

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
“LA SAPIENZA”



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E
NATURALI

CORSO DI LAUREA IN FISICA

ROTTURA DELLA SIMMETRIA ELETTRODEBOLE IN
MODELLI DI UNIFICAZIONE GAUGE-HIGGS IN SEI
DIMENSIONI

RELATORI:

Prof. Guido Martinelli

Dott. Luca Silvestrini

LAUREANDO:

Leone Cavicchia

Matricola 690831

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

TESINE

Tesina 1: Materia oscura nell'universo

Relatore: Dr. A. Melchiorri

Tesina 2: NMR a bassa risoluzione per i Beni Culturali

Relatore: Prof. F. De Luca

To
The Inhabitants of SPACE IN GENERAL
And H. C. IN PARTICULAR
This Work is Dedicated
By a Humble Native of Flatland
In the Hope that
Even as he was Initiated into the Mysteries
Of THREE Dimensions
Having been previously conversant
With ONLY TWO
So the Citizens of that Celestial Region
May aspire yet higher and higher
To the Secrets of FOUR FIVE OR EVEN SIX Dimensions
Thereby contributing
To the Enlargement of THE IMAGINATION
And the possible Development
Of that most rare and excellent Gift of MODESTY
Among the Superior Races
Of SOLID HUMANITY

Flatland: A romance of many dimensions
by Edwin A. Abbott, 1884

Indice

Indice	ix
Introduzione	1
1 Il Modello Standard e il problema della gerarchia	5
1.1 Il Modello Standard	5
1.1.1 Lagrangiana	6
1.1.2 Rottura di simmetria elettrodebole	12
1.1.3 Sommario	16
1.2 Problemi aperti nel MS	18
1.2.1 Il problema della gerarchia	19
1.3 Teorie alternative al MS: cenni a SUSY e Technicolor	20
1.3.1 Supersimmetria	20
1.3.2 Technicolor	23
2 Estensioni extra-dimensionali del Modello Standard	27
2.1 Introduzione alle dimensioni extra	28
2.1.1 Caratteristiche generali	29
2.1.2 Diversi scenari basati sulle ED	30
2.2 Meccanismi di compattificazione	34
2.2.1 Compattificazione ordinaria	34
2.2.2 Compattificazione alla Scherk-Schwarz	38
2.2.3 Compattificazione su orbifold	40
2.2.4 Condizioni di consistenza	43
2.3 Rottura della simmetria di gauge	44
2.3.1 Rottura di simmetria alla Scherk-Schwarz	44
2.3.2 Meccanismo di Hosotani	47
2.3.3 Rottura di simmetria su orbifold	48
2.4 Unificazione gauge-Higgs	51
2.4.1 $SU(3)_w \rightarrow SU(2)_L \otimes U(1) \rightarrow U(1)_{em}$ in $D = 5$	55

3	Modelli di unificazione gauge-Higgs in 6 dimensioni	63
3.1	Caratteristiche generali dei modelli in 6 dimensioni	64
3.2	Classificazione delle simmetrie discrete su T^2	65
3.3	Rottura di simmetria	67
3.3.1	Funzioni d'onda e spettro	70
3.3.2	Campi di gauge	72
3.3.3	Campi di materia	73
3.4	Modelli con $N > 2$: il potenziale di Higgs e il problema dei tadpoli	74
3.5	Tadpoli in $T^2/\mathbb{Z}_N$	80
3.5.1	Calcolo dei tadpoli	81
3.5.2	Tadpoli e simmetrie	84
4	Rottura della simmetria elettrodebole in $T^2/\mathbb{Z}_2$	89
4.1	Modelli sull'orbifold $T^2/\mathbb{Z}_2$	91
4.2	Calcolo del potenziale nel caso delle Wilson lines	94
4.3	Calcolo del potenziale nel caso generale	100
4.3.1	Struttura del potenziale completo a 1 loop	101
4.3.2	Calcolo dei coefficienti	103
4.3.3	Minimizzazione e spettro di massa	113
	Conclusioni e sviluppi	117
A	Integrali di loop	121
B	Diagrammi a 4 punti	129
C	Algebra del numeratore	135
D	Fermioni in D dimensioni	137
	Bibliografia	141

Introduzione

Il Modello Standard della fisica delle particelle elementari fornisce una descrizione delle interazioni fondamentali che presenta un notevole accordo con i dati sperimentali alle scale di energia fino ad oggi verificate. Nonostante il suo grande successo, il Modello Standard lascia aperti numerosi problemi; vi sono inoltre alcuni suoi aspetti che si ritiene che soffrano di un'eccessiva arbitrarietà oppure di scarsa naturalezza.

Tra questi, il più rilevante alle energie che saranno esplorate nella prossima generazione di esperimenti è il *problema della gerarchia*. Esso è legato alla differenza di molti ordini di grandezza tra la scala di rottura della simmetria elettrodebole e la scala della nuova fisica, che costituisce il limite superiore di validità del Modello Standard. Queste due grandezze sono collegate tra loro dalle correzioni radiative alla massa dei campi scalari; per far sì che la scala di rottura della simmetria elettrodebole sia stabilizzata al suo valore (~ 100 GeV) bisogna quindi supporre una cancellazione estremamente precisa tra due parametri, che appare poco naturale.

Negli anni successivi alla nascita del Modello Standard vi è stato un gran numero di sforzi teorici, volti ad elaborare modelli alternativi in cui la rottura della simmetria elettrodebole venga prodotta in maniera da non generare correzioni quantistiche divergenti ai parametri della teoria. Tali sforzi sono giustificati dal fatto che l'esistenza del bosone di Higgs non ha ad oggi ancora trovato una conferma sperimentale. Alcuni esempi di modelli di questo tipo sono le teorie supersimmetriche e i modelli di technicolor.

Negli ultimi anni hanno ricevuto grande attenzione le estensioni del Modello Standard basate sulla presenza di *dimensioni addizionali compatte dello spazio-tempo*. Nel contesto delle teorie di campo con extra-dimensioni compatte è possibile definire nuovi meccanismi di rottura della simmetria non presenti nello spazio di Minkowski. Questi nuovi meccanismi possono essere sfruttati per costruire modelli in cui alcuni dei problemi del Modello Standard vengono visti sotto una diversa luce.

Particolarmente interessante è la possibilità di costruire modelli basati sul meccanismo di unificazione gauge-Higgs, nel quale i campi scalari vengono

identificati con le componenti lungo le dimensioni compatte dei campi vettoriali, e sono quindi protetti dalle divergenze quadratiche dalla simmetria di gauge. La costruzione di questi modelli richiede che lo spazio compatto abbia una topologia con punti singolari (*orbifold*). Modelli di questo tipo sono stati studiati dettagliatamente in letteratura nel caso di uno spazio-tempo pentadimensionale: in questo caso il potenziale nel settore scalare è generato interamente a livello radiativo, e questo si riflette nella predizione di un valore notevolmente inferiore ai limiti sperimentali per la massa del campo scalare che rompe la simmetria elettrodebole.

Se si costruiscono modelli basati sull'unificazione gauge-Higgs in uno spazio-tempo a sei invece che a cinque dimensioni si presentano due nuovi effetti:

1. È presente un termine quartico a livello albero nel potenziale che può contribuire ad innalzare la massa dei campi scalari.
2. La Lagrangiana contiene termini localizzati nei punti singolari che possono introdurre nuove divergenze quadratiche.

Lo studio di tutti i possibili orbifold in sei dimensioni mostra che solo sullo spazio $T_2/\mathbb{Z}_2$ è possibile costruire modelli in cui la massa dei campi scalari resta finita.

Lo scopo della parte originale di questo lavoro di tesi è un'analisi dettagliata della rottura di simmetria elettrodebole sull'orbifold $T_2/\mathbb{Z}_2$, volta a determinare la compatibilità della predizione per la massa dei campi scalari con i limiti sperimentali. Tale analisi è complicata dal fatto che su questo spazio è possibile costruire esclusivamente modelli con *due doppietti di Higgs*; la struttura del potenziale è in questo caso caratterizzata dalla presenza di una direzione piatta. Per stimare correttamente il valore delle fluttuazioni del potenziale intorno alla direzione piatta senza imporre condizioni restrittive sui valori d'aspettazione nel vuoto dei campi, è dunque necessario tenere conto di tutte le correzioni quantistiche a un loop.

La tesi è strutturata come segue.

Nel primo capitolo è presentata una breve sintesi del Modello Standard. Si discutono successivamente gli aspetti che si ritiene che il Modello Standard spieghi in maniera inadeguata; si sottolinea in particolare il *problema della gerarchia*, mostrando come è legato alla differenza di molti ordini di grandezza tra la scala di rottura della simmetria elettrodebole e il cut-off della teoria. Infine si mostrano le caratteristiche più rilevanti di due estensioni del Modello Standard che risolvono in maniera diversa il problema della gerarchia: la supersimmetria e i modelli di technicolor.

Nel secondo capitolo si introducono le teorie di campo basate su dimensioni addizionali dello spazio-tempo. Dopo una breve introduzione in cui vengono illustrati i differenti “scenari” presenti in letteratura, vengono definiti i differenti meccanismi di compattificazione delle extra-dimensioni. Successivamente si mostra quali sono i meccanismi di rottura della simmetria basati sulla presenza di dimensioni addizionali compatte. Infine si introduce il meccanismo di unificazione gauge-Higgs, mostrando come possa essere utilizzato nella costruzione di modelli realistici. Tutti i concetti introdotti in questo capitolo sono illustrati con esempi concreti relativi al caso pentadimensionale.

Nel terzo capitolo vengono analizzati in dettaglio i modelli basati sul meccanismo di unificazione gauge-Higgs in uno spazio tempo a sei dimensioni. Inizialmente viene presentata l'estensione al caso sei-dimensionale dei concetti introdotti nel capitolo precedente. Viene poi presentata una classificazione degli orbifold che è possibile costruire partendo dal toro esadimensionale. Si mostra che nel caso esadimensionale la presenza nella Lagrangiana di termini lineari nell'intensità di campo localizzati ai punti fissi è compatibile con tutte le simmetrie del sistema. Questi contengono nuovi termini di massa divergenti per i campi scalari, non presenti nel caso pentadimensionale. Si presentano infine i risultati presenti in letteratura che mostrano come solo nel caso $T_2/\mathbb{Z}_2$ si abbia, per un'opportuna scelta del contenuto fermionico del modello, una cancellazione dei termini divergenti.

Nel quarto capitolo, che contiene la parte originale di questo lavoro di tesi, si effettua un'analisi dettagliata della rottura della simmetria elettrodebole sull'orbifold $T_2/\mathbb{Z}_2$. Vengono presentati inizialmente i risultati che si ottengono assumendo che i vev dei campi scalari siano orientati lungo direzioni commutanti dello spazio di gauge; in questo caso, analogamente a quanto accade nel caso pentadimensionale, vi è una corrispondenza tra i vev dei campi scalari e le Wilson lines lungo traiettorie non contraibili sullo spazio singolare. Alla luce dei risultati questa assunzione appare però eccessivamente restrittiva: viene quindi ripetuta l'analisi nella configurazione più generale, tenendo conto di tutti gli effetti radiativi a un loop.

Capitolo 1

Il Modello Standard e il problema della gerarchia

In questo capitolo vogliamo riassumere le caratteristiche principali del Modello Standard (MS). Metteremo in luce successivamente quali sono i problemi che il Modello Standard lascia aperti e quali sono gli aspetti che si ritiene che non chiarisca in maniera del tutto soddisfacente. In particolare discuteremo il cosiddetto problema della gerarchia, legato alla presenza di campi scalari fondamentali nel meccanismo attraverso il quale nel Modello Standard viene rotta la simmetria elettrodebole. Vedremo infine brevemente quali sono le due teorie che negli anni hanno avuto maggior successo nel tentare di risolvere questo problema, la Supersimmetria e il Technicolor, e quali sono le difficoltà che incontrano.

1.1 Il Modello Standard

Il Modello Standard della fisica delle particelle elementari [1, 2, 3] è una teoria quantistica di campo che fornisce una descrizione estremamente compatta e predittiva di tre delle quattro interazioni fondamentali presenti in Natura: le interazioni forti, le interazioni deboli e le interazioni elettromagnetiche. Negli ultimi trent'anni le predizioni del modello sono state verificate sperimentalmente con grande accuratezza fino ad un'energia di alcune centinaia di GeV, o equivalentemente a distanze dell'ordine di 10^{-16} cm. Fino ad oggi tutti gli "ingredienti" di base del modello sono stati scoperti sperimentalmente, con un'unica eccezione: il bosone di Higgs.

Per definire la teoria bisogna specificare le simmetrie sotto le quali la sua Lagrangiana deve essere invariante, e il contenuto di materia.

1.1.1 Lagrangiana

La densità di Lagrangiana del Modello Standard è la densità di Lagrangiana più generale invariante sotto trasformazioni di gauge locali appartenenti al gruppo di simmetria $G = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Essa si può scrivere come somma di quattro termini:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{Yu} + \mathcal{L}_H. \quad (1.1)$$

$\mathcal{L}_{YM}$ è la Lagrangiana di Yang e Mills che descrive, alle basse energie, i gruppi di gauge del Modello Standard: $SU(3)$ di colore, $SU(2)$ di isospin debole e $U(1)$ di ipercarica.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{EW} + \mathcal{L}_Y \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^8 G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu A} - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

I tensori di intensità dei vari campi si scrivono come:

- Per le interazioni forti:

$$G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g_3 f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C \quad (1.3)$$

con

$$A, B, C = 1, \dots, 8 \quad (1.4)$$

dove A, B, C sono indici di *colore*, il numero quantico che determina il comportamento delle particelle nelle interazioni forti, e g_3 è la costante di accoppiamento dell'interazione. Gli otto A_μ^B sono i gluoni, i bosoni vettoriali che mediano l'interazione.

- Per le interazioni di $SU(2)_L$:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (1.5)$$

con

$$a, b, c = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

dove a, b, c sono indici di *isospin debole* e g_2 è la costante di accoppiamento debole.

- Per le interazioni di $U(1)_Y$:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.7)$$

Questa parte della Lagrangiana contiene dunque tutti i termini cinetici e di autointerazione per i campi vettoriali della teoria: se ci fosse solo questo termine il Modello Standard sarebbe una teoria di pura gauge, non conterrebbe cioè materia fermionica.

Il secondo termine della Lagrangiana, $\mathcal{L}_D$, descrive i campi fermionici e le loro interazioni con i campi di gauge. Poichè un termine di massa di Dirac per i fermioni non sarebbe invariante sotto le trasformazioni di gauge della teoria, i campi di materia sono tutti a massa nulla e possono essere scritti come campi di Weyl. I campi fermionici del Modello Standard si possono dividere in due categorie: i quark che sentono le interazioni forti, e si comportano come triplette di colore (appartengono cioè alla rappresentazione fondamentale di $SU(3)$), e i leptoni che non interagiscono forte e sono quindi singoletti di colore. I campi, scritti riportando esplicitamente tutti gli indici, sono:

$$Q_{L,i}^A = \begin{pmatrix} u_i^A \\ d_i^A \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}}, \quad u_{i,R}^A \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{\frac{2}{3}}, \quad d_{i,R}^A \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-\frac{1}{3}},$$

$$L_{L,i} = \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}, \quad e_{i,R} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}. \quad (1.8)$$

In questa notazione i due indici tra parentesi indicano la rappresentazione di $SU(3)$ e $SU(2)$ a cui appartiene il campo, mentre il pedice ne indica l'ipercarica.

L'indice A , presente solo nel caso dei quarks, è l'indice di colore. L'indice i invece è l'indice di *flavour* (o *sapore*), che distingue tra loro le varie generazioni. Queste sono essenzialmente delle repliche della stessa particella, con gli stessi numeri quantici. L'unica grandezza che varia tra due particelle simili appartenenti a generazioni diverse è la massa. Nel Modello Standard il numero di generazioni è fissato sperimentalmente a tre, e le particelle che le compongono sono:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Dobbiamo anche notare che il Modello Standard non contiene neutrini destrogiri; questo, come vedremo meglio quando discuteremo il meccanismo grazie al quale i fermioni acquistano massa, è legato al fatto che nel Modello Standard si assume che i neutrini abbiano massa nulla.

