行列模型におけるカイラル・フェルミオンの実現についての研究

2006年3月

佐賀大学大学院工学系研究科
エネルギー物質科学専攻

前田　敏治

概要

IIB 行列模型は超弦理論の非摂動的定式化として提唱され、その証拠も数多く挙げられてきた。さらにこの模型は対称性が高くパラメータにも依存していないため、最も基本的な理論としてふさわしいと思われている。しかし、この理論が本当に我々の住む世界を記述するためには、低エネルギー極限で素粒子の標準模型を再現しなければならない。よく知られているように、標準模型はカイラル・フェルミオンを含む理論である。つまり、我々は IIB 行列模型から 4 次元でのカイラル・フェルミオンを実現させる必要がある。そのため、本稿では 4 次元時空以外の余剰次元空間に非自明なインデックスを実現させることを考える。特にその余剰次元空間が非可換な 2 次元球面を考え、その上で明白にインデックスを与えるディラック演算子を構成し、トポロジカルに非自明な配位に対してインデックスがゼロでない値を持つことを見る。さらにそのディラック演算子のスペクトルを求め、実際にカイラル・ゼロモードが現れることを確かめる。そして非可換 2 次元球面を古典解として持つヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型で、位相的に自明な配位より非自明は配位の方がより安定であることを示すことで、インデックスがダイナミカルに実現することを示す。

目 次

1 導入

現在、知られている素粒子間に働く基本的相互作用には電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用と重力相互作用がある。最初の電磁、弱、強の３つの相互作用については、現在ではほぼ解明され、それは標準模型と呼ばれるゲージ場の量子論という一つの枠組みを用いて、10^2Gev 程度まで非常に良い精度で記述されることが分かっている。一方、重力は古典論において、Einstein の一般相対論で完全に記述されている。しかし、量子場の理論の枠組みの中に重力を他の相互作用とともに含めようとすると、破綻してしまうことが知られている。つまり、場の量子論において極めて深刻な重力の紫外発散を生じてしまう。そして発散がきつすぎて繰り込みができなくなってしまうのである。

現時点で、重力を含み、そのやっかいな難問を取り除いたもので最も有力だと思われている量子理論は、弦理論である。弦理論は点粒子ではなく、基本粒子が 1 次元にひろがったひも (弦) の力学を扱う理論である。そのひもの長さは $l_p = 10^{-33}cm$ 程度である。つまりプランクスケールの長さをもつ。弦理論はその弦の振動モードに、ゲージ粒子だけでなくグラビトンを含んだ理論である。振動モードには無限の質量レベルがあり、開弦のゼロ質量モードがゲージ粒子とみなされ、閉弦のゼロ質量モードがスピン 2 のグラビトンを与えると考えられる。この意味においても、弦理論は低エネルギー極限で、標準模型だけでなく重力理論も含んだ理論であると思われている。さらに弦理論は標準模型のゲージ群、クォークやレプトンの世代数や質量そして時空の 4 次元性をも説明できる可能性を持っている。この弦理論に、超対称性をもたせたのが超弦理論である。現在のところ弦理論は、摂動論によってのみ成功している。この摂動論というのは、運動を比較的簡単に解ける部分と、補正部分に分け、摂動展開で補正項を求める計算手法であるが、この摂動論をつかって弦理論の真空を調べると問題が生じてしまうことが分かった。超弦理論は、平坦 10 次元ではタイプ I, タイプ IIA, タイプ IIB, ヘテロ $SO(32)$, ヘテロ $E_8 \times E_8$ の 5 種類の真空が存在する。しかし我々の時空は 4 次元なので、残りの余分な 6 次元はコンパクト化されていると思われる。そのような 10 次元から 4 次元へコンパクト化した場合では、無数の弦の真空が考えられる。つまり、摂動論の範囲では無数の真空が縮退していて、どの真空が実際に選

ばれるかは分からない。つまり、超弦理論は我々の 4 次元時空の世界を予言する能力がないことを意味する。しかし非摂動効果を取り入れると、そのような無数の真空がトンネル効果によって互いに結びついており、現実の真空はそれらの重ね合わせに近いものだと考えられる。よって、真空を決定し、相互作用、物質場そして我々の住む世界の次元を決定するためには、もう 1 つ上の理論を作ることが必要になってくる。つまり、弦理論を摂動によらず構成的に定義することが、今の弦理論の最大の課題である。

1990 年の半ばになって、弦理論の非摂動的な側面が理解されてきた。まず D-ブレインと呼ばれる弦理論におけるソリトン的対象物が発見された。さらに超重力理論の研究などからも双対性が発見された。1 つは T-双対性と呼ばれるもので、これはコンパクト化における大きな半径と小さな半径との間の双対性である。2 つ目は S-双対性と呼ばれるもので、強結合と弱結合と関係する。平坦 10 次元時空で定義される 5 つのタイプの超弦理論とコンパクト化されたモデルは、これらの T-双対性と S-双対性を通して関係することが解ってきた。これにより、それらの超弦理論の真空はある 1 つの基本的な理論の異なった真空を見ているにすぎない、つまりそれらの理論はある 1 つの基本的な理論のある極限で得られるものであることが分かってきた。

さらに、行列模型を用いて超弦理論の非摂動的定式化がなされた。1996 年に、10 次元の $\mathcal{N}=1$ の超対称 $U(N)$ ヤン・ミルズ理論を 1 次元に次元をおとすことで行列模型が定義された [1]。この行列模型はタイプ IIA 超弦理論と関係する。同じ年に、タイプ IIB 超弦理論と関係する IIB 行列模型が提案された [2]。その模型は 10 次元の $\mathcal{N}=1$ の超対称 $U(N)$ ヤン・ミルズ理論のゼロ体積極限（形式的に 1 辺の長さがゼロの周期的な箱に入れたもの）で得られる [3]。その他、超弦理論の構成的定式化の候補として提唱された行列模型はいくつかあるが、ここではそれらのうちで最も高い対称性と美しい形を持つ IIB 行列模型について見ることにする。

その IIB 行列模型の作用は

$$S_{\text{IIBMM}} = -\frac{1}{g^2}Tr\Big(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]\Big), \tag{1.1}$$

で与えられる。ここで A_μ と ψ は $N \times N$ のエルミート行列で、$\mu = 0 \sim 9$ の値

をとり、A_μ は 10 次元ベクトル、ψ は 10 次元のマヨラナ・ワイルスピノールである。この模型は、IIB 型超弦理論の構成的定義を与えると考えられているが、その根拠と特徴をいくつか挙げておく。

１）この模型は、IIB 型の弦が持つべき 10 次元の $\mathcal{N}=2$ という大きな超対称性をもっている。これは、理論が重力を含んでいることを示唆している。

２）作用（1.1）が弦理論の世界面を行列正則化したものになっている。

３）この理論が重力をきちんと含んでいる。作用（1.1）には一見重力場が入っていないように見えるが、それは見かけ上のことで、D-ブレイン間の相互作用を見ると、重力が再現している事が分かる。

４）IIB 行列模型でのウィルソンループを弦の生成、消滅演算子とみなし、そのウィルソンループが満たすループ方程式から IIB 型超弦理論のライトコーンゲージにおける弦の場の理論 [4] でのハミルトニアンが導ける [5]。

５）非摂動効果の記述として、理論から現実の世界が説明されようとしている。例えば、時空間の構造を理解するため、行列の対角成分について解析することで、時空の４次元性を大いに示唆していることがいえる [6, 7, 8]。

６）非可換幾何学と関係する。現在、超弦理論において B 場が背景に存在するとき時空が非可換になることが知られており、D-ブレイン上の有効理論は非可換時空におけるヤン・ミルズ理論になっている [9]。IIB 行列模型においても、古典解の周りで展開することによって非可換ヤン・ミルズ理論になることが示された [10]。

以上のような理由から IIB 行列模型が超弦理論の構成的定式化になっていると思われる。

さらにこの理論の特徴をいくつか挙げる。この理論は 0 次元まで次元をおとしたことにより、力学変数が関数ではなく $N\times N$ のエルミート行列になっており、作用関数は行列の交換子とトレースからだけでできている。そのため、経路積分がきちんと定義でき、積分を完全に遂行できる可能性がある。また、タイプ IIB 型の超対称性代数から行列の固有値が時空を構成すると思われるので、時空の自由度までも行列の中に力学変数として入っていることが言え、コンパクト化などの時空のダイナミクスを解析できる可能性もある。さらにこの IIB 行列模型が持

つ対称性は$U(N)$と$SO(10)$さらにタイプIIB型の超対称性という非常に高い対称性をもち、さらに、この理論には任意パラメータが無いことからも、最も基本的な理論にふさわしいと思われる。

このようにIIB行列模型は超弦理論の非摂動的定式化として多くの証拠が挙げられ、最も基本的な理論としてふさわしいと思われるが、まだいくつかの解決すべき問題がある。例えば、IIB行列模型は、時空や物質が行列の中に埋め込まれていることは解ってきたが、それらがどのように行列の中に埋め込まれているのかを明らかにする必要がある。つまりメトリックやトポロジーがどのように実現されるのかを見なければばならない。そのためにはまず、曲がった空間上で行列模型を考え、そのダイナミクスを調べる必要がある。また、重力を含む統一理論として有望な超弦理論の非摂動定式化として与えられたIIB行列模型がこのように、対称性が高くシンプルで、パラメータのない理論だとしても、やはりこの理論から我々の住む4次元時空の世界を正確に予言できなければ意味がない。そのためには、低エネルギーで知られている実験データを再現する必要がある。つまり、現在よく知られている素粒子の標準模型を低エネルギーの有効理論として、この理論から再現しなければばならない。よく知られているように、標準模型はカイラル・フェルミオンを含む。つまり電弱ゲージボゾンが左巻きのカイラル・フェルミオンとのみ結合している。そのため、このIIB行列模型から4次元でのカイラル・フェルミオンを実現させる必要がある。

本稿の主な目的はこのIIB行列模型から我々の住む4次元時空でのカイラル・フェルミオンを実現させることである。そのためにはまずIIB行列模型が何らかのメカニズムでダイナミカルに4次元にコンパクト化され、そして、そのコンパクト化された理論がカイラルな理論になっていなければばならない。しかし、現在ではIIB行列模型から4次元時空が好まれそうだということは示されてきたが、どのようにコンパクト化されるのかということはまだ解っていない。今のところは、そのコンパクト化のメカニズムやどのようにコンパクト化されるのかということに対して知見を得るためにも、[11]や[12]などではまず手でコンパクト化することを考えている。また、[13]では、カイラル・フェルミオンを実現させるためにオービフォールド上で行列模型を定式化している。

しかし、やはりIIB行列模型からダイナミカルに4次元時空でのカイラル・フェルミオンを実現させたい。そのためには、我々の住む4次元時空以外の余剰次元空間に非自明なインデックスを実現させる必要がある。ここでのインデックスとはディラック演算子のゼロモードでカイラリティが正と負の状態数の差で定義されるものである：

$$\mathrm{Index}(D) \equiv (n_+ - n_-). \tag{1.2}$$

ただし、$n_\pm$ はディラック演算子 D の固有値がゼロでカイラリティが $\pm$ の固有状態の数を表す。

ここで、簡単に余剰次元空間でのインデックスが、4次元時空でのカイラル・フェルミオンを実現させる理由について述べる。今、10次元でのフェルミオン作用を $S_F^{(10)} = -\frac{1}{g^2} Tr\left(\frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu \psi\right)$ と書く。ただし、$\mu = 0 \sim 9$ である。ここで次のようにこの10次元のディラック演算子 $\Gamma^\mu D_\mu$ を4次元部分 $\gamma^a D_a (a = 0 \sim 3)$ と6次元部分のディラック演算子 $\gamma^i D_i (i = 5 \sim 9)$ に分けて考える。その6次元部分のディラック演算子 $\gamma^i D_i$ の固有値は4次元に対する有効作用を考えると、4次元での質量 m_4 とみなせる：

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu D_\mu \psi &= (\gamma^a D_a + \gamma^i D_i)\psi, && (1.3) \\ &\longrightarrow (\gamma^a D_a + m_4)\psi. && (1.4) \end{aligned}$$

よって、6次元の余剰次元でカイラル・ゼロモードがあれば4次元でのカイラル・フェルミオンを実現させることができるのである。余剰次元空間は実際にはどんな空間であってもよい。例えば、その余剰次元空間が6次元のカラビヤウ空間のような場合でもよいし、6次元すべてが無限に伸びていてもよいし、一部分がコンパクトな多様体になっていてもよい。ここでは、トイモデルとしてその余剰次元空間が非可換な2次元球面 [14] を考え、それが6次元の中の3次元部分に埋め込まれた場合を考える。つまり、我々がここでやろうとしていることは、10次元的拡がりを持つIIB行列模型において、4次元的に拡がった空間と残りの6次元的に拡がった空間に分け $(10 = 4+6)$、4次元部分が我々の住む4次元の世界だと思い、6次元部分に埋め込まれた非可換2次元球面を余剰次元空間だと思う。そして、その余剰次元空間にインデックスを持たせることで、我々の4次元時空におけるカイラル・フェルミオンを実現させようということである。そこで、本稿

では非可換な2次元球面を古典解として持つ模型を考える。その模型は

$$S = \frac{1}{g^2} Tr(-\frac{1}{4}[A_i, A_j][A^i, A^j] + \frac{2}{3} i\alpha\epsilon_{ijk} A^i A^j A^k) + S_F. \tag{1.5}$$

で与えられる [15]。この模型はヤン・ミルズ項にチャーン・サイモン項を加えた理論である。また、S_F はフェルミオン作用をあらわし、添え字 i, j, k は $1, 2, 3$ の値をとる。この模型はトイモデルであるが、IIB 行列模型からどのように空間がコンパクト化されるのか、そしてどのように 4 次元でのカイラル・フェルミオンが実現されるのかということに対する知見を得るためにも、まずこの模型を考えることは重要である。また、この模型には現実性もある。この模型のチャーン・サイモン項は IIB 行列模型の有効作用として得られる可能性がある。[16] では、反対称 RR 場が背景にあるときに D-ブレイン作用の有効ポテンシャルとしてチャーン・サイモン的な項が得られることを示している。また [17] では IIB 行列模型を $(N+1)$D-インスタントンに対する有効作用だと思い、1 つの D-インスタントンを積分することで ND-インスタントンに対する有効作用を求めたとき、その D-インスタントンが反対称テンソル場の波動関数を持つときには、チャーン・サイモン的な項が得られ、非可換球面が有効作用の運動方程式の解として得られることを示している。

また、フェルミオン作用 S_F も、コンパクト化の仕方が解っていない現段階では、コンパクト化によりどのような形になるかはまだ解らない。ディラック演算子を IIB 行列模型の有効作用としてダイナミカルに導出することは今後の課題にまわす。ここでは、まず 4 次元でのカイラル・フェルミオンを実現させたいので、インデックスを明白に出すディラック演算子を構成する。現在までのところ、非可換な 2 次元球面において 3 つのタイプのディラック演算子が構成されている：D_{WW}[18]、D_{GKP}[19, 15]、D_{GW}[20]。この 3 つのタイプのディラック演算子は対称性とダブラーの有無から決められている。D_{WW} はカイラル対称性を持つが、ダブラーのためインデックスはいつでもゼロになる。D_{GKP} はダブラーはないがカイラル対称性が明白でないためインデックスが見にくい形になっている。そのため、インデックスを明白に与える定式化が必要である。[20] では格子ゲージ理論で発展したギンスパーグ・ウィルソン (GW) 関係式 [21] を行列模型に応用し、行列模型において任意の多様体上で、一般のゲージ場と結合した形でインデック

スを明白に与えるディラック演算子 D_{GW} を構成している。さらに [22] では、行列模型において非自明な位相不変量を持つ配位としてトフーフト・ポリヤコフ (TP) モノポールの配位 [23, 22] が構成された。本稿では、ディラック演算子のスペクトルを求め、実際にゼロモードが現れることを確かめ、カイラル・ゼロモードの状態数を数えることでインデックス定理と矛盾がないことを確かめる。そして、(1.5) の行列模型で、インデックスがダイナミカルに実現することを示す [24]。この結果から、我々は IIB 行列模型から 4 次元のカイラル・フェルミオンが実現できる可能性があることを主張する。

2 章では IIB 行列模型についてのレビューを行い、IIB 行列模型が超弦理論の非摂動的定式化である証拠を挙げ、IIB 行列模型の特徴について説明する。3 章では余剰次元空間として非可換 2 次元球面を考え、その上で明白にインデックスを出すディラック演算子 D_{GW} の構成方法を説明する。そして、ディラック演算子 D_{GW} のインデックスがトポロジカル・チャージと関係することをみることで、インデックス定理が成り立つことをみる。そして、トポロジカルに非自明な配位に対して、トポロジカル・チャージがゼロでない値を持つことをみる。4 章では実際にそのディラック演算子 D_{GW} のスペクトルを計算し、カイラル・ゼロモードが出ていることを確かめ、その数を数えることでインデックス定理と矛盾していないことを確かめる。さらに、そのカイラル・ゼロモードの具体形も求める。5 章では位相的に自明な配位より、非自明な配位のほうがより安定であることを示すことで、インデックスがダイナミカルに生成することをみる。最後の 6 章はまとめと今後の展望について述べる。

2　IIB 行列模型

IIB 行列模型は超弦理論の非摂動的定式化として提案された [2]。この章では IIB 行列模型についての簡単なレビューを行いながら、IIB 行列模型の特徴と超弦理論の非摂動的定式化になっている証拠について述べる。まず、2.1 では IIB 行列模型の特徴として、この模型が持つ対称性とパラメータ非依存性について説明する。2.2 では超弦理論の非摂動的定式化の証拠の 1 つとして、IIB 行列模型が超弦理論を記述する $\mathcal{N}=2$ の時空の超対称性を持つグリーン・シュワルツ作用を行列正則化して得られることを示す。2.3 では、非摂動的定式化の証拠の 2 つ目として、超対称性を部分的に保つ解に対する有効作用を計算し、それが超弦理論側のそれに対応するものと一致することを見る。そして IIB 行列模型は弦の多体系を記述していることを説明する。2.4 では非摂動効果として時空の 4 次元性についてみる [6, 7, 8]。最後に 2.5 では IIB 行列模型は非可換ヤン・ミルズ理論を含むことを説明する [10]。

2.1　対称性とパラメータ非依存性

IIB 行列模型は導入の（1.1）であげたように

$$S_{\text{IIBMM}} = -\frac{1}{g^2}Tr\Big(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]\Big), \tag{2.1}$$

で与えられる。この模型は様々な対称性を持つ。まず、すぐわかるように $SO(10)$ のローレンツ対称性を持つ。またこの模型は次のような $SU(N)$ ゲージ対称性を持っている：

$$A_\mu \to U A_\mu U^\dagger, \quad \psi \to U\psi U^\dagger. \tag{2.2}$$

これはこの模型がトレースで書かれていることからすぐに分かる。次にこの作用 S_{IIBMM} が $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つことを説明する。その対称性は

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\psi &= \frac{i}{2}[A_\mu, A_\nu]\Gamma^{\mu\nu}\epsilon, \\ \delta^{(1)}A_\mu &= i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\psi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

と

$$
\begin{aligned}
\delta^{(2)}\psi &= \xi, \\
\delta^{(2)}A_\mu &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

である。作用 S_{IIBMM} は 10 次元の超対称ヤン・ミルズ理論を 0 次元に落としたものになっている。よってここにあげた対称性は、超対称ヤン・ミルズ理論の $\mathcal{N}=1$ の超対称性の 0 体積極限になっていることは分かる。ここで、対称性（2.3）と（2.4）が本当に作用 S_{IIBMM} の $\mathcal{N}=2$ の超対称性であることを確かめる。そのため、これらの交換関係を調べる。まず $\delta^{(1)}$ 同士の交換関係は、ψ の運動方程式とゲージ対称性を使うことで

$$
\begin{aligned}
(\delta^{(1)}_{\epsilon^1}\delta^{(1)}_{\epsilon^2} - \delta^{(1)}_{\epsilon^2}\delta^{(1)}_{\epsilon^1})\psi &= 0, \\
(\delta^{(1)}_{\epsilon^1}\delta^{(1)}_{\epsilon^2} - \delta^{(1)}_{\epsilon^2}\delta^{(1)}_{\epsilon^1})A_\mu &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

となる。また $\delta^{(2)}$ 同士はすぐわかり

$$
\begin{aligned}
(\delta^{(2)}_{\xi^1}\delta^{(2)}_{\xi^2} - \delta^{(2)}_{\xi^2}\delta^{(2)}_{\xi^1})\psi &= 0, \\
(\delta^{(2)}_{\xi^1}\delta^{(2)}_{\xi^2} - \delta^{(2)}_{\xi^2}\delta^{(2)}_{\xi^1})A_\mu &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

となる。あとは $\delta^{(1)}$ と $\delta^{(2)}$ の交換関係であるがそれは

$$
\begin{aligned}
(\delta^{(1)}_{\epsilon}\delta^{(2)}_{\xi} - \delta^{(2)}_{\xi}\delta^{(1)}_{\epsilon})\psi &= 0, \\
(\delta^{(1)}_{\epsilon}\delta^{(2)}_{\xi} - \delta^{(2)}_{\xi}\delta^{(1)}_{\epsilon})A_\mu &= -i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\xi,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

となる。ここで次のような線形結合をとる。

$$
\begin{aligned}
\tilde{\delta}^{(1)} &= \delta^{(1)} + \delta^{(2)}, \\
\tilde{\delta}^{(2)} &= i(\delta^{(1)} - \delta^{(2)}).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

そうすると、

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\delta}^{(1)}_{\epsilon}\tilde{\delta}^{(1)}_{\xi} - \tilde{\delta}^{(1)}_{\xi}\tilde{\delta}^{(1)}_{\epsilon})\psi &= 0, \\
(\tilde{\delta}^{(1)}_{\epsilon}\tilde{\delta}^{(1)}_{\xi} - \tilde{\delta}^{(1)}_{\xi}\tilde{\delta}^{(1)}_{\epsilon})A_\mu &= -2i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\xi, \\
(\tilde{\delta}^{(2)}_{\epsilon}\tilde{\delta}^{(2)}_{\xi} - \tilde{\delta}^{(2)}_{\xi}\tilde{\delta}^{(2)}_{\epsilon})\psi &= 0, \\
(\tilde{\delta}^{(2)}_{\epsilon}\tilde{\delta}^{(2)}_{\xi} - \tilde{\delta}^{(2)}_{\xi}\tilde{\delta}^{(2)}_{\epsilon})A_\mu &= -2i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\xi, \\
(\tilde{\delta}^{(1)}_{\epsilon}\tilde{\delta}^{(2)}_{\xi} - \tilde{\delta}^{(2)}_{\xi}\tilde{\delta}^{(1)}_{\epsilon})\psi &= 0, \\
(\tilde{\delta}^{(1)}_{\epsilon}\tilde{\delta}^{(2)}_{\xi} - \tilde{\delta}^{(2)}_{\xi}\tilde{\delta}^{(1)}_{\epsilon})A_\mu &= 0, \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

のように対角化される。これから A_μ の固有値を時空座標と解釈すると、時空の並進になっている。これはまさに $\mathcal{N}=2$ の超対称性代数である。よって、これらは $\mathcal{N}=2$ の超対称性になっている。それは、理論が重力を含んでいることを示唆している。また、このIIB行列模型 S_{IIBMM} は、次の節で述べるように超弦理論の $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つグリーン・シュワルツ型作用 S_{GS} を行列正則化することで与えられるが、そのグリーン・シュワルツ型作用 S_{GS} が持つ $\mathcal{N}=2$ の超対称性を、IIB行列模型は持っている。そのことからも、IIB行列模型は超弦理論を強く示唆している。

さらにIIB行列模型が持つ特徴としてパラメータ非依存性がある。作用 S_{IIBMM}（2.1）を見るとトレースの前に $1/g^2$ が掛かっていて、パラメータに依存しているようにみえるが、これは次のような場の再定義により1にできる：

$$A_\mu \longrightarrow g^{1/2}A_\mu, \qquad (2.10)$$

$$\psi \longrightarrow g^{3/4}\psi. \qquad (2.11)$$

これらの特徴により、IIB行列模型は統一理論として最も基本的な理論であると思われるのである。

2.2　行列正則化とグリーン・シュワルツ型作用

ここでは、IIB 行列模型が超弦理論の非摂動的定式化になっている証拠の 1 つとして、IIB 行列模型が $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つシルトゲージのグリーン・シュワルツ型作用 S_{GS} を行列正則化したものになっていることを説明する。行列正則化は 2 次元面上の関数に対して適用できる。超弦理論は空間 1 次元に伸びた対象物で、その軌跡である世界面は 2 次元面となる。つまり、その 2 次元の世界面上での時空を表す関数と行列に対応をつけることで行列正則化する。その行列正則化は関数側のポアソン括弧を行列の交換子にマップするので、まず超弦理論の作用をポアソン括弧の形に変換し、それを行列正則化する。そして、行列正則化された作用が IIB 行列模型の有効作用として与えられることを見ることで、IIB 行列模型が超弦理論の行列正則化されたものになっていることをみる。2.2.1 ではその行列正則化について説明し、2.2.2 ではその行列正則化を用いて、超弦理論のグリーン・シュワルツ型作用 S_{GS} を行列にマップすることを考える。

2.2.1　行列正則化

行列正則化は 1982 年に J. Hoppe によってボゾン的な膜 (空間 2 次元+時間 1 次元に拡がった対象物) の正則化方法として初めて導入された [25]。それはボゾン的な膜上の関数を有限自由度の行列によって近似するという正則化の方法である。つまり、行列正則化とは空間上の関数と有限な $N \times N$ 行列とに対応をつけるものである。具体的には 2 次元面上の関数側で、関数の完全系をつくり、それらの間にポアソン括弧を導入し、構造定数 g を決める。同様に行列側でも完全系を作り交換子により構造定数 G を決めてやる。そして関数側と行列側との構造定数が $\mathcal{O}(1/N)$ で一致することをみる。つまり $N \to \infty$ で両者の構造定数が一致することをみることで、関数と行列に対応をつける。

ここでは具体的に考える空間が S^2 の場合について行列正則化をみる。S^2 は $\mathbb{R}^3(x_i = 1,2,3)$ を球面に制限したもので、

$$(x_i)^2 = \rho^2, \tag{2.12}$$

という関係式で与えられる。ただし、ρ は球面の半径を表す。

まず完全系を作るために、球面上の関数を球面調和関数によって展開する：

$$a(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\Omega), \tag{2.13}$$

ただし

$$Y_{lm} = \rho^{-l} \sum_{a_1, a_2, \cdots, a_l} f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} x_{a_1} \cdots x_{a_l}, \tag{2.14}$$

は球面調和関数で、$f_{a_1, a_2, \cdots a_l}$ はトレースレスな対称テンソルである。トレースレス条件は $(x_i)^2 = \rho^2$ からくる。球面調和関数の規格化は

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} Y^*_{l'm'} Y_{lm} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta Y^*_{l'm'} Y_{lm} = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \tag{2.15}$$

によって決まる。次に、これらの関数の間のポアソン括弧を次のように定める。

$$\{a, b\} \equiv \rho \epsilon_{ijk} x_i (\partial_j a)(\partial_k b). \tag{2.16}$$

このポアソン括弧を用いて、構造定数を

$$\{Y_{lm}, Y_{l'm'}\} \equiv \rho g_{lm, l'm', l''m''} Y_{l''m''}, \tag{2.17}$$

によって定める。ただし、

$$\{x_a, x_b\} = \rho \epsilon_{abc} x_c, \tag{2.18}$$

である。

一方、非可換球面の座標は、

$$\hat{x}_i = \alpha \hat{L}_i, \tag{2.19}$$

によって定義される。ただし α は非可換パラメーターで、$\hat{L}_i$ は $SU(2)$ 代数の N 次元既約表現行列である：

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] \;=\; i\epsilon_{ijk} \hat{L}_k. \tag{2.20}$$

そして、その x_i は次の関係を満たす：

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\alpha \epsilon_{ijk} \hat{x}_k, \\ (\hat{x}_i)^2 &= \alpha^2 \frac{N^2 - 1}{4} \mathbf{1}_N \equiv \rho^2 \mathbf{1}_N. \end{aligned} \tag{2.21}$$

非可換球面上の行列は非可換球面調和関数 $\hat{Y}_{lm}$ によって次のように展開できる：

$$\hat{a} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} \hat{Y}_{lm}. \tag{2.22}$$

$\hat{Y}_{lm}$ は $N \times N$ 行列で、

$$\hat{Y}_{lm} = \rho^{-l} \sum_{a} f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} \hat{x}_{a_1} \cdots \hat{x}_{a_l}, \tag{2.23}$$

によって定義される。ただし、角運動量 l には $l = N-1$ の上限がある。この非可換球面調和関数の規格化は

$$\frac{1}{N} Tr(\hat{Y}^{\dagger}_{l'm'} \hat{Y}_{lm}) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \tag{2.24}$$

によって与えられる。次に行列側の構造定数を次のように定義する：

$$[\hat{Y}_{lm}, \hat{Y}_{l'm'}] \equiv i\alpha G_{lm,l'm',l''m''} \hat{Y}_{l''m''}. \tag{2.25}$$

ここで、関数側のポアソン括弧 (2.17) の左辺を具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned}
\{Y_{lm}, Y_{l'm'}\} &= \{\rho^{-l} f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} x_{a_1} \cdots x_{a_l}, \rho^{-l'} f^{l'm'}_{b_1, b_2, \cdots, b_{l'}} x_{b_1} \cdots x_{b_{l'}}\} \\
&= \rho^{-(l+l')} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{l'} f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} f^{l'm'}_{b_1, b_2, \cdots, b_{l'}} \\
&\quad x_{a_1} \cdots x_{a_{\alpha-1}} x_{b_1} \cdots x_{b_{\beta-1}} \{x_{a_\alpha}, x_{a_\beta}\} x_{b_{\beta+1}} \cdots x_{b_{l'}} x_{a_{\alpha+1}} \cdots x_{a_l} \\
&= \rho^{-(l+l')+1} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{l'} f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} f^{l'm'}_{b_1, b_2, \cdots, b_{l'}} \epsilon_{a_\alpha b_\beta c} \\
&\quad x_{a_1} \cdots x_{a_{\alpha-1}} x_{b_1} \cdots x_{b_{\beta-1}} x_c x_{b_{\beta+1}} \cdots x_{b_{l'}} x_{a_{\alpha+1}} \cdots x_{a_l} \\
&= \rho g_{lm,l'm',l''m''} Y_{l''m''},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

