est dite propre si l'application  $G \times M \rightarrow M \times M : (g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$  est propre, c'est-à-dire que l'image inverse de tout compact est compacte.

---

2. On voit facilement que cette définition ne dépend pas du choix du chemin  $g(t)$ .

## 2. Cohomologie équivariante et localisation

---

Si l'action de  $G$  sur  $M$  est libre et propre, alors l'espace des orbites  $M/G$ , qui est l'espace topologique  $M$  quotienté par la relation d'équivalence  $p \sim y \iff \exists g \in G \mid y = g \cdot p$ , peut être naturellement muni d'une structure de variété différentiable [8]. Dans ce cas, on peut définir la cohomologie  $G$ -équivariante de  $M$  simplement comme la cohomologie de de Rham de la variété  $M/G$  :

$$H_G^k(M) = H^k(M/G). \quad (2.8)$$

Si l'action de  $G$  sur  $M$  n'est pas libre, c'est-à-dire qu'il existe des points de la variété qui sont fixés par un sous-groupe de  $G$ , alors  $G/M$  ne possède pas de structure différentiable. Il est donc impossible d'utiliser cette définition pour la cohomologie équivariante.

Comme le cas où l'action n'est pas libre est justement celui qui nous intéresse, il va falloir définir la cohomologie équivariante différemment. Bien qu'on puisse définir la cohomologie  $G$ -équivariante pour un groupe de Lie  $G$  arbitraire, nous aurons besoin pour la localisation uniquement de l'action d'un sous-groupe de Lie compact de dimension 1. Nous allons donc définir la cohomologie équivariante dans le cas particulier où  $G = U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[ \}$ . Dans ce cas,  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ , et son image dans l'algèbre des champs de vecteurs sur  $M$  est  $\mathbb{R}V$  où  $V$  est le champ de vecteurs défini par  $V_p = \frac{d}{dt} e^{it} \cdot p|_{t=0}$ .

Si  $\mathcal{L}_V \alpha = 0$ , cela signifie que  $\alpha$  est laissée invariante par l'action du groupe.

On forme le produit tensoriel  $\mathbb{C}[u] \otimes \Omega(M)$  sur  $\mathbb{R}$  entre l'algèbre des polynômes en  $u$  et l'algèbre extérieure. Les éléments de cette algèbre sont des formes du type<sup>3</sup>  $\alpha(u) = \sum_{k,j} u^k \alpha_k^j$  où les  $\alpha_k^j$  sont des  $j$ -formes différentielles.

**Définition 2.3.** Un élément  $\alpha(u) \in \mathbb{C}[u] \otimes \Omega(M)$  est appelé forme différentielle équivariante si  $\mathcal{L}_V \alpha(u) = 0$ . L'ensemble de ces formes différentielles équivariantes est noté  $\Omega_{U(1)}(M)$ .

Comme la dérivée de Lie est une dérivation,  $\Omega_{U(1)}(M)$  est une sous-algèbre de  $\mathbb{C}[u] \otimes \Omega(M)$ . Cette algèbre est  $\mathbb{Z}$ -graduée en décrétant que le monôme  $u$  est de degré 2, et en étendant la définition à tout  $\Omega_{U(1)}(M)$  :

$$\Omega_{U(1)}^k(M) = \left\{ \alpha(u) \in \Omega_{U(1)}(M) \mid \alpha(u) = \sum_{2i+j=k} u^i \alpha_i^j \right\} \quad (2.9)$$

On peut maintenant définir la différentielle qui va remplacer la différentielle extérieure.

**Définition 2.4.** La différentielle extérieure équivariante est l'application  $D_V \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  définie par  $D_V = d - u i_V$ .

Cette différentielle extérieure équivariante n'est pas nilpotente en général,

$$D_V^2 \alpha(u) = (d - u i_V) \circ (d - u i_V) \alpha(u) = -u(d \circ i_V + i_V \circ d) \alpha(u) = -u \mathcal{L}_V \alpha(u). \quad (2.10)$$

---

3. Le produit tensoriel est noté de façon implicite.

Par contre, on a  $D_V^2 = 0$  si on se restreint à l'algèbre des formes différentielles équivariantes  $\Omega_{U(1)}(M)$ . Remarquons aussi que le degré de  $u$  a été choisi justement pour faire de  $D_V$  une antidérivation de degré  $+1$ .

Les espaces de cohomologie  $U(1)$ -équivariante sont alors définis par :

$$H_{U(1)}^k(M) = \frac{\text{Ker } D_V|_{\Omega_{U(1)}^k(M)}}{\text{Im } D_V|_{\Omega_{U(1)}^{k-1}(M)}}. \quad (2.11)$$

On peut également définir comme dans le cas usuel les espaces de cohomologie équivariante à support compact  $H_{U(1),c}^k(M)$  ainsi que les algèbres  $H_{U(1)}^*(M)$  et  $H_{U(1),c}^*(M)$ .

Dans le cas qui nous occupe, l'évaluation d'une forme équivariante sur un  $u_0 \in \mathbb{C}$  commute avec la différentiation extérieure équivariante où on a évalué celle-ci aussi :

$$(D_V \alpha)(u_0) = (d - u_0 i_V)(\alpha(u_0)). \quad (2.12)$$

Par conséquent, l'évaluation est bien définie en cohomologie. Dans la suite, on mettra simplement  $u = -1$ , et donc  $D_V = d + i_V$ .

Pour clore cette section, on va s'intéresser à l'intégration des formes équivariantes. Pour commencer, on définit l'intégrale d'une forme différentielle quelconque sur une variété orientée de dim  $m$  comme l'intégrale de sa composante de degré  $m$  :

$$\int_M \sum_j \alpha^j = \int_M \alpha^m \quad \text{où } \alpha^j \in \Omega^j(M). \quad (2.13)$$

Remarquons ensuite que la composante la plus élevée (pour la graduation ordinaire) d'une forme équivariante  $D_V$ -exacte est  $d$ -exacte, étant donné que  $i_V$  diminue le degré. Ceci implique en particulier que

$$\int_M (\alpha + D_V \beta) = \int_M \alpha. \quad (2.14)$$

L'intégration est donc également bien définie sur la cohomologie équivariante.

## 2.2. Localisation équivariante

Nous avons maintenant tous les outils en main pour discuter de la localisation. On définit d'abord le lieu des points fixes de l'action :

$$M_V = \{p \in M \mid V_p = 0\}. \quad (2.15)$$

Le point essentiel dans toutes les formules de localisation qui vont suivre est que la cohomologie équivariante de  $M$  est entièrement déterminée par celle de  $M_V$  dans le cas compact.

**Théorème 2.5.** *Soient  $M$  une variété compacte et  $N$  un voisinage de  $M_V$  invariant sous l'action de  $U(1)$  (c'est-à-dire  $U(1) \cdot N = N$ ). Alors  $H_{U(1)}^*(M) \cong H_{U(1),c}^*(N)$ .*

*Démonstration.* L'isomorphisme est facile à construire dans un sens : toute forme équivariante fermée  $\alpha$  à support compact dans  $N$  s'étend en une forme équivariante fermée  $\tilde{\alpha}$  sur tout  $M$  en posant

$$\tilde{\alpha}_p = \begin{cases} \alpha_p & \text{si } p \in N \\ 0 & \text{si } p \notin N \end{cases}. \quad (2.16)$$

Ceci définit une application  $Q : H_{U(1),c}^*(N) \rightarrow H_{U(1)}^*(M) : \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ .

On va maintenant construire un inverse explicite à  $Q$ . Pour cela, on munit  $M$  d'une métrique riemannienne  $U(1)$ -équivariante  $g$ . Une telle métrique existe toujours. En effet, étant donnée une métrique quelconque  $h$ , on construit  $g$  en moyennant  $h$  sur le groupe :

$$g = \frac{1}{2\pi} \int_{U(1)} d\phi e^{i\phi} \cdot h \quad (2.17)$$

où l'action de  $U(1)$  sur  $h$  est définie par pullback :  $e^{i\phi} \cdot h = \theta_{e^{i\phi}}^*(h)$ . La métrique  $g$  est alors invariante car l'intégrale se fait avec la mesure invariante pour  $U(1)$ . On utilise cette métrique  $g$  pour associer<sup>4</sup> une 1-forme équivariante à  $V$  :

$$\beta = g(V, \cdot) \quad \text{ou en composantes} \quad \beta_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu. \quad (2.18)$$

Cette forme est équivariante car  $g$  et  $V$  sont invariants sous l'action de  $U(1)$ . On a

$$D_V \beta = d\beta + i_V \beta = d\beta + g(V, V) = d\beta + |V|^2 \quad (2.19)$$

et donc la composante 0-forme de  $D_V \beta$  est non nulle en dehors de  $M_V$ . Sur  $M \setminus M_V$ , on peut alors définir  $(D_V \beta)^{-1}$  par sa série de puissances :

$$\frac{1}{D_V \beta} = \frac{1}{|V|^2} \left( 1 + \frac{1}{|V|^2} d\beta \right)^{-1} = \frac{1}{|V|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{|V|^2} d\beta \right)^{\wedge k} \quad (2.20)$$

ce qui a un sens car la somme est finie, il n'y a pas de  $k$ -formes pour  $k > m$ .

Soit  $\chi$  une fonction  $U(1)$ -équivariante (i.e.  $V\chi = 0$ ), à support compact dans  $N$ , et qui vaut 1 au voisinage de  $M_V$ . On peut construire une telle fonction de manière similaire à  $g$ .

On pose

$$P = d\chi \wedge \frac{\beta}{D_V \beta} + \chi. \quad (2.21)$$

$P$  est une forme définie sur tout  $M$  étant donné que  $D_V \beta$  est inversible partout sauf sur un voisinage de  $M_V$ , et que  $d\chi$  s'annule justement sur un tel voisinage où  $\chi$  est constant. Son support est contenu dans  $N$ . Elle est équivariante car  $d\chi = D_V \chi$ . Elle est fermée car

$$D_V P = -d\chi \wedge \frac{D_V \beta}{D_V \beta} + d\chi \quad \text{et} \quad \frac{D_V \beta}{D_V \beta} = 1. \quad (2.22)$$

---

4. On somme toujours, sauf mention du contraire, sur les indices répétés.

De plus

$$P - 1 = d\chi \wedge \frac{\beta}{D_V\beta} + \chi - 1 = D_V \left( (\chi - 1) \frac{\beta}{D_V\beta} \right) \quad (2.23)$$

et la forme  $(\chi - 1) \frac{\beta}{D_V\beta}$  est bien définie puisque  $\chi$  vaut 1 là où  $D_V\beta$  n'est pas inversible. Autrement dit,  $P = 1 + D_V\gamma$ . Tout ceci implique que  $\tilde{\alpha}$  et  $P \wedge \tilde{\alpha}$  sont dans la même classe de cohomologie équivariante pour toute forme équivariante fermée  $\tilde{\alpha}$  sur  $M$ , et que le support de  $P \wedge \tilde{\alpha}$  est contenu dans  $N$ . L'application  $H_{U(1)}^*(M) \rightarrow H_{U(1),c}^*(N) : \tilde{\alpha} \mapsto P \wedge \tilde{\alpha}$  est alors l'inverse recherché.  $\square$

Ce théorème implique immédiatement la propriété de localisation équivariante.

**Corollaire 2.6** (Principe de localisation équivariante). *Soit  $M$  une variété compacte orientée, et  $\alpha$  une forme différentielle équivariante fermée. Alors l'intégrale de  $\alpha$  localise sur  $M_V$ , c'est-à-dire qu'il existe une forme différentielle  $\gamma$  à support compact dans  $N$  (où  $N$  est comme dans le théorème) telle que  $\int_M \alpha = \int_N \gamma$ .*

*Démonstration.* On prend  $\gamma = P \wedge \alpha$ .  $\square$

Ce résultat est central, car il va permettre dans le cadre de la théorie des champs de localiser l'intégrale fonctionnelle sur une sous-variété de dimension finie.

On va même montrer le principe de localisation équivariante d'une autre manière, plus adaptée à la généralisation à l'intégrale fonctionnelle.

### Une deuxième preuve du principe de localisation équivariante

Soit  $\alpha$  une forme équivariante fermée. Définissons

$$Z(t) = \int_M \alpha e^{-tD_V\beta} \quad (2.24)$$

où  $\beta$  est comme dans le théorème 2.5 et l'exponentielle est définie par la série. Ceci définit une fonction sur  $\mathbb{R}^+$ .  $Z(0)$  est l'intégrale que l'on veut calculer. Le point clé est que cette intégrale ne dépend pas de  $t$  :

$$\frac{d}{dt} Z(t) = - \int_M \alpha \wedge D_V\beta \wedge e^{-tD_V\beta} \quad (2.25)$$

$$= - \int_M \left[ D_V (\alpha \wedge \beta \wedge e^{-tD_V\beta}) + \beta D_V (\alpha \wedge e^{-tD_V\beta}) \right] \quad (2.26)$$

$$= t \int_M \alpha \wedge \beta \wedge \mathcal{L}_V \beta \wedge e^{-tD_V\beta} = 0 \quad (2.27)$$

où on a utilisé l'exactitude de  $\alpha$  et le théorème de Stokes. Si la limite  $t \rightarrow \infty$  est bien définie, on a donc

$$\int_M \alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_M \alpha \wedge e^{-tD_V\beta}. \quad (2.28)$$

Or la composante 0-forme de l'exponentielle est  $e^{-t|V|^2}$ , qui est une gaussienne de plus en plus piquée sur les zéros de  $V$ , c'est-à-dire  $M_V$ . Dans la limite, il n'y a donc des contributions que pour un voisinage de  $M_V$  : l'intégrale localise.

### 2.3. La formule de Berline et Vergne

On a montré à la section précédente que l'intégrale d'une forme équivariante fermée localise sur un voisinage des points fixes de l'action du groupe  $U(1)$ . On va dans cette section faire mieux, et établir la formule de Berline et Vergne, qui permet de calculer l'intégrale localisée explicitement.

Nous allons nous restreindre au cas où le lieu des points fixes  $M_V$  est un ensemble fini de points isolés, c'est-à-dire que  $M_V$  est une sous-variété de codimension  $\dim M = m = 2n$  que l'on supposera paire dans cette section. La méthode que nous allons utiliser <sup>5</sup> [6] permet de généraliser directement la preuve au cas de l'intégrale fonctionnelle. Pour cela, on va donner une description algébrique du fibré extérieur. Dans un ouvert de carte  $U$  de coordonnées  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ , toute forme différentielle  $\alpha$  de degré  $k$  s'écrit

$$\alpha_p = \frac{1}{k!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}(x(p)) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (2.29)$$

On introduit les variables  $\eta^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, m$  qui obéissent aux relations d'anticommutation

$$\eta^\mu \eta^\nu = -\eta^\nu \eta^\mu. \quad (2.30)$$

Elles engendrent ainsi une algèbre extérieure réelle en prenant des combinaisons linéaires formelles de ces variables et de leurs produits. Les  $\eta^\mu$  sont des éléments de degré 1, que l'on peut identifier aux éléments de base  $dx^\mu$  de  $T^*U$ . On peut alors voir une forme  $\alpha$  localement comme une fonction

$$\alpha(x, \eta) = \sum_k \frac{1}{k!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}^k(x) \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_k} \quad (2.31)$$

où  $\alpha^k$  est la composante  $k$ -forme de  $\alpha$ .

On introduit l'intégrale de Berezin sur l'algèbre, définie par

$$\int d\eta^\mu \eta^\mu = 1 \quad \text{et} \quad \int d\eta^\mu 1 = 0 \quad (2.32)$$

et étendue par linéarité. Ceci définit l'intégrale pour toute fonction sur l'algèbre une fois que l'on a choisi une orientation car toute fonction est nécessairement polynomiale étant donné les relations d'anticommutation. L'intégrale sur toutes les variables  $\eta$  sélectionne le coefficient du terme de degré  $m$ . En particulier, il n'est pas difficile de voir que pour une matrice antisymétrique  $A$

$$\int d^m \eta e^{\frac{1}{2} \eta^\mu A_{\mu\nu} \eta^\nu} = \text{Pfaff } A \quad (2.33)$$

où  $d^m \eta = d\eta^m \dots d\eta^1$  et le pfaffien de  $A$  est

$$\text{Pfaff } A = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)}. \quad (2.34)$$

---

5. Voir par exemple [7] pour une preuve plus cohomologique.

On peut montrer également que  $\text{Pfaff}^2 A = \det A$ . On peut réécrire l'intégrale d'une forme différentielle en termes de l'intégrale de Berezin :

$$\int_U \alpha = \int_U d^m x \int d^m \eta \alpha(x, \eta). \quad (2.35)$$

Cette expression est bien invariante sous changement de coordonnées préservant l'orientation, car pour l'intégrale de Berezin,

$$\eta^\mu \rightarrow A^\mu{}_\nu \eta^\nu \implies \int d^n \eta \rightarrow \det A \int d^n \eta \quad (2.36)$$

alors que  $d^n x \rightarrow (\det A)^{-1} d^n x$ .

Comme l'intégrale de  $\alpha$  localise, on a dans ce cas-ci

$$\int_M \alpha = \sum_{p \in M_V} \int_{U_p} \alpha \quad (2.37)$$

où  $U_p$  est un voisinage  $U(1)$ -invariant du point fixe  $p \in M_V$  tel que  $U_p \cap M_V = \{p\}$ , que l'on restreint si nécessaire pour correspondre à un ouvert de carte en  $p$  de coordonnées  $x^\mu$  avec  $x(p) = 0$ . L'équation (2.28) permet alors d'écrire

$$\int_{U_p} \alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{U_p} d^n x \int d^n \eta \alpha(x, \eta) e^{(-tg_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x) - \frac{t}{2}(\text{d}\beta)_{\mu\nu}(x)\eta^\mu\eta^\nu)}. \quad (2.38)$$

On introduit les représentations des distributions  $\delta$  de Dirac

$$\delta(V) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{m/2} \sqrt{\det g} e^{-tg_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x)} \quad (2.39)$$

$$\delta(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t)^{-m/2} \frac{1}{\text{Pfaff } \text{d}\beta} e^{-\frac{t}{2}(\text{d}\beta)_{\mu\nu}(x)\eta^\mu\eta^\nu} \quad (2.40)$$

La première égalité est la limite bien connue de la distribution normale, la deuxième découle directement de (2.33). L'intégrale (2.38) devient alors

$$\int_{U_p} \alpha = (-\pi)^{m/2} \int_{U_p} d^n x \int d^n \eta \alpha(x, \eta) \frac{\text{Pfaff } \text{d}\beta(x)}{\sqrt{\det g(x)}} \delta(V(x)) \delta(\eta). \quad (2.41)$$

Remarquons l'absence de dépendance en  $t$  comme montré à la fin de la section précédente. Le  $\delta(\eta)$  sélectionne la composante 0-forme de  $\alpha$  car  $\alpha(x, 0) = \alpha^0(x)$ . L'intégrale sur le  $\delta(V(x))$  force  $V^\mu(x) = 0$  soit  $x = 0$  ( $p$  est le seul point de  $U_p$  où  $V$  s'annule) et contribue un facteur  $|\det \text{d}V(0)|^{-1}$  correspondant au jacobien du changement de variables  $V(x) \rightarrow x$ . On a donc

$$\int_{U_p} \alpha = (-\pi)^{m/2} \frac{\alpha^0(0)}{|\det \text{d}V(0)|} \frac{\text{Pfaff } \text{d}\beta(0)}{\sqrt{\det g(0)}}. \quad (2.42)$$

Reste à évaluer  $\text{Pfaff } d\beta(0)$ . On a

$$(d\beta)_{\mu\nu} = \partial_\mu(g_{\nu\rho}V^\rho) - \partial_\nu(g_{\mu\rho}V^\rho) \quad (2.43)$$

$$= g_{\nu\rho}\nabla_\mu V^\rho - g_{\mu\rho}\nabla_\nu V^\rho \quad (2.44)$$

$$= 2g_{\nu\rho}\nabla_\mu V^\rho \quad (2.45)$$

où on a introduit la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  et utilisé ses propriétés à la deuxième ligne ; à la troisième ligne on utilise le fait que l'invariance de  $g$  implique que  $V$  est un champ de vecteurs de Killing et satisfait donc à l'équation de Killing

$$g_{\nu\rho}\nabla_\mu V^\rho + g_{\mu\rho}\nabla_\nu V^\rho = 0. \quad (2.46)$$

Lorsque  $V^\mu(x) = 0$ , on voit directement à partir de l'expression en coordonnées que

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho = (dV)_\mu{}^\rho. \quad (2.47)$$

En prenant en compte que le carré du pfaffien est le déterminant, on obtient finalement

$$\int_{U_p} \alpha = (-2\pi)^{m/2} \frac{\alpha^0(0)}{\text{Pfaff } dV(0)}, \quad (2.48)$$

et donc le théorème suivant

**Théorème 2.7** (Berline–Vergne). *Soit  $M$  une variété compacte orientée de dimension  $m$  paire sur lequel agit le groupe  $U(1)$  et soit  $\alpha$  une forme équivariante fermée. Si l'ensemble  $M_V$  des points fixes de l'action ne possède que des points isolés, alors*

$$\int_M \alpha = (-2\pi)^{m/2} \sum_{p \in M_V} \frac{\alpha_p^0}{\text{Pfaff } dV_p}.$$

Quelques remarques s'imposent avant de passer aux applications de ce théorème.

Premièrement, on constate que l'absence de dépendance en  $t$  du résultat, obtenue précédemment par des arguments cohomologiques, est due dans le calcul explicite que nous venons de faire à une compensation exacte du facteur provenant de l'intégration sur  $x$  et de l'intégration sur  $\eta$ , qui ne sont en général pas liées. On peut interpréter la localisation comme une symétrie cachée entre les  $x^\mu$  et les  $\eta^\mu$ , qui sont des éléments respectivement pairs et impairs de l'algèbre, l'analogue en dimension finie d'une supersymétrie entre champs bosoniques qui commutent et champs fermioniques qui anticommulent. Ce point de vue s'avérera fructueux et sera développé plus loin.

Deuxièmement, on voit que l'intégrale localisée par la formule de Berline et Vergne ne dépend de la valeur de la forme équivariante que sur l'ensemble des points fixes, et pas sur leur voisinage. La seule dépendance en le voisinage des points fixes est dans le dénominateur, mais il ne fait intervenir que l'action du groupe, et pas la forme équivariante elle-même ni la métrique riemannienne invariante choisie. C'est un invariant pour la

variété munie d'une orientation et d'une  $U(1)$ -action donnée. Toutes ces propriétés se retrouvent dans la généralisation du théorème au cas où les points fixes ne sont pas isolés, mais  $M_V$  est une sous-variété de dimension non nulle. On peut dans ce cas définir le fibré normal  $NM_V$  tel que  $T_pM \cong T_pM_V \oplus N_pM_V$ . On a alors un résultat de la forme

$$\int_M \alpha = C \int_{M_V} \frac{i^* \alpha}{\chi_{U(1)}(NM_V)} \quad (2.49)$$

où  $C$  est une certaine constante numérique dépendant des dimensions de  $M$  et  $M_V$ ,  $i : M_V \hookrightarrow M$  est l'inclusion et  $\chi_{U(1)}(NM_V)$  est la classe d'Euler équivariante du fibré normal. Cette classe de cohomologie est une classe caractéristique équivariante, soit un invariant du fibré normal qui ne dépend que de l'action du groupe et de l'orientation, et pas de la métrique particulière utilisée dans la localisation.

Enfin, le pfaffien (ou la classe d'Euler équivariante dans le cas généralisé) peut se comprendre de manière plus intuitive : l'intégrale d'une forme différentielle équivariante fermée est égale à l'intégrale sur la sous-variété de points fixes (qui se ramène à une somme ordinaire dans le cas où les zéros sont isolés), moyennant un facteur de correction qui prend en compte les fluctuations dans la direction normale aux points fixes. Cette interprétation est appuyée par l'origine du pfaffien dans la preuve donnée, qui vient la variance des gaussiennes en  $x$  et  $\eta$ .

## 2.4. Quelques applications

Nous allons étudier trois applications de la formule de Berline et Vergne. La première est la formule de la phase stationnaire exacte, une application à la géométrie symplectique, démontrée initialement par Duistermaat et Heckman [10] par d'autres méthodes et expliquée ensuite en termes de la cohomologie équivariante. La deuxième est une application à une formule utile en physique dans le cadre des modèles de matrices, démontrée initialement par Harish-Chandra [11] par des méthodes basées sur la théorie des groupes de Lie, puis redécouverte par Itzykson et Zuber [12] pour les besoins de la physique et démontrée avec une preuve analytique basée sur une équation de la chaleur. La dernière application est l'analogie avec l'intégrale fonctionnelle en théorie des champs, et qui sera exploitée en détails dans la suite de ce mémoire.

### 2.4.1. La formule de Duistermaat–Heckman

Un objet central en physique statistique est la fonction de partition canonique  $Z$  pour un système mécanique donné, qui permet de calculer toutes les grandeurs thermodynamiques telles que les chaleurs spécifiques ou les différentes moyennes dans l'ensemble canonique. Pour un système classique, cette fonction de partition est l'intégrale sur l'espace des phases d'un poids qui vaut  $e^{-\beta H}$  où  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  est la température inverse,  $k_B$  est la constante de Boltzmann, et  $H$  est l'hamiltonien du système considéré. Nous allons prendre ici

$-\beta = iT$ , avec  $T \in \mathbb{R}$ . Si l'espace des phases n'est pas  $\mathbb{R}^{2n}$  mais une variété symplectique  $(M, \omega)$  quelconque, il faut intégrer avec la mesure de Liouville  $d\mu_L = \frac{\omega^{\wedge n}}{n!}$ . Donc

$$Z(T) = \int_M \frac{\omega^{\wedge n}}{n!} e^{iTH}. \quad (2.50)$$

Dans une carte  $U$  de coordonnées  $x^a$ ,  $a = 1, \dots, 2n$  on a

$$\omega_p = \frac{1}{2} \omega(x(p))_{mn} dx^a \wedge dx^b \implies \frac{\omega_p^{\wedge n}}{n!} = \sqrt{\det \omega(x(p))} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n} \quad (2.51)$$

où la matrice  $\omega(x)$  a pour entrées les composantes  $\omega(x)_{mn}$  de la forme symplectique en coordonnées locales. On a donc dans une carte

$$Z(T)_U = \int_M d^{2n}x \sqrt{\det \omega(x(p))} e^{iTH(x)} \quad (2.52)$$

### Approximation de phase stationnaire

Dans un système réaliste, le hamiltonien a une forme trop compliquée pour que son exponentielle puisse être intégrée explicitement. On recourt donc à une approximation de phase stationnaire pour évaluer l'intégrale (2.50). Le raisonnement<sup>6</sup> est le suivant : lorsque  $\beta \rightarrow 0$ , la phase oscille très rapidement d'un point à l'autre de l'espace des phases. Les contributions des différents points vont donc interférer destructivement dans le cas générique, sauf dans le voisinage d'un point critique  $p$  de  $H$  où  $dH_p = 0$ , car en un tel point la phase ne varie pas au premier ordre d'un développement de Taylor de  $H$ . Dans le cas où l'ensemble  $M_V$  des points critiques est isolé, on peut intégrer sur un petit ouvert de carte  $U_p$  en  $p$  pour chaque  $p \in M_V$  avec (2.52), puis resommer les contributions. En coordonnées, on écrit

$$H(x) = H(0) + \frac{1}{2} \mathcal{H}(0)_{ab} x^a x^b + H'(x) \quad (2.53)$$

où  $\mathcal{H}(0) = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^a \partial x^b} \right|_{x=0}$  est la matrice hessienne de  $H$  au point critique<sup>7</sup> et  $H'(x)$  est le reste du développement, et il n'y a pas de terme linéaire car  $x = 0$  est un point critique. L'exponentielle des deux premiers termes est facilement intégrable car on a une gaussienne, et la méthode habituelle est alors de traiter  $e^{iTH'(x)}$  comme une perturbation que l'on développe en séries de  $T$ . Pour chaque terme, on a affaire à un moment de la gaussienne. Comme le  $k^e$  terme va en  $1/T^k$ , on s'attend à ce que les contributions successives soient de plus en plus petites lorsque  $T$  est grand. Si on prend en compte

---

6. Cette discussion est très heuristique (mais explique une procédure extrêmement courante en physique statistique et en théorie des champs), et sert uniquement à motiver le résultat de Duistermaat–Heckman qui suit.

7. On peut montrer qu'en un point critique, cette matrice définit une application linéaire indépendante du choix de coordonnées.

uniquement l'ordre 0 du développement de cette exponentielle,  $Z(T)$  est une somme d'intégrales de gaussiennes. On trouve alors

$$Z(T) = \left(\frac{2\pi i}{T}\right)^n \sum_{p \in M_V} (-i)^{\lambda(p)} e^{iTH(p)} \sqrt{\frac{\det \omega_p}{\det \mathcal{H}_p}} + O(1/T^{n+1}) \quad (2.54)$$

où les différents facteurs sont dus à la normalisation de la gaussienne, on a pris l'ordre 0 du développement de  $\omega(x)$  autour de 0, et  $\lambda(p)$  est l'indice de Morse de la fonction  $H$  en  $p$ , défini comme le nombre de valeurs propres négatives (comptées avec multiplicité) de sa matrice hessienne  $\mathcal{H}_p$ .

### La phase stationnaire exacte

Le théorème de Duistermaat–Heckman affirme que cette approximation de phase stationnaire est, dans certains cas, exacte.

Pour voir cela, il faut d'abord interpréter l'intégrand de (2.50) en termes de la cohomologie équivariante. Supposons que la variété symplectique soit munie d'une action du groupe  $U(1)$ . On veut étendre  $H$  en une forme équivariante fermée  $\alpha = H + \tilde{\omega}$ . On impose

$$0 = D_V \alpha = (d + i_V)(H + \tilde{\omega}) = dH + i_V \tilde{\omega} + d\tilde{\omega}. \quad (2.55)$$

Comme  $dH$  n'est pas nulle,<sup>8</sup> il faut pour que la composante 1-forme soit nulle<sup>9</sup> que  $-i_V \tilde{\omega} = dH$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\omega}$  soit une 2-forme. La composante 3-forme doit également être nulle, et donc  $\tilde{\omega}$  doit être fermée. Ceci suggère de prendre  $\tilde{\omega} = \omega$ . La condition  $D_V \alpha = 0$  est alors équivalente à

$$-i_V \omega = dH \quad (2.56)$$

c'est-à-dire que le champ de vecteurs  $-V$  est un champ de vecteurs hamiltonien pour le hamiltonien  $H$ . D'après cette définition, on voit plus concrètement ce que signifie le fait que  $U(1)$  agit sur la variété symplectique : les orbites du système mécanique correspondant au hamiltonien  $H$  doivent être périodiques. Ceci sera par exemple le cas si on a affaire à un système mécanique intégrable.

On a

$$\int_M e^{iT\alpha} = (iT)^n \int_M \frac{\omega^{\wedge n}}{n!} e^{iTH} \quad (2.57)$$

car l'intégrale sélectionne la composante  $2n$ -forme, ce qui est la définition (2.50) de  $Z(T)$  à un facteur  $(iT)^n$  près. On peut donc évaluer cette intégrale par la formule de Berline–Vergne si celle-ci s'applique, ce qui permet de démontrer le théorème de Duistermaat–Heckman.

8. Sinon  $H$  est localement constante, ce qui n'est pas très intéressant.

9. L'autre possibilité est que  $\tilde{\omega}$  est une fonction telle que  $\tilde{\omega} + H$  est localement constante, ce qu'on exclut pour les mêmes raisons.

