



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
DIPARTIMENTO DI FISICA

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA IN  
SCIENZE DELL'UNIVERSO

**Ricerca di segnali non gaussiani  
nella radiazione cosmica di fondo:  
un'analisi delle mappe di  
BOOMERanG**

Laureando **Marina Migliaccio**

Relatore **Dott. Paolo Natoli**

ANNO ACCADEMICO 2006-2007



*Alla mia famiglia*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Lo scenario cosmologico</b>	<b>7</b>
1.1 Il paradigma inflazionario . . . . .	7
1.2 La radiazione cosmica di fondo . . . . .	10
1.2.1 Le anisotropie . . . . .	10
1.2.2 Lo spettro di potenza angolare . . . . .	15
1.3 Le fluttuazioni non gaussiane . . . . .	23
1.3.1 Oltre il modello standard dell'inflazione . . . . .	24
1.3.2 Il parametro fenomenologico $f_{NL}$ . . . . .	27
1.3.3 Altre sorgenti di segnali non gaussiani . . . . .	30
<b>2 Ricerca di fluttuazioni non gaussiane</b>	<b>35</b>
2.1 Rassegna dei metodi statistici . . . . .	36
2.1.1 Metodi nello spazio reale . . . . .	36
2.1.2 Metodi nello spazio armonico . . . . .	38
2.1.3 Metodi in altri spazi . . . . .	39
2.2 I principali risultati . . . . .	40
2.3 I funzionali di Minkowski . . . . .	47
2.3.1 Geometria integrale . . . . .	48
2.3.2 Sulla sfera celeste . . . . .	48
2.3.3 Valori di aspettazione per un campo random gaussiano	50

2.3.4	Formule analitiche perturbative per un campo random debolmente non gaussiano . . . . .	51
2.4	In conclusione . . . . .	62
<b>3</b>	<b>L'esperimento BOOMERanG</b>	<b>65</b>
3.1	Il primo volo LDB: B98 . . . . .	66
3.2	Il secondo volo LDB: B03 . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Stima di <math>f_{NL}</math> dalle mappe di BOOMERanG</b>	<b>77</b>
4.1	Analisi dei dati di B98 . . . . .	78
4.1.1	Map Making . . . . .	80
4.1.2	Stima del rumore e <i>constrained noise realization</i> . . .	83
4.1.3	La mappa dei dati . . . . .	86
4.2	Mappa congiunta dei dati di B98 e B03 . . . . .	86
4.3	Funzionali di Minkowski dei dati . . . . .	90
4.4	Funzionali di Minkowski analitici . . . . .	91
4.5	Simulazioni Monte Carlo . . . . .	97
4.6	Confronto tra dati e predizioni analitiche . . . . .	100
4.7	Ulteriori verifiche . . . . .	102
	<b>Conclusioni</b>	<b>107</b>

# Introduzione

La scoperta della radiazione cosmica di fondo, avvenuta nel 1964 ad opera di A. Penzias e R. Wilson, rappresenta una tappa fondamentale dell'indagine cosmologica. L'esistenza di un fondo di radiazione isotropa con uno spettro di corpo nero alla temperatura di pochi gradi Kelvin è, senza dubbio, la prova più convincente della teoria del Big Bang "caldo". D'altro canto, misure accurate di questa radiazione hanno rivelato in essa delle deboli anisotropie, a livello di dieci parti per milione. Tali fluttuazioni, previste oltre vent'anni prima di essere osservate, sono la traccia inconfondibile delle perturbazioni di densità presenti nell'Universo primordiale da cui, per amplificazione gravitazionale, ha avuto origine la struttura su larga scala che oggi lo caratterizza. È infatti necessario postulare l'esistenza di fluttuazioni primordiali di densità su scale cosmologiche perché l'azione della gravità possa, col tempo, creare le condizioni necessarie alla formazione di galassie, ammassi e superammassi di galassie che costituiscono il tessuto dell'Universo osservabile.

Il problema dell'origine di tali perturbazioni primordiali ha frustrato i cosmologi per decenni, fino all'introduzione del paradigma inflazionario nei primi anni Ottanta. Secondo tale modello, le perturbazioni sono state generate da fluttuazioni microscopiche di origine quantistica, dovute al principio di indeterminazione di Heisenberg, proiettate su scale cosmologiche da un'espansione di tipo esponenziale del volume dell'Universo, avvenuta dopo solo  $10^{-36}$  secondi dal Big Bang, che prende il nome di inflazione cosmica.

Nonostante la semplicità di fondo del paradigma inflazionario, l'esatto meccanismo che ha causato l'inflazione non è stato ancora stabilito ed esistono più di cento candidati modelli inflazionari. Tuttavia, gli esperimenti di altissima precisione attesi negli anni a venire promettono di poter discriminare tra di essi attraverso verifiche delle specifiche predizioni di ciascun modello.

Una sfida importante è rappresentata dalla misura di segnali non gaussiani di origine primordiale nelle anisotropie della radiazione cosmica di fondo. Per ogni possibile scenario inflazionario, infatti, esiste una ben definita predizione dell'intensità e della forma di questi segnali che rappresentano delle piccole deviazioni da una statistica delle fluttuazioni che è, in prima approssimazione, gaussiana.

Per poter studiare tali deviazioni dalla statistica gaussiana è stato necessario sviluppare una batteria di metodi per l'analisi delle mappe di anisotropia. È opportuno che tali metodi siano per quanto possibile complementari, poiché, infatti, esiste un numero pressoché infinito di modi in cui una distribuzione può deviare da quella normale, alcuni metodi di ricerca risultano più efficienti di altri a seconda del tipo di segnale che si intende studiare. Inoltre, disporre di metodi complementari rende possibile un'analisi di consistenza delle misure volta ad escludere contaminazioni da effetti sistematici di natura strumentale o astrofisica, che costituiscono temibili sorgenti di segnali spuri.

Il presente lavoro di tesi è dedicato alla ricerca di segnali non gaussiani nei dati dell'esperimento BOOMERanG (*Ballon Observation Of Microwave Extragalactic Radiation and Geophysics*), il primo ad aver ottenuto mappe di anisotropia della radiazione cosmica di fondo ad alto rapporto segnale/rumore ed elevata risoluzione angolare. Tale ricerca consiste in un'analisi della morfologia e della topologia delle mappe, effettuata per mezzo dei funzionali di Minkowski e rivolta alla detezione di segnali generati da contributi quadratici al potenziale gravitazionale primordiale, la cui ampiezza è tipi-

camente controllata dal parametro di accoppiamento  $f_{NL}$ . Analisi dei dati di BOOMERanG, precedenti al presente lavoro, non hanno evidenziato deviazioni dalla distribuzione gaussiana, fornendo al contempo limiti per  $f_{NL}$  tramite estimatori basati sui funzionali di Minkowski.

Tuttavia, questo lavoro di tesi propone due importanti elementi di novità. Il primo consiste nell'aver combinato i dati acquisiti dall'esperimento in due voli distinti, sfruttando così larga parte dell'informazione disponibile. Il secondo, invece, consiste nell'aver calcolato delle predizioni analitiche dei funzionali di Minkowski per un campo casuale debolmente non gaussiano, quale si ritiene essere quello delle anisotropie. L'impiego di tali predizioni consente di stimare  $f_{NL}$  dal confronto diretto con i dati e di valutare gli errori statistici ad esso associati con simulazioni gaussiane delle mappe. Ciò permette di evitare di dover calibrare l'analisi per mezzo di simulazioni non gaussiane dei dati, aspetto questo estremamente vantaggioso poiché gli algoritmi per la generazione di fluttuazioni non gaussiane sono considerevolmente più lenti di quelli disponibili per le fluttuazioni gaussiane e, inoltre, risultano inevitabilmente legati a particolari assunzioni modellistiche.



# Capitolo 1

## Lo scenario cosmologico

### 1.1 Il paradigma inflazionario

Il primo modello inflazionario fu formulato da Guth nel 1981 [38] con lo scopo di risolvere alcuni problemi lasciati aperti dalla cosmologia classica del Big Bang, primo fra tutti il problema della “piattezza”. Il modello del Big Bang, infatti, stabilisce che la curvatura dell’Universo, qualora presente, si accentui progressivamente al passare del tempo, eppure le osservazioni rivelano che la sua attuale geometria è con ottima approssimazione euclidea. Questo implica che l’Universo ai suoi albori dovesse già essere estremamente piatto (entro una parte su  $10^{60}$ ), condizione che appare profondamente innaturale. Un altro problema è quello detto degli orizzonti. Esso è legato all’impossibilità di spiegare la straordinaria omogeneità dell’Universo su scale angolari così ampie da non essere state in contatto causale per la maggior parte della loro evoluzione (ossia di non essersi trovate all’interno del medesimo orizzonte degli eventi). Questa evidenza è testimoniata dall’estrema omogeneità (dell’ordine di  $10^{-5}$ ) della radiazione cosmica di fondo. Inoltre, vi è anche il problema dell’assenza di difetti topologici, quali monopoli magnetici, che dovrebbero invece essere presenti dal momento che l’Universo ha subito diverse transizioni di fase nelle epoche primordiali. Infine, il modello

del Big Bang non riesce a spiegare l'origine delle strutture di grande scala dell'Universo, quali galassie, ammassi e superammassi di galassie. Si ritiene che tali strutture si siano formate per amplificazione gravitazionale, ma l'instancabile azione edificante della gravità deve aver avuto un "seme" da cui partire, ossia ci devono essere state delle disomogeneità nella distribuzione della materia primordiale. Queste disomogeneità, tuttavia, non trovano un riscontro nella cosmologia classica. La teoria inflazionaria, proposta nella sua forma embrionale da Guth e successivamente perfezionata, risolve elegantemente questi problemi ipotizzando un breve periodo d'espansione straordinaria dell'Universo primordiale, detta appunto inflazione. Dopo solo  $10^{-36}$  secondi dal Big Bang l'Universo era dominato dalla densità d'energia di falso vuoto associata ad un campo scalare noto come inflatone. In seguito al decadimento di tale campo, esso ha attraversato una fase d'espansione accelerata superluminale, durante la quale ha moltiplicato il proprio volume in maniera esponenziale. Se l'inflazione è durata per un tempo sufficientemente lungo essa riesce a risolvere il problema degli orizzonti, poiché l'intero Universo oggi osservato deriverebbe da una regione sufficientemente piccola da essere stata in contatto causale. Svanisce anche il problema della "piattezza", poiché l'enorme espansione ha gonfiato l'Universo al punto di farlo apparire piatto. Al contempo la densità dei difetti topologici è enormemente diminuita così da poterli oggi considerare un evento raro. La teoria dell'inflazione riesce anche a spiegare l'insorgere di perturbazioni di densità nel plasma primordiale. In particolare, esse sono generate da fluttuazioni quantistiche, previste dal principio d'indeterminazione di Heisenberg, proiettate su scale cosmologiche dalla rapida espansione. Tali perturbazioni sono spinte fuori dall'orizzonte causale, dove restano "congelate" prima di rientrarvi in epoche successive a causa del lento progredire del flusso di Hubble.

Nello scenario standard dell'inflazione l'espansione è guidata da un unico campo, l'inflatone, e le perturbazioni di densità osservate sono dovute alle

fluttuazioni stesse del campo mentre scivola lentamente (*slow-roll*) lungo il suo potenziale. Quando l'inflazione finisce, l'inflatone oscilla intorno al minimo del suo potenziale e decade liberando energia che riscalda l'Universo, la cui temperatura è notevolmente diminuita a causa della rapida espansione. La presenza di fluttuazioni del campo ha fatto sì che l'inflazione sia durata per tempi diversi in regioni diverse, dando origine alle perturbazioni adiabatiche di densità. Il modello standard dell'inflazione permette di formulare delle predizioni basilari sulla struttura dell'Universo:

- a. L'Universo osservabile è spazialmente piatto.
- b. L'Universo osservabile è omogeneo e uniforme su grandi scale angolari, fatta eccezione per piccole fluttuazioni.
- c. Le perturbazioni primordiali di densità sono invarianti di scala, ossia il loro spettro di potenza segue una legge della forma  $P_s(k) \propto k^{n_s}$ , dove  $n_s$  è detto indice spettrale.
- d. Le fluttuazioni primordiali sono adiabatiche.
- e. Le perturbazioni primordiali obbediscono alla statistica gaussiana, fatta eccezione di piccole deviazioni.
- f. Insieme alle fluttuazioni (scalari) di densità sono presenti anche fluttuazioni tensoriali, meglio note come onde gravitazionali.

Decenni di osservazioni cosmologiche, non ultime le misure di anisotropia della radiazione cosmica di fondo, hanno permesso di verificare, almeno in parte, tali predizioni. Ciò nonostante l'esatto meccanismo che ha guidato l'inflazione ancora non è stato stabilito ed esistono più di 100 candidati modelli inflazionari. Per discriminare fra di essi si tenta di sfruttare le specifiche predizioni degli osservabili che ogni modello elabora, ma è necessaria una precisione delle misure tale da rappresentare ancora una vera sfida per gli

sperimentatori. Ad esempio il modello inflazionario standard prevede un valore di  $n_s$  molto prossimo ad uno, cosa che è stata confermata dalle osservazioni. Per essere in grado, però, di escludere modelli di inflazione slow-roll diversi da quello standard sarebbe necessaria un'accuratezza  $\Delta n_s \sim 0.01$  (si veda la review [63]) che è di gran lunga superiore a quella delle misure fin'ora disponibili. Un altro esempio è rappresentato dal fondo di onde gravitazionali, anch'esso previsto dalla teoria dell'inflazione. Poiché le fluttuazioni dell'inflatone sono accoppiate alla metrica dalle equazioni di Einstein, durante l'inflazione sono perturbate anche componenti tensoriali della metrica. Le perturbazioni che ne derivano sono poi allargate su scale cosmologiche e prendono il nome di onde gravitazionali. Seppure modelli inflazionari diversi predicano valori dell'ampiezza del segnale di onde gravitazionali diversi, questo segnale risulta comunque troppo basso per poter essere rilevato anche dai moderni esperimenti.

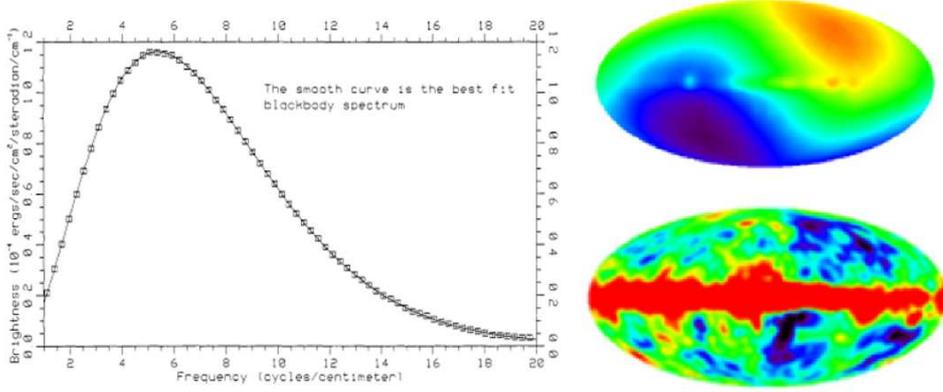
In tale contesto acquista quindi un ruolo di rilievo lo studio delle proprietà statistiche della radiazione cosmica di fondo, in particolare la ricerca di segnali non gaussiani d'origine primordiale. Per ogni possibile scenario inflazionario, infatti, esiste una ben definita predizione dell'intensità e della forma di tali segnali e la sensibilità degli attuali e futuri esperimenti permetterà di sfruttare questa informazione per testare i differenti modelli di inflazione.

## 1.2 La radiazione cosmica di fondo

### 1.2.1 Le anisotropie

L'esistenza della radiazione cosmica di fondo (o anche CMB dall'inglese *Cosmic Microwave Background*) fu per la prima volta predetta da George Gamow nel 1948. Secondo la teoria del Big Bang, di cui Gamow fu fautore, l'Universo primordiale può essere rappresentato come una "palla infuocata"

di densità e temperatura elevatissime. La materia in esso contenuta si trova sotto forma di plasma ed è strettamente accoppiata alla radiazione via scattering Compton. Per effetto dell'esplosione iniziale l'Universo si espande e conseguentemente si raffredda. Dopo quasi 380 000 anni la temperatura scende a circa 3000 K e gli elettroni si combinano con i nuclei (principalmente protoni) a formare gli atomi. Le continue collisioni che fino a quel momento avevano mantenuto in equilibrio termodinamico radiazione e barioni diminuiscono drasticamente. L'Universo diventa, quindi, trasparente ed i fotoni si propagano liberamente oltre la cosiddetta superficie di ultimo scattering. La radiazione liberata è l'osservabile "elettromagnetico" più antico a nostra disposizione. Questa inconfutabile traccia del Big Bang fu trovata solo nel 1964 da due ricercatori dei *Bell Telephone Laboratories*, New Jersey, con un ricevitore radio. Fu dapprima captata sotto forma di un ineliminabile eccesso di rumore nella banda di frequenze delle microonde, che presenta la stessa intensità in tutte le direzioni di osservazione del cielo. Da questa fortunosa scoperta, che nel 1978 valse il premio Nobel ai suoi artefici, presero le mosse numerosi esperimenti volti a confermarne la validità. La prova definitiva arrivò nel 1990 dall'esperimento FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer) montato a bordo del satellite *Cosmic Background Explorer* (COBE), lanciato dalla NASA nel 1989 per effettuare misure di CMB sull'intera sfera celeste. La radiazione cosmica di fondo riempie tutto il cielo, è isotropa, la sua distribuzione spettrale è proprio quella di corpo nero, come atteso per radiazione emessa da un corpo in equilibrio termodinamico qual era l'Universo primordiale, oggi caratterizzato da una temperatura di  $(2.725 \pm 0.001)K$  [69], come conseguenza del raffreddamento dovuto all'espansione. Un'ulteriore fondamentale scoperta per lo sviluppo della Cosmologia fu fatta dall'altro esperimento montato sul satellite COBE, il DMR (*Differential Microwave Radiometer*). Questo radiometro differenziale, sensibile a lievissime differenze di temperatura tra zone diverse di



**Figura 1.1**

Misure di COBE. A sinistra è riportato lo spettro della CMB misurato da FIRAS (primi 9 minuti di dati). I quadrati indicano i punti sperimentali con un errore dell'1%. Segue perfettamente l'andamento dello spettro di un corpo nero di temperatura  $T_0 = 2.735K$  [68]. L'intensità del picco a  $\nu = 160GHz$  ( $\lambda = 1.869mm$ ) è di  $370MJy \cdot str^{-1}$  ( $1MJy \cdot str^{-1} = 2.9979 \times 10^{-7}erg(cm \cdot s \cdot str)^{-1}$ ). Sulla destra troviamo in alto la mappa del dipolo e in basso la mappa delle anisotropie misurate da DMR con una risoluzione angolare di  $7^\circ$ .

cielo, rilevò le anisotropie tanto cercate. L'anisotropia predominante, a dire il vero già osservata negli anni '70, è l'anisotropia di dipolo, dovuta al moto peculiare del sistema solare rispetto alla CMB:

$$\frac{\Delta T}{T_0} \approx \frac{v_{Sole}}{c} \cos\theta \quad (1.1)$$

dove  $v_{Sole} \approx 369km/s$ . Per il dipolo si è misurato  $\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_{max} \approx 1.23 \times 10^{-3}$ . Sottratto questo contributo rimangono, tuttavia, delle anisotropie di ampiezza r.m.s. di circa  $30\mu K$  [94],  $10^{-5}$  volte il valore medio del campo (si veda Figura 1.1). Queste anisotropie sono la traccia delle disomogeneità nella distribuzione della materia nell'Universo primordiale, dalle quali sotto l'azione della gravità si è formata la complessa e ricca struttura su grande

scala oggi osservata galassie, ammassi e superammassi di galassie.

Per poter predire accuratamente la distribuzione delle anisotropie della CMB, bisogna risolvere numericamente il sistema delle equazioni linearizzate accoppiate di Einstein e Boltzmann per tutte le specie componenti l'Universo. Per le specie non-relativiste le disomogeneità nella densità ( $\delta$ ) ed il campo di velocità sono ben descritti dalle equazioni di continuità, dall'equazione di Eulero e dall'equazione di Poisson. Le specie relativistiche (fotoni e neutrini), invece, sono più difficili da caratterizzate in quanto oltre alla perturbazione di monopolo (l'equivalente di  $\delta$ ) e quella di dipolo (l'equivalente di una velocità) possiedono apprezzabili contributi anche ai multipoli di ordine superiore. Considerando le equazioni nello spazio di Fourier, tuttavia, si trova che modi di fluttuazione diversi sono disaccoppiati e la soluzione è notevolmente semplificata. Assumendo che lo spettro di potenza delle perturbazioni primordiali segua una legge di potenza, come quella data al punto c. del primo paragrafo, e focalizzando l'attenzione ad un singolo modo di Fourier, si trova che gli effetti fisici che hanno prodotto le anisotropie al momento della ricombinazione possono essere descritti dalla seguente equazione:

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) \approx \frac{\Phi_e(\hat{\mathbf{n}})}{3} + \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_e) + \left( \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) \right)_e. \quad (1.2)$$

dove  $\hat{\mathbf{n}}$  è il versore della direzione d'osservazione e gli indici  $e$  ed  $o$  indicano rispettivamente il tempo dell'ultimo scattering e quello d'osservazione. Il primo termine del lato destro dell'equazione, è noto come effetto Sachs-Wolfe (SW) e rappresenta il redshift (o blueshift) gravitazionale subito dai fotoni che, al momento del disaccoppiamento radiazione-materia, abbandonano una regione sovradensa (o sottodensa). In esso con  $\Phi_e$  è stato indicato il potenziale gravitazionale del punto di emissione. Il secondo termine, invece, tiene conto delle variazioni di temperatura per effetto Doppler, dal momento che l'ultimo scattering dei fotoni avviene su materia in movimento rispetto al flusso di Hubble. Infine il terzo termine di questa equazione indica le

fluttuazioni di temperatura intrinseche della distribuzione dei fotoni al momento della ricombinazione. Nell'Universo primordiale materia e radiazione sono in equilibrio termodinamico. Se le perturbazioni nella densità dell'Universo primordiale sono adiabatiche, si ha che la densità numerica dei fotoni  $\rho_\gamma$  e la densità di materia  $\rho_m$  variano di una stessa quantità e le fluttuazioni di temperatura della radiazione sono date da:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_e = 3 \left(\frac{\Delta \rho_m}{\rho_m}\right)_e = 4 \left(\frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma}\right)_e. \quad (1.3)$$

Prima della ricombinazione, l'imperfetto accoppiamento radiazione-materia può causare delle variazioni nel potenziale gravitazionale che inducono un ulteriore redshift gravitazionale, l'effetto early Integrated Sachs-Wolfe.

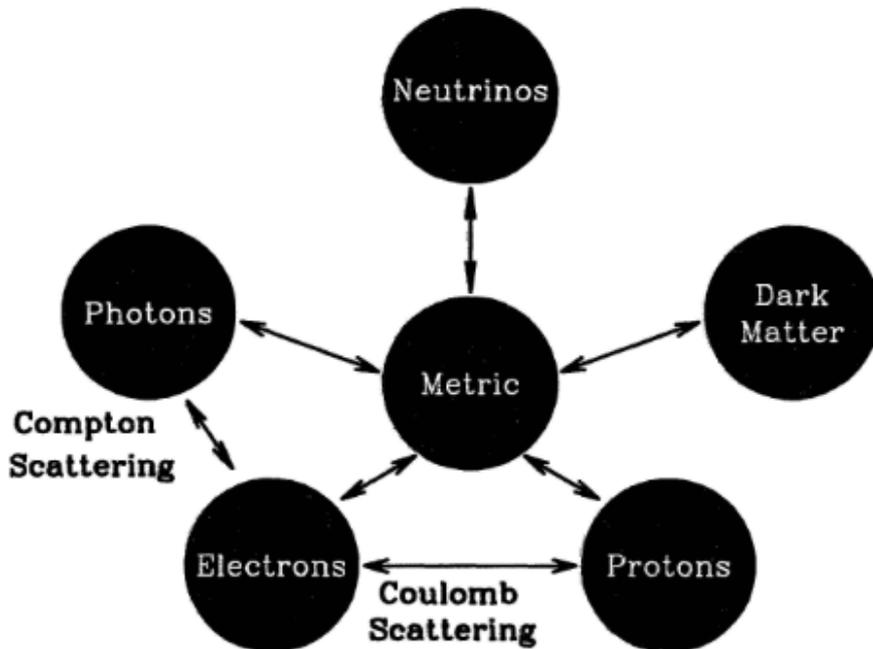


Figura 1.2

Il modo in cui interagiscono le diverse componenti dell'Universo. Queste connessioni sono codificate nel sistema di equazioni accoppiate di Boltzmann-Einstein.

Le anisotropie fin qui menzionate, note come anisotropie primarie, sono un'autentica miniera di informazioni sull'origine dell'Universo e oggi possono essere osservate quasi del tutto inalterate. Esse, però, devono essere distinte da altre forme di anisotropia presenti nella CMB, ma prodotte in epoche successive alla ricombinazione per interazione (o gravitazionale o di scattering) dei fotoni con la materia dell'Universo: le anisotropie secondarie (si veda anche il paragrafo 1.3.3).

In aggiunta agli effetti che producono anisotropie ci sono anche quelli che le distruggono. Il più importante è legato al fatto che la ricombinazione non è un processo istantaneo, ma ha luogo in un tempo finito. La superficie di ultimo scattering, infatti, ha uno spessore effettivo di circa 1/10 del raggio di Hubble alla ricombinazione. La temperatura osservata in una certa direzione è quindi la media delle temperature su una scala corrispondente a tale spessore. Ciò implica che le anisotropie su scale inferiori tenderanno ad essere sopresse, mentre le anisotropie su grandi scale angolari, mediate su distanze trasversali ancora maggiori, tenderanno a rimanere invariate.

### 1.2.2 Lo spettro di potenza angolare

Se ammettiamo che il campo delle fluttuazioni di temperatura della CMB sia gaussiano, per poterlo caratterizzare completamente è sufficiente studiarne la funzione di correlazione a due punti, essendo nulle tutte le funzioni di correlazione di ordine successivo. Poiché la radiazione cosmica di fondo misurata dagli esperimenti "vive" sulla sfera celeste, appare conveniente esprimere il campo delle anisotropie,  $\Delta T/T$ , nello spazio delle armoniche sferiche,  $Y_{\ell m}$ :

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (1.4)$$

I coefficienti dell'espansione hanno valor medio nullo,  $\langle a_{\ell m} \rangle = 0$ . La loro funzione di correlazione,  $C_\ell$ , è definita come:

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_\ell \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (1.5)$$

e prende il nome di spettro di potenza angolare, perché dà una misura della potenza media delle fluttuazioni ad una certa scala angolare  $\theta \sim \frac{\pi}{\ell}$ . Si noti che nell'Eq. 1.5 si assume l'omogeneità e l'isotropia dell'Universo, da cui discende che gli  $a_{\ell m}$  per  $\ell$  e  $m$  diversi sono scorrelati e che lo spettro non dipende da  $m$  (invarianza rotazionale). In realtà non è possibile effettuare la media di ensemble riportata nella definizione. La radiazione cosmica di fondo osservata, infatti, rappresenta una ed una sola possibile realizzazione del campo casuale  $\Delta T/T$ . Tale campo non è ergodico sulla sfera: effettuare operazioni di media sull'ensemble delle sue possibili realizzazioni non coincide col calcolare le medie sulla sfera, la sola cosa che è possibile fare avendo a disposizione un unico cielo. Da ciò deriva l'incertezza intrinseca nelle quantità statistiche estratte dai dati, nota come varianza cosmica. Per le piccole scale angolari è possibile effettuare le operazioni di media su un gran numero di coppie di direzioni che individuano lo stesso angolo. Per le grandi scale angolari questo non è più vero e le misure su queste scale sono dominate dall'effetto della varianza cosmica.

Un semplice estimatore dello spettro di potenza angolare per osservazioni effettuate su tutto il cielo, si ottiene sfruttando l'invarianza rotazionale dell'Universo:

$$\hat{C}_\ell^{sky} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m |a_{\ell m}|^2. \quad (1.6)$$

Poiché la temperatura è una quantità reale, per  $m \neq 0$  si deve avere  $a_{\ell m} = a_{\ell m}^* (-1)^m$ , così il numero di modi indipendenti per ogni scala angolare si riduce da  $4\ell + 1$  a  $2\ell + 1$ . Si noti che  $a_{\ell 0}$  è puramente reale. Se gli  $a_{\ell m}$  sono gaussiani, la quantità  $(2\ell + 1)\hat{C}_\ell/C_\ell$  è governata da una distribuzione di  $\chi^2$

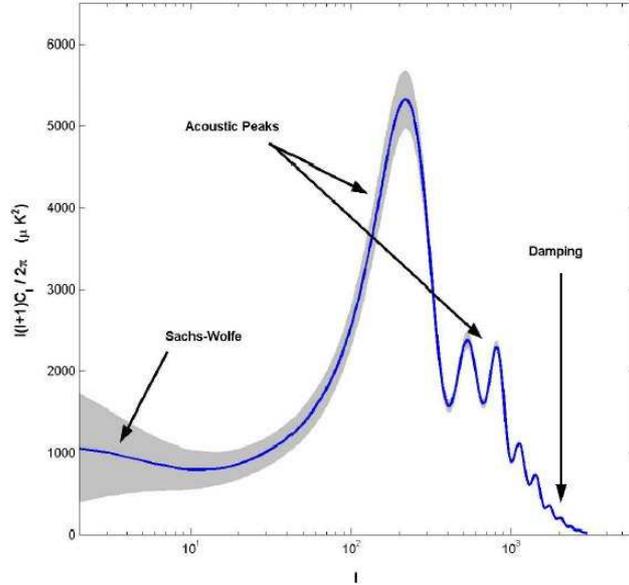
con  $2\ell + 1$  gradi di libertà. Si ricava facilmente la varianza dei  $\hat{C}_\ell$ :

$$\text{var}(\hat{C}_\ell) = \frac{2}{2\ell + 1} C_\ell^2, \quad (1.7)$$

nota come varianza cosmica. Questa espressione è valida per osservazioni a tutto cielo, ma se l'esperimento effettua misure della CMB solo su una porzione della sfera celeste,  $f_{sky}$ , tale varianza è aumentata di un fattore  $\sim f_{sky}^{-1}$ . In Figura 1.3 è riportato l'andamento atteso per lo spettro di potenza angolare della CMB, evidenziando gli effetti fisici che dominano tale andamento alle diverse scale angolari. La banda grigia rappresenta la varianza cosmica.