となる。ただし、3 行目から 4 行目へは $f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} f^{l'm'}_{b_1, b_2, \cdots, b_{l'}} \epsilon_{a_\alpha b_\beta c}$ を完全対称トレース化した。同じように、行列側で交換子 (2.25) の左辺を具体的に計算すると、

$$\begin{aligned}
[\hat{Y}_{lm}, \hat{Y}_{l'm'}] &= [\rho^{-l} f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} \hat{x}_{a_1} \cdots \hat{x}_{a_l}, \rho^{-l'} f^{l'm'}_{b_1, b_2, \cdots, b_{l'}} \hat{x}_{b_1} \cdots \hat{x}_{b_{l'}}] \\
&= \rho^{-(l+l')} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{l'} f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} f^{l'm'}_{b_1, b_2, \cdots, b_{l'}} \\
&\quad \hat{x}_{a_1} \cdots \hat{x}_{a_{\alpha-1}} \hat{x}_{b_1} \cdots \hat{x}_{b_{\beta-1}} [\hat{x}_{a_\alpha}, \hat{x}_{b_\beta}] \hat{x}_{b_{\beta+1}} \cdots \hat{x}_{b_{l'}} \hat{x}_{a_{\alpha+1}} \cdots \hat{x}_{a_l} \\
&= i\alpha \rho^{-(l+l')} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{l'} f^{lm}_{a_1, a_2, \cdots, a_l} f^{l'm'}_{b_1, b_2, \cdots, b_{l'}} \epsilon_{a_\alpha b_\beta c} \\
&\quad \hat{x}_{a_1} \cdots \hat{x}_{a_{\alpha-1}} \hat{x}_{b_1} \cdots \hat{x}_{b_{\beta-1}} \hat{x}_c \hat{x}_{b_{\beta+1}} \cdots \hat{x}_{b_{l'}} \hat{x}_{a_{\alpha+1}} \cdots \hat{x}_{a_l} \\
&= i\alpha G_{lm,l'm',l''m''} \hat{Y}_{l''m''} + \mathcal{O}(\frac{1}{N}),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

となる。関数のときと同様 3 行目から 4 行目で、$f^{lm}_{a_1,a_2,\cdots,a_l} f^{l'm'}_{b_1,b_2,\cdots,b_{l'}} \epsilon_{a_\alpha b_\beta c}$ を完全対称トレース化したわけだが、行列のときには、$\hat{x}_i$ は互いに交換しないので、$\mathcal{O}(1/N)$ の付加的な交換子を含む項が出る。よって、(2.26) と (2.27) を比べることで、

$$g_{lm,l'm',l''m''} = G_{lm,l'm',l''m''} + \mathcal{O}(1/N), \tag{2.28}$$

となり、$N \to \infty$ で両方の構造定数が一致する。よって構造定数のこの関係より、空間上の関数と行列との間に関係があることがわかる。

このことから N が大きな値に対して、ポアソン括弧を交換子に、関数の積分を行列のトレースに置き換えることで関数から行列にマップすることができる：

$$\{a, b\} \quad \longrightarrow \quad -i\frac{N}{2}[\hat{a}, \hat{b}], \tag{2.29}$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} ab \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{N} Tr(\hat{a}\hat{b}). \tag{2.30}$$

また、このような正則化は任意のジーナスを持つ 2 次元面上でもなされている [26]。よって、この正則化を使うことで超弦理論の世界面を記述する関数を行列にマップすることができる。

2.2.2 グリーン・シュワルツ作用の行列正則化

この副節では、シルトゲージの IIB 型グリーン・シュワルツ作用（シルト作用）S_{Schild}[27] を前副節で述べたマップを使い、行列正則化する。そして、その行列正則化された作用 S'_{IIBMM} が IIB 行列模型 S_{IIBMM} の有効作用として与えられることを見ることで、IIB 行列模型が超弦理論のグリーン・シュワルツ作用 S_{GS} を行列正則化することで得られることを述べる。まず、グリーン・シュワルツ作用 S_{GS} がマップしやすいポアソン括弧の形で書けるシルト作用 S_{Schild} と古典的に等しいことを説明する。では、南部・後藤型の IIB 型弦のグリーン・シュワルツ作用 S_{GS} から始める。その作用は

$$\begin{aligned} S_{GS} = -T \int d^2\sigma \Bigg(& \sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2} + i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_b \theta^1 + \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_b \theta^2) \\ & + \epsilon^{ab} \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_a \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_b \theta^2 \Bigg), \end{aligned} \tag{2.31}$$

ここで

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab}\Pi_a^\mu \Pi_b^\nu, \tag{2.32}$$

$$\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_a \theta^1 + i\bar{\theta}^2 \Gamma^\mu \partial_a \theta^2. \tag{2.33}$$

である。ただし θ^1、θ^2 は 10 次元の同じカイラリティをもったマヨラナ・ワイルスピノールである。この作用 S_{GS} は、次の $\mathcal{N}=2$ の超対称性（$SUSY$）

$$\begin{aligned}
\delta_{SUSY}\theta^1 &= \epsilon^1, \\
\delta_{SUSY}\theta^2 &= \epsilon^2, \\
\delta_{SUSY}X^\mu &= i(\bar{\epsilon^1}\Gamma^\mu\theta^1 - \bar{\epsilon^2}\Gamma^\mu\theta^2),
\end{aligned} \tag{2.34}$$

と world volume のゲージ対称性である κ - 対称性

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa\theta^1 &= \alpha^1, \\
\delta_\kappa\theta^2 &= \alpha^2, \\
\delta_\kappa X^\mu &= i\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\alpha^1 - i\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\alpha^2,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

を保つ。ただし

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= (1+\tilde{\Gamma})\kappa^1, \\
\alpha^2 &= (1-\tilde{\Gamma})\kappa^2, \\
\tilde{\Gamma} &= \frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2}}\Sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

である。ϵ^1, ϵ^2 は σ に依存しない、グローバルな定数スピノールで、κ^1, κ^2 は σ に依存した局所フェルミオン的パラメータである。さらに $\tilde{\Gamma}^2 = 1$ なので $\tilde{\Gamma}$ はプロジェクションとしてはたらく。よって、θ^1 と θ^2 自由度の半分は余分で、$\theta^1 = \theta^2 = \psi$ を課すことでゲージ固定できる。

このゲージ固定で（2.33）の 2 項目と 3 項目が消え、（2.31）の 2 項目の丸括弧の中が等しくなり、3 項目は ϵ^{ab} の反対称性から消える。よって、作用 S_{GS}（2.31）を書き直した作用を $\tilde{S}_{GS}$ とすると

$$\tilde{S}_{GS} = -T\int d^2\sigma \left(\sqrt{-\frac{1}{2}\sigma^2} + 2i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \bar{\psi}\Gamma_\mu \partial_b \psi\right), \tag{2.37}$$

ただし

$$\sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \tag{2.38}$$

さらに超対称変換はゲージ固定条件 $\theta^1 = \theta^2$ を保つように κ - 対称変換と混ざり、次のような変換となる。

$$\begin{aligned} \delta\theta^1 &= \delta_{SUSY}\theta^1 + \delta_\kappa\theta^1, \\ \delta\theta^2 &= \delta_{SUSY}\theta^2 + \delta_\kappa\theta^2, \\ \delta X^\mu &= \delta_{SUSY}X^\mu + \delta_\kappa X^\mu. \end{aligned} \tag{2.39}$$

ただし $\delta\theta^1 = \delta\theta^2$ となるように

$$\begin{aligned} \kappa^1 &= \frac{-\epsilon^1 + \epsilon^2}{2}, \\ \kappa^2 &= \frac{\epsilon^1 - \epsilon^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

と選んだ。さらに

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\epsilon^1 + \epsilon^2}{2}, \\ \epsilon &= \frac{\epsilon^1 - \epsilon^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

のようにすることで $\tilde{S}_{GS}$ の $\mathcal{N} = 2$ の超対称性は

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\psi &= -\frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{2}\sigma^2}}\sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon, \\ \delta^{(1)}X^\mu &= 4i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\psi, \end{aligned} \tag{2.42}$$

と

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}\psi &= \xi, \\ \delta^{(2)}X^\mu &= 0, \end{aligned} \tag{2.43}$$

になる。

次にすることは、作用 $\tilde{S}_{GS}$（2.37）をシルト型の作用で書くことである。後で分かるがこのシルト型作用は、行列正則化しやすい形である。シルト型作用は、ポアソン括弧

$$\{X, Y\} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ab}\partial_a X \partial_b Y, \tag{2.44}$$

を使って書くと

$$S_{Schild} = \int d^2\sigma \left(\sqrt{g}\alpha(\frac{1}{4}\{X^\mu, X^\nu\}^2 - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma_\mu\{X^\mu, \psi\}) + \beta\sqrt{g} \right), \quad (2.45)$$

となる。この作用の $\sqrt{g}$ の運動方程式を求めると

$$-\frac{1}{4}\alpha\frac{1}{(\sqrt{g})^2}(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2 + \beta = 0. \quad (2.46)$$

これより

$$\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2}. \quad (2.47)$$

これを作用 S_{Schild}（2.45）に代入したものを S'_{Schild} とすると

$$\begin{aligned} S'_{Schild} &= \int d^2\sigma \left(\frac{\alpha}{4\sqrt{g}}(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2 - \frac{i}{2}\alpha\bar{\psi}\Gamma_\mu(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b \psi) + \beta\sqrt{g} \right) \\ &= \int d^2\sigma \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2} - \frac{i}{2}\alpha\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \bar{\psi}\Gamma_\mu \partial_b \psi \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2} \right) \\ &= \int d^2\sigma \left(\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{(\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2} - \frac{i}{2}\alpha\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \bar{\psi}\Gamma_\mu \partial_b \psi \right). \quad (2.48) \end{aligned}$$

よってこれより $\tilde{S}_{GS}$（2.37）と S_{Schild}（2.45）は、場の規格化を除いて、少なくとも古典的に等価であることが分かる。

また、$\tilde{S}_{GS}$（2.37）で持っていた $\mathcal{N}=2$ の超対称性は S_{Schild} では

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\psi &= -\frac{1}{2\sqrt{g}}\sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon, \\ \delta^{(1)}X^\mu &= i\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\psi, \end{aligned} \quad (2.49)$$

と

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}\psi &= \xi, \\ \delta^{(2)}X^\mu &= 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

の対称性を保つ。これで作用 S_{Schild} が作用 S_{GS}（2.31）と関係することが分かった。

ここで、この作用 S_{Schild} を行列正則化するわけだが、そのために作用 S_{Schild} において、次のように、n が十分大きい値において、ポアソン括弧を交換子に、位

相空間上の積分をトレースに置き換えてやる：

$$\{\ ,\ \} \longrightarrow -in[\ ,\ ], \tag{2.51}$$

$$\int d^2\sigma\sqrt{g} \longrightarrow \frac{1}{n}Tr. \tag{2.52}$$

これは古典力学と量子力学との対応と同じである。そうすると、作用

$$S'_{\text{IIBMM}} = \alpha\left(-\frac{1}{4}Tr[A_\mu, A_\nu]^2 - \frac{1}{2}Tr(\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi])\right) + \beta Tr1, \tag{2.53}$$

が得られる。ここで A_μ はボゾン的 $n \times n$ エルミート行列で ψ はフェルミオン的 $n \times n$ エルミート行列である。経路積分の形で書くと

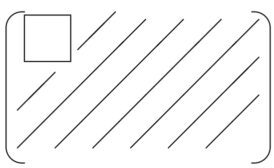
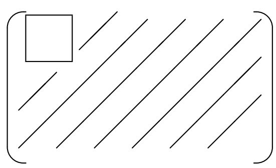
$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}\int dAd\psi e^{-S'_{\text{IIBMM}}}, \tag{2.54}$$

となる。

ここで IIB 行列模型の作用 S_{IIBMM}

$$S_{\text{IIBMM}} = -\frac{1}{g^2}Tr\Big(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]\Big), \tag{2.55}$$

を考える。この作用において、$n \times n$ ブロックを 1 つ残し、そのブロックに対する有効作用を考える：

$A_\mu =$  , $\psi =$  . (2.56)

そうすると積分した後には $Tr\mathbf{1}$ に比例した項が出てくると予想される。また対称性からその有効作用は S'_{IIBMM} になると考えられる。よって、これは IIB 行列模型 S_{IIBMM} が、グリーン・シュワルツ型作用 S_{GS}（2.31）を行列のブロックとして含み、IIB 行列模型 S_{IIBMM} が多体系を表していることを意味する。

2.3　BPS 対象物間の相互作用

この節ではIIB行列模型が超弦理論の非摂動的定式化になっていると思われる証拠として、超弦理論とIIB行列模型とお互いそれぞれ対応する古典解をみつけ、その古典解に対する有効作用が超弦理論側とIIB行列模型側とで対応があることを示す。そして、その対応により、IIB行列模型が多体系の理論であるあることを説明する。

2.3.1　古典解

この副節では相互作用を求める前に、超弦理論側の古典解と対応する作用 S'_{IIBMM} の古典解を見つける。ただし、この後は $\psi = 0$ の場合を考える。$\psi \neq 0$ の場合については2.4で述べる。

まず作用 S'_{IIBMM}（2.53）の典型的な古典解を考える。超弦理論側での作用 S_{Schild}（2.45）の運動方程式を求めると、

$$\{X^\mu, \{X^\mu, X^\nu\}\} \;=\; 0, \tag{2.57}$$

となる。この運動方程式の解として、

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X^0 &=& T\tau, \\ X^1 &=& \frac{L}{2\pi}\sigma, \\ X^{\mu=2,\ldots,9} &=& 0, \end{array} \right. \tag{2.58}$$

が考えられる。ただし長さ T, L は X^0, X^1 方向のコンパクト化半径で、その配位は

$$0 \leq \quad \tau \quad \leq 1, \tag{2.59}$$

$$0 \leq \quad \sigma \quad \leq 2\pi, \tag{2.60}$$

である。実際、IIB型超弦理論には $(1+1)$ 次元に拡がった物体として、D1-ブレイン（D-string）があることが知られている。次に行列模型の側を考える。運動方程式（2.57）に対応する作用（2.53）の運動方程式は

$$[A_\mu, [A_\mu, A_\nu]] \;=\; 0, \tag{2.61}$$

となる。そして、交換関係とポアソン括弧との関係を考えることで、(2.58) に対するこの運動方程式の解

$$
\begin{cases}
A_0 &= \frac{T}{\sqrt{2\pi n}} q \equiv p_0, \\
A_1 &= \frac{L}{\sqrt{2\pi n}} p \equiv p_1, \\
A_{\mu=2,\ldots,9} &= 0,
\end{cases}
\tag{2.62}
$$

が考えられる。実際これを、運動方程式 (2.61) に代入することで確かめられる。ただし、q, p は $n \times n$ のエルミート行列で、次の交換関係と固有値分布をもつ。

$$
[\, q \, , \, p \,] = i, \tag{2.63}
$$

$$
0 \leq \quad q \quad \leq \sqrt{2\pi n}, \tag{2.64}
$$

$$
0 \leq \quad p \quad \leq \sqrt{2\pi n}. \tag{2.65}
$$

それでは次に同じ方法で、2 つの D1-ブレインに相当する古典解を組み立てる。それは 2 つの対角ブロックで構成する A_μ を考える。先ほどと同様に、まず超弦理論側で 2 つの D1-ブレインが平行の場合を考える。ただし、X^1 方向に無限に伸び、X^2 方向に距離 b だけ離れて存在する状況を考える。この状態を表す運動方程式 (2.57) の解は

$$
(1)\begin{cases}
X^0_{(1)} &= T\tau_{(1)}, \\
X^1_{(1)} &= \frac{L}{2\pi}\sigma_{(1)}, \\
X^2_{(1)} &= +\frac{b}{2}, \\
X^\mu_{(1)} &= 0,
\end{cases}
\qquad
(2)\begin{cases}
X^0_{(2)} &= T\tau_{(2)}, \\
X^1_{(2)} &= \frac{L}{2\pi}\sigma_{(2)}, \\
X^2_{(2)} &= -\frac{b}{2}, \\
X^\mu_{(2)} &= 0, \qquad (\mu = 3, \cdots 9),
\end{cases}
\tag{2.66}
$$

となる。この様に超弦理論側では、2 つの連結でない world volume を考えても、お互い何の関係もせず 2 つの D1-ブレインが時空中にあるだけである。これに対して、行列模型側では、第 1 ブロックに 1 つ目の D1-ブレインを、第 2 ブロックに 2 つ目の D1-ブレインを対応させることで (2.66) に相当する、運動方程式 (2.61)

の解が得られ、

$$
\left\{
\begin{array}{ccccc}
A_0 & = & \begin{pmatrix} \frac{T}{\sqrt{2\pi n}}q & 0 \\ 0 & \frac{T}{\sqrt{2\pi n}}q' \end{pmatrix} & \equiv & p_0, \\
A_1 & = & \begin{pmatrix} \frac{L}{\sqrt{2\pi n}}p & 0 \\ 0 & \frac{L}{\sqrt{2\pi n}}p' \end{pmatrix} & \equiv & p_1, \\
A_2 & = & \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} & \equiv & p_2, \\
A_{\mu=3,\ldots,9} & = & 0, & &
\end{array}
\right.
\tag{2.67}
$$

となる。ただし q', p' はユニタリー変換をすることで、$q' = q, p' = p$ とすることができる。このように 2 つの物体を対角ブロックに入れて考えると、非対角ブロックは相互作用を表す自由度になる。実際に、この非対角成分が相互作用を表していることを、次の副節以降でみる。

同様に 2 つの D1-ブレインが反平行の場合を考える。超弦理論側の運動方程式（2.57）に対する解は

$$
(1)\left\{
\begin{array}{ccc}
X^0_{(1)} & = & T\tau_{(1)}, \\
X^1_{(1)} & = & \frac{L}{2\pi}\sigma_{(1)}, \\
X^2_{(1)} & = & +\frac{b}{2}, \\
X^\mu_{(1)} & = & 0,
\end{array}
\right.
\qquad
(2)\left\{
\begin{array}{ccc}
X^0_{(2)} & = & T\tau_{(2)}, \\
X^1_{(2)} & = & -\frac{L}{2\pi}\sigma_{(2)}, \\
X^2_{(2)} & = & -\frac{b}{2}, \\
X^\mu_{(2)} & = & 0, \qquad (\mu = 3, \cdots 9),
\end{array}
\right.
\tag{2.68}
$$

となる。（2.68）に相当する行列模型側での運動方程式（2.61）の解は

$$
\left\{
\begin{array}{ccccc}
A_0 & = & \begin{pmatrix} \frac{T}{\sqrt{2\pi n}}q & 0 \\ 0 & \frac{T}{\sqrt{2\pi n}}q \end{pmatrix} & \equiv & p_0, \\
A_1 & = & \begin{pmatrix} \frac{L}{\sqrt{2\pi n}}p & 0 \\ 0 & -\frac{L}{\sqrt{2\pi n}}p \end{pmatrix} & \equiv & p_1, \\
A_2 & = & \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} & \equiv & p_2, \\
A_{\mu=3,\ldots,9} & = & 0, & &
\end{array}
\right.
\tag{2.69}
$$

となる。

次に2つのD1-ブレインが一般的に位置する場合も考えることができる。超弦理論側の運動方程式（2.57）に対する解は

$$
(1)\begin{cases} X^0_{(1)} &= T\tau_{(1)}, \\ X^1_{(1)} &= \frac{L}{2\pi}\sigma_{(1)}, \\ X^2_{(1)} &= 0 \\ X^3_{(1)} &= +\frac{b}{2}, \\ X^\mu_{(1)} &= 0, \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} X^0_{(2)} &= T\tau_{(2)}, \\ X^1_{(2)} &= \frac{L}{2\pi}\sigma_{(2)}\cos\theta, \\ X^2_{(2)} &= \frac{L}{2\pi}\sigma_{(2)}\sin\theta, \\ X^3_{(2)} &= -\frac{b}{2}, \\ X^\mu_{(2)} &= 0, \qquad (\mu = 4, \cdots 9), \end{cases} \tag{2.70}
$$

となる。ただし、b は2つのD1-ブレインの最小距離である。さらにこれに相当する行列模型側での運動方程式（2.61）の解は

$$
\begin{cases} A_0 &= \begin{pmatrix} \frac{T}{\sqrt{2\pi n}}q & 0 \\ 0 & \frac{T}{\sqrt{2\pi n}}q \end{pmatrix} \equiv p_0, \\ A_1 &= \begin{pmatrix} \frac{L}{\sqrt{2\pi n}}p & 0 \\ 0 & \frac{L}{\sqrt{2\pi n}}p\cos\theta \end{pmatrix} \equiv p_1, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{\sqrt{2\pi n}}p\sin\theta \end{pmatrix} \equiv p_2, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \equiv p_3, \\ A_{\mu=4,\ldots,9} &= 0, \end{cases} \tag{2.71}
$$

となる。

2.3.2 1-ループ有効作用とBPS飽和状態

ここでは行列を前副節で求めた古典解 p_μ とその周りの揺らぎに分解し、揺らぎの2次の項を積分することで、1-ループ有効作用を計算する。そしてその結果とIIB型超弦理論側との対応を見る。

1-ループ有効作用 W は付録 A において X_μ を p_μ に置き換えることで求まり、それは

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}Tr\log(P_\lambda^2\delta_{\mu\nu}-2iF_{\mu\nu}) \\
&\quad -\frac{1}{4}Tr\log\left((P_\lambda^2+\frac{i}{2}F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu})(\frac{1+\Gamma_{11}}{2})\right)-Tr\log(P_\lambda^2), \qquad (2.72)
\end{aligned}
$$

となる。ただし $P_\mu, F_{\mu\nu}$ は、次のように行列空間 M に作用する随伴演算子

$$
\begin{aligned}
P_\mu M &= [p_\mu, M], \\
F_{\mu\nu}M &= [f_{\mu\nu}, M], \qquad (2.73)
\end{aligned}
$$

で、$f_{\mu\nu}=i[p_\mu,p_\nu]$ である。

今、$f_{\mu\nu}=c$ 数 $\equiv c_{\mu\nu}$ の時は特別で、これは BPS 飽和状態に相当する。実際に、$\mathcal{N}=2$ の超対称性（2.3)、(2.4）で $\delta^{(1)}\psi=\pm\frac{1}{2}c_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon$ となり、$\xi=\pm\frac{1}{2}c_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon$ とすることで

$$
\begin{aligned}
\left(\delta^{(1)}\mp\delta^{(2)}\right)\psi &= 0, \qquad (2.74)\\
\left(\delta^{(1)}\mp\delta^{(2)}\right)A_\mu &= 0, \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

とできる。つまり任意の ϵ に対し ξ が決まることとなり、この背景では超対称性の半分は残っている。そして $f_{\mu\nu}=c$ 数では（2.73）より $F_{\mu\nu}=0$ なので

$$
W=(\frac{1}{2}\cdot 10-\frac{1}{4}\cdot 16-1)Tr\log(P_\lambda^2)=0. \qquad (2.76)
$$

これは、超対称性のため１-ループ量子補正が消えることを意味しており、BPS-飽和状態は補正がなく安定しているという超弦理論の側の事実と一致している。実際、上の計算ではボゾンとフェルミオンの寄与が打ち消しあっていることが分かる。このような BPS-飽和状態の簡単な例の一つは、解（2.62）である。実際この解に対し

$$
\begin{aligned}
f_{01}=i[p_0,p_1] &= -\frac{TL}{2\pi n}, \qquad (2.77)\\
\text{他の } f_{\mu\nu} &= 0, \qquad (2.78)
\end{aligned}
$$

で、確かに $f_{\mu\nu}=c$ 数となっており、BPS-飽和状態となっている。

2.3.3　D1-ブレイン間の相互作用

この副節では 2 つの D1-ブレインを表す解に対し、前副節と同様に、1-ループ有効作用を計算をする。2.3.1 で、2 つの D1-ブレインを対角ブロックに入れることで作用 $S'_{\rm IIBMM}$（2.53）の古典解を得た。このとき新たにできた非対角ブロックが、2 つの D1-ブレイン間の相互作用を表していることをみていく。

まず、２つの平行な D1-ブレインを表す解（2.67）を考える。このとき

$$
\begin{aligned}
f_{01} = i[p_0, p_1] &= -\frac{TL}{2\pi n}, &(2.79)\\
\text{他の } f_{\mu\nu} &= 0, &(2.80)
\end{aligned}
$$

なので、$f_{\mu\nu} = c$ 数である。これは前副節の場合と同じ状況となり、１-ループ有効作用はゼロで、この解は BPS 飽和状態を表す。これは、超弦理論での 2 つの平行な D1-ブレインの間には、グラビトンと反対称テンソルの寄与が相殺して力が働かないということと一致する。

次に 2 つの D1-ブレインが反平行な場合を表す解（2.69）の量子補正の計算をする。今、解（2.69）からパウリ行列の第 3 成分 σ^3 を使うと

$$
\begin{aligned}
f_{01} = i[p_0, p_1] &= i\frac{TL}{2\pi n}\begin{pmatrix} [q,p] & 0 \\ 0 & -[q,p] \end{pmatrix} = -\frac{TL}{2\pi n}\otimes\sigma^3, &(2.81)\\
\text{他 } f_{\mu\nu} &= 0, &(2.82)
\end{aligned}
$$

となる。これより

$$
\begin{aligned}
[p_0, f_{01}] &= -\frac{T^2L}{(2\pi n)^{\frac{3}{2}}}\left[q\otimes 1_2, 1_n\otimes\sigma^3\right] = 0, &(2.83)\\
[p_1, f_{01}] &= -\frac{TL^2}{(2\pi n)^{\frac{3}{2}}}\left[p\otimes\sigma^3, 1_n\otimes\sigma^3\right] = 0, &(2.84)\\
[p_2, f_{01}] &= -\frac{TLb}{4\pi n}\left[1_n\otimes\sigma^3, 1_n\otimes\sigma^3\right] = 0, &(2.85)\\
[\text{他 } p_\mu, \text{他 } f_{\nu\lambda}] &= 0, &(2.86)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
[p_\mu, f_{\nu\lambda}] = 0. \qquad (2.87)
$$

このように $[p_\mu, f_{\nu\lambda}] = c$ 数のときヤコビ恒等式を使って

$$\left[P_\lambda^2, F_{\mu\nu}\right] M = 0, \tag{2.88}$$

となるので、P_λ^2 と $F_{\mu\nu}$ は互いに交換するので同時対角化できる。そうすると、各成分ごとに別々のローレンツ変換を行っても良いので、$F_{\mu\nu}$ は次のようにローレンツベクトルの足に関して反対称行列の標準形までもっていくことができる：

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ +a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -a_5 \\ & & & +a_5 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

このとき有効作用において、ローレンツの足に対する部分が具体的にかける。有効作用（2.72）のボゾン部分（１項目）は

$$Tr\log(P_\lambda^2\delta_{\mu\nu} - 2iF_{\mu\nu}) = \sum_{i=1}^{5} Tr\log\left((P_\lambda^2)^2 - 4a_i^2\right), \tag{2.90}$$

となる。有効作用（2.72）のフェルミオン部分（２項目）は $\Gamma^{\mu\nu}$ の固有値を $\pm i$、$\Gamma^{11} = i\Gamma^1\Gamma^2\cdots\Gamma^{10}$ の固有値を 1 として

$$Tr\log\left((P_\lambda^2 + \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu})(\frac{1+\Gamma_{11}}{2})\right) = \sum_{\substack{s_1=\pm1,\dots,s_5=\pm1 \\ s_1\cdots s_5=1}} Tr\log\left(P_\lambda^2 - (a_1 s_1 + \cdots + a_5 s_5)\right). \tag{2.91}$$

よって有効作用（2.72）は

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} Tr\log\left((P_\lambda^2)^2 - 4a_i^2\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}\sum_{\substack{s_1=\pm1,\dots,s_5=\pm1 \\ s_1\cdots s_5=1}} Tr\log\left(P_\lambda^2 - (a_1 s_1 + \cdots + a_5 s_5)\right) \\ &\quad -Tr\log(P_\lambda^2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} Tr\log\left(1 - \frac{4a_i^2}{(P_\lambda^2)^2}\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}\sum_{\substack{s_1=\pm1,\dots,s_5=\pm1 \\ s_1\cdots s_5=1}} Tr\log(1 - \frac{a_1 s_1 + \cdots + a_5 s_5}{P_\lambda^2}), \end{aligned} \tag{2.92}$$

ここで（2.73）のように $1\otimes\sigma^3$ に対する随伴演算子 Σ^3 を次のように定義する。

$$\Sigma^3 M = [1\otimes\sigma^3, M]. \tag{2.93}$$

そうすると

$$\begin{aligned} [P_0, P_1] &= i\frac{TL}{2\pi n}\Sigma^3, && (2.94)\\ P_2 &= \frac{b}{2}\Sigma^3, && (2.95) \end{aligned}$$

となる。Σ^3 の固有値は $0, 0, +2, -2$ である。もし固有値が 0 の時、$F_{\mu\nu}=0$ となり 1-ループ有効作用の寄与はない。Σ^3 の固有値が ± 2 の時（2.95）より（2.72）の P_λ^2 は調和振動のように振る舞い、その固有値は $4(\frac{TL}{2\pi n})(k+\frac{1}{2})+b^2$ となり、また P_λ^2 は $n\times n$ の行列に作用するのでその固有値は n 重に縮退している。またゼロでない a_i は Σ^3 の固有値が ± 2 の時 $a_1 = \pm 2\frac{TL}{2\pi n}$ なので（2.92）は