**Théorème 2.8** (Duistermaat–Heckman). *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique compacte de dimension  $2n$ , sur laquelle agit le groupe  $U(1)$  et telle que  $\exists H \in C^\infty(M)$  satisfaisant à la condition<sup>10</sup> (2.56). Alors*

$$Z(T) = \left(\frac{2\pi i}{T}\right)^n \sum_{p \in M_V} (-i)^{\lambda(p)} e^{iT H(p)} \sqrt{\frac{\det \omega_p}{\det \mathcal{H}_p}}$$

où tous les symboles sont comme plus haut.

*Démonstration.* On est dans le cas d'application du théorème 2.7, avec la forme  $\alpha$  du théorème donnée par  $\left(\frac{1}{iT}\right)^n e^{iT(\omega+H)}$ . On a  $\alpha_p^0 = \left(\frac{1}{iT}\right)^n e^{iT H(p)}$ , et par (2.56), les points critiques de  $H$  coïncident avec les points fixes de l'action du groupe.

Reste à évaluer le pfaffien de la formule de Berline–Vergne. On va pour cela se placer dans des coordonnées particulières en utilisant le théorème de Darboux équivariant [10]. En un point fixe  $p \in M_V$ , il existe une carte  $U_p$  de coordonnées  $(q^\mu, p_\mu)$ ,  $\mu = 1, \dots, n$  telle que dans l'ouvert de carte

$$p_\mu(p) = q^\mu(p) = 0 \tag{2.58}$$

$$\omega = dq^\mu \wedge dp_\mu \tag{2.59}$$

$$V = \sum_{\mu=1}^n \lambda_{p,\mu} \left( q^\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} - p_\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \tag{2.60}$$

$$H(x) = H(0) + \sum_{\mu=1}^n \frac{\lambda_{p,\mu}}{2} \left( (p_\mu)^2 + (q^\mu)^2 \right). \tag{2.61}$$

Ceci signifie qu'on peut choisir des coordonnées de Darboux dont l'origine coïncide avec le point fixe  $p$ , et dans lesquelles  $V$  agit comme une rotation dans chacun des 2-plans  $(p_\mu, q^\mu)$ , où les  $\lambda_{p,\mu}$  sont certains poids non nuls qui déterminent la vitesse de rotation. La forme de  $V$  implique celle de  $H$  par l'équation (2.56). Comme le hamiltonien est quadratique, on voit directement que l'approximation de phase stationnaire sera exacte dans ce cas-ci.

Par la même équation (2.56), on a

$$dV_p = -\omega_p^{-1} \mathcal{H}_p \tag{2.62}$$

au sens matriciel, et donc

$$\text{Pfaff } dV_p \propto \sqrt{\frac{\det \omega_p}{\det \mathcal{H}_p}} \tag{2.63}$$

où la constante de proportionnalité vient de l'orientation et reste à déterminer. On va donc évaluer le membre de droite dans les coordonnées de Darboux équivariantes pour

---

10. Ou dit aussi que « le groupe  $U(1)$  agit par symplectomorphismes hamiltoniens ».

trouver le facteur additionnel. On a dans les coordonnées  $(q^1, p_1, \dots, q^n, p_n)$

$$\begin{aligned} \omega_p = -\omega_p^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_p = \begin{pmatrix} \lambda_{p,1} & 0 & & & \\ 0 & \lambda_{p,1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{p,n} & 0 \\ & & & 0 & \lambda_{p,n} \end{pmatrix} \\ \implies dV_p &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{p,1} & & & \\ -\lambda_{p,1} & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_{p,1} \\ & & & -\lambda_{p,1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Le nombre de valeurs propres négatives de  $\mathcal{H}_p$  peut s'écrire  $\lambda(p) = n - \sum_{\mu=1}^n \text{sgn } \lambda_{p,\mu}$ . Comme  $\pm 1 = e^{i\frac{\pi}{2}(\pm 1 - 1)}$ , on trouve pour finir

$$\text{sgn Pfaff } dV_p = \prod_{\mu=1}^n \text{sgn } \lambda_{p,\mu} = \prod_{\mu=1}^n e^{i\frac{\pi}{2}(\text{sgn } \lambda_{p,\mu} - 1)} = e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda(p)} = (-i)^{\lambda(p)}. \quad (2.65)$$

En remettant tout ensemble, on obtient le résultat annoncé.  $\square$

### 2.4.2. La formule de Harish-Chandra–Itzykson–Zuber

Soient  $A, B$  deux matrices hermitiennes  $N \times N$  :  $A^\dagger = A, B^\dagger = B$ . On considère l'expression suivante, appelée intégrale de Harish-Chandra–Itzykson–Zuber [13] :

$$I(A, B; T) = \int_{U(N)} DU e^{iT \text{Tr } AUBU^{-1}} \quad (2.66)$$

où  $DU$  est la mesure de Haar sur le groupe  $U(N)$ , invariante sous translations par la gauche et par la droite.

Comme toute matrice hermitienne peut être diagonalisée par transformations unitaires, on a si  $\tilde{A} = U_A A U_A^{-1}$  et  $\tilde{B} = U_B B U_B^{-1}$  sont diagonales,

$$\text{Tr } AUBU^{-1} = U_A^{-1} \tilde{A} U_A U U_B^{-1} \tilde{B} U_B U^{-1} \quad (2.67)$$

$$= \tilde{A} U_A U U_B^{-1} \tilde{B} U_B U^{-1} U_A^{-1} \quad (2.68)$$

$$= \tilde{A} (U_A U U_B^{-1}) \tilde{B} (U_A U U_B^{-1})^{-1}. \quad (2.69)$$

où on a utilisé la propriété cyclique de la trace à la deuxième ligne. La mesure est invariante pour le changement de variables  $U \rightarrow U_A U U_B^{-1}$  et donc on peut supposer que  $A$  et  $B$  sont diagonales.

On a alors le théorème suivant

**Théorème 2.9** (Harish-Chandra–Itzykson–Zuber). *Soit  $A$  (resp.  $B$ ) une matrice réelle diagonale  $N \times N$  de valeurs propres respectives deux à deux distinctes  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) où  $i = 1, \dots, N$ . Soit  $I(A, B; T)$  comme dans (2.66). Alors*

$$I(A, B; T) = \left( \prod_{p=1}^{N-1} p! \right) \left( -\frac{i}{T} \right)^{N(N-1)/2} \frac{1}{N!} \frac{\det(e^{i\Gamma a_i b_j})}{\Delta(a)\Delta(b)}$$

où  $\Delta(a) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (a_i - a_j) = \det(a_i^{j-1})$  est le déterminant de Vandermonde.

*Démonstration.* On va démontrer cette expression à un facteur numérique près. La détermination de celui-ci n'est pas très instructive, et n'est le point clé ni de la preuve ni de cette section qui est de donner un exemple concret de localisation. On va faire l'approximation de phase stationnaire, puis utiliser le théorème de Duistermaat–Heckman (2.8) pour montrer que cette approximation est en réalité le résultat exact.

Il faut d'abord trouver les points critiques de la fonction  $f(U) = \text{Tr} AUBU^{-1}$ .  $U_0$  est un point critique si pour toute variation<sup>11</sup>  $U \rightarrow U + \delta U$

$$0 = \delta \text{Tr} AU_0BU_0^{-1} \tag{2.70}$$

$$= \text{Tr}(A\delta UBU_0^{-1} + AU_0B\delta U^{-1}). \tag{2.71}$$

Or  $UU^{-1} = I$  et donc

$$\delta UU_0^{-1} + U_0\delta U^{-1} = 0 \implies \delta U^{-1} = -U_0^{-1}\delta UU_0^{-1}. \tag{2.72}$$

La condition de point critique devient

$$0 = \text{Tr}(A\delta UU_0^{-1}U_0BU_0^{-1} - AU_0BU_0^{-1}\delta UU_0^{-1}) \tag{2.73}$$

$$= \text{Tr}(\delta UU_0^{-1}U_0BU_0^{-1}A - \delta UU_0^{-1}AU_0BU_0^{-1}) \tag{2.74}$$

$$= \text{Tr}(\delta UU_0^{-1} [U_0BU_0^{-1}, A]) \tag{2.75}$$

quelle que soit la matrice  $\delta UU_0^{-1}$  anti-hermitienne.

Or, la forme bilinéaire  $g$  sur l'algèbre  $\mathfrak{su}(N)$  définie par  $g(A, B) = \text{Tr} AB$  est non dégénérée ( $\mathfrak{su}(N)$  est simple et donc en particulier semi-simple), et  $\delta UU_0^{-1}$  ainsi que  $[U_0BU_0^{-1}, A]$  sont des éléments de l'algèbre de Lie complexifiée. Donc  $U_0$  est un point critique ssi  $[U_0BU_0^{-1}, A] = 0$ . Comme  $A$  est diagonal, ceci revient à imposer pour les éléments de matrice

$$(U_0BU_0^{-1})_{ij}(a_j - a_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq N. \tag{2.76}$$

---

11. Pour être tout à fait précis, il faudrait prendre un chemin  $U(t)$  et imposer que  $\frac{d}{dt}f(U(t))|_{t=0}$  s'annule quel que soit le choix du chemin. La méthode utilisée ici est parfaitement équivalente si  $\delta$  est une dérivation dans l'algèbre des fonctions de  $U$ . Elle sera utilisée tout au long de ce mémoire.

Comme tous les  $a_i$  sont supposés distincts, les éléments non diagonaux de  $U_0 B U_0^{-1}$  doivent être nuls. Comme  $B$  est diagonal et a des valeurs propres distinctes deux à deux, on voit que  $U_0$  doit être multiple d'une matrice de permutation :

$$(U_0)_{ij} = \lambda(P_\sigma)_{ij} = \lambda \delta_{i\sigma(j)} \quad (2.77)$$

où  $\lambda \in U(1)$ ,  $\sigma \in S_N$ . Le facteur  $\lambda$  n'intervient pas dans  $f : f(\lambda U) = f(U)$ , et donc il suffit de considérer pour  $U_0$  une matrice de permutation  $P_\sigma$ .

Il faut maintenant calculer l'intégrale de la partie quadratique de  $f$  dans une carte en  $P_\sigma$ . On choisit des coordonnées logarithmiques :  $U(X) = e^X P_\sigma$  avec  $X \in \mathfrak{su}(N)$ , et on développe  $f$  au deuxième ordre en  $X$  :

$$f(U(X)) = \text{Tr} A e^X P_\sigma B P_\sigma^T e^{-X} \quad (2.78)$$

$$= \text{Tr} A \left( I + X + \frac{1}{2} X^2 \right) P_\sigma B P_\sigma^T \left( I - X + \frac{1}{2} X^2 \right) + O(X^3) \quad (2.79)$$

$$= \text{Tr} \left[ A P_\sigma B P_\sigma^T - A X P_\sigma B P_\sigma^T X + \frac{1}{2} \left( A X^2 P_\sigma B P_\sigma^T + A P_\sigma B P_\sigma^T X^2 \right) \right] + O(X^3) \quad (2.80)$$

$$= \sum_{i=1}^N a_i b_{\sigma(i)} + \sum_{i,j=1}^N \left( -a_i X_{ij} b_{\sigma(j)} X_{ji} + a_i X_{ij} X_{ji} b_{\sigma(i)} \right) + O(X^3) \quad (2.81)$$

$$= \sum_{i=1}^N a_i b_{\sigma(i)} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} |X_{ij}|^2 (a_i - a_j) (b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}) + O(X^3) \quad (2.82)$$

car  $X_{ji} = -X_{ij}^*$  où  $*$  est la conjugaison complexe.

On trouve donc dans l'approximation de phase stationnaire <sup>12</sup>

$$I(A, B; T) = C \sum_{\sigma \in S_N} e^{iT \sum_{i=1}^N a_i b_{\sigma(i)}} \int_{\mathfrak{su}(N)} \prod_{1 \leq i < j \leq N} dX_{ij} dX_{ij}^* e^{-\frac{iT}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} |X_{ij}|^2 (a_i - a_j) (b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)})} \quad (2.83)$$

$$= C \sum_{\sigma \in S_N} e^{iT \sum_{i=1}^N a_i b_{\sigma(i)}} \frac{\left( -\frac{i\pi}{T} \right)^{N(N-1)/2}}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (a_i - a_j) (b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)})} \quad (2.84)$$

$$= C \frac{\left( -\frac{i\pi}{T} \right)^{N(N-1)/2}}{\Delta(a) \Delta(b)} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N e^{iT a_i b_{\sigma(i)}} \quad (2.85)$$

$$= C \frac{\left( -\frac{i\pi}{T} \right)^{N(N-1)/2}}{\Delta(a) \Delta(b)} \det \left( e^{iT a_i b_j} \right) \quad (2.86)$$

où  $C$  est une constante qui vient du jacobien lorsqu'on passe de  $DU$  à  $\prod_{1 \leq i < j \leq N} dX_{ij} dX_{ij}^*$ , et le signe de  $\sigma$  apparaît pour remettre dans l'ordre les  $b_i$ .

<sup>12</sup>. Il faut choisir un contour d'intégration adapté dans l'algèbre de Lie complexifiée afin que l'intégrale soit convergente.

Pour montrer que l'expression trouvée est exacte, on utilise le théorème de Duistermaat–Heckman. La fonction  $f(U)$  peut se réécrire

$$f(U) = -\operatorname{Tr} iAUiBU^{-1} = -\operatorname{Tr} iAM = H(M) \quad (2.87)$$

où  $M = UiBU^{-1}$  est un point de l'orbite coadjointe de  $iB$  définie comme  $O_B = \{M = UiBU^{-1} \mid U \in U(N)\}$ . Cette orbite peut être munie d'une structure de variété différentiable diffeomorphe à  $U(N)/U(1)^N$  où le sous-groupe  $U(1)^N$  est le sous-groupe des matrices diagonales, qui fixent  $B$  sous l'action de  $U(N)$ . Comme  $f$  est invariant sous ce  $U(1)^N$  ( $f(U) = f(I)$  pour  $U \in U(1)^N$ ), on peut intégrer sur  $O_B$  au lieu d'intégrer sur  $U(N)$ . Reste à trouver une forme symplectique pour laquelle  $H$  est un hamiltonien. Il est bien connu que les orbites coadjointes d'un groupe de Lie admettent une structure de variété symplectique [14] : la submersion  $U(N) \hookrightarrow O_B : U \rightarrow UiBU^{-1}$  factorise à travers  $SU(N) \cong U(N)/U(1)$  car le facteur  $U(1)$  est dans le stabilisateur de  $iB$ . La submersion  $p : SU(N) \hookrightarrow O_B$  envoie  $X \in \mathfrak{su}(N)$  sur  $[X, M] \in T_M O_B$ . On définit une forme  $\omega$  sur  $O_B$  par  $\omega_M([X, M], [Y, M]) = \operatorname{Tr} M[X, Y]$ . Cette forme est bien définie car si  $[X, M] = [\tilde{X}, M]$ , alors

$$\begin{aligned} \omega_M([X, M], [Y, M]) &= \operatorname{Tr} M[X, Y] = -\operatorname{Tr}[X, M]Y = -\operatorname{Tr}[\tilde{X}, M]Y \\ &\implies \omega_M([X, M], [Y, M]) = \omega_M([\tilde{X}, M], [Y, M]). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Elle est non dégénérée car la trace du produit est non dégénérée sur  $SU(N)$ , et donc a fortiori sur  $\omega_M$ . Elle est fermée, car on peut vérifier que  $p^*\omega = d\theta$  où  $\theta = \operatorname{Tr} B(U^{-1}dU)$  et  $U^{-1}dU$  est la forme de Cartan-Maurer :  $(U^{-1}dU)_U(UX) = X$ . La forme symplectique  $\omega$  est manifestement invariante sous l'action du groupe donc la forme volume correspondant à  $\omega$  l'est aussi. Comme une telle forme volume est unique à un facteur près, elle coïncide à un facteur près avec la restriction à  $O_B$  de la forme  $DU$  sur laquelle on intègre dans  $I(A, B; T)$ .

En utilisant (2.56) et le fait que la trace fournisse une forme bilinéaire invariante, on voit que le champ de vecteurs  $V$  est

$$V_M = -[iA, M] \quad (2.89)$$

dont les courbes intégrales sont  $M(t) = e^{-itA}M(0)e^{itA}$ . Les orbites sont donc périodiques si les valeurs propres sont relativement rationnelles (c'est-à-dire, si les  $a_i/a_j$  sont rationnels). Comme  $\mathbb{Q}^N$  est dense dans  $\mathbb{R}^N$ , le résultat suit par continuité de l'intégrale en les  $a_i$ .  $\square$

Le lecteur attentif aura remarqué que les seules propriétés du groupe  $U(N)$  qui interviennent pour la localisation sont le fait que le groupe est compact, et que les matrices  $A$  et  $B$  qui interviennent sont dans l'algèbre de lie (complexifiée) de  $U(N)$ . Il n'est donc pas surprenant que l'on puisse généraliser l'intégrale d'Harish-Chandra–Itzykson–Zuber pour un groupe de Lie  $G$  compact quelconque [15] :

$$I(X, Y; T) = \int_G Dg e^{iT\beta(X, Ad(g)Y)} \quad (2.90)$$

où  $\beta$  est la forme de Killing pour  $\mathfrak{g}$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}$  et on intègre avec la mesure bi-invariante. Comme le facteur abélien de  $G$  n'intervient pas dans l'action adjointe, on peut se restreindre au cas où  $G$  est semi-simple. Un théorème de Cartan nous apprend que tout élément de l'algèbre possède un représentant de son orbite sous l'action adjointe dans la sous-algèbre de Cartan, et l'on peut donc choisir  $X$  et  $Y$  sans perte de généralité dans cette sous-algèbre. Par un raisonnement tout à fait similaire à celui donné, on trouve que les points stationnaires doivent être des éléments du groupe de Weyl de l'algèbre, et les déterminants de Vandermonde  $\Delta$  sont remplacés par les déterminants généralisés  $\Delta_{\mathfrak{g}}(X) = \prod_{\alpha} \alpha(X)$  où le produit est sur les racines positives.

Il peut être également intéressant de regarder le cas plus compliqué où  $X, Y$  ne sont pas dans l'algèbre de Lie du groupe. Brézin et Hikami [16] ont considéré le cas où  $X, Y$  sont hermitiennes et  $G = USp(N)$ . Dans ce cas, la formule de Duistermaat–Heckman ne s'applique pas immédiatement (la forme symplectique que l'on voudrait introduire s'annule sur les matrices hermitiennes dans le complémentaire de  $\mathfrak{sp}(N)$ ). Cependant, il semblerait que l'approximation de phase stationnaire soit toujours valable, mais avec un nombre non nul de moments de la gaussienne à prendre en compte. Leur dérivation est peu instructive et consiste à montrer que l'intégrale est solution d'une certaine équation différentielle, puis à trouver une autre solution de cette équation. Il serait intéressant d'arriver à comprendre leur résultat dans le cadre de la localisation.

### 2.4.3. Localisation d'intégrales fonctionnelles

On en arrive maintenant au cas qui sera central dans la suite de ce mémoire. On veut calculer la valeur moyenne d'une certaine observable  $\mathcal{O}[X]$  qui est une certaine fonctionnelle des champs de la théorie, dénotés collectivement par  $X$ . En théorie des champs, une telle valeur moyenne peut se calculer dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle par

$$\langle \mathcal{O}[X] \rangle = \int \mathcal{D}X \mathcal{O}[X] e^{-S[X]} \quad (2.91)$$

où on intègre sur tous les champs  $X$ . Formellement, cette intégrale ressemble très fort aux intégrales que nous avons considérées jusqu'à présent. Nous sommes donc tentés de localiser cette intégrale également. Dans ce cas-ci, la localisation sera formelle, étant donné que l'intégrale fonctionnelle n'est pas mathématiquement bien définie. On pourrait même faire le raisonnement inverse, et prendre pour définition de l'intégrale fonctionnelle l'intégrale localisée, qui a quant à elle un sens précis.

Quels sont les éléments essentiels de la localisation ? En regardant la seconde preuve de la section 2.2 page 11 et la discussion menant au théorème de Berline–Vergne qui suit, on voit qu'il faut :

1. une algèbre graduée ;
2. une dérivation  $D_V$  impaire sur cette algèbre ;
3. un intégrant qui est annulé par  $D_V$  ;

4. un certain  $\beta$  tel que  $D_V^2\beta = 0$  ;
5. une partie de  $D_V\beta$  de degré 0 qui est semi-définie positive pour que la limite  $t \rightarrow \infty$  soit convergente.

On veut donc une théorie des champs dans laquelle tous les points précédents aient un analogue.

L'algèbre considérée est l'algèbre des fonctionnelles des champs.<sup>13</sup> Cette algèbre est naturellement graduée dans une théorie avec des fermions : comme les champs fermioniques sont représentés dans l'intégrale fonctionnelle par les éléments impairs d'une algèbre de Grassmann, i.e. ils anticommulent, on associe la parité  $-1$  aux fermions et  $+1$  aux bosons.<sup>14</sup>

Une dérivation  $Q$  (qui est l'analogue de  $D_V$ ) définie sur les champs est alors impaire si  $Q(\text{boson})=\text{fermion}$  et inversement. L'intégrand sera automatiquement annulé<sup>15</sup> par  $Q$  si  $QS[X] = 0$ ,  $Q\mathcal{D}X = 0$  et  $Q\mathcal{O}[X] = 0$ . La première condition signifie que  $Q$  est le générateur d'une symétrie de l'action classique, la deuxième que la symétrie reste valable au niveau quantique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'anomalie associée à cette symétrie, et la troisième signifie que  $\mathcal{O}[X]$  est symétrique pour la transformation engendrée par  $Q$ . Comme  $Q$  est impaire, la symétrie considérée est appelée supersymétrie ; la théorie des champs doit donc être supersymétrique, et l'observable considérée doit préserver cette supersymétrie. La supersymétrie sera étudiée plus en détails dans le chapitre suivant.

Finalement, reste à trouver un  $\beta$ . Il s'agit d'une fonctionnelle bien choisie, qui est invariante sous le carré de la transformation  $Q$ , et telle que la partie qui dépend des champs bosoniques est semi-définie positive. Il n'est pas nécessaire de construire un tel  $\beta$  comme nous l'avons fait plus haut à partir du champ de vecteurs correspondant à l'action d'un groupe et d'une métrique invariante, mais alors la localisation se fait sur les zéros de  $Q\beta$  qui ne coïncident plus nécessairement avec les points fixes de l'action du groupe. Avec un peu de chance, le lieu des points  $Q\beta = 0$  correspond à une variété de dimension finie ordinaire, et l'intégrale fonctionnelle se ramène alors à une intégrale ordinaire sur une variété. L'exponentielle de la partie de  $Q\beta$  qui dépend des champs fermioniques sélectionne la composante de  $\mathcal{O}[X] e^{-S[X]}$  qui ne contient pas de champs fermioniques, de manière analogue au cas de dimension finie où seule la partie 0-forme intervient. On met donc les fermions à 0 dans la localisation.

### Un exemple : fixation de jauge BRST et localisation

Avant de clore ce chapitre, on va réinterpréter une situation bien connue en théorie des champs comme un exemple de localisation. Dans une théorie des jauge, il n'est pas possible de calculer des fonctions de corrélation avec l'action habituelle invariante de jauge.

---

13. Par fonctionnelle, on entend tout polynôme en les champs et en leurs dérivées, avec des intégrations éventuelles.

14. L'algèbre est ici seulement  $\mathbb{Z}_2$ -graduée ce qui suffit pour définir une dérivation impaire.

15. On pourrait avoir une combinaison telle que les facteurs ne sont pas séparément annulés, mais leur produit l'est. Ce cas ne se présente pas en pratique, et nous ne le considérons pas ici.

Perturbativement, on constate que la partie quadratique de l'action pour les champs de jauge n'est pas inversible et on ne peut pas définir de propagateurs pour ceux-ci. Du point de vue de l'intégrale de chemin, on intègre sur tous les champs de jauge, alors qu'à deux champs qui diffèrent uniquement par une transformation de jauge correspond la même fonctionnelle invariante de jauge. On intègre donc sur trop de variables, et l'intégrale diverge. Il faut intégrer sur l'espace des orbites de jauge, et non sur l'espace des champs eux-mêmes. Une manière de faire ceci est de sélectionner un représentant dans chaque orbite : on fixe la jauge. C'est ce qui permet de faire la méthode BRST :<sup>16</sup> on ajoute des champs fermioniques dans la représentation adjointe appelés fantômes, et on ajoute un terme cinétique pour ces champs à l'action de telle manière que la nouvelle action soit invariante pour les transformations BRST :  $QS = 0$ . On vérifie aussi que  $Q^2 = 0$ . Sur les champs physiques de la théorie,  $Q$  agit comme une transformation de jauge où le fantôme remplace le paramètre de la transformation, et donc les observables invariants de jauge sont automatiquement  $Q$ -fermés. Pour fixer la jauge, on ajoute un terme  $Q\Psi$  qui est  $Q$ -exact à l'action. Le problème est alors de s'assurer que les valeurs moyennes des observables invariante de jauge ne dépendent pas du choix de ce terme  $Q$ -exact. Ceci peut se comprendre par localisation : la théorie localise sur les champs où  $Q\Psi = 0$ , c'est-à-dire les champs invariants de jauge.

---

16. Voir par exemple [17] pour plus de détails.



## 3. Supersymétrie $\mathcal{N} = 4$

Afin d'obtenir la localisation dans le cadre de la théorie des champs, il faut que la théorie des champs soit supersymétrique. Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions générales sur la supersymétrie, puis on regarde le cas particulier qui va nous occuper, la théorie de Yang-Mills supersymétrique  $\mathcal{N} = 4$ . Cette théorie peut être obtenue par réduction dimensionnelle à partir de la théorie  $\mathcal{N} = 1$  en 10 dimensions, et on va donc montrer que cette théorie présente bien une supersymétrie, faire la réduction dimensionnelle, puis finir ce chapitre par étendre l'algèbre de supersymétrie en une algèbre superconforme.

### 3.1. L'algèbre de supersymétrie

#### 3.1.1. Définitions

L'algèbre de supersymétrie est une extension de l'algèbre de Poincaré. L'algèbre de Poincaré<sup>1</sup> à 4 dimensions est engendrée par les relations de commutation suivantes :

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (3.1)$$

$$[P_\mu, M_{\rho\nu}] = i(-\eta_{\mu\rho}P_\nu + \eta_{\mu\nu}P_\rho) \quad (3.2)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(-\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}) \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4. \quad (3.3)$$

Les  $P_\mu$  sont les générateurs des translations, les  $M_{\mu\nu}$  sont antisymétriques, et engendrent les *boosts* (pour  $\mu = 0$ ) et les rotations ( $\mu \neq 0 \neq \nu$ ).

Le célèbre théorème de Haag–Łopuszanski–Sohnius [18] affirme que la seule extension non triviale et physiquement raisonnable de l'algèbre de Poincaré est la suivante. On ajoute à l'algèbre un certain nombre  $\mathcal{N}$  de spineurs<sup>2</sup> de Weyl gauches  $Q_I$  qui ont une parité de Grassmann impaire (i.e. au lieu d'avoir une algèbre de Lie, on a maintenant une superalgèbre, qui est  $\mathbb{Z}_2$  graduée, et dont les  $Q_I$  sont des éléments impairs), ainsi que des  $Z_{IJ}$  pairs et antisymétriques, et on ajoute aux relations de commutation (3.1)

1. On prend ici la convention habituelle en physique, où si  $X$  est un générateur de l'algèbre de Lie, alors  $iX = \frac{d}{dt}g_X(t)|_{t=0}$  pour un certain chemin  $g_X$  dans le groupe.

2. Pour plus d'informations sur les spineurs, voir la [section A.4](#).

les relations de commutation et d'anticommutation suivantes [19] :

$$[Q_{\alpha I}, P_\mu] = 0 \qquad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, P_\mu] = 0 \qquad (3.4)$$

$$[Q_{\alpha I}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} Q_{\beta I} \qquad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}^I \qquad (3.5)$$

$$\{Q_{\alpha I}, Q_{\beta J}\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z_{IJ} \qquad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = 2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z^{IJ} \qquad (3.6)$$

$$\{Q_{\alpha I}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = 2\delta_J^I (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \qquad [Z_{IJ}, X] = 0 \quad \forall X \text{ dans l'algèbre,} \qquad (3.7)$$

avec,

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I = (Q_{\alpha I})^\dagger \qquad \text{et} \qquad Z^{IJ} = (Z_{IJ})^\dagger, \qquad (3.8)$$

où  $I = 1, \dots, \mathcal{N}$ , les  $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}$  sont des coefficients de Clebsch–Gordan de  $Spin(3, 1)$  pour  $\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{2} \otimes \bar{\mathbf{2}}$ , les  $(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta}$  pour  $\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \rightarrow \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ , et les  $(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$  pour  $\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \rightarrow \bar{\mathbf{2}} \otimes \bar{\mathbf{2}}$ , que l'on peut construire explicitement en terme des matrices de Pauli : si les  $\sigma^i$  sont les 3 matrices de Pauli, alors  $\sigma^\mu = (-I_{2 \times 2}, -\sigma^i)$ ,  $\bar{\sigma}^\mu = (-I_{2 \times 2}, \sigma^i)$ ,  $\sigma_{\mu\nu} = -i\sigma_{[\mu}\bar{\sigma}_{\nu]}$ ,  $\bar{\sigma}_{\mu\nu} = -i\bar{\sigma}_{[\mu}\sigma_{\nu]}$ . Les  $\epsilon_{\alpha\beta}$  et  $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  sont des tenseurs antisymétriques avec  $\epsilon_{12} = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -1$  et qui sont des invariants pour la représentation  $\mathbf{2}$  et  $\bar{\mathbf{2}}$  respectivement.

Les  $Q_I$  et  $\bar{Q}^I$  sont appelées supercharges. Elles correspondent chacune, dans une représentation de l'algèbre, à une supersymétrie, avec  $Q(\text{boson}) = \text{fermion}$  et inversement. En 4 dimensions, on dit qu'on a  $4\mathcal{N}$  supercharges (les  $Q_I$  sont des spineurs de Weyl et ont donc chacun deux composantes).

Les  $Z_{IJ}$  sont appelées charges centrales car elles commutent avec toute l'algèbre. Si  $\mathcal{N} = 1$ , on parle de supersymétrie simple, et il ne peut y avoir de charge centrale par l'antisymétrie de  $Z_{IJ}$ . Si  $\mathcal{N} > 1$ , on parle de supersymétrie étendue. C'est ce cas qui va nous intéresser plus particulièrement.

En plus de cette algèbre, on a une symétrie qui agit sur les indices  $I = 1, \dots, \mathcal{N}$ , appelée  $R$ -symétrie. Dans le cas où la matrice  $Z_{IJ}$  des charges centrales est non dégénérée, le groupe de  $R$ -symétrie est  $USp(\mathcal{N}) = Sp(\mathcal{N}) \cap U(\mathcal{N}) : U(\mathcal{N})$  afin de préserver la relation d'anticommutation  $\{Q, \bar{Q}\}$ ,  $Sp(\mathcal{N})$  afin de préserver  $\{Q, Q\}$ . Dans le cas opposé où  $Z_{IJ} = 0 \quad \forall I, J = 1, \dots, \mathcal{N}$ , et qui est le cas que l'on va rencontrer, la  $R$ -symétrie peut être tout<sup>3</sup>  $U(\mathcal{N})$ .

### 3.1.2. Quelques conséquences

On va maintenant établir deux propriétés immédiates, valables dans toute représentation de l'algèbre de supersymétrie.

Comme l'algèbre de supersymétrie est plus large que l'algèbre de Poincaré, ses représentations irréductibles contiennent plusieurs représentations irréductibles de l'algèbre de

---

3. On verra plus loin que dans l'action explicite que l'on va construire pour  $\mathcal{N} = 4$ , le  $U(4)$  est brisé en  $SU(4)$ .

Poincaré, i.e. il y a plusieurs particules dans une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie. Comme les  $Q_I$  sont impairs, il y aura des bosons et des fermions dans une même représentation. Le spin n'est donc plus un invariant d'une représentation irréductible donnée. Cependant, le fait suivant reste valable.