Come mostrato dall'Eq. 1.2 le anisotropie della CMB sono state generate dalle perturbazioni di densità primordiali. Schematicamente si può immaginare di generare una di queste perturbazioni comprimendo in modo adiabatico un certo volume dell'Universo. La regione perturbata risulta sovradensa rispetto alle regioni contigue e se ha una dimensione maggiore dell'orizzonte causale il contrasto di densità continua ad accrescersi per collasso gravitazionale. A bassi multipoli, ossia su scale maggiori dell'orizzonte alla ricombinazione, le anisotropie sono dunque governate dal termine di gravità (effetto Sachs-Wolfe). Se le perturbazioni di densità sono invarianti per scala tali saranno anche le anisotropie della CMB. Questo effetto è rappresentato dall'andamento piatto dello spettro per  $\ell < 20$ , predetto dalla teoria dell'inflazione (punto c. del primo paragrafo) e verificato dalle osservazioni.

Prima della ricombinazione la materia dell'Universo è ancora ionizzata e la radiazione è ad essa strettamente accoppiata via scattering Compton: il rate di scattering è molto maggiore del rate di espansione dell'Universo. La regione perturbata contiene, quindi, sia materia che radiazione. Le perturbazioni che hanno una dimensione inferiore all'orizzonte causale oscillano intorno alla configurazione di equilibrio, sotto l'effetto contrastante di forza di gravità e pressione di radiazione. Oscillazioni con frequenze diverse arrivano in fasi diverse alla ricombinazione. Per questo motivo lo spettro di



**Figura 1.3**

Spettro di potenza angolare della CMB, calcolato con CMBFAST [91] per il modello cosmologico di best fit del primo anno di dati di WMAP [44].

potenza angolare presenta picchi di ampiezza differente a scale angolari differenti, per  $100 < \ell < 1000$ , che prendono il nome di oscillazioni acustiche. La Figura 1.4 mostra proprio come i modi su scale intermedie evolvano in maniera più complicata rispetto a quelli che sono fuori dell'orizzonte causale. Si consideri la curva indicata come “First Peak”. Non appena il modo entra nell'orizzonte la perturbazione inizia a crescere, fin quando non raggiunge un massimo in corrispondenza della ricombinazione. Se si osservano anisotropie su scale corrispondenti a questo modo<sup>1</sup>, ci si aspetta di trova-

<sup>1</sup>Se assumiamo che l'Universo sia piatto, il modo  $k$  è proiettato in anisotropie sulla scala angolare  $\theta \simeq k^{-1}/(\eta_0 - \eta_*)$ , dove  $(\eta_0 - \eta_*)$  è la distanza comobile tra l'osservatore ( $\eta_0$ ) e la ricombinazione ( $\eta_*$ ). L'aggettivo comobile sta ad indicare che la distanza è calcolata nel sistema di riferimento solidale con l'espansione di Hubble. Con  $\eta$  è indicato il tempo conforme, che si ottiene come  $\eta = \int c dt/a(t)$ , dove  $a(t)$  è il fattore di scala dell'Universo.

re grandi fluttuazioni: corrispondentemente si avrà un picco nello spettro di potenza. I modi che entrano l'orizzonte prima, raggiungono il massimo d'oscillazione prima e arrivano alla ricombinazione con un'ampiezza diversa, ad esempio con ampiezza nulla ("First Trough"). Alla scale corrispondenti a questo modo si avranno piccole fluttuazioni nel campo di temperatura della CMB: una gola nello spettro di potenza. Modi entrati ancora prima nell'orizzonte causale possono aver effettuato un'intera oscillazione prima della ricombinazione ("Second Peak"). A questi modi corrispondono grandi fluttuazioni nel campo di temperatura ed un secondo picco nello spettro di potenza. Considerando i possibili casi intermedi a quelli qui presentati a scopo di esempio, si ottiene la complessa struttura dei picchi acustici dello spettro di potenza.

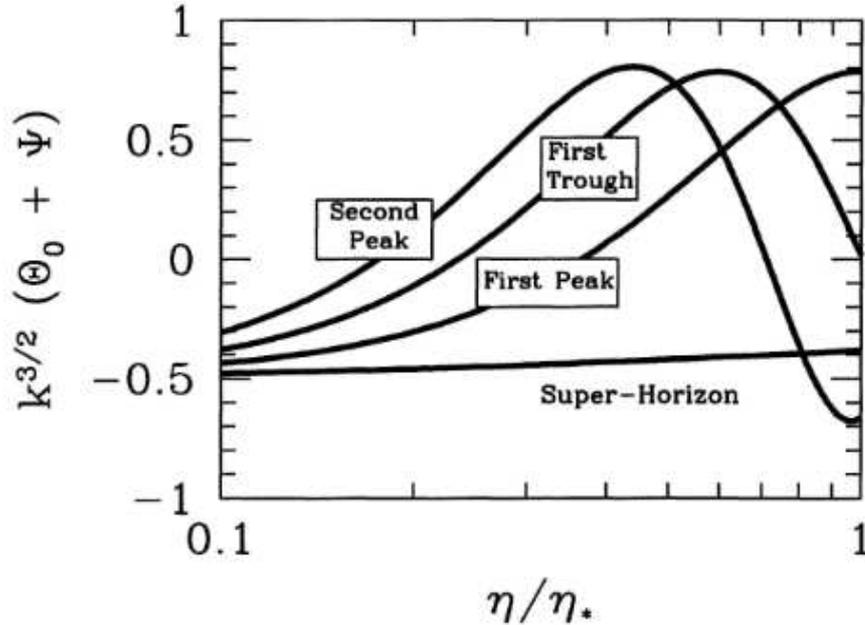
Fin quando ci sono particelle cariche nel gas cosmico, ossia fin quando il processo di ricombinazione non si è completato, i fotoni interagiscono fortemente con il plasma. Essi, diffondendo dalle regioni sovraddense dell'Universo, trascinano con sé i barioni a cui sono accoppiati via scattering Compton. L'effetto finale, noto come Silk damping, è quello di disperdere le perturbazioni su piccole scale angolari. Le perturbazioni di dimensioni maggiori, invece, sono sufficientemente massive, perché il collasso gravitazionale possa continuare nonostante il "vento fotonico". Questo spiega perché i  $C_\ell$  sono soppressi per  $\ell > 1000$ .

La struttura dei picchi dello spettro angolare sopra descritta dipende sensibilmente dal modello cosmologico adottato. Una precisa misura dei  $C_\ell$  da poter confrontare con le previsioni teoriche permette di ricavare i parametri cosmologici, ossia di caratterizzare la geometria e la composizione dell'Universo.

I parametri cosmologici che determinano la composizione di materia ed

---

Esso, quindi, rappresenta la dimensione comobile della regione causalmente connessa al tempo  $t$ . Essendo  $\eta_* \ll \eta_0$  e  $\theta \sim 1/\ell$  la relazione tra multipoli e modi è:  $\ell \simeq k\eta_0$ .



**Figura 1.4**

Evoluzione delle perturbazioni nella distribuzione dei fotoni prima della ricombinazione  $\eta^*$  per quattro modi diversi. Il modello adottato è un CDM (Cold Dark Matter) con  $h = 0.5$ ,  $n_s = 1$ ,  $\Omega_m = 1$  e  $\Omega_b = 0.06$ . Iniziando dal basso verso l'alto i numeri d'onda per i diversi modi sono:  $k = (7 \times 10^{-4}, 0.022, 0.034, 0.045)$ .

energia dell'Universo sono:

- la densità barionica,  $\omega_b = \Omega_b h^2$ ;
- la densità di materia,  $\omega_m = \Omega_m h^2$ , dove  $\Omega_m$  comprende il contributo dei barioni, della materia oscura fredda (CDM) e dei neutrini ( $\nu$ ),  $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{CDM} + \Omega_\nu$ ;
- la densità dei neutrini,  $\omega_\nu = \Omega_\nu h^2$ ;
- il parametro dell'equazione di stato della energia oscura (DE)  $\omega \equiv p_{DE}/\rho_{DE}$ , dove  $p_{DE}$  e  $\rho_{DE}$  indicano rispettivamente la pressione e la densità dell'energia oscura;

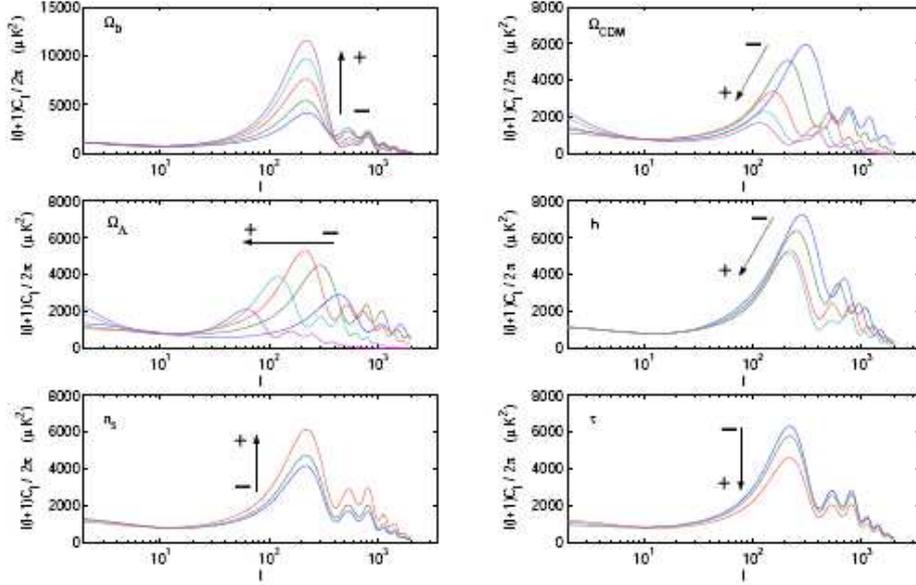


Figura 1.5

Dipendenza dello spettro di potenza angolare della temperatura da alcuni dei parametri cosmologici fondamentali [64].

- la densità dell'energia oscura,  $\Omega_{DE}$ . Nel caso in cui  $\omega = -1$  l'energia oscura prende la forma di una costante cosmologica e il suo contributo è indicato con  $\Omega_\Lambda$ .

Nei parametri sopra definiti si usa  $h \equiv H_0/100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , dove  $H_0$  è la costante dell'espansione di Hubble. Lo spettro di potenza primordiale delle fluttuazioni scalari è definito dalla legge di potenza:

$$P_s(k) = A_s \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_s} \quad (1.8)$$

dove  $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ . I parametri che lo caratterizzano sono:

- ampiezza dello spettro di potenza,  $A_s$ ;
- indice spettrale,  $n_s$ ;

- indice *running*,  $\alpha = dn_s/d\ln k$ , convenzionalmente calcolato alla scala  $k_0$ .

In aggiunta alle anisotropie della CMB generate dalle perturbazioni di densità (perturbazioni scalari), altre anisotropie possono essere generate dalle perturbazioni tensoriali, ossia dal fondo di onde gravitazionali anch'esse previste dalla teoria dell'inflazione. Lo spettro primordiale delle perturbazioni tensoriali è descritto da una legge invariante di scala analoga a quella dell'Eq. 1.8. Esso è caratterizzato da un'ampiezza  $A_t$  ed un indice spettrale  $n_t$ , tuttavia per convenzione si usa come parametro cosmologico il rapporto  $r = A_t/A_s$  e l'indice spettrale viene derivato dalla relazione di consistenza dell'inflazione come  $n_t = -r/8$  [4]. Tra i parametri cosmologici va inoltre menzionata la profondità ottica, che tiene conto della storia della reionizzazione dell'Universo:

$$\tau = \sigma_T \int_{t_r}^{t_0} n_e(t) dt \quad (1.9)$$

dove  $\sigma_T$  è la sezione d'urto Thomson e  $n_e(t)$  è la densità numerica degli elettroni in funzione del tempo, integrata sull'intervallo temporale tra la ricombinazione e l'osservazione.

Per dare un'idea della dipendenza dello spettro di potenza angolare dai parametri cosmologici in Figura 1.5 è riportato l'andamento dei  $C_\ell$  al variare dei parametri  $\Omega_b$ ,  $\Omega_{CDM}$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $h$ ,  $n_s$  e  $\tau$ . Va notato che il modo in cui alcuni di questi parametri entrano nel calcolo dei  $C_\ell$  produce delle degenerazioni, che possono essere eliminate solo se si ha la possibilità di confrontare diversi dataset cosmologici, e.g. misure della CMB, diagrammi luminosità-redshift determinati con le supernovae di tipo Ia e grandi surveys di galassie. La scala su cui si ha il massimo delle fluttuazioni del campo di temperatura, che corrisponde al primo e più prominente picco dello spettro di potenza, è all'incirca quella dell'orizzonte causale al momento della ricombinazione. La dimensione apparente delle fluttuazioni dipende dal percorso effettuato

dai fotoni e di conseguenza dalla curvatura dello spazio. Sarebbe di circa  $1^\circ$ ,  $l \sim 200$ , se l'Universo fosse piatto, mentre apparirebbe più piccola in uno spazio con curvatura negativa e più grande in uno spazio a curvatura positiva (Figura 1.6). Precise determinazioni della posizione del primo picco dello spettro di potenza angolare ([25], [41]) hanno validato la predizione d'Universo piatto fatta dal modello inflazionario (punto a. del primo paragrafo).

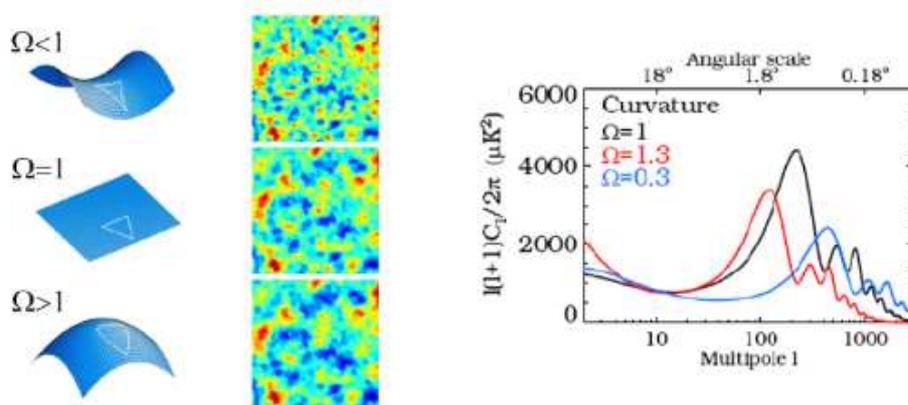


Figura 1.6

A destra, spostamento dei picchi dello spettro di potenza angolare della temperatura al variare della curvatura dell'Universo. A sinistra, variazioni nella distribuzione delle anisotropie in funzione della curvatura. Il parametro  $\Omega$  è la densità di curvatura, definita come:  $\Omega \equiv 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$ .

### 1.3 Le fluttuazioni non gaussiane

Come già accennato all'inizio di questo capitolo non esiste consenso unanime riguardo il meccanismo di produzione delle perturbazioni di densità primordiali, da cui ha avuto origine la struttura su grande scala dell'Universo e di cui resta traccia nelle anisotropie della CMB. Tuttavia proprio lo studio delle proprietà statistiche del campo delle anisotropie può essere

il mezzo per individuarlo. In particolare l'intervento di effetti non lineari, nell'origine e nell'evoluzione delle perturbazioni di densità durante e dopo l'inflazione, induce delle non gaussianità nelle perturbazioni stesse e quindi nelle anisotropie. L'entità di tali non gaussianità dipende dal modello inflazionario considerato.

### 1.3.1 Oltre il modello standard dell'inflazione

Secondo il modello standard dell'inflazione le perturbazioni di densità primordiali sono state generate da fluttuazioni quantistiche, portate su scale cosmologiche da un processo di espansione accelerata guidato dalla densità di energia dell'inflatone. Esistono, però, anche altri meccanismi che possono spiegare l'origine delle perturbazioni.

**Curvaton Scenario** Questo modello prevede che le perturbazioni di curvatura siano state prodotte da perturbazioni iniziali di isocurvatura, associate alle fluttuazioni del curvaton, un campo scalare leggero [62]. A differenza delle perturbazioni adiabatiche, le perturbazioni di isocurvatura inducono una variazione del numero relativo per unit di volume di fotoni e barioni, preservando la curvatura spaziale dell'Universo. Durante l'inflazione il curvaton dà un contributo trascurabile alla densità di energia dell'Universo ed è solo debolmente accoppiato agli altri campi scalari che guidano il processo di espansione. In questo scenario le perturbazioni generate dall'inflatone sono del tutto trascurabili, mentre quelle generate dal curvaton diventano rilevanti solo quando la densità di energia ad esso associata copre una frazione significativa dell'energia totale. Ciò si verifica dopo la fine dell'inflazione, momento in cui il curvaton inizia ad oscillare intorno al minimo del suo potenziale e decade in radiazione termalizzata, producendo le perturbazioni adiabatiche. Se il decadimento del campo è completo non viene lasciata traccia di perturbazioni di isocurvatura.

**Inhomogeneous Reheating Scenario** Come nel caso del curvaton scenario si suppone che le perturbazioni derivanti dalle fluttuazioni dell'inflatone siano trascurabili. Finita l'inflazione la temperatura dell'Universo si è drasticamente ridotta a causa della rapida espansione. Per poterlo riscaldare nuovamente (reheating) l'inflatone deve accoppiarsi alle particelle ordinarie e decadere in radiazione. Le perturbazioni di curvatura sono generate da una disomogeneità nel rate di decadimento [40]- [31], nella massa [32] o nel tasso di interazione di tali particelle [10].

**Multiple Scalar Fields Scenario** Altri possibili scenari inflazionari si basano sull'assunzione che l'evoluzione dello spazio-tempo e delle perturbazioni in esso contenute sia guidata dall'interazione di più campi scalari [61],[49],[79]. Questo accoppiamento dà vita ad un nuovo meccanismo di generazione delle fluttuazioni quantistiche dei campi scalari: il meccanismo di oscillazione [3]. Le oscillazioni possono aver luogo anche se la densità di energia dei campi scalari extra è inferiore a quella dell'inflatone. Nel contesto del modello inflazionario standard sono previste perturbazioni distribuite in maniera gaussiana, perché viene esplicitamente imposto che il potenziale dell'inflatone sia "piatto" e che i termini non lineari siano soppressi. Se l'inflatone però è accoppiato ad un campo scalare non vincolato alle condizioni di slow-roll, è naturale aspettarsi l'insorgere di effetti non lineari, possibili sorgenti di non gaussianità.

Oltre agli scenari inflazionari sopra menzionati ne esistono altri che hanno la caratteristica di non introdurre le condizioni di slow-roll o di recuperarle in un modo che potremmo definire "non convenzionale" ("Unconventional inflation set-ups). Tra questi ci sono: lo scenario warm inflation, il ghost inflation [1] e il "D-celeration" inflation [92]. Ad esempio, il modello di warm inflation si propone come alternativa allo scenario standard di infla-

zione “superraffreddata” [5]. In esso gli effetti dissipativi giocano un ruolo fondamentale durante l’inflazione, cosicché la produzione di radiazione avviene simultaneamente al processo di espansione evitando il crollo della temperatura.

Merita, infine, di essere menzionata un’altra classe di modelli cosmologici: i modelli New Ekpyrotic o ciclici. La peculiarità di questi modelli è che non ricorrono al paradigma inflazionario. Invece di richiedere una rapida espansione esponenziale subito dopo un Big Bang caldo, la teoria ekpyrotic sostiene che i primi istanti dell’Universo siano stati caratterizzati da un’evoluzione “fredda”, seguita da un lungo periodo di lenta contrazione. Nonostante le differenze sostanziali nelle dinamiche, sia il modello ekpyrotic, sia quello inflazionario standard, risolvono i problemi lasciati aperti dalla teoria classica del Big Bang e spiegano l’origine delle perturbazioni primordiali, da cui poi si è formata la struttura su larga scala dell’Universo. Entrambi i modelli predicono perturbazioni di densità primordiali adiabatiche e in-varianti di scala. Tuttavia il primo, a differenza del secondo, prevede un livello elevato di non gaussianità nella distribuzione di tali perturbazioni. In particolare la teoria ekpyrotic prevede non gaussianità di ampiezza proporzionale all’inverso dei parametri di slow-roll, cioè  $\sim \mathcal{O}(10^2)$  (si veda [20], [12] e [57]), e quindi rilevabile con i moderni esperimenti. Un altro elemento discriminante tra i modelli ekpyrotic e inflazione slow-roll è rappresentato dalle onde gravitazionali, che sono previste solo nello scenario inflazionario. Tuttavia, come già accennato nel primo paragrafo, gli esperimenti attuali non sono ancora sufficientemente sensibili da poter rilevare il segnale di onde gravitazionali e sfruttare questa informazione per distinguere tra i diversi modelli cosmologici.

### 1.3.2 Il parametro fenomenologico $f_{NL}$

Lo studio dell'origine e dell'evoluzione delle perturbazioni di curvatura al di fuori della teoria lineare prevede l'insorgere di non gaussianità nella loro distribuzione. Risulta, dunque, conveniente l'introduzione di un parametro fenomenologico, da poter confrontare con le misure sperimentali, che sia un indicatore del contributo degli effetti non lineari. Scenari inflazionari diversi prevedono valori diversi di tale parametro, come schematizzato nella Tabella 1.1. L'elemento di differenza, tuttavia, risiede nelle perturbazioni primordiali generate o durante l'inflazione, come nello scenario standard, o immediatamente dopo l'inflazione, come nel curvaton scenario o nello inhomogeneous reheating scenario. L'evoluzione post-inflazionaria non lineare indotta dalla gravità è, invece, comune a tutti gli scenari.

Le anisotropie di temperatura della CMB,  $\Delta T/T$ , sono generate dalle perturbazioni di curvatura  $\Phi$  (si veda paragrafo 1.2.1) e nell'ambito della teoria lineare le prime sono legate alle seconde dalla relazione:

$$\frac{\Delta T}{T} \sim g_T \Phi \quad (1.10)$$

dove  $g_T$  è la funzione di trasferimento radiativa. Per fluttuazioni di temperatura su scale maggiori dell'orizzonte causale all'epoca del disaccoppiamento radiazione-materia domina l'effetto Sachs-Wolfe. Se le fluttuazioni sono adiabatiche, si ha  $g_T = -1/3$ . Su scale angolari al di sotto dell'orizzonte causale  $g_T$  oscilla (oscillazioni acustiche) e per determinarne l'andamento bisogna risolvere le equazioni di Boltzmann per il trasporto dei fotoni accoppiate alle equazioni di Einstein. Dall'Eq. 1.10 si deduce che se  $\Phi$  è gaussiano tale deve essere anche  $\Delta T/T$ . Ciò non è più vero se nello sviluppo perturbativo non ci si ferma al termine lineare, ma si includono anche termini di ordine superiore. Ad esempio, se si considera la teoria perturbativa del secondo ordine per l'evoluzione gravitazionale delle perturbazioni si ha [51]:

$$\frac{\Delta T}{T} \sim g_T(\Phi + f_\Phi \Phi^2) \quad (1.11)$$

con  $f_\Phi \sim \mathcal{O}(1)$ . In questo caso anche se  $\Phi$  fosse gaussiano,  $\Delta T/T$  risulterebbe debolmente non gaussiano. Ma  $\Phi$  è gaussiano?

La presenza di non-linearità nella dinamica delle fluttuazioni del campo durante l'inflazione può rendere le perturbazioni debolmente non gaussiane. Se ci si ferma al secondo ordine, per perturbazioni al di sopra dell'orizzonte causale si ottiene [85]:

$$\Phi \sim m_{pl}^{-1} g_\Phi (\delta\phi + m_{pl}^{-1} f_{\delta\phi} \delta\phi^2) \quad (1.12)$$

dove  $g_\Phi \sim \mathcal{O}(10)$ ,  $f_{\delta\phi} \sim \mathcal{O}(10^{-1})$  per modelli inflazionari slow-roll a singolo campo scalare e  $m_{pl} \equiv G^{-1/2}$  è la massa di Planck. D'altro canto anche se le fluttuazioni quantistiche generano delle fluttuazioni del campo scalare gaussiane  $\delta\phi$ , complessi termini di interazione nelle equazioni del moto del campo possono renderle debolmente non gaussiane:

$$\delta\phi \sim g_{\delta\phi} (\eta + m_{pl}^{-1} f_\eta \eta^2) \quad (1.13)$$

dove  $\eta$  rappresenta le fluttuazioni quantistiche gaussiane prodotte originariamente.  $g_{\delta\phi} \sim 1$  e  $f_\eta \sim \mathcal{O}(10^{-1})$ . Mettendo insieme i risultati delle Eq. 1.11- 1.13 otteniamo:

$$\frac{\Delta T}{T} \sim g_T \left[ \Phi_L + \left( f_\Phi + g_\Phi^{-1} f_{\delta\phi} + g_\Phi^{-1} g_{\delta\phi}^{-1} f_\eta \right) \Phi_L^2 \right] \quad (1.14)$$

dove con  $\Phi_L \equiv g_\Phi g_{\delta\phi} m_{pl}^{-1} \eta \sim 10 m_{pl}^{-1} \eta$  è stata indicata una perturbazione gaussiana ausiliaria. Il parametro di accoppiamento non lineare, locale  $f_{NL}$  è definito come:

$$f_{NL} \equiv f_\Phi + g_\Phi^{-1} f_{\delta\phi} + g_\Phi^{-1} g_{\delta\phi}^{-1} f_\eta \quad (1.15)$$

ed è dominato dal contributo gravitazionale  $f_\Phi \sim \mathcal{O}(1)$ , rispetto al quale i termini di non-linearità inflazionaria  $\sim \mathcal{O}(10^{-1})$  sono trascurabili, almeno per i modelli inflazionari standard. È possibile, a questo punto, riscrivere la perturbazione di curvatura come somma di due termini:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_L(\mathbf{x}) + f_{NL} \left[ \Phi_L(\mathbf{x})^2 - \langle \Phi_L(\mathbf{x})^2 \rangle \right] \quad (1.16)$$

di cui il primo indica il contributo della teoria lineare e il secondo la correzione quadratica. Per  $f_{NL} = 0$  si riottiene l'approssimazione lineare, cioè perturbazioni gaussianamente distribuite. Si noti, inoltre, che essendo  $\Phi \sim 10^{-5}$  il secondo termine del lato destro dell'Eq. 1.16 è  $10^{-5}f_{NL}$  volte più piccolo del primo. Dati gli ordini di grandezza coinvolti, le osservazioni attuali non sono sufficientemente sensibili da rilevare un'eventuale dipendenza di  $f_{NL}$  dalla lunghezza d'onda, quindi considerarlo costante costituisce una parametrizzazione ragionevole del livello di non gaussianità.

In Tabella 1.1 sono riassunti i livelli di non gaussianità primordiale previsti per i diversi scenari cosmologici. In realtà per i primi tre casi i valori mostrati sono stati ottenuti con uno studio completo dell'evoluzione delle perturbazioni, dall'inizio dell'inflazione attraverso l'epoca dominata dalla radiazione, fino a quella dominata dalla materia a cui i risultati si riferiscono. Negli altri casi i risultati riportati sono per perturbazioni primordiali. Se  $f_{NL} \gg 1$  essi sono una buona approssimazione dei valori realmente osservabili, ma se  $f_{NL} \sim \mathcal{O}(1)$  è possibile che ci siano significative correzioni da apportare relative all'evoluzione post-inflazionaria delle non gaussianità. Nel curvaton scenario il parametro  $r$  corrisponde al rapporto tra la densità di energia del curvaton e la densità di energia totale. Nell'inhomogeneous reheating scenario con  $\bar{\Gamma}$  è stato indicato il rateo di decadimento medio dell'inflatone e con  $\Gamma_1$  il rateo di decadimento di un campo leggero  $\chi$ . In particolare si ha  $\Gamma_1/\bar{\Gamma} \leq 1$  e  $0 < \alpha < 1/6$ , mentre il "caso minimale" corrisponde ad un rateo di decadimento dell'inflatone completamente controllato da  $\chi$ ,  $\Gamma \propto \chi^2$  e  $\alpha = 1/6$ . Nel caso multiple scalar fields la quantità  $V_{\chi\chi}/H^2$  rappresenta il rapporto tra la massa del campo scalare extra  $\chi$  e il parametro di Hubble durante l'inflazione. Il valore ottenuto per  $f_{NL}$  dipende dalla frazione di isocurvatura  $P_S/P_R$ , ossia dall'ampiezza relativa tra le perturbazioni di isocurvatura e quelle adiabatiche, e dalla correlazione fra di esse ( $-1 \leq \cos\Delta \leq 1$ ). Per il warm scenario  $\Gamma$  sta ad indicare il rateo di

decadimento dell'inflatone ( $\phi$ ) e  $V'''$  la derivata terza del suo potenziale. Nello scenario Ghost inflation tipicamente si ha  $\alpha$  e  $\beta \sim \mathcal{O}(1)$ . Mentre per il “D-cceleration” scenario si prevede  $\gamma > 1$ .

Un'osservazione importante da fare è che la parametrizzazione riportata in Eq. 1.16 vale solo per non gaussianità locale o “squeezed” ( $k_1 \ll k_2 \sim k_3$ ), prevista dai modelli inflazionari standard e New Ekpyrotic, mentre non è valida per i modelli inflazionari “non convenzionali”, che eccitano configurazioni equilateri,  $k_1 \sim k_2 \sim k_3$ . Questo lavoro di tesi è rivolto esclusivamente allo studio della non gaussianità locale.

### 1.3.3 Altre sorgenti di segnali non gaussiani

Oltre ai modelli inflazionari non-standard esistono altri meccanismi fisici in grado di generare anisotropie della CMB non gaussiane: i difetti topologici [102] e l'interazione radiazione-materia dopo la ricombinazione (le anisotropie secondarie).