In termini di questi campi la Lagrangiana di Dirac che contiene i termini cinetici e le interazioni con i bosoni di gauge dei leptoni, si scrive:

$$\mathcal{L}_D = \sum_i (\bar{L}_L^i \gamma^\mu D_\mu L_L^i + \bar{e}_R^i \gamma^\mu D_\mu e_R^i + \bar{Q}_L^i \gamma^\mu D_\mu Q_R^i + \bar{u}_R^i \gamma^\mu D_\mu u_R^i + \bar{d}_R^i \gamma^\mu D_\mu d_R^i), \quad (1.10)$$

dove le derivate covarianti dei vari campi dipendono dai loro numeri quantici e si scrivono, indipendentemente dalla famiglia, come:

$$\begin{aligned} D_\mu L_i &= (\partial_\mu - ig_2 \mathbf{W}_\mu - \frac{i}{2} g_1 y_1 B_\mu) L_i, \\ D_\mu e_R^i &= (\partial_\mu - \frac{i}{2} g_1 y_2 B_\mu) e_R^i, \\ D_\mu Q_i &= (\partial_\mu - ig_3 \mathbf{A}_\mu - ig_2 \mathbf{W}_\mu - \frac{i}{2} g_1 y_3 B_\mu) Q_i, \\ D_\mu u_R^i &= (\partial_\mu - ig_3 \mathbf{A}_\mu - \frac{i}{2} g_1 y_4 B_\mu) u_R^i, \\ D_\mu d_R^i &= (\partial_\mu - ig_3 \mathbf{A}_\mu - \frac{i}{2} g_1 y_5 B_\mu) d_R^i, \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove $\mathbf{W}_\mu$ e $\mathbf{A}_\mu$ sono matrici date da

$$\mathbf{W}_\mu = W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, \quad \mathbf{A}_\mu = A_\mu^A \frac{\lambda^A}{2}, \quad (1.12)$$

e $y_1, \dots, y_5$ indica l'ipercarica, i cui valori sono definiti in (1.8).

A questo punto è istruttivo considerare quali sono le simmetrie globali della Lagrangiana parziale

$$\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_D, \quad (1.13)$$

che descrive tutti i campi vettoriali e spinoriali del Modello Standard nella loro versione massless, e le loro reciproche interazioni.

Tutte le trasformazioni globali del tipo

$$\Psi_i \rightarrow \Psi'_i = U_{ij}^\Psi \Psi_j \quad (1.14)$$

con U_{ij} matrice 3×3 unitaria lasciano invariata la Lagrangiana (1.13). Nella (1.14) indica un generico campo tra quelli definiti nella (1.8): la simmetria della Lagrangiana (1.13) è quindi una simmetria globale di sapore $U(3)^5$. In particolare appropriate trasformazioni chirali sui campi e_R , L_L e Q_L del tipo

$$e_R \rightarrow e^{i\alpha} e_R \quad (1.15)$$

permettono di porre a zero il termine cinetico

$$\mathcal{L}_\theta = \sum_i \frac{\theta_i g_i^2}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{i\mu\nu}^a F_{i\rho\sigma}^a, \quad (1.16)$$

che dovrebbe in generale essere incluso nella Lagrangiana.

Passiamo ora ad esaminare l'azione delle simmetrie discrete $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{T}$ sulla Lagrangiana (1.13). Gli accoppiamenti dei gluoni rispettano separatamente tutte queste simmetrie, gli accoppiamenti dei bosoni di gauge di $SU(2)$ invece violano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$ separatamente. $\mathcal{C}$ infatti trasforma un fermione levogiro nel corrispondente antifermione levogiro, $\mathcal{P}$ trasforma un fermione levogiro nel corrispondente fermione destrigiro: entrambe queste operazioni trasformano una particella che interagisce debolmente in una che non lo fa. La combinazione di queste due operazioni invece trasforma fermioni levogiri in antifermioni destrigiri: la simmetria $\mathcal{CP}$ è quindi una simmetria esatta della Lagrangiana.

Oltre ai campi di materia spinoriali e ai campi vettoriali mediatori delle forze possiamo introdurre nella teoria anche dei campi scalari. Aggiungendo alla teoria un unico campo scalare con i giusti numeri quantici, si riescono ad introdurre nella teoria tutti i termini di massa mancanti, sia per i fermioni carichi che per i bosoni vettoriali massivi, senza distruggere né l'invarianza di gauge della Lagrangiana né la rinormalizzabilità della teoria. Il campo in questione è un doppietto H di campi scalari complessi (singoletto di colore):

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}. \quad (1.17)$$

La Lagrangiana $\mathcal{L}_H$ che descrive la cinetica di questo campo, le sue interazioni con i campi di gauge e le sue autointerazioni è data da:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - V(H^\dagger, H), \quad (1.18)$$

dove la derivata covariante è data da

$$D_\mu H = (\partial_\mu - ig_2 \mathbf{W}_\mu + \frac{i}{2} g_1 y_h B_\mu) H. \quad (1.19)$$

Il potenziale V è invece il più generale potenziale dei campi H e $H^\dagger$ rinormalizzabile ed invariante sotto la simmetria di gauge $SU(2) \otimes U(1)$ ed è dato da:

$$V = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2. \quad (1.20)$$

Si può dimostrare che questo è l'unico polinomio quartico con le simmetrie richieste. Nella (1.20) λ deve essere positivo per rendere il potenziale limitato inferiormente, mentre l'effetto del segno negativo nella massa è quello di

generare la *rottura spontanea della simmetria elettrodebole* che attraverso il meccanismo di Higgs introduce nella teoria i termini di massa per i bosoni W, come vedremo nel dettaglio nella sezione successiva. Possiamo anche notare che μ è l'unico parametro con le dimensioni di una massa presente nella Lagrangiana classica del Modello Standard. Il potenziale $V(H^\dagger, H)$ è invariante sotto una simmetria accidentale $SO(4)$ che agisce sulle quattro componenti reali del doppietto; tale simmetria è violata in altri settori della Lagrangiana. Poiché $SO(4) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R$ i quattro vettori che si possono costruire con le componenti del doppietto trasformano come $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$. La parte diagonale di questa simmetria è detta *simmetria custodiale*, e garantisce che il parametro ρ del Modello Standard, che come vedremo è dato dal rapporto tra le masse dei bosoni W e Z, sia uguale a 1.

L'introduzione di un campo scalare permette di aggiungere alla Lagrangiana della teoria ulteriori termini rinormalizzabili e gauge-invarianti, gli accoppiamenti di Yukawa, dati da:

$$\mathcal{L}_{Yu} = -Y_{ij}^e \bar{E}_L^i H e_R^j - Y_{ij}^d \bar{Q}_L^i H d_R^j - Y_{ij}^u \bar{Q}_L^i H^c d_R^j + \text{h.c.}, \quad (1.21)$$

dove $H^c = i\sigma_2 H^*$. Le matrici Y^e , Y^u , Y^d sono matrici complesse 3×3 arbitrarie. Sfruttando le simmetrie della Lagrangiana $\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{WD}$, tuttavia, si può semplificare notevolmente la struttura degli accoppiamenti di Yukawa. Ogni matrice complessa infatti può essere riscritta senza perdere generalità come il prodotto di due matrici unitarie e di una matrice reale diagonale. Ad esempio la matrice di Yukawa per i leptoni si può riscrivere come:

$$Y^e = U_e^\dagger M_e V_e, \quad (1.22)$$

con

$$U_e U_e^\dagger = V_e V_e^\dagger = 1. \quad (1.23)$$

Possiamo quindi assorbire le matrici U e V in una ridefinizione dei campi

$$L' = U_e L, \quad e' = V_e e \quad (1.24)$$

senza che questo abbia effetto sul resto della Lagrangiana. La parte leptonica degli accoppiamenti di Yukawa si può dunque riscrivere in maniera diagonale nel sapore come (lasciando cadere i primi dagli indici di generazione):

$$\sum_i \bar{L}_i H e_i m_i^e, \quad (1.25)$$

dove m_i^e sono gli elementi della matrice diagonale di massa M_e . Gli accoppiamenti di Yukawa nel settore leptonico riducono la simmetria leptonica globale $SU(3) \times SU(3) \times U(1) \times U(1)$ a tre distinte trasformazioni di fase

$$\bar{L}_i \rightarrow e^{-i\alpha_i} \bar{L}_i \quad e_i \rightarrow e^{i\alpha_i} e \quad (1.26)$$

che corrispondono alla conservazione separata del numero leptonico nelle tre famiglie. Nel caso dei leptoni questa grande semplificazione degli accoppiamenti di Yukawa è resa possibile dal fatto che nel Modello Standard si assume che esistano solo neutrini levogiri, cioè che il neutrino abbia massa nulla. Nel caso dei quark sono presenti campi destrogiri sia di tipo up che di tipo down e tale semplificazione non è più possibile. Infatti, se in analogia a quanto fatto per i leptoni definiamo

$$Y^d = U_d^\dagger M_d V_d \quad (1.27)$$

$$Y^u = U_u^\dagger M_u V_u, \quad (1.28)$$

si vede che in questo caso possiamo ancora riassorbire le due matrici V_u e V_d in una ridefinizione dei campi, ma possiamo ora eliminare *una sola* tra le matrici U_u e U_d : infatti se ad esempio eliminiamo U_u dal settore up, la stessa trasformazione farà apparire un fattore $U_u^\dagger$ nel settore down. Quindi la forma più semplice in cui possiamo riarrangiare la Lagrangiana di Yukawa dei quark è:

$$-\bar{Q}_i H d_i m_i^u - \bar{Q}_i V_{ij} u_j H^c m_j^u, \quad (1.29)$$

dove la matrice unitaria

$$\mathbf{V}_{CKM} = U_u^\dagger U_d \quad (1.30)$$

è la matrice di *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*. Per n generazioni di fermioni la matrice $\mathbf{V}_{CKM}$ contiene n^2 parametri reali, di cui $n(n-1)/2$ sono angoli, e i restanti $n(n+1)/2$ sono fasi. Non tutti questi parametri però sono indipendenti: infatti possiamo eliminare $2n-1$ fasi non fisiche ruotando separatamente tutti i campi dei quark della teoria:

$$u_L^i \rightarrow e^{i\theta_i^u} u_L^i \quad d_L^i \rightarrow e^{i\theta_i^d} d_L^i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.31)$$

Una di queste rotazioni sarà un cambiamento di fase globale di tutti i quark che non ha effetto sulla matrice $\mathbf{V}_{CKM}$ ed è associato alla conservazione del numero barionico nel Modello Standard. Una volta effettuate queste trasformazioni, che non hanno effetto su nessun altro termine della Lagrangiana, la matrice $\mathbf{V}_{CKM}$ contiene $(n-1)(n-2)/2$ fasi.

Nel caso di due generazioni la matrice $\mathbf{V}_{CKM}$ non contiene fasi, e può essere espressa in funzione di un solo parametro reale, *l'angolo di Cabibbo*.

$$\mathbf{V}_{CKM} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

dove sperimentalmente si ha $\sin \theta_C \simeq 0.22$. Nel caso di tre generazioni la matrice $\mathbf{V}_{CKM}$ contiene quattro parametri: tre angoli e una fase. Una parametrizzazione particolarmente efficace è la parametrizzazione di Wolfenstein, in cui tutti gli elementi vengono espressi in funzione di potenze di $\lambda \equiv |V_{us}| \simeq \sin \theta_C$ e di altri tre parametri di ordine 1: A, η, ρ .

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Vogliamo ora vedere se anche nel settore di Yukawa vale la simmetria discreta $\mathcal{CP}$, che abbiamo già visto essere una simmetria esatta degli altri termini della Lagrangiana del Modello Standard. Partendo dalla trasformazione di un generico campo fermionico sotto la simmetria $\mathcal{CP}$

$$\psi_L \xrightarrow{\mathcal{CP}} \sigma_2 \psi_L^*, \quad (1.34)$$

si può dimostrare che la condizione che gli accoppiamenti di Yukawa devono soddisfare affinché $\mathcal{L}_{Y_u}$ sia invariante sotto $\mathcal{CP}$ è

$$y_{ij} = y_{ij}^*. \quad (1.35)$$

Come abbiamo visto per tre generazioni di fermioni la matrice CKM contiene una fase ineliminabile e dunque rompe esplicitamente $\mathcal{CP}$. Se il numero di generazioni fermioniche fosse due questa fase potrebbe sempre essere eliminata tramite rotazioni dei campi, e l'intera Lagrangiana del Modello Standard sarebbe invariante sotto $\mathcal{CP}$. Questo significa anche che gli effetti della violazione di $\mathcal{CP}$ si manifestano solo in processi che coinvolgono tutte e tre le famiglie.

Concludiamo questo paragrafo riassumendo tutte le simmetrie, continue e discrete, globali e locali, che lasciano invariata la Lagrangiana totale del Modello Standard.

- La simmetria di gauge $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$: è la simmetria che viene richiesta come punto di partenza per costruire la Lagrangiana;
- Quattro trasformazioni di fase globali che portano alla conservazione del numero barionico e dei tre numeri leptonici separati. Queste simmetrie sono dette *accidentali* perché la loro presenza non era stata imposta a priori;
- La simmetria discreta $\mathcal{CPT}$, come in tutte le teorie di campo locali.

1.1.2 Rottura di simmetria elettrodebole

Vogliamo ora esaminare nei dettagli il meccanismo grazie al quale nel Modello Standard si realizza la rottura della simmetria elettrodebole. Questo

meccanismo si basa sulla *rottura spontanea della simmetria*, nella quale la Lagrangiana resta invariante sotto le trasformazioni della simmetria, ma è lo stato di vuoto a rompere dinamicamente la simmetria. Si introduce nella teoria il doppietto di Higgs H , definito nella (1.17). Il potenziale

$$V = \mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2, \quad (1.36)$$

è minimizzato da un valore d'aspettazione nel vuoto (vev) del campo H

$$\langle H_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

con

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}}. \quad (1.38)$$

Questo vev rompe $SU(2) \otimes U(1)$, ma conserva la carica elettrica, data da

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (1.39)$$

Per quantizzare la teoria intorno al vev si può parametrizzare il campo H come:

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_2(x) + i\eta_3(x) \\ v + h(x) + i\eta_1(x) \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Sostituendo questa parametrizzazione nel potenziale ed espandendo al secondo ordine si trova che il campo h assume una massa $m_h^2 = 2\mu^2$ mentre i tre campi η rimangono a massa nulla. Il campo $h(x)$ descrive il bosone di Higgs, l'unica particella del Modello Standard la cui esistenza non sia ancora stata verificata sperimentalmente. I campi η sono i tre campi di Goldstone della teoria, che non sono gradi di libertà fisici ma vengono assorbiti come polarizzazione longitudinale dei bosoni vettoriali delle interazioni deboli, che in questo modo acquistano una massa. Esiste una trasformazione di gauge che permette di passare in una base in cui nella Lagrangiana compaiono solo gradi di libertà fisici; in questa gauge, detta *gauge unitaria*, la parametrizzazione del doppietto di Higgs è

$$H(x) = U(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

dove $U(x)$ è una trasformazione $\in SU(2) \otimes U(1)$. In questa gauge la derivata covariante che agisce sul campo H è

$$D_\mu H = (\partial_\mu - ig_2 \mathbf{W}_\mu - ig_1 B_\mu) \frac{U}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Utilizzando la trasformazione

$$\mathbf{W}'_\mu = -iU^\dagger \partial_\mu U + U^\dagger \mathbf{W}_\mu U \quad (1.43)$$

la (1.42) si può riscrivere con un po' di algebra come:

$$D_\mu H = \frac{U}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g_2 \frac{i}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2)(v+h) \\ \partial_\mu h + \frac{i}{2} (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)(v+h) \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Poichè la trasformazione U è rappresentata da una matrice unitaria, questa scompare completamente dalla Lagrangiana. Il risultato che si ottiene è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{8} (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)(g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)(v+h)^2 + \\ & + \frac{1}{8} g_2^2 (W_\mu^1 - iW_\mu^2)(W_\mu^1 + iW_\mu^2)(v+h)^2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Espandendo $(v+h)^2$ troviamo i termini cinetici per il campo di Higgs e per i campi vettoriali e i termini di massa per questi ultimi. Dal momento che le trasformazioni canoniche preservano i termini cinetici possiamo esprimere la Lagrangiana in termini delle combinazioni ortogonali

$$Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu \quad (1.46)$$

e

$$A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu. \quad (1.47)$$

Nelle (1.46) e (1.47) a partire dalle costanti di accoppiamento di gauge abbiamo definito l'angolo di mescolamento debole:

$$\cos \theta_w \equiv \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (1.48)$$

Il campo A_μ non compare quadraticamente nella Lagrangiana e quindi rimane a massa nulla: esso è il potenziale vettore associato al fotone. Con l'ulteriore sostituzione

$$W_\mu^\mp = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2) \quad (1.49)$$

possiamo riscrivere la Lagrangiana come

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\ & + \frac{h}{v} (2 + \frac{h}{v}) (\frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}), \end{aligned} \quad (1.50)$$

dove

$$m_Z^2 = \frac{1}{4}v^2(g_1^2 + g_2^2) \quad (1.51)$$

e

$$m_W^2 = \frac{1}{4}v^2g_2^2. \quad (1.52)$$

Si può verificare che come previsto vale la relazione:

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2} = \cos^2 \theta_W \Rightarrow \rho = 1. \quad (1.53)$$

Per completare l'analisi dobbiamo riscrivere nella gauge unitaria la Lagrangiana di Yukawa e le interazioni tra i fermioni e i campi di gauge.