**Lemme 3.1.** *Tous les états d'une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie ont la même masse.*

*Démonstration.* Il est bien connu (et on vérifie facilement) que  $[P^2, M_{\mu\nu}] = 0$ , et donc  $P^2$  commute avec tous les opérateurs d'une représentation irréductible de l'algèbre de Poincaré. Par le lemme de Schur,  $P^2 = -m^2 I$  est diagonal. Ceci s'étend facilement aux représentations de l'algèbre de supersymétrie : comme  $[Q_{\alpha I}, P_\mu] = 0$  et  $[\bar{Q}_{\dot{\alpha} I}, P_\mu] = 0$ , on a a fortiori  $[Q_{\alpha I}, P^2] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha} I}, P^2] = 0$ , et  $P^2$  est donc un opérateur de Casimir également pour l'algèbre de supersymétrie.  $\square$

La supersymétrie fait correspondre un boson à un fermion, et inversement. Le lemme suivant n'est donc pas vraiment surprenant.

**Lemme 3.2.** *Dans toute représentation irréductible de dimension finie de l'algèbre de supersymétrie où les  $P_\mu$  sont représentés par des opérateurs non tous nuls, il y a autant de degrés de liberté bosoniques et fermioniques, c'est-à-dire que les parties paire et impaire de l'espace de la représentation ont la même dimension.*

*Démonstration.* Définissons l'opérateur  $(-1)^{N_f}$  qui vaut  $+1$  sur un état bosonique et  $-1$  sur un état fermionique. On va montrer que  $\text{Tr}(-1)^{N_f} = 0$ .

Comme  $Q_I$  a un spin demi-entier,  $Q_I |\psi\rangle$  a un spin qui diffère d'un demi du spin de  $|\psi\rangle$ . Par conséquent,  $Q_I$  anticommute avec  $(-1)^{N_f}$ . On a alors

$$0 = \text{Tr} \left[ (-1)^{N_f} Q_{\alpha I} \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J + Q_{\alpha I} (-1)^{N_f} \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J \right] \quad (3.9)$$

$$= \text{Tr} \left[ (-1)^{N_f} Q_{\alpha I} \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J + (-1)^{N_f} \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J Q_{\alpha I} \right] \quad \text{par cyclicité de la trace} \quad (3.10)$$

$$= \text{Tr} \left[ (-1)^{N_f} \{Q_{\alpha I}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} \right] \quad (3.11)$$

$$= \delta_I^J (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \text{Tr} \left[ (-1)^{N_f} P_\mu \right]. \quad (3.12)$$

Il suffit de choisir un  $P_\mu$  non nul pour obtenir le résultat.  $\square$

Remarquons que ceci n'est pas valable pour l'état fondamental de la théorie : il est invariant sous translations (i.e.  $P_\mu = 0$  sur cet état) et dans la représentation triviale de l'algèbre.<sup>4</sup> Il n'y a donc qu'un seul état dans l'espace de la représentation.

4. Si la supersymétrie n'est pas brisée spontanément.

### 3.1.3. Représentations de l'algèbre — Supermultiplets

On va maintenant regarder plus en détails les représentations de l'algèbre de supersymétrie [20]. On appelle supermultiplet un vecteur d'une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie, et par extension une représentation irréductible. On ne va considérer ici que les supermultiplets de masse nulle, qui sont les seuls à intervenir dans ce mémoire. Le lecteur intéressé par les représentations de masse positive peut consulter [19, 20].

Comme on connaît les représentations de l'algèbre de Poincaré, il suffit de regarder comment les représentations irréductibles de l'algèbre de Poincaré s'agencent en représentations irréductibles de l'algèbre de supersymétrie. On peut choisir, comme  $P^2 = 0$ , un référentiel où  $P_\mu = (-E, 0, 0, E)$ . On a alors

$$\sigma^\mu P_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2E \end{pmatrix} \implies \{Q_{\alpha I}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4E \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}} \delta_I^J \quad (3.13)$$

En particulier, on a  $\{Q_{1I}, \bar{Q}_1^J\} = 0$ .

Sur un espace de Hilbert, on a

$$0 = \langle \Omega | \{Q_{1I}, \bar{Q}_1^J\} | \Omega \rangle = \|Q_{1I} | \Omega \rangle\|^2 + \|Q_1^J | \Omega \rangle\|^2 \implies Q_{1I} = 0 = Q_1^J. \quad (3.14)$$

Il reste donc seulement la moitié des générateurs fermioniques. Ceci implique aussi que  $Z_{IJ} = \epsilon_{12} \{Q_{1I}, Q_{2J}\} = 0$ , les charges centrales sont représentées par des opérateurs nuls dans le cas de masse nulle.

On définit les opérateurs

$$a_J = \frac{1}{\sqrt{4E}} Q_{2J} \quad \text{et} \quad a^{J\dagger} = \frac{1}{\sqrt{4E}} \bar{Q}_2^J, \quad (3.15)$$

qui vérifient les relations d'anticommutation pour des opérateurs de création et d'annihilation fermioniques :

$$\{a_J, a^{K\dagger}\} = \delta_J^K \quad \text{et} \quad \{a_J, a_K\} = 0 = \{a^{J\dagger}, a^{K\dagger}\}. \quad (3.16)$$

On choisit un état de vide, qui est annihilé par tous les  $a_J$ . Un tel état est un vecteur d'une représentation irréductible de l'algèbre de Poincaré, et possède donc une hélicité donnée  $\lambda_0$ . On représente cet état par  $|\lambda_0\rangle$ . Dans le référentiel choisi, l'opérateur d'hélicité est  $M_{12}$ , et on a donc, en explicitant les relations de commutation :

$$M_{12} \bar{Q}_2^I |\lambda\rangle = \bar{Q}_2^I M_{12} |\lambda\rangle - [\bar{Q}_2^I, M_{12}] |\lambda\rangle = \bar{Q}_2^I \lambda |\lambda\rangle + \frac{1}{2} \bar{Q}_2^I |\lambda\rangle = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \bar{Q}_2^I |\lambda\rangle. \quad (3.17)$$

Par conséquent,  $a^{J\dagger}$  augmente le spin de  $\frac{1}{2}$ , et on vérifie de la même manière que  $a_J$  diminue le spin de  $\frac{1}{2}$ .

En partant de l'état  $|\lambda_0\rangle$ , on construit donc successivement par application de l'opérateur  $a^{J\dagger}$  les états

$$\begin{aligned}
 & |\lambda_0\rangle \\
 & \left| \lambda_0 + \frac{1}{2}; J \right\rangle = a^{J\dagger} |\lambda_0\rangle \\
 & |\lambda_0 + 1; J, K\rangle = a^{J\dagger} a^{K\dagger} |\lambda_0\rangle \\
 & \quad \vdots \\
 & \left| \lambda_0 + \frac{\mathcal{N}}{2} \right\rangle = a^{1\dagger} \dots a^{\mathcal{N}\dagger} |\lambda_0\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Par antisymétrie, il y a  $\binom{\mathcal{N}}{k}$  états distincts d'hélicité  $\lambda_0 + \frac{k}{2}$ .

Comme dans une théorie des champs relativiste,  $CPT = 1$ , et que  $CPT$  change le signe de l'hélicité, il faut en général parfois combiner un supermultiplet et son  $CPT$ -conjugué pour obtenir une représentation physiquement acceptable.

On a donc les représentations suivantes :

**Pour  $\mathcal{N} = 1$**

- Si on part de  $\lambda_0 = 0$ , on a les hélicités  $(0, \frac{1}{2})$ . En ajoutant le  $CPT$ -conjugué, on obtient les hélicités  $(-\frac{1}{2}, 0)$ . Ce multiplet est appelé *multiplet chiral*, et correspond en termes de champs à un spineur de Weyl et un champ scalaire complexe.
- Le *multiplet vectoriel* correspond à  $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ , et comprend donc les hélicités  $(\frac{1}{2}, 1)$ , et  $(-1, -\frac{1}{2})$  pour le  $CPT$ -conjugué. Il correspond à un champ vectoriel de masse nulle (donc un boson de jauge) et un spineur de Weyl, qui se trouve également dans la représentation adjointe du groupe de jauge (afin d'avoir la supersymétrie).
- En répétant cette construction, on obtient à partir de  $\lambda_0 = 1$  des multiplets contenant des hélicités supérieures à 1, et on ne peut écrire de théorie des champs cohérente pour ceux-ci qu'en incluant de la gravitation, qui en l'occurrence sera une théorie de supergravité. Ceci sort du cadre de ce mémoire, et nous ne les considérerons pas ici.

**Pour  $\mathcal{N} = 2$**

- Pour  $\lambda_0 = 0$ , on a les hélicités  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ , et pour le  $CPT$ -conjugué  $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ . Ce multiplet est appelé *multiplet vectoriel  $\mathcal{N} = 2$* , et correspond à un boson de jauge, deux fermions de Weyl et un champ scalaire complexe.
- Le cas correspondant à  $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$  comprend les hélicités  $(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ . S'il n'est pas  $CPT$ -autoconjugué, il faut ajouter une deuxième copie de ce multiplet, et on alors l'*hypermultiplet*.

**Le multiplet  $\mathcal{N} = 4$ .** Si on ne veut pas d'hélicités supérieures à 1, il n'y a qu'une seule possibilité pour  $\mathcal{N} = 4$ . On part de  $\lambda_0 = -1$ , et on a la structure suivante :  $(-1, 4 \times -\frac{1}{2}, 6 \times 0, 4 \times \frac{1}{2}, 1)$ . Il correspond à un boson de jauge, 4 fermions de Weyl, et 3 champs scalaires complexes, tous dans la représentation adjointe. Ce

multiplet est  $CPT$ -autoconjugué. En termes de multiplets  $\mathcal{N} = 2$ , c'est la somme d'un multiplet vectoriel et d'un hypermultiplet dans la représentation adjointe.

C'est ce multiplet qui va nous intéresser plus particulièrement dans ce mémoire, et on va construire dans les deux sections suivantes une action pour les champs qui le composent.

## 3.2. L'action de Super-Yang-Mills

On connaît par la section précédente le contenu en champs que doit avoir le supermultiplet  $\mathcal{N} = 4$ . Il est toutefois peu évident de construire à la main une action supersymétrique pour ces champs : les interactions entre les différents champs sont contraintes par la supersymétrie (si le couplage n'est pas bon, la théorie ne sera pas supersymétrique), et difficiles à deviner. De plus, l'approche en termes du superspace<sup>5</sup>  $\mathcal{N} = 1$  n'est pas adaptée car la  $R$ -symétrie n'est alors pas manifeste. On va donc suivre une approche légèrement détournée (qui remonte à [21]) : on va commencer par construire l'action de Yang-Mills supersymétrique  $\mathcal{N} = 1$ , puis on va voir que l'on peut déduire l'action pour  $\mathcal{N} = 4$  en 4 dimensions, qui est celle qui nous intéresse, à partir de l'action  $\mathcal{N} = 1$  en 10 dimensions.

Le contenu en champs du supermultiplet vectoriel est, d'après ce qu'on a vu dans la section précédente, un champ de jauge  $A_\mu$  et un spineur  $\Psi$ . On va écrire l'action la plus simple pour ces champs, qui se révélera être supersymétrique pour certaines dimensions.

On se place d'abord dans  $\mathbb{R}^4$ , où l'analyse faite précédemment pour la supersymétrie est valable. On commence par choisir un groupe de jauge  $G$ . Ce groupe de jauge doit être compact afin que son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  admette une forme bilinéaire invariante sous l'action adjointe du groupe qui soit définie positive.

Ensuite, on considère un champ de jauge  $A_\mu$ . Mathématiquement, il s'agit d'une 1-forme de connexion dans la base du fibré principal  $\mathbb{R}^4 \times G$  : c'est une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe de jauge,<sup>6</sup> et telle que sous un changement de trivialisatation du fibré (i.e. sous une transformation de jauge) donné dans les fibres par l'application  $\Lambda : \mathbb{R}^4 \rightarrow G$ , on ait

$$A_\mu(x) \rightarrow \Lambda(x)^{-1} A_\mu(x) \Lambda(x) + \Lambda(x)^{-1} \partial_\mu \Lambda(x). \quad (3.19)$$

On construit un terme cinétique pour ce champ à partir de la 2-forme de courbure  $F$  :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (3.20)$$

---

5. Il n'y a pas de formulation du superspace  $\mathcal{N} = 4$  avec un nombre fini de champs auxiliaires. Ceci est lié au problème de la fermeture *off-shell* de l'algèbre de supersymétrie, problème sur lequel nous reviendrons dans le chapitre suivant.

6. Dans les notations, on a considéré un groupe matriciel. Ceci n'est pas réellement nécessaire, mais on écrit les choses dans un souci de simplicité comme si on avait affaire à des matrices plutôt que d'écrire des  $Ad_\Lambda$ , etc.

qui est une 2-forme à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ , et se transforme sous transformation de jauge comme

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^{-1} F_{\mu\nu} \Lambda. \quad (3.21)$$

Si on définit la différentielle extérieure covariante  $D = d + [A, \cdot]$ , alors  $F$  obéit à l'identité de Bianchi :

$$DF = 0 \quad \text{ou en composantes} \quad D_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0. \quad (3.22)$$

Le terme cinétique est alors donné par  $-\text{Tr} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , où on a monté les indices avec la métrique de Minkowski  $\eta^{\mu\nu}$ , et  $(A, B) = -\text{Tr}(AB)$  est une forme bilinéaire invariante définie positive<sup>7</sup> sur  $\mathfrak{g}$ .

Quant au fermion, on prend un spineur de Weyl  $\psi$  gauche :  $P_L \psi = \psi$  où  $P_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$ , et  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1 \cdots \gamma^3$ . On construit alors le terme cinétique pour  $\psi$  habituel :

$$-\text{Tr} \left( -\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi \right), \quad (3.23)$$

où  $D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + [A_\mu, \psi]$  est la dérivée covariante<sup>8</sup> (de jauge). L'action est alors

$$S_{SYM_4} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \int d^4x \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi \right), \quad (3.24)$$

où  $g_{YM}$  est la constante de couplage de la théorie. On peut alors montrer que cette action est effectivement supersymétrique en 4 dimensions, si on définit des transformations adaptées. Ce n'est pas ce qui nous intéresse ici : on veut construire une action similaire en dimension 10, qui soit aussi supersymétrique.

### 3.3. Supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ en dimension 10

L'action que l'on a construite ne peut pas être supersymétrique en dimension 10 simplement en intégrant sur  $\mathbb{R}^{10}$  et en étendant les indices de 0 à 9. En effet, un fermion de Weyl a  $2^4 = 16$  composantes réelles indépendantes lorsque les équations du mouvement sont satisfaites (l'équation de Dirac est du premier ordre, et tue la moitié des composantes), alors que qu'un champ de jauge a  $10 - 2 = 8$  composantes indépendantes lorsque les équations du mouvement sont satisfaites (l'invariance de jauge tue un degré de liberté, la relation de dispersion  $p^2 = 0$  tue l'autre). La règle « #degrés de liberté bosoniques = #degrés de liberté fermioniques » (lemme 3.2) n'est donc pas satisfaite. Il faut réduire de moitié le nombre de composantes fermioniques. Ceci peut être fait en dimension 10, en imposant en plus de la condition de Weyl sur le fermion, la condition de Majorana,

7. On prend ici le signe  $-$  car les éléments de  $\mathfrak{g}$  sont pris antihermitiens,  $A^\dagger = -A \quad \forall A \in \mathfrak{g}$ .

8. On peut voir  $\psi$  comme une 0-forme à valeurs dans un fibré vectoriel associé au fibré de jauge par la représentation adjointe, et alors  $D$  est bien la différentielle extérieure covariante définie plus haut.

pour obtenir un fermion de Majorana–Weyl (voir la section A.4 pour plus de détails). On impose la même condition sur les supercharges : au lieu d’avoir 32 supercharge, on n’en a plus que 16, soit le même nombre qu’en supersymétrie  $\mathcal{N} = 4$  en dimension 4. C’est la raison pour laquelle on considère la théorie en dimension 10.

Avec les notations de la section A.4,  $M, N = 0, \dots, 9$ , on a l’action

$$S_{SYM_{10}} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \int d^4x \left( \frac{1}{2} F_{MN} F^{MN} - \Psi \Gamma^M D_M \Psi \right). \quad (3.25)$$

On va montrer que cette action est supersymétrique pour des transformations bien choisies.

Une propriété qui se révélera utile est la suivante : comme la trace fournit une forme bilinéaire invariante, on peut intégrer par parties la dérivée covariante dans l’action (3.25). En effet,

$$\text{Tr} X^M D_M Y = \text{Tr}(X^M \partial_M Y + X^M [A_M, Y]) \quad (3.26)$$

$$= \text{Tr}(\partial_M (X^M Y) - \partial_M X^M Y - [A_M, X^M] Y) \quad (3.27)$$

$$= \text{Tr}(-D_M X^M) + \partial_M \text{Tr}(X^M Y). \quad (3.28)$$

### 3.3.1. Transformations de supersymétrie

On définit les transformations suivantes :

$$\delta_\varepsilon A_M = \varepsilon \Gamma_M \Psi \quad (3.29)$$

$$\delta_\varepsilon \Psi = \frac{1}{2} \Gamma^{MN} \varepsilon F_{MN}. \quad (3.30)$$

Ces transformations sont impaires : contrairement à l’usage,  $\varepsilon$  est un spineur pair (donc qui commute avec les champs et les transformations) et qui définit une combinaison linéaire des supercharges, la transformation  $\delta_\varepsilon$  correspondant à la supercharge  $\varepsilon^\alpha Q_\alpha$ .

Le but du jeu est maintenant de montrer que pour l’action (3.25), on a  $\delta_\varepsilon S_{SYM_{10}} = 0$ . On a d’abord

$$\delta_\varepsilon F_{MN} = \partial_M \delta_\varepsilon A_N - \partial_N \delta_\varepsilon A_M + [\delta_\varepsilon A_M, A_N] + [A_M, \delta_\varepsilon A_N] \quad (3.31)$$

$$= \partial_M (\varepsilon \Gamma_N \Psi) - \partial_N (\varepsilon \Gamma_M \Psi) + [\varepsilon \Gamma_M \Psi, A_N] + [A_M, \varepsilon \Gamma_N \Psi] \quad (3.32)$$

$$= D_M (\varepsilon \Gamma_N \Psi) - D_N (\varepsilon \Gamma_M \Psi), \quad (3.33)$$

et donc,

$$\delta_\varepsilon \left( \frac{1}{2} F_{MN} F^{MN} \right) = (D_M (\varepsilon \Gamma_N \Psi) - D_N (\varepsilon \Gamma_M \Psi)) F^{MN} \quad (3.34)$$

$$= 2D_M (\varepsilon \Gamma_N \Psi) F^{MN} = -2\varepsilon \Gamma_N \Psi D_M F^{MN}, \quad (3.35)$$

où on a intégré par partie et laissé tomber la dérivée totale (tous les termes considérés sont dans la trace de l'intégrale, que l'on n'a pas écrites). Pour le terme fermionique, on a :<sup>9</sup>

$$\delta_\varepsilon(-\Psi\Gamma^M D_M\Psi) = 2\Psi\Gamma^M D_M\delta_\varepsilon\Psi + \Psi\delta_\varepsilon D_M\Psi \quad (3.36)$$

$$= \Psi\Gamma^M D_M(\Gamma^{PN}\varepsilon F_{PN}) + \Psi[\varepsilon\Gamma^M\Psi, \Psi]. \quad (3.37)$$

En utilisant (A.14), le premier terme devient :

$$\Psi\Gamma^M\Gamma^{PN}\varepsilon D_M F_{PN} = \Psi\Gamma^{MPN}\varepsilon D_M F_{PN} + \eta^{MP}\Psi\Gamma^N\varepsilon D_M F_{PN} - \eta^{MN}\Psi\Gamma^P\varepsilon D_M F_{PN} \quad (3.38)$$

$$= 0 + 2\Psi\Gamma^N\varepsilon D_M F^M{}_N \quad (3.39)$$

en utilisant l'identité de Bianchi (3.22) et l'antisymétrie de  $F_{MN}$ . Ce terme compense le terme (3.35), et on a donc

$$\delta_\varepsilon S_{SYM_{10}} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \int d^4x \Psi[\varepsilon\Gamma^M\Psi, \Psi]. \quad (3.40)$$

### 3.3.2. L'identité miraculeuse

L'action est invariante sous supersymétrie, à condition que

$$\text{Tr}(\Psi\Gamma^M[(\varepsilon\Gamma_M\Psi), \Psi]) = 0, \quad \text{ou encore} \quad (3.41)$$

$$(\Psi^i\Gamma^M\Psi^j)(\varepsilon\Gamma_M\Psi^k)c_{ijk} = 0 \quad (3.42)$$

où les  $i, j, k = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$  sont des indices de jauge, et  $c_{ijk}$  sont les constantes de structure totalement antisymétriques.

Assez étonnamment,<sup>10</sup> cette expression est identiquement nulle, et l'action est donc supersymétrique en 10 dimensions.

**Théorème 3.3** (Identité miraculeuse). *Soient  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  et  $\varepsilon$  des spineurs de Majorana–Weyl en dimension 10, les  $\Psi$  étant des éléments pairs et  $\varepsilon$  un élément impair de l'algèbre. Alors*

$$(\Psi_1\Gamma^M\Psi_2)(\varepsilon\Gamma_M\Psi_3) = 0$$

*Démonstration.* Une identité de ce type est valable en dimension  $d = 3, 4, 6$  et 10 pour des spineurs particuliers (Majorana ou Majorana–Weyl selon les dimensions), et peut être reliée à l'existence des algèbres de division normée<sup>11</sup> (*normed division algebra*) en

9. Les signes dans le membre de droite proviennent de la parité de  $\delta_\varepsilon$ .

10. A priori. Pour le lecteur de ce mémoire, ce n'est pas très étonnant sinon cette section n'aurait pas de raison d'être.

11. Une telle algèbre est une algèbre réelle où tous les éléments non nuls sont inversibles et la norme est compatible avec la multiplication :  $|xy| = |x||y|$  pour tout  $x, y$  dans l'algèbre.

dimension  $d - 2$ , à savoir respectivement les réels  $\mathbb{R}$ , les complexes  $\mathbb{C}$ , les quaternions  $\mathbb{H}$  et finalement les octonions  $\mathbb{O}$ . Dans ces dimensions, il existe donc une théorie de super-Yang–Mills pure (avec uniquement le champ de Yang–Mills et un fermion dans la représentation adjointe). Une preuve générale peut en être trouvée dans [22], mais nous allons ici donner une preuve plus directe, et qui permettra en même temps de développer des méthodes de calcul utiles pour la suite de ce mémoire.

On va utiliser l'identité de Fierz (A.24). Si on revient à des notations de spineurs de Dirac, on a (avec un léger abus de notation consistant à indiquer par le même symbole le spineur de Dirac à 32 composantes et le spineur de Weyl à 16 composantes) :

$$\left(\bar{\Psi}_{[1}\gamma^M\Psi_2\right)\left(\bar{\varepsilon}\gamma_M\Psi_3\right)=\left(\bar{\Psi}_{[1}\left(\gamma^M\Psi_2\right)\right)\left(\overline{\gamma_M\varepsilon}\Psi_3\right)\quad(3.43)$$

$$=-\frac{1}{32}\sum_{k=0}^{10}\left(\bar{\Psi}_{[1}\gamma^{N_1\dots N_k}\Psi_3\right)\left(\bar{\varepsilon}\gamma_M\gamma_{N_k\dots N_1}\gamma^M\Psi_2\right).\quad(3.44)$$

Comme tous les spineurs qui interviennent sont des spineurs de Weyl de même chiralité, il faut que  $k$  soit impair pour que le terme d'ordre  $k$  dans la somme soit non nul. Comme ces spineurs sont aussi des spineurs de Majorana, on a par (A.29),

$$\bar{\Psi}_{[1}\gamma^{N_1\dots N_k}\Psi_3]=\Psi_{[1}^T C\gamma^{N_1\dots N_k}\Psi_3]=- \Psi_{[3}^T(C\gamma^{N_1\dots N_k})^T\Psi_{1}].\quad(3.45)$$

Comme on antisymétrise sur les deux spineurs, on aura une contribution nulle si  $C\gamma^{N_1\dots N_k}$  est antisymétrique. Par (A.28),  $k$ , en plus d'être impair, ne peut ainsi pas valoir 3 et 7. Le cas  $k = 5$  est nul par l'équation (A.19). Il reste donc à considérer uniquement  $k = 1, 9$ .

On a par (A.19),

$$\gamma_M\gamma_N\gamma^M=-8\gamma^N\quad\text{et}\quad\gamma_M\gamma_{N_9\dots N_1}\gamma^M=8\gamma_{N_9\dots N_1}=8\gamma_{N_1\dots N_9}.\quad(3.46)$$

D'autre part  $\gamma_{M_1\dots M_{10}}$  est totalement antisymétrique en  $\gamma^0\dots\gamma^9$ , et donc proportionnel à  $\gamma^{11}$ . En regardant pour une permutation donnée, puis en comptant les permutations, on voit que

$$\gamma^{11}=-\frac{1}{10!}\epsilon^{M_1\dots M_{10}}\gamma_{M_1\dots M_{10}}.\quad(3.47)$$

Donc,

$$\gamma_N\gamma^{11}=-\frac{1}{10!}\epsilon^{M_1\dots M_{10}}10\eta_{NM_1}\gamma_{M_2\dots M_{10}}=-\frac{1}{9!}\epsilon_N^{M_2\dots M_{10}}\gamma_{M_2\dots M_{10}},\quad(3.48)$$

et

$$\gamma_{N_1\dots N_9}\gamma^{11}=-\epsilon_{N_1\dots N_9}^M\gamma_M.\quad(3.49)$$

Comme on a affaire à des spineurs de Weyl gauches, et que  $\gamma^{11}$  agit comme l'identité sur ceux-ci, on trouve alors

$$\left(\bar{\Psi}_{[1}\gamma^{N_1\dots N_9}\Psi_3\right)\left(\bar{\varepsilon}\gamma_{N_1\dots N_9}\Psi_2\right)=-\left(\bar{\Psi}_{[1}\gamma^M\Psi_3\right)\left(\bar{\varepsilon}\gamma_M\Psi_2\right).\quad(3.50)$$

On obtient le résultat annoncé, car en remettant tout ensemble,

$$\left(\bar{\Psi}_{[1}\gamma^M\Psi_2\right)\left(\bar{\varepsilon}\gamma_M\Psi_3\right)=\frac{1}{4}\left[\left(\bar{\Psi}_{[1}\gamma^M\Psi_3\right)\left(\bar{\varepsilon}\gamma_M\Psi_2\right)+\left(\bar{\Psi}_{[1}\gamma^M\Psi_2\right)\left(\bar{\varepsilon}\gamma_M\Psi_3\right)\right] \quad (3.51)$$

$$\implies \left(\bar{\Psi}_{[1}\gamma^M\Psi_2\right)\left(\bar{\varepsilon}\gamma_M\Psi_3\right)=0. \quad (3.52)$$

□

### 3.4. Supersymétrie $\mathcal{N} = 4$ en dimension 4

À partir de l'action à 10 dimensions, on peut déduire une autre action en dimension 4 par la méthode dite de réduction dimensionnelle.<sup>12</sup> En effet, l'action (3.25) a un sens également si on impose des contraintes sur les champs. Étant donné qu'on veut trouver une action en dimension 4, les champs doivent dépendre de 4 coordonnées uniquement. On impose donc aux champs de dépendre uniquement des coordonnées  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, 4$ , c'est-à-dire qu'ils prennent leurs valeurs sur un sous-espace de  $\mathbb{R}^{10}$ . On a  $\partial_A X^I = 0$ ,  $A = 0, 5, \dots, 9$  pour tous les champs  $X^I$  de la théorie.

Les seules symétries permises sont celles qui préservent le sous-espace. L'algèbre de Lorentz est donc brisée :  $so(9, 1) \rightarrow so(4) \oplus so(5, 1)$ . Le facteur  $so(4)$  correspond à la symétrie d'espace-temps (euclidien) à 4 dimensions, le facteur  $so(5, 1)$  correspond à une symétrie interne de la théorie, que l'on va identifier à la  $R$ -symétrie.

Les champs se décomposent également. Comme  $A_M$  est un champ vectoriel, sa décomposition est simple :  $A_M = (A_\mu, A_B)$ ,  $B = 0, 5, \dots, 9$ , et comme les composantes  $A_B$  ne se transforment pas sous une transformation d'espace-temps, ce sont des champs scalaires (réels car le champ  $A_M$  l'est), que l'on note  $\Phi_B$ . Les  $\Phi_B$  se transforment entre eux par le facteur  $so(5, 1)$  interne. Pour le champ  $\Psi$ , la réduction dimensionnelle est moins évidente, car la façon dont ses composantes se transforment sous la décomposition de  $spin(9, 1)$  en  $spin(4) \oplus spin(5, 1)$  est moins transparente. En choisissant une base des matrices  $\Gamma^M$  adaptée à la décomposition, et en agissant avec les générateurs de chaque facteur sur  $\Psi$ , on identifie les 16 composantes de  $\Psi$  comme 4 fermions de Weyl gauches et 4 fermions de Weyl droits sous  $so(4)$ . Les 4 spineurs gauches se transforment entre eux sous la représentation  $\mathbf{4}$  de  $spin(5, 1)$ , et les 4 spineurs droits sous la complexe conjuguée  $\bar{\mathbf{4}}$ . Ceci est parfaitement cohérent avec l'interprétation de  $spin(5, 1)$  comme l'algèbre de  $R$ -symétrie : les 16 supercharges qui forment un spineur de Majorana–Weyl  $\mathcal{Q}$  en 10 dimensions correspondent du point de vue quadri-dimensionnel à 4 spineurs gauches  $Q_I$  et 4 spineurs droits  $\bar{Q}^I$ , et les  $\bar{Q}^I$  se transforment sous  $R$ -symétrie dans la complexe conjuguée de la transformation des  $Q_I$ . On a donc affaire à une supersymétrie  $\mathcal{N} = 4$  en 4 dimensions.

12. La réduction dimensionnelle n'est pas faite dans les détails, car le calcul est plutôt long ( $\sim 10$  pages à la main), et du même genre que dans le chapitre 5. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter l'article original [21] ou la revue [19].

### 3. Supersymétrie $\mathcal{N} = 4$

---

Ensuite, on décompose l'action. Le terme cinétique du champ de jauge est facile à traiter :

$$\frac{1}{2}F_{MN}F^{MN} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu A}F^{\mu A} + \frac{1}{2}F_{AB}F^{AB}, \quad (3.53)$$

où les différents termes sont :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (3.54)$$

$$F_{\mu A} = \partial_\mu \Phi_A + [A_\mu, \Phi_A] = D_\mu \Phi_A \quad (3.55)$$

$$F_{AB} = [\Phi_A, \Phi_B]. \quad (3.56)$$

On a aussi

$$\Gamma^M D_M \Psi = \Gamma^\mu D_\mu \Psi + \Gamma^A [\Phi_A, \Psi]. \quad (3.57)$$

Si on décompose  $\Psi$  en les spineurs de dimension 4 qui le composent, on obtient alors après un peu de travail une action pour la théorie de Yang–Mills supersymétrique  $\mathcal{N} = 4$ , qui contient en plus des termes cinétiques pour  $A_\mu, \Phi_A$ , et les fermions gauches  $\lambda_I^\alpha$  et droits  $\bar{\chi}_\alpha^I$  :

- des couplages à 4 scalaires provenant de  $F_{AB}F^{AB}$  donnés par  $[\Phi_A, \Phi_B][\Phi^A, \Phi^B]$  ;
- des couplages de Yukawa provenant de  $\Psi\Gamma^A D_A \Psi$ , et donnés par  $\lambda_I(\Sigma_A)^{IJ}[\Phi^A, \lambda_J]$  et  $\bar{\chi}^I(\Sigma_A)_{IJ}[\Phi^A, \bar{\chi}^J]$ , où les  $\Sigma$  et  $\bar{\Sigma}$  sont des Clebsch–Gordan de  $Spin(5, 1)$  pour  $\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \rightarrow \mathbf{6}$  et  $\bar{\mathbf{4}} \otimes \bar{\mathbf{4}} \rightarrow \mathbf{6}$  respectivement, et qui interviennent explicitement dans les matrices  $\gamma$  en 6 dimensions.