Convenzionalmente si assume che la metrica dell'Universo corrisponda ad un modello Friedmann-Robertson-Walker (FRW)<sup>2</sup> con una topologia semplicemente connessa. Discostamenti da questo scenario, sia per la geometria che per la topologia dello spazio-tempo, inducono disomogeneità e anisotropia statistica nella distribuzione del campo della fluttuazioni di temperatura sulla sfera celeste. Si ritiene che i difetti topologici siano presenti come naturale conseguenza delle transizioni di fase nell'Universo primordiale, dovute

---

<sup>2</sup>La metrica FRW è la più generale metrica che soddisfi il principio cosmologico. L'elemento di linea è:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{\sqrt{1-kr^2}} + r^2 d\omega^2 \right), \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \text{ e } k = 0, \pm 1.$$

Dove  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi)$  sono rispettivamente l'angolo azimutale e l'angolo polare delle coordinate sferiche. Il parametro di scala  $a(t)$  fornisce la dipendenza dal tempo delle coordinate spaziali in un Universo in espansione. Infine il parametro  $k$  è una misura della curvatura dello spazio-tempo, con  $k = 0$  per uno spazio piatto,  $k = 1$  per uno spazio a curvatura positiva e  $k = -1$  per uno spazio a curvatura negativa.

alla rottura di simmetria dei campi responsabili dell'interazione fra particelle differenti. Dipendentemente dalla loro dimensionalità i difetti topologici possono essere classificati in: monopoli, stringhe cosmiche, domain walls e textures. La ricerca di non gaussianità dovute ai difetti cosmici è tuttavia molto complessa. È oggi noto, infatti, che sebbene l'effetto di un singolo difetto cosmico sia chiaramente non gaussiano, la sovrapposizione di un gran numero di essi, per il teorema del limite centrale, tende ad una gaussiana. Le attuali misure dello spettro di potenza della CMB escludono che i difetti topologici possano aver rivestito un ruolo significativo nella formazione della struttura su larga scala dell'Universo.

Come già accennato alla fine del paragrafo 1.2.1 le anisotropie di temperatura della CMB si dividono in primarie e secondarie. Le prime sono prodotte prima della ricombinazione e sono direttamente legate alle perturbazioni di densità primordiali. Le seconde, invece, sono generate dopo il disaccoppiamento radiazione-materia e sono dovute all'interazione dei fotoni della CMB con la materia dell'Universo. Queste fluttuazioni secondarie in genere introducono segnature non gaussiane, che si sovrappongono alle proprietà statistiche intrinseche delle anisotropie. Le interazioni da cui hanno origine possono essere di tipo gravitazionale o di scattering se la materia è ionizzata. Nel primo caso le anisotropie sono prodotte per redshift gravitazionale dei fotoni, che attraversano il potenziale gravitazionale in evoluzione della struttura su grande scala dell'Universo. Questo fenomeno prende il nome di effetto late Integrated Sachs-Wolfe [84] o effetto Rees-Sciama [82], quando l'evoluzione non è lineare. Le barriere di potenziale, inoltre, deflettono la traiettoria dei fotoni dando luogo all'effetto noto come lensing gravitazionale. Questo processo può essere approssimativamente descritto come un random walk dei fotoni della CMB attraverso un campo continuo di disomogeneità di massa. La diffusione tende ad allargare le strutture della CMB su scale angolari inferiori a  $\sim 10'$ , per una review si veda [6].

Fin quando le disomogeneità della densità possono essere descritte come un campo casuale gaussiano, la luce è solo debolmente deflessa e la sua distribuzione è un processo casuale gaussiano. Una CMB puramente gaussiana, quindi, rimane tale almeno per  $\ell < 1000$ . Tuttavia su scale angolari più piccole la non gaussianità non è trascurabile ed induce delle correlazioni tra le fluttuazioni di temperatura su grande scala e la deflessione della radiazione per effetto lensing dando luogo ad effetti su scale di alcuni arcominuti.

L'interazione tra i fotoni della CMB e la materia è di natura diversa se la materia è ionizzata, come in corrispondenza della re-ionizzazione dell'Universo (si veda [76] per il caso di re-ionizzazione omogenea e [48] per il caso disomogeneo) o all'interno degli ammassi di galassie (effetto Sunyaev-Zel'dovich [98]). In particolare l'effetto Sunyaev-Zel'dovich, o SZ, consiste nello scattering Compton inverso della radiazione di fondo sugli elettroni liberi, altamente energetici ( $\sim 10keV$ ), presenti nelle buche di potenziale degli ammassi. In realtà possono essere distinti due tipi di effetto SZ: quello termico, dovuto proprio allo scattering Compton inverso, che causa uno spostamento dello spettro tale da apparire come un abbassamento di temperatura dei fotoni se osservato a basse frequenze o come un innalzamento se osservato alle alte frequenze; e quello cinematico, dovuto alla velocità peculiare del gas ionizzato che diffonde i fotoni causando un effetto Doppler. Nel caso di effetto SZ termico, poiché la dipendenza dalla frequenza è diversa da quella della planckiana, è possibile separare questo effetto secondario dalle anisotropie intrinseche della CMB effettuando osservazioni a diverse frequenze. L'effetto SZ cinematico, invece, è più difficile da isolare essendo dal punto di vista dello spettro indistinguibile dalle anisotropie primarie.

	$f_{NL}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$	Commenti
Single-field inflation	$\frac{7}{3} - g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$	$g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 4 \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k^2} - 3 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k^4} + \frac{3}{2} \frac{k_1^4 + k_2^4}{k^4}$
Curvaton scenario	$- \left[ -\frac{2}{3} + \frac{5}{6}r - \frac{5}{4r} \right] - g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$	$r \approx \left( \frac{\rho\sigma}{\rho} \right)_{decay}$
Inhomogeneous reheating	$\frac{13}{12} - I - g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$	$I = -\frac{5}{2} + \frac{5}{12} \frac{\bar{\Gamma}}{\alpha\Gamma_1}$ “caso minimale” $I = 0$ ( $\alpha = \frac{1}{6}$ , $\Gamma_1 = \bar{\Gamma}$ )
Multiple scalar fields	$\frac{P_S}{P_R} \cos^2 \Delta \left( 4 \cdot 10^3 \cdot \frac{V_{XX}}{3H^2} \right) \cdot 60 \frac{H}{\chi}$	stima dell'ordine di grandezza del valore assoluto
“Unconventional” inflation set-ups		
Warm inflation	$-\frac{5}{6} \left( \frac{\dot{\varphi}_0}{H^2} \right) \left[ \ln \left( \frac{\Gamma}{H} \right) \frac{V'''}{\Gamma} \right]$	correzioni del secondo ordine non incluse
Ghost inflation	$-140 \cdot \beta \cdot \alpha^{-8/5}$	correzioni post-inflazionarie non incluse
D-acceleration	$-10^{-1} \gamma^2$	correzioni post-inflazionarie non incluse

Tabella 1.1:

Predizioni del parametro di accoppiamento non lineare  $f_{NL}$  per diversi modelli di generazione delle perturbazioni cosmologiche [4].



## Capitolo 2

# Ricerca di fluttuazioni non gaussiane: i funzionali di Minkowski

Sin dalla prima osservazione da parte del DMR a bordo del satellite COBE (si veda paragrafo 1.2.1), vari lavori hanno mostrato come le anisotropie della CMB siano consistenti con una distribuzione gaussiana. Ma *quanto* gaussiane sono queste fluttuazioni?

Da principio, scarsa attenzione era stata rivolta alla risposta di questa domanda, fin quando nel 2002 furono pubblicati i primi limiti per il parametro di accoppiamento non lineare locale  $f_{NL}$ , calcolati sui dati di COBE [53]. Il limite trovato,  $-3500 < f_{NL} < 2000$  (95% C.L.) [53], era troppo debole per poter essere significativo, ma dimostrò esplicitamente come le misure di non gaussianità possano porre dei limiti diretti sull'inflazione cosmica. Questo rinnovò l'interesse per lo studio delle proprietà statistiche delle anisotropie e da allora è stata sviluppata una vera e propria batteria di metodi statistici per la ricerca e la caratterizzazione di fluttuazioni non gaussiane.

## 2.1 Rassegna dei metodi statistici

A differenza delle fluttuazioni gaussiane, che sono completamente caratterizzate dai primi due momenti della funzione di distribuzione, le fluttuazioni non gaussiane hanno un numero infinito di gradi di libertà. Testare un'ipotesi di gaussianità è quindi un arduo compito e non esiste un unico modo per farlo, ma, a seconda delle caratteristiche che si vogliono investigare, alcuni metodi possono rivelarsi più efficienti di altri.

Una prima distinzione può essere fatta tra metodi “guidati” e metodi “ciechi”. I primi sono designati a testare un modello specifico, mentre i secondi non fanno alcuna assunzione sulla forma dell'eventuale deviazione dalla gaussianità. Tipicamente i metodi “guidati” sono più potenti degli altri nel porre limiti alla non gaussianità, con il caveat, però, di dipendere da un modello.

Un'ulteriore classificazione dei metodi di ricerca di fluttuazioni non gaussiane può essere fatta in base allo “spazio” in cui viene effettuata l'analisi dati: spazio reale, spazio delle armoniche sferiche e altri spazi in cui i dati sono trasformati con filtri, wavelets o altre basi.

I livelli di confidenza (C.L.) delle analisi statistiche tipicamente sono calibrati con delle simulazioni Monte Carlo (MC) dei dati, generate sotto l'ipotesi di gaussianità delle fluttuazioni e nella maniera più “realistica” possibile, cioè simulando tutti i dettagli strumentali e la strategia di scansione dell'esperimento.

### 2.1.1 Metodi nello spazio reale

Le mappe di CMB su cui sono proiettati i dati sono discretizzate in elementi finiti, di solito aventi tutti la stessa area, che prendono il nome di pixel. Quando l'analisi statistica viene effettuata nello spazio dei pixel, si parla di metodi definiti nello spazio reale. Questi metodi sono particolar-

mente adatti ad estrarre dalle mappe proprietà statistiche globali, ma sono poco indicati ad individuare caratteristiche in funzione della scala angolare.

Una prima classe di metodi studia i momenti e i cumulanti della funzione di distribuzione dei dati: un valore non nullo per cumulanti di ordine superiore al secondo implica la presenza di deviazioni dalla gaussianità. Tipicamente si studiano la skewness e la kurtosis della distribuzione, rispettivamente i momenti di ordine terzo e quarto. Inoltre sono stati effettuati test di normalità anche utilizzando l'espansione di Edgeworth [47], cioè calcolando una serie di cumulanti che descrive le perturbazioni dalla distribuzione gaussiana. Questi approcci sono totalmente indipendenti dal modello di non gaussianità.

Un'ulteriore possibilità è rappresentata dallo studio di quantità scalari definite sulla sfera e costruite usando le derivate covarianti prime e seconde del campo. Tra queste ci sono la curvatura locale [42], il modulo del gradiente ed il determinante dello Hessiano [73].

Tra gli altri metodi è importante menzionare quelli basati sull'analisi statistica degli estremi e degli excursion set della mappa, insiemi di pixel in cui il campo ha un valore maggiore di una data soglia. Ad esempio, studiare il numero, le correlazioni [43], l'eccentricità e la curvatura degli estremi [9] ha permesso di ottenere risultati molto stabili, poiché gli estremi sono spesso molte deviazioni standard ( $\sigma$ ) sopra il livello di rumore dei dati. Il calcolo dei funzionali di Minkowski sugli excursion set ha, invece, permesso di caratterizzare la morfologia e la topologia del campo delle fluttuazioni. La statistica dei funzionali di Minkowski è quella utilizzata nel presente lavoro di tesi e sarà dettagliatamente descritta nei prossimi paragrafi.

Infine, anche l'analisi multifrattale e lo studio della rugosità delle superficie [74], già ampiamente impiegati in altre branche della fisica, sono stati proposti come possibili strumenti per la rilevazione di non gaussianità della CMB.

### 2.1.2 Metodi nello spazio armonico

In modo analogo a quanto fatto nello spazio reale, è possibile individuare le deviazioni dalla gaussianità calcolando i momenti di ordine superiore al secondo, questa volta però per i coefficienti dell'espansione in armoniche sferiche del campo di anisotropia. Un vantaggio di passare nello spazio armonico risiede nella possibilità di ricavare delle informazioni che sono riconducibili a specifiche scale angolari. Nello spazio delle armoniche sferiche la funzione di correlazione a tre punti è legata al bispettro, definito come:

$$B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3}.$$

La matrice che compare nell'equazione è il simbolo 3-j di Wigner e garantisce che siano soddisfatte le regole di selezione  $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \text{numero intero}$  e  $m_3 = m_1 + m_2$ , nonché la condizione triangolare  $|\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq |\ell_1 + \ell_2|$ . Un aspetto vantaggioso dell'utilizzo di questa quantità è che esitano delle predizioni teoriche, da poter confrontare con i dati e ricavare, così, dei limiti sui parametri del modello. Diversi autori, e.g. [35], assumendo modelli di inflazione *slow-roll*, hanno sviluppato delle predizioni analitiche del bispettro primario per le scale angolari osservate dal DMR di COBE, ossia sino a  $\ell = 20$ . In seguito in [52] tali predizioni sono state estese fino a scale angolari dell'ordine dell'arcominuto. Oltre alle predizioni per il bispettro primario, sono state sviluppate anche quelle per il bispettro delle anisotropie secondarie. Quest'ultime permettono di stimare in che modo le condizioni fisiche dell'Universo a bassi redshift possano aver modificato la distribuzione originaria delle fluttuazioni di temperatura. In particolare, è stato calcolato il bispettro introdotto dall'evoluzione non lineare del potenziale gravitazionale [95] e quelli originati dall'effetto lensing, dall'effetto SZ e da sorgenti puntiformi extragalattiche che emettono a frequenze radio e nell'infrarosso [52].

L'applicabilità della statistica del bispettro è, però, limitata dalla diffi-

coltà di trattare un gran numero di scale angolari e di tradurre nello spazio armonico alcune peculiarità delle osservazioni “reali”, e.g. una strategia d’osservazione non omogenea, la non perfetta rimozione dei foreground o la copertura parziale del cielo (cut-sky). A tal proposito va notato che le armoniche sferiche su una porzione della sfera celeste non sono più ortonormali. Tuttavia queste “limitazioni” sembrano essere state superate con l’introduzione del *fast cubic estimator*, si veda [107], che non solo tiene conto dei vari dettagli osservativi, ma riesce anche a combinare le configurazioni triangolari del bispettro in modo ottimale, così da minimizzare il numero di operazioni senza diluire l’informazione sulla non gaussianità locale.

L’utilizzo della statistica delle funzioni di correlazione di ordine superiore al terzo è limitato dalla grande quantità di calcoli numerici coinvolti, che ne rende proibitiva l’implementazione. Un estimatore per il trispettro, ossia la funzione di correlazione di quattro coefficienti armonici, è stato sviluppato da [58].

Sebbene la maggior parte dei metodi siano focalizzati sullo studio delle ampiezze dei coefficienti armonici, alcuni lavori sono stati dedicati anche allo studio delle loro fasi, e.g. [16]. L’ipotesi che le anisotropie della CMB costituiscano un campo random gaussiano omogeneo ed isotropo, implica che le fasi dei coefficienti armonici del campo siano indipendenti ed uniformemente distribuite tra  $[0, 2\pi]$ . Lo studio delle correlazioni di fase può, quindi, individuare eventuali deviazioni da questo scenario.

### 2.1.3 Metodi in altri spazi

Recentemente sono stati sviluppati nuovi metodi che operano in spazi alternativi a quelli già descritti. Per passare in questi spazi i dati sono trasformati o con dei filtri ottimali, o con una base di autofunzioni o con la trasformata wavelet. Le operazioni coinvolte sono lineari, così i coefficienti del campo di anisotropia nella nuova base rimangono distribuiti in modo

gaussiano, se la mappa di partenza è gaussiana. Tra i casi citati, l'analisi basata sulle wavelet è sicuramente quella che vanta il maggior numero di applicazioni. Molte delle tecniche usate sia nello spazio reale che in quello armonico, e.g. lo studio delle funzioni di correlazione e dei momenti della distribuzione, possono essere tradotti ed applicati anche nello spazio delle wavelet. In un primo momento sono state studiate, con il formalismo wavelet, solo mappe di porzioni di cielo sufficientemente piccole da poter essere considerate piane, principalmente con lo scopo d'individuare anisotropie secondarie [2] o stringhe cosmiche simulate immerse in un segnale gaussiano [100, 8]. Successivamente le wavelet di Haar [7] e Mexican Hat [65, 15] sono state implementate su tutta la sfera celeste (si parla dunque di wavelet sferiche), insieme anche a wavelet direzionali, per esempio Mexican Hat ellittica e Morlet [72]. L'applicazione di quest'ultimo tipo di wavelet è complessa e dispendiosa in termini di tempo di calcolo, perché bisogna esplorare tutte le possibili direzioni sulla sfera celeste. Per ovviare a questo problema sono state introdotte delle wavelet orientabili ("steerable"), i cui coefficienti per una generica direzione si ottengono come combinazioni lineari dei coefficienti di una base con un numero finito di elementi [103]. Tecniche di studio delle correlazioni, sempre basate sulle wavelet, sono state impiegate anche per rilevare l'eventuale presenza nelle mappe di pattern prodotti da topologie non banali [83].

## **2.2 I principali risultati**

La prima ricerca sistematica di fluttuazioni non gaussiane della CMB è stata condotta sui dati acquisiti, dall'esperimento DMR montato su COBE. Quasi tutti i metodi statistici descritti nel precedente paragrafo sono stati applicati a questi dati e, nella maggior parte dei casi, hanno validato l'ipotesi di gaussianità. Tuttavia, le analisi che in un primo momento avevano dato risultati discordanti sono state poi confutate. Nei diversi casi è stato evi-

denziato che le deviazioni dalla gaussianità erano riconducibili alla strategia d'osservazione, a effetti sistematici non documentati o a effetti introdotti dagli stessi metodi d'analisi.

Come già accennato all'inizio di questo capitolo, il lavoro [53] ha rivestito un ruolo cruciale nella ricerca di fluttuazioni non gaussiane. Questo non solo perché è stato il primo lavoro a porre dei limiti su  $f_{NL}$  locale, ma anche perché è stata la prima analisi del bispettro dei dati di COBE ad includere tutti i 466 modi disponibili, ossia tutte le possibili configurazioni triangolari indipendenti fino a  $\ell_{max} = 20$ , che corrisponde alla risoluzione massima dell'esperimento. Questa analisi del bispettro ha trovato che le anisotropie misurate dal DMR sono gaussiane. Essa ha quindi confutato i precedenti studi che, considerando solo particolari configurazioni del bispettro, avevano individuato deviazioni da questo scenario. È stato subito obiettato, però, che le scale angolari osservate dal DMR di COBE sono al di fuori dell'orizzonte causale sulla superficie di ultimo scattering. È possibile che vi siano fluttuazioni non gaussiane su scale angolari inferiori all'orizzonte, che, osservate attraverso il beam del DMR, appaiono gaussiane per il teorema del limite centrale. Questo motivò l'estensione della ricerca ad esperimenti da terra e sub-orbitali che, seppur limitati da una copertura parziale della sfera celeste, fossero caratterizzati da un'elevata risoluzione ( si veda Tabella 2.1). Ricordiamo qui solo alcuni dei principali risultati.

Lo studio delle proprietà morfologiche, in particolare del genus (numero di regioni sovradense sopra una fissata soglia meno il numero di vuoti), delle mappe di QMAP [30], Saskatoon [105] e QMASK [106] ha fornito risultati consistenti con la gaussianità [78]. Numerose analisi statistiche sono state condotte anche sui dati dell'esperimento MAXIMA-1 [41], e non hanno evidenziato deviazioni dall'ipotesi gaussiana. Ad esempio si veda il lavoro [87], che trova  $|f_{NL}| < 944$  (95% C.L.) dal confronto del bispettro teorico con quello calcolato dai dati.

Esperimento	Multipoli osservati	Rivelatori	Postazione
BOOMERanG	$25 < \ell < 1025$	Bolometri	Pallone
MAXIMA-1	$50 < \ell < 700$	Bolometri	Pallone
QMAP	$30 < \ell < 850$	HEMT/SIS Radiometri	Pallone
Saskatoon	$52 < \ell < 401$	HEMT Radiometri	Terra
VSA	$130 < \ell < 1800$	Interferometri HEMT Radiometri	Terra

**Tabella 2.1 : Esperimenti sub-orbitali di CMB**

In tabella non è riportato QMASK, che si ottiene come combinazione dei dati di QMAP e Saskatoon. HEMT=*High Electron Mobility Transistor* e SIS=*Silicon Integrated System*.

Non è emersa alcuna deviazione dall'ipotesi gaussiana neanche dai dati di un altro esperimento da pallone: BOOMERanG 98 (per le referenze si veda Capitolo 3). In questo caso l'analisi dati è stata effettuata sia nello spazio reale, dove sono state calcolate skewness e kurtosis delle mappe [80], sia nello spazio armonico, dove è stato calcolato il trispettro [28], trovando in entrambi i casi valori consistenti con l'ipotesi gaussiana. Sempre nello spazio reale, da uno studio dei funzionali di Minkowski [29], per l'esperimento BOOMERanG 2003, sono stati ricavati i limiti del parametro di accoppiamento non lineare  $-800 < f_{NL} < 1050$  (95% C.L.), anch'essi consistenti con zero.

Nell'articolo [88] sono invece riportati i risultati di un ampio set di test di non gaussianità applicati ai dati del VSA [99]. Queste prove si avvalgono della statistica nello spazio reale e sono condotte sulle ricostruzioni di massima entropia delle regioni osservate dall'esperimento. Un altro interessante articolo è il [93], dedicato all'analisi del bispettro dei dati del VSA.

Esso mostra come questa statistica possa essere ottenuta anche nel caso di esperimenti interferometrici. I dati del VSA risultano consistenti con una distribuzione gaussiana.

L'ipotesi di gaussianità ha, quindi, superato anche i test condotti su scale angolari ben inferiori a quelle osservate da COBE. Negli ultimi anni, però, un rinnovato interesse per lo studio della gaussianità del segnale di CMB, anche in relazione alla geometria e alla topologia dell'Universo, è stato suscitato dall'elevata qualità e quantità dei dati acquisiti a tutto cielo dal satellite WMAP [11]<sup>1</sup>. Con i dati di questo esperimento è stato possibile ottenere mappe con  $\sim 10^6$  pixel non contaminati dall'emissione galattica, caratterizzate da una risoluzione che comprende multipoli fino a  $\ell \sim 600$  (per un confronto con i precedenti esperimenti si consultino le Tabelle.).

Per i dati di WMAP, così come era successo per COBE, molte di quelle che in un primo momento sembravano detezioni di non gaussianità sono poi state smentite. In particolare l'analisi statistica ha evidenziato la presenza di alcune anomalie nei dati, sia in quelli acquisiti nel primo anno di osservazioni (WMAP-1), sia in quelli acquisiti in tre anni di osservazioni (WMAP-3). Prima fra tutte è stata rilevata un'asimmetria tra gli emisferi Nord e Sud, sia attraverso l'analisi delle funzioni di correlazione a n-punti [33], sia con lo studio della curvatura locale [42]-[14], sia tramite test dell'isotropia globale effettuati usando le wavelet orientabili [104]. Quest'ultimo studio ha evidenziato anche l'esistenza di un allineamento a bassi multipoli,  $\ell = 2$  e  $\ell = 3$ , il cosiddetto *axis of evil*, già osservato da [27]-[17]. Un'altra anomalia consiste nella presenza di un *cold spot*, una regione fredda, nell'emisfero meridionale, individuato con un'analisi degli estremi dei coefficienti wavelet da [22]. La forma sferica dello spot fa supporre che la sua origine non possa essere legata ad emissione di foreground [23]. Infine, studi del numero e della correlazione

---

<sup>1</sup><http://lambda.gsfc.nasa.gov/>. Su questo sito è disponibile un archivio dei dati e dei principali risultati delle missioni della NASA, tra cui WMAP.

degli estremi hanno evidenziato che i massimi e i minimi delle mappe sono rispettivamente meno “caldi” e meno “freddi” del previsto [59]. Sono state proposte diverse teorie per interpretare questi risultati. Al momento però, non ne esiste una in grado di spiegare tutte le anomalie osservate e nessuna di quelle proposte è stata ancora verificata.

Escludendo le anomalie, le analisi statistiche applicate ai dati di WMAP hanno, nella maggior parte dei casi, verificato l’ipotesi di gaussianità. Tuttavia molti ritengono che le deviazioni trovate da alcuni studi, ad esempio [16], riflettano la contaminazione galattica o i gradienti di rumore, piuttosto che un genuino segnale non gaussiano ascivibile alla CMB.

Con i dati di WMAP è stato possibile ottenere dei limiti di  $f_{NL}$  molto più stringenti di quelli trovati da altri esperimenti. Ad esempio, l’analisi del bispettro angolare permette di ottenere limiti più stringenti di un fattore  $\sim 30$ , poiché il rapporto segnale rumore per  $f_{NL}$  è proporzionale a  $\ell_{max}$  [52]. L’analisi completa del bispettro richiede, però, un numero di operazioni che scala come  $N_{pix}^{5/2}$ . Poiché per WMAP il numero di pixel delle mappe è  $N_{pix} \sim 2.4 \cdot 10^6$ , questa analisi diventa inapplicabile. Per ovviare a questo problema, è stato introdotto l’estimatore “KSW” (o *fast cubic estimator*) [55]. Questo estimatore combina le configurazioni triangolari del bispettro in modo ottimale, così da essere il più possibile sensibile ad  $f_{NL}$  locale, pur minimizzando il numero di operazioni, che si riduce a  $N_{pix}^{3/2}$ . Questa tecnica di analisi è stata applicata sia ai dati di WMAP-1, che a quelli di WMAP-3, trovando nel primo caso  $-58 < f_{NL} < 134$  (95% C.L.) con  $\ell_{max} = 265$  [54] e nel secondo caso  $-54 < f_{NL} < 114$  (95% C.L.) con  $\ell_{max} = 350$  [97]. A questi stessi dati è stata applicata anche una versione dell’estimatore “KSW” *ottimizzata* per il cut-sky e per la presenza di rumore correlato, ottenendo i limiti  $-27 < f_{NL} < 121$  (95% C.L.) con  $\ell_{max} = 335$  per WMAP-1 [18] e  $-36 < f_{NL} < 100$  (95% C.L.) con  $\ell_{max} = 370$  per WMAP-3 [19, 20].

Un interessante risultato pubblicato da [108], indica la scoperta di non gaussianità primordiale nei dati di WMAP-3 al 99.5% C.L. I limiti trovati sono:  $27 < f_{NL} < 147$  (95% C.L.), con un valore centrale di  $f_{NL} = 87$ . In particolare è stata applicata la statistica del *fast cubic estimator* ottimale modificata da [107], limitandosi a due soli canali di osservazione dell'esperimento (V+W), usando una maschera (Kp0) che copre il 23.2% del cielo e spingendosi fino a  $\ell_{max} = 750$ . È importante osservare che per  $\ell_{max} < 450$ , che è il range di multipoli investigato nelle precedenti analisi dei dati di WMAP-3, anche questo non rileva deviazioni dalla gaussianità. Se il risultato di [108] venisse confermato da successivi studi, si avrebbero importanti conseguenze sulla nostra conoscenza della fisica dell'Universo primordiale: ad esempio, sarebbero favoriti i modelli cosiddetti New Ekpyrotic, che prevedono un elevato valore di  $f_{NL}$ , rispetto ai più "popolari" modelli inflazionari di *slow-roll*. Allo stato attuale della ricerca, però, le altre analisi statistiche dei dati di WMAP non hanno rilevato deviazioni significative dall'ipotesi gaussiana.

Esperimento	limiti $f_{NL}$ (95% C.L.)
COBE	$-3500 < f_{NL} < 2000$
MAXIMA-1	$ f_{NL}  < 944$
BOOMERanG	$-800 < f_{NL} < 1050$
WMAP-1	$-27 < f_{NL} < 121$
WMAP-3	$-36 < f_{NL} < 100$
WMAP-5	$-9 < f_{NL} < 111$

**Tabella 2.2 : Limiti di  $f_{NL}$  dai principali esperimenti**

Recentemente sono stati pubblicati anche i risultati ottenuti per i dati acquisiti da WMAP in cinque anni di osservazioni (WMAP-5). L'analisi di questi dati con il *fast cubic estimator* ottimale [56], per i canali d'osservazio-

ne V+W, usando la maschera Kp0 e con  $\ell_{max} = 700$ , conferma la scoperta di  $f_{NL} > 0$ . I limiti trovati sono:  $1.5 < f_{NL} < 125.5$  (95% C.L.). Si noti che il valore centrale di  $f_{NL}$ , però, non è elevato come quello trovato da [108]. Tuttavia in [56], per il calcolo di limiti più affidabili di  $f_{NL}$ , si consiglia l'utilizzo di una nuova maschera più ampia (KQ75 che copre il 28.2% del cielo), raccomandata per i test di non gaussianità [36]. Inoltre, compatibilmente con la risoluzione dell'esperimento, si consiglia di includere nell'analisi solo i multipoli fino a  $\ell = 500$ . Apportando queste modifiche il valore del parametro di accoppiamento non lineare risulta consistente con l'ipotesi gaussiana:  $-9 < f_{NL} < 111$  (95% C.L.).

Un'ulteriore conferma della gaussianità dei dati di WMAP è fornita dalla statistica dei funzionali di Minkowski, che sarà ampiamente discussa nel prossimo paragrafo. In particolare per le mappe V+W di WMAP-3, usando la maschera Kp0, è stato stimato  $-108 < f_{NL} < 64$  (95% C.L.) [46], mentre per gli stessi canali d'osservazione di WMAP-5, usando la maschera KQ75, è stata ottenuto  $-178 < f_{NL} < 64$  (95% C.L.) [56]. Si noti come questi risultati indichino un valore aspettato di  $f_{NL}$  negativo, a differenza di quanto trovato con la statistica del bispettro. Ciò potrebbe voler dire che i funzionali di Minkowski sono meno sensibili alla presenza di foreground e di sorgenti puntiformi di quanto non lo sia il bispettro. La "tensione" tra queste due statistiche, tuttavia, non è stata ancora spiegata ed è materia di dibattito.