La Lagrangiana di Yukawa diventa nella gauge unitaria

$$\mathcal{L}_{Y_u} = - \left(1 + \frac{h}{v}\right) M_{ij}^u \bar{u}_L^i u_R^j - \left(1 + \frac{h}{v}\right) M_{ij}^d \bar{d}_L^i d_R^j - \left(1 + \frac{h}{v}\right) M_{ij}^e \bar{e}_L^i e_R^j, \quad (1.54)$$

dove

$$M_{ij}^a = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^a. \quad (1.55)$$

Poichè il Modello Standard non contiene neutrini destrogiri, è sufficiente una trasformazione unitaria sui campi e per rendere gli accoppiamenti di Yukawa dei leptoni diagonali nel sapore. Questa trasformazione lascia invariate le interazioni tra leptoni e campi di gauge. Per diagonalizzare i termini di massa dei quark bisogna invece passare nella *base degli autostati di massa*, definita dalle trasformazioni:

$$\begin{aligned} u'_L &= V_L^u u_L \\ u'_R &= V_R^u u_R \\ d'_L &= V_L^d d_L \\ d'_R &= V_R^d d_R. \end{aligned} \quad (1.56)$$

La Lagrangiana di interazione tra i quarks e bosoni vettoriali elettrodeboli, nella base fisica di questi ultimi, è:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} (W_\mu^+ J^{\mu-} + W_\mu^- J^{\mu+}) + e A_\mu J_{em}^\mu + \frac{e Z_\mu}{\sin \theta_w \cos \theta_w} J_Z^\mu, \quad (1.57)$$

con

$$J^{\mu-} = \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i, \quad J^{\mu+} = \bar{d}_L^i \gamma^\mu u_L^i \quad (1.58)$$

$$J_{em}^\mu = \frac{2}{3} (\bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i + \bar{u}_R^i \gamma^\mu u_R^i) - \frac{1}{3} (\bar{d}_L^i \gamma^\mu d_L^i + \bar{d}_R^i \gamma^\mu d_R^i) \quad (1.59)$$

$$J_Z^\mu = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w\right) (\bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w\right) (\bar{d}_L^i \gamma^\mu d_L^i) - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w (\bar{u}_R^i \gamma^\mu u_R^i) + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w (\bar{d}_R^i \gamma^\mu d_R^i). \quad (1.60)$$

La corrente neutra e quella elettromagnetica restano invariate passando nella base di massa dei quarks, quelle cariche trasformano invece nel modo seguente:

$$J^{\mu-} \rightarrow J^{\mu-' } = \bar{u}_L^i V_{ij} \gamma^\mu d_L^j \quad J^{\mu+} \rightarrow J^{\mu+' } = \bar{d}_L^i V_{ij}^\dagger \gamma^\mu u_L^j \quad (1.61)$$

dove V_{ij} sono elementi della matrice $\mathbf{V}_{CKM}$. Questo implica che le correnti cariche mediano processi con cambiamento di sapore, mentre al contrario *non esistono a livello albero correnti neutre con cambiamento di sapore* (meccanismo GIM).

1.1.3 Sommario

Concludiamo con un breve sommario di tutte le particelle e le interazioni presenti nel Modello Standard:

1. Bosoni vettoriali:

- Otto gluoni a massa nulla che mediano le interazioni della QCD tra i quarks;
- Un fotone a massa nulla che media le interazioni della QED tra tutte le particelle cariche;
- Un bosone massivo neutro di spin uno, il bosone Z , con massa

$$M_Z = \frac{v}{2} \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w}; \quad (1.62)$$

- Un bosone massivo con carica unitaria, il W^+ e la sua antiparticella, il W^- , con massa

$$M_W = \frac{v}{2} \frac{e}{\sin \theta_w}. \quad (1.63)$$

2. Fermioni:

- Tre famiglie di quarks e leptoni, ognuna delle quali contiene un neutrino a massa nulla, un leptone di carica negativa unitaria e due quark di carica frazionaria pari rispettivamente a $\frac{2}{3}$ e $-\frac{1}{3}$.

3. Bosoni scalari:

- Un campo neutro a spin nullo, il bosone di Higgs, con massa:

$$M_H = v\sqrt{2\lambda} = \sqrt{2\mu}. \quad (1.64)$$

4. Interazioni:

- Tutte le particelle cariche intraggiscono col fotone con intensità proporzionale alla loro carica elettrica. Le interazioni della QED sono diagonali nel sapore e conservano la parità $\mathcal{P}$ e la coniugazione di carica $\mathcal{C}$;
- I soli quark interagiscono con i gluoni. Le interazioni della QCD sono diagonali nel sapore; a livello classico sono invarianti sotto $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$;
- Interazioni di gauge con cambiamento di carica tra fermioni levogiri mediate dai bosoni $W^\pm$. Queste preservano la chiralità ma violano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$. Per i leptoni sono diagonali nel sapore e conservano $\mathcal{CP}$; per i quark inducono transizioni tra famiglie differenti e violano esplicitamente $\mathcal{CP}$;
- Interazioni neutre senza cambiamento di sapore tra fermioni levogiri o destrigiri mediate dal bosone Z ;
- Interazioni di Yukawa con cambiamento di chiralità tra fermioni massivi mediate dalla particella di Higgs, con accoppiamento proporzionale alla massa del fermione;
- Interazioni cubiche tra lo Z e il W e il bosone di Higgs con intensità proporzionale al quadrato della loro massa;
- Autointerazioni cubiche e quartiche del bosone di Higgs;
- Interazioni quartiche tra i bosoni massivi e il fotone;
- Interazioni quartiche tra i gluoni.

5. Simmetrie continue.

- Simmetrie di gauge dei gruppi $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$;
- Quattro simmetrie globali corrispondenti alla conservazione del numero barionico e dei tre numeri leptonici separati e, μ, τ .

1.2 Problemi aperti nel MS

Nonostante la sua eccezionale predittività e il notevole accordo con i dati sperimentali, il Modello Standard lascia aperti numerosi problemi. Essi sono per la maggior parte di natura teorica: l'unico dato sperimentale in contrasto con il MS è infatti la recentissima evidenza di una massa non nulla per i neutrini. Le motivazioni principali che spingono a cercare una teoria "più fondamentale" del Modello Standard sono le seguenti:

1. Si ritiene che sia possibile formulare una descrizione delle interazioni fondamentali che contenga un minor numero di parametri liberi. Il MS contiene infatti diciannove parametri liberi: le masse dei tre leptoni carichi, le masse dei sei quark, tre costanti di accoppiamento, i tre angoli di mescolamento e la fase della matrice CKM, la massa e la costante dei accoppiamento quartico del bosone di Higgs, e l'angolo di vuoto della QCD.
2. Il Modello Standard non tiene conto delle interazioni gravitazionali ed è quindi da considerarsi una teoria effettiva valida (al più) fino alla scala di energia alla quale la gravitazione diventa non trascurabile (la scala di Planck, pari a 10^{19} GeV). I tentativi di costruire una teoria microscopica delle interazioni fondamentali che tenga conto anche delle interazioni gravitazionali si scontrano con il noto problema della quantizzazione della gravità. Ad oggi solo la Teoria delle Stringhe sembra in grado di fornire una descrizione coerente delle quattro interazioni, ma si scontra con il problema di avere bassa predittività alle scale di energia oggi accessibili.
3. Non spiega il contenuto di materia, che deve essere stabilito a priori. In particolare non vi è una spiegazione del numero di generazioni. Si ritiene che sia possibile costruire una teoria basata su un minore grado di arbitrarietà nella scelta delle rappresentazioni dei campi di materia della teoria. Si ritiene inoltre che le tre interazioni descritte dal Modello Standard possano essere manifestazioni diverse a basse energie di un'unica interazione (teorie di Grande Unificazione).
4. Non spiega la quantizzazione della carica elettrica né la carica elettrica frazionaria dei quark.
5. Non spiega quantitativamente l'asimmetria materia-antimateria osservata nell'universo.

6. Non spiega, neanche qualitativamente, quale potrebbe essere la fonte della materia oscura, che secondo le osservazioni cosmologiche costituisce circa il trenta per cento del contenuto energetico dell'universo.
7. Presenta il problema della gerarchia, che tratteremo nel dettaglio nel prossimo paragrafo.

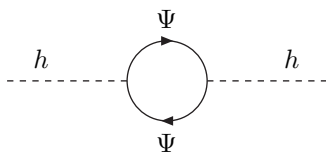
1.2.1 Il problema della gerarchia

Il problema della gerarchia è insito nel meccanismo di rottura della simmetria elettrodebole nel Modello Standard, che si basa sulla presenza di campi scalari fondamentali. Il fatto che questo è l'unico settore del Modello Standard a non aver ancora ricevuto una conferma sperimentale ha stimolato numerosi tentativi di elaborare estensioni del MS che realizzino la rottura della simmetria elettrodebole in maniera differente.

Definire il problema della gerarchia è una questione sottile: esso infatti non mette in luce una discrepanza coi dati sperimentali né un problema di autoconsistenza matematica del modello. Esso riguarda piuttosto la *naturalità* del modello (ed è infatti a volte anche detto problema della naturalità). Per illustrare questo concetto enunceremo il seguente “criterio di naturalità” formulato da G. 't Hooft:

Data una Lagrangiana $L(\Lambda)$, questa si può ritenere naturale fino alla scala di energia Λ se ogni parametro δ di $L(\Lambda)$ piccolo in unità dell'appropriata potenza di Λ è associato ad una simmetria approssimata di $L(\Lambda)$ che torna esatta nel limite $\delta \rightarrow 0$.

Tecnicamente il problema della gerarchia riguarda le correzioni radiative a un loop alla massa dei campi scalari nel Modello Standard. Infatti un diagramma del tipo



dà un contributo alla massa del bosone di Higgs proporzionale a

$$\int \frac{d^4p}{2\pi^4} \frac{1}{(p - m_\Psi)^2} \sim \Lambda_{MS}^2, \quad (1.65)$$

dove il cutoff Λ_{MS} rappresenta la scala di energia alla quale il Modello Standard cessa di essere una descrizione efficace della Natura. Il valore della

massa fisica del bosone di Higgs, che secondo gli attuali limiti sperimentali dovrebbe essere compresa all'incirca tra i 115 e i 200 GeV, risulta quindi una grandezza innaturale secondo la definizione data precedentemente. Nel Modello Standard una massa dell'Higgs così piccola rispetto al suo valore naturale viene ottenuta mediante una cancellazione accidentale tra due parametri della teoria (il parametro di massa μ nel potenziale di Higgs e il cutoff Λ_{MS}) durante il processo di rinormalizzazione, e non a un principio di simmetria.

Seppure perfettamente consistente matematicamente, questa cancellazione (o *fine tuning* dei parametri) sarebbe così accentuata da rendere auspicabile l'esistenza di un meccanismo alternativo di rottura della simmetria, in cui la scala delle interazioni elettrodeboli venga stabilizzata a partire da un qualche principio teorico più solido, e resa quindi naturale secondo la definizione data precedentemente. La percentuale di fine tuning è data infatti dal rapporto:

$$\Delta \sim \frac{\Lambda_{MS}}{M_{EW}}, \quad (1.66)$$

dove M_{EW} indica la scala di rottura della simmetria elettrodebole. Se ad esempio assumiamo che il Modello Standard sia valido fino alla scala di Planck si avrebbe

$$\Delta = 10^{-16}. \quad (1.67)$$

e sarebbe quindi necessaria nel processo di rinormalizzazione una cancellazione tra due parametri fino alla sedicesima cifra decimale.

1.3 Teorie alternative al MS: cenni a SUSY e Technicolor

Tra le numerose estensioni del Modello Standard che realizzano la rottura della simmetria elettrodebole senza dare luogo a correzioni radiative divergenti due sono quelle che negli anni hanno ricevuto maggiore attenzione: le teorie supersimmetriche [6, 7] e i modelli di technicolor [3, 7].

1.3.1 Supersimmetria

La struttura delle simmetrie di una teoria come il Modello Standard è della forma $S = P \otimes G$, dove P è il gruppo di Poincaré, che contiene le traslazioni spazio-temporali P^μ e le rotazioni di Lorentz $M^{\mu\nu}$, mentre G è il gruppo di gauge. Le trasformazioni di simmetria appartenenti al gruppo G sono dette anche *simmetrie interne*, perchè commutano con le trasformazioni del gruppo

di Poincaré. Si può invece tentare di costruire una teoria con una struttura delle simmetrie più complessa, che incorpori il gruppo di Poincaré e le simmetrie interne in maniera meno triviale del prodotto diretto. I generatori Q_i di questo nuovo tipo di simmetria devono quindi soddisfare la proprietà:

$$[Q_i, M^{\mu\nu}] \neq 0. \quad (1.68)$$

Questo implica che i generatori di questa simmetria hanno spin diverso da zero e quindi collegano tra loro particelle di spin diverso. I generatori Q_i potrebbero avere spin intero o semintero, portando nei due casi a strutture algebriche di tipo diverso, dal momento che i generatori a spin intero obbediscono a relazioni di commutazione $[Q_i, Q_j]$, quelli a spin semintero a relazioni di anticommutazione $\{Q_i, Q_j\}$. Esiste tuttavia un teorema no-go sulle simmetrie bosoniche, formulato da Coleman e Mandula. Esso afferma che in una teoria di campo interagente con uno spettro discreto di stati massivi a una particella non possono esistere cariche conservate non scalari oltre ai generatori del gruppo di Poincaré. Questo teorema vale solo per le algebre di Lie e lascia quindi aperta la possibilità di costruire nuove simmetrie con generatori fermionici, che soddisfano regole di commutazione

$$[M^{\mu\nu}, Q^i] = (b^{\mu\nu} Q)^i, \quad (1.69)$$

$$\{Q^i, Q^j\} = T^{ij}, \quad (1.70)$$

dove $b^{\mu\nu}$ è una matrice appartenente a una rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz e T^{ij} è una combinazione dei generatori del gruppo di Poincaré e delle simmetrie interne. Il caso in cui i Q^i abbiano spin 1/2, che è l'unico fisicamente rilevante, è detto Supersimmetria. Le trasformazioni supersimmetriche sono dunque del tipo

$$\begin{aligned} \delta(\text{bosone, spin } s) &= (\text{fermione, spin } s \pm 1/2) \\ \delta(\text{fermione, spin } s') &= (\text{bosone, spin } s' \pm 1/2). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Alla luce di quanto visto possiamo dunque concludere che l'algebra supersimmetrica rappresenta l'unica unificazione non triviale delle simmetrie interne e spazio-temporali compatibile con una teoria di campo.

L'esposizione delle proprietà matematiche [8] delle teorie di campo supersimmetriche così come la costruzione di modelli di fisica delle particelle basati su di esse [1] va al di là degli scopi di questa tesi. Ci limitiamo quindi ad elencare, senza dimostrarle, alcune delle implicazioni fenomenologiche più importanti delle estensioni supersimmetriche del modello standard, in particolare quelle legate alla rottura della simmetria elettrodebole. In particolare ci concentreremo sul Modello Standard Supersimmetrico Minimale

(MSSM), un modello in cui viene introdotto il numero minimo di particelle supersimmetriche necessarie a riprodurre il Modello Standard alle basse energie.