Les constantes de couplage ne sont pas libres, mais fixées par la forme de l'action à 10 dimensions et la procédure de réduction dimensionnelle.

On peut faire de la même façon la réduction dimensionnelle pour les transformations de supersymétrie, et on obtient alors des formules qui lient tous les champs bosoniques à tous les champs fermioniques.

D'après cette brève discussion, on constate qu'il n'aurait pas été facile d'arriver à l'action pour la supersymétrie  $\mathcal{N} = 4$  en essayant de deviner la forme des couplages, et encore plus compliqué de montrer qu'une telle action est bien supersymétrique. L'approche suivie permet de contourner tous ces obstacles, et d'offrir par ailleurs une notation plus condensée : on sait que l'action  $\mathcal{N} = 4$  provient de l'action  $\mathcal{N} = 1$  en dimension 10, et on peut donc la noter de façon équivalente avec les notations de dimension 10,

$$S_{\mathcal{N}=4} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \int d^4x \left( \frac{1}{2} F_{MN} F^{MN} - \Psi \Gamma^M D_M \Psi \right), \quad (3.58)$$

à condition d'imposer la contrainte  $\partial_A = 0$  sur les champs. C'est ce qu'on fera dans la suite, où on écrira cependant  $A_M = (A_\mu, \Phi_A)$ .

## 3.5. Invariance superconforme

Une propriété importante de l'action  $\mathcal{N} = 4$  est qu'elle présente une invariance conforme. Classiquement, ceci découle de l'absence de terme de masse dans l'action, qui est donc

invariante sous dilatations  $X \rightarrow \lambda x$ , et que l'on peut étendre en une invariance sous tout le groupe conforme. En général, l'invariance conforme est brisée au niveau quantique par une anomalie. Ceci n'est pas le cas ici : il existe une phase où la symétrie conforme est une symétrie exacte de la théorie quantique [23].

Cette symétrie conforme étend l'algèbre de supersymétrie en une algèbre superconforme. En effet, l'algèbre superconforme étend l'algèbre de Poincaré (3.1). On ajoute de nouveaux générateurs  $K_\mu$  et  $D$ , qui engendrent respectivement les transformations conformes spéciales

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2x^\nu a_\nu + a^2 x^2} \quad (3.59)$$

et les dilatations  $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ . Remarquons que les transformations conformes spéciales sont singulières, le dénominateur s'annulant en  $x^\mu = -\frac{a^\mu}{a^2}$ . Les nouvelles relations de commutation sont<sup>13</sup> [24, 19]

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = -i(\delta_{\mu\rho} - \delta_{\nu\rho} K_\mu) \quad [M_{\mu\nu}, D] = 0 \quad (3.60)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2iM_{\mu\nu} - 2i\delta_{\mu\nu} D \quad [D, P_\mu] = -iP_\mu \quad (3.61)$$

$$[D, K_\mu] = iK_\mu. \quad (3.62)$$

Ceci permet d'étendre l'algèbre de supersymétrie en une algèbre superconforme : de la même manière que l'anticommutateur d'une supercharge de supersymétrie  $Q_{\alpha I}$  avec son hermitien conjugué correspond à une translation  $P_\mu$ , l'anticommutateur d'une supercharge  $S_\alpha^I$  (appelée transformation superconforme spéciale) avec son hermitien conjugué est une transformation conforme spéciale  $K_\mu$ . On a ainsi 32 supercharges, et les supercharges additionnelles se révéleront importantes.

Symboliquement, les relations de commutation additionnelles sont<sup>14</sup>

$$[D, Q] = -\frac{i}{2}Q \quad [D, S] = \frac{i}{2}S \quad [K, Q] \sim S \quad (3.63)$$

$$[P, S] \sim Q \quad \{S, S\} \sim K \quad \{Q, S\} \sim M + D + R \quad (3.64)$$

L'action est automatiquement invariante sous transformations superconformes si elle est invariante pour la supersymétrie et pour les transformations conformes : il suffit de définir les supercharges  $S$  à partir du commutateur de  $K_\mu$  avec  $Q_{\alpha I}$ . Explicitement,

$$\{Q_{\alpha I}, K_\mu\} = -i(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{S}_I^{\dot{\beta}}. \quad (3.65)$$

et de manière similaire pour  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I$  et  $S_\alpha^I$ .

Plutôt que par l'algèbre, nous sommes intéressés par la représentation explicite des transformations superconformes sur les champs de la théorie. On définit le spineur de Majorana–Weyl en 10 dimensions  $\varepsilon(x)$  par

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_s + x^\mu \tilde{\Gamma}_\mu \varepsilon_c, \quad (3.66)$$

13. La métrique est définie positive avec la réduction dimensionnelle que l'on a faite.

14. Elles sont détaillées par exemple dans [25], mais nous n'aurons pas vraiment besoin de leur forme exacte, qui est relativement longue, dans ce mémoire.

### 3. Supersymétrie $\mathcal{N} = 4$

---

où  $\varepsilon_s$  et  $\varepsilon_c$  sont deux spineurs de Majorana–Weyl respectivement gauche et droit, qui paramétrisent respectivement une transformation de supersymétrie et une transformation superconforme spéciale. On constate que  $\partial_\mu \varepsilon = \tilde{\Gamma}_\mu \varepsilon_c$  et est donc une constante. Avec cette définition, les transformations

$$\delta_\varepsilon A_M = \varepsilon \Gamma_M \Psi \quad (3.67)$$

$$\delta_\varepsilon \Psi = \frac{1}{2} F_{MN} \Gamma^{MN} \varepsilon + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \partial_\mu \varepsilon \quad (3.68)$$

laissent l'action invariante. En effet, la variation de  $F_{MN}$  garde exactement la même forme (3.35) que dans le cas où  $\varepsilon$  est constant et paramétrise une supersymétrie, alors que les termes en  $\partial_\mu \varepsilon$  dans la variation de  $D_\mu \Psi$ , s'annulent en utilisant (A.18) précisément grâce au terme supplémentaire en  $\partial_\mu \varepsilon$  dans (3.68).

## 4. La théorie sur la sphère

Les transformations conformes et superconformes jouent un rôle important dans la théorie, et on verra au chapitre suivant que l'opérateur  $Q$  dont la cohomologie intervient dans la procédure de localisation est une combinaison de transformations supersymétriques (de Poincaré) et superconformes. Étant donné que les transformations conformes ne sont bien définies que sur  $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ , les transformations conformes spéciales échangeant un point de  $\mathbb{R}^4$  avec le point à l'infini, il faut définir la théorie sur cet espace, c'est-à-dire la sphère  $S^4$ .

Ceci est l'objet des deux premières sections. Après avoir défini la théorie sur la sphère, on peut alors étudier le carré des transformations de supersymétrie afin de trouver sous quelles conditions elles s'annulent, ce qui est nécessaire pour la localisation (dans le langage du chapitre 2, ceci permet de trouver la sous-algèbre équivariante). Ceci est l'objet de la section 4.3. Enfin, après tout ce travail technique, on définit la boucle de Wilson dans la dernière section et on regarde quelle combinaison des supercharges elle préserve (i.e. pour quelles transformations elle est fermée).

### 4.1. La sphère : généralités

#### 4.1.1. Coordonnées stéréographiques

On va mettre des coordonnées sur la sphère de rayon  $r$ ,  $S^4 = \{(y^i) \in \mathbb{R}^5 \mid y^i y^i = r^2\}$ , en faisant une projection stéréographique à partir du pôle sud. L'ouvert de carte est  $S^4 \setminus \{p_s\}$  où  $p_s$  est le pôle sud de la sphère. On note les coordonnées comme sur la figure 4.1. Les deux triangles rectangles indiqués sur la figure sont semblables, et donc <sup>1</sup>

$$\frac{x^\mu}{2r} = \frac{y^\mu}{r + y^5} \implies y^\mu = \left(1 + \frac{y^5}{r}\right) \frac{x^\mu}{2}. \quad (4.1)$$

Comme  $y^i y^i = r^2$ , on a  $y^\mu y^\mu = r^2 - (y^5)^2$  d'où l'on tire en utilisant (4.1)

$$\frac{y^5}{r} = \frac{1 - \frac{x^2}{4r^2}}{1 + \frac{x^2}{4r^2}}, \quad (4.2)$$

où on prend le carré de  $x^\mu$  avec la métrique plate de  $\mathbb{R}^4$  :

$$x^2 = \sum_{\mu=1}^4 x^\mu x^\mu \quad (4.3)$$

---

1. Le facteur 1/2 inhabituel se révélera plus commode dans la suite.

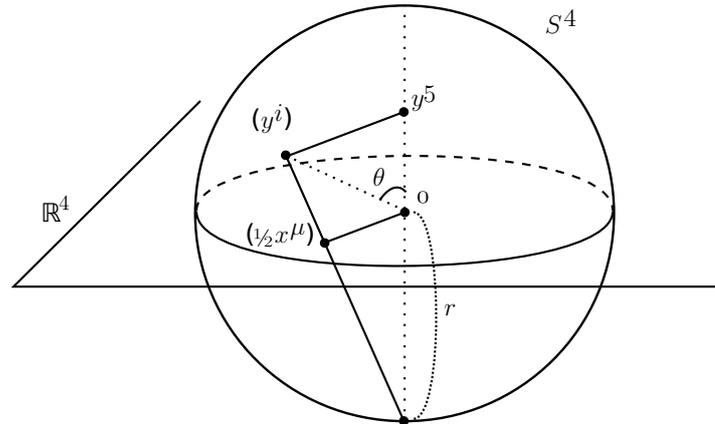


FIGURE 4.1. : La sphère  $S^4$  de rayon  $r$ . Les coordonnées  $y^i, i = 1, \dots, 5$  sont les coordonnées sur  $\mathbb{R}^5 \supset S^4$ , les  $x^\mu, \mu = 1, \dots, 4$  sont les coordonnées stéréographiques sur la sphère.

que l'on note aussi  $x^2 = x^\mu x_\mu = \delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$  pour des raisons qui vont apparaître plus loin.

On a ainsi défini l'application de coordonnées  $\varphi : S^4 \setminus \{p_s\} \rightarrow \mathbb{R}^4$  où  $\varphi(y^\mu) = x^\mu$  selon (4.1) et  $\varphi(y^5)$  est donné par (4.2).

Il sera aussi utile plus tard de définir l'angle polaire  $\theta$ , qui satisfait à

$$\cos \theta = \frac{y^5}{r} = \frac{1 - \frac{x^2}{4r^2}}{1 + \frac{x^2}{4r^2}}. \quad (4.4)$$

Remarquons que l'équateur est en  $\theta = 0$ , ou encore en  $x^2 = 4r^2$ .

### 4.1.2. Métrique sur la sphère

On veut trouver la métrique sur la sphère induite par le plongement  $S^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$  où  $\mathbb{R}^5$  est muni de la métrique plate euclidienne usuelle (que l'on a d'ailleurs déjà utilisée sans le dire pour trouver les coordonnées sur la sphère).

On a pour  $\mathbb{R}^4$  que  $ds^2 = (dy^i)^2 = (dy^5)^2 + (dy^\mu)^2$ . En utilisant les expressions pour  $y^5$  et  $y^\mu$  dans les coordonnées stéréographiques trouvées juste au-dessus, on trouve après un calcul simple que la métrique sur la sphère s'écrit

$$g = ds^2 = \frac{dx^2}{\left(1 + \frac{x^2}{4r^2}\right)^2}. \quad (4.5)$$

Cette métrique a la propriété d'être conformément plate, ce qui sera fort utile.

**Définition 4.1.** Soit  $(M, g)$  une variété (pseudo-)riemannienne. Alors,  $g$  est conformément équivalente à  $\hat{g}$  s'il existe une fonction  $\Omega \in C^\infty(M)$  appelée facteur conforme telle

que

$$g_p = e^{2\Omega(p)} \hat{g}_p$$

et la transformation  $\hat{g} \rightarrow g$  est appelée transformation de Weyl.

Une métrique conformément équivalente à la métrique plate est dite conformément plate.

Comme la métrique sur la sphère dans les coordonnées stéréographiques est conformément plate, avec le facteur conforme donné par

$$e^{2\Omega(x)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{4r^2}\right)^2}, \quad (4.6)$$

on va pouvoir trouver la théorie sur la sphère à partir de la théorie sur  $\mathbb{R}^4$  en définissant de nouveaux champs  $A_\mu, \Phi^A, \Psi$  reliés aux anciens champs sur  $\mathbb{R}^4$  par la transformation de Weyl d'une manière que l'on va préciser plus loin.

## 4.2. Transformation de Weyl

### 4.2.1. Champs sur un espace courbe

Étant donné que la transformation de Weyl est une transformation sur la métrique, il faut écrire l'action de manière à faire intervenir la métrique explicitement. De plus, l'action doit avoir un sens intrinsèque et ne peut dépendre du choix de coordonnées, donc il faut écrire des termes qui sont invariants sous changements de coordonnées.

#### La forme volume

Le volume d'intégration est le volume riemannien, que l'on peut écrire explicitement comme

$$dvol = \sqrt{\det g(x)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^4 \quad \text{noté} \quad \sqrt{g} d^4x. \quad (4.7)$$

#### Les termes bosoniques

Il suffit d'écrire la dépendance explicite en la métrique. Par exemple

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (4.8)$$

Comme les  $\Phi^A$  sont des champs scalaires, c'est-à-dire que les  $\Phi^A$  sont des fonctions, la dérivée ordinaire pour ces champs coïncide avec la dérivée de Levi-Civita, et il ne faut donc pas modifier le terme cinétique pour  $\Phi$ . Il ne faut pas non plus modifier les dérivées sur les  $A_\mu$  dans  $F_{\mu\nu}$ , car la connexion de Levi-Civita est symétrique et la différentielle extérieure covariante (de Levi-Civita) coïncide donc avec la différentielle extérieure sur ceux-ci.

### Le terme fermionique

Ici, il va falloir modifier la dérivée covariante de jauge pour prendre en compte les changements de coordonnées pour les fermions.

On sait que sur  $\mathbb{R}^m$ , un fermion  $\Psi$  se transforme selon

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x) \quad (4.9)$$

où  $S(\Lambda)$  est l'opérateur (ou plutôt l'un des deux opérateurs) de la rotation  $\Lambda \in SO(m)$  dans la représentation spinorielle  $Spin(m)$ .

Si on considère un fermion sur une variété  $M$ , on peut faire des transformations de coordonnées plus générales :

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = S(\Lambda(x))\Psi(x) \quad (4.10)$$

où cette fois-ci, la rotation  $\Lambda(x)$  peut dépendre des coordonnées  $x$  du point sur la variété.

Mathématiquement, le champ spinoriel n'est plus une fonction  $M \rightarrow V$  où  $V$  est l'espace vectoriel de la représentation spinorielle, mais de manière analogue à un champ de vecteurs, devient une section d'un fibré vectoriel  $\pi : \mathcal{S} \rightarrow M$  de fibre  $\pi^{-1}(p) = \mathcal{S}_p \cong V$  appelé fibré spinoriel. On peut alors prendre différentes trivialisations locales du fibré : il n'y a pas de façon naturelle d'écrire le fibré restreint à un ouvert  $U$  suffisamment petit de  $M$ ,  $\mathcal{S}|_U = \pi^{-1}(U)$  de façon triviale  $\mathcal{S}|_U \cong U \times V$ . Les différentes trivialisations locales possibles pour ce fibré sont liées par des transformations de  $Spin(m)$  dans les fibres  $V$ .<sup>2</sup>

Comme  $\Psi$  est une section du fibré  $\mathcal{S}$ , il faut introduire une connexion sur  $\mathcal{S}$  pour pouvoir la dériver de manière covariante. La connexion que l'on veut mettre sur  $\mathcal{S}$  est celle induite par la connexion de Levi-Civita sur  $TM$ , et est appelée connexion de spin. Voici brièvement comment on procède.<sup>3</sup>

Dans une carte  $U$  de coordonnées  $x^\mu$ , on choisit  $m$  sections locales de  $TM$ , que l'on dénote  $e_{\hat{\mu}}, \hat{\mu} = 1, \dots, m$ . Ces sections sont choisies de manière à être orthonormées :

$$g_{\mu\nu}(x)e_{\hat{\mu}}^\mu(x)e_{\hat{\nu}}^\nu(x) = \delta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (4.11)$$

Un tel ensemble de sections est appelé tétrade ou vierbein en dimension 4 ou vielbein en dimension quelconque. On peut introduire la base duale  $e^{\hat{\mu}}$  sur  $T^*M$  telle que

$$e_{\hat{\mu}}^\mu e_{\hat{\nu}}^\nu = \delta_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} \quad (4.12)$$

et on peut vérifier que l'on peut monter et descendre les indices avec la métrique correspondante aux indices ( $g$  pour les indices normaux et  $\delta$  pour les indices avec  $\hat{\phantom{x}}$ ) :

$$e_{\hat{\mu}}^\mu = g_{\mu\nu}\delta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}e_{\hat{\nu}}^\nu. \quad (4.13)$$

---

2. Il y a des obstructions topologiques à la construction d'un fibré vectoriel de groupe de structure  $Spin(m)$  : il faut pouvoir relever les fonctions de transition du fibré des repères orthonormés en des fonctions de transition sur  $Spin(m)$ . La condition à remplir est, outre l'orientabilité de la variété, que la deuxième classe de Stiefel-Whitney de  $M$ ,  $w_2(M) \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$  soit nulle, ce qui est le cas pour la sphère  $S^m$ . Pour plus de détails, voir [9].

3. Le lecteur souhaitant plus de détails est une fois encore renvoyé à [9].

Tous les tenseurs peuvent se réécrire dans la base des  $e_{\hat{\mu}}$ . De même, on peut réécrire les composantes de la connexion de Levi-Civita en termes des  $e_{\hat{\mu}}$  : si on définit

$$\nabla_{e_{\hat{\mu}}} e_{\hat{\nu}} = \Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\rho}} e_{\hat{\rho}}, \quad (4.14)$$

alors on voit facilement que

$$\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\rho}} = e_{\hat{\rho}}^{\hat{\rho}} e_{\hat{\mu}}^{\mu} (\partial_{\mu} e_{\hat{\nu}}^{\rho} + e_{\hat{\nu}}^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) \quad (4.15)$$

où les  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  sont les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita. On définit alors la 1-forme de connexion  $\omega_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}}$  par

$$\omega_{\hat{\nu}\lambda}^{\hat{\mu}} = \Gamma_{\hat{\rho}\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} e_{\lambda}^{\hat{\rho}}, \quad (4.16)$$

et on peut montrer que  $\omega$  a tout ce qui est requis pour être le représentant local d'une connexion. En effet,  $(\omega_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}}) \in \mathfrak{so}(m)$  et sous le changement de sections locales (ou encore, sous changement de trivialisations du fibré tangent)

$$e_{\hat{\mu}}^{\mu}(x) \rightarrow e'_{\hat{\mu}}^{\mu}(x) = e_{\hat{\nu}}^{\mu}(x) (\Lambda^{-1})^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}}(x), \quad (4.17)$$

$\omega$  devient

$$\omega' = \Lambda \omega \Lambda^{-1} + \Lambda^{-1} d\Lambda. \quad (4.18)$$

La connexion  $\omega$  s'appelle la connexion de spin sur  $TM$ . Ce n'est rien d'autre que la connexion de Levi-Civita, mais qui rend manifeste le fait que l'on a une connexion métrique sur un  $SO(m)$ -fibré vectoriel. Ceci permet facilement d'écrire comment cette connexion agit sur un spineur : étant donné que  $\omega_{\mu}(x)$  est un élément de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(m)$ , il suffit de prendre une représentation spinorielle de cette algèbre pour le faire agir sur un spineur :

$$S(\omega_{\lambda}(x))\Psi(x) = \frac{1}{4} \omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}\lambda}(x) \gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \Psi(x) \quad (4.19)$$

où  $\frac{1}{2} \gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{1}{2} \gamma^{[\hat{\mu}} \gamma^{\hat{\nu}]}$  est un générateur (antihermitien) de l'algèbre  $\mathfrak{spin}(m)$  et les  $\gamma^{\hat{\mu}}$  sont les générateurs de l'algèbre de Clifford avec la métrique plate habituelle ( $\{\gamma^{\hat{\mu}} \gamma^{\hat{\nu}}\} = 2\delta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ) qui agissent sur les spineurs dans une trivialisations donnée du fibré spinoriel  $\mathcal{S}$ . On peut donc construire une dérivée covariante  $\nabla$  pour les spineurs,

$$\nabla_{\mu} \Psi(x) = \left( \partial_{\mu} + \frac{1}{4} \omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}\lambda}(x) \gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right) \Psi(x). \quad (4.20)$$

Dans le cas où  $\Psi$  est dans la représentation adjointe du groupe de jauge, c'est-à-dire est une section du fibré  $\mathcal{S} \otimes ad(G)$ , on combine les deux connexions, de Yang-Mills et de spin, dans la dérivée covariante  $D$  :

$$D_{\mu} \Psi(x) = \left( \partial_{\mu} + \frac{1}{4} \omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}\lambda}(x) \gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right) \Psi(x) + [A_{\mu}(x), \Psi(x)]. \quad (4.21)$$

Pour finir la discussion sur les spineurs, notons la propriété suivante : la connexion de spin satisfait à la règle de Leibniz dans l'algèbre des tenseurs-spineurs, à condition de faire agir la connexion sur une section selon ses lois de transformation sous  $Spin(m)$ , c'est-à-dire selon les indices qu'elle porte. Par exemple, si l'on définit  $\gamma^\mu = e_{\hat{\mu}}^\mu \gamma^{\hat{\mu}}$ ,

$$\nabla_\nu \gamma^\mu = \partial_\nu \gamma^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \gamma^\rho + \frac{1}{4} \omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}\nu} [\gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \gamma^\mu] \quad (4.22)$$

car  $\gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\alpha_\beta$  porte deux indices spinoriels. En développant l'expression on obtient la propriété importante que

$$\nabla_\nu \gamma^\mu = 0, \quad (4.23)$$

c'est-à-dire que les  $\gamma^\mu$ , qui engendrent l'algèbre de Clifford pour la métrique courbe  $g^{\mu\nu}$ , sont covariamment constants (ou parallèles).

### L'action en coordonnées quelconques

En remettant le tout ensemble, on obtient l'action de SUSY  $\mathcal{N} = 4$  écrite de manière covariante :

$$S_{\mathbb{R}^4} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} - \Psi \Gamma^M D_M \Psi \right) \quad (4.24)$$

où  $g^{MN}$  est la métrique courbe  $g^{\mu\nu}$  pour  $M, N = 1, \dots, 4$  et  $\eta^{MN}$  sinon, de même pour  $\Gamma^M$ , et la dérivée covariante pour  $\Psi$  fait intervenir la connexion de Yang–Mills, ainsi que la connexion de spin pour  $M = 1, \dots, 4$  selon l'équation (4.21) :

$$D_\mu \Psi(x) = \left( \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}\lambda}(x) \Gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right) \Psi(x) + [A_\mu(x), \Psi(x)]. \quad (4.25)$$

On a ici pris en compte que  $\Psi$  est un fermion de Majorana-Weyl du point de vue 10-dimensionnel, et on peut donc utiliser les  $\Gamma^\mu$  au lieu des  $\gamma^\mu$ .

Une propriété utile que nous allons utiliser dans la suite est que l'on peut intégrer par parties toutes les dérivées covariantes dans cette action. On a déjà vu que la trace permet d'intégrer par parties la connexion de Yang–Mills. Pour la connexion de Levi-Civita ou de spin, on a la propriété bien connue

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} V^\mu) \quad (4.26)$$

ce qui implique

$$\partial_\mu (\sqrt{g} V^\mu A) = \sqrt{g} \nabla_\mu (V^\mu A) = \sqrt{g} \nabla_\mu V^\mu A + \sqrt{g} V^\mu \nabla_\mu A. \quad (4.27)$$

Quand on intègre, le premier terme est une divergence totale (l'intégrant est une forme différentielle exacte), et donc

$$\int d^4x \sqrt{g} V^\mu \nabla_\mu A = - \int d^4x \sqrt{g} \nabla_\mu V^\mu A. \quad (4.28)$$

### 4.2.2. La transformation de l'espace plat sur la sphère

On va maintenant faire la transformation de Weyl<sup>4</sup> de l'espace plat sur la sphère. Pour cela il ne suffit pas de remplacer uniquement la métrique plane par la métrique sur la sphère, et d'utiliser l'action (4.24) avec cette métrique. Cette action a bien un sens sur la sphère car elle est valable en coordonnées quelconques, mais il n'y a pas de raison qu'elle présente les mêmes symétries que l'action sur  $\mathbb{R}^4$ . En particulier, on peut vérifier que cette action n'est pas invariante sous les supersymétries établies dans le chapitre précédent. Pour avoir une action qui préserve les mêmes symétries (en particulier la symétrie superconforme  $\mathcal{N} = 4$ ), il faut également, comme nous allons le constater plus loin, redéfinir les champs avec un certain facteur. En effet, l'anticommutateur de deux symétries superconformes est une transformation conforme de l'espace plat, c'est-à-dire une transformation qui préserve la métrique à un facteur près. En changeant de métrique, il faut changer la forme des transformations également, ce qui passe ici par une redéfinition des champs. Si les  $\hat{X}^{\mathcal{I}}$  désignent collectivement les champs de la théorie pour la métrique plate, on peut faire

$$X^{\mathcal{I}}(x) = e^{\Delta(\mathcal{I})\Omega(x)} \hat{X}^{\mathcal{I}} \quad (\text{sans sommation}) \quad (4.29)$$

où les  $\Delta(\mathcal{I})$  sont des poids réels qui déterminent la transformation des champs  $\hat{X}^{\mathcal{I}}$  correspondants.

Comment déterminer ces  $\Delta(\mathcal{I})$ ? Si on fait une transformation de Weyl avec un  $\Omega$  constant à partir de la métrique plate, alors la métrique est encore la métrique plate sur  $\mathbb{R}^4$ , mais dilatée d'un facteur  $e^{2\Omega}$ . Une telle dilatation de la métrique ne doit rien changer à l'action, et donc il faut transformer les champs de façon à compenser la transformation de la métrique. Ceci détermine les poids  $\Delta$  univoquement pour tous les champs.

On part de l'action (4.24), où on met des  $\hat{\cdot}$  sur tous les symboles. Notre métrique de départ est  $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , et on fait la transformation de Weyl avec

$$g_{\mu\nu} = e^{2\Omega} \hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\Omega} \delta_{\mu\nu} \implies \hat{g}_{\mu\nu} = e^{-2\Omega} g_{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

Sous une telle transformation,

$$\det \hat{g} = e^{-8\Omega} \det g \implies \sqrt{\hat{g}} = e^{-4\Omega} g. \quad (4.31)$$

Comme  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu} = \hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}_{\nu\rho}$ , on a aussi

$$\hat{g}^{\mu\nu} = e^{2\Omega} g^{\mu\nu}. \quad (4.32)$$

De manière similaire, on déduit de l'équation (4.11) que

$$\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\mu} = e^{\Omega} e_{\mu}^{\mu}. \quad (4.33)$$

---

4. Une telle transformation est aussi parfois appelée « application conforme ».

On trouve alors directement en comptant les puissances de  $e^\Omega$  dans chaque terme que l'action transformée de Weyl est égale à l'action de départ,  $S[X] = S[\hat{X}]$ , si

$$\hat{A}_\mu = A_\mu \implies \Delta(A_\mu) = 0 \quad (4.34)$$

$$\hat{\Phi}^A = e^\Omega \Phi^A \implies \Delta(\Phi^A) = -1 \quad (4.35)$$

$$\hat{\Psi} = e^{\frac{3}{2}\Omega} \Psi \implies \Delta(\Psi) = -\frac{3}{2}. \quad (4.36)$$

On va maintenant faire la transformation de Weyl explicite, avec un  $\Omega$  non constant mais donné par (4.6).

### La forme volume

Comme il n'y a pas de dérivées de la métrique dans la forme volume, on a le même résultat que dans le cas  $\Omega$  constant,

$$\sqrt{\hat{g}} d^4x = \sqrt{g} e^{-4\Omega} d^4x. \quad (4.37)$$

### Les termes de Yang–Mills

Comme  $\hat{A}_\mu = A_\mu$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{et} \\ D^{\hat{A}} &= d + [\hat{A}, \cdot] = d + [A, \cdot] = D^A. \end{aligned} \quad (4.38)$$

### Les scalaires

La seule différence avec le cas  $\Omega$  constant est que le terme cinétique pour les  $\Phi^A$  fait intervenir des dérivées. On a

$$\partial_\mu \hat{\Phi}^A = \partial_\mu (e^\Omega \Phi^A) = e^\Omega (\partial_\mu \Phi^A + \partial_\mu \Omega \Phi^A). \quad (4.39)$$

Le terme cinétique est alors

$$\text{Tr} \sqrt{\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} D_\mu \hat{\Phi}^A D_\nu \hat{\Phi}_A = \text{Tr} e^{-2\Omega} \sqrt{g} g^{\mu\nu} D_\mu (e^\Omega \Phi^A) D_\nu (e^\Omega \Phi_A) \quad (4.40)$$

$$= \text{Tr} \sqrt{g} g^{\mu\nu} (D_\mu \Phi^A D_\nu \Phi_A + 2\partial_\mu \Omega \Phi^A D_\nu \Phi_A + \partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega \Phi^A \Phi_A). \quad (4.41)$$

On peut réécrire le deuxième terme de la façon suivante :

$$\text{Tr} \sqrt{g} g^{\mu\nu} 2\partial_\mu \Omega \Phi^A D_\nu \Phi_A = \text{Tr} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Omega D_\nu (\Phi^A \Phi_A) \quad (4.42)$$

$$= -\text{Tr} \partial_\nu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Omega) \Phi^A \Phi_A \quad (4.43)$$

$$= -\text{Tr} \partial_\nu (e^{2\Omega} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \Omega) \Phi^A \Phi_A \quad (4.44)$$

$$= -\text{Tr} (2e^{2\Omega} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega + e^{2\Omega} \delta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \Omega) \Phi^A \Phi_A \quad (4.45)$$

$$= -\text{Tr} \sqrt{g} g^{\mu\nu} (2\partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega + \partial_\nu \partial_\mu \Omega) \Phi^A \Phi_A \quad (4.46)$$

où on a laissé tomber la divergence totale à la deuxième ligne. Et donc, à une divergence près,

$$\text{Tr} \sqrt{\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} D_\mu \hat{\Phi}^A D_\nu \hat{\Phi}_A = \text{Tr} \sqrt{g} g^{\mu\nu} [D_\mu \Phi^A D_\nu \Phi_A - (\partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega + \partial_\mu \partial_\nu \Omega) \Phi^A \Phi_A]. \quad (4.47)$$

On peut évaluer la parenthèse explicitement en utilisant (4.6), et on trouve que

$$-\sqrt{g} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega + \partial_\mu \partial_\nu \Omega) = -e^{2\Omega} \delta^{\mu\nu} (\partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega + \partial_\mu \partial_\nu \Omega) \quad (4.48)$$

$$= e^{4\Omega} \frac{2}{r^2} = \sqrt{g} \frac{2}{r^2}. \quad (4.49)$$

En fin de compte, on a

$$\text{Tr} \sqrt{\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} D_\mu \hat{\Phi}^A D_\nu \hat{\Phi}_A = \text{Tr} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \left[ D_\mu \Phi^A D_\nu \Phi_A + \frac{2}{r^2} \Phi^A \Phi_A \right]. \quad (4.50)$$

Il est naturel de se demander ce que ce terme supplémentaire représente géométriquement. On peut montrer qu'en dimension 4, sous une transformation de Weyl, le scalaire de Ricci  $\mathcal{R}$  se transforme de la façon suivante [9] :

$$\mathcal{R} = e^{-2\Omega} [\hat{\mathcal{R}} - 6\hat{g}^{\mu\nu} (\partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega + \hat{\nabla}_\mu \partial_\nu \Omega)]. \quad (4.51)$$

On voit ainsi que la transformation de  $\frac{\mathcal{R}}{6}$  pour une transformation de Weyl compense exactement les termes dépendant du facteur conforme dans la transformation du terme cinétique. Comme on est parti d'une métrique plate,  $\hat{\mathcal{R}} = 0$ , et donc  $\frac{2}{r^2} = \frac{\mathcal{R}}{6}$  pour la sphère de rayon  $r$ .