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} Tr\log\left(1-\frac{4a_i^2}{(P_\lambda^2)^2}\right)\\ &\quad -\frac{1}{4}\sum_{\substack{s_1=\pm1,\ldots,s_5=\pm1\\ s_1\cdots s_5=1}} Tr\log\left(1-\frac{a_1s_1+\cdots+a_5s_5}{P_\lambda^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}Tr\log\left(1-\frac{4a_1^2}{(P_\lambda^2)^2}\right)\\ &\qquad -\frac{8}{4}Tr\log\left(1-\frac{4a_1}{P^2}\right)-\frac{8}{4}Tr\log\left(1+\frac{4a_1}{P^2}\right)\\ &= Tr\log\frac{\left(1+\frac{a_1}{P^2}\right)^4\left(1-\frac{a_1}{P^2}\right)^4}{\left(1+\frac{2a_1}{P^2}\right)\left(1-\frac{2a_1}{P^2}\right)}\\ &= -n\log\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2k+1+\frac{b'^2}{2}}\right)^4\left(1-\frac{1}{2k+1+\frac{b'^2}{2}}\right)^4}{\left(1+\frac{2}{2k+1+\frac{b'^2}{2}}\right)\left(1-\frac{2}{2k+1+\frac{b'^2}{2}}\right)}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

ただし $b'=\sqrt{\frac{2\pi n}{TL}}b$ とした。ここで $z=\frac{1}{4}{b'}^2+\frac{1}{2}$ と置いて

$$\begin{aligned} &\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{2c}{2k+1+\frac{b'^2}{2}}\right)\left(1-\frac{2c}{2k+1+\frac{b'^2}{2}}\right)\\ &= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{c}{k+z}\right)\left(1-\frac{c}{k+z}\right)\\ &= \frac{(z+c)(z-c)}{z^2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z+c}{k}\right)\left(1+\frac{z-c}{k}\right)\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-2}\\ &= \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(z+c)\Gamma(z-c)}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

となる。ただし最後の行で $\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{k})^{-1}e^{\frac{z}{k}}$ を使った。これを使って有効作用を変形すると

$$
\begin{aligned}
W &= -n\log\frac{\Gamma(z+1)\Gamma(z-1)\Gamma(z)^6}{\Gamma(z+\frac{1}{2})^4\Gamma(z-\frac{1}{2})^4} \\
&= -n\log\left[\frac{\frac{z}{z-1}}{(z-\frac{1}{2})^4}\left(\frac{\Gamma(\frac{b'^2}{4}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{b'^2}{4})}\right)^8\right],
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

となる。そして z が大きいときの $\Gamma(z)$ の式

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{J(z)}, \\
J(z) &= \frac{1}{12}\frac{1}{z}-\frac{1}{360}\frac{1}{z^3}+\mathcal{O}(\frac{1}{z^5}),
\end{aligned}
\tag{2.99}
$$

を使って展開すると

$$
\begin{aligned}
W &= -n\frac{1}{8z^3}+\mathcal{O}(\frac{1}{z^4}) \\
&= -8n\left(\frac{TL}{2\pi n}\right)^3\frac{1}{b^6}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{b^8}\right),
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

となる。これは D1-ブレインに垂直な方向（8 次元分）の時空中を伝わる質量ゼロの場が作る引力ポテンシャルである。これは弦理論のときと同じく、２つの D1-ブレインが反平行の場合に生じる、重力場の引力と反対称テンソル場の引力による引力ポテンシャルになっている。

2.3.4 対角ブロック間の相互作用

ここでは対角ブロック間の 1-ループ有効作用を計算する。そして、有効作用に含まれる相互作用と超弦理論との対応をみる。

背景として次のような対角ブロックを考える：

$$
A_\mu = p_\mu = \begin{pmatrix} p_\mu^{(1)} & & & \\ & p_\mu^{(2)} & & \\ & & p_\mu^{(3)} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.
\tag{2.101}
$$

ただし、$p_\mu^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots)$ は $n_i\times n_i$ 行列である。ここで $p_\mu^{(i)}$ は時空のある領域を占める様々な D-ブレイン的対象物 (D-instantons,D-string,D3-brane,$\cdots$ それぞれ

の混合) とみなす。$p_\mu^{(i)}$ を

$$\begin{aligned} p_\mu^{(i)} &= d_\mu^{(i)} 1_{n_i} + \tilde{p}_\mu^{(i)}, \\ Tr\tilde{p}_\mu^{(i)} &= 0, \end{aligned} \tag{2.102}$$

のように分解した時 $d_\mu^{(i)}$ は i 番目のブロックの重心座標とみなす。以下ではブロックはお互い十分離れていると仮定する。つまり $(d_\mu^{(i)} - d_\mu^{(j)})^2$ は大きいと仮定する。

対角ブロック間の有効作用を計算する前に、まず以下のような表記を導入する。行列 X の (i,j) ブロックを $X^{(i,j)}$ とする。(2.73) で定義される $P_\mu X = [p_\mu, X]$ の P_μ は $X^{(i,j)}$ 上の演算子である。実際

$$(P_\mu X)^{(i,j)} = (d_\mu^{(i)} - d_\mu^{(j)}) X^{(i,j)} + \tilde{p}_\mu^{(i)} X^{(i,j)} - X^{(i,j)} \tilde{p}_\mu^{(j)}, \tag{2.103}$$

となる。さらに

$$d_\mu^{(i,j)} X^{(i,j)} = (d_\mu^{(i)} - d_\mu^{(j)}) X^{(i,j)}, \tag{2.104}$$

$$P_{L\mu}^{(i,j)} X^{(i,j)} = \tilde{p}_\mu^{(i)} X^{(i,j)}, \tag{2.105}$$

$$P_{R\mu}^{(i,j)} X^{(i,j)} = -X^{(i,j)} \tilde{p}_\mu^{(j)}, \tag{2.106}$$

の表記を用いると

$$(P_\mu X)^{(i,j)} = (d_\mu^{(i,j)} + P_{L\mu}^{(i,j)} + P_{R\mu}^{(i,j)}) X^{(i,j)}, \tag{2.107}$$

となる。同じように $F_{\mu\nu}$ についても下のような表記を用いる。今 p_μ は (2.101) のようにとっているので

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} = i[p_\mu, p_\nu] &= \begin{pmatrix} i[p_\mu^{(1)}, p_\nu^{(1)}] & & \\ & i[p_\mu^{(2)}, p_\nu^{(2)}] & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i[\tilde{p}_\mu^{(1)}, \tilde{p}_\nu^{(1)}] & & \\ & i[\tilde{p}_\mu^{(2)}, \tilde{p}_\nu^{(2)}] & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{f}_{\mu\nu}^{(1)} & & \\ & \tilde{f}_{\mu\nu}^{(2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.108}$$

である。さらに

$$F^{(i,j)}_{L\mu\nu}X^{(i,j)} = \tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}X^{(i,j)}, \tag{2.109}$$

$$F^{(i,j)}_{R\mu\nu}X^{(i,j)} = -X^{(i,j)}\tilde{f}^{(j)}_{\mu\nu}, \tag{2.110}$$

の表記を用いると、

$$(F_{\mu\nu}X)^{(i,j)} = (F^{(i,j)}_{L\mu\nu} + F^{(i,j)}_{R\mu\nu})X^{(i,j)}, \tag{2.111}$$

となる。さらに P_μ と $F_{\mu\nu}$ からなる演算子に対し

$$Tr\, O = \sum_{i,j=1}^{n} TrO^{(i,j)}_L TrO^{(i,j)}_R, \tag{2.112}$$

が成り立つ。

それでは１ループ有効作用（2.72）を $d^{(i,j)}_\mu$ の逆べきで展開する。まず、有効作用（2.72）の log を展開して、Γ 行列のトレースをとると

$$\begin{aligned} W = &-Tr\left(\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\nu\lambda}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\frac{1}{P^2}F_{\rho\mu}\right) \\ &-2Tr\left(\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\frac{1}{P^2}F_{\mu\rho}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\nu}\right) \\ &+\frac{1}{2}Tr\left(\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\right) \\ &+\frac{1}{4}Tr\left(\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\frac{1}{P^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{P^2}F_{\lambda\rho}\right) + \mathcal{O}((F_{\mu\nu})^5). \end{aligned} \tag{2.113}$$

P_μ と $F_{\mu\nu}$ は (i,j) ブロックに独立に作用するので、１-ループ有効作用 W は (i,j) ブロックの有効作用 $W^{(i,j)}$ の足し上げで表される。よって、$W^{(i,j)}$ を i 番目のブロックと j 番目のブロック間の相互作用と考える。$1/(d^{(i)} - d^{(j)})$ の leading oder

で $W^{(i,j)}$ を求めると

$$
\begin{aligned}
W^{(i,j)} &= \frac{1}{\left(d^{(i)}-d^{(j)}\right)^8} \\
&\quad (-Tr^{(i,j)}\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}F_{\rho\mu}\right) - 2Tr^{(i,j)}\left(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\mu\rho}F_{\lambda\nu}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}Tr^{(i,j)}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right) + \frac{1}{4}Tr^{(i,j)}\left(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\right)) \\
&\quad +\mathcal{O}((1/(d^{(i)}-d^{(j)})^9) \qquad (2.114) \\
&= \frac{1}{4(d^{(i)}-d^{(j)})^8} \\
&\quad (-4n_jTr(\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(i)}_{\nu\lambda}\tilde{f}^{(i)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(i)}_{\rho\mu}) - 8n_jTr(\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(i)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(i)}_{\mu\rho}\tilde{f}^{(i)}_{\lambda\nu}) \\
&\quad +2n_jTr(\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(i)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(i)}_{\lambda\rho}) + n_jTr(\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(i)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(i)}_{\lambda\rho}) \\
&\quad -4n_iTr(\tilde{f}^{(j)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(j)}_{\nu\lambda}\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(j)}_{\rho\mu}) - 8n_iTr(\tilde{f}^{(j)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(j)}_{\mu\rho}\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\nu}) \\
&\quad +2n_iTr(\tilde{f}^{(j)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(j)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\rho}) + n_iTr(\tilde{f}^{(j)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(j)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\rho}) \\
&\quad -48Tr(\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(i)}_{\nu\lambda})Tr(\tilde{f}^{(j)}_{\mu\rho}\tilde{f}^{(j)}_{\rho\lambda}) + 6Tr(\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu}\tilde{f}^{(i)}_{\mu\nu})Tr(\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\rho}\tilde{f}^{(j)}_{\lambda\rho})) \\
&\quad +\mathcal{O}((1/(d^{(i)}-d(j))^9). \qquad (2.115)
\end{aligned}
$$

となる。ポテンシャルが遠方で距離の 8 乗分の１でおちることから、ブロック同士は影響しあわない、つまりこの系はクラスター性を満たしている。さらに 8 乗分の１というのは 10 次元の物体間の質量ゼロ粒子の相互作用に相当し、実際、上の式の最後の 2 項のテンソル構造に注目すると、グラビトンとスカラーに相当する質量ゼロ粒子の交換が分かる。

では最後に、IIB 行列模型が多体系の理論であることを説明する。まず、2.2.2 で、IIB 行列模型が、IIB 超弦理論のシルト型作用を行列正則化したものになっていることを述べた。そして 2.3.1 で、そのシルト型作用の D1-ブレインに相当する古典解を求めた。そして 1 つ目の D1-ブレインを第 1 ブロックに、2 つ目の D1-ブレインを第 2 ブロックに対応させ、IIB 行列模型の運動方程式の解を得た。さらに、その解に対する有効作用を計算すると、弦理論の結果と一致しているということが分った。このことから 2 つのブロックからなるブロック対角なものを考えると、それは 2 つの連結成分からなる world volume を考えていることに対応する。言い換えると、IIB 行列模型は図 1 のように弦の多体系を記述しており、$N \to \infty$ の極限では無限多体系のダイナミクス、即ち非摂動効果を自然に記述し

ていると期待されるのである。

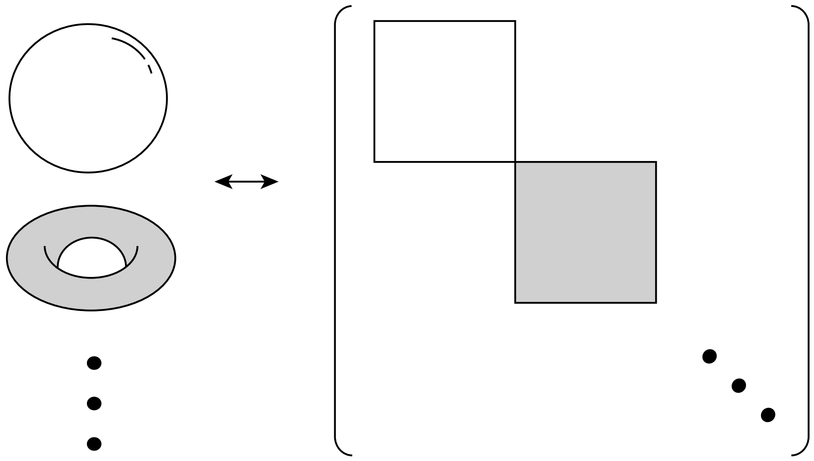


図 1: 図の右側は対角ブロックからなる行列である。そして各ブロックが、それぞれ D-ブレインのような world volume に対応している。

2.4　時空の 4 次元性

この節では IIB 行列模型の対角成分に対する有効作用を解析することで、IIB 行列模型の非摂動効果としての時空の 4 次元性について説明する。

2.4.1　対角成分の有効作用

これまでは、IIB 行列模型の対称性やグリーン・シュワルツ作用との関係、そして相互作用を含んだ多体系を表していることなどを述べてきた。前節では、作用のフェルミオンの対角成分を考慮に入れずに見てきた。ここではそのフェルミオンの対角成分（ゼロモード）も含めて考える。フェルミオンの対角成分も考えることで、この模型のダイナミカルな性質、つまり行列の固有値分布としてどのような時空が現われるのか、そしてこの模型の収束性がどのようになるのかについて述べる。

ここでは IIB 行列模型 S_{IIBMM}（2.1）の対角成分の１-ループ有効作用を求める。そのため、行列 A_μ, ψ を次のように対角成分と非対角成分に分ける：

$$\begin{aligned} A_\mu &= X_\mu + \tilde{A}_\mu\,; \quad X_\mu = \begin{pmatrix} x_\mu^1 & & & \\ & x_\mu^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_\mu^N \end{pmatrix}, \\ \psi &= \xi + \tilde{\psi}\,; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 & & & \\ & \xi^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^N \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.116}$$

ただし X_μ, ψ はトレースレスとする。以下では、まず非対角部分 $\tilde{A}_\mu, \tilde{\psi}$ を積分し、対角成分に対する有効作用 $S_{\text{eff}}[X,\xi]$ を求める。さらに時空点同士の有効作用 $S_{\text{eff}}[X]$ を求めるために ξ について積分する。ただし、対角成分同士の間の距離が十分離れている場合について見る。この時、1-ループの有効作用は遠方で良い近似である。実際、g^2 での展開係数は、次元解析から分かるように、

$$\frac{g^2}{(x^i - x^j)^4}, \tag{2.117}$$

となり、対角成分同士が十分離れているときは、良い近似であることが分かる。

まず非対角部分 $\tilde{A}_\mu, \tilde{\psi}$ を積分するために、作用 S_{IIBMM}（2.1）を（2.116）で展開し非対角成分の 2 次までの項 S_2 とそれ以上の項 S_{int} に分ける。そして S_2 にゲージ固定項とゴースト項を加えると

$$\begin{aligned} S_2 + S_{g.f.} + S_{ghost} &= -\frac{1}{2g^2} tr\Big([X_\mu, \tilde{A}_\nu][X^\mu, \tilde{A}^\nu] + \bar{\tilde{\psi}} \Gamma^\mu [X_\mu, \tilde{\psi}] \\ &\qquad + [\bar{\xi}, \tilde{A}_\mu] \Gamma^\mu \tilde{\psi} + \bar{\tilde{\psi}} \Gamma^\mu [\tilde{A}_\mu, \xi] \\ &\qquad + 2[X_\mu, b][A^\mu, c] \Big), \end{aligned} \tag{2.118}$$

となる。ここでまず $\tilde{S} = S_2 + S_{g.f.} + S_{ghost}$ の項について、行列の成分で書くと

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \frac{1}{g^2} \sum_{i<j} \Big((x^i_\nu - x^j_\nu)^2 \tilde{A}^{ij*}_\mu \tilde{A}^{ij\mu} - \bar{\tilde{\psi}}^{ji} \Gamma^\mu (x^i_\mu - x^j_\mu) \tilde{\psi}^{ij} \\ &\qquad + (\bar{\xi}^i - \bar{\xi}^j) \Gamma^\mu \tilde{\psi}^{ij} \tilde{A^{ij}_\mu}^* + \bar{\tilde{\psi}}^{ji} \Gamma^\mu (\xi^i - \xi^j) \tilde{A^{ij}_\mu} \\ &\qquad - b^{ji} (x^i_\mu - x^j_\mu)^2 c^{ij} \Big), \end{aligned} \tag{2.119}$$

となる。以下では $x^{ij}_\mu \equiv x^i_\mu - x^j_\mu, \xi^{ij} \equiv \xi^i - \xi^j$ とする。今 $\tilde{A}_\mu, \tilde{\psi}$ は対角になっていないので対角化する。$\Gamma^\mu x^{ij}_\mu$ の逆行列は $\Gamma^\mu x^{ij}_\mu / x^2$ なので

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \frac{1}{g^2} \sum_{i<j} \Bigg(\tilde{A}^{ij*}_\mu (x^{ij}_\mu)^2 \Big(\eta^{\mu\nu} + \bar{\xi}^{ij} \Gamma^{\mu\alpha\nu} \xi^{ij} \frac{x^{ij}_\alpha}{x^4} \Big) \tilde{A^{ij}_\nu} \\ &\qquad - \Big(\bar{\tilde{\psi}}^{ji} - \bar{\xi}^{ij} \Gamma^\mu \tilde{A^{ij}_\mu}^* \frac{\Gamma^\nu x^{ij}_\nu}{x^2} \Big) \Gamma^\rho x^{ij}_\rho \Big(\tilde{\psi}^{ij} - \frac{\Gamma^\lambda x^{ij}_\lambda}{x^2} \Gamma^\sigma \xi^{ij} \tilde{A^{ij}_\sigma} \Big) \\ &\qquad - b^{ij*} (x^{ij}_\mu)^2 c^{ij} - b^{ij} (x^{ij}_\mu)^2 c^{ij*} \Bigg), \end{aligned} \tag{2.120}$$

となる。よって積分を実行すると

$$\begin{aligned} e^{-S^{1-\text{loop}}_{\text{eff}}[X,\xi]} &= \int d\tilde{A} d\tilde{\psi} db dc \, e^{-(S_2 + S_{g.f.} + S_{ghost})} \\ &= \prod_{i<j} \Bigg(det\Big((x^{ij}_\rho)^2 (\eta^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}_{(ij)}) \Big)^{-1} det\Big(\Gamma^\rho x^{ij}_\rho \Big) \Big((x^{ij}_\mu)^2 \Big)^2 \Bigg) \\ &= \prod_{i<j} \det{}_{\mu\nu} \big(\eta^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}_{(ij)} \big)^{-1} \Big((x^{ij}_\rho)^2 \Big)^{(-10+8+2)} \\ &= \prod_{i<j} \det{}_{\mu\nu} \big(\eta^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}_{(ij)} \big)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.121}$$

となり、

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{eff}}^{1-\mathrm{loop}}[X,\xi] &= -\log\prod_{i<j}\det{}_{\mu\nu}\big(\eta^{\mu\nu}+S_{(ij)}^{\mu\nu}\big)^{-1} \\
&= \sum_{i<j} tr\log(\eta^{\mu\nu}+S_{(ij)}^{\mu\nu}),
\end{aligned}
\tag{2.122}
$$

となる。ただし

$$
S_{(ij)}^{\mu\nu}=(\bar{\xi}^i-\bar{\xi}^j)\Gamma^{\mu\alpha\nu}(\xi^i-\xi^j)\frac{(x_\alpha^i-x_\alpha^j)}{(x^i-x^j)^4}. \tag{2.123}
$$

さらに log の展開をすると、$S_{(ij)}^{\mu\nu}$ の性質よりさらに具体的になり扱いやすくなる。$S_{(ij)}^{\mu\nu}$ は 16 成分スピノール ξ の 2 次式なので、log の展開は 8 乗までとなる。さらに $S_{(ij)}^{\mu\nu}$ は反対称テンソルとなっているため、$S_{(ij)}^{\mu\nu}$ の奇数次の項はトレースを取ると消える。よって 1-ループ有効作用は

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{eff}}^{1-\mathrm{loop}}[X,\xi] &= \sum_{i<j} tr\log(\eta^{\mu\nu}+S_{(ij)}^{\mu\nu}) \\
&= -\sum_{i<j} tr\Big(\frac{S_{(ij)}^2}{2}+\frac{S_{(ij)}^4}{4}+\frac{S_{(ij)}^6}{6}+\frac{S_{(ij)}^8}{8}\Big),
\end{aligned}
\tag{2.124}
$$

となる。ここで ξ の 4 次式についてフィルツ変換を使うと、次のような関係式を得る。

$$
(\bar{\xi}\Gamma^{\mu\alpha\beta}\xi)(\bar{\xi}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}\xi) = 0, \tag{2.125}
$$

$$
(\bar{\xi}\Gamma^{\mu\nu\alpha}\xi)(\bar{\xi}\Gamma^{\lambda\rho}{}_{\alpha}\xi) = (\bar{\xi}\Gamma^{\mu\lambda\alpha}\xi)(\bar{\xi}\Gamma^{\nu\rho}{}_{\alpha}\xi)-(\bar{\xi}\Gamma^{\mu\rho\alpha}\xi)(\bar{\xi}\Gamma^{\nu\lambda}{}_{\alpha}\xi). \tag{2.126}
$$

式（2.125）より $tr(S_{(ij)}^{\mu\nu})^2$ はゼロとなる。また上の関係式は ξ の 4 次式では完全対称テンソルは作れないことが分かる。さらに ξ を 12 個使って完全対称テンソルを作ることもできない。よって、$tr(S_{(ij)}^{\mu\nu})^6$ もゼロとなる。結局 1-ループ有効作用は次のようになる。

$$
S_{\mathrm{eff}}^{1-\mathrm{loop}}[X,\xi] = -\sum_{i<j} tr\Big(\frac{S_{(ij)}^4}{4}+\frac{S_{(ij)}^8}{8}\Big). \tag{2.127}
$$

それでは次のステップ、時空座標 X の有効作用を求めるために、ξ 積分の手続

きをみていく。つまり、実行すべき積分は

$$
\begin{aligned}
\int dX\, e^{-S_{\rm eff}[X]} &= \int dX d\xi\, e^{-S_{\rm eff}[X,\xi]} \\
&= \int dX d\xi \prod_{i<j}\Bigg[\ 1+\frac{tr(S^4_{(ij)})}{4} \\
&\quad +\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{tr(S^4_{(ij)})}{4}\Big)^2+\frac{tr(S^8_{(ij)})}{8}\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{2.128}
$$

である。ここでこの積分を見やすくするために、最後の大括弧の中の 2 項目は $(\xi_{ij})^8/(x_{ij})^{12}$, 3 項目は $(\xi_{ij})^{16}/(x_{ij})^{24}$ の形をしていることを利用して、グラフ的に考える。最後の 2 項は $x^i - x^j$ の関数なので、時空点 x^i と x^j を線で結ぶようなグラフで考える。さらに $tr(S^4_{(ij)})/4$ と（$(tr(S^4_{(ij)}))^2/32 + tr(S^8_{(ij)})/8$）の項はそれぞれ $\xi^i_\alpha - \xi^j_\alpha$ の 8 成分と 16 成分を含むのでそれぞれ 8 本線、16 本線で描く。以下ではそれぞれ 8 重結合、16 重結合と呼ぶこととする。このように考え、式（2.128）の $\prod_{i<j}$ についての多重積を展開すると、各項は 8 重結合又は１６重結合で結ばれたグラフになっていることが分かる。よって、式（2.128）は

$$
\begin{aligned}
&\int dX d\xi e^{-S^{\rm 1-loop}_{\rm eff}[x,\xi]} \\
= &\int dX d\xi \sum_{G:\text{graph}} \prod_{(ij):\text{bond of } G}
\begin{cases}
\left(\frac{tr(S^4_{(ij)})}{4}\right) & : (8\,\text{重結合}) \\
\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{tr(S^4_{(ij)})}{4}\Big)^2 + \frac{tr(S^8_{(ij)})}{8}\right) & : (16\,\text{重結合})
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.129}
$$

となる。さらにこの ξ 積分を実行した後どんなグラフが残るかを見るために、スピノール ξ^i_α の成分について考える。まず、スピノールの第 1 成分 ξ^i_1 に注目する。すると式（2.128）は

$$
\int dX \int \prod_{i=1}^{N-1} d\xi^i_2 \cdots d\xi^i_{16} \prod_{i=1}^{N-1} d\xi^i_1 \prod_{i<j} (C_0 + C_1 \cdot (\xi^i_1 - \xi^j_1)),
\tag{2.130}
$$

と書かれる。ただし C_0 と C_1 は $x^{ij}_{\mu=0}, \cdots, x^{ij}_{\mu=9}$ と、$\xi^{ij}_{\alpha=2}, \cdots, \xi^{ij}_{\alpha=16}$ から作られている多項式である。これもグラフで考え、2 項目を 1 本線で表すとすると、次のことが分かる。

１.）ξ^i_1 は i について $N-1$ の独立な成分を持つので、フェルミオンの積分の性

質から $\xi_1^i \cdots \xi_1^{N-1}$ のみの寄与を与える。つまりグラフ的に（$N-1$）本の線で描かれているものだけ残る。

２.）もしグラフにループがあれば、次のようなデルタ関数の積となり、寄与はなくなる。

$$\delta(\xi_1^{i_1} - \xi_1^{i_2})\delta(\xi_1^{i_2} - \xi_1^{i_3}) \cdots \delta(\xi_1^{i_{(k-1)}} - \xi_1^{i_k})\delta(\xi_1^{i_k} - \xi_1^{i_1}) = 0. \tag{2.131}$$

以上より ξ_1^i の作るグラフはループが無く、すべが連結しているものに限られる。つまり maximal tree 的な構造になっているのが分かる。残りの $\xi_{\alpha=2,\cdots,16}^i$ についても同じことが言え、全体としてそれらの重ね合わせとなる。しかし、それらのすべてが効くわけではなく、式（2.129）より、それぞれは 8 重結合か 16 重結合になっていなければならない。その中で、特に、8 重結合は考えず、16 重結合だけからなるものを考えると、それはブランチドポリマー的構造になっている。

2.4.2　遠距離での収束性

ここでは、有限の N での g の摂動のすべてのオーダーで X 積分が収束することを述べる。特に、各オーダーでの部分的な発散も無いことを示す。一般に、M 次元空間 $\mathbf{R}^M$ の任意の超平面上の積分の見かけの発散次数が負であれば、M 次元空間の多重積分は収束するという数学の定理を使って説明する。

まず、線形変換

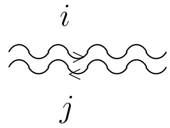
$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{N-1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{N-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^{N-1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^{N-1} \end{pmatrix}, \tag{2.132}$$

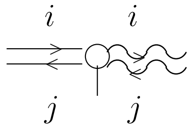
を適用し、$y^1 \cdots y^m$ を大きな値とし、$y^{m+1} \cdots y^{N-1}$ を固定する場合を考える。つまり、m 次元の超平面を考える。このとき、

$$\int dX e^{-S_{\mathrm{eff}}[X]} \longrightarrow \int dy_\mu^1 \cdots dy_\mu^m e^{-S_{\mathrm{eff}}[y]}, \tag{2.133}$$

となり、さらに式（2.119）よりファイマンルールは

$$< \tilde{\psi}^{ij} \bar{\tilde{\psi}}^{ij} > \equiv \overset{i}{\underset{j}{\rightleftarrows}} = -\frac{1}{(x^i - x^j)_\mu \Gamma^\mu}, \tag{2.134}$$

$$< \tilde{A}^{ij}_{\mu} \tilde{A}^{*ij}_{\nu} > \equiv \quad \mu$$

$$\nu \qquad = \frac{\eta_{\mu\nu}}{(x^i - x^j)^2}, \tag{2.135}$$

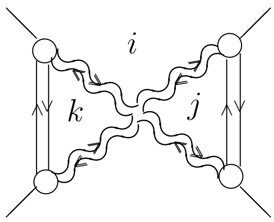
$$\tilde{A}\tilde{\psi}\xi \text{ vertex } \equiv$$

$$\mu \qquad = \Gamma^{\mu}(\xi^i - \xi^j). \tag{2.136}$$

このファイマンルールより、有効作用は $(\xi^i - \xi^j)(x^i - x^j)^{-\frac{3}{2}}$ のべきで出てくる。今、これに（2.132）の線形変換をさせると、$(\sum_k C^{ij}_k \eta^k)(\sum_k C^{ij}_k y^k)^{-\frac{3}{2}}$ となる。η が 16 成分であることを考えれば、η 積分の後、

$$|\ e^{-S_{\text{eff}}[y]}\ |\ < \ \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} \prod_{\alpha=1}^{16} y_{i\alpha}^{-\frac{3}{2}}} \tag{2.137}$$

であることが分かる。よって m 次元の超平面の見かけの発散次数は負となる。

次に 1-ループだけでなく、高次の相互作用までみる。例えば次のようなダイアグラムは



$$\propto \quad \frac{(\xi^{ij})^2}{(x^{ij})^3} \frac{(\xi^{ik})^2}{(x^{ik})^3} \frac{g^2}{((x^{ij})^2 (x^{ik})^2)}$$

$$= \quad (\xi^{ij}(x^{ij})^{-\frac{3}{2}})^4 \frac{g^2}{(x^{ij})^4}, \tag{2.138}$$