- Lo spettro di una teoria supersimmetrica consiste di supermultipletti che contengono un bosone e un fermione con gli stessi numeri quantici: nel MSSM tutti i bosoni vettoriali del Modello Standard hanno un superpartner di spin $\frac{1}{2}$, mentre i fermioni hanno superpartner di spin 0.
- Se la supersimmetria fosse esatta, le particelle appartenenti a uno stesso supermultipletto sarebbero degeneri in massa. Poiché i partner supersimmetrici delle particelle del Modello Standard non sono stati ancora osservati, la supersimmetria deve essere rotta.
- Nelle teorie supersimmetriche per dare massa ai fermioni sono necessari due (super)doppietti di Higgs di ipercarica opposta, uno dei quali dà massa ai quark di tipo up, l'altro ai quark di tipo down.

$$\begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_1^0 \end{pmatrix} \simeq (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}, \quad \begin{pmatrix} H_2^0 \\ H_2^- \end{pmatrix} \simeq (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}. \quad (1.72)$$

- Il potenziale nel settore di Higgs è dato, a livello albero, da:

$$V(H_1, H_2) = \frac{g_1^2 + g_2^2}{8} (|H_1|^2 - |H_2|^2)^2 + \sum_i (m_i^2 + |\mu|^2) |H_i|^2 - B\mu (H_1 H_2 + \text{h.c.}) \quad (1.73)$$

Dopo la rottura spontanea di simmetria, nella quale le componenti neutre dei due doppietti prendono un valore d'aspettazione nel vuoto reale, lo spettro di particelle nel settore di Higgs consiste in:

1. due campi neutri pari sotto CP, il più leggero dei quali sostituisce l'Higgs del Modello Standard;
 2. un campo neutro dispari sotto CP;
 3. due campi carichi;
 4. tre bosoni di Goldstone, uno neutro e due carichi, che vengono assorbiti dai bosoni vettori come polarizzazioni longitudinali.
- Per quanto riguarda le correzioni radiative, per ogni loop in cui gira una particella del Modello Standard ci sarà un loop in cui gira il suo partner supersimmetrico, con un segno meno relativo dovuto alla statistica. Se la supersimmetria fosse esatta questi due contributi si cancellerebbero

esattamente; in questo caso sono quindi assenti correzioni radiative divergenti.

- Se invece, come deve accadere in un modello realistico, la supersimmetria è rotta a una scala M_{SUSY} , le correzioni radiative alla massa dell'Higgs sono¹ [9]

$$\delta m_h^2 \sim \frac{3g^2}{16\pi^2} \frac{m_t^4}{m_W^2} \ln \frac{m_t^4}{m_t^4}. \quad (1.74)$$

Il problema in questo caso diventa quello di spiegare perchè il valore della scala di rottura della supersimmetria sia tale da garantire che le correzioni (1.74) non richiedano un fine-tuning nei parametri.

1.3.2 Technicolor

Abbiamo visto che nelle teorie supersimmetriche il problema della gerarchia viene risolto mediante la cancellazione delle divergenze quadratiche tra i loop in cui girano le particelle del Modello Standard, e quelli in cui girano i loro partner supersimmetrici. Esiste un'altra classe di modelli, detti di technicolor, in cui la soluzione del problema è invece data dall'ipotesi che la teoria non contenga scalari a livello fondamentale. In questi modelli i bosoni di Goldstone del Modello Standard sono sostituiti da condensati fermione-antifermione, che si formano dinamicamente. Questo meccanismo si ispira a quanto accade in QCD, dove si può identificare il pione con il bosone di Goldstone risultante dalla rottura spontanea della simmetria chirale:

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_{L+R}. \quad (1.75)$$

Come è noto, questa simmetria approssimata della Lagrangiana di QCD è rotta dinamicamente attraverso la formazione nel vuoto di un condensato fermionico

$$\langle \bar{u}u \rangle \approx \langle \bar{d}d \rangle \approx \Lambda_{QCD}^3, \quad (1.76)$$

dove Λ_{QCD} è la scala a cui la teoria diventa fortemente interagente. I tre bosoni di Goldstone che risultano dalla rottura della simmetria (in realtà sono pseudo-bosoni di Goldstone perché la simmetria chirale è solo una teoria approssimata della QCD) portano i numeri quantici dei generatori rotti e sono i tre pioni π^0, π^+ e π^- . I pioni portano anche numeri quantici elettrodeboli e si accoppiano quindi ai bosoni W con un termine del tipo

$$\frac{g}{2} f_\pi W^\mu \partial_\mu \pi, \quad (1.77)$$

¹Consideriamo il contributo dominante, dato dai loop del top.

dove f_π è la costante di decadimento del pione. Quindi anche in assenza di campi scalari fondamentali i bosoni elettrodeboli acquistano una massa e una polarizzazione longitudinale. Nel caso della QCD questa massa sarebbe troppo piccola perché $f_\pi \approx 100$ MeV. Tuttavia sfruttando questa analogia si può costruire un meccanismo simile in cui i bosoni W acquistano una massa appropriata. Si suppone l'esistenza di una nuova interazione fortemente interagente basata su un gruppo di simmetria $SU(N)$ il cui numero quantico è detto technicolor. Si suppone anche l'esistenza di una nuova particella, il techniquark, con le stesse proprietà sotto la simmetria elettrodebole dei normali quark, descritta quindi in termini di campi da un doppietto levogiro e due singoletti destrogiri

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_L \\ D_L \end{pmatrix}^i, \quad U_R^i, \quad D_R^i, \quad (1.78)$$

dove l'indice i è relativo al technicolor. Analogamente al caso della QCD, alla scala a cui l'interazione diventa forte, Λ_{TC} , si formano dei condensati

$$\langle \bar{U}U \rangle \approx \langle \bar{D}D \rangle \approx \Lambda_{TC}^3 \approx 4\pi v^3. \quad (1.79)$$

Questo rompe la simmetria e produce dei technipioni, che vengono successivamente assorbiti dai bosoni elettrodeboli e danno loro una massa attraverso il meccanismo di Higgs. Per $\Lambda_{TC} \approx 1$ TeV la massa acquisita dal W è proprio 80 GeV. Inoltre si ha

$$M_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \quad (1.80)$$

$$M_Z^2 = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_W^2} \quad (1.81)$$

ed il parametro ρ è automaticamente 1 a ogni ordine.

Nonostante questi successi i modelli di technicolor si dimostrano inadeguati nel riprodurre i termini di massa per i fermioni. L'analogo della Lagrangiana di Yukawa richiede infatti un'estensione del modello minimale descritto sopra, la cui fenomenologia contrasta notevolmente con i dati disponibili sulle correnti neutre con cambiamento di sapore. L'accoppiamento dei fermioni ordinari ai condensati techni-fermionici è normalmente mediato in queste estensioni da campi vettoriali appartenenti a un nuovo gruppo di gauge della teoria. Senza addentrarci per semplicità nei dettagli dei vari modelli, cercheremo di mostrare in maniera del tutto generale come l'introduzione di termini di massa per i fermioni abbia sui processi con cambiamento di sapore effetti tali da portare ad escludere i modelli di technicolor dalla lista dei potenziali candidati per la spiegazione della rottura di simmetria elettrodebole.

Alla scala del technicolor possiamo rappresentare le interazioni a quattro fermioni tra i condensati e i fermioni ordinari come:

$$\frac{\lambda_{ab}^u}{M^2}(\bar{U}_L U_R \bar{u}_{Ra} u_{Lb} + \bar{D}_L U_R \bar{u}_{Ra} d_{Lb}), \quad (1.82)$$

e analogamente per i quark di tipo down. Nella (1.82) λ_{ab}^u è proporzionale agli accoppiamenti di Yukawa ordinari, M è invece la scala associata alla nuova fisica responsabile della rottura delle simmetrie chirali di sapore. Il valore esatto della scala M dipende dai dettagli del modello, mostreremo tuttavia che in generale questa grandezza ha un limite superiore. Il valore di questa grandezza entra direttamente nella predizione dei branching ratios di processi con cambiamento di sapore e gioca quindi un ruolo determinante nel confronto con i dati sperimentali. Dopo la condensazione del bilineare fermionico la (1.82) dà origine a una matrice di massa per i quarks di tipo up

$$m_{ab}^u = \frac{\lambda_{ab}^u}{M^2} \langle \bar{U}_L U_R \rangle. \quad (1.83)$$

Poichè per autoconsistenza dobbiamo richiedere

$$|\lambda_{ab}^u| \lesssim 1, \quad (1.84)$$

segue che

$$M^2 \lesssim \frac{\langle \bar{U}_L U_R \rangle}{m_t}, \quad (1.85)$$

dove m_t è la massa del top. Usando ora la relazione

$$\langle \bar{U}_L U_R \rangle \sim 4\pi v^3 \quad (1.86)$$

che lega il valor medio del condensato alla scala di Fermi $v = 250$ GeV, otteniamo infine

$$M \lesssim \left(\frac{50 \text{ GeV}}{m_t} \right)^{\frac{1}{2}} 2 \text{ TeV}. \quad (1.87)$$

Questo limite superiore sulla scala della fisica del flavour comporta deviazioni dai risultati sperimentali sufficienti a escludere tutti i modelli di technicolor.

Capitolo 2

Estensioni extra-dimensionali del Modello Standard

Negli ultimi anni hanno ricevuto grande attenzione le teorie di campo con dimensioni aggiuntive, in cui viene ipotizzata una struttura dello spazio-tempo più complessa di quella dello spazio-tempo ordinario quadridimensionale con metrica Minkowskiana. Nel contesto delle extra-dimensioni (ED) sono stati proposti e studiati numerosi tipi di modelli, con caratteristiche anche molto diverse tra loro, con l'obiettivo comune di delineare descrizioni alternative per quegli aspetti della fisica delle alte energie che si ritiene che il Modello Standard non spieghi in maniera soddisfacente.

Inizieremo quindi la nostra trattazione delle teorie di campo con dimensioni extra, con una breve panoramica su questo ampio spettro di modelli differenti. Dopo aver illustrato quali sono le caratteristiche comuni ad ogni possibile teoria di campo basata su uno spazio-tempo con dimensioni addizionali, definendo anche la necessaria terminologia, proporremo una classificazione dei vari modelli studiati in letteratura, suddividendoli in tre scenari principali. Questa classificazione, che se pure è basata su criteri in qualche modo arbitrari è ormai largamente condivisa, ha lo scopo di inquadrare questo lavoro in un contesto più ampio e di sottolineare quali sono le caratteristiche specifiche.

Nel seguito del capitolo illustreremo come vengono definite matematicamente le teorie di campo su uno spazio-tempo esteso, e come si possano sfruttare alcune di queste proprietà matematiche della teoria per costruire modelli realistici delle interazioni osservate in Natura.

Mostreremo come un elemento essenziale per il model-building in teorie con dimensioni extra sia il tipo di *compattificazione* utilizzato: a seconda delle proprietà matematiche dello spazio compatto si possono ottenere teorie effettive quadridimensionali con caratteristiche fenomenologiche molto di-

verse. Mostreremo inoltre come, se si impongono condizioni al contorno non triviali per i campi sullo spazio compatto, sia possibile sfruttare la compatificazione per rompere alcune delle simmetrie della teoria. Particolarmente interessante è il caso in cui rompendo una simmetria di gauge della teoria extra-dimensionale otteniamo una fisica di basse energie che ha esattamente le stesse simmetrie del Modello Standard.

Successivamente, partendo dagli elementi fin qui introdotti, illustreremo in cosa consiste il meccanismo di *unificazione gauge-Higgs*, che è la caratteristica saliente del tipo di modello su cui è basato questo lavoro, e che permette di realizzare la rottura di simmetria elettrodebole senza generare divergenze quadratiche. Discuteremo dettagliatamente il più semplice modello di rottura di simmetria elettrodebole in cinque dimensioni che sfrutta questo meccanismo, mostrando come si ricava la teoria effettiva quadridimensionale.

Nel corso di questo capitolo faremo sempre riferimento esplicitamente al caso cinque dimensionale, per poter illustrare le caratteristiche delle teorie di campo extra-dimensionali nella maniera più chiara possibile. L'estensione di questi stessi concetti al caso di sei dimensioni, che presenta una maggiore complessità dal punto di vista matematico, è invece rimandata al cap. 3.

2.1 Introduzione alle dimensioni extra

L'idea che lo spazio-tempo possa avere un numero di dimensioni maggiore di quello di cui abbiamo esperienza alle scale di energia oggi accessibili è un'idea antica. Essa è stata introdotta per la prima volta negli anni '20 del Novecento nei lavori di T. Kaluza e O. Klein; in questi lavori le dimensioni extra erano viste più che altro come un artificio matematico che permettesse di dare una descrizione unificata di elettromagnetismo e gravità (le uniche forze allora conosciute) e non se ne richiedeva necessariamente la reale esistenza. Quest'idea originaria venne poi abbandonata per lungo tempo perchè non produceva i risultati sperati.

Un nuovo grande interesse per le extra-dimensioni si ebbe a partire dagli anni '70 con lo sviluppo della Teoria delle Stringhe: questa teoria parte ancora una volta dall'esigenza di trovare una descrizione unificata delle quattro interazioni fondamentali. Partendo dall'ipotesi che i costituenti fondamentali della materia non siano puntiformi ma siano oggetti unidimensionali si trova che una descrizione unificata delle interazioni è possibile, pur di accettare che lo spazio-tempo abbia un numero di dimensioni maggiore di quattro (ad esempio 11 nella M-teoria). In questo caso l'esistenza delle dimensioni addizionali non è più unicamente un'ipotesi matematica ma viene richiesta anche a livello fisico. L'esistenza di eventuali dimensioni extra è compatibile

con la nostra esperienza e con tutti gli esperimenti fino a oggi effettuati che indicano l'esistenza di sole quattro dimensioni dello spazio tempo, se queste dimensioni addizionali sono *compatte*, cioè hanno un'estensione minore (o un'energia maggiore) di quella esplorata finora.

Anche la teoria delle stringhe ha però attraversato numerose difficoltà dal momento che non è riuscita finora a dare una descrizione univoca e verificabile sperimentalmente della fisica di bassa energia. Si è sviluppato quindi a partire dagli anni '90 un diverso approccio nei confronti della possibilità che lo spazio-tempo abbia delle dimensioni “nascoste”. In questo caso si costruiscono teorie di campo su uno spazio tempo esteso basate sulle usuali simmetrie di gauge, e successivamente si definisce la fisica di bassa energia come la teoria effettiva ottenuta integrando la Lagrangiana completa sulle extra-dimensioni:

$$\mathcal{L}_4^{eff} = \int d^d y_i \mathcal{L}_D. \quad (2.1)$$

Così facendo, la teoria quadridimensionale è valida fino ad energie dell'ordine $1/R$, dove R è l'estensione delle extra-dimensioni. In questo modo si possono costruire modelli basati su dimensioni extra che predicono una deviazione dal Modello Standard già ad energie della scala del TeV, verificabile quindi nella prossima generazione di esperimenti. D'altro canto in questo approccio la stessa teoria extra-dimensionale deve essere interpretata come approssimazione di una teoria di altra energia valida al di sopra di una certa scala Λ_{UV} , dal momento che la Lagrangiana $\mathcal{L}_D$ non è rinormalizzabile.

In questo contesto sono stati proposti e studiati, negli ultimi anni, un numero considerevole di modelli, con caratteristiche molto differenti [10]. Per permettere al lettore di orientarsi e di inquadrare questo lavoro nel vasto panorama delle teorie di campo con dimensioni extra, presenteremo una classificazione in cui questi modelli vengono divisi in tre “scenari”, sottolineando quali sono le caratteristiche comuni e quali sono invece le differenze principali.

2.1.1 Caratteristiche generali

Vogliamo qui introdurre, in maniera schematica e a tratti qualitativa, le caratteristiche presenti in tutte le teorie con dimensioni extra, in particolare i concetti di *compattificazione*, spazio di *bulk* e di *brana*, e i *modi di Kaluza Klein*. Questi concetti saranno nel seguito trattati in maniera approfondita per i casi di nostro interesse.

La terminologia usata per descrivere questo tipo di teorie è la seguente:

- Lo spazio-tempo a D dimensioni ($D = 4 + d$) è chiamato “bulk”;

- Uno spazio-tempo $p + 1$ dimensionale con $p < D - 1$ viene definito “ p -brana”, termine che deriva dalla generalizzazione di una membrana 2-dimensionale. In generale possono essere presenti più brane, localizzate in punti differenti del bulk. In particolare lo spazio-tempo quadridimensionale di cui abbiamo esperienza diretta viene considerato come una 3-brana ¹.

Il valore della scala di lunghezza R delle dimensioni trasverse alla brana e la geometria del bulk, così come i tipi di particelle che si possono propagare nel bulk, e quelli che invece sono confinati sulle brane variano da modello a modello.