## La connexion de spin

Comme le terme cinétique pour les fermions dépend de la connexion de spin, et que celle-ci est une fonction de la métrique qui se transforme sous transformation de Weyl, on va d'abord calculer la loi de transformation de la connexion de spin.

On a par (4.15) :

$$\Gamma^{\hat{\rho}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = e^{\hat{\rho}}_{\rho} e^{\mu}_{\hat{\mu}} (\partial_{\mu} e^{\rho}_{\hat{\nu}} + e^{\nu}_{\hat{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) \quad (4.52)$$

$$\implies \omega^{\hat{\rho}}_{\hat{\nu}\lambda} = e^{\hat{\rho}}_{\lambda} \Gamma^{\hat{\rho}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = e^{\hat{\rho}}_{\rho} (\partial_{\lambda} e^{\rho}_{\hat{\nu}} + e^{\nu}_{\hat{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}) \quad (4.53)$$

$$= e^{\Omega} \hat{e}^{\hat{\rho}}_{\rho} (\partial_{\lambda} (e^{-\Omega} \hat{e}^{\rho}_{\hat{\nu}}) + e^{-\Omega} \hat{e}^{\nu}_{\hat{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}) \quad (4.54)$$

$$= \hat{e}^{\hat{\rho}}_{\rho} (-\partial_{\lambda} \Omega \hat{e}^{\rho}_{\hat{\nu}} + \hat{e}^{\nu}_{\hat{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}). \quad (4.55)$$

Or,

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - 2\partial_{\mu} g_{\lambda\nu}) \quad (4.56)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\Omega} \delta^{\rho\mu} (2\partial_{\lambda} \Omega e^{2\Omega} \delta_{\mu\nu} + 2\partial_{\nu} \Omega e^{2\Omega} \delta_{\mu\lambda} - \partial_{\mu} \Omega e^{2\Omega} \delta_{\lambda\nu}) \quad (4.57)$$

$$= \partial_{\lambda} \Omega \delta^{\rho}_{\nu} + \partial_{\nu} \Omega \delta^{\rho}_{\lambda} - \partial_{\mu} \Omega \delta^{\rho\mu} \delta_{\lambda\nu}. \quad (4.58)$$

En insérant cette expression dans (4.55), on obtient la connexion de spin

$$\omega^{\hat{\rho}}_{\hat{\nu}\lambda} = \hat{e}^{\hat{\rho}}_{\lambda} \hat{e}^{\nu}_{\hat{\nu}} \partial_{\nu} \Omega - \hat{e}^{\hat{\rho}\nu} e_{\hat{\nu}\lambda} \partial_{\nu} \Omega. \quad (4.59)$$

On peut maintenant calculer la transformation du terme cinétique des fermions. On a

$$- \text{Tr} \sqrt{\hat{g}} \hat{\Psi} \hat{\Gamma}^{\mu} \hat{D}_{\mu} \hat{\Psi} = - \text{Tr} \sqrt{g} e^{-4\Omega} \Psi e^{\frac{3}{2}\Omega} e^{\Omega} \Gamma^{\mu} (\partial_{\mu} (e^{\frac{3}{2}\Omega} \Psi) + [A_{\mu}, e^{\frac{3}{2}\Omega} \Psi]) \quad (4.60)$$

$$= - \text{Tr} \sqrt{g} \Gamma^{\mu} \left( \frac{3}{2} \partial_{\mu} \Omega \Psi + \partial_{\mu} \Psi + [A_{\mu}, \Psi] \right). \quad (4.61)$$

D'autre part, regardons comment la connexion de spin (4.59) agit sur les fermions :

$$\frac{1}{4} \omega_{\hat{\rho}\hat{\nu}\mu} \Gamma^{\hat{\rho}\hat{\nu}} = \frac{1}{4} \hat{e}^{\hat{\rho}\mu} \hat{e}^{\nu}_{\hat{\nu}} \partial_{\nu} \Omega \Gamma^{\hat{\rho}\hat{\nu}} - \frac{1}{4} \hat{e}^{\nu}_{\hat{\rho}} e_{\hat{\nu}\mu} \partial_{\nu} \Omega \Gamma^{\hat{\rho}\hat{\nu}} \quad (4.62)$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} \Omega. \quad (4.63)$$

ce qui implique que

$$\Gamma^{\mu} \frac{1}{4} \omega_{\hat{\rho}\hat{\nu}\mu} \Gamma^{\hat{\rho}\hat{\nu}} = \frac{1}{2} \Gamma^{\mu} \Gamma^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} \Omega = \frac{3}{2} \Gamma^{\nu} \partial_{\nu} \Omega \quad (4.64)$$

où le facteur 3 apparaît vu qu'il y a 3 indices que  $\mu$  peut prendre, car il faut  $\mu \neq \nu$  en vertu de l'antisymétrie de  $\Gamma^{\nu}_{\mu}$ .

On voit donc que le terme supplémentaire dans (4.61) qui dépend du facteur conforme peut être interprété comme la connexion de spin qui agit sur  $\Psi$ . Formulé différemment, la dérivée covariante de spin est aussi covariante de Weyl<sup>5</sup> en dimension 4 :

$$\hat{\nabla}_{\mu} \hat{\Psi} = \widehat{\nabla_{\mu} \psi} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (4.65)$$

$$\hat{\nabla}_{\mu} (e^{\frac{3}{2}\Omega} \Psi) = e^{\frac{3}{2}\Omega} \nabla_{\mu} \Psi. \quad (4.66)$$

---

5. On l'a montré dans le cas où la métrique de départ est plate et donc la connexion de spin  $\hat{\omega}$  est nulle, mais on peut généraliser très facilement au cas où la connexion de départ est également non nulle.

Pour revenir au terme cinétique des fermions, on a ainsi montré que

$$- \text{Tr} \sqrt{\hat{g}} \hat{\Psi} \hat{\Gamma}^\mu \hat{D}_\mu \hat{\Psi} = - \text{Tr} \sqrt{g} \Psi \Gamma^\mu D_\mu \Psi, \quad (4.67)$$

où la dérivée covariante dans le membre de droite fait également intervenir la connexion de spin.

### L'action sur la sphère

Si on remet ensemble tout ce qu'on vient de faire, on voit que l'action sur la sphère est donnée par

$$S_{S^4} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \int d^4x \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} - \Psi \Gamma^M D_M \Psi + \frac{2}{r^2} \Phi^A \Phi_A \right) \quad (4.68)$$

où la métrique est la métrique sur la sphère (4.5) quand les coordonnées sont comprises entre 1 et 4 et la métrique de Minkowski sinon, et  $D_M \Psi$  contient, outre la connexion de Yang–Mills, la connexion de spin lorsque  $M = 1, \dots, 4$ .

Remarquons qu'on a trouvé une action qui est définie que sur un ouvert de carte qui exclut le pôle sud. Comme les grandeurs qui interviennent dans l'intégrand sont covariantes, cette action peut être étendue à toute la sphère en ajoutant un ouvert de carte contenant le pôle sud et en définissant l'intégrale sur celui-ci par la même expression.

### Les transformations superconformes

Étant donné qu'on a modifié les champs, il n'y a pas de raison pour que les transformations superconformes gardent la même forme que sur  $\mathbb{R}^4$ . On va voir que les transformations vont garder une forme très similaire, mais que le paramètre  $\varepsilon$  de la transformation va être dilaté avec un certain poids :  $\varepsilon = e^{\Delta(\varepsilon)\Omega} \hat{\varepsilon}$ .

Sur  $\mathbb{R}^4$ , on avait (cf. (3.66)) :

$$\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon_s + x^\mu \hat{\Gamma}_\mu \varepsilon_c. \quad (4.69)$$

Pour une transformation superconforme, on a

$$\Phi'^A = e^{-\Omega} \hat{\Phi}'^A = e^{-\Omega} \delta_\varepsilon \hat{\Phi}^A = e^{-\Omega} \hat{\varepsilon} \hat{\Gamma}^A \hat{\Psi} = e^{-\Omega} \hat{\varepsilon} \hat{\Gamma}^A e^{\frac{3}{2}\Omega} \Psi = e^{\frac{1}{2}\Omega} \hat{\varepsilon} \Gamma^A \Psi \quad (4.70)$$

étant donné que  $\hat{\Gamma}^A = \Gamma^A$ , les composantes non comprises entre 1 et 4 ne se transformant pas sous transformation de Weyl. La transformation de  $\Phi$  a donc la même forme que celle de  $\hat{\Phi}$  dans  $\mathbb{R}^4$ , à condition de définir

$$\varepsilon(x) = e^{\frac{1}{2}\Omega(x)} \hat{\varepsilon}(x) = e^{\frac{1}{2}\Omega(x)} \left( \varepsilon_s + x^\mu \hat{\Gamma}_\mu \varepsilon_c \right) = e^{\frac{1}{2}\Omega(x)} \left( \varepsilon_s + x^{\hat{\mu}} \tilde{\Gamma}_{\hat{\mu}} \varepsilon_c \right). \quad (4.71)$$

Cette définition de  $\varepsilon$  fonctionne pour les transformations superconformes de tous les champs. En effet, pour  $A_\mu$ , on a

$$A'_\mu = \hat{A}'_\mu = \delta_\varepsilon \hat{A}_\mu = \hat{\varepsilon} \hat{\Gamma}_\mu \hat{\Psi} = \hat{\varepsilon} e^{-\Omega} \Gamma_\mu e^{\frac{3}{2}\Omega} \Psi = e^{\frac{1}{2}\Omega} \hat{\varepsilon} \Gamma_\mu \Psi = \varepsilon \Gamma_\mu \Psi. \quad (4.72)$$

Quant à  $\Psi$ ,

$$\Psi' = e^{-\frac{3}{2}\Omega} \hat{\Psi}' = e^{-\frac{3}{2}\Omega} \delta_\varepsilon \Psi \quad (4.73)$$

$$= e^{-\frac{3}{2}\Omega} \frac{1}{2} \left( \hat{F}_{MN} \hat{\Gamma}^{MN} \hat{\varepsilon} + \hat{\Phi}_A \hat{\Gamma}^{\mu A} \partial_\mu \hat{\varepsilon} \right) \quad (4.74)$$

$$= e^{-\frac{3}{2}\Omega} \frac{1}{2} \left( \hat{F}_{\mu\nu} \hat{\Gamma}^{\mu\nu} \hat{\varepsilon} + 2\hat{F}_{\mu A} \hat{\Gamma}^{\mu A} \hat{\varepsilon} + \hat{F}_{AB} \hat{\Gamma}^{AB} + \hat{\Phi}_A \hat{\Gamma}^{\mu A} \partial_\mu \hat{\varepsilon} \right) \quad (4.75)$$

$$= e^{-\frac{3}{2}\Omega} \frac{1}{2} \left( F_{\mu\nu} e^{2\Omega} \Gamma^{\mu\nu} \hat{\varepsilon} + 2D_\mu (e^\Omega \Phi_A) e^\Omega \Gamma^{\mu A} \hat{\varepsilon} + e^{2\Omega} F_{AB} \Gamma^{AB} \hat{\varepsilon} + e^\Omega \Phi_A e^\Omega \Gamma^{\mu A} \partial_\mu \hat{\varepsilon} \right) \quad (4.76)$$

$$= e^{\frac{1}{2}\Omega} \frac{1}{2} \left( F_{MN} \Gamma^{MN} \hat{\varepsilon} + 2\partial_\mu \Omega \Phi_A \Gamma^{\mu A} \hat{\varepsilon} + \Phi_A \Gamma^{\mu A} \partial_\mu \hat{\varepsilon} \right). \quad (4.77)$$

Or d'après (4.63),

$$\Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon = \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu (e^{\frac{1}{2}\Omega} \hat{\varepsilon}) \quad (4.78)$$

$$= e^{\frac{1}{2}\Omega} \left( \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \partial_\mu \Omega \hat{\varepsilon} \right) \quad (4.79)$$

$$= e^{\frac{1}{2}\Omega} \left( \Phi_A \Gamma^{\mu A} \partial_\mu \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \Gamma_\mu{}^\nu \partial_\nu \Omega \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \partial_\mu \Omega \hat{\varepsilon} \right) \quad (4.80)$$

$$= e^{\frac{1}{2}\Omega} \left( \Phi_A \Gamma^{\mu A} \partial_\mu \hat{\varepsilon} + 2\Phi_A \Gamma^{\mu A} \partial_\mu \Omega \hat{\varepsilon} \right). \quad (4.81)$$

On voit donc que

$$\Psi' = \frac{1}{2} \left( F_{MN} \Gamma^{MN} (e^{\frac{1}{2}\Omega} \hat{\varepsilon}) + \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu (e^{\frac{1}{2}\Omega} \hat{\varepsilon}) \right) = \frac{1}{2} \left( F_{MN} \Gamma^{MN} \varepsilon + \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon \right). \quad (4.82)$$

En résumé, les transformations superconformes sur la sphère sont :

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon A_M = \varepsilon \Gamma_M \Psi \\ \delta_\varepsilon \Psi = \frac{1}{2} \left( F_{MN} \Gamma^{MN} \varepsilon + \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon \right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = e^{\frac{1}{2}\Omega} \left( \varepsilon_s + x^{\hat{\mu}} \tilde{\Gamma}_{\hat{\mu}} \varepsilon_c \right). \quad (4.83)$$

Il sera utile pour la suite de définir un  $\tilde{\varepsilon}$  tel que

$$\nabla_\mu \varepsilon = \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} \iff \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{4} \Gamma^\mu \nabla_\mu \varepsilon. \quad (4.84)$$

En utilisant la forme explicite (4.6) de  $\Omega$  et (4.63), on trouve :

$$\tilde{\varepsilon}(x) = e^{\frac{1}{2}\Omega(x)} \left( \varepsilon_c - \frac{x^{\hat{\mu}}}{4r^2} \Gamma_{\hat{\mu}} \varepsilon_s \right). \quad (4.85)$$

À partir de cette expression, on peut voir que  $\tilde{\varepsilon}$  obéit à

$$\nabla_\mu \tilde{\varepsilon} = -\frac{1}{4r^2} \Gamma_\mu \varepsilon. \quad (4.86)$$

### 4.3. Supersymétrie au carré

Maintenant qu'on connaît la forme des transformations superconformes sur la sphère, on peut calculer leur carré, ce qui est nécessaire afin de déterminer la sous-algèbre équivariante. Comme l'algèbre considérée est engendrée par les champs, il suffit de regarder comment  $\delta_\varepsilon^2$  agit sur chacun des champs  $A_\mu$ ,  $\Phi^A$  et  $\Psi$ . On peut avoir une idée de ce que l'on va obtenir en considérant l'algèbre superconforme. Schématiquement, on a

$$(Q + S)^2 \sim Q^2 + S^2 + QS \sim P + K + M + R + D, \quad (4.87)$$

c'est-à-dire qu'à côté d'une transformation purement d'espace-temps, engendrée par un certain élément de l'algèbre superconforme, on s'attend à obtenir en plus une transformation de  $R$ -symétrie. On va voir qu'on obtient bien ceci, avec une transformation d'espace-temps que l'on peut écrire comme la somme d'une dérivée de Lie et d'une dilatation locale, mais qu'on obtient en plus une transformation de jauge, ce qui est permis car nos champs ne sont pas invariants de jauge. En outre, on va voir qu'on obtient des termes qui s'annulent seulement lorsque les équations du mouvement sont satisfaites, et sur lesquels on va revenir plus loin.

#### 4.3.1. Sur les bosons

On a

$$\delta_\varepsilon^2 A_M = \delta_\varepsilon(\varepsilon \Gamma_M \Psi) = \varepsilon \Gamma_M \left( \frac{1}{2} F_{PN} \Gamma^{PN} \varepsilon + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon \right). \quad (4.88)$$

Or

$$\Gamma_M \Gamma^{PN} = \Gamma_M^{PN} + \delta_M^P \Gamma^N - \delta_M^N \Gamma^P, \quad (4.89)$$

et donc

$$\frac{1}{2} F_{PN} \varepsilon \Gamma_M \Gamma^{PN} \varepsilon = \frac{1}{2} \left( F_{PN} \varepsilon \Gamma_M^{PN} \varepsilon + F_{MN} \varepsilon \Gamma^N \varepsilon - F_{PN} \varepsilon \Gamma^P \varepsilon \right) \quad (4.90)$$

$$= 0 + F_{MN} \varepsilon \Gamma^N \varepsilon \quad (4.91)$$

car  $\Gamma_M^{PN}$  est totalement antisymétrique, et  $\varepsilon \Gamma_M^{PN} \varepsilon$  sélectionne la partie symétrique en  $M, N$ . On a également utilisé l'antisymétrie de  $F$ . D'autre part

$$\frac{1}{2} \Phi_A \varepsilon \Gamma_M \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon = \frac{1}{2} \Phi_A \varepsilon \Gamma_M \Gamma^{\mu A} \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} = -2 \Phi_A \varepsilon \Gamma_M \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon}. \quad (4.92)$$

Par conséquent,

$$\delta_\varepsilon^2 A_M = -\varepsilon \Gamma^N \varepsilon F_{NM} - 2 \varepsilon \Gamma_M \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} \Phi_A. \quad (4.93)$$

**Sur  $A_\mu$**

Pour  $M = 1, \dots, 4 = \mu$ , on a :

$$\delta_\varepsilon^2 A_\mu = -\varepsilon \Gamma^N \varepsilon F_{N\mu} - 2\varepsilon \Gamma_\mu \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} \Phi_A \quad (4.94)$$

$$= -\varepsilon \Gamma^\nu \varepsilon F_{\nu\mu} - \varepsilon \Gamma^A \varepsilon F_{A\mu} - 2\varepsilon \Gamma_\mu \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} \Phi_A \quad (4.95)$$

$$= -\varepsilon \Gamma^\nu \varepsilon F_{\nu\mu} + \varepsilon \Gamma^A \varepsilon D_\mu \Phi_A + 2\varepsilon \Gamma^A \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} \Phi_A. \quad (4.96)$$

Or,

$$D_\mu(\varepsilon \Gamma^A \varepsilon \Phi_A) = 2\varepsilon \Gamma^A \nabla_\mu \varepsilon \Phi_A + \varepsilon \Gamma^A \varepsilon D_\mu \Phi_A = 2\varepsilon \Gamma^A \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} \Phi_A + \varepsilon \Gamma^A \varepsilon D_\mu \Phi_A. \quad (4.97)$$

Si on définit le 10-vecteur  $v$  par

$$v^M = \varepsilon \Gamma^M \varepsilon, \quad (4.98)$$

on peut réécrire le carré de la transformation superconforme sur le champ  $A_\mu$  comme

$$\delta_\varepsilon^2 A_\mu = -v^\nu F_{\nu\mu} + D_\mu(v^A \Phi_A). \quad (4.99)$$

On peut écrire cette expression de manière encore différente. On remarque en effet que

$$-v^\nu F_{\nu\mu} = -v^\nu \partial_\nu A_\mu + v^\nu \partial_\mu A_\nu - v^\nu [A_\nu, A_\mu] \quad (4.100)$$

$$= -v^\nu \partial_\nu A_\mu + D_\mu(v^\nu A_\nu) - A_\nu \partial_\mu v^\nu \quad (4.101)$$

$$= -\mathcal{L}_v A_\mu + D_\mu(v^\nu A_\nu) \quad (4.102)$$

où  $\mathcal{L}_v A$  est la dérivée de Lie de la 1-forme  $A$  par rapport au champ de vecteurs de composantes  $v^\nu$ . Ceci donne pour finir

$$\delta_\varepsilon^2 A_\mu = -\mathcal{L}_v A_\mu + D_\mu(v^M A_M). \quad (4.103)$$

On voit que, contrairement à ce qu'on avait au chapitre 2, où le carré de la différentielle équivariante engendrait une dérivée de Lie, on obtient ici un terme supplémentaire. Ceci n'est pas très étonnant : sous une transformation de jauge de paramètre  $\lambda(x)$ , le champ de Yang–Mills  $A$  se transforme comme

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta_\lambda A_\mu = A_\mu - D_\mu(\lambda). \quad (4.104)$$

Or la dérivée de Lie est la version infinitésimale d'une transformation engendrée par un groupe à un paramètre de difféomorphismes de la variété de base  $M$ , ce qui ne spécifie pas entièrement son action sur les sections d'un fibré sur  $M$  : il existe plusieurs manières de relever ces difféomorphismes dans le fibré, et donc plusieurs manières de relever la dérivée de Lie également. Les différentes possibilités diffèrent par l'action du groupe (ou de l'algèbre pour la dérivée de Lie) dans les fibres, c'est-à-dire par une transformation de jauge. Et c'est précisément une telle transformation de jauge de paramètre  $\lambda = v^M A_M$  qui apparaît dans (4.103) à côté de la dérivée de Lie d'une 1-forme ordinaire.

**Sur  $\Phi^A$** 

Pour  $M = 0, 5, \dots, 9$ , on a :

$$\delta_\varepsilon^2 \Phi_A = -\varepsilon \Gamma^N \varepsilon F_{NA} - 2\varepsilon \Gamma_A \tilde{\Gamma}^B \tilde{\varepsilon} \Phi_B \quad (4.105)$$

$$= -\varepsilon \Gamma^\mu \varepsilon F_{\mu A} - \varepsilon \Gamma^B \varepsilon F_{BA} - 2\varepsilon (\tilde{\Gamma}_A^B + \delta_A^B) \tilde{\varepsilon} \Phi_B \quad (4.106)$$

$$= -v^\mu D_\mu \Phi_A - v^B [\Phi_B, \Phi_A] - 2\varepsilon \tilde{\Gamma}_{AB} \tilde{\varepsilon} \Phi^B - 2\varepsilon \tilde{\varepsilon} \Phi_A \quad (4.107)$$

$$= -v^\mu \partial_\mu \Phi_A - v^\mu [A_\mu, \Phi_A] - v^B [\Phi_B, \Phi_A] - 2\varepsilon \tilde{\Gamma}_{AB} \tilde{\varepsilon} \Phi^B - 2\varepsilon \tilde{\varepsilon} \Phi_A \quad (4.108)$$

$$= -\mathcal{L}_v \Phi_A - [v^M A_M, \Phi_A] - 2\varepsilon \tilde{\Gamma}_{AB} \tilde{\varepsilon} \Phi^B - 2\varepsilon \tilde{\varepsilon} \Phi_A. \quad (4.109)$$

Les deux premiers termes sont la dérivée de Lie et la transformation de jauge, comme pour  $A$ . Ici, il y a par contre des termes supplémentaires. Le troisième terme correspond à une rotation (infinitésimale) des champs  $\Phi^A$  par un élément du facteur  $spin(5, 1)_R$  de  $spin(9, 1) \supset spin(4) \oplus spin(5, 1)$ , c'est-à-dire à une transformation de  $R$ -symétrie de paramètre  $2\varepsilon \tilde{\Gamma}_{AB} \tilde{\varepsilon}$ . Le dernier terme est une dilatation (infinitésimale) de paramètre  $2\varepsilon \tilde{\varepsilon}$ .

**4.3.2. Sur les fermions**

On a

$$\delta_\varepsilon^2 \Psi = \delta_\varepsilon \left( \frac{1}{2} F_{MN} \Gamma^{MN} \varepsilon + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon \right) \quad (4.110)$$

$$= D_M (\varepsilon \Gamma_N \Psi) \Gamma^{MN} \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_A \Psi) \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon \quad (4.111)$$

$$= (\nabla_\mu \varepsilon \Gamma_N \Psi) \Gamma^{\mu N} \varepsilon + (\varepsilon \Gamma_N D_M \Psi) \Gamma^{MN} \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_A \Psi) \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon, \quad (4.112)$$

où, pour passer de la première à la deuxième ligne, on a utilisé l'expression explicite  $\delta_\varepsilon F_{MN}$  de (3.33) page 34.

On peut réécrire le deuxième terme comme

$$(\varepsilon \Gamma_N D_M \Psi) \Gamma^{MN} \varepsilon = (\varepsilon \Gamma_N D_M \Psi) (\tilde{\Gamma}^M \Gamma^N - g^M N) \varepsilon \quad (4.113)$$

$$= -\frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_N \varepsilon) \tilde{\Gamma}^M \Gamma^N D_M \Psi - (\varepsilon \Gamma^M D_M \Psi) \varepsilon \quad (4.114)$$

$$= -\frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_N \varepsilon) (-\tilde{\Gamma}^N \Gamma^M + 2g^{MN}) D_M \Psi - (\varepsilon \Gamma^M D_M \Psi) \varepsilon \quad (4.115)$$

$$= -(\varepsilon \Gamma^M \varepsilon) D_M \Psi + \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_N \varepsilon) \tilde{\Gamma}^N \Gamma^M D_M \Psi - (\varepsilon \Gamma^M D_M \Psi) \varepsilon \quad (4.116)$$

où on a utilisé la conséquence de l'identité miraculeuse (A.38) à la deuxième ligne. On constate que les deux derniers termes sont nuls seulement si les équations du mouvement  $\Gamma^M D_M \Psi = 0$  sont satisfaites, et on reviendra plus tard sur ce point.

Pour les deux autres termes, on a

$$\begin{aligned} & (\nabla_\mu \varepsilon \Gamma_N \Psi) \Gamma^{\mu N} \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_A \Psi) \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon \\ &= (\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}_\mu \Gamma_N \Psi) \Gamma^{\mu N} \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_A \Psi) \Gamma^{\mu A} \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$= (\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}_\mu \Gamma_N \Psi) (\tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^N - g^{\mu N}) \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_A \Psi) (-4 \tilde{\Gamma}^A) \tilde{\varepsilon} \quad (4.118)$$

$$= (\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}_\mu \Gamma_N \Psi) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^N \varepsilon - 4 (\tilde{\varepsilon} \Psi) \varepsilon - 2 (\varepsilon \Gamma_A \Psi) \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} \quad (4.119)$$

On utilise l'identité miraculeuse sous la forme (A.36) pour réécrire le premier terme :

$$\begin{aligned} & (\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}_\mu \Gamma_N \Psi) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^N \varepsilon \\ &= -(\varepsilon \Gamma_N \Psi) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^N \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} - (\varepsilon \Gamma_N \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon}) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^N \Psi \end{aligned} \quad (4.120)$$

$$= -(\varepsilon \Gamma_\nu \Psi) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^\nu \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} - (\varepsilon \Gamma_A \Psi) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^A \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} - (\varepsilon \Gamma_\nu \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon}) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^\nu \Psi - (\varepsilon \Gamma_A \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon}) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^A \Psi \quad (4.121)$$

$$= 2(\varepsilon \Gamma_\nu \Psi) \tilde{\Gamma}^\nu \tilde{\varepsilon} + 4(\varepsilon \Gamma_A \Psi) \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} - (\varepsilon \Gamma_\nu \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon}) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^\nu \Psi - (\varepsilon \Gamma_A \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon}) \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^A \Psi \quad (4.122)$$

$$= 2(\varepsilon \Gamma_\nu \Psi) \tilde{\Gamma}^\nu \tilde{\varepsilon} + 4(\varepsilon \Gamma_A \Psi) \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} - (\varepsilon \Gamma_\nu \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon}) (\Gamma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}) \Psi - (\varepsilon \Gamma_A \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon}) \Gamma^{\mu A} \Psi \quad (4.123)$$

$$= 2(\varepsilon \Gamma_\nu \Psi) \tilde{\Gamma}^\nu \tilde{\varepsilon} + 4(\varepsilon \Gamma_A \Psi) \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} - (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{\mu\nu} \varepsilon) \Gamma^{\mu\nu} \Psi - 4(\varepsilon \tilde{\varepsilon}) \Psi - (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{\mu A} \varepsilon) \Gamma^{\mu A} \Psi \quad (4.124)$$

où on a fait les contractions sur  $\mu$  selon (A.17) à la ligne (4.122). On remet ça dans (4.119) pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\nabla_\mu \varepsilon \Gamma_N \Psi) \Gamma^{\mu N} \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_A \Psi) \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon \\ &= 2(\varepsilon \Gamma_\nu \Psi) \tilde{\Gamma}^\nu \tilde{\varepsilon} + 2(\varepsilon \Gamma_A \Psi) \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} - (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{\mu\nu} \varepsilon) \Gamma^{\mu\nu} \Psi - 4(\varepsilon \tilde{\varepsilon}) \Psi - (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{\mu A} \varepsilon) \Gamma^{\mu A} \Psi - 4(\tilde{\varepsilon} \Psi) \varepsilon \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{\mu\nu} \varepsilon) \Gamma^{\mu\nu} \Psi + \frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{AB} \varepsilon) \Gamma^{AB} \Psi \\ &\quad - \frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{MN} \varepsilon) \Gamma^{MN} \Psi + 2(\varepsilon \Gamma_N \Psi) \tilde{\Gamma}^N \tilde{\varepsilon} - 4(\varepsilon \tilde{\varepsilon}) \Psi - 4(\tilde{\varepsilon} \Psi) \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.126)$$

On peut montrer à l'aide d'une identité de Fierz que la dernière ligne vaut  $-3(\tilde{\varepsilon} \varepsilon) \Psi$ .

On a donc, en combinant ce résultat avec (4.116),

$$\delta_\varepsilon^2 \Psi = -v^M D_M \Psi - \frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{\mu\nu} \varepsilon) \Gamma^{\mu\nu} \Psi + \frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{AB} \varepsilon) \Gamma^{AB} \Psi - 3(\tilde{\varepsilon} \varepsilon) \Psi + eom[\Psi] \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} &= -v^\mu \nabla_\mu \Psi - \frac{1}{4} \nabla_\mu (\varepsilon \Gamma_\nu \varepsilon) \Gamma^{\mu\nu} \Psi - [v^M A_M, \Psi] + \frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon} \Gamma_{AB} \varepsilon) \Gamma^{AB} \Psi - 3(\tilde{\varepsilon} \varepsilon) \Psi + eom[\Psi] \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$= -\mathcal{L}_v \Psi - [v^M A_M, \Psi] - \frac{1}{4} (2\varepsilon \tilde{\Gamma}_{AB} \tilde{\varepsilon}) \Gamma^{AB} \Psi - 3(\tilde{\varepsilon} \varepsilon) \Psi + eom[\Psi]. \quad (4.129)$$

On a utilisé à la dernière ligne la définition de la dérivée de Lie d'un spineur [26, équation (3.19)]  $\mathcal{L}_v \Psi = v^\mu \nabla_\mu \Psi + \frac{1}{4} \nabla_\mu v_\nu \Gamma^{\mu\nu} \Psi$ , et dénoté par  $eom[\Psi]$  les termes qui s'annulent lorsque les équations du mouvement pour  $\Psi$  sont satisfaites.