Da questo excursus sullo stato dell'arte della ricerca delle fluttuazioni non gaussiane, appare evidente la necessità di avere un set di test statistici complementari, piuttosto che un'unica tecnica di analisi. In primo luogo, perché gli stessi meccanismi fisici che possono aver generato le deviazioni non gaussiane non sono ancora noti, e metodi differenti possono essere più o meno efficienti nel rilevare le diverse forme di non gaussianità. In secondo luogo, perché alcuni metodi possono rivelarsi più idonei di altri nel trattare

le complicazioni presenti nei dati *reali*.

## 2.3 I funzionali di Minkowski

Nel primo paragrafo di questo capitolo, sono stati annoverati e sinteticamente descritti i diversi metodi statistici adoperati per la ricerca di fluttuazioni non gaussiane della CMB. Focalizziamo ora la nostra attenzione sulla statistica dei funzionali di Minkowski (MF), che è quella utilizzata nell'analisi dati del presente lavoro di tesi.

I MF permettono di caratterizzare, in modo del tutto generale, la topologia e la morfologia di un campo di fluttuazioni random utilizzando i suoi excursion set, cioè le regioni dove il campo supera un certo livello di soglia. Questi funzionali sono delle quantità integrali e quindi estremamente stabili. Essi dipendono dalle funzioni di correlazione di ogni ordine e, essendo definiti nello spazio reale, ben si prestano a trattare effetti non ideali presenti nei dati, quali rumore anisotropo, copertura non omogenea della zona osservata, effetti sistematici, emissione di foreground e l'applicazione di una maschera ai dati. Queste peculiarità fanno dei MF uno strumento robusto e complementare all'analisi armonica delle funzioni di correlazione (in particolare la statistica del bispettro, che è la più comunemente usata).

Dopo aver brevemente delineato le proprietà generali dei MF, introdurremo le formule analitiche di tali funzionali per una CMB con non gaussianità primordiale [45]. Queste formule permettono di stimare il parametro di accoppiamento non lineare  $f_{NL}$  direttamente dai dati, senza ricorrere a simulazioni numeriche non gaussiane. Gli errori statistici da associare alla stima possono essere valutati usando delle realizzazioni gaussiane delle mappe, che tengano opportunamente conto di tutte le caratteristiche sperimentali ed osservative del dataset. Non dover utilizzare realizzazioni non gaussiane delle mappe è estremamente vantaggioso. Gli algoritmi che le generano, infatti, sono considerevolmente più lenti di quelli per le simulazioni

gaussiane e potrebbero non tenere opportunamente conto di tutti gli effetti che contribuiscono alla non gaussianità delle anisotropie.

### 2.3.1 Geometria integrale

Consideriamo uno spazio Euclideo  $d$ -dimensionale  $\mathbb{E}^d$ . Se si vuole caratterizzare la morfologia di un suo sottospazio  $Q \subseteq \mathbb{E}^d$ , dove per morfologia si intende l'insieme delle proprietà invarianti per traslazione, rotazione e che siano additive, è possibile sfruttare il teorema di Hadwiger [39]. Il teorema afferma che ciascun descrittore morfologico può essere espresso come combinazione lineare di  $d + 1$  funzionali: i Funzionali di Minkowski (MF)  $V_j$ , con  $j = 0, \dots, d$ . Se il sottospazio considerato ha una frontiera  $\delta Q$  uniforme, i suoi MF si ottengono come [89]:

$$V_0(Q) = \int_Q dv \quad (2.1)$$

e per  $j \neq 0$

$$V_j(Q) = \frac{1}{\omega_{j-1} \binom{d}{j}} \int_{\delta Q} ds \mathbb{S}_j(\kappa_1 \dots \kappa_{d-1}), \quad (2.2)$$

dove  $\omega_j$  è l'area della superficie della sfera unitaria  $j$ -dimensionale:

$$\omega_j = \frac{2\pi^{(j+1)/2}}{\Gamma[(j+1)/2]}. \quad (2.3)$$

Le quantità  $dv$  e  $ds$  denotano rispettivamente l'elemento di volume nello spazio Euclideo  $\mathbb{E}^d$  e l'elemento di superficie su  $Q$ ,  $\kappa_1 \dots \kappa_{d-1}$  sono le curvature principali della frontiera  $\delta Q$  e  $\mathbb{S}_j$  è la  $j$ -esima funzione elementare dell'espansione polinomiale

$$\prod_{i=1}^{d-1} (x + \kappa_i) = \sum_{j=1}^d x^{d-1} \mathbb{S}_j(\kappa_1 \dots \kappa_{d-1}). \quad (2.4)$$

Si ha, quindi,  $\mathbb{S}_1 = 1$ ,  $\mathbb{S}_2 = \kappa_1 + \dots + \kappa_{d-1}$  e così via fino a  $\mathbb{S}_d = \kappa_1 \dots \kappa_{d-1}$ .

### 2.3.2 Sulla sfera celeste

Consideriamo ora lo spazio  $d$ -dimensionale a curvatura costante  $\kappa K$ , con  $\kappa = +1, 0, -1$  rispettivamente per lo spazio sferico  $\mathbb{S}^d$ , Euclideo  $\mathbb{E}^d$  ed

iperbolico  $\mathbb{H}^d$ .  $K$  è una costante positiva tale che la radice quadrata del suo inverso può essere interpretata come il raggio di curvatura dello spazio. Su questi spazi è ancora possibile calcolare i MF con equazioni analoghe alle (2.1)-(2.2) a patto di usare le curvatures geodesiche al posto delle  $\kappa_i$  [86].

Essendo interessati a studiare mappe di CMB focalizziamo la nostra attenzione al caso della sfera bidimensionale  $\mathbb{S}^2$  di raggio  $R$ . I MF per un sottospazio  $Q \subseteq \mathbb{S}^2$  dalla frontiera  $\delta Q$  uniforme sono:

$$\begin{aligned} V_0(Q) &= \frac{1}{A} \int_Q da \\ V_1(Q) &= \frac{1}{4A} \int_{\delta Q} dl \\ V_1(Q) &= \frac{1}{2\pi A} \int_{\delta Q} dl\kappa \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove  $A$  è l'area di  $Q$ , mentre  $da$  e  $dl$  indicano rispettivamente l'elemento di superficie su  $Q$  e l'elemento di linea sulla frontiera, che è unidimensionale ed ha un'unica curvatura geodesica  $\kappa$ .

Le fluttuazioni di temperatura della radiazione cosmica di fondo sono rappresentabili sulla sfera  $\mathbb{S}^2$  come un campo scalare a media nulla  $u(\boldsymbol{\Omega}) \equiv \frac{f(\boldsymbol{\Omega})}{\sigma}$ , con  $\sigma \equiv \langle f^2 \rangle^{1/2}$  e  $f(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{\Delta T}{T}(\boldsymbol{\Omega})$ . Definiamo il sottospazio  $Q_\nu$  dei pixel "caldi", cioè quelli il cui valore supera una data soglia  $\nu$ :

$$Q_\nu = \{ \boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{S}^2 | u(\boldsymbol{\Omega}) > \nu \} \quad (2.6)$$

e su di esso calcoliamo i MF.

Ricordando che i MF sono additivi per regioni disgiunte di cielo, è possibile ricavare il funzionale di ordine zero come:

$$V_0(\nu) = \frac{1}{A} \sum_i a_i = \frac{N_\nu}{N_{tot}} \quad (2.7)$$

dove  $a_i$  è l'area di una singola regione "calda",  $N_\nu$  è il numero di pixel in  $Q_\nu$  e  $N_{tot}$  è il numero totale di pixel della mappa. Questo funzionale prende il nome di area, poiché misura la densità totale di area delle regioni "calde"

per un dato valore di soglia. In sostanza, esso coincide con la cumulativa della distribuzione.  $V_1(\nu)$ , invece, misura la lunghezza totale dei contorni delle regioni “calde”:

$$V_1(\nu) = \frac{1}{4A} \sum_i P_i \quad (2.8)$$

in cui  $P_i$  è il perimetro dell' $i$ -esima regione “calda”.  $V_2(\nu)$ , infine, noto come caratteristica di Eulero o genus, è una quantità puramente topologica ed è data dalla differenza tra il numero di regioni “calde” ed il numero di quelle “fredde”:

$$V_2(\nu) = \frac{1}{2\pi A} (N_{caldo} - N_{freddo}). \quad (2.9)$$

### 2.3.3 Valori di aspettazione per un campo random gaussiano

Le espressioni analitiche dei MF medi per un campo gaussiano random, in uno spazio di dimensione arbitraria, sono stati ricavati da [101]. Specializzandosi al caso particolare di dimensione due, per un fissato valore di soglia  $\nu$ , esse si riducono a <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\nu}{\sqrt{2}} \right) \\ V_1 &= \frac{\sqrt{\tau}}{8} \exp \left( -\frac{\nu^2}{2} \right) \\ V_2 &= \frac{\tau}{\sqrt{8\pi^3}} \nu \exp \left( -\frac{\nu^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'unico parametro libero in queste espressioni è  $\tau$ , definito come il valore di aspettazione del prodotto delle derivate covarianti del campo sulla sfera,

$$\tau = \frac{1}{2} \langle u_{,i} u_{,i} \rangle. \quad (2.11)$$

Espandendo il campo delle fluttuazioni di temperatura in armoniche sferiche,

$$f(\Omega) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\Omega), \quad (2.12)$$

---

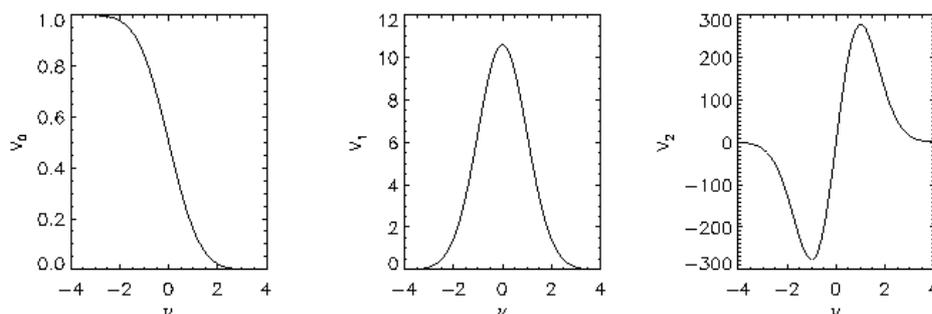
<sup>2</sup>La funzione  $\operatorname{erf}(x)$  è l'*error function*:  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}$ .

e usando l'Eq. 2.11 è possibile legare  $\tau$  direttamente allo spettro di potenza angolare  $C_\ell$  del campo:

$$\tau = \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell + 1) C_\ell \frac{\ell(\ell + 1)}{2}. \quad (2.13)$$

In realtà le Eq. 2.10 dipendono implicitamente anche dalla varianza del campo, che può essere anch'essa stimata dallo spettro di potenza come:

$$\sigma = \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell + 1) C_\ell. \quad (2.14)$$



**Figura 2.1**

Funzionali di Minkowski per un campo di CMB gaussiano, generato dallo spettro di potenza di best fit di WMAP-1.

### 2.3.4 Formule analitiche perturbative per un campo random debolmente non gaussiano

I limiti trovati per il parametro di accoppiamento non lineare  $f_{NL}$ , si veda il paragrafo 2.2, permettono di considerare le anisotropie della CMB come un campo random debolmente non gaussiano. Per avere delle predizioni analitiche dei MF da confrontare direttamente con i dati, Hikage et al. [45] hanno derivato delle formule in cui compare esplicitamente la dipendenza da  $f_{NL}$ . Tali formule si basano sul formalismo generale della

teoria perturbativa dei MF, sviluppata da Matsubara [70, 71] e valida nell'approssimazione di non gaussianità debole. L'espressione per il  $k$ -esimo MF è ricavata dall'espansione multidimensionale di Edgeworth intorno alla distribuzione gaussiana, includendo solo i cumulanti di ordine più basso [47]. Per una dimensione arbitraria  $d$  e fissata la soglia  $\nu$ , si ha [71]:

$$V_k(\nu) = A_k v_k(\nu). \quad (2.15)$$

L'ampiezza  $A_k$  non è rilevante per la non gaussianità, ma dipende solo dalla forma dello spettro di potenza angolare  $C_\ell$ . Essa è data da:

$$A_k = \frac{1}{(2\pi)^{(k+1)/2}} \frac{\omega_d}{\omega_{d-k}\omega_k} \left( \frac{\sigma_1}{\sqrt{d}\sigma_0} \right)^k \quad (2.16)$$

dove  $\omega_k \equiv \pi^{(k+1)/2}/\Gamma(k/2 + 1)$ . Nel caso  $d = 2$ , le quantità  $\sigma_j$  si calcolano come:

$$\sigma_j^2 \equiv \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1)[\ell(\ell + 1)]^j C_\ell W_\ell^2. \quad (2.17)$$

Qui  $W_\ell$  è una funzione finestra, determinata dalla funzione di trasferimento del beam sperimentale  $b_\ell$ , dalla funzione finestra  $w_\ell$  (*pixel window function*)<sup>3</sup> e da un eventuale kernel gaussiano aggiuntivo,  $g_\ell = \exp[-\ell(\ell + 1)\theta_s^2/2]$ .

Nel caso di campi debolmente non gaussiani, la funzione  $v_k(\nu)$  può essere divisa in un termine gaussiano  $v_k^{(G)}$  ed una correzione non gaussiana del primo ordine  $\Delta v_k$ :

$$v_k(\nu, f_{NL}) = v_k^{(G)}(\nu) + \Delta v_k(\nu, f_{NL}) \quad (2.18)$$

dove

$$v_k^{(G)}(\nu) = e^{-\frac{\nu^2}{2}} H_{k-1}(\nu) \quad (2.19)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta v_k(\nu, f_{NL}) = e^{-\frac{\nu^2}{2}} & \left\{ \left[ \frac{1}{6} S^{(0)} H_{k+2}(\nu) + \frac{k}{3} S^{(1)} H_k(\nu) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k(k-1)}{6} S^{(2)} H_{k-2}(\nu) \right] \sigma_0 + \mathcal{O}(\sigma_0^2) \right\}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>introdotta proiettando i dati su una mappa di cielo discretizzata in pixel

In queste equazioni con  $H_n(\nu)$  sono stati indicati i polinomi di Hermite:

$$\begin{aligned}
H_{-1}(\nu) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\nu^2/2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}\right) \\
H_0(\nu) &= 1 \\
H_1(\nu) &= \nu \\
H_2(\nu) &= \nu^2 - 1 \\
H_3(\nu) &= \nu^3 - 3\nu \\
H_4(\nu) &= \nu^4 - 6\nu^2 + 3 \\
&\vdots \\
H_n(\nu) &= (-1)^n e^{\frac{\nu^2}{2}} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-\frac{\nu^2}{2}}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

A caratterizzare la non gaussianità delle anisotropie sono i “parametri di skewness”  $S^{(i)}$ :

$$\begin{aligned}
S^{(0)} &\equiv \frac{\langle f^3 \rangle}{\sigma_0^4} \\
S^{(1)} &\equiv -\frac{3}{4} \frac{\langle f^2 (\Delta^2 f) \rangle}{\sigma_0^2 \sigma_1^2} \\
S^{(2)} &\equiv -3 \cdot \frac{\langle (\Delta f)(\Delta f)(\Delta^2 f) \rangle}{\sigma_1^4}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

contenenti la skewness del campo fluttuante e le sue derivate. Espandendo questi parametri nello spazio delle armoniche sferiche si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
S^{(0)} &= \frac{1}{4\pi\sigma_0^4} \sum_{\ell_i m_i} A_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} \\
S^{(1)} &= \frac{3}{16\pi\sigma_0^2 \sigma_1^2} \sum_{\ell_i m_i} \frac{\ell_1(\ell_1 + 1) + \ell_2(\ell_2 + 1) + \ell_3(\ell_3 + 1)}{3} A_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} \\
S^{(2)} &= \frac{3}{8\pi\sigma_1^4} \sum_{\ell_i m_i} \left\{ \frac{[\ell_1(\ell_1 + 1) + \ell_2(\ell_2 + 1) - \ell_3(\ell_3 + 1)]}{3} \ell_3(\ell_3 + 1) \right. \\
&\quad \left. + (\text{cycl.}) \right\} A_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

in cui

$$A_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} = B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} W_{\ell_1} W_{\ell_2} W_{\ell_3}$$

e (*cicl.*) indica la somma di termini ottenuti dal precedente con una permutazione ciclica degli indici. Per passare dalle formule (2.22) alle (2.23) sono state utilizzate le seguenti proprietà delle armoniche sferiche:

$$\nabla^2 Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) = -\ell(\ell + 1)Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.24)$$

$$\int d\hat{\mathbf{n}} [\nabla Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}})] [\nabla Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}})] Y_{\ell_3 m_3}(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\ell_1(\ell_1 + 1) + \ell_2(\ell_2 + 1) - \ell_3(\ell_3 + 1)}{2} G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} \quad (2.25)$$

dove  $G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3}$  è l'integrale di Gaunt,

$$\begin{aligned} G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} &\equiv \int d\hat{\mathbf{n}} Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{\mathbf{n}}) \\ &= \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell_3 + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le matrici in queste formule sono i simboli 3-j di Wigner per le condizioni triangolari e le regole di selezione. Si noti che il contributo non gaussiano al campo random è contenuto nel bispettro angolare  $B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3}$ , che è la funzione di correlazione a tre punti nello spazio delle armoniche sferiche:

$$B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} \equiv \langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} \rangle. \quad (2.27)$$

Se questa quantità è nulla, sono nulli tutti i parametri  $S^{(i)}$  e ritroviamo esattamente le espressioni dei MF di un campo random gaussiano, riportate nel paragrafo 2.3.3. Data l'invarianza rotazionale dell'Universo il bispettro può essere convenientemente riscritto in termini di una funzione nota come bispettro ridotto  $b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}$  [52]:

$$B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} = G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}, \quad (2.28)$$

che contiene tutta l'informazione fisica di  $B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3}$ , ma non dipende dal simbolo 3-j di Wigner e quindi è più semplice da calcolare. Sostituendo la relazione (2.28) nelle Eq.(2.23), la somma sugli  $m_i$  si riduce a:

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} (G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3})^2 = I_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^2 \quad (2.29)$$

in cui  $I_{\ell_1\ell_2\ell_3}$  è:

$$I_{\ell_1\ell_2\ell_3} \equiv \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le formule analitiche per i “parametri di skewness” diventano, quindi:

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= \frac{3}{2\pi\sigma_0^4} \sum_{2 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3} I_{\ell_1\ell_2\ell_3}^2 b_{\ell_1\ell_2\ell_3} W_{\ell_1} W_{\ell_2} W_{\ell_3} & (2.30) \\ S^{(1)} &= \frac{3}{8\pi\sigma_0^2\sigma_1^2} \sum_{2 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3} [\ell_1(\ell_1+1) + \ell_2(\ell_2+1) + \\ &\quad + \ell_3(\ell_3+1)] I_{\ell_1\ell_2\ell_3}^2 b_{\ell_1\ell_2\ell_3} W_{\ell_1} W_{\ell_2} W_{\ell_3} \\ S^{(2)} &= \frac{3}{4\pi\sigma_1^4} \sum_{2 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3} \{[\ell_1(\ell_1+1) + \ell_2(\ell_2+1) + \\ &\quad - \ell_3(\ell_3+1)] \ell_3(\ell_3+1) + (cycl.)\} I_{\ell_1\ell_2\ell_3}^2 b_{\ell_1\ell_2\ell_3} W_{\ell_1} W_{\ell_2} W_{\ell_3}. \end{aligned}$$

I modi  $\ell = 0$  e  $\ell = 1$  non sono rilevanti per le fluttuazioni primordiali, e sono stati esclusi dalle sommatorie. La forma del bispettro ridotto che compare in queste formule dipende dal modello di non gaussianità adottato. Se si considera il caso di accoppiamento non lineare debole per fluttuazioni scalari, la perturbazione primordiale di curvatura si può scrivere come:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_L(\mathbf{x}) + \Phi_{NL}(\mathbf{x}) = \Phi_L(\mathbf{x}) + f_{NL}[\Phi_L^2(\mathbf{x}) - \langle \Phi_L^2(\mathbf{x}) \rangle] \quad (2.31)$$

in cui  $\Phi_L(\mathbf{x})$  rappresenta una perturbazione gaussiana ausiliaria. L'Eq.(2.31) è stata ricavata nel paragrafo 1.3.2.

Nello spazio delle armoniche sferiche questa parametrizzazione si traduce nella seguente relazione tra i coefficienti armonici del campo:

$$a_{\ell m} = a_{\ell m}^L + a_{\ell m}^{NL}. \quad (2.32)$$

Il bispettro della CMB può quindi essere espresso come:

$$\begin{aligned} B_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} &= G_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} b_{\ell_1\ell_2\ell_3} = \langle a_{\ell_1m_1}^L a_{\ell_2m_2}^L a_{\ell_3m_3}^{NL} \rangle + \langle a_{\ell_1m_1}^L a_{\ell_2m_2}^{NL} a_{\ell_3m_3}^L \rangle + \\ &\quad + \langle a_{\ell_1m_1}^{NL} a_{\ell_2m_2}^L a_{\ell_3m_3}^L \rangle = 2G_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} \int_0^\infty r^2 dr [b_{\ell_1}^L(r) b_{\ell_2}^L(r) b_{\ell_3}^{NL}(r) + \\ &\quad + b_{\ell_1}^L(r) b_{\ell_2}^{NL}(r) b_{\ell_3}^L(r) + b_{\ell_1}^{NL}(r) b_{\ell_2}^L(r) b_{\ell_3}^L(r)] \end{aligned} \quad (2.33)$$

dove

$$b_\ell^L(r) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 dk P_\Phi(k) f_{NL} g_{T\ell}(k) j_\ell(kr) \quad (2.34)$$

e

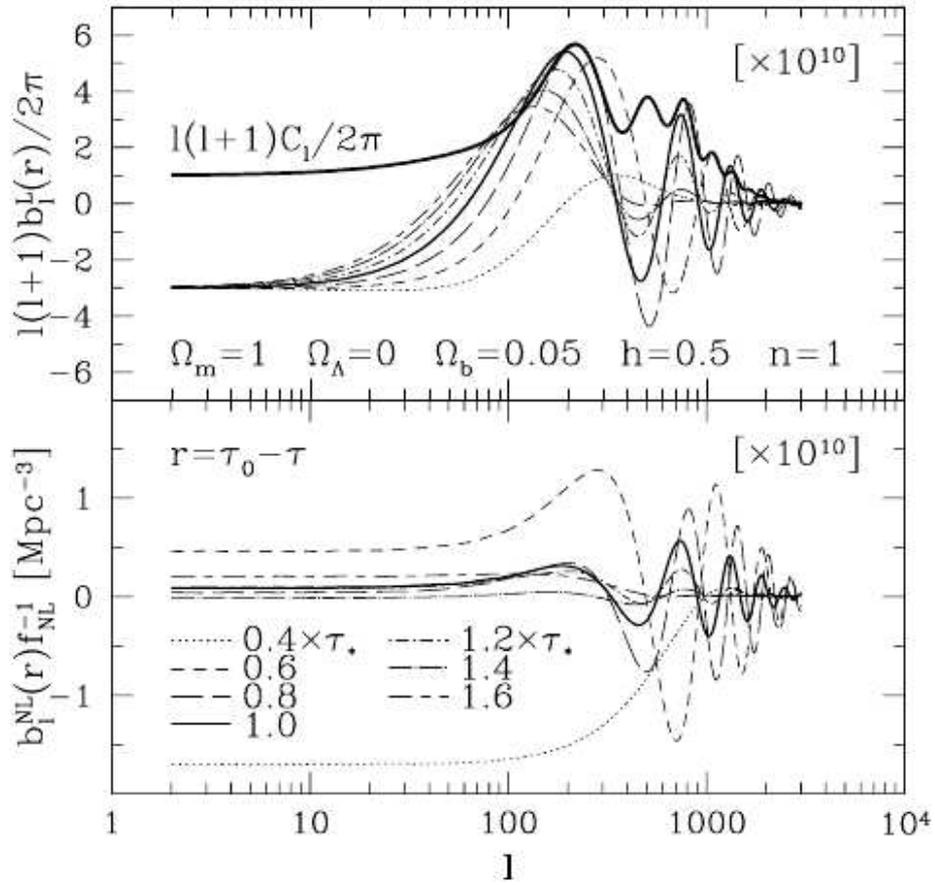
$$b_\ell^{NL}(r) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 dk f_{NL} g_{T\ell}(k) j_\ell(kr). \quad (2.35)$$

Gli andamenti dei due kernel  $b_\ell^L(r)$  e  $b_\ell^{NL}(r)$  sono riportati in Figura 2.2.

Nelle Eq.(2.34) e Eq.(2.35)  $r = c(\tau_0 - \tau)$  è la distanza comobile e  $\tau$  il tempo conforme. Le  $j_\ell(kr)$  sono le funzioni di Bessel, mentre  $g_{T\ell}(k)$  è la funzione di trasferimento radiativa completa e  $P_\Phi(k) \propto k^{n_s-4}$  è lo spettro di potenza delle fluttuazioni di curvatura primordiali.

Come già accennato nel paragrafo 1.3.2, la sensibilità dei moderni esperimenti non consente di rilevare un'eventuale dipendenza di  $f_{NL}$  dal momento  $k$ . Appare, quindi, ragionevole considerare  $f_{NL}$  costante e portarlo fuori dal segno d'integrale nell'Eq.(2.35). A questo punto dall'Eq.(2.33) è possibile ricavare l'espressione di  $b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}$  da sostituire nelle Eq.(2.30) per i parametri di skewness. Poiché i parametri cosmologici possono essere determinati con precisione misurando lo spettro di potenza angolare della CMB, il bispettro primordiale ridotto è completamente individuato dal singolo parametro costante  $f_{NL}$ .

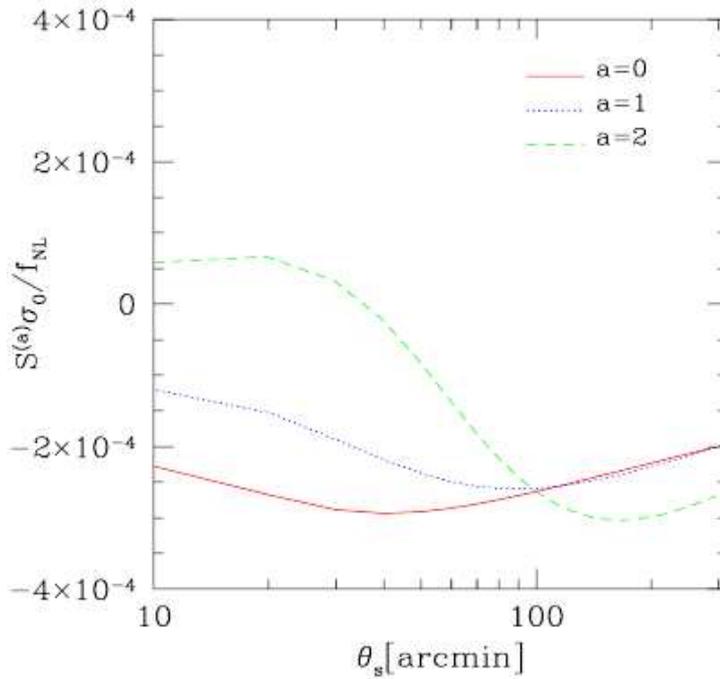
È importante osservare che le formule analitiche dei MF sopra illustrate sono facilmente generalizzabili. Introducendo un'opportuna espressione di  $b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}$ , infatti il formalismo introdotto si può estendere sia al caso in cui  $f_{NL}$  non è invariante di scala ma dipende dal momento (si veda ad esempio [60]), sia al caso in cui si vuole includere la non gaussianità dovuta alle anisotropie secondarie, quali l'effetto Sunyaev-Zel'dovich, l'effetto Rees-Sciama, la reionizzazione, il lensing debole e l'emissione di sorgenti extragalattiche nel radio e nell'infrarosso [52]. Tuttavia il formalismo perturbativo presentato vale solo nell'approssimazione di non gaussianità debole, che si traduce nella condizione  $S^{(i)}\sigma_0 \ll 1$ . In Figura 2.3 sono riportati gli andamenti dei parametri di skewness per un cielo di puro segnale di CMB in funzio-



**Figura 2.2**

Questa figura mostra rispettivamente i kernel  $b_\ell^L(r)$  e  $b_\ell^{NL}(r)$  per diversi valori di  $r = c(\tau_0 - \tau)$ , dove  $\tau = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$  e  $1.6\tau_*$ , con  $\tau_*$  tempo conforme al disaccoppiamento. Per il modello cosmologico considerato si ha:  $c\tau_* = 235 \text{Mpc}$  e  $c\tau_0 = 11.8 \text{Gpc}$ . Nel riquadro in alto, con la linea continua piú spessa, è riportato  $[\ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi] \times 10^{10}$  per un confronto.

ne di  $\theta_s$ , il parametro che determina la FWHM di una funzione finestra gaussiana  $W_\ell = \exp[-\ell(\ell+1)\theta_s^2/2]$ . Questi risultati sono stati ottenuti da [45] assumendo un modello cosmologico  $\Lambda$ CDM, con i parametri cosmologici di best fit di WMAP-1 [96] e normalizzando l'ampiezza delle fluttuazioni primordiali al primo picco acustico dello spettro di potenza angolare,  $\ell(\ell+1)C_\ell/(2\pi) = (74.7\mu K)^2$  per  $\ell = 220$  [77]. Dalla figura si evince che  $S^{(i)}\sigma_0 < 3 \cdot 10^{-4}f_{NL}$ , da cui discende che l'approssimazione perturbativa è applicabile solo nel limite di  $|f_{NL}| \ll 3300$ .