となる。この場合 $\xi^{ij}(x^{ij})^{-\frac{3}{2}}$ のべき以外に $(x^{ij})^{-4}$ の次数を含み、より収束性が良くなることが分かる。

2.4.3　短距離での振る舞い

上の副節では、対角成分同士の間の距離が十分離れている場合について見てきた。ここでは、対角成分同士の間の距離が小さい場合、時空作用に対する有効作用にはどのような性質があるのかについて見ていく。具体的には、行列の 2 成分間の距離は小さく、その他は離れている場合を考える。

まず、$N \times N$ の行列を左上の 2×2 の行列とそれ以外に分け、2×2 の行列の対角成分の間の距離が小さい場合を考える。$(N-2) \times (N-2)$ の行列の非対角成

分と $2 \times (N-2)$ の行列について積分し、その後の残った自由度について書くと、

$$
\begin{aligned}
A_\mu &\ni \begin{pmatrix} A_\mu^{U(2)} & & & \\ & x_\mu^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_\mu^N \end{pmatrix}, \qquad A_\mu^{U(2)} = x_\mu \mathbf{1} + A_\mu^{SU(2)}, \quad (2.139) \\
\psi &\ni \begin{pmatrix} \psi^{U(2)} & & & \\ & \xi^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^N \end{pmatrix}, \qquad \psi^{U(2)} = \xi \mathbf{1} + \psi^{SU(2)}. \quad (2.140)
\end{aligned}
$$

である。2×2 の行列と $(N-2) \times (N-2)$ の行列の非対角成分に対する有効作用は

$$
\begin{aligned}
& S_{\mathrm{eff}}[A_\mu^{SU(2)}, \psi^{SU(2)}; x_\mu, \xi; x_\mu^3, \cdots, x_\mu^N, \xi^3, \cdots, \xi^N] \\
= \ & S[A_\mu^{SU(2)}, \psi^{SU(2)}] \\
& + S'_{\mathrm{eff}}[x_\mu, \xi; x_\mu^3, \cdots, x_\mu^N, \xi^3, \cdots, \xi^N] \\
& + S_{\mathrm{int}}[A_\mu^{SU(2)}, \psi^{SU(2)}; x_\mu, \xi; x_\mu^3, \cdots, x_\mu^N, \xi^3, \cdots, \xi^N] \qquad (2.141)
\end{aligned}
$$

１項目はもとの作用の $SU(2)$ 部分である。２項目は x_μ, ξ と $(N-2) \times (N-2)$ 行列の対角成分との相互作用で、2.4.1 でみたように、対角成分同士の距離が十分離れている場合に相当する。３項目は $SU(2)$ 部分と $(N-2) \times (N-2)$ 行列の対角成分との相互作用を示し、１項目に比べてその寄与は小さいので無視する。

今見たいのは $SU(2)$ 部分で、その２点の相対座標のダイナミクスを見たい。[6] の付録 B で解析されているように $SU(2)$ 部分の相対座標 r_μ の分布は

$$
\begin{aligned}
& \int d^{10} r f(r) = \int d^{10} r e^{\log f(r)}, \\
& f(r) \sim \begin{cases} 1/r^{24} & r^2 \gg g \\ r^8 & r^2 \ll g \end{cases} \qquad (2.142)
\end{aligned}
$$

となっている。よって、これより２点の座標が近い時には、$-8 \log r$ 型の斥力が生じていることがわかる。今、これは $SU(2)$ が１ブロックについて考えた。同じ様にして、$SU(2)$ が２ブロック以上や $SU(3), SU(4), \cdots$ について解いていくこと

も可能である。ここではこれ以上見ないが、$SU(2)$ の例で見たような斥力が生じていると思われる。よって対角成分同士の間の距離が小さい場合は、

$$S_{\rm core}[X] = \sum_{i<j} g(x^i - x^j), \tag{2.143}$$

ただし

$$g(x^i - x^j) = \begin{cases} -4\ln((x^i - x^j)^2/g) & \text{for } (x^i - x^j)^2 \ll g \\ 0 & \text{for } (x^i - x^j)^2 \gg g \end{cases}, \tag{2.144}$$

のようなポテンシャルがある。

この章の最後に、非摂動的定式化として期待される性質として、時空のダイナミカルな生成についてもう少し述べる。まず、分配関数での経路積分の計算を考える。

$$Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{-\frac{1}{g^2}Tr\left(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu,\psi]\right)}. \tag{2.145}$$

この時、フェルミオン ψ についてのこの積分はパフィアンとなり、そこから来る位相は一般に複素数である。そのため、ボゾン A_μ についての積分の段階で、この位相のせいで相殺が起こり、寄与は小さくなる。しかし時空次元が低次元におちると、その位相は実数となり [2] 相殺は起こらないのである [28]。このことから時空次元は低次元が好まれることが分かる。

さらに 2.4.1 で述べたように、IIB 行列模型において、時空構造にはブランチドポリマー的構造がみえることを述べた。そしてそのブランチドポリマーのハウスドルフ次元は 4 であることも分っている [29]。ハウスドルフ次元とは、系全体を密度一定に押し潰したら、どのくらいまで押し潰されるかというものである。よって時空の次元は 4 次元以下にはおちないと思われる。

このように低次元が好まれることと、ブランチドポリマーのハウスドルフ次元が 4 であるという 2 点より、4 次元の時空が生成される可能性は高いと思われる。

その他、時空の 4 次元性については [7, 8] でも解析されている。[7] では改良された平均場近似を用いて、4 次元時空の可能性について議論されている。そこでは我々の住む時空を d 次元とし、残りの $10-d$ 次元がコンパクト化され、IIB 行列模型が持つ 10 次元ローレンツ対称性 $SO(10)$ が $SO(d)$ に自発的に破れたと仮

定する。そして、その自由エネルギーを計算し、最も安定する d の値を調べている。また、我々の時空の拡がりを R、コンパクト化された空間の拡がりを r とし、その比 R/r が大きくなるような d の値を調べている。その結果 $SO(4)$ $(d = 4)$ のときが最も自由エネルギーが低く、R/r が大きくなっていることが示されている。

2.5 非可換ヤン・ミルズ理論の実現

この節ではIIB行列模型における非可換幾何との関係について述べる。IIB行列模型は行列からなるので、非可換幾何と関係するのは自然であり、このIIB行列模型から非可換ヤン・ミルズ理論が自然に実現させせることができることを説明する [10]。

IIB行列模型の古典的運動方程式は $[A_i, [A_i, A_j]] = 0$ で与えられる。ここで、

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = iB_{ij}, \tag{2.146}$$

を満たす古典解を持ってくる。ただし、$\hat{p}_i$ は非可換運動量で、B_{ij} はc-数である。よって、(2.146) は運動方程式を満たす。行列 B_{ij} のランクを $\tilde{d}$ とする。ここで、行列 A_i を古典解 $\hat{p}_i$ と量子揺らぎ $\hat{a}_i$ に分ける：$A_i = \hat{p}_i + \hat{a}_i$。そして、この量子揺らぎにおいてフーリエ変換を施す：

$$\hat{a}_i = \sum_k \tilde{a}_i(k) \exp(iC^{ij} k_i \hat{p}_j), \quad \hat{\psi} = \sum_k \tilde{\psi}(k) \exp(iC^{ij} k_i \hat{p}_j), \tag{2.147}$$

ただし、C^{ij} は B_{ij} の逆行列とする (つまり、 $C^{ij} B_{jk} = \delta^i_k$)。行列はエルミートなので $\tilde{a}^\star(k) = \tilde{a}(-k)$ と $\tilde{\psi}^\star(k) = \tilde{\psi}(-k)$ を要求する。

ここでまず2つの行列の積を考える。キャンベル・ベーカー・ハウスドルフの公式 $e^A e^B = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B] \cdots)$ を使うことで、

$$\begin{aligned}
\hat{a}_i \hat{b}_j &= \sum_{k,l} \tilde{a}_i(k) \tilde{b}_j(l) \exp(iC^{rs} k_r \hat{p}_s) \exp(iC^{tu} l_t \hat{p}_u) \\
&= \sum_{k,l} \tilde{a}_i(k) \tilde{b}_j(l) \exp(iC^{rs}(k_r + l_r)\hat{p}_s + \frac{i^2}{2} C^{rs} C^{tu} k_r l_t i B_{su}) \\
&= \sum_{k,l} \tilde{a}_i(k) \tilde{b}_j(l) \exp(iC^{rs}(k_r + l_r)\hat{p}_s + \frac{-1}{2} C^{rs} C^{tu} k_r l_t i(-B_{us})) \\
&= \sum_{k,l} \tilde{a}_i(k) \tilde{b}_j(l) \exp(iC^{rs}(k_r + l_r)\hat{p}_s + \frac{i}{2} C^{rs} k_r l_s).
\end{aligned} \tag{2.148}$$

を得る。

次に、簡単な場合 (2次元) について、行列のトレースを考える。この系では非可換パラメータ $B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ である (つまり、 $C^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ -B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$)。

さらに、古典解を $[\hat{q},\hat{p}]=+i$ となるように $\hat{p}_0=\hat{q}$ と $\hat{p}_1=\hat{p}$ とする。そうすると、

$$\begin{aligned} Tr\exp(iC^{ij}k_i\hat{p}_j) &= Tr\exp(iB^{-1}(k_0\hat{p}-k_1\hat{q})) \\ &= \int dq\langle q|\exp(ik_0\hat{p}B^{-1})\exp(-ik_1\hat{q}B^{-1})\exp(ik_0k_1B^{-1})|q\rangle \\ &= 2\pi B\delta(k_0)\delta(k_1)=(2\pi)^2\frac{1}{2\pi}\sqrt{\det B}\delta(k_0)\delta(k_1). \end{aligned} \tag{2.149}$$

最後に随伴演算子 $P_i\hat{o}=[\hat{p}_i,\hat{o}]$ の作用を考える。これは $\hat{a}_i$ に次のように作用する：

$$P_i\hat{a}_j = [\hat{p}_i,\hat{a}_j]=\sum_k\tilde{a}_j(k)[\hat{p}_i,\exp(iC^{lm}k_l\hat{p}_m)]=\sum_k k_i\tilde{a}_j\exp(iC^{lm}k_l\hat{p}_m). \tag{2.150}$$

これらの関係 (2.148), (2.149) と (2.150) を踏まえて、IIB 行列模型から非可換ヤン・ミルズ理論への変換ルールを考える。

- IIB 行列模型での $\hat{a}_i$ を非可換ヤン・ミルズ理論側で $\tilde{a}_i(k)\exp(ik_jx^j)$ に変換する。

$$\hat{a}_i \longrightarrow \sum_k\tilde{a}_i(k)\exp(ik_jx^j) \tag{2.151}$$

  これは $N\times N$ 行列から c-数の関数への変換である。後で見るように、これは $U(1)$ 非可換ヤン・ミルズ理論への変換である。

- (2.148) の関係は行列の積が非可換ヤン・ミルズ理論では星積に変換することを意味する。

$$\hat{a}_i\hat{b}_j \longrightarrow a_i(x)\star b_j(x)\equiv\exp(\frac{iC^{lm}}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^l\partial\eta^m})a_i(x+\xi)b_j(x+\eta)|_{\xi=\eta=0}. \tag{2.152}$$

  非可換性はキャンベル・ベーカー・ハウスドルフの位相因子からきている。

- (2.149) の関係式は $N\times N$ 行列のトレースが時空に関する積分に置き換わることを意味する：

$$Tr(\hat{a}_i)\longrightarrow\sqrt{\det B}(\frac{1}{2\pi})^{\frac{\tilde{d}}{2}}\int d^{\tilde{d}}xa(x), \tag{2.153}$$

  ただし、$\tilde{d}$ は行列 B_{ij} のランクで、それはマップされた理論での時空の次元に相当する。

- (2.150) の関係式は随伴演算子 P_i が $\tilde{d}$ 次元の非可換ヤン・ミルズ理論での $a(x)$ に対する微分と解釈できることを意味する：

$$P_i \hat{a}_j (= [p_i, \hat{a}_j]) \longrightarrow -i\partial_i. \tag{2.154}$$

それゆえ、IIB 行列模型での A_i との交換子は共変微分に変わる：

$$[A_i, \hat{o}] = [\hat{p}_i + \hat{a}_i, \hat{o}] \quad \longrightarrow \quad D_i o(x) = -i\partial_i o(x) + a_i(x) \star o(x) - o(x) \star a_i(x). \tag{2.155}$$

特に、共変微分どうしの交換子は場の強さを表す：

$$[A_i, A_j] \longrightarrow -i(\partial_i a_j(x) - \partial_j a_i(x)) + [a_i(x), a_j(x)]_\star \equiv F_{ij}. \tag{2.156}$$

- この変換ルールによって IIB 行列模型での運動量から座標が現われる。(2.151) の変換から IIB 行列模型から非可換ヤン・ミルズ理論の座標を出すことができる：

$$C^{ij} \hat{p}_j \longrightarrow x^i. \tag{2.157}$$

これは普通の量子力学での座標と運動量との交換関係が非ゼロになるというのと同じで、時空の非可換性は空間の量子化であり、行列の運動量から座標が自然に出てきたということは、普通の量子力学と時空の量子化としての非可換代数とは強く関係していることが分かる。

さらに (2.151) は次の特徴も持つ。長波長 ($|k| \ll \lambda$)、つまり低エネルギー $E \sim \frac{hc}{波長\lambda}$ では $\hat{a}_i$ は交換する：

$$\begin{aligned}
[\hat{a}_i \ , \ \hat{a}_j] &= \sum_{k,l} \tilde{a}_i(k) \tilde{a}_j(l) [\exp(iC^{rs} k_r \hat{p}_s) \ , \ \exp(iC^{tu} l_t \hat{p}_u)] \\
&= \sum_{k,l} \tilde{a}_i(k) \tilde{a}_j(l) \exp(iC^{rs}(k_r + l_r)\hat{p}_s) \\
&\quad \times (\exp(\frac{i^2}{2} C^{rs} C^{tu} k_r l_t i B_{su}) - \exp(\frac{i^2}{2} C^{rs} C^{tu} k_r l_t i B_{us})) \\
&\overset{B_{su}=-B_{us}}{=} 2i \sum_{k,l} \tilde{a}_i(k) \tilde{a}_j(l) \exp(iC^{rs}(k_r + l_r)\hat{p}_s) \sin(\frac{1}{2} C^{rs} k_r l_s).
\end{aligned} \tag{2.158}$$

低エネルギー極限は空間 $x^i = C^{ij}\hat{p}_j$ の準古典極限とみなすことができる。よってこの変換をすることで IIB 行列模型から $\tilde{d}$ 次元非可換ヤン・ミルズ理論が得られる：

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{g^2}Tr\left(\frac{1}{4}[A_i,A_j][A^i,A^j]+\frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^i[A_i,\psi]\right) \\
\longrightarrow\ & \frac{\tilde{d}nB^2}{4g^2}-\sqrt{\det B}\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{\frac{\tilde{d}}{2}}\int d^{\tilde{d}}x\frac{1}{g^2}\Big(\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} \\
& +\frac{1}{2}[D_a,\alpha_\rho][D^a,\alpha^\rho]+\frac{1}{4}[\alpha_\rho,\alpha_\chi][\alpha^\rho,\alpha^\chi]+\frac{1}{2}\Big(\bar{\psi}\Gamma^a[D_a,\psi]+\bar{\psi}\Gamma^\rho[\alpha_\rho,\psi]\Big)\Big)_\star .
\end{aligned}
\tag{2.159}
$$

IIB 行列模型の行列が関数に変換されたので、この非可換ヤン・ミルズ理論は $U(1)$ ゲージ群を持つ。ヤン・ミルズ結合は $g_{YM}=g^2(\frac{2\pi}{B})^{\frac{\tilde{d}}{2}}$ である。添え字 $a,b,\cdots$ は変換された非可換ヤン・ミルズ理論の $\tilde{d}$ 次元時空まではしる。又、共変微分の交換子は場の強さ $F_{ab}=[D_a,D_b]_\star$ である。

さらに、$U(m)$ ゲージ群を持つ非可換ヤン・ミルズ理論も得ることができる。それは

$$
\hat{p}_i \longrightarrow \hat{p}_i\otimes\mathbf{1}_m, \tag{2.160}
$$

とすることで得られる。フーリエ展開は

$$
\hat{a}_i=\sum_k\tilde{a}_i(k)_{m\times m}\exp(iC^{ij}k_i\hat{p}_j),\ \ \hat{\psi}=\sum_k\tilde{\psi}(k)_{m\times m}\exp(iC^{ij}k_i\hat{p}_j), \tag{2.161}
$$

となる。ただし、$\tilde{a}_i(k)$ と $\tilde{\psi}(k)$ は $m\times m$ 行列である。

3　ギンスパーグ・ウィルソン関係式とインデックス定理

前章で見たように IIB 行列模型は超弦理論の非摂動定式化として多くの証拠が挙げられ、IIB 行列模型の持つ特徴から最も基本的な理論としてふさわしいと思われる。しかし、IIB 行列模型が最も基本的な理論であるというためには、IIB 行列模型において我々の住む 4 次元時空でのカイラル・フェルミオンを実現させることが必要である。そのためには、IIB 行列模型において、我々の住む 4 次元時空以外の余剰次元空間で、非自明なインデックスを持たせる必要がある。この章では、余剰次元空間として非可換 2 次元球面を考え、その上で明白にインデックスを出すディラック演算子の構成方法を説明する。そして、そのディラック演算子のインデックスがトポロジカル・チャージと関係することをみることで、インデックス定理が成り立つことを見る。さらに、非自明なトポロジカル・チャージを持つ配位としてモノポール配位を考え、その配位に対して、トポロジカル・チャージがゼロでない値を持つことを見る。

3.1　非可換 2 次元球面上のディラック演算子

この節では非可換 2 次元球面上でのディラック演算子とその特徴について考える。まず、非可換 2 次元球面は 2.2.1 で述べたように、座標として $x_i = \alpha L_i$ を考えることで得られる。ただし L_i は $SU(2)$ 代数の n 次元既約表現行列である。ここで、演算子の意味でつけていた $\wedge$ は省いた。この後も必要なとき以外は省略する。また、2.2.1 では既約表現 L_i は N 次元行列としたが、この後の議論のため n 次元とした。非可換 2 次元球面上の波動関数は $n \times n$ 行列で書かれる。また、それは (2.22) で見たように非可換球面調和関数 $\hat{Y}_{lm}$ で展開される。ただし角運動量 l は上限 $n-1$ を持つ。また、2 次元球面上での微分 $\mathcal{L}_i$ は非可換 2 次元球面上では、任意のエルミート行列 $\hat{M}$ に対して L_i の随伴演算子として作用する：

$$\mathcal{L}_i M(\Omega) = -i\epsilon_{ijk} x_j \partial_k M(\Omega) \longleftrightarrow \tilde{L}_i \hat{M} = [L_i, \hat{M}] = (L_i^L - L_i^R)\hat{M}. \tag{3.1}$$

ただし、L_i の右肩についている $L, (R)$ は、その演算子が行列に対して左、(右) から作用することを意味する。また、球面上での積分は行列のトレースによって与

えられる：

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} M(\Omega) \longleftrightarrow \frac{1}{n}\mathrm{tr}[\hat{M}]. \tag{3.2}$$

現在、そのような非可換2次元球面において、対称性とダブラーの有無から次の3つのタイプのディラック演算子が構成されている：D_{GKP}[19, 15],D_{WW}[18],D_{GW}[20]。これらの3つのタイプのディラック演算子の特性を表1にまとめた。D_{WW}は格子

表 1: D_{WW}, D_{GKP},D_{GW} の特徴

Dirac op.	カイラル対称性	ダブラーフリー	Index	格子ゲージ理論との対応
D_{WW}	◯	×	いつもゼロ	素朴なフェルミオン
D_{GKP}	×	◯	見にくい	ウィルソン・フェルミオン
D_{GW}	△	◯	見やすい	GW フェルミオン

ゲージ理論での素朴なディラック演算子に対応するもので、カイラル対称性を明白に持つが、ダブラーのためカイラリティ正と負の状態が同じ数だけもつのでインデックスはいつもゼロになる。D_{GKP}は格子ゲージ理論でのウィルソンタイプのディラック演算子に対応し、ダブラーフリーになるように構成されている。しかしカイラル対称性を持たないのでインデックスが見えにくい形になっている。D_{GW}は格子ゲージ理論でのギンスパーグ・ウィルソン・ディラック演算子[30]に対応し、GW 関係式を満たすように構成され、ダブラーも無い。よって、インデックスが見やすい形になっている[1]。3.1.1ではD_{GKP}とその特徴について簡単に説明し、3.1.2では、インデックスを明白に見ることができるGW ディラック演算子D_{GW}の構成方法とインデックス定理について説明する。

3.1.1 GKP ディラック演算子 D_{GKP}

この副節ではウィルソンタイプのディラック演算子であるD_{GKP}について見る。このディラック演算子は[19, 15]で構成されている。そのフェルミオン作用とディ

[1]GW 関係式は格子ゲージ理論で発展した。有限カットオフでのカイラル対称性[31, 32]やインデックス定理[33, 31]はGW ディラック演算子を用いることで実現されている。

ラック演算子は

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{GKP}} &= \mathrm{tr}[\bar{\Psi} D_{\mathrm{GKP}} \Psi], & (3.3)\\
D_{\mathrm{GKP}} &= \sigma_i(\tilde{L}_i + \rho a_i) + 1, & (3.4)
\end{aligned}
$$

によって与えられる。a_i は $U(k)$ ゲージ群のゲージ場で、Ψ はゲージ群の基本表現のフェルミオン場である。a_i と Ψ はそれぞれ $nk \times nk$ と $nk \times n$ のエルミート行列で表される。この作用は次のゲージ変換の下で不変である：

$$
\begin{aligned}
\Psi &\to U\Psi,\\
\bar{\Psi} &\to \bar{\Psi}U^\dagger,\\
a_i &\to Ua_iU^\dagger + \frac{1}{\rho}(UL_iU^\dagger - L_i). \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

なぜなら、ボゾン的な行列 A_i は

$$A_i \equiv L_i + \rho a_i, \tag{3.6}$$

のように共変座標としてかかれており、次のように共変的に変換するからである：

$$A_i \to UA_iU^\dagger. \tag{3.7}$$

　可換極限をとると、そのディラック演算子 (3.4) は

$$D_{\mathrm{GKP}} \to D_{\mathrm{com}} = \sigma_i(\mathcal{L}_i + \rho a_i) + 1, \tag{3.8}$$

となる。これは可換 2 次元球面上の普通のディラック演算子である。3 次元空間でのゲージ場 a_i は次のように 2 次球面上の接線成分 a'_i と、垂直成分 ϕ に分解することができる：

$$
\left\{
\begin{aligned}
a'_i &= \epsilon_{ijk} n_j a_k,\\
\phi &= n_i a_i,
\end{aligned}
\right. \tag{3.9}
$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_i = -\epsilon_{ijk} n_j a'_k + n_i \phi. \tag{3.10}$$

ただし、$n_i = x_i/\rho$ は x_i 方向の単位ベクトルである。垂直成分 ϕ は 2 次元球面上のスカラー場である。よって、ディラック演算子 D_{com} と D_{GKP} はスカラー場と結合している。

ここで、次のようなカイラリティ演算子を考える：

$$\Gamma^R = a\left(\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}\right). \tag{3.11}$$

ただし、

$$a = \frac{2}{n}, \tag{3.12}$$

は格子理論での格子間隔に相当するものとして導入した。σ_i はパウリ行列で、Γ^R は行列とスピノール空間に作用する演算子である。また $(\Gamma^R)^2 = 1$ となる。その演算子の可換極限をとると

$$\gamma = n_i \sigma_i, \tag{3.13}$$

となる。これは普通の 2 次元球面上のカイラリティ演算子になる。ディラック演算子 D_{GKP} とこのカイラリティ演算子 Γ^R との反交換子を考えると

$$D_{\mathrm{GKP}}\Gamma^R + \Gamma^R D_{\mathrm{GKP}} = 2a(\tilde{L}_i + \rho a_i)L_i^R - aD_{\mathrm{GKP}}, \tag{3.14}$$

となり、ディラック演算子 D_{GKP} はカイラリティ演算子 Γ^R と反交換しない。また、このディラック演算子 D_{GKP} のスペクトルは付録 D で求めている。そのスペクトルをみると分かるようにダブラーは無い。しかし上で述べたように、ディラック演算子 D_{GKP} はスカラー場と結合しており、インデックスが見にくくなっている。よって次の副節では、インデックスが明白に見えるディラック演算子の定式化をする。

3.1.2 GW ディラック演算子 D_{GW} とインデックス定理

この副節では、非自明な位相不変量をもつ配位が非自明なインデックスを与える定式化を行う。まず、GW 関係式を満たすディラック演算子を定義し、それが非自明な位相不変量と関係すること、つまりインデックス定理が成り立つことを説明する。そしてそれが非自明な配位に対して、ゼロでない値を持つことをみる。[20] では一般の非可換多様体上で任意のゲージ場と結合した形で GW ディラック演算子を一般的に定式化している。まず、2 つのカイラリティ演算子を定義する：

$$\begin{aligned} \Gamma^R &= a\left(\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}\right), & (3.15)\\ \hat{\Gamma} &= \frac{H}{\sqrt{H^2}}. & (3.16) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} H &= a\left(\sigma_i A_i + \frac{1}{2}\right) && (3.17) \\ &= \Gamma^R + aD_{\mathrm{GKP}}, && (3.18) \end{aligned}$$

で、A_i は (3.6) で定義された共変座標である。ここでの $\hat{\Gamma}$ の $\wedge$ は演算子の意味ではない。これらのカイラリティ演算子は

$$(\Gamma^R)^\dagger = \Gamma^R,\ (\hat{\Gamma})^\dagger = \hat{\Gamma},\ (\Gamma^R)^2 = (\hat{\Gamma})^2 = 1, \tag{3.19}$$

を満たす。可換極限をとると、Γ^R も $\hat{\Gamma}$ も可換な 2 次元球面上のカイラリティ演算子になる：$\gamma = n_i\sigma_i$。

次に、GW ディラック演算子を

$$D_{\mathrm{GW}} = -a^{-1}\Gamma^R(1-\Gamma^R\hat{\Gamma}), \tag{3.20}$$

と定義する。その時の作用は

$$S_{\mathrm{GW}} = \mathrm{tr}[\bar{\Psi}D_{\mathrm{GW}}\Psi], \tag{3.21}$$

で書け、ゲージ変換 (3.5) の下で不変である。この可換極限をとると、D_{GW} は

$$D_{\mathrm{GW}} \to D'_{\mathrm{com}} = \sigma_i(\mathcal{L}_i + \rho P_{ij}a_j) + 1, \tag{3.22}$$

となる。ただし、$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ は球面上の接線方向への射影演算子である。よってこのディラック演算子 D'_{com} はスカラー場と結合していない可換な 2 次元球面上のディラック演算子になっている。

GW ディラック演算子 (3.20) の定義により、GW 関係式

$$\Gamma^R D_{\mathrm{GW}} + D_{\mathrm{GW}}\hat{\Gamma} = 0, \tag{3.23}$$

が満たされている。この関係は GW ディラック演算子 (3.20) の左から Γ^R を掛けたものと、右から $\hat{\Gamma}$ を掛けたものを考えることですぐに分かる。よって、次のインデックス定理が満たされる：

$$\mathrm{Index}(D_{\mathrm{GW}}) \equiv (n_+ - n_-) = \frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma^R + \hat{\Gamma}). \tag{3.24}$$

ただし、$n_\pm$ は $D_{\rm GW}$ の固有値がゼロの Γ^R か $\hat{\Gamma}$ に対するカイラリティが正 (または負) の固有状態の数を表す。また、$\mathcal{T}r$ は行列に作用する演算子のトレースである。また (3.24) では、GW ディラック演算子 (3.20) の非ゼロモードはカイラリティ演算子 Γ^R と $\hat{\Gamma}$ に対するカイラリティが正と負で互いに相殺していて、ゼロモード空間ではカイラリティ演算子 Γ^R のカイラリティ正と負の状態と $\hat{\Gamma}$ のカイラリティ正と負の状態がそれぞれ同じ数だけでるので、この関係が成り立つ。詳しい証明は付録 B に書く。

(3.24) の右辺は次の特徴を持つので、トポロジカル・チャージと呼ぶ。

(1) Γ^R と $\hat{\Gamma}$ がサイン演算子の形をしているので、その (3.24) の右辺は整数値のみをとる。

(2) 可換極限をとると、2 次元球面上のチャーン類になる。

(3) トポロジカル・チャージの定義を少し修正することで、非自明な配位に対して非ゼロの値をもつ。

ここで (2) について説明する。今、弱ゲージ場と思い、(3.24) の右辺をゲージ場 a_i の 2 次まで展開し、σ のトレースをとると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma^R+\hat{\Gamma}) \quad = \quad & \frac{a^2\rho^2}{\alpha} i\ \mathrm{tr}\Big([L_i, a'_i]\Big) \\
& +\mathrm{tr}\Bigg(\frac{3}{8}a^4\rho^2\Big\{[L_i,a_i]^2 - 4\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 (a'_i)^2 + 4i\frac{\rho}{\alpha}L_i\{[L_j,a_j],a'_i\} \\
& -8i\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 \epsilon_{ijk}L_i a'_j a'_k\Big\} - a^2\rho^2 i\frac{\rho}{\alpha}[a_i,a'_i]\Bigg) \\
& +\mathcal{O}(a_i'^3), \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$a'_i = \frac{\alpha}{2\rho}\epsilon_{ijk}(L_j a_k + a_k L_j), \qquad (3.26)$$

で、可換極限をとるとゲージ場 a_i の接線成分、つまり 2 次元球面上のゲージ場になる。(3.25) の可換極限をとると

$$\rho^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi}\mathrm{tr}\Big[\epsilon_{ijk}\frac{x_i}{\rho}F_{jk}\Big], \qquad (3.27)$$

となる。ただし、トレースは非アーベリアン・ゲージ群についてのトレースで、F_{jk} は次で定義される場の強さである：$F_{jk} = \partial_j a'_k - \partial_k a'_j - i[a'_j, a'_k]$,$a'_i = \epsilon_{ijk}x_j a_k/\rho$.