Un’ulteriore caratteristica comune a tutte le teorie di campo con dimensioni extra, è la presenza, nella teoria effettiva, di un infinito numero di repliche di ogni particella, la cosiddetta torre di stati di Kaluza-Klein. Nella compattificazione delle d dimensioni addizionali, tutti i campi che si propagano nel bulk vengono espansi in un insieme completo di modi di Fourier, ognuno dei quali è definito da un numero di eccitazione $\vec{n} = (n_1, n_2 \dots n_d)$. Come una particella quantistica in una scatola, l’impulso dei campi di bulk è quantizzato lungo le d dimensioni compattificate, e assume valori $\vec{p}^2 = (\vec{n} \cdot \vec{n})/R^2$. Dalla prospettiva quadridimensionale di un osservatore sulla brana, ogni valore permesso dell’impulso nel volume compattificato appare come un’eccitazione di Kaluza-Klein con massa $m_{\vec{n}}^2 = \vec{p}^2$. Questo produce una torre di stati ognuno dei quali porta lo stesso spin e gli stessi numeri quantici. Questa è una caratteristica generale di tutti i modelli con dimensioni addizionali compatte; in situazioni più complicate, tuttavia, cioè in schemi di compattificazione in cui le extra dimensioni non sono piatte o hanno estensioni molto diverse tra loro l’espansione di Fourier e i valori della massa KK devono essere opportunamente generalizzati.

2.1.2 Diversi scenari basati sulle ED

Ecco un breve elenco di quelle che sono le differenze più sostanziali tra i vari modelli presenti in letteratura:

- I vari scenari proposti si possono dividere in due categorie, a seconda che facciano o meno l’assunzione che la geometria dello spazio-tempo D dimensionale abbia una metrica G_{MN} fattorizzabile, cioè che le geometrie 4 e d dimensionali siano indipendenti. Nel caso fattorizzabile la metrica si può esprimere nella forma

$$ds^2 = G_{MN} dx^M dx^N = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h_{ij}(y) dy^i dy^j, \quad (2.2)$$

¹Nel seguito ci riferiremo alle 3-brane semplicemente come “brane”

con $\mu, \nu = 0 \dots 3$ e $i, j = 1 \dots d$. Nel caso fattorizzabile la topologia dello spazio tempo è

$$\mathcal{M}_4 \times C, \quad (2.3)$$

dove $\mathcal{M}_4$ è l'ordinario spazio-tempo Minkowskiano e C è uno spazio compatto. La metrica h_{ij} è piatta solo se $C = T_d$ cioè lo spazio compatto è un toro d -dimensionale. Nel caso non fattorizzabile c'è una funzione di y che moltiplica il fattore $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ e quindi la geometria del bulk è necessariamente curva; in questo caso la geometria si definisce “warped”. La forma generale della metrica nel caso non fattorizzabile è:

$$ds^2 = G_{MN}dx^M dx^N = f(y_1, \dots y_d)(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) + h_{ij}(y)dy^i dy^j. \quad (2.4)$$

- Un'altra possibile classificazione riguarda il contenuto di campi presenti nel bulk o confinati sulle brane. Il confinamento può avvenire attraverso qualche meccanismo di *localizzazione*, nel quale la funzione d'onda del campo assume uno stretto picco intorno alla brana. Nel caso in cui lo spazio compatto abbia una topologia non banale si può inoltre avere la localizzazione di campi diversi in brane differenti.
- In alcuni modelli si tiene conto anche dell'effetto della gravità, in particolare ridefinendo la scala a cui questa diviene rilevante in termini di una scala di energia fondamentale presente nella teoria extra-dimensionale. In altri modelli invece ci si concentra esclusivamente sulle interazioni già presenti nel Modello Standard ridefinendole in uno spazio tempo con dimensioni aggiuntive; in particolare si studia l'effetto della presenza di queste dimensioni aggiuntive sul meccanismo di rottura della simmetria elettrodebole e sulla struttura di sapore del Modello Standard.

In base a questi principi si possono individuare tre scenari principali, ognuno dei quali ha una diversa fenomenologia:

1. modelli con “large extra-dimensions”
2. modelli con “warped extra-dimensions”
3. modelli con extra-dimensioni alla scala del TeV.

Large extra-dimensions

In questa classe di modelli si assume che nel bulk si propaghi solo la gravità, che a causa della presenza delle extra-dimensioni può diventare non

trascurabile già alla scala elettrodebole. La legge di Gauss infatti collega la scala di Planck ridotta della teoria effettiva quadridimensionale alla vera scala di energia fondamentale della teoria, M_D , attraverso il volume V delle dimensioni compattificate:

$$M_{Pl}^2 = V(M_D)^{2+d}. \quad (2.5)$$

La massa di Planck quindi non è più una scala fondamentale della teoria ma è generata dal grande volume dello spazio extra-dimensionale. Se si assume (come ad esempio in [11, 12]) che le extra-dimensioni siano piatte, per eliminare la gerarchia tra la scala di Planck e la scala elettrodebole si deve fissare $M_D \sim \text{TeV}$. Una volta fissato M_D , si può determinare il valore del raggio di compattificazione R . Assumendo per semplicità che tutti i raggi siano uguali si ricavano valori di R che vanno dal decimo di millimetro ai fermi, per d che va da 2 a 6. Il caso $d = 1$ è escluso perché in questo caso gli effetti della dimensione extra altererebbero la legge di Newton alla scala del sistema solare. La grande estensione delle extra dimensioni costringe i campi del Modello Standard a essere confinati sulle brane, dal momento che le loro interazioni sono verificate sperimentalmente a una scala di distanze molto minore della gravitazione.

Warped extra-dimensions

Anche in questo caso si attribuisce l'elevato valore della scala di Planck alla geometria delle dimensioni extra, assumendo che M_{Pl} sia funzione della vera scala di energia fondamentale, definita nella teoria completa. In questo caso però non si sfrutta l'effetto del volume delle ED ma piuttosto la loro curvatura: si ottengono così raggi di compattificazione molto minori che nel caso delle "Large extra-dimensions".

Consideriamo la realizzazione più semplice di questo scenario, conosciuta come RS1 (dai nomi di L. Randall e R. Sundrum che per primi hanno studiato questo modello [13]): la gravità si propaga in un bulk pentadimensionale di estensione finita, con due brane rigide quadri-dimensionali. Si assume che i campi del Modello Standard siano confinati su una di queste brane. Questa configurazione porta alla metrica:

$$ds^2 = e^{-2ky} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (2.6)$$

dove y è la coordinata della quinta dimensione $y \in [0, \pi]$. L'esponentiale che moltiplica la metrica Minkowskiana, detto anche fattore di warp, ha un ruolo essenziale nel ridurre la gerarchia tra le scale della teoria. Vale infatti

la seguente relazione tra la scala di Planck M_{Pl} , la scala fondamentale della teoria M_D e il parametro k , che descrive la scale di curvatura:

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_D^3}{k} (1 - e^{-2k\pi R}). \quad (2.7)$$

La consistenza della teoria alle basse energie richiede che si abbia

$$\frac{k}{M_{Pl}} \lesssim 0,1 \quad \text{e} \quad kR \simeq 10. \quad (2.8)$$

Queste due condizioni fanno sì che le funzioni d'onda gravitazionali siano localizzate sulla brana $y = 0$ (brana di Planck). Inoltre, la dipendenza esponenziale da y delle scale di energia e delle lunghezze proprie implica che i processi alla scala del TeV siano naturalmente stabilizzati su una seconda brana a $y = \pi R$, sulla quale sono quindi confinati anche i campi del Modello Standard. Più precisamente su questa brana tutti i processi fisici sono descritti dalla scala di energia

$$\Lambda = M_{Pl} e^{-k\pi R} \sim 1 \text{ TeV}. \quad (2.9)$$

Da $kR \sim 10$ e $k \sim 10^{18}$ si può stimare la scala delle dimensioni extra che in questo caso è di molti ordini di grandezza minore che nel caso delle Large Extra Dimensions.

TeV^{-1} extra-dimensions

In questi modelli, si trascura generalmente l'effetto della gravità. Ci si concentra invece sulle nuove possibilità offerte dalle ED nella comprensione delle interazioni già presenti nel Modello Standard; gli aspetti sui quali in questo contesto si concentrano i maggiori sforzi sono il problema della naturalezza e la gerarchia di massa tra le diverse generazioni.

In questa classe di modelli la teoria di campo che descrive le interazioni forti ed elettrodeboli viene ridefinita su uno spazio-tempo esteso in cui le dimensioni extra sono alla scala

$$\frac{1}{R} \sim \text{TeV}. \quad (2.10)$$

questa è l'estensione più grande che le dimensioni extra possono avere senza entrare in conflitto con i dati forniti dai test di precisione elettrodeboli.

Questo lavoro si inserisce in questo contesto: avermo quindi modo di esaminare nel dettaglio le caratteristiche principali di questo tipo di modelli nel resto di questa tesi. Ci limitiamo qui a segnalare che nel caso particolare in cui tutti i campi del Modello Standard si propagano nel bulk si parla di modelli con *extra dimensioni universali*.

2.2 Meccanismi di compattificazione

In questa sezione illustreremo i vari meccanismi di compattificazione delle extra dimensioni che portano a teorie di campo consistenti in quattro dimensioni. Tali meccanismi si differenziano a seconda della struttura topologica dello spazio extra-dimensionale, che può essere regolare o avere punti di singolarità, a seconda delle condizioni al contorno imposte ai campi che possono essere non triviali. I meccanismi di compattificazione si suddividono in tre categorie:

1. La *compattificazione ordinaria*, in cui lo spazio compatto è regolare e i campi hanno condizioni al contorno triviali;
2. La compattificazione alla *Scherk-Schwarz*, in cui lo spazio compatto è regolare e i campi hanno condizioni al contorno non triviali (o *twisted*);
3. La compattificazione su *orbifold*, in cui lo spazio compatto ha dei punti di singolarità. Anche in questo caso i campi possono assumere condizioni al contorno non triviali, purché siano rispettate delle ulteriori condizioni di consistenza.

Nel caso della compattificazione alla Scherk-Schwarz esistono delle trasformazioni non periodiche che permettono di riesprimere la teoria in funzione di campi con condizioni al contorno triviali; questi campi assumono però valori di aspettazione nel vuoto diversi da zero (meccanismo di Hosotani). Queste due descrizioni sono assolutamente equivalenti dal punto di vista della teoria effettiva quadridimensionale, poichè descrivono la stessa fisica.

2.2.1 Compattificazione ordinaria

Consideriamo una teoria di campo definita in D dimensioni, con $D = 4 + d$. L'azione è data da:

$$S_D = \int d^D x \mathcal{L}_D[\phi(x^M)]. \quad (2.11)$$

Vogliamo compattificare la teoria su $\mathcal{M}_4 \times C$, dove $\mathcal{M}_4$ è lo spazio tempo Minkowskiano e C è uno spazio compatto. Possiamo dunque dividere le coordinate come $x^M = (x^\mu, y^m)$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $m = 1, \dots, d$. Per energie $E \ll l_C^{-1}$, dove l_C è la scala di lunghezza che caratterizza lo spazio compatto C , possiamo ottenere una Lagrangiana effettiva quadridimensionale integrando sulle d extra dimensioni:

$$\mathcal{L}_4 = \int d^d y \mathcal{L}_D[\phi(x^\mu, y^m)]. \quad (2.12)$$

Vediamo quindi come si costruisce nel modo più generale uno spazio compatto C partendo da uno spazio non compatto M . La definizione dello spazio compatto è

$$C = \frac{M}{G}, \quad (2.13)$$

dove G è un gruppo di simmetria discreto che agisce *liberamente* su M , tramite l'azione di operatori $\tau_g : M \rightarrow M$. Gli operatori τ_g costituiscono una rappresentazione di G e quindi soddisfano la proprietà $\tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \cdot \tau_{g_2}$. Il fatto che G agisca liberamente su M significa che nessun elemento di G tranne l'identità ha punti fissi in M . Lo spazio C è quindi definito dall'identificazione dei punti $y \in M$ con i loro trasformati:

$$y \equiv \tau_g(y). \quad (2.14)$$

Dopo l'identificazione (2.14) la fisica del sistema, e quindi la Lagrangiana che la descrive, non deve più dipendere da tutti i punti su M , ma solo dai punti su C . Si deve quindi avere

$$\mathcal{L}_D[\phi(x, y)] = \mathcal{L}_D[\phi(x, \tau_g(y))]. \quad (2.15)$$

Una condizione sufficiente ma non necessaria affinché la (2.15) sia soddisfatta è

$$\phi(x, \tau_g(y)) = \phi(x, y), \quad (2.16)$$

che è la condizione di compattificazione ordinaria. Quindi nella compattificazione ordinaria i campi soddisfano condizioni al contorno triviali.

L'esempio più semplice di compattificazione ordinaria è la compattificazione sul cerchio in $D = 5$. In questo caso la struttura dello spazio è $\mathcal{M}_4 \times S^1$, dove S^1 indica topologicamente il cerchio. Le condizioni di periodicità da imporre sono dunque

$$\tau_n(y) = y + 2\pi n R \equiv y \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}, \quad (2.17)$$

dove R è il raggio del cerchio. Il dominio fondamentale dello spazio compatto C è quindi un intervallo aperto di lunghezza $2\pi R$, ad esempio $[0, 2\pi R)$.

Mostriamo ora alcuni semplici esempi di compattificazione ordinaria.

ESEMPIO 1: FERMIONE SU S^1

Nel caso della compattificazione ordinaria sul cerchio i campi devono rispettare la condizione di periodicità:

$$\psi_i(x^\mu, y + 2\pi R) = \psi_i(x^\mu, y). \quad (2.18)$$

Un campo che rispetta la (2.18) ammette lo sviluppo in serie di Fourier:

$$\psi_i(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_i^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{iny}{R}}. \quad (2.19)$$

I coefficienti $\psi_i^{(n)}(x^\mu)$ dipendono dalle sole coordinate quadri-dimensionali e, come mostreremo, grazie alla presenza del fattore di normalizzazione della funzione d'onda $1/\sqrt{2\pi R}$ possono essere identificati con i campi della teoria effettiva quadridimensionale. La Lagrangiana di un campo fermionico pentadimensionale è data da:

$$\mathcal{L}_5 = i\bar{\psi}(x^\mu, y)\gamma^M \partial_M \psi(x^\mu, y), \quad (2.20)$$

con

$$M = 0, \dots, 4 \quad \text{e} \quad \gamma^4 = i\gamma^5. \quad (2.21)$$

Se sostituiamo al valore del campo ψ la sua espansione (2.19) ed effettuiamo l'integrale sulla quinta dimensione, otteniamo la Lagrangiana quadridimensionale effettiva:

$$\mathcal{L}_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i\bar{\psi}^{(n)}(x^\mu)\gamma^\mu \partial_\mu \psi^{(n)}(x^\mu) - \bar{\psi}^{(n)}(x^\mu)(i\frac{n}{R}\gamma^5)\psi^{(n)}(x^\mu)]. \quad (2.22)$$

Questa mediante la trasformazione globale sui campi

$$\psi_{(n)}(x^\mu) = e^{i\frac{3\pi}{4}\gamma^5} \psi'_{(n)}(x^\mu) \quad (2.23)$$

si può riscrivere come:

$$\mathcal{L}_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i\bar{\psi}'^{(n)}(x^\mu)\gamma^\mu \partial_\mu \psi'^{(n)}(x^\mu) - \frac{n}{R}\bar{\psi}'^{(n)}(x^\mu)\psi'^{(n)}(x^\mu)]. \quad (2.24)$$

Partendo dalla Lagrangiana di un campo fermionico pentadimensionale a massa nulla otteniamo quindi dopo la compattificazione la Lagrangiana di una serie infinita di campi quadri-dimensionali (la *torre di modi di Kaluza Klein*), di cui uno solo –il modo zero– ha massa nulla, mentre tutti gli altri hanno una massa $\frac{n}{R}$.

Il fattore di normalizzazione della funzione d'onda assolve quindi a due funzioni:

1. Dare ai campi quadri-dimensionali le giuste dimensioni in energia: dalla (2.21) si vede infatti che i campi fermionici pentadimensionali hanno dimensioni pari a 2 in energia; poiché $\frac{1}{R}$ ha le dimensioni di un'energia, si può verificare dalla (2.19) che grazie all'introduzione del fattore di normalizzazione i campi $\psi^{(n)}$ hanno dimensioni in energia pari a $\frac{3}{2}$, come deve avere un campo fermionico quadridimensionale.

