

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА МОДЕЛИ СОСТАВНЫХ
ФЕРМИОНОВ С СУПЕРПРОСТРАНСТВОМ

М. А. Иванов

Научно-исследовательский институт прикладных физических проблем,
Белорусский государственный университет, 220064, Минск, Курчатова 7, СССР*.

COMPARISON OF SPACE OF THE COMPOSITE FERMIONS MODEL WITH
SUPERSPACE

M. A. IVANOV

(Received February 21, 1990)

Two types of extension of the Minkowski space-time are compared. It is shown that the composite fermions model can be considered in $(N = 2)$ -superspace without torsion, with additional coordinates transforming independently from main coordinates. A set of supermanifolds corresponds to a set of solutions of the model. Their number and character of constraints determine an internal symmetry group, while in supersymmetrical models this group is determined by the extension degree N . Use of anticommuting coordinates leads to appearance of scalar $SU(2)$ -doublets in the model.

PACS numbers: 11.10.Kk, 12.35.Kw

1. Введение

Как и в суперсимметричных моделях [1, 2], в модели составных фермионов [3] мы имеем дело с некоторым расширением пространства Минковского, но дополнительные координаты в последнем случае принадлежат некоторому дискретному множеству, погруженному в 4-пространство со специфической топологией.

В этой статье проведено сравнение этих двух типов расширений пространства Минковского. Показано, что модель [3] может рассматриваться как модель поля в $(N = 2)$ -суперпространстве без кручения, с независимыми дополнительными координатами, в котором с помощью связей выделен набор супермногообразий, а смешивание решений, заданных на этих супермногообразиях, толкуется как

* Address: Research Institute of Applied Physical Problems, Belorussian State University, Kurchatov Street 7, 220064 Minsk, USSR.

внутренняя симметрия. При этом группа внутренней симметрии определяется характером связей и числом выделяемых супермногообразий, а не кратностью расширения N , как в суперсимметричных моделях. Расширение с $N = 2$ необходимо для обеспечения произвольной „нормы“ $y^\mu y_\mu$ относительных координат компонентов составной системы.

В суперсимметричных моделях определяют суперпространство как расширение Z' пространства Минковского X с помощью дополнительных координат $\bar{\theta}_\alpha, \theta_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, для которого справедливы аксиомы (рассмотрим их для кратности расширения $N = 1$):

- 1) координаты $x^\mu \in X$ и $\theta_\alpha, \bar{\theta}_\alpha$ преобразуются по переплетенным векторному и спинорному (коспинорному) представлениям группы Лоренца;
- 2) пространство Z' плоское с кручением — сдвиг по $\theta_\alpha, \bar{\theta}_\alpha$ сопровождается сдвигом по x^μ [4];

3) дополнительные координаты являются грассмановыми переменными.

Аксиома 2), вводимая с помощью определяющих соотношений между генераторами движения в суперпространстве, исторически была введена потому, что $\bar{\theta}_\alpha, \theta_\alpha$ рассматривались в первых работах по суперсимметрии (например, в [5]) как безмассовые спинорные поля в пространстве X , что вызывало и необходимость введения аксиом 1), 3). Последние две определяют структуру мультиплетта полей в X , входящих в суперполе.

Очевидно, что если отказаться от интерпретации $\bar{\theta}_\alpha, \theta_\alpha$ как полей, подчиняющихся некоторым уравнениям движения в пространстве X , то все три аксиомы независимы. Отбрасывая любую из них, мы определим с помощью оставшихся некоторый новый тип расширения пространства Минковского, за которым можно сохранить название суперпространство.

Аксиомы 1), 2) противоречат аксиоме с) из [3] — о независимом от x^μ преобразовании дополнительных координат, и мы от них намерены отказаться. Но так как при этом оказывается возможным сохранить связь с векторными координатами y^μ из [3] с помощью формы второй степени, за дополнительными координатами $\theta_\alpha, \bar{\theta}_\alpha$ можно сохранить название спинорные.