Excepté ces termes, on retrouve la structure familière que l'on avait déjà pour  $\Phi^A$ , à savoir que le carré d'une transformation de supersymétrie engendre une dérivée de Lie, une transformation de jauge de paramètre  $v^M A_M$ , une transformation de  $R$ -symétrie de paramètre  $2\varepsilon\tilde{\Gamma}_{AB}\tilde{\varepsilon}$ , et une dilatation de paramètre  $2\tilde{\varepsilon}\varepsilon$  (on retrouve que le poids d'un spineur pour les transformations de Weyl est 3/2). On peut donc écrire en toute généralité que

$$\delta_\varepsilon^2 = -\mathcal{L}_v - G_{v^M A_M} - R_{2\varepsilon\tilde{\Gamma}_{AB}\tilde{\varepsilon}} - \Omega_{2\tilde{\varepsilon}\varepsilon} \quad (4.130)$$

où  $G$  est la transformation de jauge,  $R$  la transformation de  $R$ -symétrie et  $\Omega$  la dilatation, et chaque champ se transforme dans la représentation adéquate pour chaque groupe de transformations. La sous-algèbre équivariante sera donc composée de fonctionnelles qui sont invariantes sous chacune de ces transformations.

Restent les termes qui s'annulent si les équations du mouvement pour  $\Psi$  sont satisfaites :

$$eom[\Psi] = \frac{1}{2}(\varepsilon\Gamma_N\varepsilon)\tilde{\Gamma}^N\Gamma^M D_M\Psi - (\varepsilon\Gamma^M D_M\Psi)\varepsilon. \quad (4.131)$$

On parle dans ce cas de fermeture de l'algèbre sur la couche de masse<sup>6</sup> : on obtient une représentation de l'algèbre superconforme uniquement lorsque les champs satisfont à leurs équations du mouvement, et pas dans tout l'espace des configurations pour les champs. Ceci est gênant, car pour la localisation on a besoin d'un  $\beta$  tel que  $\delta_\varepsilon^2\beta$  soit identiquement nul (on intègre dessus), et ce pas uniquement lorsque les équations du mouvement sont satisfaites. On va y apporter une solution dans la section suivante.

## 4.4. Fermeture hors de la couche de masse — Champs auxiliaires

Le fait que l'algèbre ne ferme pas hors de la couche de masse (i.e. quand les équations du mouvement ne sont pas satisfaites) peut se comprendre de la manière suivante : la supersymétrie exige qu'il y ait autant de degrés de liberté bosoniques que fermioniques. Comptons le nombre de degrés de liberté que l'on a (du point de vue 10 dimensionnel) hors de la couche de masse : un champ vectoriel de masse nul  $A_M$  a  $10 - 1 = 9$  composantes réelles indépendantes (une composante est tuée par l'invariance de jauge), alors qu'un spineur de Majorana–Weyl  $\Psi$  a 16 composantes réelles indépendantes. Il manque donc 7 degrés de liberté bosoniques pour pouvoir éventuellement avoir une représentation de l'algèbre de supersymétrie hors de la couche de masse. C'est pourquoi on ajoute 7 champs auxiliaires  $K^a$  à l'action [27, 28]. Ces champs doivent, comme  $A_M$  et  $\Psi$ , se transformer dans la représentation adjointe du groupe de jauge  $G$ . On veut que l'ajout des  $K^a$  ne modifie pas le comportement sur la couche de masse de la théorie, donc il faut que les

6. Cette terminologie provient du fait que les équations du mouvement forcent la relation de dispersion  $p^\mu p_\mu = -m^2$  pour une particule de masse  $m$ , c'est-à-dire que la particule se trouve sur la couche de masse. En anglais, on parle de *on-shell/off-shell*.

équations du mouvement imposent  $K^a = 0$ . Par conséquent, on ajoute un terme cinétique à l'action qui génère ces équations du mouvement :

$$S_{S^4, K} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} - \Psi \Gamma^M D_M \Psi + \frac{2}{r^2} \Phi^A \Phi_A - K^a K_a \right). \quad (4.132)$$

L'intérêt de cette procédure est que grâce à ces champs, on va pouvoir modifier les transformations superconformes de manière à compenser les termes (4.131). On définit de nouvelles transformations pour  $\Psi$  et  $K^a$  :

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon \Psi = \frac{1}{2} F_{MN} \Gamma^{MN} \varepsilon + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon + K^a \nu_a, \\ \delta_\varepsilon K_a = -\nu_a \Gamma^M D_M \Psi \end{cases}, \quad (4.133)$$

où les  $\nu_a$  sont des spineurs de Majorana–Weyl qui satisfont

$$\varepsilon \Gamma^M \nu_a = 0 \quad (4.134)$$

$$\frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma^N \varepsilon) (\tilde{\Gamma}_N)^{\alpha\beta} = \nu_a^\alpha \nu_a^\beta + \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \quad (4.135)$$

$$\nu_a \Gamma^M \nu_b = \delta_{ab} \varepsilon \Gamma^M \varepsilon. \quad (4.136)$$

On montrera plus loin comment choisir de tels  $\nu_a$ .

On peut maintenant recalculer les carrés des transformations superconformes. <sup>7</sup>

**Pour  $A_M$**

On a

$$\delta_\varepsilon^2 A_M = \delta_\varepsilon (\varepsilon \Gamma_M \Psi) = \varepsilon \Gamma_M \left( \frac{1}{2} F_{MN} \Gamma^{MN} \varepsilon + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon + K^a \nu_a \right) \quad (4.137)$$

$$= \delta_\varepsilon^2 A_M|_{K=0} + \varepsilon \Gamma^M \nu_a K^a = \delta_\varepsilon^2 A_M|_{K=0} \quad (4.138)$$

où  $\delta_\varepsilon^2 A_M|_{K=0}$  est la transformation de  $A_M$  que l'on avait avant d'introduire les champs auxiliaires, et on a utilisé (4.134).

**Pour  $\Psi$**

On a dans ce cas-ci

$$\delta_\varepsilon^2 \Psi = \delta_\varepsilon \left( \frac{1}{2} F_{MN} \Gamma^{MN} \varepsilon + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon + K^a \nu_a \right) \quad (4.139)$$

$$= \delta_\varepsilon^2 \Psi|_{K=0} - (\nu_a \Gamma^M D_M \Psi) \nu_a, \quad (4.140)$$

---

7. Fort heureusement, il n'est pas nécessaire de tout refaire : il suffit de regarder les termes qui dépendent de  $K^a$ .

et par (4.131),

$$eom[\Psi] - (\nu_a \Gamma^M D_M \Psi) \nu_a = \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_N \varepsilon) \tilde{\Gamma}^N \Gamma^M D_M \Psi - (\varepsilon \Gamma^M D_M \Psi) \varepsilon - (\nu_a \Gamma^M D_M \Psi) \nu_a \quad (4.141)$$

$$= (\nu_a \Gamma^M D_M \Psi) \nu_a + (\varepsilon \Gamma^M D_M \Psi) \varepsilon - (\varepsilon \Gamma^M D_M \Psi) \varepsilon - (\nu_a \Gamma^M D_M \Psi) \nu_a \quad (4.142)$$

$$= 0 \quad (4.143)$$

en vertu de (4.135). On a donc bien une fermeture hors de la couche de masse de l'algèbre.

**Pour  $K^a$**

Ici, il faut faire le calcul en entier. On a

$$\delta_\varepsilon^2 K_a = \delta_\varepsilon (-\nu_a \Gamma^M D_M \Psi) \quad (4.144)$$

$$= -\nu_a \Gamma^M \delta_\varepsilon (D_M) \Psi - \nu_a \Gamma^M D_M \delta_\varepsilon \Psi \quad (4.145)$$

$$= -\nu_a \Gamma^M [(\varepsilon \Gamma_M \Psi), \Psi] - \nu_a \Gamma^M D_M \left( \frac{1}{2} F_{PN} \Gamma^{PN} \varepsilon + \frac{1}{2} \Phi_A \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon + K^b \nu_b \right). \quad (4.146)$$

En utilisant (A.38), on voit que le premier terme est nul :

$$-\nu_a \Gamma^M [(\varepsilon \Gamma_M \Psi), \Psi] = -[(\varepsilon \Gamma_M \Psi), (\Psi \Gamma^M \nu_a)] = -\frac{1}{2} [(\varepsilon \Gamma_M \nu_a), (\Psi \Gamma^M \Psi)] = 0 \quad (4.147)$$

par (4.134). Donc,

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon^2 K_a = & -\frac{1}{2} D_M F_{PN} \nu_a \Gamma^M \Gamma^{PN} \varepsilon - \frac{1}{2} F_{PN} \nu_a \Gamma^M \Gamma^{PN} \nabla_\mu \varepsilon - \frac{1}{2} \nu_a \Gamma^M \Gamma^{\mu A} \nabla_\mu \varepsilon D_M \Phi_A \\ & - \frac{1}{2} \nu_a \Gamma^\nu \Gamma^{\mu A} \nabla_\nu \nabla_\mu \varepsilon \Phi_A - \nu_a \Gamma^m \nu_b D_M K^b - \nu_a \Gamma^\mu \nabla_\mu \nu_b K^b. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Le premier terme est nul. En effet, par (A.14),

$$-\frac{1}{2} D_M F_{PN} \nu_a \Gamma^M \Gamma^{PN} \varepsilon = -\frac{1}{2} D_{[M} F_{PN]} \nu_a \Gamma^{MPN} \varepsilon - D^M F_{MN} \nu_a \Gamma^N \varepsilon = 0, \quad (4.149)$$

le premier terme étant nul par l'identité de Bianchi, le second par (4.134). Pour les autres termes de (4.148), on utilise les relations (4.85) et (4.86) faisant intervenir les dérivées covariantes de  $\varepsilon$  et  $\tilde{\varepsilon}$ , ainsi que (4.136) :

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon^2 K_a = & -\frac{1}{2} F_{PN} \nu_a \Gamma^\mu \Gamma^{PN} \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} - \frac{1}{2} \nu_a \Gamma^M \Gamma^{\mu A} \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\varepsilon} D_M \Phi_A \\ & - \frac{1}{2} \nu_a \Gamma^\nu \Gamma^{\mu A} \tilde{\Gamma}_\mu \left( -\frac{1}{4r^2} \right) \Gamma_\nu \varepsilon \Phi_A - \delta_{ab} \varepsilon \Gamma^M \varepsilon D_M K^b - \nu_a \Gamma^\mu \nabla_\mu \nu_b K^b \end{aligned} \quad (4.150)$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{1}{2} 4 F_{PA} \nu_a \tilde{\Gamma}^{PA} \tilde{\varepsilon} - \frac{1}{2} (-4) \nu_a \Gamma^M \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} F_{MA} \\ & - \frac{1}{2} (-4) \nu_a \Gamma^\nu \tilde{\Gamma}^A \left( -\frac{1}{4r^2} \right) \Gamma_\nu \varepsilon \Phi_A - \delta_{ab} \varepsilon \Gamma^M \varepsilon D_M K^b - \nu_a \Gamma^\mu \nabla_\mu \nu_b K^b \end{aligned} \quad (4.151)$$

grâce à (A.18). Les deux premiers termes se simplifient, et donc

$$= \frac{2}{r^2} \nu_a \Gamma^A \varepsilon \Phi_A - \delta_{ab} \varepsilon \Gamma^M \varepsilon D_M K^b - \nu_a \Gamma^\mu \nabla_\mu \nu_b K^b \quad (4.152)$$

$$= -\varepsilon \Gamma^M \varepsilon D_M K_a - \nu_a \Gamma^\mu \nabla_\mu \nu_b K^b \quad (4.153)$$

$$= -v^M D_M K_a - \nu_{[a} \Gamma^\mu \nabla_\mu \nu_{b]} K^b - \nu_{(a} \Gamma^\mu \nabla_\mu \nu_{b)} K^b \quad (4.154)$$

$$= -\mathcal{L}_v K_a - [v^M A_M, K_a] - \nu_{[a} \Gamma^\mu \nabla_\mu \nu_{b]} K^b - 4\varepsilon \tilde{\varepsilon} K_a, \quad (4.155)$$

où on a utilisé la dérivée covariante de (4.136) pour obtenir  $\nu_a \Gamma^\mu \nabla_\mu = 4\varepsilon \tilde{\varepsilon} \delta_{ab}$  et passer à la dernière ligne. Le troisième terme est le seul qui n'est pas familier :  $K$  est une section d'un  $SO(7)$ -fibré vectoriel, et ce terme correspond à une rotation par  $so(7)$  dans la fibre, qui peut apparaître lorsqu'on relève la dérivée de Lie dans le fibré.

Il reste maintenant à montrer comment on peut choisir les  $\nu_a$ . Il n'est pas possible de fermer toute l'algèbre hors de la couche de masse par cette méthode,<sup>8</sup> mais il est possible de fermer une sous-algèbre dont la partie impaire contient 9 des 16 supercharges [27] correspondant aux supersymétries (i.e. dont les éléments sont des combinaisons linéaires de 9 des générateurs  $Q$  spécifiques). La méthode est relativement obscure, car elle utilise une représentation des spineurs de Majorana–Weyl en termes d'octonions. Nous allons ici utiliser une méthode plus simple [28], légèrement moins générale, mais suffisante pour nos besoins : on va fermer une sous-algèbre avec 8 des 16 supercharges de supersymétrie, et autant de supercharges superconformes. Pour cela, on impose la condition  $\Gamma^{09} \varepsilon = \varepsilon$ , c'est-à-dire que  $\varepsilon$  est un spineur invariant sous un sous-groupe  $Spin(1, 1) \subset Spin(9, 1)$ . Le paramètre  $\varepsilon$  est alors un spineur de Weyl de  $Spin(8)$ , c'est-à-dire qu'il a 8 composantes indépendantes. On prend alors  $\nu_a = \Gamma^{a8} \varepsilon$ , avec  $a = 1, \dots, 7$ . Il n'est pas difficile de vérifier que les équations (4.134) et (4.136) sont dans ce cas identiquement satisfaites, en utilisant (A.14) et le fait que  $\varepsilon \Gamma^N \tilde{\Gamma}^P \Gamma^M \varepsilon = 0$  par symétrie si tous les indices sont distincts (cf. (A.34)).

Quant à l'équation (4.135), elle est une conséquence des deux autres [5, appendice B], et est donc automatiquement satisfaite.

*Démonstration.* On veut montrer que la matrice  $M^{\alpha\beta} = \nu_a^\alpha \nu_a^\beta + \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta$  peut être écrite comme  $M^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} v^N \tilde{\Gamma}_N^{\alpha\beta}$ , c'est-à-dire qu'elle peut être développée sur les matrices  $\tilde{\Gamma}_N^{\alpha\beta}$  avec des coefficients  $\frac{1}{2} v^N$ . Définissons un produit scalaire sur l'espace des matrices  $16 \times 16$ , par  $(M, N) = M_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}$ . Comme  $\Gamma_{\alpha\beta}^M \tilde{\Gamma}_N^{\alpha\beta} = 16 \delta_N^M$  en vertu des relations d'anticommutation et que  $\Gamma^N = \tilde{\Gamma}_N$ , l'ensemble des  $\frac{1}{4} \tilde{\Gamma}_N$  est orthonormé, et on peut l'étendre en une base de  $\mathbb{R}^{16 \times 16}$ . La composante de  $M$  selon  $\frac{1}{4} \tilde{\Gamma}_N$  dans cette base est donnée par

$$m_N = (M, \frac{1}{4} \Gamma^N) = \frac{1}{4} (\nu_a \Gamma^N \nu_a + \varepsilon \Gamma^N \varepsilon) = 2v^N. \quad (4.156)$$

---

8. En fait, il n'y a pas de méthode connue pour fermer l'algèbre de supersymétrie hors de la couche de masse en dimension 10.

Les composantes dans la direction orthogonale aux  $\frac{1}{4}\tilde{\Gamma}_N$  sont nulles. D'une part,

$$(M, M) = (\varepsilon\varepsilon)(\varepsilon\varepsilon) + (\nu_a\nu_b)(\nu_a\nu_b) + 2(\varepsilon\nu_a)(\varepsilon\nu_b) = (\varepsilon\varepsilon)(\varepsilon\varepsilon) + \delta_{ab}(\varepsilon\varepsilon)\delta_{ab}(\varepsilon\varepsilon) + 0 = 8(\varepsilon\varepsilon)(\varepsilon\varepsilon), \quad (4.157)$$

en utilisant  $\Gamma^0 = I$  dans la représentation des matrices  $\Gamma$  choisie. D'autre part,

$$\sum_N m_N^2 = 4v_N v_N = 4(\varepsilon\Gamma_N\varepsilon)(\varepsilon\tilde{\Gamma}^N\varepsilon) = 4[(\varepsilon\Gamma_N\varepsilon)(\varepsilon\Gamma^N\varepsilon) + 2(\varepsilon\varepsilon)(\varepsilon\varepsilon)] = 8(\varepsilon\varepsilon)(\varepsilon\varepsilon), \quad (4.158)$$

où on a encore utilisé  $\Gamma^0 = I$  ainsi que l'identité miraculeuse sous la forme (A.36). Comme les deux normes coïncident, il n'y a pas de composantes le long des autres directions de la base, ce qui prouve le résultat.  $\square$

On a ainsi achevé la fermeture hors de la couche de masse de l'algèbre : plus rien ne dépend des équations du mouvement, et on connaît les conditions qu'une fonctionnelle  $\beta$  doit satisfaire pour que  $\delta_\varepsilon^2\beta = 0$ . On va construire un tel  $\beta$  dans le chapitre suivant, mais avant cela on va étudier la boucle de Wilson supersymétrique.

## 4.5. La boucle de Wilson supersymétrique

Une boucle de Wilson est un opérateur invariant de jauge non local, qui correspond mathématiquement à l'holonomie [9] de la connexion de jauge. Si  $A_\mu$  est la 1-forme qui représente localement la connexion, et que l'on considère un chemin  $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow M$  de vecteur tangent  $V$ , le transport parallèle le long du chemin peut s'écrire [9], en itérant l'équation intégrale pour le transport parallèle, comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^t dt_k V^{\mu_1}(t_1) A_{\mu_1}(\mathcal{C}(t_1)) \cdots V^{\mu_k}(t_k) A_{\mu_k}(\mathcal{C}(t_k)) \quad (4.159)$$

que l'on résume par

$$\mathcal{P} \exp - \int_0^t dt' V^\mu(t') A_\mu(\mathcal{C}(t')), \quad (4.160)$$

où le symbole  $\mathcal{P}$ , appelé<sup>9</sup> « produit ordonné le long du chemin », est là pour se souvenir qu'il faut ordonner les opérateurs  $A_\mu$  de façon à ce que l'opérateur  $A_\mu$  pris au premier temps le long du chemin soit le plus à droite dans le développement de l'exponentielle, et en itérant la définition.

Si  $\mathcal{C}$  est une boucle ( $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(1) = p$ ), on obtient la boucle de Wilson en faisant  $t = 1$  et en prenant la trace dans la représentation  $R$  du groupe de jauge,

$$W_R(\mathcal{C}) = \text{Tr}_R \mathcal{P} \exp - \int_0^1 dt V^\mu(t) A_\mu(\mathcal{C}(t)) = \text{Tr}_R \mathcal{P} \exp - \oint_{\mathcal{C}} A_\mu dx^\mu. \quad (4.161)$$

9. *Path-ordered product* en anglais.

Cette boucle de Wilson n'est cependant pas supersymétrique, il n'y a pas de  $\varepsilon$  tel que  $\delta_\varepsilon \int dt V^\mu(t) A_\mu(\mathcal{C}(t)) = 0$ . On va donc la modifier en ajoutant des champs scalaires dans l'intégrant :

$$W_R(\mathcal{C}) = \text{Tr}_R \mathcal{P} \exp \oint_{\mathcal{C}} (A_\mu dx^\mu + \Phi_A y^A ds), \quad (4.162)$$

où les  $y^A$  prennent leurs valeurs dans  $S^5$ , i.e.  $y : [0, 1] \rightarrow S^5 \subset \mathbb{R}^6$ . L'intégrant est supersymétrique en un point donné : si on définit  $v^M = (V^\mu, y^A |V|)$  où  $|V|$  est la norme du vecteur tangent  $V$ , alors on a

$$0 = \delta_\varepsilon(v^M A_M) = v^M(\varepsilon \Gamma_M \Psi) \quad \text{si} \quad v^M = \varepsilon \Gamma^M \varepsilon \quad (4.163)$$

en vertu de l'identité miraculeuse (A.36). Pour que toute la boucle soit supersymétrique, on doit pouvoir trouver un  $\varepsilon$  de la forme (4.71),  $\varepsilon(x) = e^{\frac{1}{2}\Omega(x)}(\varepsilon_s + x^{\hat{\mu}} \tilde{\Gamma}_{\hat{\mu}} \varepsilon_c)$  qui satisfasse  $\delta_\varepsilon(v^M A_M) = 0$  en tout point de la boucle. Ceci est une contrainte non triviale sur la boucle. On peut analyser en toute généralité les différentes boucles possibles qui préservent une partie de la supersymétrie, i.e. pour lesquelles il existe une sous-algèbre de l'algèbre superconforme telle que  $\delta_\varepsilon W_R(\mathcal{C}) = 0$  pour tout  $\varepsilon$  dans cette sous-algèbre [29]. Cette analyse sort du cadre de ce mémoire, et on va prendre ici une boucle particulière, puis montrer qu'elle préserve une partie des supercharges.

On considère une boucle circulaire placée à l'équateur de  $S^4$ . Sans perte de généralité, on peut la prendre dans le plan  $(x^1, x^2)$  grâce à la symétrie  $Spin(4)$ , et on peut mettre  $y^A = (y^0, 0, \dots, 0)$  car  $Spin(5, 1)_R$  agit transitivement sur les  $\Phi_A$ . Explicitement,  $x^\mu = (2r \cos t, 2r \sin t, 0, 0)$  avec  $t \in [0, 2\pi[$  (l'équateur est le lieu des points  $x^2 = 4r^2$ ). On a alors  $|V| = \sqrt{(g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu)} = r$  car à l'équateur  $e^\Omega = \frac{1}{2}$ , et donc  $v^M = (r, -2r \sin t, 2r \cos t, 0, \dots, 0)$ . La boucle est supersymétrique pour le paramètre  $\varepsilon$  si et seulement si

$$0 = \delta_\varepsilon(v^M A_M) = v^M \varepsilon \Gamma_M \Psi \quad \forall A_M \iff v^M \Gamma_M \varepsilon = 0. \quad (4.164)$$

Ici<sup>10</sup>

$$0 = r \Gamma_0 \varepsilon - r \sin t \Gamma_1 \varepsilon + r \cos t \Gamma_2 \varepsilon \quad (4.165)$$

$$\implies \frac{1}{2}(\varepsilon_s + x^{\hat{\mu}} \tilde{\Gamma}_{\hat{\mu}} \varepsilon_c) = \varepsilon = \tilde{\Gamma}^0(\sin t \Gamma_1 \varepsilon - \cos t \Gamma_2 \varepsilon) \quad (4.166)$$

$$= \tilde{\Gamma}^0(\sin t \Gamma_1 \frac{1}{2}(\varepsilon_s + x^{\hat{\mu}} \tilde{\Gamma}_{\hat{\mu}} \varepsilon_c) + \cos t \Gamma_2 \frac{1}{2}(\varepsilon_s + x^{\hat{\mu}} \tilde{\Gamma}_{\hat{\mu}} \varepsilon_c)). \quad (4.167)$$

En particulierisant pour les  $x^\mu$  sur la boucle, on obtient l'équation

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_s + 2r \cos t \tilde{\Gamma}_1 \varepsilon_c + 2r \sin t \tilde{\Gamma}_2 \varepsilon_c) = \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}^0(2r \Gamma_1 \tilde{\Gamma}_2 \varepsilon_c - \cos t \Gamma_2 \varepsilon_s + \sin t \tilde{\Gamma}_1 \varepsilon_s) \quad (4.168)$$

---

10.  $\Gamma_1$  signifie  $\Gamma_{\hat{\mu}}$ ,  $\hat{\mu} = 1$ , et de même pour les autres indices.

qui est satisfaite si et seulement si

$$\varepsilon_s = 2r\tilde{\Gamma}^0\Gamma_1\tilde{\Gamma}_2\varepsilon_c \iff \varepsilon_c = \frac{1}{2r}\Gamma^0\tilde{\Gamma}_1\Gamma_2\varepsilon_s. \quad (4.169)$$

La boucle de Wilson considérée est donc supersymétrique, mais pour une combinaison particulière des supercharges correspondant aux transformations de supersymétrie de Poincaré et aux transformations superconformes spéciales. On peut choisir librement  $\varepsilon_s$ , ce qui détermine entièrement la forme de  $\varepsilon_c$ , et la boucle de Wilson est donc invariante sous une sous-algèbre engendrée par la moitié des supercharges, à savoir 16.

Le  $\delta_\varepsilon$  qui jouera le rôle de  $Q$  dans la localisation devra faire intervenir un  $\varepsilon$  qui satisfait à (4.169) pour que la boucle de Wilson soit  $Q$ -fermée.



## 5. Localisation de la théorie

On en arrive maintenant au cœur du mémoire. Toute l'étude qui précède va porter ses fruits, et nous permettre de définir dans la première section une fonctionnelle de localisation  $\beta$  ainsi qu'un opérateur  $Q$  choisi parmi les transformations superconformes qui préservent notre boucle de Wilson à l'équateur. Cette fonctionnelle et cet opérateur doivent être tels que  $Q^2\beta = 0$  et que la composante de  $Q\beta$  qui dépend des champs bosoniques soit semi-définie positive sur l'espace des champs. Dans la deuxième section, on pourra localiser explicitement l'intégrale de chemin, et voir ainsi que les seules contributions à l'intégrale proviennent de champs constants. Pour finir, on va donner dans la dernière section une piste pour expliquer qu'il n'y a pas de fluctuations dans la direction normale, et donc pas de déterminant à calculer.

### 5.1. Le choix de la fonctionnelle de localisation

On cherche une fonctionnelle qui soit invariante sous  $\delta_\varepsilon^2$  pour un certain  $\varepsilon$ . En vertu de (4.130), on sait que cette fonctionnelle doit obéir aux contraintes suivantes :

- être invariante sous la transformation de jauge de paramètre  $v^M A_M$  ;
- être invariante sous dilatation locale de paramètre  $2\varepsilon\tilde{\varepsilon}$  ;
- être invariante sous une dérivée de Lie de paramètre  $v^\mu$  ;
- être invariante sous la transformation de  $R$ -symétrie de paramètre  $2\varepsilon\tilde{\Gamma}_{AB}\tilde{\varepsilon}$ .

De plus, elle doit être invariante pour la rotation  $so(7)_K$  des  $K^a$ . La première condition peut être facilement satisfaite : il suffit de prendre une fonctionnelle invariante de jauge, ce qu'on peut construire sans difficulté en prenant une trace sur l'algèbre de Lie. On prend la deuxième condition comme une contrainte sur  $2\varepsilon\tilde{\varepsilon}$  : on veut un  $\varepsilon$  qui, en plus d'être une symétrie de la boucle de Wilson, n'engendre pas de dilatation. Ceci permet aussi de résoudre très facilement la troisième condition : supposons que la fonctionnelle soit l'intégrale d'une certaine fonction des champs  $\rho$ , qui se transforme comme un scalaire sous une dérivée de Lie de paramètre  $v^\mu$ . On a alors :

$$\delta_{\varepsilon|\mathcal{L}_v}^2 \int_{S^4} d^4x \sqrt{g} \rho = \int_{S^4} d^4x \sqrt{g} \mathcal{L}_v \rho = \int_{S^4} d^4x \sqrt{g} v^\mu \partial_\mu \rho = - \int_{S^4} d^4x \sqrt{g} \nabla_\mu v^\mu \rho. \quad (5.1)$$

Or,

$$\nabla_\mu v^\mu = \nabla_\mu (\varepsilon \Gamma^\mu \varepsilon) = 2\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}_\mu \Gamma^\mu \varepsilon = 8\tilde{\varepsilon}\varepsilon, \quad (5.2)$$

ce qui est nul si  $\varepsilon$  n'engendre pas de dilatation. Pour la condition sur la  $R$ -symétrie, et le  $so(7)_K$ , on va construire explicitement un scalaire sous la transformation spécifique donnée.

On procède de la façon suivante. Supposons que l'on ait trouvé un  $Q = \delta_\varepsilon$  qui laisse invariant la boucle de Wilson et qui n'engendre pas de dilatation (on va choisir un  $\varepsilon$  adapté plus loin). La fonctionnelle suivante obéit manifestement à toutes les conditions, si  $\Xi$  se transforme de la même façon que  $\Psi$  sous  $Q^2$  :

$$\beta = \int_{S^4} d^4x \sqrt{g} \operatorname{Tr} (\bar{\Xi} \Psi), \quad (5.3)$$

où  $\bar{\Xi}$  est le conjugué de Dirac de  $\Xi$ . Comme il faut que  $Q\beta$  ait une composante qui ne dépende que des champs bosoniques, il suffit de prendre  $\Xi = Q\Psi$ , car alors  $Q(\bar{Q}\bar{\Psi}\Psi) = (\bar{Q}^2\bar{\Psi}\Psi) + (\bar{Q}\bar{\Psi}Q\Psi)$  et le deuxième terme ne dépend que des champs bosoniques. Comme  $Q^2$  commute avec  $Q$ ,  $Q\Psi$  se transforme de la même manière que  $\Psi$  sous  $Q^2$ , et donc  $Q^2\beta = 0$ . La composante de  $Q\beta$  qui ne dépend que des champs bosoniques est alors

$$\beta|_{\text{bos}} = \int_{S^4} d^4x \sqrt{g} \operatorname{Tr} (\bar{Q}\bar{\Psi}Q\Psi). \quad (5.4)$$

Afin que cette intégrale soit semi-définie positive, il faut que la signature de la métrique soit euclidienne. On fait pour cela une rotation de Wick : au lieu d'intégrer sur un champ  $\Phi_0$  réel, on fait  $\Phi_0 = i\Phi_0^E$  avec  $\Phi_0^E$  réel, tout le reste restant identique au cas de signature (9,1) (y compris la métrique  $g^{MN}$  et les  $\Gamma^M$ ). Il est aussi nécessaire de faire  $K_a = iK_a^E$  avec  $K_a^E$  réels.

Reste à choisir un  $\varepsilon$  adapté. La condition  $\tilde{\varepsilon}\varepsilon = 0$  se ramène aisément, en utilisant (4.71),(4.85), à

$$\varepsilon_c \varepsilon_s = 0 \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_c \tilde{\Gamma}^{\hat{\mu}} \varepsilon_c - \frac{1}{4r^2} \varepsilon_s \Gamma^{\hat{\mu}} \varepsilon_s = 0. \quad (5.6)$$

La première condition est automatiquement satisfaite si  $\varepsilon$  préserve la boucle de Wilson : par (4.169), elle est équivalente à  $\frac{1}{2r} \varepsilon_s \Gamma_2 \tilde{\Gamma}_1 \Gamma^0 \varepsilon_s = 0$ , et le membre de gauche est nul par symétrie (cf. (A.34)). Pour résoudre la deuxième, on prend  $\varepsilon_s$  chiral par rapport à la 4-chiralité d'espace-temps :  $\Gamma^{1234} \varepsilon_s = \varepsilon_s$  (où les indices chiffrés explicites sont des indices  $\hat{\mu}$  dans la base orthonormée). On a alors automatiquement  $\tilde{\Gamma}^{1234} \varepsilon_c = -\varepsilon_c$ , et chacun des termes de la deuxième équation est nul, car  $\{\Gamma^{1234}, \Gamma^{\hat{\mu}}\} = 0$ . Comme pour obtenir la fermeture hors de la couche de masse, on a brisé la  $R$ -symétrie  $spin(6)_R$  en  $spin(4)_R \oplus spin(2)_R$  et qu'on prend  $\varepsilon$  invariant sous le  $spin(2)_R$  engendré par  $\Gamma^{09}$ , on peut encore imposer une condition de chiralité dans  $spin(4)_R$ . On prend donc  $\Gamma^{5678} \varepsilon = \varepsilon$ , et on dira que «  $\varepsilon$  est (5 $\cdots$ 8)-chiral ». La dernière condition que l'on impose est une condition de normalisation : on prend  $\varepsilon_s \varepsilon_s = 1$ .