2. Fare in modo che il termine cinetico per i campi $\psi^{(n)}$ nella Lagrangiana $\mathcal{L}_4$ sia normalizzato canonicamente.

Si può anche notare che la Lagrangiana compattificata è invariante sotto le sole trasformazioni del gruppo di Poincaré quadridimensionale.

ESEMPIO 2: TEORIA DI GAUGE SU S^1

La densità di Lagrangiana pentadimensionale invariante sotto le trasformazioni di un generico gruppo di gauge $\mathcal{G}$ si può scrivere come:

$$\mathcal{L}_5 = i\bar{\psi}(x^\mu, y)\gamma^M(\partial_M - igA_M)\psi(x^\mu, y). \quad (2.25)$$

Nella (2.25) A_M rappresenta i bosoni di gauge di $\mathcal{G}$, mentre ψ rappresenta un fermione in una generica rappresentazione $\mathcal{R}$ di $\mathcal{G}$.

Anche in questo caso i campi devono rispettare condizioni di periodicità sul cerchio

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y + 2\pi R) &= \psi(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y + 2\pi R) &= A_M(x^\mu, y), \end{aligned} \quad (2.26)$$

e quindi possono essere sviluppati in serie di Fourier come:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{iny}{R}} \\ A_M(x^\mu, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_M^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{iny}{R}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sostituendo l'espansione (2.27) nella densità di Lagrangiana (2.25) ed integrando sulla quinta dimensione si ottiene la Lagrangiana compattificata:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= i\bar{\psi}^{(n)}(\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{n}{R}\gamma_5)\psi^{(n)} \\ &+ \sum_{n,m,l} [(\bar{\psi}^{(n)} g_4 \gamma^\mu A_\mu^l \psi^{(m)}) \delta_{m-n+l,0}] \\ &+ \sum_{n,m,l} [(\bar{\psi}^{(n)} g_4 i \gamma^5 A_5^l \psi^{(m)}) \delta_{m-n+l,0}]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nella (2.28) abbiamo fatto l'identificazione:

$$g_4 = \frac{g}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (2.29)$$

Grazie alla presenza del fattore di normalizzazione $\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ la costante di accoppiamento quadridimensionale così definita è adimensionale, mentre la costante d'accoppiamento pentadimensionale, come si può vedere dalla (2.25), ha dimensioni in energia pari a $-\frac{1}{2}$: la teoria pentadimensionale è quindi *non rinormalizzabile*.

Due ulteriori osservazioni che possiamo fare sono le seguenti:

- La densità di Lagrangiana quadridimensionale che si ottiene dalla teoria di gauge pentadimensionale (2.25) mediante la compattificazione ordinaria è ancora invariante sotto le trasformazioni del gruppo $\mathcal{G}$
- Tutti i termini nella (2.28) conservano l'impulso lungo y e sono quindi invarianti per traslazioni lungo la quinta dimensione. Questo implica che i modi eccitati di KK possono essere prodotti solo a coppie.

2.2.2 Compattificazione alla Scherk-Schwarz

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la compattificazione ordinaria (2.16) è una condizione sufficiente ma non necessaria per soddisfare la (2.15). Una condizione necessaria oltre che sufficiente è

$$\phi(x^\mu, \tau_g(y)) = T_g \phi(x^\mu, y), \quad (2.30)$$

dove gli operatori T_g sono elementi di un gruppo di simmetria globale o locale della teoria, e formano quindi una rappresentazione del gruppo G nello spazio dei campi. Le trasformazioni indotte sui campi dagli operatori T_g sono dette *twist*. La condizione di compattificazione ordinaria corrisponde alla specifica scelta

$$T_g = 1 \quad \forall g. \quad (2.31)$$

Quando invece alcuni T_g sono diversi dall'identità siamo nel caso della *compattificazione alla Scherk-Schwarz*. In questo caso i campi non sono funzioni univoche delle coordinate sullo spazio compatto C , come avveniva invece nel caso della compattificazione ordinaria.

ESEMPIO 3: TEORIA DI GAUGE ALLA SCHERK-SCHWARZ

Vogliamo vedere quali modifiche intervengono se compattifichiamo una teoria di gauge pentadimensionale imponendo condizioni al contorno twistate invece che condizioni al contorno triviali (come nell'esempio 2).

La Lagrangiana pentadimensionale da cui si parte, invariante sotto trasformazioni di gauge di un generico gruppo $\mathcal{G}$, è

$$\mathcal{L}_5 = i\bar{\psi}(x^\mu, y)\gamma_M(\partial_M - igA_M)\psi(x^\mu, y), \quad (2.32)$$

dove ψ rappresenta un campo fermionico in una rappresentazione $\mathcal{R}$ del gruppo $\mathcal{G}$.

Questa Lagrangiana è invariante, oltre che sotto $\mathcal{G}$, sotto una trasformazione globale $U(1)$ sui campi fermionici:

$$\psi(x^\mu, y) \rightarrow e^{i\beta} \psi(x^\mu, y). \quad (2.33)$$

Vogliamo compattificare la Lagrangiana (2.32) imponendo condizioni al contorno twistate per i campi fermionici, con il twist appartenente al gruppo $U(1)$. Sui campi bosonici imponiamo invece condizioni al contorno triviali:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y + 2\pi R) &= e^{i2\pi\alpha} \psi(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y + 2\pi R) &= A_M(x^\mu, y). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Le condizioni al contorno (2.34) sono soddisfatte dai campi

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y) &= e^{i\frac{\alpha}{R}y} \tilde{\psi}(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y) &= \tilde{A}_M(x^\mu, y), \end{aligned} \quad (2.35)$$

dove i campi $\tilde{\psi}$ e $\tilde{A}_M$ soddisfano condizioni al contorno triviali

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x^\mu, y + 2\pi R) &= \tilde{\psi}(x^\mu, y) \\ \tilde{A}_M(x^\mu, y + 2\pi R) &= \tilde{A}_M(x^\mu, y). \end{aligned} \quad (2.36)$$

I campi twistati (2.35) ammettono quindi lo sviluppo in serie di Fourier

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{i(n+\alpha)y}{R}} \\ A_M(x^\mu, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_M^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{iny}{R}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sostituendo (2.37) nella Lagrangiana (2.32) e integrando sulla quinta dimensione si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= i\bar{\psi}^{(n)}(\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{n+\alpha}{R} \gamma_5) \psi^{(n)} \\ &+ \sum_{n,m,l} [(\bar{\psi}^{(n)} g_4 \gamma^\mu A_\mu^l \psi^{(m)}) \delta_{m-n+l,0}] \\ &+ \sum_{n,m,l} [(\bar{\psi}^{(n)} g_4 i \gamma^5 A_5^l \psi^{(m)}) \delta_{m-n+l,0}], \end{aligned} \quad (2.38)$$

con

$$g_4 = \frac{g}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (2.39)$$

Come si vede confrontando (2.38) con (2.28) l'effetto del twist è quello di introdurre uno shift nella massa dei modi di Kaluza Klein:

$$m_n \rightarrow m'_n = m_n + \frac{\alpha}{R}. \quad (2.40)$$

In particolare se compattifichiamo con campi twistati otteniamo una teoria effettiva in cui anche il modo zero ha una massa non nulla: questo come vedremo è molto importante nell'ambito della rottura di simmetria.

2.2.3 Compattificazione su orbifold

Un orbifold è uno spazio con punti singolari costruito a partire da uno spazio compatto C tramite l'azione di una simmetria discreta K , che agisce *non liberamente* su C . In particolare se l'azione del gruppo K nello spazio delle coordinate è data da

$$y \rightarrow \zeta_k(y), \quad k \in K, \quad (2.41)$$

allora l'orbifold si definisce tramite l'identificazione

$$\zeta_k(y) \equiv y. \quad (2.42)$$

Topologicamente lo spazio così costruito viene indicato come $\frac{C}{K}$. Il fatto che K agisca non liberamente significa che esistono elementi di C che sono punti fissi sotto qualche ζ_k .

Analogamente al caso della compattificazione alla Scherk-Schwarz la condizione che i campi devono soddisfare nella compattificazione su orbifold è:

$$\phi(x^\mu, \zeta_k(y)) = P_k \phi(x^\mu, y). \quad (2.43)$$

Nella (2.43) P_k è una rappresentazione del gruppo di simmetria globale o locale della teoria nello spazio dei campi. P è detta *proiezione di orbifold*: la ragione di questo nome sarà chiara quando discuteremo la rottura di simmetria generata dalla compattificazione su orbifold.

L'orbifold più semplice che possiamo considerare è $S^1/\mathbb{Z}_2$, costruito applicando la simmetria discreta $\mathbb{Z}_2$ al cerchio. L'unico elemento non triviale è l'inversione:

$$\zeta(y) = -y. \quad (2.44)$$

Si può provare che in questo caso la matrice P , definita da

$$\phi(x^\mu, -y) = P \phi(x^\mu, y), \quad (2.45)$$

ha la proprietà $P^2 = 1$, e può quindi essere diagonalizzata con autovalori ± 1 .

La simmetria sotto inversione

$$y \leftrightarrow -y \quad (2.46)$$

fa sì che il dominio fondamentale dell'orbifold sia metà di quello del cerchio di partenza. Si può scegliere come dominio fondamentale l'intervallo $[0, \pi R]$: gli estremi di questo intervallo sono punti fissi sotto l'inversione.

Nella compattificazione su orbifold per assicurare l'invarianza dell'azione sotto la simmetria discreta K i campi di bulk devono avere una parità definita sotto K ; in questo caso quindi lo sviluppo in serie di Fourier dei campi è modificato come segue:

$$\begin{aligned} \phi_{PARI}(x^\mu, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{n,0}} \phi_{PARI}^n(x^\mu) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \\ \phi_{DISP}(x^\mu, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{DISP}^n(x^\mu) \sin\left(\frac{n}{R}y\right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

In generale la funzione d'onda dei campi dispari si annulla nei punti fissi: dopo la compattificazione “sopravvivono” quindi nella teoria effettiva i soli campi pari.

ESEMPIO 4: FERMIONI SU $S^1/\mathbb{Z}_2$

Vogliamo discutere mediante questo esempio uno dei risultati più importanti della compattificazione su orbifold: compattificando fermioni di bulk non chirali si ottiene una teoria effettiva quadridimensionale con fermioni chirali.

Come è mostrato nei dettagli nell'App. D, in un numero D dispari di dimensioni è possibile definire unicamente fermioni vettoriali. Nelle teorie pentadimensionali quindi questa caratteristica dell'orbifolding è fondamentale per ottenere uno spettro fermionico con la giusta fenomenologia. Nel caso esadimensionale è invece possibile definire fermioni chirali: tuttavia ogni fermione chirale esadimensionale contiene due fermioni di opposta chiralità quadridimensionale. Anche in questo caso l'orbifolding permette di eliminare dai modi zero i fermioni con la chiralità “sbagliata”, cioè non osservata in natura.

Consideriamo dunque la Lagrangiana di un campo fermionico pentadimensionale

$$\mathcal{L}_5 = \bar{\psi}(x^\mu, y) i\gamma^M \partial_M \psi(x^\mu, y). \quad (2.48)$$

Scegliamo come twist l'identità, mentre come rappresentazione dell'azione dell'orbifold nello spazio di Dirac scegliamo

$$P = \gamma_5 \quad (2.49)$$

Questa scelta è dettata dalla richiesta che il termine di Lagrangiana

$$\bar{\psi}(x^\mu, y) \gamma_5 \partial_y \psi(x^\mu, y) \quad (2.50)$$

sia invariante sotto $\mathbb{Z}_2$.

I campi fermionici dovranno quindi soddisfare le condizioni:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y + 2\pi R) &= \psi(x^\mu, y) \\ \psi(x^\mu, -y) &= \gamma_5 \psi(x^\mu, y). \end{aligned} \quad (2.51)$$

La prima delle (2.51) ammette come soluzione campi sviluppabili in serie come esponenziali

$$\psi(x^\mu, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(x^\mu) e^{iy \frac{n}{R}}, \quad (2.52)$$

dove gli $\psi(x^\mu)$ sono fermioni di Dirac quadri-dimensionali. Se sostituiamo lo sviluppo (2.52) nella seconda delle (2.51) deduciamo che sotto l'inversione:

- la componente di Weyl levogira $\psi_L(x^\mu, y)$ ha parità negativa ed è quindi sviluppabile come:

$$\psi_L(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_L^n(x^\mu) \sin\left(\frac{n}{R} y\right); \quad (2.53)$$

- la componente di Weyl destrogira $\psi_R(x^\mu, y)$ ha parità positiva ed è quindi sviluppabile come:

$$\psi_R(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{n,0}} \psi_R^n(x^\mu) \cos\left(\frac{n}{R} y\right). \quad (2.54)$$

Nei punti fissi di $\mathbb{Z}_2$, 0 e πR , solo i campi destrogiri sono quindi non nulli. Lo spettro dei modi zero nella teoria effettiva risulta dunque *chirale*.

La Lagrangiana quadridimensionale effettiva che si ottiene integrando sulla quinta dimensione è:

$$\mathcal{L}_4 = \sum_{n=0}^{\infty} i \bar{\psi}_R^n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R^n + \sum_{n=1}^{\infty} i \bar{\psi}_L^n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} (\bar{\psi}_L^n \psi_R^n + \bar{\psi}_R^n \psi_L^n). \quad (2.55)$$

Questo esempio mostra come sia possibile tramite l'orbifolding ottenere modi zero chirali da una teoria vettoriale, o eliminare i fermioni “mirror” partendo da una teoria con $D = 2n$. In una teoria realistica questo strumento si rivela essenziale per ottenere, con un'opportuna scelta di campi fermionici nel bulk, lo spettro di fermioni chirali che si osserva effettivamente in natura.

2.2.4 Condizioni di consistenza

Nel caso in cui la compattificazione avvenga su un orbifold e allo stesso tempo i campi abbiano condizioni al contorno non triviali, gli operatori di twist devono soddisfare delle ulteriori condizioni di consistenza [14]. Questo si può facilmente comprendere ricordando come abbiamo definito lo spazio compatto C e l'orbifold, partendo da uno spazio non compatto M ed applicando successivamente due simmetrie G e K .

- Lo spazio compatto $C = M/G$ si ottiene da M mediante l'azione libera degli operatori τ_g sulle coordinate, con $g \in G$. La rappresentazione del gruppo G nello spazio dei campi è invece data dagli operatori T_g .
- L'orbifold $O = C/K$ si ottiene da C mediante l'azione non libera degli operatori ζ_k sulle coordinate, con $k \in K$. La rappresentazione del gruppo K nello spazio di campi è data dagli operatori P_k .

Potremmo invece considerare l'azione di K direttamente sullo spazio M e considerare G e K come sottogruppi di un gruppo più grande J , che in generale non è il loro prodotto diretto. In generale quindi l'azione di G e K non commuta:

$$\begin{aligned} g \cdot k &\neq k \cdot g \\ \tau_g \cdot \zeta_k(y) &\neq \zeta_k \cdot \tau_g(y). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dalle (2.43) e (2.30) possiamo quindi ricavare le seguenti identità:

$$\begin{aligned} T_g P_k \phi(x^\mu, y) &= \phi(x^\mu, \tau_g \cdot \zeta_k(y)) \\ P_k T_g \phi(x^\mu, y) &= \phi(x^\mu, \zeta_k \cdot \tau_g(y)) \\ T_{g_1} P_k T_{g_2} \phi(x^\mu, y) &= \phi(x^\mu, \tau_{g_1} \cdot \zeta_k \cdot \tau_{g_2}(y)). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Nel caso $S^1/\mathbb{Z}_2$, ad esempio, l'unico elemento di G è la traslazione $\tau(y) = y + 2\pi R$, e l'unico elemento di K è l'inversione $\zeta(y) = -y$. L'azione di queste due trasformazioni non commuta; si ha infatti:

$$\begin{aligned} \zeta \cdot \tau(y) &= -y - 2\pi R \\ \tau \cdot \zeta(y) &= -y + 2\pi R. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ne segue che l'applicazione successiva di una traslazione, di un'inversione e di una seconda traslazione è equivalente all'azione di un'unica inversione:

$$\tau \cdot \zeta \cdot \tau = \zeta. \quad (2.59)$$

La (2.59) si può generalizzare, ricavando dalle identità (2.57) le condizioni di consistenza sugli operatori di twist:

$$TPT = P. \quad (2.60)$$

2.3 Rottura della simmetria di gauge

Una caratteristica molto interessante delle teorie di campo con dimensioni extra è che si possono introdurre nuovi meccanismi di rottura della simmetria basati sulla compattificazione, non presenti nelle teorie di campo ordinarie [14]. Questi sono essenzialmente tre:

1. Rottura di simmetria mediante compattificazione alla Scherk-Schwarz;
2. Meccanismo di Hosotani;
3. Rottura di simmetria mediante compattificazione su orbifold;

Nei primi due la rottura di simmetria avviene in maniera *spontanea* e *non locale*, mentre nell'ultimo la rottura è *esplicita*. Esiste inoltre una corrispondenza tra la compattificazione alla Scherk-Schwarz e il meccanismo di Hosotani: esiste una classe di trasformazioni sui campi che permette di passare da una descrizione della rottura di simmetria all'altra senza cambiare la fisica descritta dalla teoria.