また、可換極限ではゲージ場 a_i の高次の項からの寄与は消える。可換極限をとった結果の (3.27) はまさに 2 次元球面上のチャーン類である。

(3) については次の節でみる。

3.2 モノポール配位

非自明なトポロジカル・チャージを持つ配位[2]として、TP モノポール配位が非可換 2 次元球面上の $U(2)$ ゲージ理論において構成された [23, 22]。TP モノポール配位は

$$A_i = L_i^{(n)} \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_n \otimes \frac{\tau_i}{2}, \tag{3.28}$$

によって与えられる。ただし、A_i は (3.6) の形で、$L_i^{(n)}$ は $SU(2)$ 代数の n 次元表現、全行列サイズは $N = 2n$ である。ゲージ場は

$$a_i = \frac{1}{\rho}\mathbf{1}_n \otimes \frac{\tau_i}{2}, \tag{3.29}$$

で与えられる。(3.29) の可換極限をとると

$$a_i(x) = \frac{1}{\rho}\frac{\tau_i}{2}, \tag{3.30}$$

となり、もし $a_i = a_i^a \tau^a/2$ にように分解してやると

$$a_i^a(x) = \frac{1}{\rho}\delta_{ia}, \tag{3.31}$$

となる。さらに球面に対して接線成分と垂直成分とに分解してやると

$$a_i'^a = \frac{1}{\rho^2}\epsilon_{ija}x_j, \tag{3.32}$$

$$\phi^a = \frac{1}{\rho}n_a, \tag{3.33}$$

となる。これはまさに TP モノポール配位そのものである。

一方、(3.28) の A_i は $SU(2)$ 代数

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, \tag{3.34}$$

[2]非可換幾何において、トポロジカルに非自明な配位は [34, 35, 36, 37, 38, 39] などで、代数的 K-理論や射影モジュールを用いることで構成されている。

を満たすので、次のように既約分解できる：

$$A_i = U \begin{pmatrix} L_i^{(n+1)} & \\ & L_i^{(n-1)} \end{pmatrix} U^\dagger. \tag{3.35}$$

つまり、TP モノポール配位は行列のサイズの差が 2 で、幾何学上半径の異なる 2 つの同心非可換球面とみなせる。もっと一般的に、行列のサイズの差が $2m$ の異なる 2 つの同心非可換球面は

$$A_i = \begin{pmatrix} L_i^{(n+m)} & \\ & L_i^{(n-m)} \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

と考えれる。$m=0$ の場合は同じ半径の 2 つの非可換 2 次元球面に相当し、その有効作用は非可換 2 次元球面上の $U(2)$ ゲージ理論になっている。$|m|=1$ の場合は TP モノポール配位に相当し、$|m|=n$ の場合は非可換 2 次元球面上の $U(1)$ ゲージ理論になっている。(3.48) で見るように, $|m| \ll n$ の配位はトポロジカル・チャージ $-|m|$ のモノポール配位に相当する。実際にこれらの配位に対してトポロジカル・チャージがゼロでない値 $(-|m|)$ を持つということは次の節で説明する。また、各 m に対する非可換 2 次元球面の概略図を図 2 に描いた。

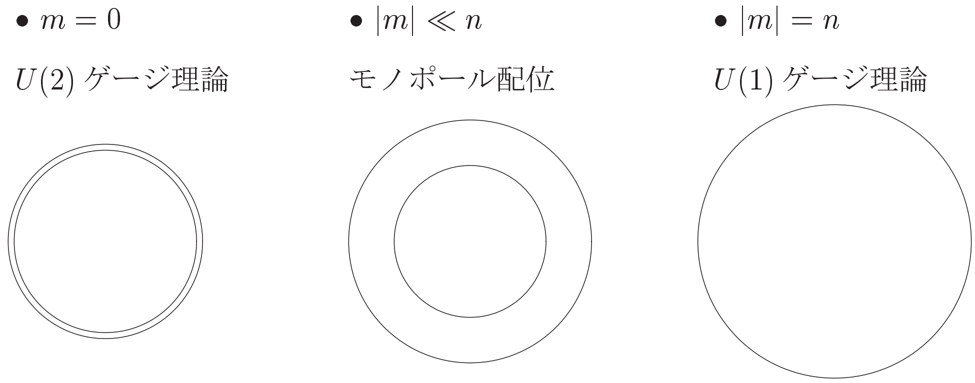


図 2: 各 m に対する非可換 2 次元球面

もし何らかのメカニズムで、$U(2)$ ゲージ理論 ($m=0$ の同じ半径の 2 つの非可換 2 次元球面) が $|m|=1$ の TP モノポール配位や、または $|m| \geq 1$ のもっと一般的なモノポール配位に崩壊するなら、それはインデックスがダイナミカルに生成することを意味する。それは $U(2)$ から $U(1) \times U(1)$ への自発的対称性の破れと

しても理解できる。自発的対称性の破れで残った対称性を見るには次の 2 つ見方がある。

1. (3.35) でのそれぞれの球面は $U(1)$ 対称性を持つので、全体で $U(1) \times U(1)$ 対称性を持つ。

2. $U(2)$ 対称性は $SU(2) \times U(1)$ 対称性と考えれる。そして、TP モノポール配位 (3.29) を考えると、その $SU(2)$ 対称性は $U(1)$ 対称性におちる。

この 2 つの見方は等しい。なぜなら次のことが言えるからである。それぞれの球面の $U(1)$ 対称性の生成子は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n+1} & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ & \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

で与えられる。また、これらは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n+1} & \\ & \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (n-1)\mathbf{1}_{n+1} & \\ & -(n+1)\mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

とみなすこともできる。そして、(3.35) のユニタリー変換 U によって、2 つ目の生成子は

$$U \begin{pmatrix} (n-1)\mathbf{1}_{n+1} & \\ & -(n+1)\mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix} U^{\dagger} = 2L_i\tau_i, \tag{3.39}$$

となる。可換極限で $\alpha L_i\tau_i \to x_i\tau_i$、つまり、TP モノポールの破れていない $U(1)$ 成分の生成子である。

3.3 射影空間でのインデックス定理

(3.24) で、インデックス定理を示した。しかし、TP モノポール配位 (3.36) に対して、インデックスは消える。その理由は、TP モノポール配位は $SU(2)$ ゲージ対称性が $U(1)$ 対称性にこわれ、TP モノポール背景に結合するフェルミオン場が破れていない $U(1)$ ゲージ群の $+1$ と -1 の電荷に相当する 2 つの成分を含み、これらの 2 つの成分はカイラルアノマリーを相殺するからである。つまり、ゼロでないインデックスやトポロジカル・チャージを得るためには、それらの片方をとってくることが必要である。

そのため、次のようなインデックス定理を考える：

$$\mathrm{Index}(P^{(n\pm m)}D_{\mathrm{GW}}) = \frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(n\pm m)}(\Gamma^R + \hat{\Gamma})]. \tag{3.40}$$

ただし、$P^{(n\pm m)}$ は (3.36) の $n \pm m$ 次元の既約表現のヒルベルト空間をとってくる射影演算子である。つまりその射影演算子を挿入することは、2 つの非可換 2 次元球面の 1 つをとってくることを意味する。また、射影演算子を挿入しても、(3.40) の等式は成り立ち、右辺は整数値をとる。

2 つの球面が明白に見れる (3.36) の表現に対して、射影演算子は

$$\begin{aligned} P^{(n\pm m)} &= \frac{(A_i)^2 - \frac{1}{4}[(n\mp m)^2 - 1]}{\frac{1}{4}[(n\pm m)^2 - 1] - \frac{1}{4}[(n\mp m)^2 - 1]} \\ &= \frac{1}{2}(1 \pm T). \end{aligned} \tag{3.41}$$

ただし、

$$T = \frac{2}{nm}\left(A_i^2 - \frac{n^2 + m^2 - 1}{4}\right) \tag{3.42}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{(n+m)} & \\ & -\mathbf{1}_{(n-m)} \end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

一方、共変な形で書いた (3.6) の表現では、(3.42) は

$$T = \frac{2}{nm}\left(\rho\{L_i, a_i\} + \rho^2 a_i^2 - \frac{m^2}{4}\right), \tag{3.44}$$

となる。可換極限では、$|m| \ll n$ の時、これは $\frac{2\rho}{m}\phi$ になる。ただし、ϕ は (3.9) で定義されたスカラー場である。つまり、T はスカラー場に比例する。さらに、(3.43) からわかるように、$T^2 = \mathbf{1}$ となり、T は規格化されている。それゆえ、T は TP モノポールでの、破れていない $U(1)$ ゲージ群の生成子である。よって、T の固有値が ± 1 となる固有状態は破れていない $U(1)$ ゲージ群の電荷 ± 1 をもつフェルミオンの状態に相当する。厳密に言うと、$T \sim \frac{2\rho}{m}\phi$ なので、固有値 ± 1 の T 固有状態は $m > 0$ ($m < 0$) に対して電荷 ± 1 (∓ 1) に相当する。この後は $m \geq 0$ で考える。

つまり、インデックス定理 (3.40) は次のように解釈できる：射影演算子 $P^{(n\pm m)}$ を挿入したものは $+1$ か -1 の電荷を拾い、アノマリーがでるので、ゼロでない

インデックスが得られる。射影演算子 $P^{(n\pm m)}$ が無いと、$+1$ と -1 の電荷からの寄与が相殺してアノマリーが消える。

可換極限において、(3.40) の右辺は

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(n\pm m)}(\Gamma^R+\hat{\Gamma})] \longrightarrow \pm\frac{\rho^2}{8\pi}\int_{S^2} d\Omega\epsilon_{ijk}n_i\phi'^a F^a_{jk}, \tag{3.45}$$

となる。ただし、$\sum_a(\phi'^a)^2 = 1$ であり、ϕ'^a は規格化されたスカラー場である。非可換理論では $T = \phi'^a\tau^a$ と定義できる。また、$F_{jk} = F^a_{jk}\tau^a/2$ は $F_{jk} = \partial_j a'_k - \partial_k a'_j - i[a'_j, a'_k]$ と定義される場の強さである。よって、これはまさに ϕ'^a 成分に射影されたチャーン類である。つまり、TP モノポール配位での、破れていない $U(1)$ 成分の磁荷である。

また、配位 (3.36) に対して、(3.40) の右辺は代数的な計算により

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(n\pm m)}(\Gamma^R+\hat{\Gamma})] = \mp m, \tag{3.46}$$

となる (詳細は付録 C)。よって (3.41) より、

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[T(\Gamma^R+\hat{\Gamma})] = -m. \tag{3.47}$$

$m<0$ の場合も考慮すると

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[T(\Gamma^R+\hat{\Gamma})] = -|m|, \tag{3.48}$$

となる。

4　モノポール配位における $D_{\rm GW}$ のスペクトルとカイラル・ゼロモード

前章では非自明なインデックスを持つディラック演算子として GW 関係式を満たす GW ディラック演算子 $D_{\rm GW}$ を構成し、インデックス定理が成り立つことをみた。そして、インデックス定理の右辺のトポロジカル・チャージが非自明な配位に対して、非ゼロの値を持つことを見た。この章では実際に GW ディラック演算子 $D_{\rm GW}$ のスペクトルを求めて、カイラル・ゼロモードが現れていることを確かめる。そして、そのカイラル・ゼロモードの数を数えることで、前章で計算したトポロジカル・チャージの値と一致することを見る。さらに、この章の最後にカイラル・ゼロモードの具体形も求める。

4.1　モノポール配位における $D_{\rm GW}$ のスペクトル

この節では、モノポール背景場 (3.36) での GW ディラック演算子 (3.20) のスペクトルについて調べる。モノポール配位 (3.36) での GW ディラック演算子 $D_{\rm GW}^m$ は

$$D_{\rm GW}^m = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+m}(\sigma_i L_i^{(n+m)} + \frac{1}{2}) & \\ & \frac{n}{n-m}(\sigma_i L_i^{(n-m)} + \frac{1}{2}) \end{pmatrix} - \left(\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}\right). \tag{4.1}$$

と書ける。

まず、次の演算子を考える：

$$\begin{aligned} M_i &= L_i + a_i - L_i^R + \frac{\sigma_i}{2} && (4.2)\\ &= A_i - L_i^R + \frac{\sigma_i}{2} && (4.3)\\ &= \begin{pmatrix} L_i^{(n+m)} & \\ & L_i^{(n-m)} \end{pmatrix} - L_i^R + \frac{\sigma_i}{2}, && (4.4)\\ T &= \frac{2}{nm}\left(A_i^2 - \frac{n^2+m^2-1}{4}\right) && (4.5)\\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{(n+m)} & \\ & -\mathbf{1}_{(n-m)} \end{pmatrix}, && (4.6) \end{aligned}$$

$$\Gamma^R \;=\; \frac{2}{n}\left(L^R\cdot\sigma-\frac{1}{2}\right). \tag{4.7}$$

ただし、M_i は全角運動量演算子である。T と Γ^R は前に定義したものである。これらの演算子はそれぞれ可換である：

$$[M_i\ ,\ T] \;=\; 0, \tag{4.8}$$

$$\left[M_i\ ,\ \Gamma^R\right] \;=\; 0, \tag{4.9}$$

$$\left[T\ ,\ \Gamma^R\right] \;=\; 0. \tag{4.10}$$

よって、これらの演算子の同時固有状態を次のように考えることができる：

$$M_i^2|J,J_3,\delta,\nu\rangle \;=\; J(J+1)\ |J,J_3,\delta,\nu\rangle, \tag{4.11}$$

$$M_3|J,J_3,\delta,\nu\rangle \;=\; J_3\ |J,J_3,\delta,\nu\rangle, \tag{4.12}$$

$$T|J,J_3,\delta,\nu\rangle \;=\; \delta\ |J,J_3,\delta,\nu\rangle, \tag{4.13}$$

$$\Gamma^R|J,J_3,\delta,\nu\rangle \;=\; \nu\ |J,J_3,\delta,\nu\rangle. \tag{4.14}$$

$\delta=\pm1$ の状態は演算子 A_i のスピン $L\pm m/2$ を持つ状態である。ただし、スピン L は $\frac{n-1}{2}$ の値をとる ($n=2L+1$)。$\nu=\pm1$ の状態は演算子 $-L_i^R+\frac{\sigma_i}{2}$ のスピン $L\mp1/2$ を持つ状態である。(4.3) から、M_i の固有状態は表 2 のように存在する。ただし、ここでは $m>0$ においた。これらのすべての状態数を数えると

$$\begin{aligned}
&2\left[2\cdot\frac{m-1}{2}+1\right]+4\left[\sum_{J=\frac{m+1}{2}}^{2L-\frac{m+1}{2}}(2J+1)\right]+3\left[2\Big(2L-\frac{m-1}{2}\Big)+1\right]\\
&+2\left[\sum_{J=2L-\frac{m}{2}+\frac{3}{2}}^{2L+\frac{m-1}{2}}(2J+1)\right]+\left[2\Big(2L+\frac{m+1}{2}\Big)+1\right]\\
=\;& 4(2L+1)^2 &(4.15)\\
=\;& 4n^2, &(4.16)
\end{aligned}$$

となる。これは行列の自由度全てをつくしている。表 2 を見れば分かるようにスペクトルはモノポール調和関数の場合と同じように、非ゼロの最低スピン $J=\frac{m-1}{2}$ から始まる。$J=\frac{m-1}{2}$ の最低スピン状態と $(J,\delta)=(2L-\frac{m-1}{2},-1)$、$(2L+\frac{m+1}{2},+1)$ の最高スピン状態においては、それぞれの δ に対して、$\nu=+1$ 又は $\nu=-1$ の

表 2: M_i $(m>0)$ の固有状態

	δ (T)	$-$	$-$	$+$	$+$
J	ν (Γ^R)	$+$	$-$	$+$	$-$
$\frac{m-1}{2}$		$\circ$			$\circ$
$\frac{m+1}{2}$		$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\frac{m+3}{2}$		$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2L-\frac{m+1}{2}$		$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$2L-\frac{m-1}{2}$			$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
$2L+\frac{m-1}{2}$				$\circ$	$\circ$
$2L+\frac{m+1}{2}$					$\circ$

状態のみ存在する[3]。簡単な計算より、$D^m_{\rm GW}$ の 2 乗は

$$(D^m_{\rm GW})^2=\frac{n}{n+mT}\left[M_i^2-\frac{m^2-1}{4}\right], \tag{4.17}$$

となる。そして、これは M_i, T, Γ^R と交換する：

$$\left[M_i\ ,\ (D^m_{\rm GW})^2\right] = 0, \tag{4.18}$$

$$\left[T\ ,\ (D^m_{\rm GW})^2\right] = 0, \tag{4.19}$$

$$\left[\Gamma^R\ ,\ (D^m_{\rm GW})^2\right] = 0. \tag{4.20}$$

それゆえ、次のように $(D^m_{\rm GW})^2$ のスペクトルを得ることができる：

$$(D^m_{\rm GW})^2|J,J_3,\delta,\nu\rangle=\frac{n}{n+m\delta}\left[J(J+1)-\frac{m^2-1}{4}\right]\ |J,J_3,\delta,\nu\rangle. \tag{4.21}$$

$J=\frac{m-1}{2}$ の最低スピン状態は $D^m_{\rm GW}$ のゼロモードに対応する。

[3] 全スペクトルにおいて、$\nu=+1$ の状態数と $\nu=-1$ の状態数との差は、$\mathcal{T}r(\Gamma^R)=-4n$ となることと矛盾しない。また、$\delta=+1$ の状態数と $\delta=-1$ の状態数との差は、$\mathcal{T}r(T)=4nm$ となることと矛盾しない。

簡単な計算より、つぎの代数を求めることができる：

$$\begin{aligned}[M_i\ ,\ D^m_{\mathrm{GW}}] &= 0, & (4.22)\\ [T\ ,\ D^m_{\mathrm{GW}}] &= 0, & (4.23)\\ \left[\Gamma^R\ ,\ D^m_{\mathrm{GW}}\right] &\neq 0. & (4.24)\end{aligned}$$

それゆえ、それぞれの J, J_3, δ の ν に関する線形結合 $\sum_\nu c^\pm_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle$ はディラック演算子 D^m_{GW} の固有状態である：

$$D^m_{\mathrm{GW}}\left[\sum_\nu c^\pm_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle\right] = \pm\sqrt{\frac{n}{n+m\delta}\left[J(J+1)-\frac{m^2-1}{4}\right]}\left[\sum_\nu c^\pm_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle\right] \tag{4.25}$$

GW 関係式

$$\begin{aligned}\Gamma^R D^m_{\mathrm{GW}} + D^m_{\mathrm{GW}}\hat{\Gamma} &= 0, & (4.26)\\ D^m_{\mathrm{GW}}\Gamma^R + \hat{\Gamma}D^m_{\mathrm{GW}} &= 0, & (4.27)\end{aligned}$$

を使うことで、もし $\sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle$ が固有値 α の D^m_{GW} の固有状態なら、$(\Gamma^R + \hat{\Gamma})\sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle$ は固有値 $-\alpha$ の固有状態であることがわかる：

$$\begin{aligned}D^m_{\mathrm{GW}}\left[\sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle\right] &= \alpha\left[\sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle\right], & (4.28)\\ D^m_{\mathrm{GW}}\left[(\Gamma^R+\hat{\Gamma})\sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle\right] &= -\alpha\left[(\Gamma^R+\hat{\Gamma})\sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle\right], & (4.29)\end{aligned}$$

ただし、

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{n}{n+m\delta}\left[J(J+1)-\frac{m^2-1}{4}\right]}. \tag{4.30}$$

(3.20) から分かるように、$\Gamma^R + \hat{\Gamma} = aD^m_{\mathrm{GW}} + 2\Gamma^R$ なので、

$$(\Gamma^R+\hat{\Gamma})\sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle = (a\alpha+2)c_1|J, J_3, \delta, 1\rangle + (a\alpha-2)c_{-1}|J, J_3, \delta, -1\rangle, \tag{4.31}$$

である。表2からわかるように、最高スピン状態に対して、$(\delta = -1,\ J = 2L-\frac{m-1}{2})$ と $(\delta = 1,\ J = 2L + \frac{m+1}{2})$ は $\nu = -1$ の状態のみ存在する。つまり、$(\Gamma^R +$

$\hat{\Gamma})|J, J_3, \delta, \nu = -1\rangle$ は消えなければならない。(4.31) から $a\alpha = 2$ を得る。それゆえ、最高スピン状態では、$D^m_{\rm GW}$ の固有状態は正の固有値のみを持つ。一方、他の状態は (4.30) のため、$-2 < a\alpha < 2$ である。よって、$(\Gamma^R + \hat{\Gamma})\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle$ は消えない。それゆえ $D^m_{\rm GW}$ の固有状態は正と負の両方の固有値をもつ。図 3 は $n = 10, m = 0, 1, 2, 3, 4$ の場合のスペクトルである。

次に係数 c_ν を決める。$(\Gamma^R + \hat{\Gamma})\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle$ は $\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle$ と直交しなければならないので

$$(a\alpha + 2)|c_1|^2 + (a\alpha - 2)|c_{-1}|^2 = 0, \tag{4.32}$$

そして、

$$|c_{-1}| = \sqrt{\frac{2 + a\alpha}{2 - a\alpha}}|c_1|. \tag{4.33}$$

それゆえ、固有値 α の固有状態は

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{2 - a\alpha}|J, J_3, \delta, 1\rangle + \frac{\alpha}{|\alpha|}\sqrt{2 + a\alpha}|J, J_3, \delta, -1\rangle\right]. \tag{4.34}$$

ただし、$\alpha = \pm\sqrt{\frac{n}{n+m\delta}\left[J(J+1) - \frac{m^2-1}{4}\right]}$ である。ここで、相対的な位相は $|J, J_3, \delta, 1\rangle$ と $|J, J_3, \delta, -1\rangle$ の再定義で吸収させた。

最後に、$D^m_{\rm GW}$ のカイラル・ゼロモードの数を数えることでインデックス定理 (3.40) を確かめる。以前に述べたように、$D^m_{\rm GW}$ のゼロモードは $J = \frac{m-1}{2}$ の状態に相当し、その縮退度は $2J + 1 = m$ である。表 2 の $(\delta, \nu) = (+1, -1)$ に対して、

$$\mathrm{Index}(P^{(n+m)}D_{\rm GW}) = n_+ - n_- = 0 - m = -m, \tag{4.35}$$

そして、$(\delta, \nu) = (-1, +1)$ に対して、

$$\mathrm{Index}(P^{(n-m)}D_{\rm GW}) = n_+ - n_- = m - 0 = m. \tag{4.36}$$

このインデックス (4.35)、(4.36) の結果はトポロジカル・チャージ (3.46) の結果と一致する。これによりインデックス定理 (3.40) と矛盾がないことが確かめられる。

4.2 モノポール配位における $D_{\rm GW}$ のカイラル・ゼロモード

この節では、TP モノポール背景 $(m = 1)$ での GW ディラック演算子 $D^{\rm TP}_{\rm GW}$ のカイラル・ゼロモードの具体形を求める。$D^{\rm TP}_{\rm GW}$ は (3.20) において、配位 (3.35) を

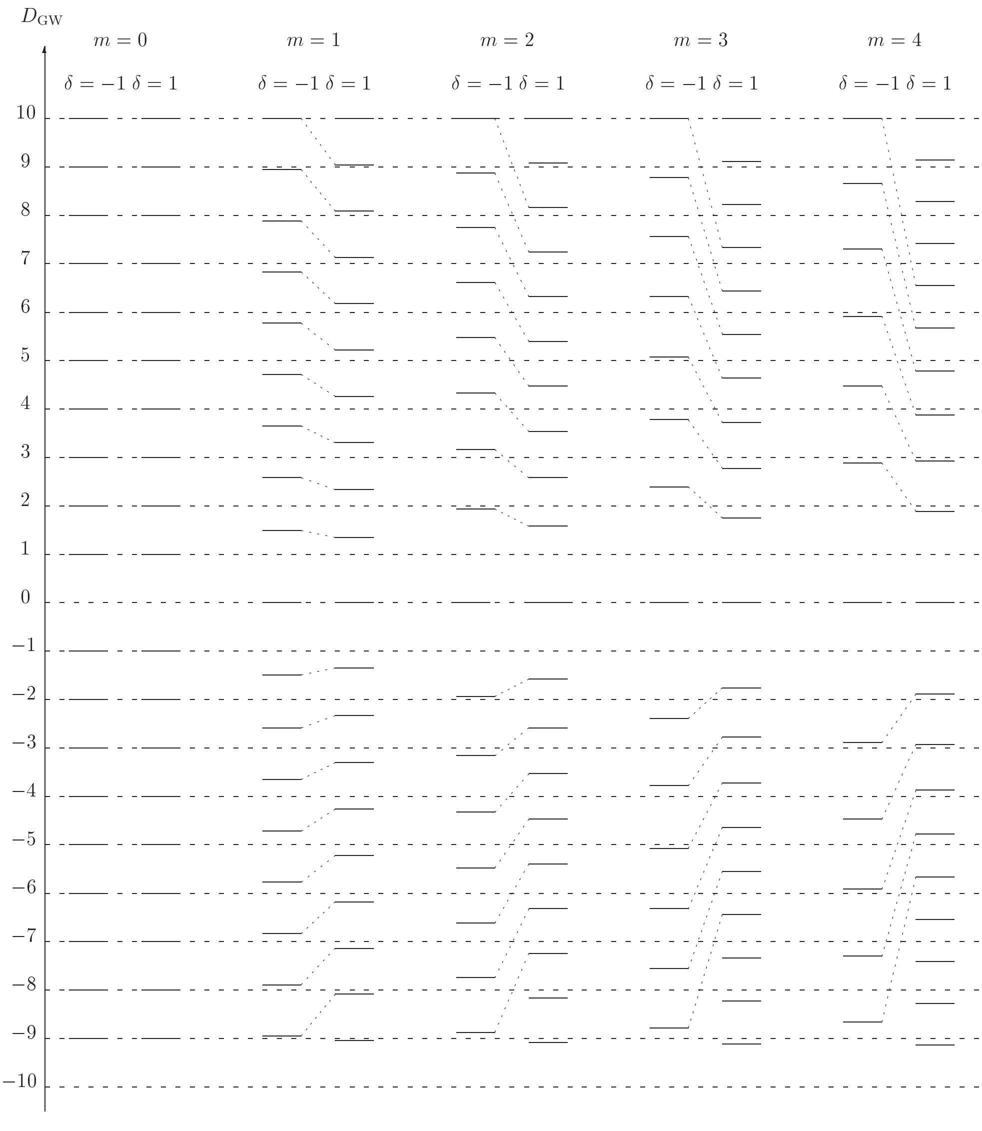

D_{GW}
$m=0$
$m=1$
$m=2$
$m=3$
$m=4$
$\delta=-1$ $\delta=1$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

図 3: スペクトル

代入することで

$$
\begin{aligned}
D_{\mathrm{GW}}^{\mathrm{TP}} &= a^{-1}(\hat{\Gamma} - \Gamma^R) \\
&= U \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1}(\sigma_i L_i^{(n+1)} + \frac{1}{2}) & \\ & \frac{n}{n-1}(\sigma_i L_i^{(n-1)} + \frac{1}{2}) \end{pmatrix} U^{\dagger} - (\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}) \\
&= \sigma_i \tilde{L}_i + 1 + \sigma_i \frac{\tau_i}{2} - \frac{1}{n^2-1} L_i \tau_i \Big[1 + 2\sigma_j (L_j + \frac{\tau_j}{2}) \Big],
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

となる。節 4.1 で示したように、それらのゼロモードは全角運動量演算子 M_i のゼロモードに相当する。今 $m = 1$ なので、そのゼロモードは表 2 の $J = 0$ のときである。それらは $\epsilon_{\alpha l}$ と $L^i \sigma^i_{\alpha\alpha'} \epsilon_{\alpha' l}$ のように書ける。ただし、α と l はそれぞれスピノルとゲージ群の足である。実際、それが TP モノポール背景での GW ディラック演算子 $D_{\mathrm{GW}}^{\mathrm{TP}}$ のゼロモードであることは、次の恒等式を使うことで、直接 $D_{\mathrm{GW}}^{\mathrm{TP}}$ を掛けて確かめられる：

$$
\sigma^i \epsilon = -\epsilon (\tau^i)^T, \tag{4.38}
$$

または、より具体的にかくと、

$$
\sigma^i_{\alpha\alpha'} \epsilon_{\alpha' l} = -\tau^i_{ll'} \epsilon_{\alpha l'}. \tag{4.39}
$$

例えば、

$$
\begin{aligned}
(D_{\mathrm{GW}}^{\mathrm{TP}} \epsilon)_{\alpha l} &= \epsilon_{\alpha l} + \frac{1}{2} \sigma^i_{\alpha\alpha'} \tau^i_{ll'} \epsilon_{\alpha' l'} \\
&\quad - \frac{1}{n^2-1} \big[L^i \tau^i_{ll'} \epsilon_{\alpha l'} + 2 L^i L^j \sigma^j_{\alpha\alpha'} \tau^i_{ll'} \epsilon_{\alpha' l'} + L^i \sigma^j_{\alpha\alpha'} \tau^i_{ll'} \tau^j_{l'l''} \epsilon_{\alpha' l''} \big] \\
&= \epsilon_{\alpha l} - \frac{1}{2} (\sigma^i \sigma^i \epsilon)_{\alpha l} \\
&\quad - \frac{1}{n^2-1} \big[-L^i (\sigma^i \epsilon)_{\alpha l} - 2 L^i L^j (\sigma^j \sigma^i \epsilon)_{\alpha l} + L^i (\sigma^j \sigma^j \sigma^i \epsilon)_{\alpha l} \big] \\
&= \epsilon_{\alpha l} - \frac{3}{2} \epsilon_{\alpha l} - \frac{1}{n^2-1} \Big[2 L^i (\sigma^i \epsilon)_{\alpha l} - \frac{n^2-1}{2} \epsilon_{\alpha l} - 2 L^i (\sigma^i \epsilon)_{\alpha l} \Big] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