## 5.2. La fonctionnelle de localisation explicite

On va, dans un premier temps, calculer explicitement  $Q\beta|_{\text{bos}}$  pour le  $Q$  choisi. Comme il y a beaucoup de termes à considérer (auparavant, on travaillait avec des expressions covariantes sous  $spin(10)$ ; maintenant, on distingue les transformations d'espace-temps,  $spin(4)_R$  et  $spin(2)_R$ ) et que pour chaque terme les calculs sont assez techniques, toutes les étapes ne sont pas faites en autant de détails que dans les chapitres précédents.

On a

$$Q\Psi = \frac{1}{2}F_{MN}\Gamma^{MN}\varepsilon + \frac{1}{2}\Phi_A\Gamma^{\mu A}\nabla_\mu\varepsilon + \nu_a K^a. \quad (5.7)$$

Avec les conditions de réalité imposées sur les différents champs (et en n'oubliant pas que les générateurs de l'algèbre de Lie sont antihermitiens), son conjugué de Dirac est

$$\overline{Q\Psi} = -\left(\frac{1}{2}\hat{\Gamma}^{NM}F_{MN} + \frac{1}{2}\Phi_A\nabla_\mu\varepsilon\hat{\Gamma}^{A\mu} - \nu_a K^a\right), \quad (5.8)$$

où les  $\hat{\Gamma}^M$  sont définis comme  $\hat{\Gamma}^0 = -\Gamma^0$ ,  $\hat{\Gamma}^M = \Gamma^M$ ,  $M \neq 0$  et de manière similaire pour les  $\hat{\Gamma}^{\hat{M}}$ , ceci afin d'absorber le signe différent provenant de la conjugaison complexe de  $\Phi_0$ . Ces définitions coïncident avec  $\hat{\Gamma}^M = \tilde{\Gamma}^M$  et  $\hat{\Gamma}^{\hat{M}} = \hat{\Gamma}^M$  dans la représentation de l'algèbre de Clifford choisie, et on utilisera ceci plutôt que d'alourdir les notations avec des « ^ ». La partie de la fonctionnelle de localisation dépendant des champs bosonique est donc donnée par

$$Q\beta|_{\text{bos}} = -\text{Tr} \int_{S^4} d^4x V \quad \text{avec}$$

$$V = \sqrt{g} \left( \frac{1}{2}\Gamma^{NM}F_{MN} + \frac{1}{2}\Phi_A\nabla_\mu\varepsilon\Gamma^{A\mu} - \nu_a K^a \right) \left( \frac{1}{2}\Gamma^{PQ}F_{PQ}\varepsilon + \frac{1}{2}\Phi_B\Gamma^{\nu B}\nabla_\nu\varepsilon + K^b\nu_b \right). \quad (5.9)$$

On va traiter chacun des termes indépendamment, en se souvenant qu'on trace sur l'algèbre de Lie, et qu'on peut alors faire des permutations cycliques et intégrer par parties les dérivées covariantes.

### 5.2.1. Le terme en $KK$

Ce terme vaut

$$V_{KK} = -\sqrt{g} K^a K^b \nu_a \nu_b. \quad (5.10)$$

Or,  $\nu_a = \Gamma^{a8}\varepsilon$ , et donc

$$\nu_a \nu_b = \varepsilon \Gamma^8 \tilde{\Gamma}^a \tilde{\Gamma}^b \Gamma^8 \varepsilon = \varepsilon \tilde{\Gamma}^a \tilde{\Gamma}^b \varepsilon = \delta^{ab} \varepsilon \varepsilon. \quad (5.11)$$

Avec les contraintes sur  $\varepsilon$ , on trouve facilement que  $\varepsilon\varepsilon = 1$ , et ainsi

$$V_{KK} = -\sqrt{g} K^a K_a. \quad (5.12)$$

### 5.2.2. Le terme en $FF$

Après cette mise en bouche, on peut attaquer le gros morceau, à savoir le terme bilinéaire en  $F$ . On a

$$V_{FF} = \sqrt{g} \frac{1}{4} \varepsilon \Gamma^{NM} \Gamma^{PQ} \varepsilon F_{MN} F_{PQ} = \sqrt{g} \frac{1}{4} \varepsilon \tilde{\Gamma}^N \Gamma^M \Gamma^{PQ} \varepsilon F_{MN} F_{PQ} \quad (5.13)$$

car l'antisymétrie est déjà imposée par  $F_{MN}$ . En utilisant (A.14), on obtient

$$V_{FF} = \sqrt{g} \frac{1}{2} \varepsilon \tilde{\Gamma}^N \Gamma^Q \varepsilon F_{MN} F^M{}_Q + \sqrt{g} \frac{1}{4} \varepsilon \tilde{\Gamma}^N \Gamma^{MPQ} F_{MN} F_{PQ} \quad (5.14)$$

$$= \sqrt{g} \frac{1}{2} F_{MN} F^{MN} + \sqrt{g} \frac{1}{4} \varepsilon \tilde{\Gamma}^N \Gamma^M \tilde{\Gamma}^P \Gamma^Q \varepsilon \frac{1}{3} (F_{MN} F_{PQ} + F_{PN} F_{QM} + F_{QN} F_{MP}). \quad (5.15)$$

Pour le deuxième terme, on fait la distinction entre les indices  $(1, \dots, 4, 9, 0)$  et  $i = (5, \dots, 8)$ . Comme la parenthèse impose l'antisymétrie en  $(MNPQ)$ , ces indices doivent tous être différents, et la  $(5 \cdots 8)$ -chiralité de  $\varepsilon$  implique alors que seuls les termes avec aucun, deux ou quatre de ces indices parmi  $(5, \dots, 8)$  sont non nuls :

$$\varepsilon \tilde{\Gamma}^N \Gamma^M \tilde{\Gamma}^P \Gamma^Q \tilde{\Gamma}^5 \Gamma^6 \tilde{\Gamma}^7 \Gamma^8 \varepsilon = \varepsilon \Gamma^8 \tilde{\Gamma}^7 \Gamma^6 \tilde{\Gamma}^5 \Gamma^Q \tilde{\Gamma}^P \Gamma^M \tilde{\Gamma}^N \varepsilon, \quad (5.16)$$

et la permutation pour réordonner les indices n'est paire que sous cette condition. On va considérer chacun de ces cas séparément.

#### Aucun indice parmi $(5, \dots, 8)$

On sépare encore les indices  $(1, \dots, 4, 9, 0)$  en  $\hat{\mu} = (1, \dots, 4)$  et  $(0, 9)$ .

Si tous les indices sont parmi  $(1, \dots, 4)$ , on a  $4! = 24$  contributions identiques, et ces termes donnent

$$\begin{aligned} & 24 \frac{1}{4} \frac{1}{3} \sqrt{g} \varepsilon \Gamma^{1234} \varepsilon (F_{21} F_{34} + F_{31} F_{42} + F_{41} F_{23}) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{g} \varepsilon \Gamma^{1234} \varepsilon F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} (*F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{g} \cos \theta \varepsilon F_{\mu\nu} (*F)^{\mu\nu}, \quad (5.18)$$

où on a utilisé le fait facile à vérifier que  $\varepsilon \Gamma^{1234} \varepsilon = \cos \theta$  où  $\theta$  est l'angle polaire (voir figure 4.1 page 42), et on a introduit le dual de Hodge  $(*F)$  de  $F$ , donné dans la base orthonormée des  $e^{\hat{\mu}}$  par

$$(*F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{1}{2} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}, \quad (5.19)$$

et  $\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$  est le symbole de Levi-Civita complètement antisymétrique avec  $\epsilon^{1234} = 1$ .

Si un des indices vaut 0, il n'y a pas de contribution car

$$\varepsilon\Gamma^0\Gamma^{MPQ}\varepsilon = \varepsilon\Gamma^{MPQ}\varepsilon = 0. \quad (5.20)$$

Le seul cas restant est lorsqu'un des indices vaut 9. Il y a 4 contributions identiques pour les 4 positions possibles de cet indice :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\sqrt{g}\varepsilon\Gamma^9\Gamma^{\mu\nu\rho}\varepsilon(D_\mu\Phi_9F_{\nu\rho} + D_\nu\Phi_9F_{\rho\mu} + D_\rho\Phi_9F_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{3}\sqrt{g}\nabla_\mu(\varepsilon\Gamma^9\Gamma^{\mu\nu\rho}\varepsilon)\Phi_9F_{\nu\rho} - \frac{1}{3}\sqrt{g}\varepsilon\Gamma^9\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon\Phi_9D_\mu F_{\nu\rho} + \text{perm. cycliques}(\mu\nu\rho) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{g}\nabla_\mu(\varepsilon\Gamma^9\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon)\Phi_9F_{\nu\rho} + \text{perm. cycliques}(\mu\nu\rho) \quad (5.22)$$

par l'identité de Bianchi,

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{g}\tilde{\Gamma}_\mu\Gamma^9\Gamma^{\mu\nu\rho}\varepsilon\Phi_9F_{\nu\rho} + \text{perm. cycliques}(\mu\nu\rho) \quad (5.23)$$

$$= 4\sqrt{g}\tilde{\Gamma}^9\Gamma^{\nu\rho}\varepsilon\Phi_9F_{\nu\rho} \quad (5.24)$$

car il y a deux indices que peut prendre  $\mu$  par antisymétrie de  $\Gamma^{\mu\nu\rho}$ .

### Deux indices parmi (5, $\dots$ , 8)

Si tous les autres indices sont parmi (1,  $\dots$ , 4), on a 6 contributions identiques correspondant aux 6 possibilités pour placer 2 indices  $i, j$  parmi 4 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\frac{1}{3}6\sqrt{g}\varepsilon\tilde{\Gamma}^\nu\Gamma^\mu\tilde{\Gamma}^i\Gamma^j\varepsilon(F_{\mu\nu}F_{ij} + F_{i\nu}F_{j\mu} + F_{j\nu}F_{\mu i}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{g}\varepsilon\tilde{\Gamma}^\nu\Gamma^\mu\tilde{\Gamma}^i\Gamma^j\varepsilon(F_{\mu\nu}[\Phi_i, \Phi_j] + D_\nu\Phi_iD_\mu\Phi_j - D_\nu\Phi_jD_\mu\Phi_i) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$= \sqrt{g}\varepsilon\tilde{\Gamma}^\nu\Gamma^\mu\tilde{\Gamma}^i\Gamma^j\varepsilon(F_{\mu\nu}\Phi_i\Phi_j + \Phi_jD_\nuD_\mu\Phi_i) + \sqrt{g}\nabla_\nu(\varepsilon\Gamma^{\nu\mu}\Gamma^{ij}\varepsilon)\Phi_jD_\mu\Phi_i \quad (5.26)$$

$$= 0 - 2\sqrt{g}\tilde{\Gamma}_\nu\Gamma^{\nu\mu}\Gamma^{ij}\varepsilon\Phi_jD_\mu\Phi_i \quad (5.27)$$

en utilisant que  $[F_{\mu\nu}, \Phi_i] = [D_\mu, D_\nu]\Phi_i$ ,

$$= -6\sqrt{g}\tilde{\Gamma}^\mu\Gamma^{ij}\Phi_iD_\mu\Phi_j. \quad (5.28)$$

Si un des indices vaut 9, il y a 12 contributions identiques :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}\frac{1}{3}12\sqrt{g}\varepsilon\tilde{\Gamma}^9\Gamma^\mu\tilde{\Gamma}^i\Gamma^j\varepsilon(D_\mu\Phi_9[\Phi_i, \Phi_9] - [\Phi_i, \Phi_9]D_\mu\Phi_j + [\Phi_j, \Phi_9]D_\mu\Phi_i) \\ &= -8\sqrt{g}\tilde{\Gamma}^9\Gamma^{ij}\varepsilon\Phi_i[\Phi_9, \Phi_j] \end{aligned} \quad (5.29)$$

par un raisonnement similaire.

### Quatre indices parmi (5, . . . , 8)

On a 24 contributions identiques :

$$\begin{aligned} & 24 \frac{1}{4} \frac{1}{3} \sqrt{g} \varepsilon \Gamma^{5678} \varepsilon ([\Phi_6, \Phi_5][\Phi_7, \Phi_8] + [\Phi_7, \Phi_5][\Phi_8, \Phi_6] + [\Phi_8, \Phi_5][\Phi_6, \Phi_7]) \\ & = -2\sqrt{g} \varepsilon \Gamma^{5678} \varepsilon \Phi_5 ([\Phi_6, [\Phi_7, \Phi_8]] + [\Phi_7, [\Phi_8, \Phi_6]] + [\Phi_8, [\Phi_6, \Phi_7]]) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$= 0 \quad \text{par l'identité de Jacobi.} \quad (5.31)$$

### Résumé

Si on remet tous les termes ensemble, on obtient

$$\begin{aligned} V_{FF} = \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} F_{MN} F^{MN} - \frac{1}{2} \cos \theta F_{\mu\nu} (*F)^{\mu\nu} + 4\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}^9 \Gamma^{\mu\nu} \varepsilon \Phi_9 F_{\mu\nu} \right. \\ \left. - 6\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}^{\mu} \Gamma^{ij} \Phi_i D_{\mu} \Phi_j - 8\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}^9 \Gamma^{ij} \varepsilon \Phi_i [\Phi_9, \Phi_j] \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

### 5.2.3. Le terme en $F\Phi$

On a

$$V_{F\Phi} = \frac{1}{4} \sqrt{g} \Phi_A \nabla_{\mu} \varepsilon \Gamma^{A\mu} \Gamma^{MN} \varepsilon F_{MN} - \frac{1}{4} \sqrt{g} \varepsilon \Gamma^{MN} \Gamma^{\nu B} \nabla_{\nu} \varepsilon \Phi_B F_{MN} \quad (5.33)$$

$$= \sqrt{g} \left( \varepsilon \Gamma^A \tilde{\Gamma}^M \Gamma^N \varepsilon F_{MN} \Phi_A - \tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}^A \Gamma^M \tilde{\Gamma}^N \varepsilon F_{MN} \Phi_A \right). \quad (5.34)$$

**Si  $A = 0$**

Dans ce cas, les contributions sont nulles :

- si  $M, N \neq 0$ , on a  $\tilde{\Gamma}^0 = -\Gamma^0$ ,  $\Gamma^M = \tilde{\Gamma}^M$ ,  $\Gamma^N = \tilde{\Gamma}^N$  et les deux termes sont identiques ;
- si  $M = 0$ ,  $N \neq 0$ , on utilise que  $\tilde{\varepsilon} \Gamma^N \tilde{\varepsilon} = 0$  avec les contraintes imposées sur  $\varepsilon$ .

**Si  $A = 9$**

Les deux termes contribuent de la même façon :

$$V_{F\Phi_9} = -2\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^9 \tilde{\Gamma}^M \Gamma^N \varepsilon F_{MN} \Phi_9. \quad (5.35)$$

Les différentes possibilités à considérer sont :  $(M, N) = (\mu, \nu), (i, j), (9, N), (0, N), (\mu, j)$ . Les seules contributions non nulles avec les contraintes que l'on a sur  $\varepsilon$  (on utilise  $\tilde{\varepsilon} \Gamma^N \varepsilon = 0$ ) sont les deux premières, qui sont respectivement

$$-2\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^9 \Gamma^{\mu\nu} \varepsilon F_{\mu\nu} \Phi_9 \quad \text{et} \quad -2\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^9 \Gamma^{ij} \varepsilon [\Phi_i, \Phi_j] \Phi_9. \quad (5.36)$$

Si  $A = i$

De nouveau, les deux termes contribuent de la même façon :

$$V_{F\Phi_i} = -2\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^i \tilde{\Gamma}^M \Gamma^N \varepsilon F_{MN} \Phi_i. \quad (5.37)$$

Les différentes possibilités à considérer sont :  $(M, N) = (\mu, j), (9, j), (\mu, \nu), (i, j), (9, 0), (\mu, 9), (0, N)$ . Seules les deux premières possibilités donnent ici des contributions non nulles, qui sont respectivement

$$4\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^\mu \Gamma^{ij} \varepsilon \Phi_i D_\mu \Phi_j \quad \text{et} \quad 4\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^9 \Gamma^{ij} \varepsilon [\Phi_9, \Phi_j] \Phi_i. \quad (5.38)$$

### Résumé

En sommant les différents termes, on obtient

$$V_{F\Phi} = -2\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^9 \Gamma^{\mu\nu} \varepsilon F_{\mu\nu} \Phi_9 + 4\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^\mu \Gamma^{ij} \varepsilon \Phi_i D_\mu \Phi_j + 6\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \Gamma^9 \Gamma^{ij} \varepsilon [\Phi_9, \Phi_j] \Phi_i. \quad (5.39)$$

#### 5.2.4. Le terme en $K\Phi$

On a

$$V_{K\Phi} = -\frac{1}{2}\sqrt{g} K^a \nu_a \Gamma^{\nu B} \nabla_\nu \varepsilon \Phi_B + \frac{1}{2}\sqrt{g} \Phi_A \nabla_\mu \varepsilon \Gamma^{A\mu} \nu_b K^b \quad (5.40)$$

$$= -2\sqrt{g} K_a \nu_a \tilde{\Gamma}^A \tilde{\varepsilon} \Phi_a + 2\sqrt{g} K^a \nu_a \Gamma^A \tilde{\varepsilon} \Phi_A. \quad (5.41)$$

Contrairement au cas  $F\Phi$ , la seule contribution est pour  $A = 0$  car  $\tilde{\Gamma}^A = \Gamma^A$  si  $A \neq 0$  et les deux termes se compensent alors. On a donc

$$V_{K\Phi} = -4\sqrt{g} K^a \nu_a \Gamma^0 \tilde{\varepsilon} \Phi_0 = -4\sqrt{g} K^a \nu_a \tilde{\varepsilon} \Phi_0. \quad (5.42)$$

#### 5.2.5. Le terme en $FK$

On a

$$V_{FK} = \frac{1}{2}\sqrt{g} \varepsilon \Gamma^{NM} F_{MN} \nu_a K^a - \frac{1}{2}\sqrt{g} K^a \nu_a \Gamma^{MN} \varepsilon F_{MN} \quad (5.43)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{g} \varepsilon \tilde{\Gamma}^N \Gamma^M F_{MN} \nu_a K^a - \frac{1}{2}\sqrt{g} K^a \varepsilon \tilde{\Gamma}^N \Gamma^M \nu_a F_{MN} = 0. \quad (5.44)$$

#### 5.2.6. Le terme en $\Phi\Phi$

Ce terme-ci n'est pas très compliqué. On a

$$V_{\Phi\Phi} = \frac{1}{4}\sqrt{g} \Phi_A \Phi_B \nabla_\mu \varepsilon \Gamma^{A\mu} \Gamma^{\nu B} \nabla_\nu \varepsilon = 4\sqrt{g} \Phi_A \Phi_B \tilde{\varepsilon} \Gamma^A \tilde{\Gamma}^B \tilde{\varepsilon} = 4\sqrt{g} \tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon} \Phi^A \Phi_A. \quad (5.45)$$

On montre facilement que  $\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{4r^2}$ , et donc

$$V_{\Phi\Phi} = \frac{1}{r^2} \sqrt{g} \Phi^A \Phi_A. \quad (5.46)$$

### 5.2.7. Résumé

Si on somme tous les termes, on obtient pour  $V$  :

$$V = \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} F_{MN} F^{MN} - \frac{1}{2} \cos \theta F_{\mu\nu} (*F)^{\mu\nu} + 2\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}^9 \Gamma^{\mu\nu} \varepsilon \Phi_9 F_{\mu\nu} - 2\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^{ij} \Phi_i D_\mu \Phi_j - 2\tilde{\varepsilon} \tilde{\Gamma}^9 \Gamma^{ij} \varepsilon \Phi_i [\Phi_9, \Phi_j] + \frac{1}{r^2} \Phi^A \Phi_A - 4K^a \nu_a \tilde{\varepsilon} \Phi_0 - K^a K_a \right). \quad (5.47)$$

## 5.3. La localisation

Maintenant qu'on connaît explicitement la fonctionnelle de localisation  $\beta$ , on regarde sous quelles conditions  $Q\beta|_{\text{bos}} = 0$ , c'est-à-dire sur quelles configurations l'intégrale fonctionnelle localise. Pour cela, on va réécrire  $V$  comme une somme de carrés parfaits, et  $Q\beta|_{\text{bos}}$  sera alors nul si et seulement si chacun des carrés est nul.

On commence par les termes qui contiennent  $F_{\mu\nu}$ . Comme le dual de Hodge de  $F$  apparaît, il est commode de définir les composantes (anti-)autoduales de  $F$  :

$$F_{\mu\nu}^\pm = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \pm (*F)_{\mu\nu}), \quad (5.48)$$

où  $F^+$  (resp.  $F^-$ ) est la partie autoduale (resp. anti-autoduale) de  $F$ . Un calcul simple montre que  $\varepsilon \Gamma^{1234} \varepsilon = \cos \theta$ , et si on définit  $\varepsilon^L$  et  $\varepsilon^R$  par

$$\varepsilon^L = \frac{1}{2} (1 + \Gamma^{1234}) \varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon^R = \frac{1}{2} (1 - \Gamma^{1234}) \varepsilon \quad (5.49)$$

on a

$$\varepsilon^L \varepsilon^L = \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^R \varepsilon^R = \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (5.50)$$

On définit ensuite les 2-formes  $w^\pm$  :

$$w_{\mu\nu}^- = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \tilde{\varepsilon}^L \Gamma^9 \Gamma_{\mu\nu} \varepsilon^L \quad \text{et} \quad w_{\mu\nu}^- = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \tilde{\varepsilon}^R \Gamma^9 \Gamma_{\mu\nu} \varepsilon^R. \quad (5.51)$$

En utilisant ces définitions et le fait que  $(w_{\mu\nu}^\pm)^2 = \frac{1}{r^2}$ , on peut réécrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cos \theta F^{\mu\nu} (*F)_{\mu\nu} + 2\tilde{\varepsilon} \Gamma^9 \Gamma^{\mu\nu} \varepsilon \Phi_9 F_{\mu\nu} + \frac{1}{r^2} \Phi^9 \Phi_9 \\ & = \cos^2 \frac{\theta}{2} (F_{\mu\nu}^- + w_{\mu\nu}^- \Phi_9)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} (F_{\mu\nu}^+ + w_{\mu\nu}^+ \Phi_9)^2. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ensuite, on considère les termes en  $\Phi_i$ . On trouve

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi_i D^\mu \Phi^i + [\Phi_9, \Phi_i] [\Phi^9, \Phi^i] - 2\tilde{\varepsilon} \Gamma^9 \Gamma^{ij} \varepsilon \Phi_i [\Phi_9, \Phi_j] - 2\tilde{\varepsilon} \Gamma^\mu \Gamma^{ij} \varepsilon \Phi_i D_\mu \Phi_j + (\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}) (\varepsilon \varepsilon) \Phi^i \Phi_i \\ = (D_m \Phi_j - \tilde{\varepsilon} \Gamma_m \Gamma_{ij} \varepsilon \Phi^i)^2, \end{aligned} \quad (5.53)$$

où  $m = (1, \dots, 4, 9)$ . En effet, en utilisant le fait que  $\varepsilon$  est  $(5 \cdots 8)$ -chiral, l'identité miraculeuse sous la forme (A.38) et  $\tilde{\varepsilon}\Gamma^M\varepsilon = 0$ , on peut montrer que

$$(\tilde{\varepsilon}\Gamma_m\Gamma_{ij}\varepsilon)(\tilde{\varepsilon}\Gamma^m\Gamma^{kj}\varepsilon) = (\varepsilon\varepsilon)(\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon})\delta_i^k. \quad (5.54)$$

Pour finir, on s'occupe du terme en  $K^a\Phi_0$  :

$$\frac{1}{r^2}\Phi^0\Phi_0 - 4K^a\nu_a\tilde{\varepsilon}\Phi_0 - K_aK^a = -(K_a + 2\Phi_0\nu_a\tilde{\varepsilon})^2 \quad (5.55)$$

car par (4.135),

$$(\nu_a\tilde{\varepsilon})(\nu_a\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(\varepsilon\Gamma^M\varepsilon)(\tilde{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_M\tilde{\varepsilon}) - (\varepsilon\tilde{\varepsilon})(\varepsilon\tilde{\varepsilon}) \quad (5.56)$$

$$= (\varepsilon\Gamma^0\varepsilon)(\tilde{\varepsilon}\Gamma^0\tilde{\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\varepsilon\Gamma^M\varepsilon)(\tilde{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_M\tilde{\varepsilon}) - (\varepsilon\tilde{\varepsilon})(\varepsilon\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{4r^2}, \quad (5.57)$$

les deux derniers termes étant nuls.

On peut donc écrire, si on utilise les champs  $\Phi_0^E = -i\Phi_0$ ,  $K_a^E = -iK_a$ ,

$$\begin{aligned} V = \sqrt{g} & \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} (F_{\mu\nu}^- + w_{\mu\nu}^- \Phi_9)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} (F_{\mu\nu}^+ + w_{\mu\nu}^+ \Phi_9)^2 + (D_m \Phi_j - \tilde{\varepsilon}\Gamma_m\Gamma_{ij}\varepsilon\Phi^i)^2 \right. \\ & \left. + (K_a^E + 2\Phi_0^E\nu_a\tilde{\varepsilon})^2 + (D_\mu \Phi_0^E)^2 + (D_\mu \Phi_9)^2 + [\Phi_0^E, \Phi_m]^2 + \frac{1}{2}[\Phi_i, \Phi_j]^2 + \frac{3}{4r^2}\Phi_i^2 \right), \end{aligned} \quad (5.58)$$

ce qui est bien semi-défini positif avec les conditions de réalité choisies pour les champs.

Pour trouver les configurations correspondant à  $Q^\beta|_{\text{bos}} = 0$ , il suffit maintenant de regarder sous quelles conditions chacun des carrés est nul. Comme il y a un terme en  $\Phi_i^2$ , il faut que les  $\Phi_i$  soient nuls. Restent

$$\begin{aligned} V|_{\Phi_i=0} = \sqrt{g} & \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} (F_{\mu\nu}^- + w_{\mu\nu}^- \Phi_9)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} (F_{\mu\nu}^+ + w_{\mu\nu}^+ \Phi_9)^2 \right. \\ & \left. + (K_a^E + 2\Phi_0^E\nu_a\tilde{\varepsilon})^2 + (D_\mu \Phi_0^E)^2 + (D_\mu \Phi_9)^2 + [\Phi_0^E, \Phi_9]^2 \right). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Hors des pôles, chacun des carrés dans les deux premiers termes doit être nul, en on a, en définissant  $w_{\mu\nu} = w_{\mu\nu}^+ + w_{\mu\nu}^-$ ,

$$F_{\mu\nu} = -w_{\mu\nu}\Phi_9. \quad (5.60)$$

Comme  $D_\mu\Phi_9 = 0$ , on a par l'identité de Bianchi,

$$0 = D_{[\rho}F_{\mu\nu]} = -\partial_{[\rho}w_{\mu\nu]}\Phi_9 - w_{[\mu\nu}D_{\rho]}\Phi_9 = -\partial_{[\rho}w_{\mu\nu]}\Phi_9. \quad (5.61)$$

On peut vérifier que  $\partial_{[\rho}w_{\mu\nu]} \neq 0$  hors des pôles. On a donc  $\Phi_9 = 0$ , ce qui implique  $F_{\mu\nu} = 0$ , et ceci est valable sur toute la sphère si on suppose que les champs sont  $C^\infty$

(nous reviendrons plus loin sur ce point). Comme  $V$  est invariant de jauge, on peut choisir une jauge adaptée : on choisit la jauge la plus simple, dans laquelle  $A_\mu = 0$ . On a alors,

$$0 = D_\mu \Phi_0^E = \partial_\mu \Phi_0^E \implies \Phi_0^E(x) = a \in \mathfrak{g}, \quad (5.62)$$

$\Phi_0^E$  est un champ constant. Reste le terme en  $K_a^E$  à considérer. On a

$$K_a^E = -2\Phi_0^E(\nu_a \tilde{\varepsilon}) = -2a(\nu_a \tilde{\varepsilon}). \quad (5.63)$$

Pour résumer, si les champs sont infiniment différentiables, on a, à une transformation de jauge près :

$$Q\beta|_{\text{bos}} = 0 \iff \begin{cases} A_\mu = 0 & \mu = 1, \dots, 4 \\ \Phi_A = 0 & A = 5, \dots, 9 \\ \Phi_0^E = a & \text{avec } a \text{ constante } \in \mathfrak{g} \\ K_b^E = -2a(\nu_b \tilde{\varepsilon}) & b = 1, \dots, 7 \end{cases}. \quad (5.64)$$

On a donc bien une localisation sur une variété de dimension finie, où les champs prennent des valeurs constantes.

Il faut maintenant évaluer l'action et la boucle de Wilson sur ces configurations. Pour l'action, il reste

$$S[a] = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \int_{S^4} d^4x \sqrt{g} \left( \frac{2}{r^2} (\Phi_0^E)^2 + (K_a^E)^2 \right) \quad (5.65)$$

$$= \frac{1}{2g_{YM}^2} \text{vol}(S^4) \frac{3}{r^2} (a, a) = \frac{4\pi^2 r^2}{g_{YM}^2} (a, a) \quad (5.66)$$

où  $(\cdot, \cdot) = -\text{Tr}(\cdot \cdot)$  est un produit scalaire invariant sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et on a utilisé (5.57) ainsi que la valeur du volume de  $S^4$ ,  $\text{vol}(S^4) = \frac{8}{3}\pi^2 r^2$ . Quant à la boucle de Wilson, elle devient

$$W_R(\mathcal{C}) = \text{Tr}_R \mathcal{P} \exp \oint_{\mathcal{C}} i\Phi_0^E ds = \text{Tr}_R e^{2\pi i a}. \quad (5.67)$$

Par conséquent,

$$\langle W_R(\mathcal{C}) \rangle = \frac{\int_{\mathfrak{g}} da \mathcal{D}(a) e^{-\frac{4\pi^2 r^2}{g_{YM}^2} (a, a)} \text{Tr}_R e^{2\pi i a}}{\int_{\mathfrak{g}} da \mathcal{D}(a) e^{-\frac{4\pi^2 r^2}{g_{YM}^2} (a, a)}}, \quad (5.68)$$

où  $\mathcal{D}(a)$  est le déterminant dans la direction normale (i.e. sans les modes zéro) de l'opérateur  $\Delta_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$  défini par

$$Q\beta^{(2)}[X^{\mathcal{I}}, X^{\mathcal{J}}] = \int d^4x d^4y X^{\mathcal{I}}(x) \Delta_{\mathcal{I}\mathcal{J}}(x, y) X^{\mathcal{J}}(y), \quad (5.69)$$

et qui prend en compte les fluctuations dans la direction normale au lieu des points où  $Q\beta|_{\text{bos}} = 0$ .