2.3.1 Rottura di simmetria alla Scherk-Schwarz

Si ha rottura di simmetria alla Scherk-Schwarz [15, 16] nel caso in cui, partendo da un campo di bulk che trasforma come un multipletto sotto una simmetria $\mathcal{G}$, alcune componenti acquistano dinamicamente uno shift di massa mediante la compattificazione. In generale se partiamo da un multipletto

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

nella teoria compattificata la massa dei modi di KK delle singole componenti è data da

$$M_n^i = \frac{n - q^i \alpha}{R}, \quad (2.62)$$

dove q^i è la carica della componente i -esima sotto il gruppo $\mathcal{G}$.

In particolare se $\mathcal{G}$ è una simmetria di gauge della teoria, gli unici campi di gauge a rimanere a massa nulla dopo la compattificazione sono quelli associati ai generatori che commutano con la rappresentazione del twist nel gruppo di gauge. Si ha dunque una riduzione *spontanea* della simmetria sulle brane da $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$.

Per mostrare esplicitamente la rottura di simmetria dobbiamo considerare la Lagrangiana di una generica teoria di gauge in cinque dimensioni:

$$\mathcal{L}_5 = i\bar{\psi}\gamma^M D_M\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}[F^{MN}F_{MN}], \quad (2.63)$$

dove

$$\begin{aligned} F_{MN} &= F_{MN}^A \lambda^A \\ F_{MN}^A &= \partial_M A_N^A - \partial_N A_M^A + gf^{ABC} A_M^B A_N^C \\ D_M &= \partial_M - ig A_M^A \lambda^A. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Nella (2.64) i λ^A e i f^{ABC} rappresentano rispettivamente generatori e costanti di struttura del gruppo di gauge $\mathcal{G}$.

Le condizioni al contorno che dobbiamo imporre nel caso di compattificazione alla Scherk-Schwarz sul cerchio sono:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y + 2\pi R) &= T\psi(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y + 2\pi R) &= TA_M(x^\mu, y)T^{-1}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Nella (2.65) l'operatore T , il *twist* è una matrice nella rappresentazione aggiunta nel caso dei bosoni di gauge, nella adeguata rappresentazione $\mathcal{R}$ per i fermioni. Dal momento che gli elementi del gruppo di simmetria discreto G devono agire linearmente sui generatori del gruppo $\mathcal{G}$ la seconda delle (2.65) si può riscrivere come:

$$A_M^A(x^\mu, y)(T\lambda^A T^{-1}) = A_M^A(x^\mu, y)\Lambda^{AB}\lambda^B = \tilde{\lambda}^A A_M^A. \quad (2.66)$$

Le matrici $\tilde{\lambda}$ formano a loro volta una rappresentazione del gruppo $\mathcal{G}$, come si può vedere verificando che vale la

$$[\tilde{\lambda}^A, \tilde{\lambda}^B] = if^{ABC}\tilde{\lambda}^C. \quad (2.67)$$

Si dice quindi che le trasformazioni del gruppo G agiscono sull'algebra di Lie di $\mathcal{G}$ come un *automorfismo*. Nei casi di nostro interesse in questo lavoro ci limiteremo a studiare una classe particolare di automorfismi: gli *automorfismi interni*. In questo caso l'azione del gruppo G sullo spazio di gauge può essere rappresentato tramite un elemento appartenente al gruppo di simmetria $\mathcal{G}$ della teoria.

Nel caso di un automorfismo interno, il twist è dato, nella maniera più generale, da:

$$T = e^{i2\pi\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}}. \quad (2.68)$$

Con questa rappresentazione esplicita del twist le condizioni di compattificazione (2.65) diventano

$$\begin{aligned}\psi(x^\mu, y + 2\pi R) &= e^{i2\pi\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}}\psi(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y + 2\pi R) &= e^{i2\pi\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}}A_M(x^\mu, y)e^{-i2\pi\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}}.\end{aligned}\quad (2.69)$$

Le condizioni al contorno (2.69) sono, ad esempio ², soddisfatte dai campi:

$$\begin{aligned}\psi(x^\mu, y) &= e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\frac{y}{R}}\tilde{\psi}(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y) &= e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\frac{y}{R}}\tilde{A}_M(x^\mu, y)e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}\frac{y}{R}}.\end{aligned}\quad (2.70)$$

Nella (2.70) i campi $\tilde{\psi}$ e $\tilde{A}_M$ sono campi periodici non twistati sviluppabili in serie di Fourier come esponenziali.

Sostituendo l'espressione dei campi (2.70) nella Lagrangiana $\mathcal{L}_5$ e integrando sulla quinta dimensione si ottiene, dal termine

$$F_{5\mu}F^{5\mu} = (\partial_5 A_\mu - \partial_\mu A_5 + igf^{ABC}A_5^B A_\mu^C)^2, \quad (2.71)$$

un termine di massa nella teoria effettiva quadridimensionale per i campi $A_\mu^{\hat{a}}$ associati ai generatori per i quali

$$[\lambda^{\hat{a}}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}] \neq 0. \quad (2.72)$$

I campi di gauge che rimangono a massa nulla, cui sono associati i generatori della simmetria residua $\mathcal{H}$ sotto la quale è invariante la Lagrangiana quadridimensionale effettiva, sono dunque quelli per i quali vale

$$[\lambda^a, \vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}] = 0. \quad (2.73)$$

La simmetria residua sulle brane è quindi data *dai generatori che commutano col twist*. I campi di gauge associati ai generatori che non commutano col twist, per i quali quindi vale

$$[\lambda^{\hat{a}}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}] \neq 0, \quad (2.74)$$

acquistano dinamicamente un termine di massa diverso da zero. La simmetria è quindi rotta spontaneamente, come volevamo mostrare.

²Questa scelta non è univoca. Si dimostra tuttavia che le differenti scelte portano alla stessa fisica.

2.3.2 Meccanismo di Hosotani

Nella compattificazione di una teoria di gauge su uno spazio non semplicemente connesso, alcune trasformazioni di fase sui campi diventano *gradi di libertà fisici*, e non possono quindi essere eliminate con una trasformazione di gauge. Queste trasformazioni sono le “Wilson lines”, ovvero integrali di linea lungo una traiettoria non contraibile sullo spazio compatto C . Nel semplice caso di compattificazione sul cerchio una Wilson line è definita da

$$W(x, y) = e^{ig \int_y^{y+2\pi R} dy' A_5(x, y')} . \quad (2.75)$$

La Wilson line così definita è per costruzione gauge-invariante, dal momento che rappresenta la versione finita del *comparatore*. La dinamica delle Wilson lines è alla base del meccanismo di Hosotani [17, 18], che può essere schematizzato come segue:

- La presenza di una fase non eliminabile nella teoria indica una degenerazione di più stati di vuoto nel potenziale classico, corrispondente alla configurazione $F_{MN} = 0$;
- Se si tiene conto degli effetti quantistici il potenziale effettivo può essere minimizzato da configurazioni non triviali delle Wilson lines: questo rimuove la degenerazione presente nel potenziale classico;
- Le configurazioni di minimo del potenziale si hanno quando alcuni campi di gauge assumono valori di aspettazione nel vuoto diversi da zero $\langle A_5 \rangle$. In questo caso la Wilson line diventa

$$W = e^{ig2\pi R \langle A_5 \rangle} ; \quad (2.76)$$

- Se il potenziale è minimizzato da configurazioni non triviali delle Wilson lines, si ha una rottura spontanea di simmetria: grazie ai vev i campi associati alle simmetrie rotte acquistano una massa diversa da zero.

Corrispondenza tra rottura alla Scherk-Schwarz e meccanismo di Hosotani

Vogliamo ora mostrare che c'è una corrispondenza tra la rottura di simmetria alla Scherk-Schwarz e il meccanismo di Hosotani, ovvero che sono due descrizioni differenti ma equivalenti della stessa fisica [19].

Consideriamo una teoria di gauge compattificata alla Scherk-Schwarz: in questo caso i campi sono twistati, e il vev dei campi di gauge è nullo. Le condizioni al contorno twistate si possono scrivere in generale come

$$\phi(x^\mu, y + 2\pi R) = e^{2\pi i \omega Q} \phi(x^\mu, y) , \quad (2.77)$$

dove nel twist $T = \exp(2\pi i Q)$, Q corrisponde a una direzione fissata nello spazio dei generatori e ω è il parametro corrispondente. Una soluzione alla (2.77) è data da

$$\phi(x^\mu, y) = e^{i\omega Q \frac{y}{R}} \tilde{\phi}(x^\mu, y), \quad (2.78)$$

dove $\tilde{\phi}$ è un campo periodico espandibile in serie di Fourier, con condizioni al contorno triviali:

$$\tilde{\phi}(x^\mu, y + 2\pi R) = \tilde{\phi}(x^\mu, y). \quad (2.79)$$

Come già abbiamo visto la simmetria generata da Q è rotta dal termine cinetico $F_{5\mu} F^{5\mu}$.

Nel caso di Hosotani la simmetria è invece rotta da un vev nella direzione Q dato da:

$$\langle \vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha} \rangle = Q \langle A_5^Q \rangle. \quad (2.80)$$

Questo vev rompe la simmetria dando una massa a tutti i campi che trasformano in maniera non triviale sotto Q . In questo caso tutti i campi hanno condizioni al contorno triviali.

Esiste sempre una trasformazione con parametri non periodici che permette di passare dalla rappresentazione della rottura di simmetria di Scherk-Schwarz a quella di Hosotani. La forma di questa trasformazione è:

$$\Omega(y) = e^{iQ \langle A_5^Q \rangle y}. \quad (2.81)$$

Si può infatti facilmente verificare che se applichiamo questa trasformazione ai campi non twistati della rappresentazione di Hosotani, otteniamo

$$\phi \rightarrow \phi' = \Omega(y)\phi \quad (2.82)$$

che, se identifichiamo

$$\omega = R \langle A_5^Q \rangle, \quad (2.83)$$

coincide con i campi twistati della (2.78). Se invece applichiamo la trasformazione (2.81) ai campi di gauge nella rappresentazione di Hosotani otteniamo

$$A_M \rightarrow A'_M = \Omega^\dagger A_M \Omega - \Omega^\dagger \partial_M \Omega, \quad (2.84)$$

che cancella esattamente il vev $Q \langle A_5^Q \rangle$.

2.3.3 Rottura di simmetria su orbifold

Come abbiamo visto, nella compattificazione su orbifold, i campi hanno parità definite sotto la simmetria discreta $\mathbb{Z}_2$ sulla quale è costruito l'orbifold; solo i campi con parità positiva sotto questa simmetria ammettono modi zero

ai punti fissi e sono quindi presenti nella teoria quadridimensionale. Nel caso in cui la teoria sia invariante sotto una simmetria di gauge $\mathcal{G}$ nel bulk, quello che accade è che, analogamente a quanto accade nel caso della rottura alla Scherk-Schwarz, la simmetria residua sulle brane $\mathcal{H}$ è data dai generatori che commutano con la rappresentazione P dell'orbifold nello spazio di gauge [20]. La rottura di simmetria si manifesta nel caso dell'orbifold con l'assenza dei modi zero dei campi di gauge associati ai generatori rotti: siamo quindi nel caso di una rottura *esplicita* di simmetria. È ora chiaro il motivo per cui la matrice P viene detta di proiezione: essa infatti “proietta via” una parte dei campi della teoria.

Illustriamo questo meccanismo con un esempio concreto. Partiamo considerando la Lagrangiana di una generica teoria di gauge in cinque dimensioni

$$\mathcal{L}_5 = i\bar{\psi}\gamma^M D_M \psi - \frac{1}{2} \text{Tr}[F^{MN} F_{MN}], \quad (2.85)$$

dove

$$\begin{aligned} F_{MN} &= F_{MN}^A \lambda^A \\ F_{MN}^A &= \partial_M A_N^A - \partial_N A_M^A + g f^{ABC} A_M^B A_N^C \\ D_M &= \partial_M - ig A_M^A \lambda^A. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Nella (2.86) i λ^a e i f^{abc} rappresentano rispettivamente generatori e costanti di struttura del gruppo di gauge $\mathcal{G}$.

Se compattifichiamo la teoria sull'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ le condizioni al contorno che i campi devono rispettare sono:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y + 2\pi R) &= \psi(x^\mu, y) \\ \psi(x^\mu, -y) &= [\gamma_5 \otimes P] \psi(x^\mu, y) \end{aligned} \quad (2.87)$$

per i campi fermionici, e

$$\begin{aligned} A_M(x^\mu, y + 2\pi R) &= A_M(x, y) \\ A_M(x^\mu, -y) &= \alpha_M P A_M(x^\mu, y) P^{-1} \end{aligned} \quad (2.88)$$

per i campi vettoriali. α_M è dato da:

$$\alpha_M = \begin{cases} 1 & \text{per } M = \mu \\ -1 & \text{per } M = 5. \end{cases} \quad (2.89)$$

La scelta della parte di Lorentz dell'azione dell'orbifold, data da γ_5 per i fermioni e da α_M per i bosoni, è dettata dalla richiesta che tutti i termini della Lagrangiana $\mathcal{L}_5$ siano invarianti sotto $\mathbb{Z}_2$.

Come nel caso della compattificazione alla Scherk-Schwarz, l'operatore P deve agire linearmente sui generatori della simmetria di gauge, quindi la seconda delle (2.88) si può riscrivere come:

$$P\lambda^A P = \Lambda^{AB}\lambda^A. \quad (2.90)$$

L'operatore P quindi agisce nello spazio di gauge come un automorfismo; ci soffermeremo anche qui sul caso degli automorfismi interni. Dal momento che l'azione dell'orbifold è un automorfismo nello spazio di gauge, essa deve preservare le costanti di struttura, e vale quindi la condizione:

$$f^{ABC} = \Lambda^{AA'}\Lambda^{BB'}\Lambda^{CC'}f^{A'B'C'}. \quad (2.91)$$

Senza perdere generalità possiamo passare nella base in cui le matrici Λ assumono la forma diagonale:

$$\Lambda^{AA'} = \eta^A \delta^{AA'} \quad \text{con } \eta^i = \pm 1. \quad (2.92)$$

In questa base la (2.91) diventa:

$$f^{ABC} = \eta^A \eta^B \eta^C f^{ABC}. \quad (2.93)$$

Le condizioni di compattificazione dei campi di gauge si riscrivono come:

$$\begin{aligned} A_\mu^A(x^\mu, -y) &= \eta^A A_\mu^A(x^\mu, y) \\ A_5^A(x^\mu, -y) &= -\eta^A A_5^A(x^\mu, y), \end{aligned} \quad (2.94)$$

I valori di η^A e quindi le parità dei vari campi, si ricavano dalla definizione:

$$P\lambda^A P = \eta^A \lambda^A. \quad (2.95)$$

Per i campi di gauge quadri-dimensionali si ottiene che:

- I campi A_μ^a associati ai generatori che commutano con P

$$[\lambda^a, P] = 0 \quad (2.96)$$

sono pari sotto $\mathbb{Z}_2$;

- I campi $A_\mu^{\hat{a}}$ associati ai generatori che non commutano con P

$$\{\lambda^{\hat{a}}, P\} \quad (2.97)$$

sono dispari sotto $\mathbb{Z}_2$.

Le loro espansioni in serie di Fourier sono date rispettivamente da:

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{n,0}} A_\mu^a(x^\mu) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \\ A_\mu^{\hat{a}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} A_\mu^{\hat{a}}(x^\mu) \sin\left(\frac{ny}{R}\right). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Nella teoria compattificata *solo i campi di gauge della simmetria residua $\mathcal{H}$ hanno modi zero non nulli*. È quindi evidente come in questo caso la rottura di simmetria sia *esplicita*.