同じ方法で

$$
(D_{\mathrm{GW}}^{\mathrm{TP}} L^i \sigma^i \epsilon)_{\alpha l} = 0 \tag{4.41}
$$

を示せる。

T と Γ^R の固有状態はこれらの 2 つのゼロモードの線形結合で得られる。$(\delta, \nu) = \pm(-1, +1)$ の状態は

$$\frac{1}{2}(1 \pm \Gamma^R)\epsilon = \frac{1}{2}(1 \mp T)\epsilon, \tag{4.42}$$

または、

$$\frac{1}{2}\Big[(1 \mp \frac{1}{n})\epsilon_{\alpha l} \pm \frac{2}{n}L^i\sigma^i_{\alpha\alpha'}\epsilon_{\alpha' l}\Big] = \frac{1}{2}\Big[(1 \mp \frac{1}{n})\epsilon_{\alpha l} \mp \frac{2}{n}L^i\tau^i_{ll'}\epsilon_{\alpha l'}\Big]. \tag{4.43}$$

ただし、ここでも恒等式 (4.39) を使った。

5　非自明なインデックスのダイナミカルな生成

前章までは非可換 2 次元球面上のフェルミオンについて議論してきた。また、3.2 で、モノポール配位を考えたが、それは行列のサイズの差が $2m$ の半径の異なる 2 つの非可換球面であった。この章では、非可換 2 次元球面、または 3.2 で考えたモノポール配位を古典解として持つヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型を導入し、そのダイナミクスを見る。つまりこの模型で、モノポール配位の不安定性を調べる。そして、非自明なトポロジカル・チャージを持つモノポール配位 ($|m| \ll n$) の方が非可換 2 次元球面上の $U(2)$ ゲージ理論 ($m = 0$) より安定であることを示す。つまり、対称性の破れを通して、インデックスがダイナミカルに生成することを説明する。さらに、$U(2)$ ゲージ理論 ($m = 0$) の不安定性をみることで、崩壊する方向を探す。そして TP モノポール配位の不安定性についても調べる。またそれぞれの配位に対する 1-ループ量子補正も考慮することで、ヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型のダイナミカルな構造を調べる。

5.1　ヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型

ここでは、曲がった空間上の行列模型を考える。導入のところで言ったように、4 次元時空でカイラル・フェルミオンを実現させるためには、コンパクトな余剰次元空間でインデックスを実現させる必要がある。そのためにはまず、コンパクトな空間上での行列模型を考える必要がある。そういう意味からも、曲がった空間上の行列模型を考えることは重要なことである。また、2 章で、IIB 行列模型は $\mathcal{N} = 2$ の超対称性を持つことから重力を含む理論であることを示唆しており、D-ブレイン間の有効ポテンシャルを調べることで、重力を含む理論であることを主張した。しかし、実際にこの行列のどこに、どのように重力が含まれているのかは、まだ明白ではない。つまりメトリックがどのよにこの行列模型に含まれているのかを知りたい。曲がった空間上の行列模型を考えることで、この IIB 行列模型に重力またはメトリックがどのように含まれているのかということに知見を得られる。そういう意味においても、曲がった空間上の行列模型を考えることは重要である。

ここではそのコンパクトな空間が非可換球面の場合を考える。まず、次のように定義される、ヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型を導入する [15] [4]：

$$S = \frac{1}{g^2} Tr(-\frac{1}{4}[A_i, A_j][A^i, A^j] + \frac{2}{3} i\alpha\epsilon_{ijk}A^iA^jA^k). \tag{5.1}$$

この作用はヤン・ミルズ理論のゼロ体積極限で得られる模型にチャーン・サイモン項を加えたものである。ただし、添え字 i, j, k は $1, 2, 3$ の値をとり、この模型は 3 次元ユークリッド空間上で定義される。また A_i は $N \times N$ エルミート行列である。さらに、この模型は $SO(3)$ 回転対称性と次のような $SU(N)$ ゲージ対称性を持っている：

$$A_i \to UA_iU^\dagger. \tag{5.2}$$

この行列模型の興味深い特徴は、古典解として非可換球面が得られることである。つまり、背景として非可換球面があり、その上で理論が展開される。この行列模型の運動方程式は

$$[A_i, [A_i, A_j]] = -i\alpha\epsilon_{jkl}[A_k, A_l], \tag{5.3}$$

となる。最も簡単な解は次のような可換な対角行列で与えられる：

$$A_i = \mathrm{Diag}(x_i^{(1)}, \cdots, x_i^{(N)}). \tag{5.4}$$

この解より安定な解として非可換球面を与える解がある。それは

$$A_i = \alpha L_i, \tag{5.5}$$

によって得られる。ただし、α は非可換パラメータで、L_i は $SU(2)$ 代数の N 次元既約表現行列である。座標として $x_i = \alpha L_i$ と考えることで、2.2.1 で述べたように非可換球面と考えることができ、この模型は古典解として非可換球面を持つことがわかる。また、次のような可約表現の解も考えることができる：

$$A_i = \alpha \begin{pmatrix} L_i^{(n_1)} & & & \\ & L_i^{(n_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_i^{(n_k)} \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

[4][15] ではフェルミオン作用として GKP タイプのディラック演算子を導入し、超対称性を持つ模型を提案している。この模型における古典解やモノポール配位の安定性については [15, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46] でも調べられている。

ただし、それぞれの $L_i^{(n)}$ は $SU(2)$ 代数の n 次元の既約表現である。そして、$N=\sum_{a=1}^k n_a$ が行列 A_i 全体のサイズである。特に $n_1=\cdots=n_k\equiv n$ の場合は k 個の半径が同じ非可換球面が重なったものに相当する。その k 個の非可換球面の周りで展開すると非可換球面上の $U(k)$ ゲージ理論が得られる [15]。特に、$k=2$ のとき、(5.6) は (3.36) のモノポール配位になる。

ここで、作用 (5.1) を古典解 (5.5) のまわりで $A_i=\alpha(L_i+\rho a_i)$ のように展開し[5]、行列を非可換空間上の関数へマップすることで、ゲージ理論が得られることを説明する。作用 (5.1) は

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{\alpha^4\rho^4}{4g^2}Tr(F_{ij}F_{ij}) \\
&\quad -\frac{i}{2g^2}\alpha^4\rho^3\epsilon^{ijk}Tr(\frac{1}{\rho}[L_i,a_j]a_k+\frac{1}{3}a_i[a_j,a_k]-\frac{i}{2\rho}\epsilon_{ijm}a^m a_k) \\
&\quad -\frac{\alpha^2}{6g^2}Tr(x^i x_i) \\
&= -\frac{\alpha^4\rho^4}{4g^2}N\int\frac{d\Omega}{4\pi}(F_{ij}(\Omega)F_{ij}(\Omega))_\star \\
&\quad -\frac{i}{2g^2}\alpha^4\rho^3\epsilon^{ijk}N\int\frac{d\Omega}{4\pi}(\frac{1}{\rho}(\mathcal{L}_i a_j)a_k+\frac{1}{3}a_i[a_j,a_k]-\frac{i}{2\rho}\epsilon_{ijm}a^m a_k)_\star \\
&\quad -\frac{\alpha^4}{24g^2}N(N^2-1),
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

となる。ただし、F_{ij} は次のように定義される：

$$
\begin{aligned}
F_{ij} &= \frac{1}{\alpha^2\rho^2}([A_i,A_j]-i\alpha\epsilon_{ijk}A_k) \\
&= \frac{1}{\rho}[L_i,a_j]-\frac{1}{\rho}[L_j,a_i]+[a_i,a_j]-\frac{1}{\rho}i\epsilon_{ijk}a_k.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

また、これに対応する関数 $F_{ij}(\Omega)$ は

$$
F_{ij}(\Omega) = \frac{1}{\rho}\mathcal{L}_i a_j(\Omega)-\frac{1}{\rho}\mathcal{L}_j a_i(\Omega)+[a_i(\Omega),a_j(\Omega)]_\star-\frac{1}{\rho}i\epsilon_{ijk}a_k(\Omega), \tag{5.9}
$$

となる。ヤン・ミルズ結合は $g_{YM}^2=4\pi g^2/N\alpha^4\rho^2$ である。また $(\ )_\star$ は星積をとることを意味する。よって $U(1)$ ゲージ群を考えたとしてもゲージ場の交換子は消えない。

次に、この作用のゲージ対称性についてみる。作用 (5.1) はユニタリー変換 (5.2) の下で不変であった。この変換 (5.2) の無限小変換を考えると $U=\exp(i\hat{\lambda})\sim 1+i\hat{\lambda}$

[5] (3.6) と α だけずれているが、これは場の再定義で合わせられる。

となる。ただし、$\hat{\lambda} = \sum_{lm} \lambda_{lm} \hat{Y}_{lm}$ と非可換球面調和関数で展開される。この無限小変換に対して、ある固定された背景の周りでの揺らぎ $\hat{a}_i$ は

$$\hat{a}_i \quad \rightarrow \quad \hat{a}_i - \frac{i}{\rho}[\hat{L}_i, \hat{\lambda}] + i[\hat{\lambda}, \hat{a}_i], \tag{5.10}$$

のように変換する。関数にマップした後、その変換は

$$a_i \quad \rightarrow \quad a_i - \frac{i}{\rho}\mathcal{L}_i \lambda + i[\lambda, a_i]_\star \ , \tag{5.11}$$

となり、局所ゲージ対称性となる。

ここで、次のように定義されるスカラー場を考える：

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &\equiv \frac{1}{2\alpha\rho}(A_i A_i - \hat{x}_i \hat{x}_i) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{x}_i \hat{a}_i + \hat{a}_i \hat{x}_i + \alpha\rho \hat{a}_i \hat{a}_i). \end{aligned} \tag{5.12}$$

これは随伴表現として共変的に変換する：

$$\hat{\phi} \rightarrow \hat{\phi} + i[\hat{\lambda}, \hat{\phi}]. \tag{5.13}$$

ここまでは非可換 2 次元球面上の $U(1)$ ゲージ理論を見てきたが、次のように置き換えることで、$U(k)$ ゲージ群を考えることもできる：

$$\hat{x}_i \rightarrow \hat{x}_i \otimes \mathbf{1}_k, \tag{5.14}$$

$$\hat{a} \rightarrow \sum_{a=1}^{k^2} \hat{a}^a \otimes T^a. \tag{5.15}$$

ただし、$T^a(a = 1, \cdots, k^2)$ は $U(k)$ ゲージ群の生成子である。$U(1)$ の場合と同じように非可換 2 次元球面上の $U(k)$ ゲージ理論が得られる：

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\alpha^4\rho^4}{4g^2} ntr \int \frac{d\Omega}{4\pi}(F_{ij}(\Omega)F_{ij}(\Omega))_\star \\ &\quad -\frac{i}{2g^2}\alpha^4\rho^3\epsilon^{ijk} ntr \int \frac{d\Omega}{4\pi}(\frac{1}{\rho}(L_i a_j)a_k + \frac{1}{3}a_i[a_j, a_k] - \frac{i}{2\rho}\epsilon_{ijm}a^m a_k)_\star \\ &\quad -\frac{\alpha^4}{24g^2}kn(n^2-1). \end{aligned} \tag{5.16}$$

ただし、tr はゲージ群の足についてのトレースである。

可換極限をとると

$$\begin{aligned} S &= \frac{\alpha^4\rho^4}{2g^2} N \int \frac{d\Omega}{4\pi}(\frac{1}{4}P_{mn}P_{ab}F_{ma}F^{nb} + \frac{1}{2}P_{ab}P_{ac}(D_b\phi)(D^c\phi) \\ &\qquad + \frac{1}{\rho^2}\phi^2 + \frac{1}{\rho^2}\epsilon_{ajb}x_a F_{jb}\phi - \frac{1}{3\alpha^2\rho^4}x_i^2). \end{aligned} \tag{5.17}$$

ただし、$F^{\alpha}_{mb} = \partial_m a'^{\alpha}_b - \partial_b a'^{\alpha}_m + \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a'^{\beta}_m a'^{\gamma}_b$, $D_b \phi^{\alpha} = \partial_b \phi^{\alpha} + \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a'^{\beta}_b \phi^{\gamma}$, $P_{ab} = \delta_{ab} - n_a n_b$ である。 よって、これはゲージ場とアジョイント・スカラー場を持つ場の理論である。

5.2　モノポール配位の自由エネルギー

ここでは一般のモノポール配位 (3.36) を考え、その配位を背景とし、その配位に対する 1-ループ有効作用を背景場の方法を使って計算する。 背景場の方法による 1-ループ有効作用は付録 A で計算している。

古典作用は (3.36) を (5.1) に入れることで得られる。それは

$$\begin{aligned} W_0 &= -\frac{\alpha^4}{24g^2}\big(\{(n+m)^3-(n+m)\}+\{(n-m)^3-(n-m)\}\big) \\ &= -\frac{\alpha^4}{12g^2}\big(n^3-n+3m^2n\big), \end{aligned} \tag{5.18}$$

となる。ここで (5.18) を m についての関数とみて、横軸を m、縦軸を W としてグラフにすると図 4 のようになる。図 4 を見ればわかるように、$|m|$ が大きくなるにつれて、古典作用は単調に減少する。よって $U(2)$ 配位 $(m=0)$ がもっともエネルギーが高く不安定で、TP モノポール配位 $(|m|=1)$ に崩壊する。そして、そのような崩壊を繰り返すことで、それは $U(1)$ 配位 $(|m|=n)$ にまで崩壊する。つまり、$|m| \ll n$ に対するその過程は対称性の破れを通し、インデックスが生成するダイナミカルなメカニズムを意味する。よって、余剰次元空間でこのメカニズムを考えることで、4 次元でのカイラル・フェルミオンがダイナミカルに実現できる。

さらに、1-ループ補正を考える。そのため行列を次のように背景場 X_i とその周りの揺らぎ $\tilde{A}_i$ に分ける：

$$A_i = X_i + \tilde{A}_i \tag{5.19}$$

1-ループ有効作用は (3.36) を (A.20) に挿入することで得られる[6]。

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\mathcal{T}r\log\bigl((\tilde{X}_i)^2\bigr) \\ &= \frac{1}{2}\Bigl(\sum_{l=0}^{n+m-1}+\sum_{l=0}^{n-m-1}+2\sum_{l=m}^{n-1}\Bigr)(2l+1)\log\left[l(l+1)\right]. \end{aligned} \tag{5.20}$$

ただし、$\tilde{X}_i$ は X_i の随伴表現 $\tilde{X}_i M=[X_i,M]$ である。最後の行の初めの 2 つの項は対角ブロックからの寄与で、最後の項は非対角ブロックからの寄与である。$\tilde{X}_i$ が行列の右上の非対角ブロック M に作用するとき、$\tilde{X}_i M=(L_i^{(n+m)L}-L_i^{(n-m)R})M$ となるので、その表現は $SU(2)$ の $(n+m)$ と $(n-m)$ 次元表現の合成によって得られる。(5.20) からわかるが、$m=0$ の配位 (3.36) は 4 つのゼロモードをもち、$m\neq 0$ の配位は 2 つのゼロモードがある。副節 5.3 で $m=0$ の場合、副節 5.4 で $m\neq 0$ の場合に対するそれらのゼロモード方向の不安定性を調べる。ここではまず、非ゼロモードからの寄与を考える。

n が大きいとき、(5.20) の l に対する足し上げは積分に置き換えることができる。よって、$m=0$ に対して、

$$W_1^{m=0}=2\bigl[n(n-1)\bigl(\log n(n-1)-1\bigr)-2\bigl(\log 2-1\bigr)\bigr], \tag{5.21}$$

そして、$m\neq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} W_1^{m\neq 0} &= \frac{1}{2}\Bigl[(n+m)(n+m-1)\bigl(\log[(n+m)(n+m-1)]-1\bigr) \\ &\quad +(n-m)(n-m-1)\left(\log[(n-m)(n-m-1)]-1\right) \\ &\quad +2n(n-1)\bigl(\log n(n-1)-1\bigr) \\ &\quad -2\sum_{l=1}^{m-1}(2l+1)\log\left[l(l+1)\right] \\ &\quad -4\cdot 2\bigl(\log 2-1\bigr)\Bigr]. \end{aligned} \tag{5.22}$$

[6] $l=0$ のモードはゼロモードなので、ここでの 1-ループ有効作用 (5.20) ではその寄与は考えない。ただし、ゼロモードを数えるために (5.20) では明白に書いた。

$m \ll n$ に対して、それらの差は次のように求められる：

$$
\begin{aligned}
\Delta W_1 &= W_1^{m\neq 0} - W_1^{m=0} \\
&= \frac{1}{2}[f(n{+}m) + f(n{-}m) - 2f(n)] - \sum_{l=1}^{m-1}(2l+1)\log[l(l+1)] \\
&\simeq \frac{1}{2}[f^{(2)}(n)m^2 + \frac{1}{12}f^{(4)}(n)m^4 + \cdots] - \sum_{l=1}^{m-1}(2l+1)\log[l(l+1)] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\log n(n-1) + \frac{(2n-1)^2}{n(n-1)}\right]m^2 + \mathcal{O}(1/n^2)m^4 + \cdots \\
&\quad - \sum_{l=1}^{m-1}(2l+1)\log[l(l+1)] \\
&\simeq 2m^2\log n\ .
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

ただし、2 行目で $f(x) = x(x-1)\{\log x(x-1) - 1\}$ を導入し、最後の行では n を大きくしたときに最も効いてくる項をとった。n が大きな値をとるとき、(5.21) から W_1 の m に依存しない項はほぼ $n^2\log n$ ぐらいで、(5.23) から W_1 の m に依存する項はほぼ $(\log n)m^2$ ぐらいである。一方、(5.18) から W_0 の m に依存しない項はほぼ $-n^3$ で、m に依存する項はほぼ $-nm^2$ である：

$$W_0 \sim -n^3 - nm^2, \tag{5.24}$$

$$W_1 \sim n^2\log n + (\log n)m^2. \tag{5.25}$$

それゆえ、n が大きな値をとるとき、1-ループ量子補正の寄与 W_1 は W_0 をかさ上げする程度で、グラフにすると図 4 の $W_0 + W_1$ のようになる。よって、(5.18) の下で述べた真空構造は 1-ループ量子補正を考えたとしても変わらない。つまり、その真空構造は古典的に決まっている。

5.3 $U(2)$ ゲージ理論の不安定性

この節では、上で説明したゼロモードに沿った方向について、$m = 0$ の同じ半径の 2 つの非可換球面上の $U(2)$ ゲージ理論の不安定性を解析する。そして、その配位から TP モノポール配位 $|m| = 1$ への崩壊過程も考える。

$m = 0$ の同じ半径の 2 つの非可換球面がどのように崩壊するのかを見るために、この配位に対するゼロモード方向を考える。(5.20) の下で述べたように、4 つの

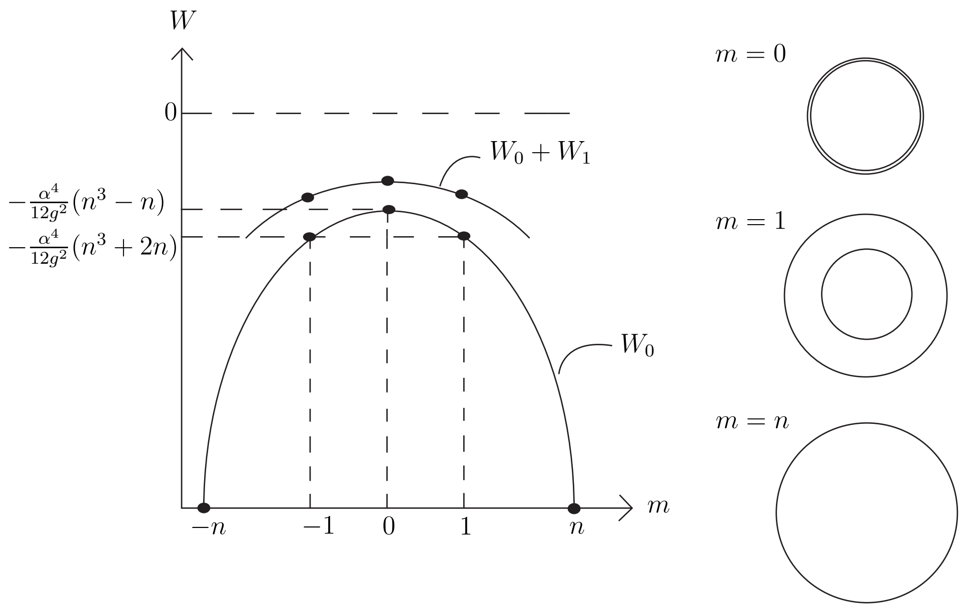


図 4: これは古典作用 W_0 と 1-ループ有効作用 W_1 を m の関数としてグラフにした。また、$m=0$ と $m=1$ の場合の 2 つの非可換球面と、$m=n$ の場合の 1 つの非可換球面の図を右側に描いた。

ゼロモードがある。1 つは全体の並進を表す：$A_i \sim \mathbf{1}_{2n}$。この方向は行列に課されたトレースレス条件のため、ここでは考えない。よって次の背景を考える：[7]

$$X_i = L_i^{(n)} \otimes \mathbf{1}_2 + h_i^a \mathbf{1}_n \otimes \tau^a. \tag{5.26}$$

古典作用は (5.26) を (5.1) に入れることで得られ、それは

$$\begin{aligned} W_0 \;\; = \;\; & -\frac{\alpha^4}{12g^2}\big(n^3-n\big) \\ & +\frac{\alpha^4}{g^2} n \left[2\{(h_i^a h_i^a)^2 - (h_i^a h_j^a)^2\} - 8 \det(h_i^a) \right], \end{aligned} \tag{5.27}$$

となる。同じ半径の 2 つの非可換球面が崩壊する方向は W_0 が最小となる h_i^a の方向である。このポテンシャルは h_i^a の 3 次と 4 次の項を持つ。3 次の項の $-8\det(h_i^a)$ は $h_i^a \propto \delta_{ia}$ の方向が最も小さくなるので、同じ半径の 2 つの非可換球面はこの方向に崩壊することは分かる。さらに、もう少し詳しくこのポテンシャル (5.27) に

[7]背景 (5.26) の h_i^a の $a=3$ の方向だけについては [43] の付録 D で考えられている。この方向は 2 つの非可換球面の位置をそれぞれずらすような方向である。しかし、同じ半径の 2 つ非可換球面は前節 5.2 や [43] でみられるように、TP モノポールの配位に崩壊していくように見える。よって (5.32) の方向を考える。

ついてみる。ポテンシャル (5.27) は

$$V(H)=2[(\mathrm{tr}H^TH)^2-\mathrm{tr}(H^THH^TH)]-8\det(H), \tag{5.28}$$

のように書ける。ただし、$(H)_{ia}=h_i^a$ と書いた。ここで、$M=H^TH$ とすると、

$$\begin{aligned} V(H) &= 2[(\mathrm{tr}M)^2-\mathrm{tr}(M^2)]\mp 8\sqrt{\det M} \\ &= 2\Big[\Big(\sum_{i=1}^3 x_i\Big)^2-\sum_{i=1}^3 x_i^2\Big]\mp 8\sqrt{\prod_i x_i} \\ &= 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\mp 8\sqrt{x_1x_2x_3}\ . \end{aligned} \tag{5.29}$$

ここで、x_1,x_2,x_3 は M の固有値である。$x_1x_2x_3$ の値を固定させることで、(5.29) の一項目は最低値を持つ：

$$\begin{aligned} x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 &= (x_1x_2x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) \\ &\geq 3(x_1x_2x_3)\left(\frac{1}{x_1x_2x_3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3(x_1x_2x_3)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

ただし、2 行目の等号は $x_1=x_2=x_3\equiv y^2$ のとき満たされる。このとき $V(H)$ は

$$\begin{aligned} V(H) &= 12y^4-8y^3 \\ &\geq -\frac{1}{4}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

となる。ここで 2 行目の等号は $y=\frac{1}{2}$ のとき満たされる。

それゆえ $h_i^a=\frac{1}{2}\delta_i^a$ のとき最低点 $V(H)=-1/4$ となる。これはまさに TP モノポール配位である。よって、同じ半径の 2 つの非可換球面は

$$X_i=L_i^{(n)}\otimes\mathbf{1}_2+h\mathbf{1}_n\otimes\frac{\tau^i}{2}, \tag{5.32}$$

の $h=0$ から $h=1$ への経路に沿って TP モノポール配位に崩壊すると思える。

次に、背景 (5.26) の周りでの 1-ループ補正を求める。1-ループ有効作用は (5.26) を (A.20) に代入することで得られる：

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\mathcal{T}r\ \mathrm{tr}'\log\left[(\tilde{X}_k)^2\delta_{ij}-2i\epsilon_{ijk}h_k^a\tilde{\tau}^a+4ih_i^ah_j^b\epsilon_{abc}\tilde{\tau}^c\right] \\ &\quad -\mathcal{T}r\log\left[(\tilde{X}_k)^2\right]. \end{aligned} \tag{5.33}$$

ただし、$\tilde{X}_i$ と $\tilde{\tau}_i$ は

$$\begin{aligned}\tilde{X}_i M &= [L_i^{(n)} \otimes \mathbf{1}_2 + h_i^a \mathbf{1}_n \otimes \tau^a, M], &(5.34)\\ \tilde{\tau}_i M &= [\tau_i, M], &(5.35)\end{aligned}$$

のように定義されるエルミート行列 M に作用する随伴演算子である。h_i^a についての摂動展開の 2 次まで考えると、その 1-ループ有効作用は

$$\begin{aligned}W_1 &= 2\sum_{l=1}^{n-1}(2l+1)\log\left[l(l+1)\right]\\ &\quad +(h_i^a)^2\left[\frac{4}{3}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2l+1}{l(l+1)} - 16\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2l+1}{(l(l+1))^2}\right], \qquad (5.36)\end{aligned}$$

となる。ただし、$l=0$ のゼロモード方向は全体をシフトさせるような方向なので、そのゼロモード方向の寄与は除いた。$(h_i^a)^2$ の係数の符号は $n=374$ で負から正に変わる。そして、n が大きいときには

$$\begin{aligned}W_1 &\simeq 2\big[n(n-1)\big(\log n(n-1) - 1\big) - 2(\log 2 - 1)\big]\\ &\quad +(h_i^a)^2\left[\frac{4}{3}\big(\log n(n-1) - \log 2\big) - 16\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right], \qquad (5.37)\end{aligned}$$

となる。

つまり、同じ半径の 2 つの非可換球面は 3 つの非自明なゼロモードを持ち、古典作用 (5.27) で見たように、それには崩壊方向を含む。1-ループ補正を含めることで、3 つのすべてのゼロモード方向は、$n \leq 373$ に対して不安定になり、$n \geq 374$ に対して安定になる。それゆえ、この配位は n が大きな値に対しては準安定状態になる (図 5)。これは、TP モノポール配位へ崩壊するということと矛盾するように見えるが、1-ループ補正は $(\log n)h^2$ 程度の寄与に対し、古典作用は $-nh^3$ 程度の寄与なので、準安定状態は n 無限大の極限では無視でき、結局古典作用の寄与が効いてきて、TP モノポールの方向へ崩壊する。 ポテンシャル $W_0 + W_1$ について、この特徴を経路 (5.32) に沿って考える：

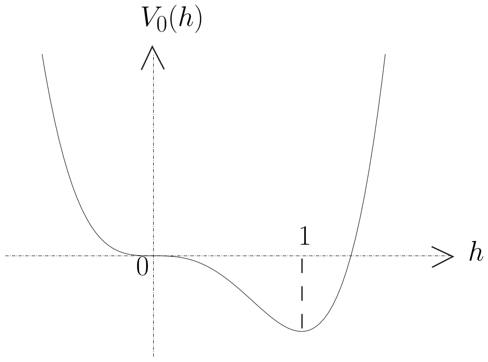
$$\begin{aligned}W_0 + W_1 &= -\frac{\alpha^4}{12g^2}\big(n^3 - n\big) + 2\sum_{l=1}^{n-1}(2l+1)\log\left[l(l+1)\right]\\ &\quad +V_0(h) + V_1(h), \qquad (5.38)\end{aligned}$$

ただし、

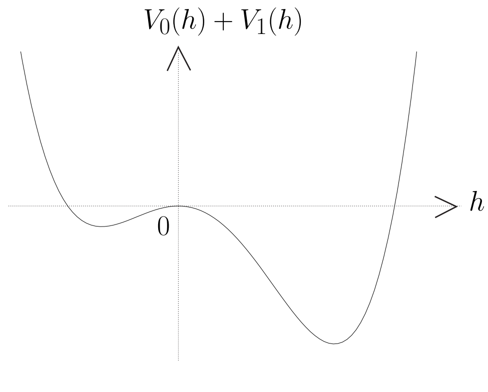
$$V_0(h) = \frac{\alpha^4 n}{g^2}\Big(\frac{3}{4}h^4 - h^3\Big), \tag{5.39}$$

$$V_1(h) = \Bigg[\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2l+1}{l(l+1)} - 12\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)\Bigg]h^2. \tag{5.40}$$

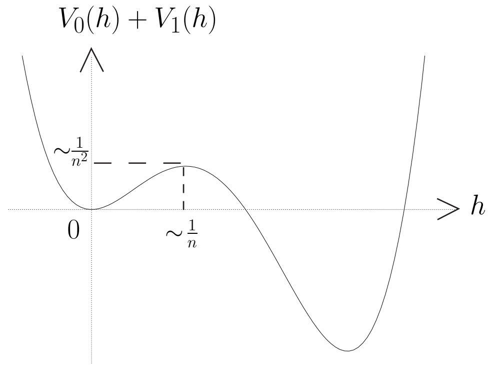
h に依存したポテンシャルについて図 5 に図示した。図 5 の (a) は古典的ポテンシャル $V_0(h)$ について描き、(b) は n の小さな値に対する 1-ループ有効ポテンシャル $V_0(h)+V_1(h)$ で、(c) は n の大きな値に対する 1-ループ有効ポテンシャル $V_0(h)+V_1(h)$ について描いた。