2. Сопоставление с $(N = 1)$ -суперпространством

Использованный Дираком [6] прием перехода от соотношения $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ к линейному уравнению может быть разбит на два этапа: алгебраический, не связанный с введением новых постулатов, этап линеаризации этого уравнения:

$$E\psi = \beta t\psi + \alpha_k p_k \psi, \quad (1)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_4)^T$ — набор новых переменных ψ_α , β и α_k — 4×4 матрицы, E, t, p_k — не изменились; и этап перехода к квантовому описанию, связанный с введением постулатов о замене E и p_k операторами движения в пространстве X . Нас интересует именно второй этап, так как он позволяет связать векторные

y^μ и спинорные $\bar{\theta}_\alpha, \theta_\alpha$ координаты. Если

$$y_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad (2)$$

то линеаризация с помощью матриц Паули $(\sigma^\mu) = (I^{(2)}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ дает

$$y_0 \theta = \sigma^k y_k \theta, \quad (3)$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$ — спинорные координаты; если $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$, $\theta_\alpha, \bar{\theta}_\alpha \in \mathbb{C}$, то формула

$$y^\mu = \bar{\theta} \sigma^\mu \theta \quad (4)$$

при условии $P = P^+$, где $P_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \bar{\theta}_\beta$, связывает y^μ с $\bar{\theta}_\alpha, \theta_\alpha$ [7]. При $[\bar{\theta}_\alpha, \theta_\beta] = [\theta_\alpha, \theta_\beta] = [\bar{\theta}_\alpha, \theta_\beta] = 0$ выполняется (2), т.е. y^μ изотропен. „Норма“

$$s^2 \equiv y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

будет произвольной, если $P_{\alpha\beta}$ — произвольный спин-тензор валентности (1,1) [7].

Если же все $\bar{\theta}_\alpha, \theta_\alpha$ антикоммутируют, то $s^2 = 8\bar{\theta}_1 \theta_1 \bar{\theta}_2 \theta_2 \neq 0$. Но при этом, как легко проверить по (4),

$$y_0^2 = s^2/4, \quad y_k^2 = -s^2/4, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

т.е. неизотропные y^μ можно получить так только при введении мнимых y^0 или y^k . Набору y_A^μ из [3] соответствует замена в (4): $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta}, \theta \rightarrow \sigma_A \theta$, где $(\sigma_A) = (\sigma'^\mu - \sigma''^\mu)$, $A = 1, \dots, 8$, $(\sigma'^\mu) = (I^{(2)}, \sigma^1, -i\sigma^2, \sigma^3)$. В модели [3] некоторые $y_A^\mu = 0$; тогда для таких A из (4) получим $s^2 = 0$.

Из сказанного следует, что $(N=1)$ -суперпространство $(x; \bar{\theta}, \theta | y_A^\mu = \bar{\theta} \sigma^\mu \sigma_A \theta)$, в котором выделено 8 супермногообразий $y_A^\mu = \bar{\theta} \sigma^\mu \sigma_A \theta$, при действительных y^μ и $s^2 \neq 0$ нельзя отобразить на пространство Z модели [3], даже если отказаться от аксиом 1), 2), независимо от того, сохраняется ли аксиома 3).

Конечно, в рассмотренном выше случае можно говорить и о супермногообразиях в $(N=8)$ -суперпространстве $(x; \bar{\theta}_A, \theta_A)$ со связями $\bar{\theta}_A = \bar{\theta}, \theta_A = \sigma_A \theta$.