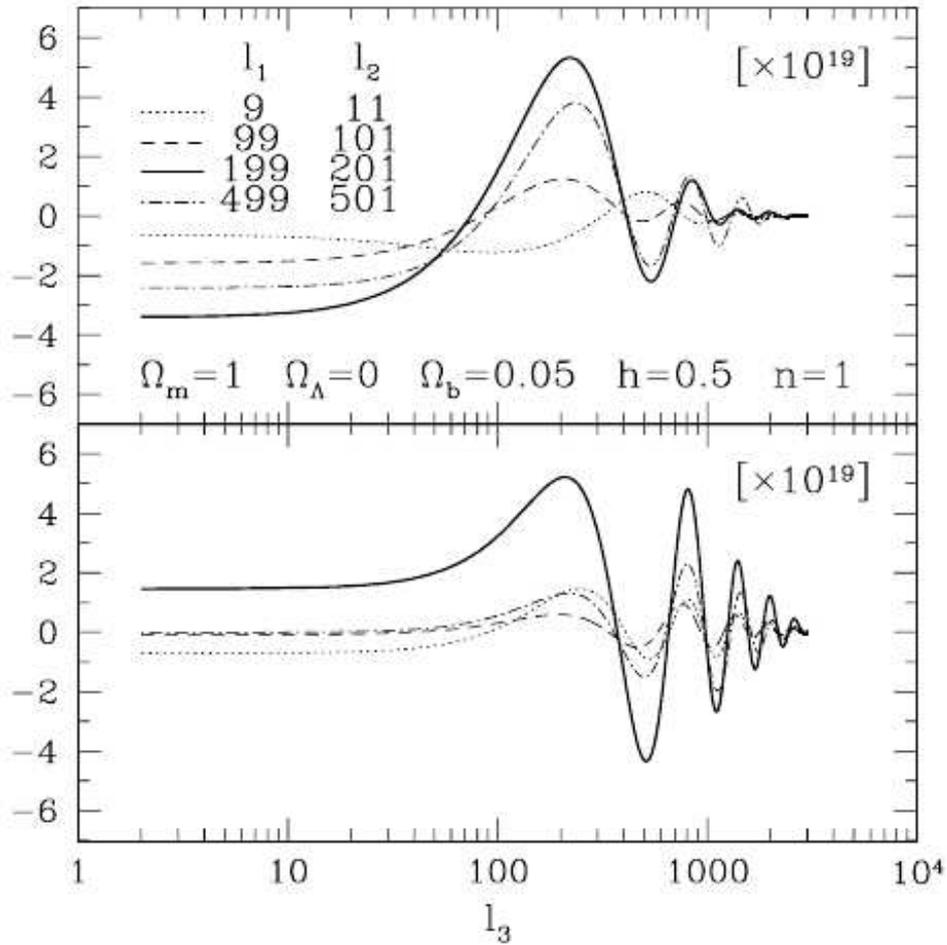


**Figura 2.3**

Parametri di skewness  $S^{(a)}$  moltiplicati per la varianza  $\sigma_0$  e divisi per  $f_{NL}$ . La quantità  $\theta_s$  determina la FWHM di un kernel gaussiano  $W_\ell = \exp[-\ell(\ell+1)\theta_s^2/2]$ .

Le Eq.(2.23) mostrano come nel caso di non gaussianità debole i MF della CMB non contengano più informazione del bispettro angolare, essendo null'altro che la somma pesata del bispettro sui multipoli. Se ci limitassimo

a considerare solo il primo parametro di skewness ci renderemmo conto che è meno efficiente del bispettro nel misurare  $f_{NL}$  [52].  $S^{(0)}$  si ottiene con un'integrazione lineare del bispettro, che è una funzione negativa a bassi  $\ell$  e rapidamente oscillante intorno a zero ad  $\ell$  più alti (si veda Figura 2.4).



**Figura 2.4**

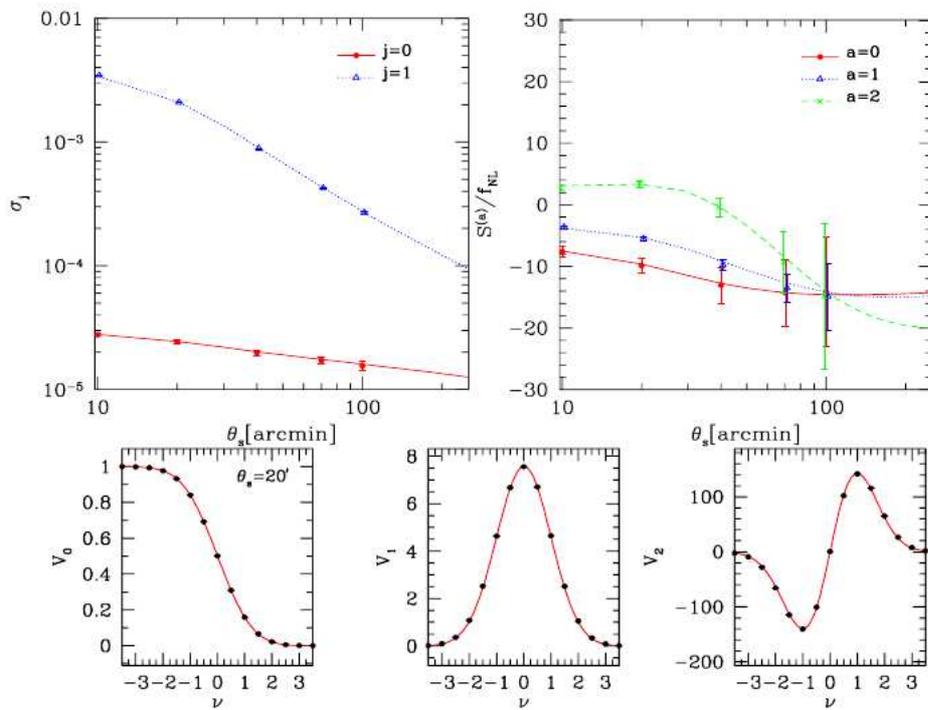
La figura mostra l'andamento del bispettro primario diviso per l'integrale di Gaunt. Nel riquadro in alto è riportato  $[\ell_2(\ell_2 + 1)\ell_3(\ell_3 + 1)\langle a_{\ell_1 m_1}^{NL} a_{\ell_2 m_2}^L a_{\ell_3 m_3}^L \rangle f_{NL}^{-1}(G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3})^{-1}/(2\pi)^2] \times 10^{19}$ , mentre in basso è riportato  $[\ell_1(\ell_1 + 1)\ell_2(\ell_2 + 1)\langle a_{\ell_1 m_1}^L a_{\ell_2 m_2}^L a_{\ell_3 m_3}^{NL} \rangle f_{NL}^{-1}(G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3})^{-1}/(2\pi)^2] \times 10^{19}$ .

L'integrazione di tali oscillazioni smorza il segnale non gaussiano ad  $\ell > 300$ . I MF, però, dipendono da tutti e tre i parametri di skewness, Eq.(2.23), e ciascuno di questi pesa in modo differente i diversi multipoli. In particolare  $S^{(0)}$  pesa maggiormente i bassi multipoli,  $S^{(2)}$  gli alti multipoli e  $S^{(1)}$  i multipoli di valore intermedio. I MF risultano, quindi, efficaci quanto il bispettro nel misurare  $f_{NL}$  [45] e rappresentano uno strumento statistico ad esso alternativo. I MF hanno inoltre il vantaggio di essere definiti nello spazio reale, dove è più facile trattare le complicazioni derivanti dal cut-sky, la presenza di effetti sistematici nei dati, di rumore non omogeneo e di foreground.

L'affidabilità delle predizioni analitiche dei MF presentate in questo paragrafo è stata testata tramite il confronto con i MF calcolati su mappe simulate non gaussiane, sia nel limite Sachs-Wolfe ( $g_{T\ell} = -1/3$ ) [45], sia utilizzando la funzione di trasferimento radiativa completa [46]. Ad esempio, in Figura 2.5, tratta da [46], è mostrato il confronto tra le predizioni analitiche di varianza, parametri di skewness e MF con le corrispondenti misure su simulazioni non gaussiane per  $f_{NL} = 100$ . I risultati simulati sono mediati su 200 realizzazioni e le barre d'errore sono gli errori della media. Le simulazioni tengono conto di tutti gli effetti osservativi. Le formule analitiche sono in buon accordo con le simulazioni.

La procedura per calcolare le corrette predizioni analitiche dei MF non gaussiani da confrontare con i dati, può essere schematizzata come segue:

1. Calcolo delle correzioni non gaussiane  $\Delta v_k(\nu, f_{NL})$  usando l'Eq.2.20.
2. Realizzazione di simulazioni gaussiane dei dati che “mimino” il più fedelmente possibile le caratteristiche osservative del dataset (e.g. rumore, cut-sky, strategia di scansione dell'esperimento) e i dettagli dell'analisi dati (*map making* ottimale). Stima dei valori medi dei MF su queste simulazioni,  $\tilde{v}_k^G(\nu)$ . Le simulazioni gaussiane sono usate anche per calibrare la “bontà” dell'analisi statistica, si veda Capitolo 4.



**Figura 2.5**

Confronto tra predizioni analitiche (linee) e stime numeriche su 200 simulazioni non gaussiane con  $f_{NL} = 100$  (simboli). In alto a sinistra: varianze  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ . In alto a destra: parametri di skewness  $S^{(a)}$ . In basso: MF per un campo non gaussiano.

3. Calcolo delle predizioni non gaussiane:

$$v_k(\nu, f_{NL}) = \tilde{v}_k^{(G)}(\nu) + \Delta v_k(\nu, f_{NL}). \quad (2.36)$$

## 2.4 In conclusione

Nel presente capitolo è stato delineato lo stato dell'arte della ricerca delle fluttuazioni non gaussiane, evidenziandone le principali problematiche. In primo luogo, non è nota la forma della non gaussianità prodotta durante l'inflazione ed esiste un numero infinito di modi in cui una distribuzione può deviare dalla gaussianità. Questo complica notevolmente la ricerca, perché rende arduo definire un criterio *universale* per l'individuazione e la caratterizzazione delle fluttuazioni non gaussiane. D'altro canto lo sviluppo di una batteria di metodi statistici, definiti in spazi diversi e che siano il più possibile complementari, è reso necessario per individuare imprevisti effetti sistematici e sorgenti spurie di non gaussianità. Inoltre, pur assumendo di conoscere il modello di non gaussianità primordiale, la piccolezza degli effetti ricercati ed il fatto che si manifestino su scale angolari ben al di sotto dell'orizzonte causale alla ricombinazione richiede un'elevata sensibilità degli esperimenti, che si traduce in un elevato rapporto segnale/rumore ed un'alta risoluzione angolare. In particolare, nel presente lavoro sono studiate le fluttuazioni non gaussiane date dal parametro di accoppiamento non lineare locale  $f_{NL}$  (si veda paragrafo 1.3.2). Nel caso di modelli inflazionari standard si ha  $f_{NL} \sim \mathcal{O}(1)$ , mentre per scenari inflazionari non convenzionali  $f_{NL}$  assume valori maggiori, fino a  $f_{NL} \sim \mathcal{O}(10^2)$  per modelli New-Ekpyrotic. In Tabella 2.2 sono riportati i limiti di  $f_{NL}$  fin'ora ottenuti dagli esperimenti. Si noti come tutti i risultati siano compatibili con l'ipotesi di gaussianità delle fluttuazioni. L'intervallo di valori ammessi per  $f_{NL}$ , infatti, è molto ampio ed include anche lo zero. I risultati più stringenti sono stati ottenuti con i dati di WMAP, esperimento sensibile a valori di  $f_{NL} \sim 20$ .

Tuttavia di recente è stato pubblicato un lavoro che dai dati di WMAP-3 ha ricavato  $27 < f_{NL} < 147$  (99.5% C.L.) [108], un risultato non in linea con quelli riportati in Tabella. Ciò ha catalizzato l'interesse per questo argomento di ricerca suscitando un animato dibattito. Già in passato altri lavori avevano “acclamato” rivelazioni di non gaussianità, che sono poi state confutate e spiegate in termini di effetti sistematici legati all'esperimento o introdotti dagli stessi metodi d'analisi.

Nel prossimo futuro con i dati di Planck, che potrebbe essere sensibile a  $f_{NL} \sim 5$ , saranno ricavati limiti ancora più stringenti. Ciò potrà spiegare le differenze tra i diversi risultati fin'ora pubblicati e fare luce sul meccanismo che ha guidato l'inflazione.



## Capitolo 3

# L'esperimento BOOMERanG

I dati analizzati durante questo lavoro di tesi sono stati acquisiti dall'esperimento BOOMERanG (*Ballon Observation Of Microwave Extragalactic Radiation and Geophysics*), che utilizza un telescopio montato su pallone stratosferico a lunga durata (LDB acronimo di *Long Duration Ballooning*) dedicato alle misure di radiazione galattica (emissione di polvere) ed extragalattica nella banda delle microonde. Questo capitolo fornisce una breve descrizione delle principali caratteristiche dell'apparato strumentale e della strategia d'osservazione dell'esperimento, utili per la comprensione del procedimento di analisi dati che sarà invece illustrato nel prossimo capitolo. Una descrizione più completa, sebbene tecnica, dello strumento è contenuta in [21, 67].

Per più di un ventennio la detezione delle flebili anisotropie della radiazione cosmica di fondo ha rappresentato una vera e propria “sfida” per l'astrofisica osservativa. Tale segnale, infatti, è sommerso dalle emissioni naturali (emissione atmosferica e galattica) e da quelle strumentali (emissione termica del rivelatore). L'esistenza di un'anisotropia di dipolo di origine non cosmologica ( $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-3}$ ), ma dovuta all'effetto Doppler generato dal moto peculiare della Terra rispetto alla CMB, era già nota negli anni 70. Tuttavia, si è dovuto attendere il 1992 con l'esperimento DMR a bordo del

satellite COBE [94] per avere la prima misura delle fluttuazioni di temperatura alla ricombinazione ( $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ ). COBE non aveva un vero telescopio e la sua risoluzione angolare era di circa  $7^\circ$  (in pratica la risoluzione di un'antenna conica corrugata puntata direttamente al cielo). Ciò lo rendeva sensibile solo alle anisotropie su grandi scale angolari, ben oltre la dimensione sottesa dall'orizzonte causale alla ricombinazione. Dal quel momento l'attenzione degli sperimentatori si è rivolta alla misura di fluttuazioni su scale angolari dell'ordine del grado o anche meno. Tale misura avrebbe reso possibile la rilevazione delle oscillazioni acustiche nello spettro di potenza angolare e, quindi, la determinazione dei principali parametri cosmologici. In questo processo l'esperimento BOOMERanG ha rivestito un ruolo pionieristico, producendo la prima mappa delle anisotropie ad alto rapporto segnale rumore e con una risoluzione angolare di circa  $10'$ .

Nato nel 1992 da una collaborazione internazionale guidata dall'Università *La Sapienza* di Roma in Italia e dal *California Institute of Technology* in USA, l'esperimento BOOMERanG vanta tre voli effettuati con successo. Il primo, durato solo 6 ore, ha avuto luogo nell'estate del 1997 presso la NASA-NSBF (*National Scientific Balloon Facilities*) a Palestine in Texas. Esso aveva lo scopo di testare l'affidabilità della strumentazione che è poi stata impiegata nel primo volo circumantartico, questa volta di lunga durata, che si è svolto tra il Dicembre 1998 e il Gennaio 1999. Infine, equipaggiato con una strumentazione capace di misurare la polarizzazione delle anisotropie, BOOMERanG ha effettuato un secondo volo circumpolare nel Gennaio del 2003.

### 3.1 Il primo volo LDB: B98

Il telescopio a scansione BOOMERanG presenta importanti elementi di novità rispetto ai precedenti esperimenti per la misura delle anisotropie della CMB [24], prima fra tutte l'utilizzo di un pallone stratosferico progettato

per un volo circumantartico a lunga durata. Sfruttando i venti di alta quota, che possono raggiungere anche velocità di 100 Km/ora, e la peculiare circolazione atmosferica del sistema antartico all'inizio dell'estate, il pallone viene mantenuto ad un'altezza di circa 40 Km e trasportato intorno al continente, compiendone una circumnavigazione completa in circa due settimane. Avere a disposizione un tempo d'osservazione così lungo (si ricordi che i voli a latitudine temperate si svolgono su tempi dell'ordine di 10-30 ore) permette di ripetere misure della stessa regione di cielo in giorni diversi e, quindi, in corrispondenza di regioni della calotta antartica tra loro molto distanti. È possibile così controllare l'eventuale presenza nei dati di radiazione a microonde diffratta dal suolo, poiché essa appare variabile nei diversi giorni d'osservazione. Inoltre, è possibile accumulare una grande mole di misure e migliorare statisticamente il rapporto segnale/rumore dei dati. I voli LDB sono effettuati durante l'estate antartica (Dicembre/Gennaio) quando a terra ci sono le condizioni climatiche adatte per il lancio. In quei mesi in Antartico è sempre giorno e ciò rappresenta un vantaggio, poiché permette di limitare la modulazione giorno/notte nell'altezza di crociera del pallone, che è invece caratteristica dei voli a latitudine temperate. Il Sole però è una sorgente molto intensa di radiazione a microonde, che sovrasta il segnale cosmologico. Tuttavia, una fortunata coincidenza vuole che proprio in quel periodo la regione ottimale per l'osservazione cosmologica (cioè quella in cui è minima l'emissione galattica) è in direzione opposta alla nostra stella. In pratica il telescopio dell'esperimento può volgere le spalle al Sole ed osservare la radiazione cosmica di fondo opportunamente schermato. Ciò consente di minimizzare contemporaneamente i disturbi prodotti dal Sole e dalla galassia, mantenendo l'esperimento a temperatura costante e stabile, sfruttando la radiazione solare per alimentare i sistemi di bordo.

I voli antartici, però, presentano anche un certo numero di svantaggi che richiedono tecniche innovative per essere aggirati. Per quanto riguarda

la strumentazione (si consulti anche [21]), l'esperimento impiega un telescopio fuori asse, con uno specchio primario parabolico di diametro 1.3 m, che alimenta un ricevitore di potenza molto sensibile basato su bolometri a ragnatela ("spider web") mantenuti ad una temperatura di 0.28 K da un sistema criogenico molto sofisticato. Per adattarsi alle esigenze di un LDB, tale sistema criogenico è stato appositamente progettato (a cura dell'ENEA di Frascati in collaborazione con il Dipartimento di Fisica de *La Sapienza*) in modo da avere un'efficienza stabile per tempi lunghi, un peso ridotto ed un'elevata resistenza alle sollecitazioni del lancio e della caduta del pallone. I bolometri criogenici sono i rivelatori più sensibili per radiazione continua a lunghezze d'onda millimetriche. Tuttavia, a queste lunghezze d'onda i rivelatori, oltre ad essere sensibili alla radiazione cosmica di fondo, sono anche sensibili all'instabilità e all'emissione dell'atmosfera terrestre. Ciò ha reso necessario l'impiego di un pallone stratosferico in grado di portare l'esperimento ad altitudini dove tali effetti sono trascurabili. In corrispondenza delle regioni polari, però, le linee del campo magnetico terrestre si addensano e questo fa sì che il flusso dei raggi cosmici in esse intrappolato sia particolarmente abbondante. È quindi necessario ridurre l'interazione dei raggi cosmici con il rivelatore, pur mantenendo efficiente l'assorbimento dei fotoni. Ed è per raggiungere questo obiettivo che i tradizionali assorbitori continui sono stati sostituiti con i bolometri a ragnatela. Tali bolometri sono caratterizzati da una ragnatela di fili di nitruro di silicio metallizzato con una spaziatura ( $\sim 100 \mu m$ ) inferiore alla lunghezza d'onda dei fotoni della CMB. In questo modo i fotoni incidenti "vedono" un assorbitore continuo, mentre la maggior parte delle particelle cosmiche altamente energetiche passano attraverso le maglie del bolometro senza rilasciarvi energia. Un bolometro colpito da un fotone è soggetto ad un lieve riscaldamento che viene rilevato da un sensibile termometro a semiconduttore: un cristallo di germanio di cui si misura la resistenza. In particolare, il cristallo è drogato

in modo che la sua resistenza sia fortemente variabile con la temperatura, per valori inferiori a 1 K. A temperature così basse il rumore Johnson e le fluttuazioni termiche spontanee del cristallo sono “congelate” e si possono rilevare variazioni della temperatura termodinamica del sensore dell’ordine di  $10^{-9}$  K.

I bolometri di BOOMERanG sono stati assemblati in fotometri singoli e multicanale, così da formare un piano focale sensibile a quattro diverse frequenze (90, 150, 240, 410 GHz) e con importanti ridondanze. I sofisticati filtri che selezionano queste frequenze sono immuni da perdite al di fuori della banda nominale e, per limitare l’emissione termica, sono anch’essi raffreddati dal sistema criogenico. La banda a 150 GHz, che comprende ben sei rivelatori, è quella in cui si ritiene che il segnale del fondo cosmico sia dominante. La banda a 90 GHz (due rivelatori) è utile per monitorare i disturbi che aumentano al diminuire della frequenza, quali l’emissioni free-free o la radiazione di sincrotrone dovute alla Galassia. Le bande a 240 GHz e a 400 GHz (ciascuna con quattro rivelatori) sono invece sensibili a disturbi crescenti con la frequenza, come l’emissione termica della polvere interstellare. L’osservazione delle anisotropie a diverse frequenze è indispensabile poiché permette di individuare le contaminazioni e di verificare che il segnale misurato abbia lo spettro caratteristico della CMB.

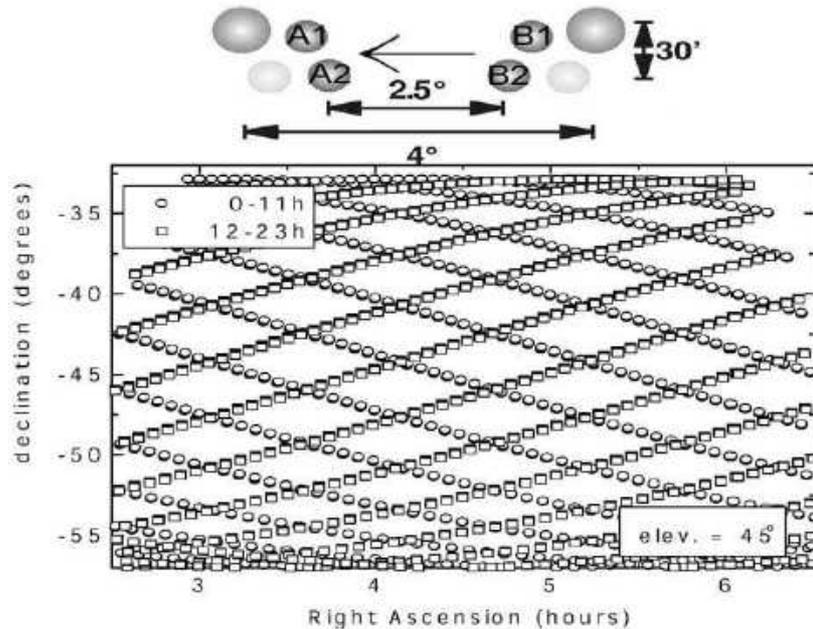
Il flusso che i bolometri ricevono da una direzione d’osservazione è messa a confronto con quella proveniente dalle direzioni contigue attraverso una lenta scansione del telescopio. Per ogni fissata elevazione, raggiunta spostando il telaio interno che contiene sia le ottiche che i ricevitori, si effettua la scansione del telescopio in azimut ruotando delicatamente l’intera gondola in cui è alloggiata la strumentazione. Questa strategia è resa possibile dalla stabilità intrinseca del rivelatore e dell’elettronica di lettura. Il sistema di controllo della gondola utilizza diversi sensori (sensori solari, GPS differenziale e giroscopi laser) ed attuatori (ruote d’inerzia e motori di coppia). Esso

è gestito dal computer di bordo, che contiene il programma della missione ed il software per l'acquisizione dei segnali dei sensori, la ricostruzione della posizione e l'azionamento dei motori d'assetto. Durante il volo il sistema deve orientare la gondola nella direzione da osservare e guidarla su scansioni ampie  $60^\circ$ , centrate sulla zona di cielo di minima contaminazione galattica, con velocità di scansione di  $1^\circ/s$  (1 dps) o  $2^\circ/s$  (2 dps). I dati acquisiti durante la scansione sono registrati a bordo ed in piccola parte inviati a terra tramite la rete di satelliti geostazionari TDRSS della NASA che consente un controllo dell'esperimento in tempo reale.

La Figura 3.1 mostra i *beam* proiettati sulla sfera celeste dai diversi rivelatori del piano focale dell'esperimento e la strategia di scansione. La disposizione dei rivelatori rispetto alla direzione di scansione permette di riosservare le stesse strutture più volte in tempi diversi e a frequenze diverse, fornendo una determinazione robusta della loro morfologia e del loro spettro. L'esperimento è partito dalla stazione di McMurdo il 29 Dicembre ed è rimasto ad un'altitudine superiore ai 38 Km per 10.6 giorni (252 ore), circumnavigando l'Antartico lungo il  $78^\circ S$  parallelo. Dell'intero tempo di volo 106 ore sono state dedicate all'osservazione della CMB a 1 dps e 82 ore all'osservazione della CMB a 2 dps. Le restanti ore, invece, sono state impiegate per la calibrazione, la diagnostica e l'osservazione di sorgenti extragalattiche (3 AGN) e brillanti regioni HII nei pressi del piano galattico.

### 3.2 Il secondo volo LDB: B03

Negli anni che seguirono al lancio di B98 furono sviluppati altri esperimenti per lo studio della CMB, in cui un particolare interesse fu rivolto alla misura della polarizzazione delle anisotropie. Accurate misure degli spettri angolari di polarizzazione, infatti, possono confermare lo scenario delle oscillazioni acustiche delle fluttuazioni primordiali e migliorare le stime dei parametri cosmologici. Il segnale di polarizzazione è circa 10 volte



**Figura 3.1**

*Beam* proiettati sulla sfera celeste dai diversi rivelatori del piano focale (in alto) e strategia di scansione (in basso). I due *beam* più ampi sono per i rivelatori a 90 GHz, mentre i due più piccoli per i rivelatori a 150 GHz. I *beam* A1, A2, B1 e B2, invece, sono per i quattro fotometri multi-banda, ciascuno dei quali osserva contemporaneamente le frequenze 150, 240 e 410 GHz. La freccia indica la direzione di scansione. Fissata l'elevazione, il telescopio compie una lenta e continua scansione del cielo in direzione azimutale ( $\pm 30^\circ$ , 1 dps e 2 dps). Una struttura rilevata da A1 durante la scansione in avanti è rilevata da B1 pochi secondi dopo e 30 secondi più tardi, nella scansione di ritorno, è individuata prima da B1 e poi da A1. Per effetto della rotazione del cielo, pochi minuti dopo la medesima sequenza di eventi è misurata anche da A2 e B2. Alcune ore dopo, la stessa regione di cielo è osservata di nuovo con una diversa inclinazione della direzione di scansione. Ogni giorno l'elevazione è spostata ( $40^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $50^\circ$ ). In figura è riportato una sola scansione per ora [24].

Canale	Banda Passante (GHz)	<i>Beam</i> FWHM (arcmin)	FC ( $\mu\text{V}/\text{K}$ )
B150A	148.0 - 171.4	$9.2 \pm 0.5$	$77.5114 \pm 0.6043$
B150B	145.8 - 168.6	$9.2 \pm 0.5$	$86.0113 \pm 0.6738$
B150A1	145.5 - 167.3	$9.7 \pm 0.5$	$54.5987 \pm 0.4169$
B150A2	144.0 - 167.2	$9.4 \pm 0.5$	$69.0016 \pm 0.5348$
B150B1	144.2 - 165.9	$9.9 \pm 0.5$	$55.4856 \pm 0.4242$
B150B2	143.7 - 164.3	$9.5 \pm 0.5$	$52.3813 \pm 0.3988$

**Tabella 3.1 : Caratteristiche strumentali dei rivelatori di B98**

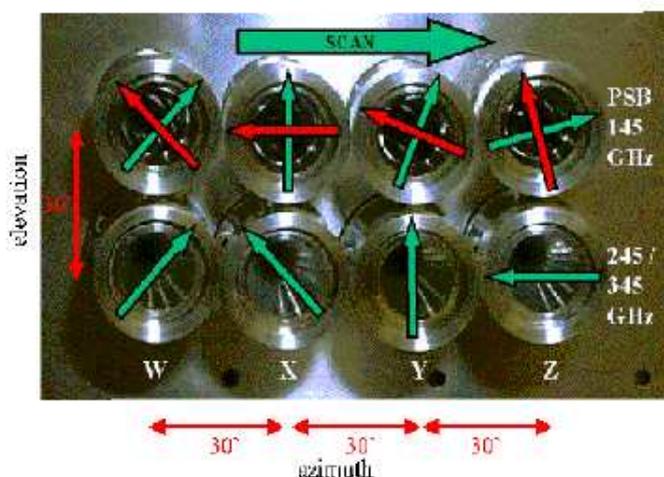
Sommario delle principali caratteristiche strumentali per il canale d'osservazione a 150 GHz. La banda passante è calcolata includendo il 68% della potenza totale rilevata da una sorgente con uno spettro piatto. Nell'ultima colonna sono riportati i fattori di calibrazione per la temperatura tra  $\mu\text{V}$  bolometrici e K assoluti. La FWHM (*Full Width Half Maximum*) dei *beam* è stata stimata dalla dimensione angolare apparente delle sorgenti extragalattiche osservate (si veda anche paragrafo 4.5).

meno intenso di quello in temperatura ed è inferiore al rumore residuo che gli strumenti lasciano nelle mappe. Per un'esatta determinazione di questa quantità appare quindi importante il confronto di misure effettuate con tecniche sperimentali diverse. Eppure tutte le misure di polarizzazione disponibili fino al 2003 erano state ottenute impiegando rivelatori continui a frequenze  $< 100$  GHz. La gondola di BOOMERanG era stata recuperata dopo il primo esperimento e riparata in tutti i suoi sottosistemi. In questo nuovo contesto apparve ovvia la scelta di modificarne il piano focale e renderlo sensibile alla polarizzazione prima di un altro volo. A tale scopo sono stati sviluppati nuovi bolometri nei quali l'assorbitore a regnatela è sostituito da due assorbitori a griglia, ortogonali tra loro e posti ad una distanza molto

minore della lunghezza d'onda dei fotoni della CMB [67]. Essi sono dunque immersi nello stesso campo magnetico, ma assorbono due polarizzazioni ortogonali. Va osservato che ciascuno dei due assorbitori, che prende il nome di PBS (*Polarization Sensitive Bolometer*), è corredato da un suo termometro al germanio, in modo da poter eseguire misure indipendenti. Il piano focale risultante, mostrato in (Figura 3.2), è costituito da 4 PBS operanti a 145 GHz e 4 fotometri multi-banda a singola polarizzazione, che usano bolometri a ragnatela ed operano a 245 e 345 GHz (Tabella 3.2). BOOMERanG fu così il primo esperimento a compiere misure di polarizzazione con assorbitori non continui e per frequenze  $> 100$  GHz.