(a) 古典的ポテンシャル V_0



(b) 小さな n に対する V_0+V_1



(c) 大きな n に対する V_0+V_1

図 5: (a) 古典的ポテンシャルは $h=0$ で平坦で、$h=1$ で最小値をとる。(b)n の小さな値に対する 1-ループ有効ポテンシャルは $h=0$ で不安定になる。(c)n の大きな値に対する 1-ループ有効ポテンシャルは $h=0$ で準安定状態になる。

5.4 トフーフト・ポリヤコフ・モノポール配位の不安定性

前の節では $U(2)$ ゲージ理論から TP モノポール配位への遷移についての解析を行った。副節 5.2 で見たように、TP モノポール配位は安定ではなくさらに $|m|$ が大きい配位へ崩壊する。この副節では TP モノポール配位の不安定性を解析する。TP モノポール配位がどのように崩壊するのかを見るために、この配位の周りのゼロモード方向を考える。(5.20) の後で述べたように、2 つのゼロモードがある。そのうちの 1 つは全体の並進 ($A_i \sim \mathbf{1}_{2n}$) なので、無視する。それゆえ次の背景を考える：

$$X_i = \begin{pmatrix} L_i^{(n+1)} & \\ & L_i^{(n-1)} \end{pmatrix} + h_i \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n}\mathbf{1}_{n+1} & \\ & -\frac{n+1}{n}\mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

古典作用は (5.41) を (5.1) に代入することで得られ、それは

$$W_0 = -\frac{\alpha^4}{12g^2}\big(n^3 + 2n\big), \tag{5.42}$$

となる。この方向の古典作用は h_i の 2 次のべきだけでなくすべてのべきに依存しておらず、この方向に対して平坦である。よって、例えば非ゼロモードの方向など、TP モノポール配位が崩壊する別の方向を見つけなければならない。崩壊する経路 h に依存するポテンシャルが次の形を持ち、TP モノポール配位 ($|m| = 1$) と $|m| = 2$ の配位とをつなぐような方向を見つけることは興味深い：

$$V_0(h) \sim n(h^2 - h^3). \tag{5.43}$$

どんな経路にしろ、TP モノポール配位がさらに安定な配位に遷移することは古典的に解っているので、TP モノポール配位は古典的に準安定状態である。

次に、背景 (5.41) の周りでの 1-ループ有効作用を求める。1-ループ有効作用は (5.41) を (A.20) に代入することで得られ、それは

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\mathcal{T}r\ \mathrm{tr}'\log\big[(\tilde{X}_k)^2\delta_{ij} - 2i\epsilon_{ijk}\tilde{H}_k\big] \\ &\quad -\mathcal{T}r\log\big((\tilde{X}_k)^2\big), \end{aligned} \tag{5.44}$$

となる。ただし、$\tilde{X}_i$ と $\tilde{H}_i$ はエルミート行列 M に作用する随伴演算子である：

$$\tilde{X}_i M = \left[\begin{pmatrix} L_i^{(n+1)} & \\ & L_i^{(n-1)} \end{pmatrix} + h_i \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n}\mathbf{1}_{n+1} & \\ & -\frac{n+1}{n}\mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}, M\right], \tag{5.45}$$

$$\tilde{H}_i M = \left[h_i \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n}\mathbf{1}_{n+1} & \\ & -\frac{n+1}{n}\mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}, M\right]. \tag{5.46}$$

h_i の摂動の 2 次のべきまでを求めると

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n} + \sum_{l=1}^{n-2} + 2\sum_{l=1}^{n-1}\right)(2l+1)\log\left[l(l+1)\right] \\ &\quad + (h_i)^2\left[\frac{4}{3}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2l+1}{l(l+1)} - 16\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2l+1}{(l(l+1))^2}\right], \end{aligned} \tag{5.47}$$

となる。ただし、ゼロモードは考えていない。それは全体をシフトするような方向なので別に考えなければならない。$(h_i)^2$ の係数の符号は $n = 374$ で負から正に変わる。そして、それは n が大きいとき $\frac{8}{3}\log n$ と近似できる。よって、TP モノポール配位は n が小さいときには不安定になり、n が大きいときには安定になる。

しかし、(5.42) の下で述べたように、TP モノポール配位からの崩壊については、別の方向を考えなければならない。TP モノポール配位は古典レベルで、準安定状態である。$(\log n)h^2$ の程度の量子補正を加えてもその古典レベルでの準安定性は変わらない。また、$|m| \geq 1$ のモノポール配位も 1 つだけ非自明なゼロモードを持つので、同じ特徴を持つ。

6　まとめと展望

本稿では、IIB 行列模型から我々の住む 4 次元時空でのカイラル・フェルミオンを実現させる 1 つのシナリオについて考えた。そのシナリオと具体的にみた内容についてまとめる。

まず、10 次元的拡がりを持つ IIB 行列模型の 4 次元以外の余剰次元空間として 6 次元の中の 3 次元部分に、非可換 2 次元球面が埋め込まれた場合を考えた。その非可換 2 次元球面上で、明白にインデックスを出すディラック演算子として GW 関係式を満たすディラック演算子 D_{GW} を構成し、そのインデックスが非自明な配位に対して、ゼロでない値を持つことを示した。具体的にはディラック演算子 D_{GW} のインデックスがトポロジカル・チャージと関係することを見ることで、インデックス定理を満たすことを示し、非自明な配位として、モノポール配位、例えば非可換球面上のトフーフト・ポリヤコフ・モノポールを考え、その非自明なモノポール配位に対して、トポロジカル・チャージがゼロでない値を持つことをみた。さらに、ディラック演算子 D_{GW} のスペクトルを求め、カイラル・ゼロモードが現れていることを確かめ、その数を数えトポロジカル・チャージの値と一致することを見ることで、インデックス定理が成り立っていることを確認した。さらに、非可換 2 次元球面を背景に持つヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型を考え、位相的に自明な配位 ($U(2)$ ゲージ理論 ($m = 0$)) より非自明な配位 (モノポール配位 ($|m| \ll n$)) の方がより安定であることをみることで、インデックスがゲージ群の自発的対称性の破れを通してダイナミカルに生成することをみた。さらに $U(2)$ ゲージ理論の不安定性を調べた結果、TP モノポール配位の方向に崩壊することが解り、1-ループ量子補正を計算することで、有効ポテンシャルが大きな n の値に対して準安定状態になっていることが解った。

現在ではまだ IIB 行列模型がどのようにコンパクト化されるか解っていないので、今回は最も簡単なトイモデルとして余剰次元空間が非可換 2 次元球面 S^2 の場合を考えた。今後はこの研究を拡張し、その余剰次元空間が非可換 2 次元球面以外のトーラスや $S^2 \times S^2$ や CP^2 などの非可換空間が IIB 行列模型の 6 次元部分に埋め込まれた場合を考え、その上で明白にインデックスを持つディラック演算子を構成することも考えてみたい。

本稿のシナリオでは4次元時空でのカイラル・フェルミオンを実現させるため、明白にインデックスを出すディラック演算子を構成することを考えたが、今後はIIB行列模型から、そのようなディラック演算子をIIB行列模型の有効作用としてダイナミカルに導きたい。また、今回は非可換2次元球面を背景に持つヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型を考えたが、この模型はもともとのIIB行列模型にはないチャーン・サイモン項を加えた模型でる。このようなチャーン・サイモン項をIIB行列模型の有効作用としてダイナミカルに導くことも考えたい。

さらに、10次元のIIB行列模型がどのように、どんな空間に自発的にコンパクト化されるのかを調べることや、一般の曲がった空間をIIB行列模型にいかに埋め込むかということを考えることも今後の重要な課題である。

謝辞

本稿を書くにあたって様々なご指導や助言をして頂いた青木一さんに感謝いたします。青木一さんには修士課程の頃から、物理についての解説・議論をして頂き大変お世話になりました。高エネルギー加速器研究機構の磯暁さんには、博士課程の2年間受託学生として受け入れて頂いた上に、物理についてや本稿の研究に関する解説や議論をして頂き大変お世話になりました。この場を借りて感謝いたします。また米山博志さん、船久保公一さん、茨城大学の永尾敬一さんには本稿の研究に関する様々なコメントや議論をして頂きましたことを感謝いたします。その他の素粒子論研究室の皆さんとも有意義な議論をさせて頂きました。本当に有難うございました。

A　1-ループ有効作用

ここでは次の作用の 1-ループ有効作用を背景場の方法により求める。

$$S \;=\; -Tr\left(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2}(\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi])\right). \tag{A.1}$$

行列 A_μ と ψ を次のように古典解と揺らぎに分解する。

$$A_\mu \;=\; X_\mu + \tilde{A}_\mu, \tag{A.2}$$

$$\psi \;=\; \xi + \tilde{\psi}, \tag{A.3}$$

ただし X_μ と ξ は背景場で、$\tilde{A}_\mu$ と $\tilde{\psi}$ は量子揺らぎである。上の作用をこれで展開すると次のようになる。

$$S_0 \;=\; -Tr\left(\frac{1}{4}[X_\mu, X_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\xi}\Gamma^\mu[X_\mu, \xi]\right), \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned} S_2 \;=\; & \Big(-\tilde{A}_\nu([X_\mu,[X_\mu,X_\nu]] + \frac{1}{2}[\bar{\xi}\Gamma^\nu, \xi]) + \bar{\xi}\Gamma^\mu[X_\mu, \tilde{\psi}] \\ & + \frac{1}{2}[X_\mu, \tilde{A}_\nu]^2 - \frac{1}{2}[X_\mu, \tilde{A}_\mu]^2 + [X_\mu, X_\nu][\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \\ & + \frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}\Gamma^\mu[X_\mu, \tilde{\psi}] + \bar{\xi}\Gamma^\mu[\tilde{A}_\mu, \tilde{\psi}]\Big), \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$S_{int} \;=\; -Tr\left([X_\mu, \tilde{A}_\nu][\tilde{A}^\mu, \tilde{A}^\nu] + \frac{1}{4}[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}\Gamma^\mu[\tilde{A}_\mu, \tilde{\psi}]\right), \tag{A.6}$$

ここで S_2 の第 1 行目の揺らぎの 1 次の項は背景場の方法により手でおとす。次に計算の簡単のため、通常のゲージ理論のようにゲージ固定項 $S_{g.f.}$ とゴースト項 S_{ghost} を導入する。

$$S_{g.f.} \;=\; -Tr(\frac{1}{2}[X_\mu, \tilde{A}_\mu]^2), \tag{A.7}$$

$$S_{ghost} \;=\; -Tr([X_\mu, b][A_\mu, c]), \tag{A.8}$$

ただし b と c はゴーストと反ゴーストである。そうすると

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2 \;=\; & S_2 + S_{g.f} + S_{ghost} \\ =\; & -Tr\Big(\frac{1}{2}[X_\mu, \tilde{A}_\nu]^2 + [X_\mu, X_\nu][\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] + \frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}\Gamma^\mu[X_\mu, \tilde{\psi}] \\ & + [X_\mu, b][X_\mu, c] + \bar{\xi}\Gamma^\mu[\tilde{A}_\mu, \tilde{\psi}]\Big). \end{aligned} \tag{A.9}$$

以下では$\xi=0$として求める。ここで演算子oに対する随伴演算子Oを

$$OM=[o,M], \tag{A.10}$$

と定義し、この表記を導入すると、

$$\tilde{S}_2=Tr\biggl(\frac{1}{2}\tilde{A}_\mu(\tilde{X}_\lambda^2\delta_{\mu\nu}-2i\tilde{F}_{\mu\nu})\tilde{A}_\nu-\frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}\Gamma^\mu\tilde{X}_\mu\tilde{\psi}+b\tilde{X}_\lambda^2c\biggr), \tag{A.11}$$

ただし

$$\begin{aligned}
[X_\mu,M] &= \tilde{X}_\mu M, && \text{(A.12)}\\
[f_{\mu\nu},M] &= \tilde{F}_{\mu\nu}M,\quad f_{\mu\nu}=i[X_\mu,X_\nu]. && \text{(A.13)}
\end{aligned}$$

これより、１ループ有効作用Wは

$$\begin{aligned}
W &= -\log\int dad\varphi dcdb\,e^{-\tilde{S}_2}\\
&= -\log det(\tilde{X}_\lambda^2\delta_{\mu\nu}-2i\tilde{F}_{\mu\nu})^{-\frac{1}{2}}det(\tilde{X}^2)\mathrm{Pf}(\Gamma^\mu\tilde{X}_\mu)\\
&= \frac{1}{2}Tr\log(\tilde{X}_\lambda^2\delta_{\mu\nu}-2i\tilde{F}_{\mu\nu})-\frac{1}{4}Tr\log\biggl((\tilde{X}_\lambda^2+\frac{i}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu})(\frac{1+\Gamma_{11}}{2})\biggr)\\
&\quad -Tr\log(\tilde{X}_\lambda^2), && \text{(A.14)}
\end{aligned}$$

となる。

同様に、作用 (5.1)

$$S=Tr(-\frac{1}{4}[A_i,A_j][A^i,A^j]+\frac{2}{3}i\alpha\epsilon_{ijk}A^iA^jA^k). \tag{A.15}$$

の 1-ループ有効作用を求める。そのため作用 (5.1) を揺らぎ$\tilde{A}_i$の２次まで展開し、ゲージ固定項とゴースト項を加えると

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{total}} &= S[X_i]+\tilde{S}_2\ , && \text{(A.16)}\\
\tilde{S}_2 &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{A}_i[X_k,[X_k,\tilde{A}_i]]-2\bigl([X_i,X_j]-i\epsilon_{ijk}X_k\bigr)[\tilde{A}_i,\tilde{A}_j]\right)\\
&\quad +\mathrm{tr}\Bigl(c\,[X_k,[X_k,b]]\Bigr)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{A}_i\bigl[(\tilde{X}_k)^2\delta_{ij}+2\bigl([\tilde{X}_i,\tilde{X}_j]-i\epsilon_{ijk}\tilde{X}_k\bigr)\bigr]\tilde{A}_j\right)\\
&\quad +\mathrm{tr}\Bigl(c\ (\tilde{X}_k)^2b\Bigr), && \text{(A.17)}
\end{aligned}$$

となる。ただし、$\tilde{S}_2$ は揺らぎ $\tilde{A}_i$ の 2 次の部分である。また、最後の行では、次の随伴演算子を導入した：

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_i M &= [X_i, M], && \text{(A.18)}\\
\big([\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] - i\epsilon_{ijk}\tilde{X}_k\big)M &= \big[\big([X_i, X_j] - i\epsilon_{ijk}X_k\big), M\big]. && \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

また、揺らぎ $\tilde{A}_i$ の１次の項は背景場の方法により、手でおとした。

よって、1-ループ有効作用 W_1 は次のように、$\tilde{S}_2$ を積分し対数をとることで得られる：

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -\log \int d\tilde{A}dcd\bar{c}\ e^{-\tilde{S}_2}\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{T}r\ \mathrm{tr}' \log\big[(\tilde{X}_k)^2\delta_{ij} + 2\big([\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] - i\alpha\epsilon_{ijk}\tilde{X}_k\big)\big]\\
&\quad -\mathcal{T}r \log\big[(\tilde{X}_k)^2\big], && \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

ただし、$\mathcal{T}r$ は行列に作用する演算子のトレースで、tr' は時空の添え字 i と j に対するトレースである。

B　インデックス定理

ここでは、インデックス定理 (3.24) を証明する。ただし、カイラリティ演算子と GW ディラック演算子を本稿で定義したものよりも一般的な形で定義して [20]、インデックス定理を証明する。もちろん、本稿で定義したカイラリティ演算子と GW ディラック演算子でも同様に証明できる。

ディラック演算子 D_{GW} を次のように定義する：

$$
f(a, \Gamma)D_{\mathrm{GW}} = 1 - \Gamma\hat{\Gamma}. \tag{B.1}
$$

ただし、Γ と $\hat{\Gamma}$ は本稿の Γ^R と $\hat{\Gamma}$ の一般形である。それらは、$\Gamma^2 = \hat{\Gamma}^2 = 1$ を満たすエルミート行列で、可換極限をとると、可換理論でのカイラリティ演算子となる。ここで、$f(a, \Gamma)$ は a と Γ の任意の関数とする。ただし、$f(a, \Gamma)$ は a の次数を持ち、逆関数を持つものとする。(B.1) のエルミート共役をとると

$$
D_{\mathrm{GW}}^{\dagger} f(a, \Gamma)^{\dagger} = 1 - \hat{\Gamma}\Gamma. \tag{B.2}
$$

となる。(B.1) の左から Γ を掛けたものと、右から $\hat{\Gamma}$ を掛けたものを足すことで、次の GW 関係式を得ることができる：

$$\Gamma D_{\mathrm{GW}} + D_{\mathrm{GW}}\hat{\Gamma} = 0, \tag{B.3}$$

$$D_{\mathrm{GW}}^{\dagger}\Gamma + \hat{\Gamma}D_{\mathrm{GW}}^{\dagger} = 0. \tag{B.4}$$

(B.1) の左右から Γ を掛けると (B.2) になり、(B.2) の左右から Γ を掛けると (B.1) になる：

$$D_{\mathrm{GW}}^{\dagger} = \Gamma f(a,\Gamma) D_{\mathrm{GW}} \Gamma f(a,\Gamma)^{\dagger -1}, \tag{B.5}$$

$$D_{\mathrm{GW}} = f(a,\Gamma)^{-1}\Gamma D_{\mathrm{GW}}^{\dagger} f(a,\Gamma)^{\dagger}\Gamma. \tag{B.6}$$

同じように、$\hat{\Gamma}$ を左右から掛けることで、

$$D_{\mathrm{GW}}^{\dagger} = \hat{\Gamma} f(a,\Gamma) D_{\mathrm{GW}} \hat{\Gamma} f(a,\Gamma)^{\dagger -1}, \tag{B.7}$$

$$D_{\mathrm{GW}} = f(a,\Gamma)^{-1}\hat{\Gamma} D_{\mathrm{GW}}^{\dagger} f(a,\Gamma)^{\dagger}\hat{\Gamma}, \tag{B.8}$$

が得られる。

ここで、スピノール行列 ψ のフォック空間 $\mathcal{H}$ を導入する。本稿の 2 次元球面の場合、$\mathcal{H}$ は $N \times N$ のエルミート行列全体の集合となる。上で、定義した GW ディラック演算子 D_{GW} とカイラリティ演算子 Γ、$\hat{\Gamma}$ はこれらの空間に作用する。

$\mathcal{H}$ を D_{GW} と $D_{\mathrm{GW}}^{\dagger}$ のゼロ固有モードと非ゼロ固有モードの空間に分解する：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \bar{\mathcal{H}}_0, \tag{B.9}$$

$$= \mathcal{H}_0' \oplus \bar{\mathcal{H}}_0', \tag{B.10}$$

ただし、

$$\mathcal{H}_0 = \{\psi \in \mathcal{H} | D_{\mathrm{GW}}\psi = 0\}, \tag{B.11}$$

$$\mathcal{H}_0' = \{\psi \in \mathcal{H} | D_{\mathrm{GW}}^{\dagger}\psi = 0\}, \tag{B.12}$$

であり、$\bar{\mathcal{H}}_0$ と $\bar{\mathcal{H}}_0'$ はそれぞれ $\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{H}_0'$ の補空間である。

まず、次の関係を示す：

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0',\ \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}_0', \\ &\psi \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0' \Rightarrow \Gamma\psi = \hat{\Gamma}\psi \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0'.\end{aligned} \tag{B.13}$$

証明)

もし $\psi \in \mathcal{H}_0$ $(D_{\mathrm{GW}}\psi = 0)$ なら、(B.3) より $\Gamma D_{\mathrm{GW}} = -D_{\mathrm{GW}}\hat{\Gamma}$ なので $\hat{\Gamma}\psi \in \mathcal{H}_0$ である。また、(B.1) の左から Γ を掛けることで $\Gamma f(a,\Gamma)D_{\mathrm{GW}}\psi = (\Gamma - \hat{\Gamma})\psi$ となるので、$\Gamma\psi = \hat{\Gamma}\psi$。よって、$\Gamma\psi \in \mathcal{H}_0$ である。それゆえ、(B.5) より $D^{\dagger}_{\mathrm{GW}}\psi = 0$ なので $\psi \in \mathcal{H}'_0$ である。つまり、$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}'_0$ ということが分かる。

同様に、もし $\psi \in \mathcal{H}'_0$ なら (B.4) より $\Gamma\psi \in \mathcal{H}'_0$ である。よって、(B.6) より $D_{\mathrm{GW}}\psi = 0$ なので、$\psi \in \mathcal{H}_0$ である。つまり、$\mathcal{H}'_0 \subset \mathcal{H}_0$ ということが分かる。それゆえ、$\mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}_0$ である。$\bar{\mathcal{H}}'_0 = \bar{\mathcal{H}}_0$ はその対偶である。

さらに、次のような関係を対偶を使って示す：

$$\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0 \Rightarrow \Gamma\psi, \hat{\Gamma}\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0. \tag{B.14}$$

証明)

もし、$\Gamma\psi \in \mathcal{H}'_0$ $(D^{\dagger}_{\mathrm{GW}}\Gamma\psi = 0)$ なら、(B.4) より $\hat{\Gamma}D^{\dagger}_{\mathrm{GW}}\psi = 0$ である。この両辺に左から $\hat{\Gamma}$ を掛けることで $D^{\dagger}_{\mathrm{GW}}\psi = 0$ となる。よって、$\psi \in \mathcal{H}'_0$ であることが分かる。

同様に $\hat{\Gamma}\psi \in \mathcal{H}_0$ $(D_{\mathrm{GW}}\hat{\Gamma}\psi = 0)$ なら、(B.3) より $\Gamma D_{\mathrm{GW}}\psi = 0$ である。この両辺に左から Γ を掛けることで $D_{\mathrm{GW}}\psi = 0$ となる。よって、$\psi \in \mathcal{H}_0$ であることが分かる。

つまり、$\Gamma\psi, \hat{\Gamma}\psi \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}'_0 \Rightarrow \psi \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}'_0$ なので、その対偶の $\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0 \Rightarrow \Gamma\psi, \hat{\Gamma}\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0$ がいえる。

最後に

$$\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0 \Rightarrow \Gamma\psi = -\hat{\Gamma}\psi \tag{B.15}$$

を示す。

証明)

もし $\Gamma\psi = \pm\psi$ なら (B.4) より $\hat{\Gamma}(D^{\dagger}_{\mathrm{GW}}\psi) = -D^{\dagger}_{\mathrm{GW}}\Gamma\psi = \mp(D^{\dagger}_{\mathrm{GW}}\psi)$ である。

同様に、もし $\hat{\Gamma}\psi = \pm\psi$ なら (B.3) より $\Gamma(D_{\mathrm{GW}}\psi) = -D_{\mathrm{GW}}\hat{\Gamma}\psi = \mp(D_{\mathrm{GW}}\psi)$ である。ゆえに、ψ が非ゼロ固有モード $(\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0)$ なら $\Gamma\psi = -\hat{\Gamma}\psi$ であることが分かる。

よって、(B.13)、(B.14)、(B.15) からインデックス定理が証明できる：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}r(\Gamma+\hat{\Gamma}) &= \mathcal{T}r_{\mathcal{H}_0}(\Gamma+\hat{\Gamma})+\mathcal{T}r_{\bar{\mathcal{H}}_0}(\Gamma+\hat{\Gamma}) \\ &= \mathcal{T}r_{\mathcal{H}_0}(\Gamma+\hat{\Gamma}) \\ &= 2(n_+-n_-) \\ &= 2\ \mathrm{Index}(D_{\mathrm{GW}}). \end{aligned}\tag{B.16}$$

ただし、1 行目から 2 行目になることは、(B.14)、(B.15) より非ゼロ固有モードが消えることから分かる。また、2 行目から 3 行目になることは、(B.14) より Γ と $\hat{\Gamma}$ のそれぞれにおいてカイラリティ± 1 のモードがあることから分かる。

ゆえに、インデックス定理 (3.24)

$$\mathrm{Index}(D_{\mathrm{GW}}) \equiv (n_+-n_-) = \frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma^R+\hat{\Gamma}),\tag{B.17}$$

が成り立つ。

C $\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(n\pm m)}(\Gamma^R+\hat{\Gamma})] = \mp m$ の証明

ここでは、配位 (3.36) に対して、(3.40) の右辺が (3.46) となることを具体的に求める。(3.40) の右辺を次のようにかく：

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(a)}(\Gamma^R+\hat{\Gamma})] = \frac{1}{2}\mathcal{T}r_{(a)}[\Gamma^R+\hat{\Gamma}^{(a)}].\tag{C.1}$$

ただし、$a=n\pm m$ で、$P^{(a)}$ は (3.41) で定義した射影演算子で $2L^{(a)}+1$ 次元の行列である。また、$\mathcal{T}r_{(a)}$ は $P^{(a)}$ で射影されたヒルベルト空間でのトレースの意味である。さらに、配位 (3.36) に対して $\hat{\Gamma}$ は

$$U\begin{pmatrix}\hat{\Gamma}^{(n+m)} & \\ & \hat{\Gamma}^{(n-m)}\end{pmatrix}U^\dagger \tag{C.2}$$

のように、対角ブロックに分解することができる。そのそれぞれのブロックが $\hat{\Gamma}^{(a)}$ で、具体的に

$$\hat{\Gamma}^{(a)} = \frac{2}{2L^{(a)}+1}\Big(\sigma_i L_i^{(a)}+\frac{1}{2}\Big),\tag{C.3}$$

とかける。ただし、$L_i^{(a)}$ は $SU(2)$ の代数を満たす $2L^{(a)}+1$ 次元行列である。

まず $\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(a)}(\Gamma^R)]=\frac{1}{2}\mathcal{T}r_{(a)}[\Gamma^R]$ を計算する。これを求めるため、演算子 $J_i=\frac{\sigma_i}{2}-L_i^R$ を導入する。J_i のカシミア演算子は

$$J_i^2=J(J+1)=L(L+1)+\frac{3}{4}-\sigma_i L_i^R, \tag{C.4}$$

となる。よって

$$\Gamma^R=\frac{2}{n}\Big(\sigma_i L_i^R-\frac{1}{2}\Big)=\frac{2}{n}\Big(L(L+1)+\frac{3}{4}-J(J+1)-\frac{1}{2}\Big), \tag{C.5}$$

となる。$J_i=\frac{\sigma_i}{2}-L_i^R$ は $SU(2)$ の代数を満たすのでスピン $L+\frac{1}{2}$ と $L-\frac{1}{2}$ の 2 つの表現に既約分解することができるので、Γ^R は $J=L+\frac{1}{2}$ と $J=L-\frac{1}{2}$ の 2 つの状態がある。$J=L+\frac{1}{2}$ のとき $\Gamma^R=-1$ で、縮退度 $\lambda_{L+\frac{1}{2}}$ は Γ^R の次元が $2(L+\frac{1}{2})+1=2L+2$ なので、

$$\lambda_{L+\frac{1}{2}}=(2L+2)(2L^{(a)}+1), \tag{C.6}$$

である。$J=L-\frac{1}{2}$ のとき $\Gamma^R=+1$ で、縮退度 $\lambda_{L-\frac{1}{2}}$ は Γ^R の次元が $2(L-\frac{1}{2})+1=2L$ なので、

$$\lambda_{L-\frac{1}{2}}=2L(2L^{(a)}+1), \tag{C.7}$$

である。ゆえに、

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(a)}(\Gamma^R)]=\frac{1}{2}\big(-\lambda_{L+\frac{1}{2}}+\lambda_{L-\frac{1}{2}}\big)=-(2L^{(a)}+1), \tag{C.8}$$

となる。

同様に、$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(a)}(\hat{\Gamma})]=\frac{1}{2}\mathcal{T}r_{(a)}[\hat{\Gamma}^{(a)}]$ を計算する。先ほどと同じように、演算子 $J_i'=\frac{\sigma_i}{2}+L_i^{(a)}$ を導入する。J_i' のカシミア演算子は

$$(J_i')^2=J'(J'+1)=L^{(a)}(L^{(a)}+1)+\frac{3}{4}+\sigma_i L_i^{(a)}, \tag{C.9}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{(a)} &= \frac{2}{2L^{(a)}+1}\Big(\sigma_i L_i^{(a)}+\frac{1}{2}\Big)\\ &= \frac{2}{2L^{(a)}+1}\Big(-L^{(a)}(L^{(a)}+1)-\frac{3}{4}+J'(J'+1)+\frac{1}{2}\Big),\end{aligned} \tag{C.10}$$

となる。先ほどと同様、$J_i' = \frac{\sigma_i}{2} + L_i^{(a)}$ は $SU(2)$ の代数を満たすので $J' = L^{(a)} + \frac{1}{2}$ と $J' = L^{(a)} - \frac{1}{2}$ 次元の表現行列に既約分解できる。$J' = L^{(a)} + \frac{1}{2}$ のとき、$\hat{\Gamma}^{(a)} = +1$ で、縮退度 $\lambda_{L^{(a)}+\frac{1}{2}}$ は $\hat{\Gamma}^{(a)}$ の次元が $2(L^{(a)} + \frac{1}{2}) + 1 = 2L^{(a)} + 2$ なので、

$$\lambda_{L+\frac{1}{2}} = (2L^{(a)} + 2)(2L + 1), \tag{C.11}$$

である。$J' = L^{(a)} - \frac{1}{2}$ のとき $\Gamma^{(a)} = -1$ で、縮退度 $\lambda_{L^{(a)}-\frac{1}{2}}$ は $\hat{\Gamma}^{(a)}$ の次元が $2(L^{(a)} - \frac{1}{2}) + 1 = 2L^{(a)}$ なので、

$$\lambda_{L-\frac{1}{2}} = 2L^{(a)}(2L + 1), \tag{C.12}$$

である。ゆえに、

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(a)}(\hat{\Gamma})] = \frac{1}{2}\big(\lambda_{L^{(a)}+\frac{1}{2}} - \lambda_{L^{(a)}-\frac{1}{2}}\big) = 2L + 1, \tag{C.13}$$