Отметим ещё то, что пространство $(y^\mu = \bar{\theta} \sigma^\mu \theta; \bar{\theta}, \theta)$ является близким аналогом обычного суперпространства; преобразования

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \bar{\zeta}, \quad \theta \rightarrow \theta + \zeta$$

сопровождаются преобразованием

$$y^\mu \rightarrow y^\mu + \bar{\theta} \sigma^\mu \zeta + \bar{\zeta} \sigma^\mu \theta + \bar{\zeta} \sigma^\mu \zeta, \quad (6)$$

т.е. аксиома 2) выполняется, хотя алгебраическая связь (4) дает ещё сдвиг $\bar{\zeta} \sigma^\mu \zeta$, глобальный по $\bar{\theta}, \theta$ и совместимый с дифференциальной связью из [5]. Ничто не мешает ввести аксиому 1); но введение аксиомы 3) приводит к квантованию величин $(y^\mu)^2$ (5) и возможно только при мнимых y^0 или y^k ; при действительных y^μ добавление аксиомы 3) ведет к компактификации $(y; \bar{\theta}, \theta) \rightarrow (0, \bar{\theta}, \theta)$.

Как и в классическом случае [7], произвольную норму s^2 обеспечивает отказ от частного вида спин-тензора $P_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \bar{\theta}_\beta$, т.е. расширение с помощью компо-

нент произвольного спин-тензора $P_{\alpha\beta}$ до $Z'' = (x^\mu; P_{\alpha\beta})$ с заменой связи (4) на

$$y_A^\mu = \sigma^\mu \sigma'_A P/2, \quad (7)$$

где $\sigma'_A = (I^{(2)}, -i\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3; -I^{(2)}, i\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$.

Если матрица P эрмитова, $y^\mu = \sigma^\mu P/2$ будут действительны, а (7) дает набор y_A^μ из [3]. Требовать антикоммутативности величин $P_{\alpha\beta}$ нет резона, т.к. в частном случае это $\theta_\alpha \bar{\theta}_\beta$ и такие величины коммутируют даже при антикоммутирующих $\theta_\alpha, \bar{\theta}_\beta$. Но связь (7) линейна, и дискретному множеству $\{y_A^\mu\}$ соответствует дискретный набор величин $P_{\alpha\beta}$.

Если все $\bar{\theta}_\alpha, \theta_\alpha$ коммутируют и справедливо (4), то при независимых и действительных $\bar{\theta}, \theta$ фиксация действительных значений y^μ может соответствовать выделению в пространстве $(\bar{\theta}, \theta)$ некоторых струн; например, вектору $y^\mu = (l, 0, 0, l)$ соответствует двухсвязная незамкнутая струна

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 = 0, \quad \bar{\theta}_1 \theta_1 = l,$$

т.е. модель [3] может быть сопоставлена и с суперструнными моделями в пространстве $(x, \bar{\theta}, \theta)$ (см. обзор [8]).

Использование подобной (4) связи 3-векторных и спинорных координат является эффективным приемом решения уравнения Дирака для частицы в кулоновском потенциале [9]; связь (7) широко применяется для замены спинорных индексов на векторные и обратно [1].

3. Сопоставление с $(N = 2)$ -суперпространством

Ограничения на норму s^2 векторов y^μ при использовании связи (4) обусловлены тем, что ей и уравнению (3) соответствует форма (2). Заменив (2) на

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = s^2 \quad (8)$$

с произвольной нормой s^2 и используя аналог (1):

$$\gamma^\mu y_\mu \chi = s \chi, \quad (9)$$

где γ^μ — матрицы Дирака, χ — биспинор, y_μ и s — те же что и в (8), можно использовать новую связь координат y_μ и $\chi_a, \bar{\chi}_a$, $a = 1, 2, 3, 4$:

$$y^\mu = \bar{\chi} \gamma^\mu \chi. \quad (10)$$

Если $s = \bar{\chi} \chi$, то (8) будет выполняться при некоторых дополнительных ограничениях на $\bar{\chi}_a, \chi_a$: для коммутирующих величин $\bar{\chi}_a, \chi_a$ нужно

$$R^2 = 0, \quad (11)$$

где $R \equiv \bar{\chi} \gamma^5 \chi$, $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ($R \equiv 0$, если $\bar{\chi} = \chi^\dagger \gamma^0$, $\chi_a^* = \chi_a$); для антикоммутирующих $\bar{\chi}_a, \chi_a$ требуется