Così equipaggiato l'esperimento BOOMERanG ha effettuato un secondo volo di lunga durata intorno all'Antartide nel Gennaio del 2003. Tuttavia, il pallone stratosferico, a causa di una perdita di elio dall'involucro, non è riuscito a compiere un giro completo della calotta polare ritornando alla base di partenza come pianificato, ma è precipitato in una zona impervia del *plateau* antartico nota come il Polo dell'Inaccessibilità. I dischi rigidi contenenti i dati sono stati, però, recuperati e sono oggi disponibili circa dodici giorni di dati (non tutti utilizzabili a fini scientifici).

La strategia di scansione dell'esperimento è stata in parte modificata rispetto a quella del precedente volo. In primo luogo, il campo di cielo osservato da B03 non è stato campionato in modo uniforme, come appare evidente dalla mappa di copertura riportata in Figura 3.3 (si veda anche Tabella 3.3). In particolare, è stata campionata a lungo una regione centrale (*deep*) ad alte latitudini galattiche, in modo da ottenere risultati caratterizzati da un elevato rapporto segnale/rumore. In secondo luogo, è stata osservata una regione a cavallo del piano galattico, che non era stata investigata da B98, per calibrare la presenza di radiazione spuria nei dati. Sono rimasti invece invariati: il range d'elevazione (tra  $35^\circ$  e  $55^\circ$ ) e l'ampiezza della scansione ( $\pm 30^\circ$  rispetto alla direzione opposta al Sole).



**Figura 3.2 : Piano focale di B03**

Nella parte alta dell'immagine sono visibili i PSB, costituiti da due assorbitori (ad esempio W1 e W2 per 145W) che misurano polarizzazioni ortogonali. Nella parte bassa, invece, sono disposti i fotometri a singola polarizzazione.

Frekuensi	Banda Passante	<i>Beam</i> FWHM
145 GHz	45 GHz	9'.95
245 GHz	80 GHz	6'.22
345 GHz	100 GHz	6'.90

**Tabella 3.2 : Caratteristiche strumentali dei rivelatori di B03**

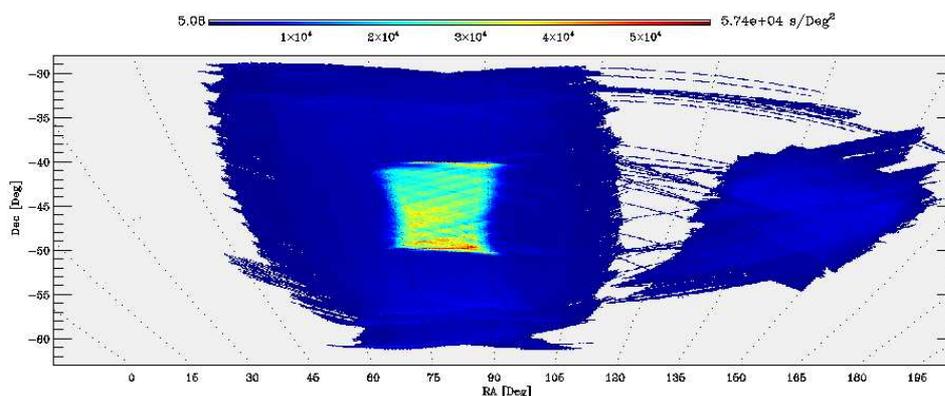


Figura 3.3

Mappa della copertura di cielo (numero di volte che un dato pixel di cielo viene osservato) per B03 ( $N_{side} = 512$ ). Sono chiaramente distinguibili la zona centrale (*deep*) molto più campionata delle altre e le osservazioni del piano galattico sulla destra.

Regione	Area (gradi <sup>2</sup> )	Centro (RA Dec)	Tempo per pixel
Deep	115	5.5 h $-45^{\circ}$	60 sec
Shallow	1130	5.5 h $-45^{\circ}$	3.3 sec
Piano Galattico	300	9.1 h $-47^{\circ}$	4.7 sec

Tabella 3.3 : Strategia di scansione B03

Schema della copertura di cielo effettuata da B03. Si noti la differenza nei tempi di integrazione per le diverse zone osservate. I tempi sono riferiti a pixel di dimensione  $\sim 7'$  ( $N_{side} = 512$ ).



## Capitolo 4

# Stima di $f_{NL}$ dalle mappe di BOOMERanG

Le pagine che seguono sono dedicate alla descrizione dell'analisi sviluppata durante il lavoro di tesi, rivolta alla ricerca di deviazioni dalla distribuzione gaussiana delle anisotropie nelle mappe di radiazione cosmica di fondo di BOOMERanG. In particolare, dal confronto dei MF dei dati con le corrispondenti predizioni analitiche per un campo debolmente non gaussiano, sono stati ricavati limiti per il parametro  $f_{NL}^{locale}$  che descrive una particolare forma di segnale non gaussiano di origine primordiale.

Tale analisi si è articolata in più tappe: è stato dapprima necessario ridurre opportunamente i dati di B98 e ricavarne una mappa delle anisotropie da combinare con la mappa dei dati di B03. Sulla mappa congiunta dei due esperimenti sono stati poi calcolati i MF dei dati. Inoltre, al fine di rendere le predizioni analitiche dei MF consistenti con l'esperimento, è stata sviluppata una procedura Monte Carlo per la generazione di simulazioni gaussiane dei dati.

## 4.1 Analisi dei dati di B98

Per costruire la mappa delle anisotropie in temperatura dei dati di B98 sono state utilizzate esclusivamente le misure acquisite dai canali d'osservazione con banda passante centrata a 150 GHz. A queste frequenze, infatti, il segnale del fondo cosmico domina sui foreground<sup>1</sup>. Inizialmente erano stati considerati tutti e sei i canali a 150 GHz (vedi tabella cap.), ma la mappa finale è stata realizzata usandone solo tre (A, A1, B1). Gli altri canali (A2, B, B2) sono stati esclusi perché troppo rumorosi, come sarà meglio spiegato nel paragrafo 4.1.2.

Per ogni canale d'osservazione i dati a nostra disposizione sono costituiti da misure tempo ordinate (TOD) a ciascuna delle quali è associato il corrispondente puntamento sulla sfera celeste, espresso in coordinate celesti (ascensione retta e declinazione), ed un flag. I flag contengono l'informazione sulla qualità dei campionamenti, segnalando in particolare quelli ritenuti non validi, ad esempio a causa di raggi cosmici incidenti sul rivelatore, o in quanto le misure corrispondenti sono state acquisite durante le fasi poco stabili del cambio d'elevazione del telescopio.

Prima di intraprendere l'analisi dati è stato necessario effettuare alcune operazioni preliminari sui TOD:

- Conversione del puntamento in coordinate polari espresse in radianti, per conformarsi allo schema di HEALPix (Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization of the sphere, un pacchetto software per il trattamento di dati sulla sfera [37]).
- Ridimensionamento dei TOD escludendo i primi 1748931 *frame* (un

---

<sup>1</sup>La stima della contaminazione galattica è basata sulla correlazione delle mappe di B98 con le mappe dello IRAS/DIRBE estrapolate alle frequenze d'osservazione di B98, ricampionate seguendone la strategia di scansione e filtrate allo stesso modo dei dati di CMB. Questa procedura mostra che nella regione osservata, a  $b < -20^\circ$ , l'emissione delle polveri galattiche produce un segnale trascurabile a 150 GHz [66].

*frame* corrisponde a 12 campionamenti) e considerando solo 33606000 campionamenti, al fine di eliminare transienti strumentali.

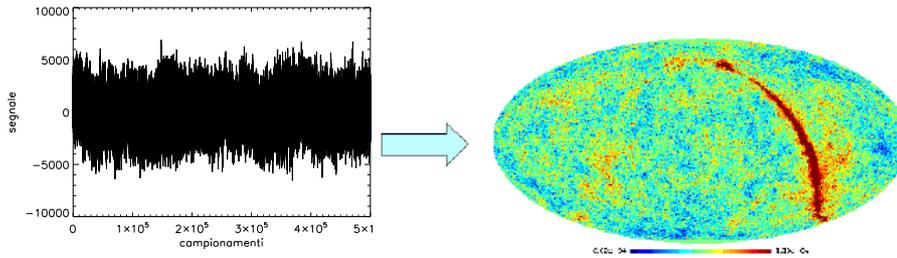
- Calibrazione delle misure da  $\mu V$  bolometrici a K assoluti usando i fattori riportati in Tabella 3.1.
- Sottrazione del dipolo dai dati. Utilizzando il valore di best fit del dipolo ottenuto da COBE  $(A, l, b) = (3.365 \text{ mK}, 264^\circ.4, +48^\circ.4)$  [50], dove  $l$  e  $b$  sono espresse in coordinate galattiche polari ed individuano la direzione di massima ampiezza. Il TOD di dipolo è così simulato lungo la scansione dell'esperimento: per ogni campionamento si calcola la distanza sferica tra il corrispondente puntamento e la direzione di massima ampiezza  $(l, b)$  e la si moltiplica per  $A$ . Al TOD di dipolo da sottrarre ai dati viene imposta media nulla.
- Esclusione dei *turnaround*, campionamenti corrispondenti ai punti di inversione nella direzione di scansione. In particolare, viene modificato il file dei flag, in modo che tali punti siano facilmente individuabili nella successiva fase di analisi. Durante i *turnaround*, infatti, lo strumento è sottoposto ad accelerazioni che hanno un effetto sui liquidi criogenici.
- Selezione dei campionamenti a 1dps (si veda paragrafo 3.1). Le parti di TOD corrispondenti alle misure effettuate con una velocità di scansione di 2dps sono poste uguali a zero ed i corrispondenti flag modificati in modo da escludere queste misure nella realizzazione delle mappe (i dati a 2dps non sono considerati affidabili quanto quelli a 1dps).

Una volta che i TOD sono stati così modificati, si può passare al successivo processo di analisi dati che si articola in tre passi basilari: la stima del rumore tramite un algoritmo di *map making* ricorsivo; la costruzione di un'opportuna *constrained noise realization* per le parti di TOD che sono state poste uguali a zero; ed infine la costruzione della mappa di anisotropia.

In particolare, per la realizzazione delle mappe ho utilizzato la procedura di *map making* ottimale ROMA [26], che è brevemente delineata nel prossimo paragrafo.

#### 4.1.1 Map Making

La procedura di *map making* consiste nella costruzione di una mappa nello spazio dei pixel da misure tempo ordinate. Specializzandosi al caso di



**Figura 4.1**

Schematizzazione della procedura di *map making*: dal TOD alla mappa di anisotropia.

misure di temperatura, si ha [75]:

$$d_t = s_t + n_t \quad (4.1)$$

dove con  $d_t$  sono indicati i dati, con  $s_t$  il solo segnale di anisotropia di CMB e con  $n_t$  il rumore. Consideriamo che segnale e rumore siano scorrelati ( $\langle s_t n_t \rangle = 0$ ) e che il rumore presente nelle misure sia stazionario almeno su porzioni sufficientemente brevi di TOD, per cui si ha che  $\langle n_t n_{t'} \rangle = f(|t - t'|)$ .

Per proiettare idealmente il segnale dalla volta celeste al rivelatore si costruisce una matrice di puntamento  $\mathbf{P}$ , di dimensione  $N_d \times N_p$ , dove  $N_d$  è il numero di punti del TOD e  $N_p$  il numero di pixel osservati. Data una mappa  $\mathbf{m}$  di dimensione  $N_p$ , l'operazione di proiezione è descritta dalla

seguinte equazione:

$$s_t = P_{tp} m_p, \quad (4.2)$$

dove per convenzione gli indici ripetuti sono sommati. Se il profilo del *beam* dello strumento può essere considerato simmetrico, ogni campionamento del segnale corrisponde ad un unico pixel sulla mappa e  $\mathbf{P}$  assume una forma molto semplice: è diverso da zero un solo elemento per riga, quello che connette l'osservazione del  $j$ -esimo pixel con l' $i$ -esimo elemento del TOD: in questo modo si otterrà una mappa convoluta col profilo d'antenna.

Sono stati proposti diversi metodi per risolvere il problema del *map making*, ad esempio si può utilizzare il metodo dei minimi quadrati ordinari che dà come stima della mappa:

$$\tilde{\mathbf{m}} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{d}. \quad (4.3)$$

Ciò equivale a dire che, per un esperimento a singola antenna, la mappa si ottiene sommando i dati nei pixel,  $\mathbf{P}^T \mathbf{d}$ , e dividendo ciascun pixel per il numero di volte che è stato osservato,  $(\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1}$ . L'estimatore ottenuto è sempre non distorto, ossia il suo valore di aspettazione è pari al vero "cielo", ma è ottimale solo nel caso in cui il rumore sia bianco,  $\langle n_t n_{t'} \rangle = \delta_{tt'}$ . Per i dati di BOOMERanG non è possibile però trascurare la correlazione del rumore e la mappa ottimale viene stimata con il metodo dei minimi quadrati generalizzati (GLS):

$$\tilde{\mathbf{m}} = (\mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{d} \quad (4.4)$$

dove  $\mathbf{N}^{-1} = \langle \mathbf{nn}^T \rangle^{-1}$  è l'inverso della matrice di covarianza del rumore. L'estimatore  $\tilde{\mathbf{m}}$  così trovato è ancora non distorto ed è tra tutti gli estimatori lineari quello con varianza minima. Oltretutto se assumiamo di avere rumore gaussiano nei dati,  $\tilde{\mathbf{m}}$  è proprio l'estimatore di maximum likelihood. Il metodo GLS, tuttavia, assume che le proprietà statistiche del rumore siano note, per questo risulta conveniente stimare la matrice di covarianza del

rumore  $\mathbf{N}$  direttamente dai dati ed un modo per farlo sarà discusso nel prossimo paragrafo.

Uno dei problemi fondamentali riguardanti il *map making* è legato all'implementazione dell'algoritmo. Il primo punto da notare è che  $\mathbf{N}$  è di dimensione  $N_d \times N_d$  e nel caso in considerazione  $N_d \simeq 10^7$ . Effettuare delle operazioni su questa matrice è, dunque, proibitivo anche con potenti calcolatori paralleli. Il rumore però, con buona approssimazione, può essere considerato stazionario su porzioni sufficientemente brevi del TOD. Ciò comporta una notevole semplificazione delle operazioni di calcolo, in quanto la matrice di covarianza per il rumore stazionario è approssimativamente circolante e, quindi, diagonale nella spazio di Fourier. Sotto l'ipotesi di circolarità non è necessario invertire esplicitamente  $\mathbf{N}$ , calcolo che avrebbe richiesto un numero  $\mathcal{O}(N_d^3)$  di operazioni, ma il prodotto  $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{d}$  si riduce ad una convoluzione che comporta un numero di operazioni che scala come  $N_d \log N_d$  (si possono utilizzare efficienti librerie FFT (*Fast Fourier Transform*, e.g. [34]). Nel caso in cui il rumore sia approssimativamente stazionario per un numero  $L_N$  di campionamenti, si può pensare di suddividere il TOD di dati in porzioni  $\mathbf{d}_{(k)}$  di lunghezza  $L_N$ . Per ciascuna di esse si ha:

$$\mathbf{d}_{(k)} = \mathbf{P}_{(k)}\mathbf{m} + \mathbf{n}_{(k)} \quad (4.5)$$

dove  $k=1, \dots, N_C$ ,  $\mathbf{P}_{(k)}$  è una matrice di puntamento e  $\mathbf{n}_{(k)}$  un vettore di rumore stazionario con matrice di covarianza  $\mathbf{N}_{(k)}$ . Se  $N_d \ll L_N$  possiamo trascurare l'inter-correlazione tra  $\mathbf{n}_{(k)}$  diversi e la mappa ottimale è data dall'espressione:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \left[ \sum_{k=1}^{N_C} \mathbf{P}_{(k)}^T \mathbf{N}_{(k)}^{-1} \mathbf{P}_{(k)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N_C} \mathbf{P}_{(k)}^T \mathbf{N}_{(k)}^{-1} \mathbf{d}_{(k)}. \quad (4.6)$$

Questo schema si presta anche a generare mappe congiunte da  $N_C$  rivelatori diversi che osservano regioni di cielo almeno parzialmente sovrapposte. Il secondo punto da notare è che la matrice  $\mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}$  ha dimensione  $N_p \times N_p$

con  $N_p > 10^5$  e piuttosto che invertirla esplicitamente conviene risolvere in modo iterativo la seguente equazione:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{d}. \quad (4.7)$$

Ad esempio si può utilizzare il metodo dei gradienti coniugati (CG) che, se opportunamente pre-condizionato, gode di buone proprietà di convergenza.

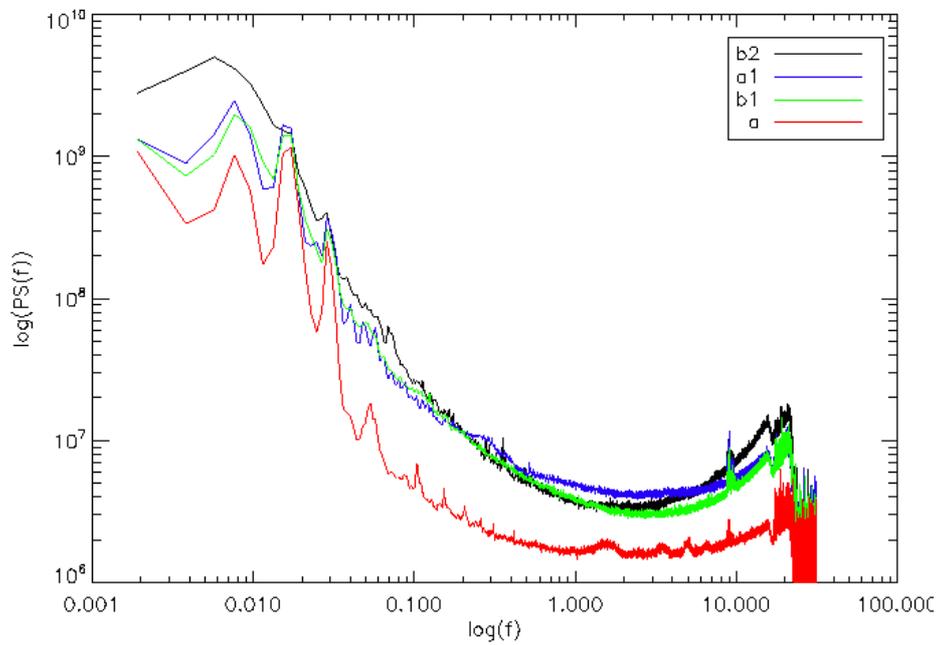
#### 4.1.2 Stima del rumore e *constrained noise realization*

Il calcolo della mappa di anisotropia Eq.(4.4) prevede che sia nota la matrice di covarianza del rumore. Sfortunatamente non si possiede una determinazione del rumore indipendente dal segnale. È inoltre importante che tale determinazione sia fatta nelle stesse condizioni dell'esperimento, perché esistono contributi al rumore non legati al rivelatore e che non sono facilmente prevedibili, come ad esempio l'emissione atmosferica. Si è dunque costretti a stimare dai dati contemporaneamente segnale e rumore.

Come già detto nel precedente paragrafo, si può assumere che il rumore sia stazionario almeno su porzioni di TOD e a ciascuna di esse si applica l'algoritmo iterativo [81]:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{(j)} &= \mathbf{d} - \mathbf{P} \tilde{\mathbf{m}}_{(j-1)} \Rightarrow \mathbf{N}_{(j)} = \langle \mathbf{n}_{(j)} \mathbf{n}_{(j)}^T \rangle \\ \tilde{\mathbf{m}}_{(j+1)} &= \tilde{\mathbf{m}}_{(j)} + (\mathbf{P}^T \mathbf{N}_{(j)}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{N}_{(j)}^{-1} \mathbf{n}_{(j)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si parte, quindi, da una stima non ottimale del segnale  $\mathbf{P} \tilde{\mathbf{m}}^0$ , dove  $\tilde{\mathbf{m}}^0$  è data dall'Eq.(4.3), e la si sottrae ai dati. Il residuo rappresenta una prima stima del rumore, di cui viene calcolato lo spettro di potenza. Per ogni canale d'osservazione, invertendo tale spettro, si ottiene un filtro (*noise filter*) con cui convolvere i dati e quindi pesarli opportunamente per il rumore prima di sintetizzarli in una mappa. Si è ora in grado di generare una mappa ottimale  $\tilde{\mathbf{m}}^1$ , come data dall'Eq.(4.4), ed impiegarla per produrre una nuova, più accurata, stima del rumore e lo schema può essere iterato.



**Figura 4.2**

Seconda stima dello spettro di potenza del rumore per 4 canali d'osservazione a 150 GHz di B98 (a, b1, b2, a1). I TOD utilizzati hanno un'opportuna *constrained noise realization* per le porzioni corrispondenti alle acquisizioni a 2dps.

Gli spettri di potenza del rumore per i canali d'osservazione di B98 sono stati ricavati come schematizzato di seguito:

1. Prima stima degli spettri di potenza del rumore per ciascuno dei sei canali, utilizzando i dati ridotti come descritto all'inizio del paragrafo 4.1 ed iterando l'algoritmo Eq.(4.8) cinque volte. Per il set di dati considerati, è stata valutata una lunghezza di convoluzione ottimale del *noise filter* pari a  $L_N = 16385$ . Al fine di ottenere una stima più accurata del segnale di CMB nei dati, e quindi del rumore, l'algoritmo iterativo non è stato applicato ai singoli canali d'osservazione, ma a mappe congiunte dei sei bolometri realizzate con il *map making* ottimale ROMA (si veda anche Eq.(4.6)). Si noti che, prima di effettuare le stime, ai TOD è stato applicato un filtro passa basso con frequenza di taglio di  $15Hz$  poiché oltre tale frequenza i dati sono dominati dal rumore.
2. Come già detto in precedenza, specializzandosi al caso di misure acquisite a 1dps alcune porzioni dei TOD sono state poste uguali a zero. Poiché l'applicazione delle FFT a serie temporali discontinue introduce degli artefatti (*ringing*) nei dati, è necessario riempire le porzioni nulle con realizzazioni di rumore gaussiano correlato (*constrained noise realization*), calcolate dagli spettri di potenza stimati al passo precedente.
3. I canali A2 e B sono stati esclusi dalla successiva analisi perché troppo rumorosi. In particolare, lo spettro di rumore del canale B presenta dei battimenti a frequenze superiori ad  $1Hz$ .
4. Con i TOD modificati come descritto al passo 2 è stata effettuata una seconda stima degli spettri di rumore.
5. Affinché l'algoritmo Eq.(4.8) convergesse ad una stima stabile del rumore è stato necessario reiterare il passo 2, cioè calcolare nuovamente

le *constrained noise realization* con gli spettri ricavati al passo 4 e poi, con i nuovi TOD, ristimare gli spettri di rumore. I risultati sono riportati in Figura 4.2.

### 4.1.3 La mappa dei dati

Una volta stimato il rumore dei diversi rivelatori si è in grado di risolvere il problema del *map making* Eq.(4.4).

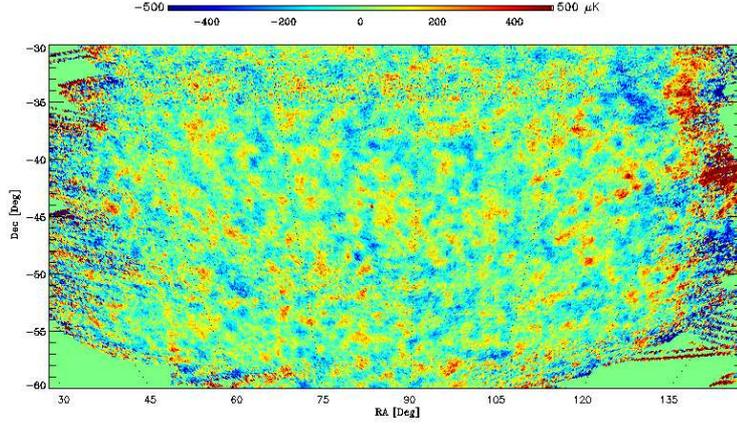
Sottomettendo la procedura ROMA ad una macchina parallela, lo IBM p575 POWER 5 system (un calcolatore del National Energy Research Computing Center<sup>2</sup> a memoria distribuita con un totale di 888 processori), e impiegando 64 processori in circa 1 minuto *wall clock* è stata ottenuta la mappa congiunta dei canali A, A1 e B1. Si noti che i dati del canale B2 sono stati esclusi perché discordanti con i risultati delle simulazioni, che verranno discusse nel paragrafo 4.5. Sono state sufficienti 100 iterazioni dell'algoritmo CG (si veda Eq.(4.7)) affinché convergesse con un errore  $\sim \mathcal{O}(10^{-3})$ . La risoluzione della mappa è stata fissata a  $3'.4$ ,  $N_{side} = 1024$  nella convenzione di HEALPix, al fine campionare accuratamente il *beam* dello strumento. I TOD utilizzati sono quelli con le opportune *constrained noise realization*, come descritto alla fine del precedente paragrafo, ed in fase di *map making* sono stati filtrati con una banda passante a gradino tra 70 mHz e 15 Hz. In Figura 4.3 è riportata una versione della mappa, degradata ad una risoluzione di  $\sim 6'.9$  ( $N_{side} = 512$ ).

## 4.2 Mappa congiunta dei dati di B98 e B03

Per i dati di B03 già si dispone di una mappa di anisotropia multi-canale, ottenuta con la procedura di *map making* ROMA includendo anche gli effetti della polarizzazione che questo esperimento, a differenza di B98, ha misura-

---

<sup>2</sup><http://www.nersc.gov/nusers/systems/bassi>



**Figura 4.3**

Mappa dei dati di B98 ad una risoluzione di  $\sim 6'.9$  ( $N_{side} = 512$ ). In figura non sono stati riportati i dati relativi all'osservazione del piano galattico.

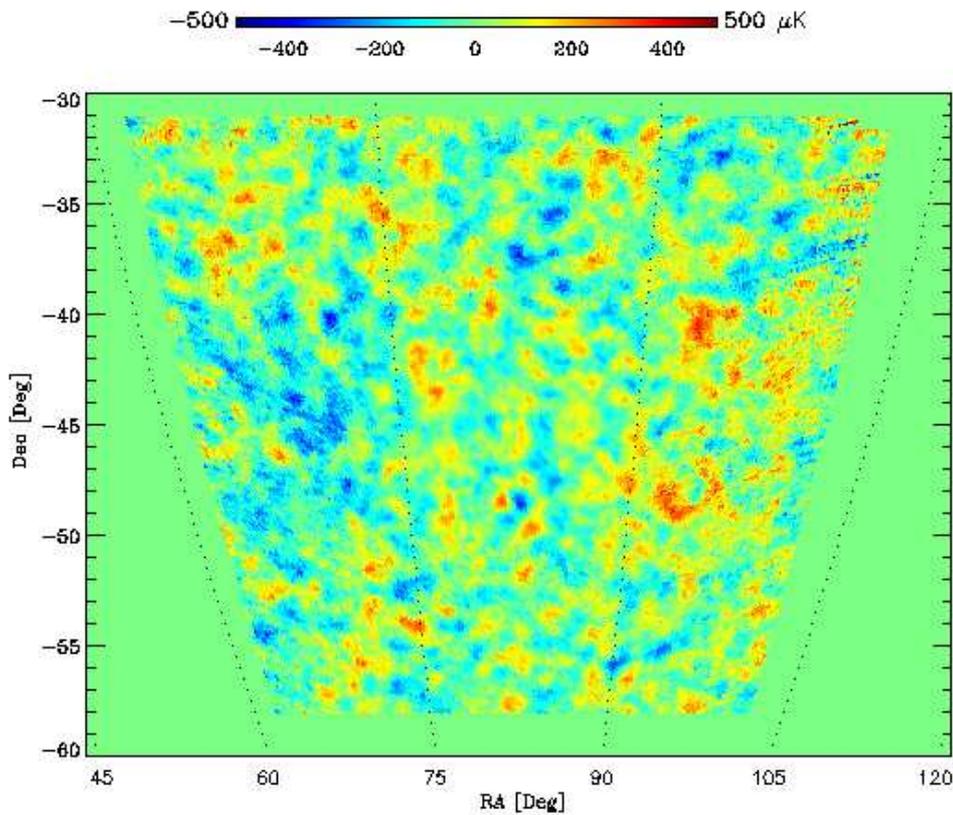
to. A questa mappa è stata applicata una maschera per eliminare le zone contaminate dall'emissione dei foreground (si veda Figura 4.4). La mappa su cui verrà effettuata l'analisi di non-gaussianità si ottiene sommando le mappe dei dati di B98 e B03 opportunamente pesate per il rumore. Poiché la procedura di *map making* è efficiente nel decorrelare il rumore presente nei dati, con buona approssimazione tale operazione si riduce a sommare le due mappe pixel per pixel ciascuna pesata per la corrispondente varianza del rumore bianco in quel pixel,  $\sigma^2/N^{oss}$ . Calcoliamo tale varianza separatamente per i due esperimenti come:

$$\frac{\sigma^2}{N^{oss}} = \sum_{horn} \frac{\sigma_{horn}^2}{N_{horn}^{oss}} \quad (4.9)$$

dove  $N_{horn}^{oss}$  è il numero di volte che il rivelatore *horn* ha osservato il pixel in considerazione e  $\sigma_{horn}^2$  è la varianza del rumore stimato dai dati per quel rivelatore.