となる。したがって、(C.8) と (C.13) から

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(a)}(\Gamma^R + \hat{\Gamma})] = \frac{1}{2}\mathcal{T}r_{(a)}[\Gamma^R + \hat{\Gamma}^{(a)}] = 2(L - L^{(a)}), \tag{C.14}$$

となる。$a = n \pm m$ のとき $L^{(n\pm m)} = \frac{n\pm m+1}{2}$ なので、

$$2(L - L^{(a)}) = 2\Big(\frac{n+1}{2} - \frac{n \pm m + 1}{2}\Big) \quad = \mp m, \tag{C.15}$$

となるので、

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[P^{(n\pm m)}(\Gamma^R + \hat{\Gamma})] = \mp m, \tag{C.16}$$

となる。

D　GKP ディラック演算子 D_{GKP} のスペクトル

ここではモノポール配位 (3.36) での D_{GKP} (3.4) のスペクトルを求める。それは

$$D_{\mathrm{GKP}}^m = \sigma_i(A_i - L_i^R) + 1 = \sigma_i\left[\begin{pmatrix} L_i^{(n+m)} & \\ & L_i^{(n-m)} \end{pmatrix} - L_i^R\right] + 1, \tag{D.1}$$

のようにかける。$L_i^{(n\pm m)}$ はスピン $L \pm m/2$ をもち、$-L_i^R$ はスピン L をもつ。ただし、$n = 2L + 1$ である。よって、演算子 $A_i - L_i^R$ は次のスピンを持つ：

$$l = \begin{cases} \frac{m}{2}, \cdots, 2L + \frac{m}{2} \quad (\delta = 1), \\ \frac{m}{2}, \cdots, 2L - \frac{m}{2} \quad (\delta = -1). \end{cases} \tag{D.2}$$

ここで、$m \geq 0$ とした。(4.3) の演算子 M_i のスピン J を考えることで、D^m_{GKP} のスペクトルは次のように得ることができる：

$$D^m_{\mathrm{GKP}} = \begin{cases} J + \frac{1}{2} & = \quad l + 1 \quad (J = l + \frac{1}{2}), \\ -(J + \frac{1}{2}) & = \quad -l \quad (J = l - \frac{1}{2}). \end{cases} \tag{D.3}$$

ただし、l は (D.2) で与えられる。$m > 0$ の場合に対して、スペクトルは図 6 のようになる。図 7 は $n = 10, m = 0, 1, 2, 3, 4$ の場合に対してそのスペクトルを図示したものである。図 7 から分かるように D^m_{GKP} には明白なゼロモードは無い。

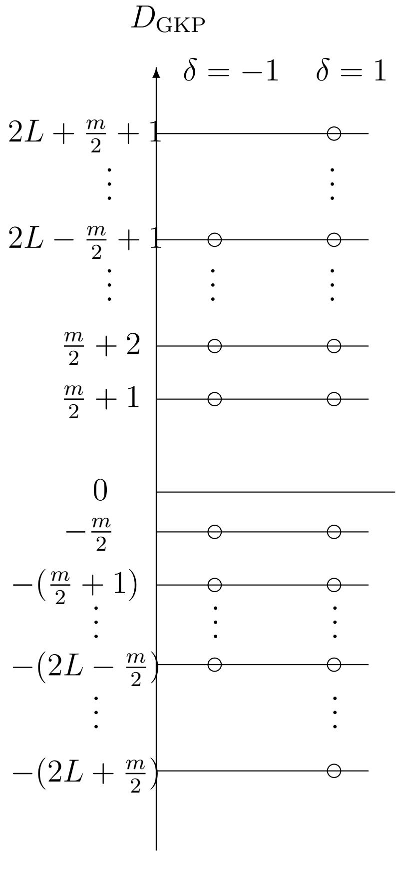


図 6: D^m_{GKP} $(m > 0)$ のスペクトル

次に、上で求めたスペクトルを節 4.1 の D^m_{GW} のスペクトルを求めたときと同じ方法で求めることもできる。まず、(D.1) の D^m_{GKP} の 2 乗を直接計算することで、

$$(D^m_{\mathrm{GKP}})^2 = M_i^2 + \frac{1}{4} = J(J+1) + \frac{1}{4} = (J + \frac{1}{2})^2, \tag{D.4}$$

を得る。ただし、M_i は (4.4) で導入した全角運動量である。そして、$(D^m_{\mathrm{GKP}})^2$ と

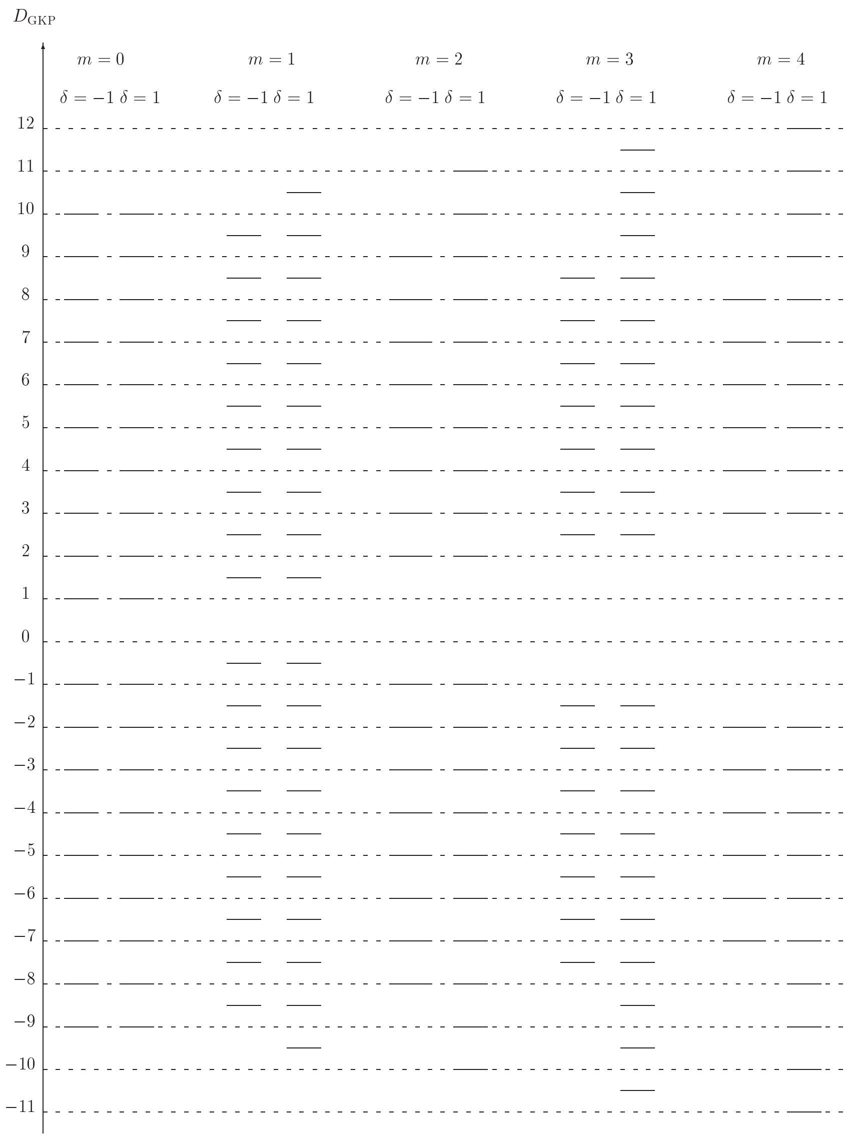

D_{GKP}
$m=0$
$m=1$
$m=2$
$m=3$
$m=4$
$\delta=-1$ $\delta=1$
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11

図 7: GKP スペクトル

(3.42)、(3.15) で導入した T,Γ^R と M_i との交換関係を調べると

$$
\begin{aligned}
\left[M_i\ ,\ (D^m_{\rm GKP})^2\right] &= 0, && \text{(D.5)}\\
\left[T\ ,\ (D^m_{\rm GKP})^2\right] &= 0, && \text{(D.6)}\\
\left[\Gamma^R\ ,\ (D^m_{\rm GKP})^2\right] &= 0. && \text{(D.7)}
\end{aligned}
$$

を満たすので、$(D^m_{\rm GKP})^2$ のスペクトルは

$$
(D^m_{\rm GKP})^2|J,J_3,\delta,\nu\rangle = (J+\frac{1}{2})^2\ |J,J_3,\delta,\nu\rangle, \tag{D.8}
$$

ただし、同時固有状態 $|J,J_3,\delta,\nu\rangle$ は (4.11)-(4.14) で定義したものである。

$D^m_{\rm GKP}$ は

$$
\begin{aligned}
[M_i\ ,\ D^m_{\rm GKP}] &= 0, && \text{(D.9)}\\
[T\ ,\ D^m_{\rm GKP}] &= 0, && \text{(D.10)}\\
\left[\Gamma^R\ ,\ D^m_{\rm GKP}\right] &\neq 0, && \text{(D.11)}
\end{aligned}
$$

を満たすので、J,J_3,δ がそれぞれ固定されたときの ν についての線形結合 $\sum_\nu c^\pm_\nu|J,J_3,\delta,\nu\rangle$ は次のような $D^m_{\rm GKP}$ の固有状態である：

$$
D^m_{\rm GKP}\sum_\nu c_\nu|J,J_3,\delta,\nu\rangle = \pm(J+\frac{1}{2})\ \sum_\nu c_\nu|J,J_3,\delta,\nu\rangle. \tag{D.12}
$$

$\delta=\pm1$ のセクターに対し、

$$
D^{m\pm}_{\rm GKP} = (\sigma_i L_i^{(n\pm m)}+\frac{1}{2}) - (\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}) = \frac{n\pm m}{2}\hat{\Gamma}^\pm - \frac{n}{2}\Gamma^R, \tag{D.13}
$$

と定義する。ただし、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^R &= \frac{2}{n}(\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}), && \text{(D.14)}\\
\hat{\Gamma}^\pm &= \frac{2}{n\pm m}(\sigma_i L_i^{(n\pm m)} + \frac{1}{2}). && \text{(D.15)}
\end{aligned}
$$

そして、次のようなギンスパーグ・ウィルソン関係式に似た関係式を示せる：

$$
\begin{aligned}
\frac{n\pm m}{n}\hat{\Gamma}^\pm D^{m\pm}_{\rm GKP} + D^{m\pm}_{\rm GKP}\Gamma^R &= \pm m + \frac{m^2}{2n}, && \text{(D.16)}\\
\frac{n\pm m}{n} D^{m\pm}_{\rm GKP}\hat{\Gamma}^\pm + \Gamma^R D^{m\pm}_{\rm GKP} &= \pm m + \frac{m^2}{2n}. && \text{(D.17)}
\end{aligned}
$$

固有値 α を持つ $D^{m\pm}_{\text{GKP}}$ の固有状態を ψ とする：

$$D^{m\pm}_{\text{GKP}}\psi = \alpha\psi. \tag{D.18}$$

(D.16) と (D.17) から

$$D^{m\pm}_{\text{GKP}}\left(\Gamma^R + \frac{n\pm m}{n}\hat{\Gamma}^{\pm}\right)\psi = -\alpha\left(\Gamma^R + \frac{n\pm m}{n}\hat{\Gamma}^{\pm}\right)\psi + \left(\pm 2m + \frac{m^2}{n}\right)\psi, \tag{D.19}$$

が得られる。それゆえ、

$$\begin{aligned} & D^{m\pm}_{\text{GKP}}\left[\Gamma^R + \frac{n\pm m}{n}\hat{\Gamma}^{\pm} - \frac{1}{2\alpha}\left(\pm 2m + \frac{m^2}{n}\right)\right]\psi \\ = & -\alpha\left[\Gamma^R + \frac{n\pm m}{n}\hat{\Gamma}^{\pm} - \frac{1}{2\alpha}\left(\pm 2m + \frac{m^2}{n}\right)\right]\psi. \end{aligned} \tag{D.20}$$

つまり、$\left[\Gamma^R + \frac{n\pm m}{n}\hat{\Gamma}^{\pm} - \frac{1}{2\alpha}\left(\pm 2m + \frac{m^2}{n}\right)\right]\psi$ は固有値 $-\alpha$ を持つ $D^{m\pm}_{\text{GKP}}$ の固有状態である。

(D.13) から

$$\Gamma^R + \frac{n\pm m}{n}\hat{\Gamma}^{\pm} = \frac{2}{n}D^{m\pm}_{\text{GKP}} + 2\Gamma^R, \tag{D.21}$$

を得る。(D.12) の固有状態 $\psi = \sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle$ は

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma^R + \frac{n+\delta m}{n}\hat{\Gamma} - \frac{1}{2\alpha}\left(2\delta m + \frac{m^2}{n}\right)\right]\sum_\nu c_\nu|J, J_3, \delta, \nu\rangle \\ = & \left[\frac{2}{n}\alpha - 2 - \frac{1}{2\alpha}\left(2\delta m + \frac{m^2}{n}\right)\right]c_{-1}|J, J_3, \delta, \nu = -1\rangle \\ & + \left[\frac{2}{n}\alpha + 2 - \frac{1}{2\alpha}\left(2\delta m + \frac{m^2}{n}\right)\right]c_{1}|J, J_3, \delta, \nu = 1\rangle. \end{aligned} \tag{D.22}$$

ただし、$\alpha = \pm(J + \frac{1}{2})$ である。

表 2 において、$J = \frac{m-1}{2}$ の最低スピン状態をみると、それぞれの δ に対して、$\nu = +1$ か $\nu = -1$ の状態のみが存在するので、状態 (D.22) は消えなければならない。よって、$\alpha = -m$ となり、最低スピン状態に対して、D^m_{GKP} の固有値は負の固有値のみ存在する。次に、最高スピン状態 $(J, \delta, \nu) = (2L - \frac{m-1}{2}, -1, -1)$、$(2L + \frac{m+1}{2}, +1, -1)$ をみると、それぞれの δ に対して、$\nu = -1$ の状態のみ存在するので、状態 (D.22) は消えなければならない。よって、それぞれ $\alpha = n \pm \frac{m}{2}$ となり、最高スピン状態に対して、D^m_{GKP} の固有値は正の固有値のみ存在する。他の状態 (D.22) は消えないので、他の状態に対する D^m_{GKP} の固有値は正と負の両方の固有値がある。ゆえに、図 6 のスペクトルが得られる。

さらに、係数 c_ν も決めることができる。状態 (D.22) と $\sum_\nu c_\nu|J,J_3,\delta,\nu\rangle$ は直交するので、

$$\left[\frac{2}{n}\alpha-2-\frac{1}{2\alpha}\left(2\delta m+\frac{m^2}{n}\right)\right]|c_{-1}|^2+\left[\frac{2}{n}\alpha+2-\frac{1}{2\alpha}\left(2\delta m+\frac{m^2}{n}\right)\right]|c_1|^2=0. \tag{D.23}$$

それゆえ、D^m_{GKP} の固有状態は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Bigg[\sqrt{2+\frac{2}{n}\alpha-\frac{1}{2\alpha}\left(2\delta m+\frac{m^2}{n}\right)}|J,J_3,\delta,\nu=-1\rangle\\&+\frac{\alpha}{|\alpha|}\sqrt{2-\frac{2}{n}\alpha+\frac{1}{2\alpha}\left(2\delta m+\frac{m^2}{n}\right)}|J,J_3,\delta,\nu=1\rangle\Bigg],\end{aligned} \tag{D.24}$$

となる。ただし、$\alpha=\pm(J+\frac{1}{2})$ で、相対的な位相は $|J,J_3,\delta,\nu=-1\rangle$ と $|J,J_3,\delta,\nu=1\rangle$ の再定義で吸収させた。

E　可換理論でのディラック演算子 D_{com} のスペクトル

この付録では、可換理論での GW ディラック演算子 (3.22) の TP モノポール背景 (3.29) におけるスペクトルを調べる：

$$D'^{\,m=1}_{\mathrm{com}}=\sigma\cdot\mathcal{L}+1+\frac{1}{2}\sigma\cdot\tau-\frac{1}{2}(n\cdot\sigma)(n\cdot\tau). \tag{E.1}$$

これは (4.37) の可換極限によっても得ることができる。まず、次の演算子を考える：

$$M_i = \mathcal{L}_i+\frac{\sigma_i}{2}+\frac{\tau_i}{2}, \tag{E.2}$$

$$t = n\cdot\tau, \tag{E.3}$$

$$\gamma = n\cdot\sigma. \tag{E.4}$$

ただし、M_i は全角運動量演算子で、t は $U(1)$ ゲージ群の生成子、γ はカイラリティ演算子である。これらの演算子はそれぞれ交換する：

$$[M_i\ ,\ t] = 0, \tag{E.5}$$

$$[M_i\ ,\ \gamma] = 0, \tag{E.6}$$

$$[t\ ,\ \gamma] = 0. \tag{E.7}$$

よって、これらの演算子の同時固有状態を

$$M_i^2|J, J_3, \delta, \nu\rangle = J(J+1)\,|J, J_3, \delta, \nu\rangle, \tag{E.8}$$

$$M_3|J, J_3, \delta, \nu\rangle = J_3\,|J, J_3, \delta, \nu\rangle, \tag{E.9}$$

$$t|J, J_3, \delta, \nu\rangle = \delta\,|J, J_3, \delta, \nu\rangle, \tag{E.10}$$

$$\gamma|J, J_3, \delta, \nu\rangle = \nu\,|J, J_3, \delta, \nu\rangle, \tag{E.11}$$

のように考えることができる。

ここで、まず、$\mathcal{L}_i + \frac{\sigma_i}{2}$ の演算子を考え、この演算子と $\frac{\tau_i}{2}$ を合成することで、$M_i = (\mathcal{L}_i + \frac{\sigma_i}{2}) + \frac{\tau_i}{2}$ のスピンを次のように求めることができる：

$$J = \begin{cases} l+1 & (l \geq 0), \\ l & (l \geq 0), \\ l & (l \geq 1), \\ l-1 & (l \geq 1). \end{cases} \tag{E.12}$$

ただし、l は演算子 $\mathcal{L}_i$ のスピンである。実際、M_i の固有状態は表 3 のように存在する。[8]

表 3: M_i の固有状態

	δ	$-$	$-$	$+$	$+$
J	ν	$+$	$-$	$+$	$-$
0		○			○
1		○	○	○	○
2		○	○	○	○
3		○	○	○	○
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮

[8] この後の (E.29) で見るように、$(\delta, \nu) = (-1, +1)$ と $(+1, -1)$ の 2 つのゼロモードがある。(E.18)、(E.19)、(E.22) から $\nu = +1$ と $\nu = -1$ の両方の固有状態は、$J \geq 1$ のそれぞれの J, J_3, δ に対して存在する。さらに、$D' = \tau \cdot \mathcal{L} + 1 + \frac{1}{2}\sigma \cdot \tau - \frac{1}{2}(n \cdot \sigma)(n \cdot \tau)$ を定義することで、$\delta = +1$ と $\delta = -1$ の両方の固有状態は $J \geq 1$ のそれぞれの J, J_3, ν に対して存在する。

$D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}$ の 2 乗を計算すると

$$(D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}})^2 = M_i^2, \tag{E.13}$$

となる。この $(D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}})^2$ は演算子 M_i の 2 乗で書けるので、M_i, t, γ と交換する：

$$\begin{aligned}
\left[M_i\ ,\ (D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}})^2\right] &= 0, && \text{(E.14)}\\
\left[t\ ,\ (D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}})^2\right] &= 0, && \text{(E.15)}\\
\left[\gamma\ ,\ (D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}})^2\right] &= 0. && \text{(E.16)}
\end{aligned}$$

よって、次のように $(D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}})^2$ のスペクトルを得ることができる：

$$(D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}})^2\ |J, J_3, \delta, \nu\rangle = J(J+1)\ |J, J_3, \delta, \nu\rangle. \tag{E.17}$$

また、M_i, t, γ と $D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}$ との交換関係は

$$\begin{aligned}
\left[M_i\ ,\ D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}\right] &= 0, && \text{(E.18)}\\
\left[t\ ,\ D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}\right] &= 0, && \text{(E.19)}\\
\left[\gamma\ ,\ D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}\right] &\neq 0, && \text{(E.20)}
\end{aligned}$$

となる。それゆえ、$D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}$ の固有状態は次のように、それぞれの J, J_3, δ に対する ν の線形結合 $\sum_\nu c_\nu^\pm |J, J_3, \delta, \nu\rangle$ で得られる：

$$D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}\left[\sum_\nu c_\nu^\pm |J, J_3, \delta, \nu\rangle\right] = \pm\sqrt{J(J+1)}\left[\sum_\nu c_\nu^\pm |J, J_3, \delta, \nu\rangle\right]. \tag{E.21}$$

ディラック演算子 $D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}$ はカイラリティ演算子 γ と反交換する：

$$\left\{\gamma\ ,\ D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}\right\} = 0. \tag{E.22}$$

もし $\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle$ が固有値 α の $D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}$ の固有状態とすると、$\gamma \sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle$ は固有値 $-\alpha$ の固有状態である：

$$\begin{aligned}
D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}\left[\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle\right] &= \alpha\left[\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle\right], && \text{(E.23)}\\
D'^{\ m=1}_{\mathrm{com}}\left[\gamma\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle\right] &= -\alpha\left[\gamma\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle\right]. && \text{(E.24)}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\alpha = \pm\sqrt{J(J+1)}. \tag{E.25}$$

である。

次に、係数 c_ν を求める。$\gamma \sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle$ は $\sum_\nu c_\nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle$ と直交しなければならないので

$$|c_1|^2 - |c_{-1}|^2 = 0, \tag{E.26}$$

したがって

$$|c_{-1}| = |c_1|, \tag{E.27}$$

となる。それゆえ、固有値 α の固有状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[|J, J_3, \delta, 1\rangle + \frac{\alpha}{|\alpha|} |J, J_3, \delta, -1\rangle \right], \tag{E.28}$$

である。ここで相対的な位相は $|J, J_3, \delta, 1\rangle$ と $|J, J_3, \delta, -1\rangle$ を再定義することで吸収させた。

最後にカイラル・ゼロモードの具体形を求める。カイラル・ゼロモードは全角運動量演算子 M_i の表 3 の $J = 0$ のゼロモードに対応するので、それらは $\epsilon_{\alpha l}$ と $n^i \sigma^i_{\alpha\alpha'} \epsilon_{\alpha' l}$ のように書くことができる。ただし、α と l はそれぞれスピノールとゲージ群の足である。実際に直接 $(D'^{\,m=1}_{\rm com})\epsilon = 0$ や $(D'^{\,m=1}_{\rm com}) n \cdot \sigma \epsilon = 0$ を示すことができる。t と γ の固有状態はこれらの 2 つのゼロモードの線形結合により得られる。$(\delta, \nu) = \pm(-1, +1)$ の状態は等式 (4.39) を使うことで、

$$\frac{1}{2}[1 \pm n \cdot \sigma]_{\alpha\alpha'} \epsilon_{\alpha' l} = \frac{1}{2}[1 \mp n \cdot \tau]_{ll'} \epsilon_{\alpha l'}, \tag{E.29}$$

となる。

参考文献

[1] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997) [arXiv:hep-th/9610043].

[2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [arXiv:hep-th/9612115].

For a review, see H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya and T. Tada, Prog. Theor. Phys. Suppl. **134**, 47 (1999) [arXiv:hep-th/9908038].

[3] T.Eguchi and H.Kawai,
Phys.Rev.Lett.**48**,1063 (1982)

[4] M. B. Green, J. H. Schwarz and L. Brink,
"SUPERFIELD THEORY OF TYPE(II) SUPERSTRIG ",
Nucl. Phys. **B219** (1983) 437.

[5] M. Fukuma, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **510**, 158 (1998) [arXiv:hep-th/9705128].

[6] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Prog. Theor. Phys. **99**, 713 (1998) [arXiv:hep-th/9802085].

[7] J. Nishimura and F. Sugino, JHEP **0205**, 001 (2002) [arXiv:hep-th/0111102].

[8] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki, T. Matsuo and S. Shinohara, Nucl. Phys. B **647**, 153 (2002) [arXiv:hep-th/0204240]

H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki and S. Shinohara,
Prog. Theor. Phys. **109**, 115 (2003) [arXiv:hep-th/0211272].

[9] N. Seiberg and E. Witten,
JHEP **9909**, 032 (1999) [arXiv:hep-th/9908142].

[10] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Nucl. Phys. B **565**, 176 (2000) [arXiv:hep-th/9908141].

[11] W. I. Taylor, Phys. Lett. B **394**, 283 (1997) [arXiv:hep-th/9611042].

[12] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, JHEP **9802**, 003 (1998) [arXiv:hep-th/9711162].

[13] H. Aoki, S. Iso and T. Suyama, Nucl. Phys. B **634**, 71 (2002) [arXiv:hep-th/0203277].

[14] J. Madore, Class. Quant. Grav. **9**, 69 (1992).

[15] S. Iso, Y. Kimura, K. Tanaka and K. Wakatsuki, Nucl. Phys. B **604**, 121 (2001) [arXiv:hep-th/0101102].

[16] R. C. Myers, JHEP **9912** (1999) 022 [arXiv:hep-th/9910053].

[17] S. Iso, F. Sugino, H. Terachi and H. Umetsu, Phys. Rev. D **72**, 066001 (2005) [arXiv:hep-th/0503101].

[18] U. Carow-Watamura and S. Watamura, Commun. Math. Phys. **183**, 365 (1997) [arXiv:hep-th/9605003]; Commun. Math. Phys. **212**, 395 (2000) [arXiv:hep-th/9801195].

[19] H. Grosse and J. Madore, Phys. Lett. B **283**, 218 (1992);

H. Grosse and P. Presnajder, Lett. Math. Phys. **33**, 171 (1995);

H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, Commun. Math. Phys. **185**, 155 (1997) [arXiv:hep-th/9507074]; [arXiv:hep-th/9603071].

[20] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, Phys. Rev. D **67**, 085005 (2003) [arXiv:hep-th/0209223].

[21] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev. D **25**, 2649 (1982).

[22] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, Nucl. Phys. B **684**, 162 (2004) [arXiv:hep-th/0312199].

[23] A. P. Balachandran and G. Immirzi, Phys. Rev. D **68**, 065023 (2003) [arXiv:hep-th/0301242].

[24] H. Aoki, S. Iso, T. Maeda and K. Nagao, Phys. Rev. D **71**, 045017 (2005) [arXiv:hep-th/0412052]

[25] J. Hoppe,
"Quantum Theory of a relativistic surfice,"
素粒子論研究 80 巻 3 号 (1989 年)145

[26] M. Bordemann, E. Meinrenken and M. Schlichenmaier,
Commun. Math. Phys. **165**(1994)281, [arXiv:hep-th/9309134]

[27] A. Schild,
"Classical null strings ", Phys. Rev. **D16** (1977) 1722.

[28] K. N. Anagnostopoulos and J. Nishimura, Phys. Rev. D **66**, 106008 (2002) [arXiv:hep-th/0108041].

[29] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai and Y. Kitazawa, Phys. Rev. E **62**, 6260 (2000) [arXiv:hep-th/9910262].

[30] H. Neuberger, Phys. Lett. B **417**, 141 (1998) [arXiv:hep-lat/9707022];
Phys. Rev. D **57**, 5417 (1998) [arXiv:hep-lat/9710089];
Phys. Lett. B **427**, 353 (1998) [arXiv:hep-lat/9801031].

[31] M. Lüscher, Phys. Lett. B **428**, 342 (1998) [arXiv:hep-lat/9802011].

[32] F. Niedermayer, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73**, 105 (1999) [arXiv:hep-lat/9810026].

[33] P. Hasenfratz, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **63**, 53 (1998) [arXiv:hep-lat/9709110];
P. Hasenfratz, V. Laliena and F. Niedermayer, Phys. Lett. B **427**, 125 (1998) [arXiv:hep-lat/9801021].

[34] H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, geometry," Commun. Math. Phys. **178**, 507 (1996) [arXiv:hep-th/9510083];

S. Baez, A. P. Balachandran, B. Ydri and S. Vaidya, Commun. Math. Phys. **208**, 787 (2000) [arXiv:hep-th/9811169];

G. Landi, J. Geom. Phys. **37**, 47 (2001) [arXiv:math-ph/9905014].

[35] A. P. Balachandran and S. Vaidya, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 17 (2001) [arXiv:hep-th/9910129].

[36] P. Valtancoli, Mod. Phys. Lett. A **16**, 639 (2001) [arXiv:hep-th/0101189].

[37] H. Steinacker, Nucl. Phys. B **679**, 66 (2004) [arXiv:hep-th/0307075].

[38] D. Karabali, V. P. Nair and A. P. Polychronakos, Nucl. Phys. B **627**, 565 (2002) [arXiv:hep-th/0111249].

[39] U. Carow-Watamura, H. Steinacker and S. Watamura, J. Geom. Phys. **54**, 373 (2005) [arXiv:hep-th/0404130].

[40] S. Bal and H. Takata, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2445 (2002) [arXiv:hep-th/0108002].

[41] P. Valtancoli, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 967 (2003) [arXiv:hep-th/0206075].

[42] T. A. Imai, Y. Kitazawa, Y. Takayama and D. Tomino, Nucl. Phys. B **665**, 520 (2003) [arXiv:hep-th/0303120].

[43] T. Azuma, S. Bal, K. Nagao and J. Nishimura, JHEP **0405**, 005 (2004) [arXiv:hep-th/0401038].

[44] P. Castro-Villarreal, R. Delgadillo-Blando and B. Ydri, Nucl. Phys. B **704**, 111 (2005) [arXiv:hep-th/0405201].

[45] T. Azuma, S. Bal, K. Nagao and J. Nishimura, [arXiv:hep-th/0405277].

[46] T. Azuma, K. Nagao and J. Nishimura, JHEP **0506**, 081 (2005) [arXiv:hep-th/0410263].