$$R^2 + 8M = 0, \quad (12)$$

где $M \equiv \bar{\chi}_1 \chi_1 \bar{\chi}_4 \chi_4 + (\bar{\chi}_2 \chi_2 + \bar{\chi}_1 \chi_1) \bar{\chi}_3 \chi_3 + \bar{\chi}_1 \chi_4 \bar{\chi}_2 \chi_3 + \bar{\chi}_3 \chi_2 \bar{\chi}_4 \chi_1$. Принимая и в этом случае $\bar{\chi} = \chi^+ \gamma^0$, $\chi_a^* = \chi_a$, получим в (12)

$$R^2 + 8M = 8\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 = 0,$$

а также $s \equiv 0$, $y_1^0 \equiv 0$, т.е. при действительных y^μ и $y_1^k = 0$, $l = 0$; таким образом, здесь зависимость $\bar{\chi} = \chi^+ \gamma^0$ соответствует локальному варианту модели [3] с симметрией SU (8).

Пространство $(y, \bar{\chi}, \chi)$ будет $(N = 2)$ -суперпространством, если принять аксиомы 1), 3) и связь (10); на супермногообразии (12) в нем $s^2 = (\bar{\chi}\chi)^2$ — норма векторов y^μ . Чтобы y^μ были действительными, нужны связи $\text{Im } \bar{\chi}\gamma^\mu \chi = 0$.

Чтобы получить набор y_A^μ из [3], в (10) нужна замена $\gamma^\mu \rightarrow \gamma_A^\mu$; в отличие от случая (4) $\gamma_A^\mu = \gamma^\mu \Gamma_A B_A^\mu$, где $B_A^\mu \in \{\pm I^{(4)}, \pm \gamma^5\}$, $B_1^\mu = I^{(4)} \forall \mu$, $\Gamma_1 = I^{(4)}$, $\Gamma_2 = iI^{(2)} \times \sigma^1$, $\Gamma_3 = \sigma^1 \times \sigma^2$, $\Gamma_4 = \sigma^1 \times \sigma^3$, $\gamma_{A+4}^\mu = -\gamma_A^\mu$. Однако $B_A^\mu = \pm \gamma^5$ только для $y_A^\mu = 0$, так что

$$y_A^\mu = 0 \Rightarrow \bar{\chi}\gamma^\mu \gamma^5 \chi_A = 0,$$

$$y_A^\mu = \pm l \Rightarrow \bar{\chi}\gamma^\mu \chi_A = \pm l, \quad (13)$$

где $\chi_A = \Gamma_A \chi$ и в последней строке возможно и обратное соответствие знаков. Таким образом, при отказе от аксиом 1), 2) $(N = 2)$ -суперпространство $(x, \bar{\chi}, \chi)$, в котором связями

$$y_A^\mu = \bar{\chi}\gamma_A^\mu \chi = \text{Re } \bar{\chi}\gamma_A^\mu \chi \quad (14)$$

выделен набор супермногообразий (тривиальных [10], т.к. (14) не зависит от x), можно отобразить на пространство $Z = (x, y_A^\mu)$ модели [3]: $x \rightarrow x$, $(\bar{\chi}, \chi) \rightarrow y_A^\mu$ по формулам (14). В кварковом секторе модели выделяющие многообразия связи имеют вид (13). Переход за счёт преобразований внутренней симметрии от состояния поля A к состоянию B может пониматься как следствие перехода с многообразия A на многообразие B в пространстве $(x, \bar{\chi}, \chi)$, т.е. внутренняя симметрия в таком контексте — результат смешивания решений, заданных на разных многообразиях. Можно говорить и о $(N = 16)$ -суперпространстве $(x, \bar{\chi}_A, \chi_A)$ с дополнительными связями $\bar{\chi}_A = \bar{\chi}$, $\chi_A = \Gamma_A \chi$ и его отображении на Z ; обычный аргумент об ограничении $N \leq 8$ не имеет силы при отказе от аксиом 1), 2).