Revenons maintenant brièvement sur le cas où on a des configurations qui peuvent être singulières aux pôles. Si on ne demande pas la régularité, l'annulation de  $F$  sur le complément des pôles n'implique pas son annulation aux pôles, et il faut regarder les choses plus en détails. Au pôle nord,  $\theta = 0$ , et donc le terme en sin dans (5.59) est nul : on peut avoir  $F^+ \neq 0$ , et la seule contrainte sur  $F$  est  $F^- = 0$ . Au pôle sud, l'autre terme est nul, et la situation est inversée : on peut avoir  $F^- \neq 0$ , et la contrainte est  $F^+ = 0$ . On parle dans ce cas d'instantons ( $F^+ = 0$ ) ou d'anti-instantons ( $F^- = 0$ ) ponctuels : la courbure est nulle partout sauf en un point, où la partie anti-autoduale ou autoduale non nulle de la courbure est singulière de type delta de Dirac. Les (anti-)instantons ne contribuent pas à la boucle de Wilson, car le long de l'équateur  $F_{\mu\nu} = 0$  étant donné que les instantons sont localisés aux pôles.

La seule contribution possible est à l'action. On définit la charge d'instanton

$$ch_2 = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \int F \wedge F. \quad (5.70)$$

C'est l'intégrale du deuxième caractère Chern pour le fibré de jauge, et il prend des valeurs entières. On ajoute ce terme à l'action afin de « compter » les instantons :

$$S_{S^4, \theta} = S_{S^4} - \frac{i\theta}{8\pi^2} \text{Tr} \int F \wedge F. \quad (5.71)$$

Comme la courbure d'un instanton est auto-duale, on a

$$d^4x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F \wedge *F = -2F \wedge F, \quad (5.72)$$

et la partie Yang–Mills de l'action  $S_{S^4, \theta}$  est

$$- \text{Tr} \int \left( -\frac{1}{2g_{YM}^2} F \wedge F + \frac{i\theta}{8\pi^2} F \wedge F \right) = \left( \frac{4\pi^2}{g_{YM}^2} - i\theta \right) k, \quad (5.73)$$

pour un instanton de charge  $k$ . Il est possible, dans le cas où le groupe de jauge  $G = U(N)$ , de montrer que pour la théorie considérée, les instantons ne contribuent pas [30, 5]. La fonction de partition, obtenue en sommant sur les différents instantons et anti-instantons possibles (comme le requiert la procédure de localisation) vaut simplement 1.

## 5.4. Les fluctuations

Il faut montrer que  $\mathcal{D}(a) = 1$ . La preuve originale de Pestun [5] consiste à dériver  $\mathcal{D}(a)$  dans le cadre plus général de la théorie  $\mathcal{N} = 2^*$  au moyen d'un théorème d'indice pour des opérateurs transversalement elliptiques (i.e. dont le symbole n'est pas inversible partout, mais seulement dans la direction transverse à l'orbite du  $U(1)$  de la localisation

équivariante), et à constater que dans le cas particulier de masse nulle, correspondant à  $\mathcal{N} = 4$ , ce déterminant vaut 1.

Cette égalité peut se comprendre en termes de supersymétrie : le déterminant est un super-déterminant, dont le dénominateur est le déterminant sur l'espace pair, c'est-à-dire correspondant à l'opérateur  $\Delta_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$  lorsque  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  indiquent des champs bosoniques, alors que le numérateur correspond à la partie impaire, fermionique de l'opérateur. Si on développe le super-déterminant en produit de ses valeurs propres, il sera automatiquement égal à 1 si les dimensions des sous-espaces propres sont les mêmes pour la partie paire et impaire du déterminant. Ceci est justement le cas si on a une supersymétrie qui agit après localisation, car le lemme 3.2 implique qu'il y a autant d'états bosoniques et fermioniques dans chaque sous-espace propre en présence de supersymétrie.

Il faut donc trouver une supercharge encore présente après localisation. Une transformation sera préservée par la procédure de localisation si elle est préservée par la fonctionnelle de localisation :  $\xi$  paramétrise une telle transformation si

$$\delta_\xi Q\beta = 0. \tag{5.74}$$

Pour trouver une supercharge qui obéit à cette condition, on peut utiliser le fait que si  $\delta_\xi Q\beta = 0$ , alors  $\delta_\xi^2 Q\beta = 0$ . C'est-à-dire, il faut que  $Q\beta$  obéisse aux contraintes énoncées dans la section 5.1, avec  $\varepsilon$  remplacé par  $\xi$ . Comme il ressort de cette section, ceci sera le cas si  $\delta_\varepsilon$  commute avec  $Q$ . C'est ici que la théorie  $\mathcal{N} = 4$  diffère fortement de la théorie  $\mathcal{N} = 2$  : dans le premier cas, on peut trouver un tel  $\xi$ , alors que c'est impossible dans le second cas. En effet, on avait imposé la condition de chiralité  $\Gamma^{5678}\varepsilon = \varepsilon$ , et on peut très bien imposer ici la condition  $\Gamma^{5678}\xi = -\xi$ . Ceci implique immédiatement que  $\{\delta_\xi, \delta_\varepsilon\} = 0$ , car tous les termes intervenant dans la transformation sont nuls par la chiralité. Par exemple, pour la dérivée de Lie, le paramètre est  $\xi\Gamma^\mu\varepsilon + \varepsilon\Gamma^\mu\xi$ , et chacun de ces termes est nul car les (5...8)-chiralité de  $\xi$  et  $\varepsilon$  sont différentes. Les transformations de  $R$ -symétrie engendrées par  $\delta_\varepsilon$  et  $\delta_\xi$  sont des éléments respectifs du facteur  $su(2)_R^L$  et  $su(2)_R^R$  de  $spin(4)_R = su(2)_R^L \oplus su(2)_R^R$ . Dans le cas  $\mathcal{N} = 2$ , la  $R$ -symétrie a pour algèbre uniquement  $su(2)_R^L$ , et cette construction de  $\xi$  n'est pas valable.

Malheureusement, il n'y a pas de raison d'avoir  $\delta_\xi Q\beta = 0$  pour le  $\beta$  que nous avons pris. Il est probablement possible de construire un autre  $\beta$  qui satisfasse à cette condition, mais le temps (ou l'imagination) a manqué à l'auteur pour en trouver un.

## 5.5. Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons montré qu'il est effectivement possible de calculer de façon non perturbative la valeur moyenne d'une boucle de Wilson adaptée en utilisant l'outil mathématique de la localisation équivariante. On a ainsi montré que dans le cas de la théorie de Yang–Mills supersymétrique  $\mathcal{N} = 4$  placée sur la 4-sphère et de groupe de jauge compact quelconque, la boucle de Wilson circulaire est donnée par une intégrale sur une variété de dimension finie, en l'occurrence l'algèbre de Lie du groupe de jauge,

qui est une intégrale de matrices. La conjecture d'Erickson, Semenoff et Zarembo a ainsi été prouvée.

Il aurait été intéressant d'achever totalement la preuve en calculant le déterminant des fluctuations, mais ceci devra être laissé pour le futur. On pourrait également tenter de généraliser la preuve au cas où la boucle de Wilson n'est pas circulaire et préserve un quart plutôt que la moitié des supercharges.



# A. Notations et conventions, spineurs

## A.1. La métrique

En 10 dimensions, on prend la métrique plate  $\eta_{MN}$  de signature  $(-, +, \dots, +)$ .

## A.2. (Anti)commutateurs, (anti)symétrisation

$$[A, B] = AB - BA \quad \text{est le commutateur de } A \text{ et } B; \quad (\text{A.1})$$

$$\{A, B\} = AB + BA \quad \text{est l'anticommutateur de } A \text{ et } B. \quad (\text{A.2})$$

Les parenthèses sur des indices désignant la symétrisation, les crochets désignent l'antisymétrisation. Ces deux opérations se font avec poids 1, c'est-à-dire :

$$A^{(i_1 i_2 \dots i_k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} A^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(k)}} \quad (\text{A.3})$$

$$A^{[i_1 i_2 \dots i_k]} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma A^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(k)}}. \quad (\text{A.4})$$

## A.3. Les indices

- Les lettres latines majuscules du milieu de l'alphabet  $M, N, \dots$  vont de 0 à 9 et correspondent à tout le groupe  $Spin(9, 1)$  ;
- les lettres grecques minuscules du milieu de l'alphabet  $\mu, \nu, \dots$  sont des indices d'espace-temps (de signature euclidienne) à 4 dimensions et vont de 1 à 4 ; à partir du chapitre 4, ces indices correspondent aux coordonnées sur la sphère ;
- les lettres latines majuscules du début de l'alphabet  $A, B, \dots$  correspondent au groupe de  $R$ -symétrie  $Spin(5, 1)_R \subset Spin(9, 1)$  et prennent les valeurs 0, 5,  $\dots$ , 9 ;
- les lettres grecques minuscules du début de l'alphabet sont des indices spinoriels (de Dirac ou de Weyl en fonction des circonstances) ;
- les lettres latines  $i, j, k$  correspondent à la représentation adjointe du groupe de jauge dans le chapitre 3 et y prennent les valeurs 1,  $\dots$ ,  $\dim \mathfrak{g}$  ; dans le chapitre 5, elles correspondent à un sous-groupe  $Spin(4)_R \subset Spin(5, 1)_R$  et prennent les valeurs 5,  $\dots$ , 8 ;

- les lettres latines minuscules du début de l’alphabet  $a, b$  correspondent aux champs auxiliaires introduits à la fin du chapitre 4 et prennent les valeurs  $1, \dots, 7$ .

## A.4. L’algèbre de Clifford et les spineurs <sup>1</sup>

On s’intéresse surtout dans ce mémoire à l’algèbre de Clifford en 10 dimensions, de signature  $(9,1)$ . Ce qui suit est donc valable pour ce cas précis, mais beaucoup des considérations s’étendent au cas d’une dimension paire quelconque. En particulier, pour la dimension 4, on peut définir des spineurs de Weyl (qui interviennent dans ce mémoire), et des spineurs de Majorana, mais pas les deux en même temps. Comme la dimension 4 est beaucoup plus familière, on ne donne pas les formules explicites. Le lecteur souhaitant plus de détails peut consulter tout ouvrage de théorie des champs, où ce sujet sera très certainement traité (en particulier, Weinberg [17] suit les mêmes conventions de signe).

On définit l’algèbre de Clifford correspondant à  $\mathbb{R}^{9,1}$  comme l’algèbre engendrée par les relations <sup>2</sup>

$$\{\gamma^M, \gamma^N\} = 2\eta^{MN}. \quad (\text{A.5})$$

On a donc  $(\gamma^0)^2 = -1$ ,  $(\gamma^M)^2 = +1$ ,  $M = 1, \dots, 9$ . Cette algèbre peut être représentée par des matrices complexes de dimension  $32 \times 32$ .

On définit

$$\gamma^{M_1 \dots M_k} = \gamma^{[M_1} \gamma^{M_2} \dots \gamma^{M_k]} \quad (\text{A.6})$$

Les  $\gamma^{M_1 \dots M_k}$ ,  $k = 1, \dots, 10$  et l’identité  $I_{32 \times 32}$  (que l’on définit comme correspondant à  $k = 0$ ) forment une base de l’algèbre. Toutes ces matrices sont désignées collectivement par  $\gamma^A$ .

En conséquence des relations d’anticommutation (A.5), les matrices  $\frac{1}{2}\gamma^{MN}$  sont des générateurs de l’algèbre de Lie  $spin(9, 1)$ . Elles agissent sur des vecteurs  $\psi \in \mathbb{C}^{32}$ , qui sont les spineurs de Dirac à 10 dimensions d’espace-temps.

On définit  $\gamma^{11} = \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^9$ , dont le carré vaut 1. Comme  $\{\gamma^{11}, \gamma^M\} = 0$ ,  $[\gamma^{11}, \gamma^{MN}] = 0$ , et donc la représentation de Dirac est réductible. On définit les projecteurs chiraux

$$P_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^{11}) \quad \text{et} \quad P_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^{11}) \quad (\text{A.7})$$

qui projettent sur les sous-espaces des deux représentations de Weyl, gauche et droit, et on note

$$\psi_L = P_L \psi \quad \text{et} \quad \psi_R = P_R \psi, \quad (\text{A.8})$$

---

1. Cette section doit beaucoup au chapitre 3 de [31]. Son but n’est pas de présenter dans tous ses détails la théorie des spineurs, i.e. des représentations de l’algèbre de Lie  $spin(p, q)$ , mais uniquement de fixer les notations et de rappeler les formules qui sont utiles dans ce mémoire.

2. L’identité  $I$  est souvent écrite de manière implicite. En tout rigueur, il faudrait écrire  $\eta^{MN} I$  dans le membre de droite.

les spineurs de Weyl gauche et droit, qui ont chacun 16 composantes complexes indépendantes. Les éléments  $\gamma^{M_1 \dots M_{2k+1}}$  anticommulent avec  $\gamma^{11}$  et changent donc la chiralité, alors que les  $\gamma^{M_1 \dots M_{2k}}$  préservent la chiralité lorsqu'ils agissent sur un spineur.

Plus explicitement, on peut choisir une base adaptée à la décomposition en spineurs de Weyl, dans laquelle  $\gamma^{11}$  s'écrit

$$\gamma^{11} = \begin{pmatrix} I_{16 \times 16} & 0 \\ 0 & -I_{16 \times 16} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

et on a les décompositions suivantes :

$$\gamma^M = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Gamma}^M \\ \Gamma^M & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

On définit comme pour les  $\gamma$ ,

$$\Gamma^{M_1 \dots M_k} = \gamma^{M_1 \dots M_k} P_L \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{\Gamma}^{M_1 \dots M_k} = \gamma^{M_1 \dots M_k} P_R \quad (\text{A.12})$$

que l'on peut écrire comme un produit, antisymétrisé sur les indices, de  $\Gamma$  et de  $\tilde{\Gamma}$  en alternance, où la dernière matrice intervenant dans  $\Gamma^{M_1 \dots M_k}$  (resp.  $\tilde{\Gamma}^{M_1 \dots M_k}$ ) porte un «  $\sim$  » (resp. n'en porte pas).

En particulier, on a par (A.5), les identités fort utiles

$$\tilde{\Gamma}^M \Gamma^N = \Gamma^{MN} + \eta^{MN} \quad \text{et} \quad \Gamma^M \tilde{\Gamma}^N = \tilde{\Gamma}^{MN} + \eta^{MN}. \quad (\text{A.13})$$

Plus généralement, comme les  $\gamma^A$  forment une base de l'algèbre, on peut décomposer tout produit en une combinaison linéaire de  $\gamma^A$ . Par exemple, on a,

$$\Gamma^M \Gamma^{NP} = \Gamma^{MNP} + \eta^{MN} \Gamma^P - \eta^{MP} \Gamma^N \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}^M \tilde{\Gamma}^{NP} = \tilde{\Gamma}^{MNP} + \eta^{MN} \tilde{\Gamma}^P - \eta^{MP} \tilde{\Gamma}^N. \quad (\text{A.14})$$

En plus des produits, on peut faire des produits contractés. Par exemple,

$$\tilde{\Gamma}^M \Gamma_M = \eta_{MN} \tilde{\Gamma}^M \Gamma^N = \eta_{MN} \eta^{MN} = 10. \quad (\text{A.15})$$

On peut aussi se restreindre à une partie des indices. On a par exemple,

$$\tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^N \tilde{\Gamma}_\mu = -\tilde{\Gamma}^\mu \Gamma_\mu \tilde{\Gamma}^N + 2\delta_\mu^N \tilde{\Gamma}^\mu = -4\tilde{\Gamma}^N + 2\delta_\mu^N \tilde{\Gamma}^\mu. \quad (\text{A.16})$$

En particulierisant pour  $N = \nu, A$ , on a

$$\tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^\nu \tilde{\Gamma}_\mu = -2\tilde{\Gamma}_\nu \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}^\mu \Gamma^A \tilde{\Gamma}_\mu = -4\tilde{\Gamma}^A. \quad (\text{A.17})$$

De manière similaire, on montre grâce à (A.14) que

$$\begin{cases} \Gamma^\mu \Gamma_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}_\mu = 0 \\ \Gamma^\mu \Gamma_{\nu A} \tilde{\Gamma}_\mu = 2\tilde{\Gamma}_{\nu A} \\ \Gamma^\mu \Gamma_{AB} \tilde{\Gamma}_\mu = 4\tilde{\Gamma}_{AB} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Plus généralement, on peut montrer l'identité suivante (où on reprend des matrices  $\gamma$  pour ne pas avoir à séparer en fonction de la parité de  $k$ ) :

$$\gamma^M \gamma^{N_1 \dots N_k} \gamma_M = (-1)^k (D - 2k) \gamma^{N_1 \dots N_k}. \quad (\text{A.19})$$

Le conjugué de Dirac d'un spineur est défini comme

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (\text{A.20})$$

et on vérifie que  $\bar{\psi}\chi$  est un scalaire, car on peut choisir les matrices  $\gamma$  telles que  $(\gamma^M)^\dagger = -\gamma^0 \gamma^M \gamma^0$ , c'est-à-dire que  $\gamma^0$  est un opérateur d'entrelacement entre la représentation de Dirac de  $spin(9, 1)$  et sa complexe conjuguée. Comme  $\gamma^0$  anticommute avec  $\gamma^{11}$ , le conjugué de Dirac d'un spineur de Weyl gauche est un spineur de Weyl droit et inversement. Si  $\psi$  et  $\chi$  sont deux spineurs de même chiralité (resp. de chiralité opposée), on a donc que  $\bar{\psi} \gamma^{M_1 \dots M_{2k}} \chi = 0$  (resp.  $\bar{\psi} \gamma^{M_1 \dots M_{2k+1}} \chi = 0$ ).

On montre facilement que les  $\gamma^A$  sont trace-orthogonales (pour un nombre pair d'indices, cela découle directement de la cyclicité de la trace, pour un nombre impair, on insère un  $(\gamma^{11})^2$  et on commute un  $\gamma^{11}$ ) :

$$\text{Tr} \gamma^A \gamma_B = \delta_B^A \text{Tr} I_{32 \times 32} = 32 \delta_B^A, \quad (\text{A.21})$$

où  $\gamma_B$  a tous ses indices descendus avec la métrique et dans l'ordre inverse de ceux de  $\gamma^B$ . Comme il y a  $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10} = 32 \cdot 32$  telles matrices, les  $\gamma^A$  forment une base des matrices  $32 \times 32$ , orthogonale pour la trace. Par conséquent, toute matrice  $M$  peut se développer comme

$$M = m_A \gamma^A \quad \text{avec} \quad m_A = \frac{1}{32} \text{Tr} M \gamma_A. \quad (\text{A.22})$$

Si on voit  $M_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha \delta_\delta^\gamma$  comme une matrice en  $\alpha, \delta$ , on a donc pour ses coefficients  $(m_A)_\beta^\gamma$  sur la base  $\gamma^A$  :

$$(m_A)_\beta^\gamma = \frac{1}{32} \delta_\beta^\alpha \delta_\delta^\gamma (\gamma_A)^\delta_\alpha = (\gamma_A)^\gamma_\alpha \quad (\text{A.23})$$

Ceci implique l'identité de Fierz, qui est très utile pour réarranger des spineurs. Étant donnés quatre spineurs  $\psi_i$ , on a,

$$(\bar{\psi}_1 \psi_2)(\bar{\psi}_3 \psi_4) = \pm \frac{1}{32} \sum_{k=0}^{10} (\bar{\psi}_1 \gamma^{M_1 \dots M_k} \psi_4)(\bar{\psi}_3 \gamma_{M_k \dots M_1} \psi_2), \quad (\text{A.24})$$

où le signe dépend de la parité de Grassmann<sup>3</sup> des différents  $\psi_i$ .

On peut montrer qu'il existe aussi un opérateur unitaire  $C$  antisymétrique, appelé conjugaison de charge, qui réalise l'équivalence entre la représentation et sa duale,

$$C\gamma^M C^{-1} = -(\gamma^M)^T. \quad (\text{A.25})$$

Ceci implique que  $(C\gamma^M)^T = (C\gamma^M)$ , les matrices  $C\gamma^M$  sont symétriques. Cette propriété de symétrie s'étend à toute l'algèbre,  $C\gamma^{M_1 \dots M_k}$  étant symétrique ou antisymétrique selon  $k = 0, \dots, 10$ . Par exemple,

$$(C\gamma^{MN})^T = (C\gamma^{[M}\gamma^{N]})^T = (\gamma^{[N]T}(\gamma^{M]})^T C^T = -(\gamma^{[N]T}(\gamma^{M]})^T C \quad (\text{A.26})$$

$$= -C(\gamma^{[N]T}(\gamma^{M]})^T) = -C\gamma^{[M}\gamma^{N]} = C\gamma^{MN}. \quad (\text{A.27})$$

En faisant le même raisonnement pour  $k = 0, \dots, 10$  et en comptant proprement le nombre de  $-$  qui apparaissent lorsque l'on commute le  $C$ , et qu'on remet les indices dans l'ordre de départ, on obtient les propriétés de symétrie suivantes :

$$(C\gamma^{M_1 \dots M_k})^T = \begin{cases} C\gamma^{M_1 \dots M_k} & \text{pour } k = 1, 2, 5, 6, 9, 10 \\ -C\gamma^{M_1 \dots M_k} & \text{pour } k = 0, 3, 4, 7, 8 \end{cases}. \quad (\text{A.28})$$

On a donc la propriété suivante si  $\psi, \chi$  sont des spineurs :

$$\psi^T C\gamma^{M_1 \dots M_k} \chi = (\psi^T C\gamma^{M_1 \dots M_k} \chi)^T = \pm \chi^T (C\gamma^{M_1 \dots M_k})^T \psi, \quad (\text{A.29})$$

où le signe est  $+$  si les spineurs commutent, et  $-$  s'ils anticommulent, et donc l'expression est soit paire, soit impaire sous l'échange de  $\psi$  et  $\chi$ .

On peut imposer, à côté de la condition de Weyl  $P_L \psi = \psi$  sur un spineur, la condition de Majorana :

$$\psi = C(\bar{\psi})^T = C(\gamma^0)^T \psi^*, \quad (\text{A.30})$$

qui est donc une condition de réalité sur  $\psi$ . Cette équation implique que pour un spineur de Majorana, le conjugué de charge coïncide avec le conjugué de Dirac.

En 10 dimensions, les conditions de Weyl et de Majorana sont compatibles, on peut imposer les deux en même temps de façon cohérente, et définir ainsi un spineur de Majorana–Weyl qui a 16 composantes réelles indépendantes. On peut aussi prendre une représentations des matrices  $\gamma^M$  où elles sont toutes à coefficients réels, et la conjugaison de charge est proportionnelle à l'identité dans chaque bloc de Weyl :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -I_{16 \times 16} \\ I_{16 \times 16} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

3. Dans ce mémoire, on considère les deux parités pour des spineurs : les champs fermioniques de la théorie sont impairs afin de respecter la correspondance spin-statistique, mais les paramètres de transformations de supersymétrie sont pairs.

Les matrices  $\Gamma^M$  et  $\tilde{\Gamma}^M$  sont alors symétriques.

Explicitement, on peut prendre les matrices suivantes :

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & I_{8 \times 8} \end{pmatrix}, \Gamma^9 = \begin{pmatrix} I_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & -I_{8 \times 8} \end{pmatrix}, \Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & E_i^T \\ E_i & 0 \end{pmatrix}, i = 1, \dots, 8 \quad (\text{A.32})$$

où les  $E_i$  sont des matrices  $8 \times 8$  représentant la multiplication à gauche des octonions<sup>4</sup> : si les  $e_i$  sont les générateurs de l'algèbre des octonions, alors  $E_i e_j = e_i \cdot e_j$ . On prend  $\tilde{\Gamma}^0 = -\Gamma^0$ ,  $\tilde{\Gamma}^M = \Gamma^M$ ,  $M = 1, \dots, 9$ , et on vérifie facilement que ces définitions satisfont aux relations (A.5) qui définissent une algèbre de Clifford.

Les propriétés de symétrie des  $\Gamma^M$  et  $\tilde{\Gamma}^M$  s'étendent, comme pour (A.28), aux  $\Gamma^{M_1 \dots M_k}$  et aux  $\tilde{\Gamma}^{M_1 \dots M_k}$ . On a par exemple,

$$(\Gamma^{MN})^T = (\tilde{\Gamma}^{[M} \Gamma^{N]})^T = \Gamma^{[N} \tilde{\Gamma}^{M]} = -\tilde{\Gamma}^{MN}. \quad (\text{A.33})$$

Ici, la transposition échange donc  $\Gamma^{MN}$  et  $\tilde{\Gamma}^{MN}$ . Pour un nombre impair de  $\Gamma$ , on a des règles similaires à (A.28). Par exemple,

$$(\Gamma^{MNP})^T = \Gamma^{PNM} = -\Gamma^{MNP}, \quad (\text{A.34})$$

et les autres cas se traitent de la même façon.

Si  $\Psi$  est un spineur de Majorana–Weyl gauche, on peut écrire

$$\bar{\Psi} \Gamma^M = \Psi^T C \Gamma^M = \Psi^T \Gamma^M, \quad (\text{A.35})$$

et de même pour un spineur de Majorana–Weyl droit au signe près. Par conséquent, si  $\Psi$  (resp.  $X$ ) est un spineur de Majorana–Weyl gauche (resp. droit), alors  $\Psi X$  est un scalaire, et on note la transposition de manière implicite à partir de maintenant.

Enfin, l'identité miraculeuse du théorème 3.3 peut se réécrire sous la forme

$$(\Gamma^M)_{\beta(\alpha_1} (\Gamma_M)_{\alpha_2 \alpha_3)} = 0, \quad (\text{A.36})$$

qui ne fait plus intervenir de spineurs. Ceci est équivalent à

$$(\Gamma^M)_{\beta(\alpha_1} (\Gamma_M)_{\alpha_2) \alpha_3} + (\Gamma^M)_{\beta(\alpha_1} (\Gamma_M)_{|\alpha_3| \alpha_2)} + (\Gamma^M)_{\beta \alpha_3} (\Gamma_M)_{(\alpha_1 \alpha_2)} = 0 \quad (\text{A.37})$$

Comme les  $\Gamma^M$  sont symétriques, on obtient

$$(\Gamma^M)_{\beta(\alpha_1} (\Gamma_M)_{\alpha_2) \alpha_3} = -\frac{1}{2} (\Gamma^M)_{\beta \alpha_3} (\Gamma_M)_{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (\text{A.38})$$

---

4. On n'a pas besoin de leur expression exacte dans ce mémoire. Pour leur forme explicite, voir [5, appendice A].

# Bibliographie

- [1] **Particle Data Group** Collaboration, C. Amsler *et al.*, “Review of particle physics,” *Phys. Lett. B* **667** (2008) 1. Cité p. 1.
- [2] K. G. Wilson, “Confinement of quarks,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2445–2459. Cité p. 2.
- [3] J. K. Erickson, G. W. Semenoff, et K. Zarembo, “Wilson Loops in N=4 Supersymmetric Yang–Mills Theory,” *Nuclear Physics B* **582** (2000) 155, [arXiv:hep-th/0003055v1](#). Cité p. 3.
- [4] N. Drukker et D. J. Gross, “An Exact Prediction of N=4 SUSYM Theory for String Theory,” *Journal of Mathematical Physics* **42** (2001) 2896, [arXiv:hep-th/0010274v2](#). Cité p. 3.
- [5] V. Pestun, “Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops,” [arXiv:0712.2824v1 \[hep-th\]](#). Cité pp. 4, 60, 75, et 84.
- [6] R. J. Szabo, “Equivariant localization of path integrals,” [arXiv:hep-th/9608068v1](#). Cité pp. 5 et 12.
- [7] M. Vergne, “Cohomologie équivariante et théorème de Stokes,” *Séminaires et Congrès* **7** (2003) 1–43. Cité pp. 5 et 12.
- [8] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002. Cité pp. 5 et 8.
- [9] M. Nakahara, *Geometry, topology, and physics*. Graduate Student Series in Physics. Taylor & Francis, 2 ed., 2003. Cité pp. 5, 44, 49, et 61.
- [10] J. J. Duistermaat et G. J. Heckman, “On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space,” *Inventiones mathematicae* **69** (1982) no. 2, 259–268. Cité pp. 15 et 18.
- [11] Harish-Chandra, “Differential Operators on a Semisimple Lie Algebra,” *American Journal of Mathematics* **79** (1957) no. 1, 87–120. Cité p. 15.
- [12] C. Itzykson et J. B. Zuber, “The Planar Approximation. 2,” *J. Math. Phys.* **21** (1980) 411. Cité p. 15.
- [13] P. Zinn-Justin et J. B. Zuber, “On some integrals over the U(N) unitary group and their large N limit,” *J. Phys. A* **36** (2003) 3173, [arXiv:math-ph/0209019](#). Cité p. 19.
- [14] A. A. Kirillov, “Merits and demerits of the orbit method,” *Bulletin of the American Mathematical Society* **36** (1999) no. 04, 433. Cité p. 22.

- [15] A. Prats Ferrer, B. Eynard, P. Di Francesco, et J. B. Zuber, “Correlation Functions of Harish-Chandra Integrals over the Orthogonal and the Symplectic Groups,” [arXiv:math-ph/0610049v5](#). Cité p. 22.
- [16] E. Brezin et S. Hikami, “An extension of the HarishChandra-Itzykson-Zuber integral,” [arXiv:math-ph/0208002](#). Cité p. 23.
- [17] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, vol. 1 & 2. Cambridge University Press, 1995. Cité pp. 25 et 80.
- [18] R. Haag, J. T. Lopuszanski, et M. Sohnius, “All Possible Generators of Supersymmetries of the  $S$ -Matrix,” *Nucl. Phys. B* **88** (1975) 257. Cité p. 27.
- [19] M. F. Sohnius, “Introducing supersymmetry,” *Phys. Rep* **128** (1985) no. 2-3, 39–204. Cité pp. 28, 30, 37, et 39.
- [20] A. Bilal, “Introduction to Supersymmetry,” [arXiv:hep-th/0101055](#). Cité p. 30.
- [21] L. Brink, J. H. Schwarz, et J. Scherk, “Supersymmetric Yang-Mills Theories,” *Nucl. Phys. B* **121** (1977) 77. Cité pp. 32 et 37.
- [22] J. C. Baez et J. Huerta, “Division Algebras and Supersymmetry I,” [arXiv:0909.0551v2 \[hep-th\]](#). Cité p. 36.
- [23] M. F. Sohnius et P. C. West, “Conformal Invariance in  $N=4$  Supersymmetric Yang-Mills Theory,” *Phys. Lett. B* **100** (1981) 245. Cité p. 39.
- [24] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, et Y. Oz, “Large  $N$  Field Theories, String Theory and Gravity,” [arXiv:hep-th/9905111](#). Cité p. 39.
- [25] S. Kovacs, “ $N=4$  supersymmetric Yang-Mills theory and the AdS/SCFT correspondence,” [arXiv:hep-th/9908171v2](#). Cité p. 39.
- [26] L. Fatibene, M. Ferraris, M. Francaviglia, et M. Godina, “A geometric definition of Lie derivative for Spinor Fields,” [arXiv:gr-qc/9608003](#). Cité p. 56.
- [27] N. Berkovits, “A Ten-Dimensional Super-Yang-Mills Action with Off-Shell Supersymmetry,” *Physics Letters B* **318** (1993) 104, [arXiv:hep-th/9308128v3](#). Cité pp. 57 et 60.
- [28] J. M. Evans, “Supersymmetry algebras and Lorentz invariance for  $d=10$  Super Yang-Mills,” *Physics Letters B* **334** (1994) 105, [arXiv:hep-th/9404190](#). Cité pp. 57 et 60.
- [29] A. Dymarsky et V. Pestun, “Supersymmetric Wilson loops in  $N=4$  SYM and pure spinors,” [arXiv:0911.1841v1 \[hep-th\]](#). Cité p. 62.
- [30] T. Okuda et V. Pestun, “On the instantons and the hypermultiplet mass of  $N = 2^*$  super Yang-Mills on  $S^4$ ,” [arXiv:1004.1222 \[hep-th\]](#). Cité p. 75.
- [31] D. Z. Freedman et A. Van Proeyen, *Supergravity (Shortened version for the Amsterdam-Brussels-Paris Doctoral School)*. Non publié, 2009. Cité p. 80.