Prima di effettuare l'operazione di somma, le mappe di B03 e B98 sono

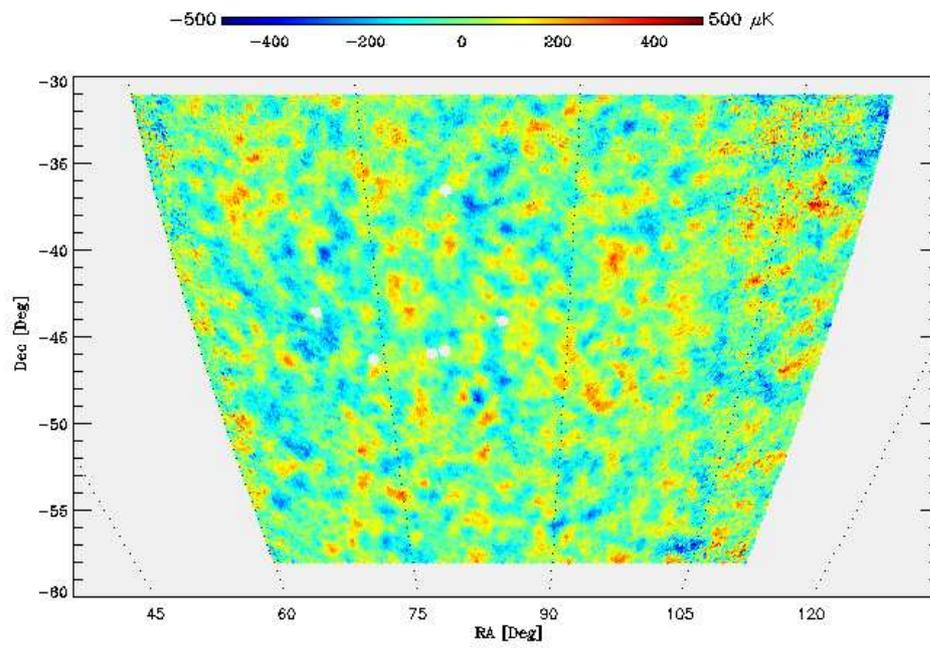
state separatamente degradate ad una risoluzione di  $6'.9$  ( $N_{side} = 512$ ), ed anche alla mappa di B98 è stata applicata una maschera.



**Figura 4.4**

Mappa dei dati di B03 ( $N_{side} = 512$ ). Non sono stati riportati i dati relativi all'osservazione del piano galattico.

La mappa complessiva così ottenuta è riportata in Fig.4.5 ed è la mappa che si avrebbe effettuando l'osservazione con 11 rivelatori: gli 8 canali d'osservazione a 145 GHz di B03 e i 3 canali (A, A1 e B1) a 150 GHz di B98. Nella mappa è possibile individuare tre diverse regioni. Una parte centrale, corrispondente alla *deep* di B03 (si veda paragrafo 3.2), che è stata osservata



**Figura 4.5**

Mappa dei dati di B98 e B03 ( $N_{side} = 512$ ), a cui è stata applicata una maschera rettangolare, che maschera anche i 3 quasar presenti nel campo di vista dell'esperimento (circoli chiari).

in entrambi i voli dell'esperimento e campionata un elevato numero di volte durante il secondo. Questa regione, dominata dal segnale di B03, mostra un elevato rapporto segnale rumore. Una regione più esterna, circostante la prima, che è stata campionata in modo simile da entrambi gli esperimenti. Infine, due fasce laterali, la prima tra  $60^\circ$  e  $62^\circ$  e la seconda tra  $102^\circ$  e  $111^\circ$  in RA (ascensione retta), che sono state osservate solo da B98 e, quindi, risultano più rumorose.

### 4.3 Funzionali di Minkowski dei dati

La regione di cielo osservata dall'esperimento BOOMERanG è estremamente ridotta, circa il 2% dell'intera sfera celeste, appare dunque conveniente analizzare i dati in approssimazione piana. A tale scopo proiettiamo la mappa congiunta dei dati di B98 e B03 su di un piano di dimensioni  $\sim 49^\circ \times 49^\circ$ , tangente alla sfera celeste nel punto centrale della mappa (si veda anche [13]). Il punto di tangenza è:

$$\mathbf{x}_c = \sin\theta_0 \cos\phi_0 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{y}_c = \sin\theta_0 \sin\phi_0$$

$$\mathbf{z}_c = \cos\theta_0$$

con  $\theta_0 = 134.25^\circ$  e  $\phi_0 = 86^\circ$ , rispettivamente colatitudine e azimut del centro della mappa in coordinate polari. Il piano tangente è costruito come:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_c + \alpha \cos\theta_0 \cos\phi_0 - \beta \sin\phi_0 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_c + \alpha \cos\theta_0 \sin\phi_0 + \beta \cos\phi_0$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{z}_c - \alpha \sin\theta_0 \quad (4.12)$$

con  $\alpha = \text{pas} \cdot k$  e  $\beta = \text{pas} \cdot k_1$ , dove  $k$  e  $k_1$  sono indici che vanno da 1 a 460 e  $\text{pas} = 6'.37$  è la risoluzione con cui viene campionato il piano tangente. Usando, poi, una routine di HEALPix (*vec2pix-ring*) è possibile creare una

corrispondenza tra i punti della mappa sferica e i punti del piano tangente così costruito.

Lavorare in approssimazione piana facilita notevolmente il calcolo dei MF, in particolare permette di adoperare le formule riportate in Eq.(2.7), Eq.(2.8) e Eq.(2.9) senza dover ricorrere al calcolo delle derivate angolari prime e seconde delle anisotropie (si veda [90]). I MF dei dati sono stati calcolati per nove diversi valori di soglia del campo, tutti ugualmente spazati ( $\nu \in [-4, 4]$ ). Si noti che non è opportuno considerare un numero maggiore di soglie, in quanto i MF calcolati su una regione di cielo ridotta, come quella osservata da BOOMERanG, sono fortemente correlati al variare di  $\nu$ .

#### 4.4 Predizioni analitiche dei funzionali di Minkowski

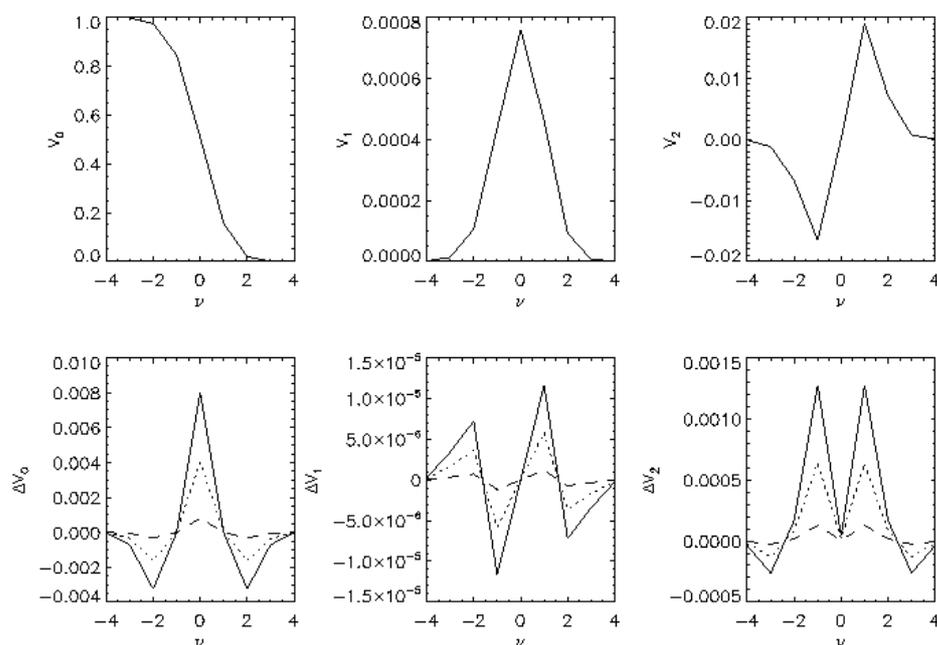
Il passo successivo consiste nel ricavare le predizioni analitiche dei MF di un campo debolmente non gaussiano da poter confrontare con i dati. Come dettagliatamente descritto alla fine del Capitolo 2, tali predizioni sono descritte dalle formule:

$$\begin{aligned} V_k(\nu) &= A_k v_k(\nu, f_{NL}) \\ v_k(\nu, f_{NL}) &= \tilde{v}_k^{(G)}(\nu) + \Delta v_k(\nu, f_{NL}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ricordiamo che  $\Delta v_k(\nu, f_{NL})$  rappresenta la correzione non gaussiana analitica. Per calcolarla ho sviluppato un codice che ricalca i passi descritti nel paragrafo 2.3.4.

In primo luogo si calcolano i *kernel*  $b_\ell^L(r)$  e  $b_\ell^{NL}(r)$  dati dalle Eq.(2.34)-(2.35).

La funzione di trasferimento radiativa  $g_{T\ell}(k)$  in essi contenuta è stata ricavata con codici di CMBFAST [91] opportunamente modificati ed assumendo un modello cosmologico  $\Lambda$ CDM, con i parametri cosmologici di



**Figura 4.6**

In figura sono riportati rispettivamente gli andamenti delle predizioni dei MF  $V_k(\nu, f_{NL})$  per  $f_{NL} = 1000$  e gli andamenti delle correzioni non gaussiane analitiche  $\Delta V_k(\nu, f_{NL})$  per  $f_{NL} = 1000$  (linea continua), 500 (punteggiata), 100 (tratteggiata). Gli errori statistici associati ai  $V_k(\nu, f_{NL})$  non sono visualizzabili sulle scale dei grafici.

maximum likelihood di WMAP-3 [97]. Tali parametri sono riportati in Tabella 4.1, dove troviamo anche il valore dell'indice spettrale  $n_s$  dello spettro di potenza delle fluttuazioni primordiali  $P_\Phi \propto k^{n_s-4}$ , che compare nell'espressione di  $b_\ell^L(r)$ . Se si assume  $f_{NL}$  costante, è possibile portarlo fuori dal segno di integrale nell'espressione di  $b_\ell^{NL}(r)$  e considerarlo come una costante moltiplicativa.

Parametri Cosmologici	
$\Omega_b$	0.041
$\Omega_c$	0.237
$\Omega_v$	0.722
$\Omega_\nu$	0
$H_0$	$73.2 \frac{Km}{Mpc \cdot s}$
$T_{CMB}$	2.726 K
$Y_{He}$	0.24
$N_\nu$	3.04
$N_\nu(\text{massivi})$	0
$\tau$	0.091
$n_s$	0.954

**Tabella 4.1**

Parametri cosmologici di maximum likelihood di WMAP-3 per un modello  $\Lambda$ CDM [97].

Una volta ottenuti i *kernel* sopra menzionati, si può calcolare il bispettro ridotto eseguendo l'integrale riportato in Eq.(2.33), dove l'estremo superiore non è  $\infty$ , ma  $r_{max} \simeq 13,7 Gpc = c\tau_0$ . Tuttavia, per poter calcolare i parametri di skewness  $S^{(i)}$ , ossia le quantità che codificano il contributo non gaussiano nelle predizioni analitiche dei MF, mancano ancora alcuni "ingredienti". Primo fra tutti la funzione finestra  $W_\ell$ , che nel caso in esame è data

dal prodotto della *pixel window function*  $w_\ell$  di HEALPix a  $N_{side} = 512$  con il *beam* dell'esperimento  $b_\ell$ :

$$W_\ell = w_\ell \cdot b_\ell. \quad (4.14)$$

Poiché i dati a disposizione sono stati acquisiti da più rivelatori ognuno con un suo *beam* caratteristico,  $b_\ell$  è stato stimato come media dei diversi *beam*. In Figura 4.7 sono riportati gli andamenti di  $w_\ell$  (pwf) e  $b_\ell$ . Successivamente è necessario ricavare le quantità  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ , che determinano anche l'ampiezza  $A_k$  dei MF e che si ottengono come:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} (2\ell + 1) C_\ell W_\ell^2} \quad (4.15)$$

e

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} (2\ell + 1) [\ell(\ell + 1)] C_\ell W_\ell^2}. \quad (4.16)$$

In queste espressioni si pone  $\ell_{max} = 1000$ , poiché BOOMERanG non è opportunamente sensibile a valori di  $\ell$  maggiori. Analogamente ai *kernel*  $b_\ell^L(r)$  e  $b_\ell^{NL}(r)$ , lo spettro di potenza angolare  $C_\ell$  si ottiene come:

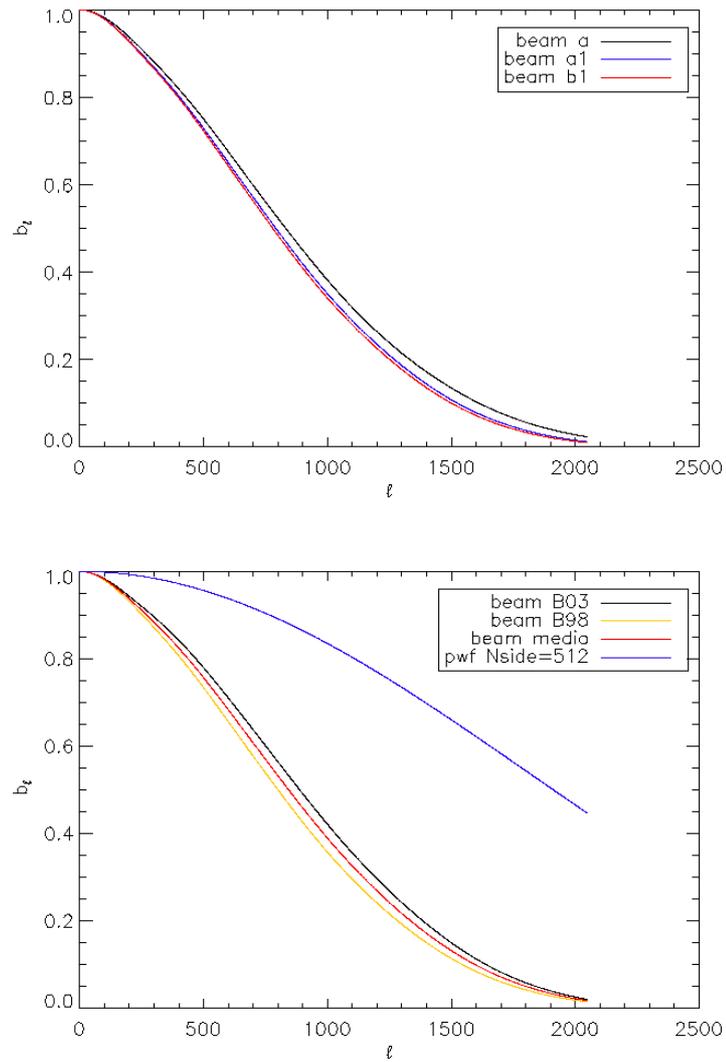
$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_{max}} k^2 dk P_\phi(k) g_{T\ell}^2(k) \quad (4.17)$$

con  $k_{max} \simeq 3000$ . Va osservato che l'ampiezza delle fluttuazioni primordiali è normalizzata al valore del primo picco acustico dello spettro di potenza in temperatura di WMAP-1,  $\frac{\ell(\ell+1)C_\ell}{2\pi} = (74.7\mu K)^2$  a  $\ell = 220$  [77].

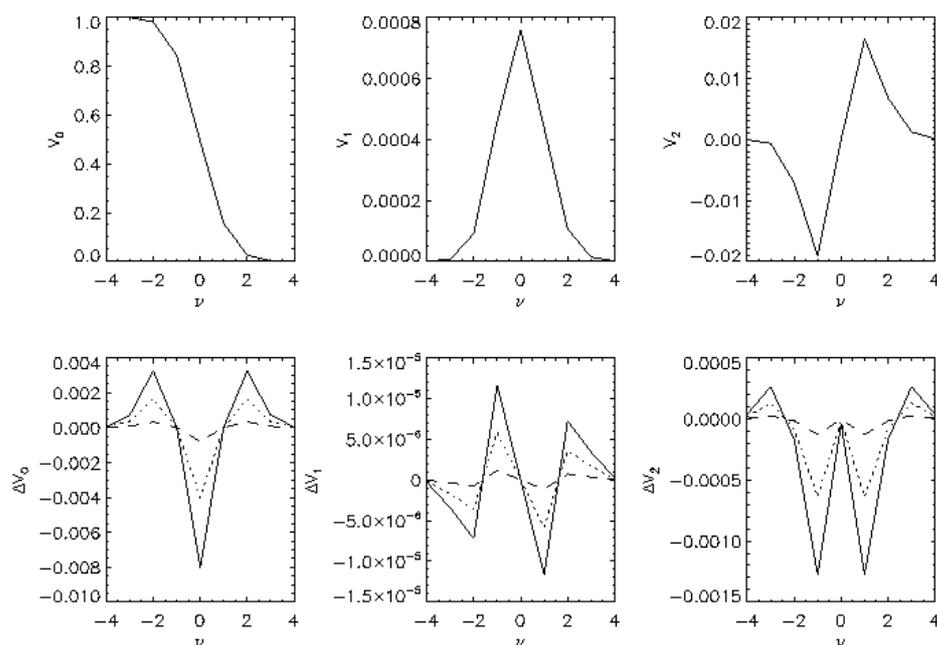
È ora possibile<sup>3</sup> derivare i parametri  $S^{(i)}$  dati dalle Eq.(2.30) e, quindi, le correzioni non gaussiane del primo ordine  $\Delta v_k(\nu, f_{NL})$ , che sono riportate in Figura 4.6 per  $f_{NL} > 0$  ed in Figura 4.8 per  $f_{NL} < 0$ .

Per completare il calcolo delle predizioni analitiche dei MF bisogna, infine, ricavare i  $\tilde{v}_k^{(G)}$ , che si ottengono come valori medi dei MF di simulazioni gaussiane dei dati. Affinché le predizioni analitiche siano realmente confrontabili con i MF dei dati, è importante che le simulazioni tengano conto di

<sup>3</sup>Per il calcolo dei simboli 3-j di Wigner è stata utilizzata la routine standard "drc3jj"

**Figura 4.7**

Nel riquadro superiore sono riportati gli andamenti dei *beam* per i diversi canali d'osservazione di B98. Nel riquadro inferiore, invece, sono messi a confronto i *beam* dei due esperimenti (ottenuti come medie dei *beam* dei singoli rivelatori), la loro media e la *pixel window function* di HEALPix per  $N_{side} = 512$ .



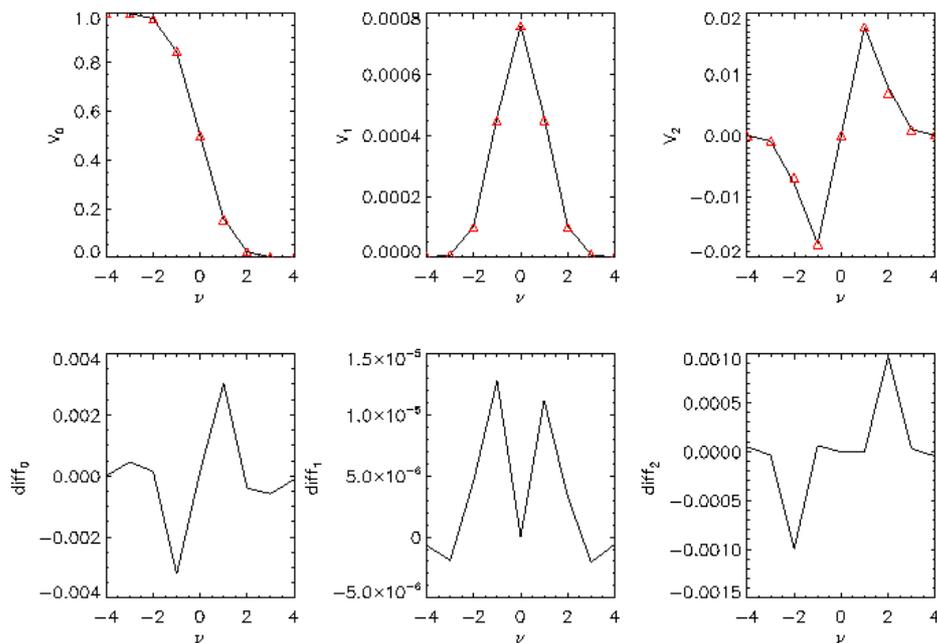
**Figura 4.8**

In figura sono riportati rispettivamente gli andamenti delle predizioni dei MF  $V_k(\nu, f_{NL})$  per  $f_{NL} = -1000$  e gli andamenti delle correzioni non gaussiane analitiche  $\Delta V_k(\nu, f_{NL})$  per  $f_{NL} = -1000$  (linea continua),  $-500$  (punteggiata),  $-100$  (tratteggiata). Gli errori statistici associati ai  $V_k(\nu, f_{NL})$  non sono visualizzabili sulle scale dei grafici.

tutte le caratteristiche osservative del *dataset* e dei dettagli dell'analisi dati (la procedura Monte Carlo con cui sono state generate le simulazioni sarà descritta nel prossimo paragrafo). Inoltre, così come è stato fatto per i MF dei dati (si veda il paragrafo precedente), anche i MF delle mappe simulate devono essere calcolati nell'approssimazione di piano tangente. La dimensione finita dei pixel, l'osservazione di una porzione limitata della sfera celeste e gli effetti di proiezione, che inducono un accumulo di punti ai bordi del piano tangente, fanno sì che questi funzionali differiscano dalle loro predizioni analitiche sferiche (si vedano le Eq.(2.10) e la Figura 2.1). Un confronto tra i MF gaussiani derivati analiticamente ed i valori medi dei MF calcolati in approssimazione piana su 1000 mappe gaussiane simulate, è riportato in Figura 4.9. È importante osservare che la differenza tra i due andamenti è piccola, ma non può essere trascurata perché confrontabile con l'ampiezza del segnale non gaussiano ricercato. Tuttavia, i due andamenti differiscono solo per un fattore di ampiezza, mentre la forma delle curve rimane invariata. Ciò, dunque, non può essere erroneamente ricondotto ad un segnale non gaussiano primordiale che, invece, introdurrebbe una distorsione negli andamenti. A tal proposito si consultino anche i risultati ottenuti da [13].

## 4.5 Simulazioni Monte Carlo

Come già ricordato nel precedente paragrafo, per calcolare il contributo gaussiano  $\tilde{v}_k^{(G)}$  alle predizioni analitiche dei MF è necessario generare delle mappe gaussiane che “mimino” i dati dell'esperimento. A tal proposito realizziamo una procedura Monte Carlo (MC) per produrre 1000 mappe gaussiane, numero necessario per avere una buona statistica. In primo luogo, simuliamo il segnale gaussiano di CMB nella regione di cielo complessivamente osservata da B98 e B03. Seguendo le tecniche standard generiamo dallo spettro di potenza angolare delle anisotropie, assumendo un modello cosmologico  $\Lambda$ CDM con i parametri di best fit di WMAP-1 [96], un set di



**Figura 4.9**

Nei riquadri in alto per ciascun MF sono riportati: l'andamento delle predizioni analitiche sferiche per un campo gaussiano (linea continua) e l'andamento del valore medio dei MF calcolati in approssimazione piana su 1000 mappe gaussiane simulate (triangoli rossi). I riquadri in basso, invece, mostrano per ciascun MF il residuo tra questi due andamenti.

$a_{lm}$  incorrelati (coefficienti dell'espansione in armoniche sferiche). Simuliamo anche la componente di polarizzazione lineare, che è presente nel segnale di CMB, ma che sarà utilizzata solo per le mappe di B03, dal momento che B98 non misura la polarizzazione. Il segnale così generato viene convoluto con il *beam* opportunamente simmetrizzato di ciascun rivelatore. Il *beam* tiene conto dell'incertezza nella ricostruzione del puntamento delle antenne, che è stimata dalla dimensione angolare apparente delle sorgenti puntiformi extragalattiche presenti nel campo osservato dall'esperimento. I *beam* effettivi sono dati dalla convoluzione della funzione di trasferimento del sistema ottico con un profilo gaussiano che tiene conto del *tremolio* (jitter) nel puntamento. Quest'ultimo, assunto gaussiano, ha un rms (valore quadratico medio) di  $2'.4$  per B03 [67] e di  $2'.5$  per B98 [21]. Usando le routine di HEALPix (in particolare *alm2map* che implementa una trasformata sferica veloce) è ora possibile trasformare gli  $a_{lm}$  del segnale in una mappa di risoluzione  $3'.4$  ( $N_{side} = 1024$ ).

Seguendo la strategia di scansione dell'esperimento le mappe di segnale sono poi proiettate sui TOD: ciò equivale esattamente a seguire la procedura di analisi dati a ritroso. Avremo quindi 3 TOD di segnale di CMB per i canali A, A1 e B1 a 150 GHz di B98 e 8 TOD per i canali a 145 GHz di B03. Contemporaneamente sono anche prodotti i TOD di rumore, quali realizzazioni gaussiane degli spettri di potenza di rumore stimati iterativamente dai dati come descritto al paragrafo 4.1.2. Si noti che per i TOD di rumore di B03 è necessario tenere conto degli effetti di cross-correlazione tra rivelatori che occupano lo stesso pixel (W1 e W2, V1 e V2, etc. Si veda Capitolo 3).

Per ciascun canale d'osservazione sommiamo il TOD di solo segnale e quello di solo rumore. I TOD risultanti sono utilizzati per ottenere mappe multi-canale di anisotropia con la procedura ROMA, separatamente per B98 e B03. In fase di *map making* si usano esattamente gli stessi puntamenti, flag e *noise filter* dell'analisi dei dati reali, in modo da riprodurre il più

fedelmente possibile le caratteristiche dell'esperimento e dell'analisi dati.

Infine, mappe di B98 e B03 con lo stesso segnale di CMB sono sommate in un'unica mappa, come descritto nel paragrafo 4.2.

La procedura Monte Carlo è stata sottomessa ad una macchina parallela, un cluster Linux basato su 50 processori AMD OPTERON single e dual core<sup>4</sup>. I nodi di calcolo utilizzati sono caratterizzati da una interconnessione *Infiniband* ad alte prestazioni. In media, impiegando 16 processori, sono stati necessari circa 8 minuti *wall clock* per simulare una mappa di B98 e 60 minuti per simularne una di B03. La realizzazione dell'intero set di simulazioni Monte Carlo ha richiesto, quindi, un totale di circa 1134 ore di calcolo.

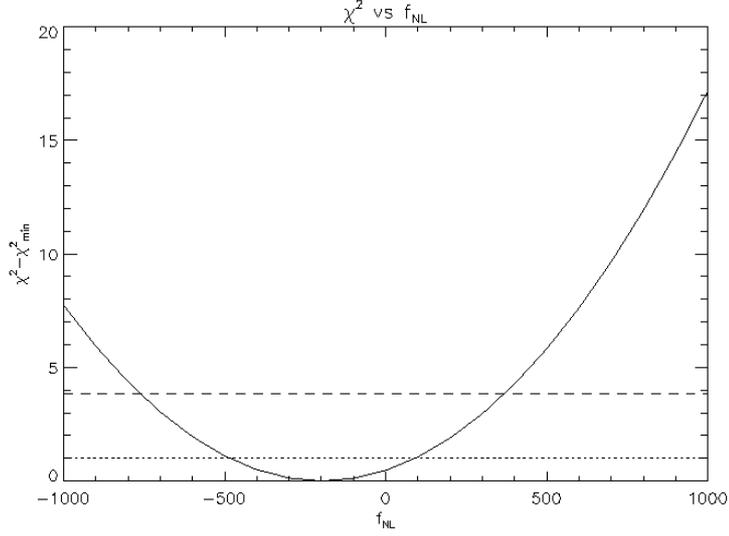
## 4.6 Confronto tra dati e predizioni analitiche: la ricerca di non gaussianità primordiale

Dal confronto dei MF dei dati  $V_k^{dati}(\nu)$  con quelli calcolati usando le simulazioni MC e le correzioni analitiche non gaussiane  $V_k^{pred}(\nu, f_{NL})$ , è possibile porre dei limiti sulla presenza di segnali non gaussiani nei dati. In particolare, assumendo il modello di non gaussianità dato nel paragrafo 1.3.2, con un metodo di *maximum likelihood* si è stimato il valore di best-fit di  $f_{NL}$  locale e l'incertezza ad esso associata. L'applicabilità della statistica di  $\chi^2$  allo studio di  $f_{NL}$  è stata verificata da [46], per le mappe di WMAP-3, usando simulazioni dei dati contenenti segnali non gaussiani di origine primordiale di forma descritta proprio dal parametro di accoppiamento non lineare  $f_{NL}$ .

Nell'approssimazione di campo debolmente non gaussiano, la funzione di distribuzione di  $[V_k^{dati}(\nu) - V_k^{pred}(\nu, f_{NL})]$  è ben descritta da una gaussiana multivariata, cosicché la funzione di *likelihood* di  $f_{NL}$  è semplicemente

---

<sup>4</sup>Si consulti il sito web <http://www.caspur.it/attivitaeservizi/calcolo/sistemi/amdopteron.html>



**Figura 4.10**

Andamento dell'estimatore  $\chi^2$  in funzione di  $f_{NL}$  per i dati di B98 e B03. Le linee orizzontali individuano rispettivamente i limiti a 68% C.L. e 95% C.L..

proporzionale a  $e^{-\chi^2(f_{NL})/2}$ , dove  $\chi^2(f_{NL})$  è dato da:

$$\chi^2(f_{NL}) = \sum_{\alpha\alpha'} [V_{\alpha}^{dati} - V_{\alpha}^{pred}(f_{NL})] \Sigma_{\alpha\alpha'}^{-1} [V_{\alpha'}^{dati} - V_{\alpha'}^{pred}(f_{NL})]. \quad (4.18)$$

Specialmente quando si analizza una regione limitata di cielo, esiste una forte correlazione tra i valori di un particolare MF calcolati per soglie diverse, ed esiste anche una non trascurabile correlazione tra MF di tipo diverso. I  $V_{\alpha,\alpha'} = \{V_0, V_1, V_2\}$  riportati nell'equazione di cui sopra sono dei MF “congiunti”, ottenuti raggruppando i tre MF di partenza in un unico vettore di 27 elementi e per questo motivo gli indici  $\alpha$  e  $\alpha'$  variano sia sul numero di soglie ( $\nu \in [-4, 4]$ ), che sui differenti tipi di MF ( $k = 0, 1, 2$ ). Infine, la quantità  $\Sigma_{\alpha\alpha'}$  rappresenta la matrice di covarianza completa e si può ricavare come:

$$\Sigma_{\alpha\alpha'} = \left\langle (V_{\alpha}^{dati} - \tilde{V}_{\alpha}^{(G)})(V_{\alpha'}^{dati} - \tilde{V}_{\alpha'}^{(G)}) \right\rangle, \quad (4.19)$$

in cui  $\tilde{V}_{\alpha}^{(G)}$  sono i MF “congiunti” calcolati mediando i MF delle simulazioni MC gaussiane. Sebbene la matrice di covarianza dei MF sia anch'essa una

funzione di  $f_{NL}$ , si ritiene che tale dipendenza sia sufficientemente blanda da poter essere trascurata, a tal riguardo si consulti anche [54].