Если переход между супермногообразиями (14) происходит за счёт сдвигов $\bar{\chi} \rightarrow \bar{\chi} + \bar{\xi}$, $\chi \rightarrow \chi + \xi$, то эти сдвиги должны удовлетворять условию

$$\bar{\chi}\gamma_A^\mu \xi + \bar{\xi}\gamma_A^\mu \chi + \bar{\xi}\gamma_A^\mu \xi = y_B^\mu - y_A^\mu \quad (15)$$

для некоторой пары индексов (A, B) .

Супермногообразия (14) в $(x, \bar{\chi}, \chi)$ в общем случае не будут дискретными по $\bar{\chi}, \chi$, что дает возможность строить дифференциальную геометрию этого сложно устроенного пространства.

Связь (14) и уравнение (9) можно сравнить с разложением 4-вектора на „компоненты“ в базисе (γ^μ) [11]:

$$\hat{y} = y_\mu \gamma^\mu;$$

для матрицы $\hat{y}$ уравнение (9) — уравнение на собственные значения $\hat{y}\chi = s\chi$.

4. Заключение

Рассмотренное отображение суперпространства со связями на пространство Z модели [3] дает возможность сравнить эту модель с суперсимметричными моделями. Сравнение пространств показало, что модели [3] соответствует сложно устроенное суперпространство с $N = 2$ (точнее, необходимо $N \geq 2$), причем кратность расширения сама по себе не определяет группы внутренней симметрии, которую определяют теперь число и характер связей. Но не только они — то, что $SU(2)$ должна быть киральной, следует из уравнений модели [3], но не из особенностей базового пространства $(x, \bar{\chi}, \chi)$.

Отказ от аксиом 1), 2) для антикоммутирующих координат $\bar{\chi}, \chi$ существенно меняет интерпретацию компонентных полей, входящих в скалярное суперполе в пространстве $(x, \bar{\chi}, \chi)$ — все они должны быть скалярными относительно группы Лоренца основного пространства. В частности, лагранжиан, рассматриваемый как такое суперполе, должен содержать члены разложения по степеням $\bar{\chi}, \chi$:

$$\bar{\Sigma}_A(x)\chi_A + \bar{\chi}\Sigma(x),$$

где $\bar{\Sigma}(x), \Sigma(x)$ — набор скалярных полей. $SU(2)$ — преобразования не изменяют этих слагаемых, если $(\bar{\Sigma}_A, \bar{\Sigma}_{\bar{A}})$, где $\bar{A} \equiv A + 4 \pmod{8}$, являются дублетами $SU(2)$. Эти дублеты, вероятно, могут быть использованы для расщепления масс на основе механизма Хиггса. При локальном действии группы внутренней симметрии коэффициенты при произведениях $\bar{\chi}_\alpha, \chi_\beta$ могут имитировать обычно используемый потенциал скалярного поля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ю. Весс, Дж. Беггер, *Суперсимметрия и супергравитация*, Москва 1986.
- [2] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Поля и фундаментальные взаимодействия*, Киев 1986.
- [3] М. А. Ivanov, *Acta Phys. Pol.* **B21**, 25 (1990).
- [4] J. Wess, *Springer Lecture Notes in Phys.* **77**, 81 (1978).
- [5] Д. В. Волков, В. П. Акулов, *Письма в ЖЭТФ* **16**, 621 (1972).
- [6] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. (London)* **A117**, 610; **A118**, 351 (1928).
- [7] Ю. Б. Румер, А. И. Фет, *Теория групп и квантованные поля*, Москва 1977.
- [8] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, *Успехи физических наук* **150**, 489 (1986).
- [9] L. I. Komarov, T. S. Romanova, *J. Phys.* **B18**, 859 (1985).
- [10] Ф. А. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, Москва 1983.
- [11] A. Gamba, *J. Math. Phys.* **8**, 775 (1967).
- [12] Т. П. Ченг, Л.-Ф. Ли, *Калибровочные теории в физике элементарных частиц*, Москва 1987.