Ricaviamo l'andamento di  $\chi^2(f_{NL})$ , come dato dall'Eq.(4.18), al variare di  $f_{NL}$  tra -2000 e 2000 con passi discreti di 100 unità. Con il numero di soglie ed il numero di simulazioni gaussiane considerate in quest'analisi si riesce ad ottenere un matrice di covarianza stabile.

Come si può notare in Figura 4.10, il  $\chi^2(f_{NL})$  è minimo per  $f_{NL} = -200$  e gli intervalli di confidenza ricavati per tale parametro sono:

$$-500 < f_{NL} < 100 \quad (68\% \text{ C.L.}) \quad (4.20)$$

$$-750 < f_{NL} < 400 \quad (95\% \text{ C.L.}).$$

I dati di B98 e B03 sono, dunque, consistenti con l'ipotesi di fluttuazioni di densità primordiali distribuite in modo gaussiano ( $f_{NL} = 0$ ).

## 4.7 Ulteriori verifiche

L'applicazione della statistica dei MF alle mappe congiunte di B98 e B03 potrebbe portare a risultati fuorvianti, a causa della disomogeneità di copertura del campo osservato. Ad esempio, il confine tra la regione centrale della mappa, osservata da entrambi gli esperimenti, e la regione più esterna, campionata un numero minore di volte e quindi più rumorosa, a seconda del valore di soglia  $\nu$ , può essere erroneamente identificato come il contorno di una struttura di anisotropia falsando la corrispondente misura di  $V_1(\nu)$ . Un modo per ridurre la disomogeneità consiste nel degradare la mappa ad una risoluzione minore e questo procedimento permette anche di ridurre il rumore, che vive ad alte frequenze spaziali. A tale scopo è stato costruito un *kernel* gaussiano bidimensionale con cui convolvere sia la mappa dei dati che le 1000 mappe gaussiane simulate dopo averle proiettate sul piano tangente. La Figura 4.12 mostra gli andamenti dei MF medi delle suddette simulazioni MC al variare della FWHM (*Full Width Half Maximum*) del

*kernel* gaussiano. In Figura 4.11 sono invece riportati i MF medi di 100 mappe di segnale di CMB, anch'esse simulate considerando la reale strategia di scansione dell'esperimento, sintetizzate usando il *map making* ottimale ROMA e convolute con un *kernel* gaussiano. Si noti come l'applicazione del *kernel* gaussiano con i valori di FWHM riportati in figura, oltre a ridurre il rumore e le disomogeneità, rimuove anche parte del segnale.

Per poter stimare  $f_{NL}$  dalle mappe degradate è stato necessario calcolare nuovamente le correzioni analitiche  $\Delta V_k(\nu, f_{NL})$ , questa volta usando come funzione finestra

$$W_\ell = w_\ell \cdot b_\ell \cdot g_\ell, \quad (4.21)$$

dove il *kernel* gaussiano  $g_\ell$  è:

$$g_\ell = e^{-\frac{\ell(\ell+1)\Theta_s^2}{2}} \quad (4.22)$$

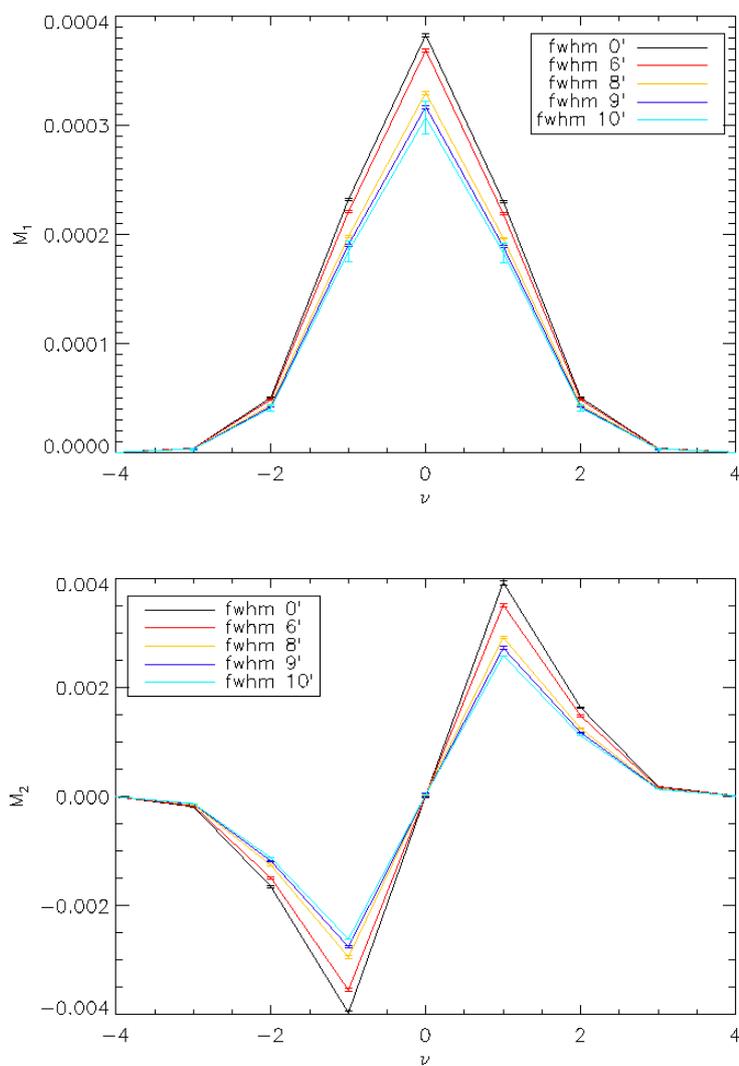
con  $\Theta_s = \frac{\text{FWHM}}{\sqrt{2\ln 2}}$ . Si confronti quest'espressione della funzione finestra con quella riportata nell'Eq.(4.14). Con le mappe opportunamente degradate con il *kernel* gaussiano è stata ripetuta l'intera procedura descritta nel precedente paragrafo. I limiti ottenuti per  $f_{NL}$  sono consistenti con quelli ricavati nel precedente paragrafo. Per un confronto sono di seguito riportati i risultati dei casi limite di FWHM= 10' e FWHM= 6':

$$-350 < f_{NL} < 1050 \quad (95\% \text{ C.L.}) \quad (4.23)$$

$$-500 < f_{NL} < 750 \quad (95\% \text{ C.L.}). \quad (4.24)$$

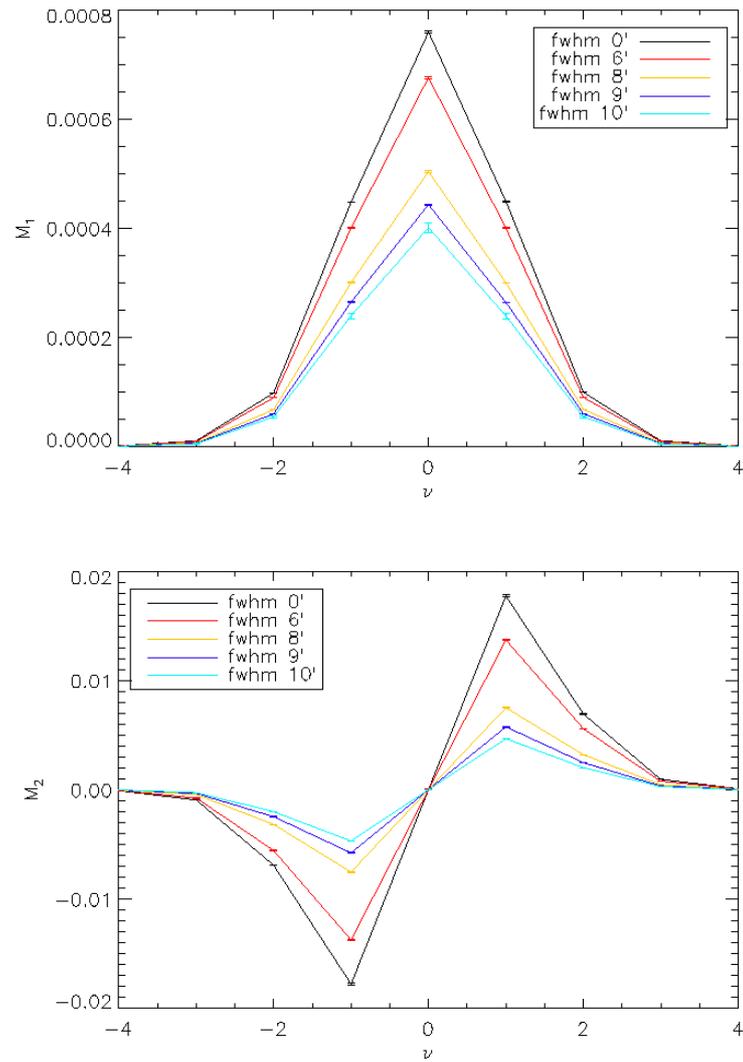
Possiamo, quindi, concludere che i limiti di  $f_{NL}$  ottenuti non sono significativamente inficiati dalla presenza della disomogeneità nella copertura della zona osservata e, inoltre, che i dati di B98 e B03 non sono dominati dal rumore alla risoluzione a cui è effettuata l'analisi (6'.87).

Per testare la stabilità del metodo d'analisi sviluppato nel presente lavoro, è stata effettuata un'ulteriore prova, in cui i limiti di  $f_{NL}$  sono stati



**Figura 4.11**

In figura sono riportati rispettivamente gli andamenti medi dei funzionali  $V_1(\nu)$  e  $V_2(\nu)$  calcolati su 100 simulazioni di segnale della CMB, al variare della FWHM del *kernel* gaussiano con cui si convolvono le mappe. Il funzionale  $V_0(\nu)$  è stato omesso in quanto non si apprezzano significative variazioni dell'andamento in funzione della FWHM.

**Figura 4.12**

In figura sono riportati rispettivamente gli andamenti medi dei funzionali  $V_1(\nu)$  e  $V_2(\nu)$  calcolati su 1000 simulazioni gaussiane dei dati al variare della FWHM del *kernel* gaussiano. Il funzionale  $V_0(\nu)$  è stato ommesso in quanto non si apprezzano significative variazioni dell'andamento in funzione della FWHM.

calcolati solo sui dati di B03 e poi confrontati con quelli ottenuti da [29]. La procedura seguita è quella descritta nel precedente paragrafo, questa volta però per mappe di dimensioni minori (circa  $26^\circ \times 26^\circ$ ). Inoltre, analogamente a quanto fatto nell'articolo [29], la matrice di covarianza completa è stata calcolata usando 10 000 simulazioni gaussiane con rumore bianco<sup>5</sup>. Questa approssimazione è ragionevole in quanto il *map making* ottimale è efficiente nel decorrelare il rumore presente nei dati.

L'elemento di differenza tra il metodo di analisi qui presentato e quello adoperato nell'articolo citato è che, sebbene entrambi sfruttino una statistica di  $\chi^2$  per stimare  $f_{NL}$ , il primo confronta i MF di B03 con predizioni analitiche non gaussiane calibrate con simulazioni MC gaussiane, mentre il secondo li confronta i MF medi di 200 simulazioni MC non gaussiane. I limiti pubblicati da [29] sono:

$$-800 < f_{NL} < 1050 \quad (95\% \text{ C.L.}). \quad (4.25)$$

Mentre quelli ottenuti in questa prova sono:

$$-500 < f_{NL} < 1050 \quad (95\% \text{ C.L.}), \quad (4.26)$$

che, non solo sono consistenti con i precedenti, ma risultano ancora più stringenti.

---

<sup>5</sup>La varianza di tale rumore per pixel è data dalla varianza del rumore stimato dai dati, pesata per il numero di osservazioni del pixel

# Conclusioni

Il lavoro da me svolto durante l'attività di tesi è stato dedicato alla ricerca di segnali non gaussiani nella radiazione cosmica di fondo attraverso un'analisi delle mappe di anisotropia di BOOMERanG. Il lavoro ha comportato diversi passaggi. È stata dapprima prodotta una mappa congiunta dei dati acquisiti dall'esperimento durante i voli antartici del 1998 e del 2003. Ciò rappresenta un elemento di novità rispetto ai precedenti lavori ed ha permesso di disporre sia della più ampia mappa di anisotropia per il campo di vista accessibile all'esperimento, sia del migliore rapporto segnale/rumore per i dati. Successivamente, applicando la statistica dei funzionali di Minkowski (MF), è stata effettuata un'analisi morfologica e topologica di tale mappa alla ricerca di segnature non gaussiane. Particolare interesse è stato rivolto a segnature d'origine primordiale la cui ampiezza è parametrizzata dal fattore di accoppiamento non lineare  $f_{NL}$ . Quest'osservabile, infatti, potrebbe permettere di discriminare tra i più di cento candidati modelli inflazionari fino ad oggi elaborati.

La maggior parte dei modelli inflazionari e delle misure eseguite dai moderni esperimenti prevedono un valore molto piccolo per  $f_{NL}$ , ossia piccole deviazioni dalla distribuzione gaussiana nel campo delle anisotropie. Assumendo questa come ipotesi di partenza, ho realizzato un codice numerico che consente di calcolare i contributi non gaussiani ai MF come termini del primo ordine di uno sviluppo perturbativo intorno al limite gaussiano. Sommando queste correzioni al corrispondente contributo gaussiano, è possibile

ricavare delle predizioni analitiche dei MF per un campo debolmente non gaussiano e stimare  $f_{NL}$  dal confronto di quest'ultime con i MF dei dati. È importante osservare che, affinché le mie predizioni analitiche fossero realmente confrontabili con i dati, il contributo gaussiano è stato calcolato come media dei MF di 1000 simulazioni gaussiane dei dati stessi. Tali simulazioni sono state generate attraverso una procedura Monte Carlo opportunamente progettata per replicare tutte le caratteristiche osservative dell'esperimento (quali la strategia di scansione ed il rumore) ed i dettagli del metodo di analisi (quali la procedura di *map making* e la proiezione sul piano tangente delle mappe sferiche). Infine, per valutare il parametro  $f_{NL}$  si è utilizzato un test di significatività statistica (metodo del  $\chi^2$ ) che mette a confronto i MF dei dati con le corrispondenti predizioni analitiche. Si noti che gli intervalli di confidenza dei risultati sono stati stimati per mezzo delle simulazioni gaussiane sopra menzionate. Il vantaggio di usare predizioni analitiche dei MF è rappresentato dal non dover calibrare il metodo statistico con simulazioni non gaussiane dei dati, che soffrono la dipendenza da particolari assunzioni modellistiche e che richiedono tempi di calcolo di gran lunga superiori a quelli necessari per simulazioni gaussiane.

I limiti ottenuti per  $f_{NL}$  nel presente lavoro sono:

$$\begin{aligned} -500 < f_{NL} < 100 & \quad (68\% \text{ C.L.}) \\ -750 < f_{NL} < 400 & \quad (95\% \text{ C.L.}), \end{aligned} \tag{4.27}$$

ciò implica che i dati di BOOMERanG sono consistenti con l'ipotesi di fluttuazioni di densità primordiali distribuite in modo gaussiano ( $f_{NL} = 0$ ). Questi limiti sono più stringenti di quelli fin'ora fissati dagli altri esperimenti suborbitali e dai precedenti studi delle mappe di BOOMERanG, in più possono essere considerati complementari a quelli ottenuti dall'esperimento da satellite WMAP, tenuto conto del miglior rapporto segnale/rumore ad alta risoluzione angolare delle mappe su cui sono stati calcolati.

I limiti ricavati dai moderni esperimenti, però, sono ancora troppo blandi per poter discriminare tra i diversi modelli inflazionari. Tuttavia nel prossimo futuro l'esperimento da satellite Planck, con misure così precise da essere sensibili a  $f_{NL} \sim 5$  o anche meno, potrà forse svelare il meccanismo che ha guidato l'inflazione cosmica e generato i "semi" da cui si sono poi formate le galassie e gli ammassi di galassie che oggi popolano l'Universo.



# Bibliografia

- [1] Arkani-Hamed N., Cheng H. C., Luty M. A. e Mukohyama S., arXiv:hep-th/0312099
- [2] Aghanim N. & Forni O., *A&A*, 347, 409 (1999)
- [3] Bartolo N., Matarrese S. e Riotto A., *Phys. Rev. D*, 64, 083514 (2001)
- [4] Bartolo N., Komatsu E., Matarrese S. & Riotto A., *Phys. Rep.*, 402, 103 (2004)
- [5] Barera A., *Phys. Rev. D*, 54, 2519 (1996)
- [6] Bartelmann M. & Schneider P., *Phys. Rep.*, 340, 291 (2001)
- [7] Barreiro R.B et al., *MNRAS*, 318, 475-481 (2000)
- [8] Barreiro R.B. & Hobson M.P., *MNRAS*, 327, 813, arXiv:astro-ph/0104300 (2001)
- [9] Barreiro R.B., Martínez-González E. & Sanz J.L., *MNRAS*, 322, 411 (2001)
- [10] Bauer C. W., Graesser M. L. & Salem M. P., *Phys. Rev. D*, 72, 023512 (2005)
- [11] Bennett C.L. et al., *ApJS*, 148, 1 (2003)
- [12] Buchbinder E. I., Khoury J. & Ovrut B. A., arXiv:astro-ph/0710.5172 (2007)

- [13] Cabella P. et al., *Phys. Rev. D*, 69, 063007 (2004)
- [14] Cabella P. et al., *MNRAS*, 358, 684 (2005)
- [15] Cayón L. et al., *MNRAS*, 326, 1243 (2001)
- [16] Coles P., Dineen P., Earl J. & Wright D., *MNRAS*, 350, 989 (2004)
- [17] Copi C.J., Huterer D. & Starkman G.D., *Phys. Rev. D*, 70, 043515 (2004)
- [18] Creminelli P., Nicolis A., Senatore L., Tegmark M. & Zaldarriaga M., *JCAP*, 0605, 004 (2006)
- [19] Creminelli P., Senatore L., Zaldarriaga M. & Tegmark M., *JCAP*, 0703, 005 (2007)
- [20] Creminelli P. & Senatore L., *JCAP*, 0711, 10 (2007)
- [21] Crill B. P. et al., arXiv:astro-ph/0206254 (2002)
- [22] Cruz M. et al., *MNRAS*, 356, 29 (2005)
- [23] Cruz M. et al., *MNRAS*, 369, 57 (2006)
- [24] De Bernardis P. et al., *Proc. of the IAU symposium 201: New Cosmological Data and the Values of the Fundamental Parameters*, Manchester, 7-11 Aug. 2000. arXiv:astro-ph/0011468
- [25] De Bernardis P. et al., *Nature*, 404, 955 (2000)
- [26] De Gasperis G. et al., *A&A*, 436, 1159 (2005)
- [27] de Oliveira-Costa A., Tegmark M., Zaldarriaga M. & Hamilton A., *Phys. Rev. D*, 69, 063516 (2004)
- [28] De Troia G. et al., *MNRAS*, 343, 284 (2003)
- [29] De Troia G. et al., *ApJ*, 670, L73 (2007)

- [30] Devlin M.J. et al., ApJ, 509, 69 (1998)
- [31] Dvali G., Gruzinov A. e Zaldarriaga M., Phys. Rev. D, 69, 023505 (2004); Kofman L., arXiv:astro-ph/0303614
- [32] Dvali G., Gruzinov A. e Zaldarriaga M., Phys. Rev. D, 69, 083505 (2004)
- [33] Eriksen H.K., Hansen F.K., Banday A.J., Gorski K.M. & Lilje P.B., ApJ, 605, 14 (2004)
- [34] Frigo M. & Johnson S.G., “*The Design and Implementation of FFTW3*”, *Proceedings of the IEEE* 93 (2), 216231 (2005).
- [35] Gangui A., Lucchin F., Matarrese S. & Mollerach S., ApJ, 430, 447 (1994)
- [36] Gold B. et al., arXiv:astro-ph/0803.0715 (2008)
- [37] Gorski K.M. et al., ApJ, 622, 759 (2005)
- [38] Guth A., Phys. Rev. D, 23, 347 (1981)
- [39] Hadwiger H., *Vorlesungen uber Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie*, Springer Verlag, Berlin (1957)
- [40] Hamazaki T. & Kodama H., Prog. Theor. Phys., 96, 1123 (1996)
- [41] Hanany S. et al., ApJ, 545, L5 (2000)
- [42] Hansen F.K., Cabella P., Marinucci D. & Vittorio N., ApJ, 607, L67 (2004)
- [43] Heavens A.F. & Gupta S., MNRAS, 324, 960 (2000)
- [44] Hinshaw G. et al., ApJ, 148, 135 (2003)
- [45] Hikage C., Komatsu E. e Matsubara T., ApJ, 653, 11-26 (2006)

- [46] Hikage C. et al., arXiv:astro-ph/0802.3677 (2008)
- [47] Kendall M.G. & Stuart A., *The Advance Theory of Statistics*, London: Charles Griffin (1997)
- [48] Knox L., Scoccimarro R. & Dodelson S., *Phys. Rev. Lett.*, 81, 2004 (1998)
- [49] Kofman L. A., *Phys. Lett. B*, 173, 400 (1986)
- [50] Kogut A. et al., *ApJ*, 419, 1 (1993)
- [51] Komatsu E., *The Pursuit of Non-Gaussian Fluctuations in the Cosmic Microwave Background*, Ph.D. Thesis, Tohoku University, arXiv:astro-ph/0206039 (2001)
- [52] Komatsu E., Spergel D.N., *Phys. Rev. D*, 63, 63002 (2001)
- [53] Komatsu E., Wandelt B.D., Spergel D.N., Banday A.J. & Gorski K.M., *ApJ*, 566, 19 (2002)
- [54] Komatsu E. et al., *ApJS*, 148, 119 (2003)
- [55] Komatsu E., Spergel D.N. & Wandelt B.D., *ApJ*, 634, 14 (2005)
- [56] Komatsu E. et al., arXiv:astro-ph/0803.0547 (2008)
- [57] Koyama K. et al., arXiv:astro-ph/0708.4321 (2007)
- [58] Kunz M. et al., *ApJ*, 563, 99 (2001)
- [59] Larson D.L. & Wandelt B.D., *ApJ*, 613, 85 (2004)
- [60] Liguori M. et al., *Phys. Rev. D*, 73, 043505 (2006)
- [61] Linde A. D., *Phys. Lett. B*, 158, 375 (1985)
- [62] Lyth D.H. & Wands D., *Phys. Lett. B*, 524, 5 (2002)

- [63] Lyth D.H. & Riotto A., *Phys. Rept.*, 314, 1 (2003)
- [64] Martinez-Gonzalez E., arXiv:astro-ph/0610162 (2006)
- [65] Martínez-González E., Gallegos J.E., Argueso F., Cayón L. e Sanz J.L., *MNRAS*, 336, 22 (2002)
- [66] Masi S. et al., *Proc. of Rencontres de Moriond - Energy densities in the Universe*, Gennaio 2000. arXiv:astro-ph/0011471
- [67] Masi S. et al., *A&A*, 458, 687-716 (2006)
- [68] Mather J. C. et al., *ApJ*, 354, L37 (1990)
- [69] Mather J.C. et al., *ApJ*, 512, 511 (1999)
- [70] Matsubara T., *ApJ*, 434, L43-L46 (1994)
- [71] Matsubara T., *ApJ*, 584, 1 (2003)
- [72] McEwen J. D., Hobson M. P., Lasenby A. N. & Mortlock D. J., *MNRAS*, 359, 1583 (2005)
- [73] Monteserín C., Barreiro R.B., Sanz J.L. & Martínez-González E., *MNRAS*, 360, 9 (2005)
- [74] Mollerach S. et al., *ApJ*, 525, 17 (1999)
- [75] Natoli P. et al., *A&A*, 372, 346 (2001)
- [76] Ostriker J.P. & Vishniac E.T., *ApJ*, 306, 510 (1986)
- [77] Page L. et al., *ApJS*, 148, 233 (2003)
- [78] Park C.-G., Park C., Ratra B. & Tegmark M., *ApJ*, 556, 852 (2001)
- [79] Polarsky D. & Strarobinsky A. A., *Phys. Rev. D*, 50, 6123 (1994)
- [80] Polenta G. et al., *ApJ*, 572, L27 (2002)

- [81] Prunet S. et al., arXiv:astro-ph/0006052 (2000)
- [82] Rees M.J. & Sciama D.W., *Nature*, 517, 611 (1968)
- [83] Rocha G. et al., *MNRAS*, 351, 769, arXiv:astro-ph/0205155 (2004)
- [84] Sachs R. K. & Wolfe A. M., *ApJ*, 147, 73 (1967)
- [85] Salopek D.S. & Bond J.R., *Phys. Rev. D*, 42, 3936 (1990); 43, 1005 (1991)
- [86] Santalò L. A., *Integral geometry and geometric probability*. Addison-Wesley, Reading, MA (1976)
- [87] Santos M.G. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 88, 241302 (2002)
- [88] Savage R. et al., *MNRAS*, 349, 973 (2004)
- [89] Schneider R., *Ann. Math. pura appl.*, 116, 101 (1978)
- [90] Schmalzing J. & Gorski K.M., *MNRAS*, 297, 355 (1998)
- [91] Seljak U. & Zaldarriaga M., *ApJ*, 469, 437 (<http://www.cmbfast.org>) (1996)
- [92] Silverstein E. & Tong D., arXiv:hep-th/0310221
- [93] Smith S. et al., *MNRAS*, 352, 887 (2004)
- [94] Smoot G. F. et al., *ApJ*, 396, L1 (1992)
- [95] Spergel D. N. & Goldberg D. M., *Phys. Rev. D*, 59, 103001 (1999)
- [96] Spergel D.N. et al., *ApJS*, 148, 175 (2003)
- [97] Spergel D. N. et al., *ApJS*, 170, 377 (2007)
- [98] Sunyaev R.A. & Zeldovich Y.B., *Comm. Astrophys. Space Phys.*, 4, 173 (1972)

- [99] Taylor A.C. et al., MNRAS, 341, 1066 (2003)
- [100] Tenorio L., Jaffe A.H., Hanany S. e Lineweaver C.H., MNRAS, 310, 823 (1999)
- [101] Tomita H., *Formation, Dynamics and Statistics of patterns*, ed. K. Kawasaki, M. Suzuki, A. Onuki, Vol 1 (World Scientific), 113-157 (1990)
- [102] Vilenkin A. & Shellard E.P.S., *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press (1994)
- [103] White N.E., Adv. Space Res., 35, 96 (2005)
- [104] Wiaux Y. et al., Phys. Rev. Lett., 96, 151303 (2006)
- [105] Wollack E.J. et al., AAS, 26, 888 (1994)
- [106] Xu Y. et al., Phys. Rev., D63, 103002 (2001)
- [107] Yadav A. et al., ApJ (in stampa), arXiv:astro-ph/0711.4933 (2007)
- [108] Yadav A.P.S. & Wandelt B.D., arXiv:astro-ph/0712.1148 (2007)



# Ringraziamenti

Potrebbe diventare il capitolo più lungo della mia tesi, ma per quanto difficile sarò breve.

Il primo ringraziamento va al Dott. Paolo Natoli, il mio relatore, per me un “guru” della Cosmologia. La sua infinita disponibilità e la sua costante attenzione mi hanno accompagnato attraverso tutte le tappe di questo percorso scientifico, dalla prima mappa all’ultima riga della tesi.

Vorrei poi ringraziare tutti i componenti del gruppo di Cosmologia di Tor Vergata, nessuno escluso, sono stati preziosi non solo per le loro competenze e la continua disponibilità, ma anche per la simpatia con cui mi hanno accolta e per l’esemplare passione che mettono nel proprio lavoro: fanno quasi venir voglia di fare il ricercatore nella vita! Un grazie particolare va a Giancarlo De Gasperis per non aver mai permesso che un BUG, informatico e non, potesse ostacolare il mio cammino; a Grazia De Troia, per avermi “iniziato” all’arte dell’analisi dati di CMB e a Paolo Cabella per avermi insegnato a guardare in modo propositivo anche ai più insormontabili problemi. Ringrazio poi Julian Borrill e Michela Botti per la loro disponibilità, e quindi rispettivamente il NERSC ed il CASPUR per l’innumerabile tempo di calcolo messo a mia disposizione.

Ringrazio, inoltre, Lorenzo Iafolla, il ricordo di questi lunghi anni universitari sarà sempre legato alla sua persona.

Grazie di cuore ai miei genitori e a mio fratello per il loro costante ed incondizionato appoggio anche dinanzi ad alcune mie scelte, forse, poco

condivisibili. Come non ricordare a questo punto la mia famiglia romana, Patrizia Bruno e Valentina Niola, un vero punto di riferimento in questi movimentati anni. Grazie poi a tutti gli amici, Ponzesi e non, che sono sempre stati una nota felice anche nei momenti di impegno frenetico.

E, *dulcis in fundo*, un grazie indescrivibile al Chiar.mo Dott. Carlo Liberto, ormai un esperto di CMB, per la sua Pazienza, per la sua comprensione, per il suo simpatico supporto, per il suo affetto, per la stima che ha di me e per la sua insaziabile curiosità.