2.4 Unificazione gauge-Higgs

Sfruttando alcuni dei meccanismi di rottura della simmetria presenti nelle teorie di campo con dimensioni extra, è possibile costruire modelli basati sull'*unificazione gauge-Higgs*. In questo tipo di modelli alcune componenti dei campi di gauge D-dimensionali vengono identificate, nella Lagrangiana compattificata, con i campi scalari della teoria di bassa energia: in questo modo la stessa simmetria di gauge che impedisce ai bosoni di gauge di assumere una massa viene sfruttata per proteggere i campi scalari della teoria dalle divergenze quadratiche che sono all'origine del problema della gerarchia.

Per ottenere campi scalari che non trasformino nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge bisogna partire da una teoria di gauge in D dimensioni invariante sotto un gruppo $\mathcal{G}$ tale che:

$$\mathcal{H} \in \mathcal{G}. \quad (2.99)$$

La simmetria $\mathcal{G}$ viene poi rotta tramite la compattificazione in modo che la Lagrangiana effettiva sia invariante sotto le sole trasformazioni appartenenti ad $\mathcal{H}$.

Se la compattificazione avvenisse su uno spazio non singolare avremmo dei campi scalari che trasformano nell'aggiunta di $\mathcal{H}$. Se invece la compattificazione avviene su orbifold, per un opportuna scelta della matrice di proiezione, alcuni modi zero sono eliminati e nella teoria compattificata sono presenti solamente:

- Le componenti di A_M che trasformano nell'aggiunta di $\mathcal{H}$ per gli indici $M = \mu$;
- Le componenti di A_M che trasformano nella rappresentazione definita dai generatori di $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ per gli indici $M = i$.

Se vogliamo riprodurre il Modello Standard alle basse energie la simmetria della Lagrangiana effettiva deve essere:

$$\mathcal{H} = SU(2) \otimes U(1) \quad (2.100)$$

Se ci limitiamo al caso degli automorfismi interni, esistono solo quattro³ gruppi di rango due tali che $\mathcal{H} \in \mathcal{G}$. Tutte queste possibilità vengono studiate nella referenza [21]. In questo lavoro ci limiteremo a descrivere il caso $SU(3)_w \otimes SU(3)_c \ni SU(3)_c \otimes SU(2) \otimes U(1)$, che è il gruppo di Lie più piccolo che può contenere il gruppo di simmetria del Modello Standard.

I bosoni di gauge D-dimensionali possono essere rappresentati come una matrice hermitiana 3×3 nella rappresentazione aggiunta di $SU(3)_w$:

$$A_M = \left(\begin{array}{c|c} A_M^a & A_M^{\hat{a}} \\ \hline A_M^{\hat{a}} & A_M^a \end{array} \right) . \quad (2.101)$$

In questa notazione le componenti dei gruppi diagonali della matrice, A_M^a ($a = 1, 2, 3, 8$), sono associate ai generatori del sottogruppo diagonale $SU(2) \otimes U(1)$, mentre le componenti $A_M^{\hat{a}}$ ($\hat{a} = 4, 5, 6, 7$) sono associate ai generatori delle simmetrie rotte dall'orbifold.

La decomposizione della rappresentazione aggiunta di $SU(3)_w$ sotto $SU(2) \otimes U(1)$ è data da:

$$\mathbf{8} = \mathbf{3}_0 \oplus \mathbf{1}_0 \oplus \mathbf{2}_{\frac{1}{2}} \oplus \bar{\mathbf{2}}_{-\frac{1}{2}}. \quad (2.102)$$

Per un'opportuna scelta della matrice di proiezione di orbifold è possibile mantenere come modi zero le componenti $\mathbf{3}_0^\mu + \mathbf{1}_0^\mu$, che saranno identificate con i bosoni di gauge del Modello Standard, e le componenti $\mathbf{2}_{\frac{1}{2}}^i + \bar{\mathbf{2}}_{-\frac{1}{2}}^i$ che saranno identificate con i doppietti di Higgs. Come vedremo, a seconda di come viene effettuata la compattificazione, il numero di doppietti varia come $0 \leq N_H \leq d$.

La rottura della simmetria elettrodebole viene successivamente ottenuta imponendo condizioni al contorno opportunamente twistate per i campi scalari. In questo caso si tratta quindi di una rottura di simmetria alla *Scherk-Schwarz*.

Nel seguito di questo capitolo ci concentreremo sull'unificazione gauge-Higgs in $D = 5$, mostrando esplicitamente come si ottiene la rottura

$$SU(3)_w \rightarrow SU(2)_L \otimes U(1) \quad (2.103)$$

³Escludendo il caso $\mathcal{H} = \mathcal{G}$, nel quale non è possibile ottenere campi scalari che trasformino in rappresentazioni diverse dall'aggiunta

mediante la compattificazione su orbifold e come successivamente si ottiene la rottura della simmetria elettrodebole

$$SU(2)_L \otimes U(1) \rightarrow U(1)_{em} \quad (2.104)$$

mediante il meccanismo di Hosotani.

Prima di mostrare i dettagli più tecnici vogliamo però soffermarci a considerare con maggiore attenzione l'aspetto saliente del meccanismo di unificazione gauge-Higgs, *l'assenza di divergenze quadratiche nella massa degli scalari*.

È evidente che nello spazio compatto $\mathcal{M} \times S^1$ la simmetria di gauge ha sulle componenti interne dei campi vettoriali lo stesso effetto che sulle componenti ordinarie. In realtà poichè la quinta dimensione, al contrario delle altre, non ha estensione infinita, lungo di essa le correzioni radiative generano dei termini di massa *finiti*

$$m_{A_5}^2 \propto \frac{1}{R^2}. \quad (2.105)$$

Nel limite $R \rightarrow \infty$ questo termine si annulla e il campo A_5 diventa a massa nulla come i campi di gauge lungo le direzioni ordinarie [22].

L'orbifold $\mathcal{M} \times S^1/\mathbb{Z}_2$ tuttavia ha dei punti fissi nei quali si ha una riduzione della simmetria di gauge

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad (2.106)$$

dove $\mathcal{G} = SU(3)_w$, e $\mathcal{H}$ è il gruppo di simmetria elettrodebole $SU(2) \otimes U(1)$.

In questi punti fissi quindi la simmetria di gauge di bulk non interviene a proteggere la massa dei campi scalari e quindi l'assenza delle divergenze quadratiche non è più garantita.

Da un'analisi più attenta della rottura di simmetria tuttavia emerge che la simmetria sulle brane non è limitata alla sola simmetria di gauge residua $\mathcal{H}$. La simmetria originaria di bulk infatti restringe ulteriormente i possibili termini localizzati [23].

Nel bulk, la simmetria locale $\mathcal{G}$ agisce sui campi di gauge A_M^A come:

$$\delta_{\mathcal{G}} A_M^A = \partial_M \xi^A + f^{ABC} \xi^B A_M^C. \quad (2.107)$$

La simmetria di gauge nel bulk è ancora intatta dopo l'orbifolding se gli assegnamenti di parità per i campi A_M^A sono scelti in modo da soddisfare la condizione di automorfismo

$$f^{ABC} = \Lambda^{AA'} \Lambda^{BB'} \Lambda^{CC'} f^{A'B'C'}, \quad (2.108)$$

così come una condizione simile sui parametri di gauge data da:

$$\xi^A(x^\mu, -x^5) = \Lambda^{AB} \xi^B(x^\mu, x^5). \quad (2.109)$$

Sulle brane $\mathcal{G}$ è rotta al sottogruppo $\mathcal{H}$. I campi non nulli sulle brane sono i bosoni di gauge di $\mathcal{H}$, $A_\mu^a(0)$, e gli scalari $A_5^{\hat{a}}(0)$. Specificando nella (2.107) $x_5 = 0$ si ottengono le trasformazioni generate da ξ^a

$$\delta_{\mathcal{H}} A_\mu^a = \partial_\mu \xi^a + f^{abc} \xi^b A_\mu^c, \quad (2.110)$$

$$\delta_{\mathcal{H}} A_5^{\hat{a}} = f^{\hat{a}bc} \xi^b A_5^{\hat{c}}. \quad (2.111)$$

Tutti i campi e i parametri sono ottenuti ponendo $x_5 = 0$ e dipendono solo da x^μ . Si può vedere che gli altri termini presenti nella (2.107) si annullano per parità usando il fatto che le uniche costanti di struttura non nulle sono quelle con zero o due indici accentati, e quindi $f^{\hat{a}bc} = f^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = 0$. La (2.110) indica quindi che $A_\mu^a(0)$ trasforma come un bosone di gauge del gruppo $\mathcal{H}$, mentre la (2.111) mostra che gli scalari trasformano in una rappresentazione data da

$$(T^b)_{\hat{a}\hat{c}} \equiv i f^{\hat{a}b\hat{c}}. \quad (2.112)$$

Si vede facilmente che i T^b formano una rappresentazione di $\mathcal{H}$ (non necessariamente irriducibile). Tutte le interazioni sulle brane devono rispettare la simmetria $\mathcal{H}$ e le trasformazioni da essa generate (2.110) e (2.111).

Tuttavia c'è un ulteriore residuo di $\mathcal{G}$ sulle brane: effettuando nuovamente la riduzione della (2.107), questa volta per i parametri dispari $\xi^{\hat{a}}$, si ottiene

$$\delta_{\mathcal{K}} A_\mu^a = 0, \quad (2.113)$$

$$\delta_{\mathcal{K}} A_5^{\hat{a}} = \partial_5 \xi^{\hat{a}}. \quad (2.114)$$

La (2.114) è una simmetria locale (dipendente da x^μ) sotto traslazione $\mathbb{R}^{d_K}$. La sua implicazione più importante è che proibisce termini di massa diretti per gli scalari sulle brane, dal momento che

$$\delta_{\mathcal{K}} (A_5^{\hat{a}} M_{\hat{a}\hat{c}} A_5^{\hat{c}} \delta(x_5)) = 2 A_5^{\hat{a}} M_{\hat{a}\hat{c}} \partial_5 \xi^{\hat{c}} \delta(x_5) \neq 0. \quad (2.115)$$

Prendendo potenze della (2.107) sempre a $x^5 = 0$ si possono ottenere ulteriori condizioni derivanti dalla simmetria di gauge originale $\mathcal{G}$, che restringono il numero e la natura dei possibili termini localizzati.

Sottolineiamo che l'analisi appena fatta *vale esclusivamente nel caso pentadimensionale*, dove l'unico termine di massa localizzato è quello che compare nella (2.115). Come vedremo nel prossimo capitolo, nel caso esadimensionale compaiono ulteriori termini di massa con una diversa struttura, che nemmeno le simmetrie legate alle trasformazioni $\delta_{\mathcal{K}}$ sono in grado di cancellare.

2.4.1 $SU(3)_w \rightarrow SU(2)_L \otimes U(1) \rightarrow U(1)_{em}$ in $D = 5$

Si consideri una teoria invariante sotto la simmetria di gauge del gruppo $\mathcal{G} = SU(3)_w$.

Come contenuto di materia si considerino campi fermionici appartenenti alla rappresentazione fondamentale di $SU(3)_w$:

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.116)$$

Vogliamo compattificare la teoria sull'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ in modo da ottenere la rottura esplicita

$$\mathcal{G} = SU(3)_w \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \mathcal{H} = SU(2) \otimes U(1). \quad (2.117)$$

Inoltre vogliamo rompere, in un secondo stadio, la simmetria elettrodebole in maniera spontanea: si deve quindi imporre anche un twist non banale sulle condizioni al contorno.

Le condizioni che i campi devono rispettare sono dunque:

$$\begin{aligned} \psi_i(x^\mu, -y) &= [\gamma_5 \otimes P_{ij}] \psi_j(x^\mu, y) \\ A_\mu(x^\mu, -y) &= A_\mu^a(x^\mu, y) P t^a P \\ A_5(x^\mu, -y) &= -A_5^a(x^\mu, y) P t^a P \end{aligned} \quad (2.118)$$

sotto l'inversione, e:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y + 2\pi r) &= T \psi(x^\mu, y) \\ \psi(x^\mu, y + 2\pi R) &= T A_M(x^\mu, y) T^{-1} \end{aligned} \quad (2.119)$$

sotto traslazioni periodiche.

Concentriamoci per prima cosa sulla rottura esplicita $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$. Bisogna innanzitutto determinare la forma della matrice P che realizza la rottura di simmetria voluta. Essa deve soddisfare le seguenti condizioni:

- $P^2 = \mathbf{1}$;
- $[P, \lambda^a] = 0$ per $a = 1, 2, 3, 8$: come abbiamo visto in precedenza la matrice di proiezione deve commutare con le simmetrie che si vogliono lasciare intatte;
- $P = e^{i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\lambda}}{2}}$: poichè siamo nel caso di automorfismo interno la matrice P deve ammettere una rappresentazione in termini dei generatori del gruppo $\mathcal{G}$.

La matrice che soddisfa tutte queste condizioni è data da:

$$P = e^{i\pi\lambda_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.120)$$

Sostituendo l'espressione di P in (2.118) si ottengono le seguenti parità per i vari campi:

PARI	DISPARI
A_μ^a	$A_\mu^{\hat{a}}$
$A_5^{\hat{a}}$	A_5^a
u_L	u_R
d_L	d_R
χ_R	χ_L

$$\begin{aligned} a &= 1, 2, 3, 8 \\ \hat{a} &= 4, 5, 6, 7. \end{aligned} \quad (2.121)$$

I campi residui sulle brane sono quindi:

- I bosoni di gauge di $\mathcal{H}$;
- Quattro campi scalari reali;
- Tre fermioni chirali per ogni generazione di fermioni di bulk.

Si può verificare esplicitamente che i campi scalari residui sulle brane trasformano come doppietti sotto la simmetria residua $\mathcal{H}$. I generatori della simmetria residua sono:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_i}{2} \quad i &= 1, 2, 3 \quad \text{per } SU(2), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_8}{2} &= \frac{Y}{2} \quad \text{per } U(1). \end{aligned} \quad (2.122)$$

La seconda delle (2.122) definisce l'operatore ipercarica Y : otteniamo per la costante di accoppiamento di $U(1)$

$$g_Y = \sqrt{3}g. \quad (2.123)$$

Dobbiamo notare che con questa definizione dell'ipercarica otteniamo per l'angolo di mescolamento debole il valore:

$$\sin^2 \theta_w = \frac{g_Y^2}{g_Y^2 + g^2} = \frac{3}{4}, \quad (2.124)$$

fenomenologicamente non accettabile ⁴.

Le trasformazioni di $SU(2)$ indotte sul campo

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_5^4 - iA_5^5 \\ 0 & 0 & A_5^6 - iA_5^7 \\ A_5^4 + iA_5^5 & A_5^6 + iA_5^7 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

sono dunque:

$$\begin{aligned} A_5 &\rightarrow A'_5 = e^{i\alpha \frac{\lambda_i}{2}} A_5 e^{-i\alpha \frac{\lambda_i}{2}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\alpha \frac{\sigma_i}{2}} \begin{pmatrix} A_5^4 - iA_5^5 \\ A_5^6 - iA_5^7 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ (A_5^4 + iA_5^5 & A_5^6 + iA_5^7) e^{-i\alpha \frac{\sigma_i}{2}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.126)$$

dove le σ sono le matrici di Pauli.

I campi scalari residui formano un *doppietto* sotto $SU(2)$. In particolare, con la definizione dell'ipercarica data in (2.122), risulta che la componente alta del doppietto è carica, mentre quella bassa è neutra:

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_5^4 - iA_5^5 \\ A_5^6 - iA_5^7 \end{pmatrix}. \quad (2.127)$$

Le trasformazioni di $SU(2)$ agiscono invece sui campi fermionici come:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow e^{i\alpha \frac{\lambda_i}{2}} \begin{pmatrix} u \\ d \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha \frac{\sigma_i}{2}} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.128)$$

Un fermione ψ nella rappresentazione fondamentale di $SU(3)_w$ contiene quindi:

- Un doppietto $\phi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$;
- Un singoletto χ .

Passiamo ora ad analizzare la rottura della simmetria elettrodebole

$$SU(2)_L \otimes U(1) \rightarrow U(1)_{em}. \quad (2.129)$$

⁴Per risolvere questo problema e riprodurre un valore realistico di $\sin^2 \theta_w$ si può introdurre un ulteriore gruppo di simmetria $U(1)'$, il cui bosone di gauge si disaccoppia dalla teoria di bassa energia grazie alla presenza di un'anomalia (si veda [24]). Nel seguito di questo lavoro il problema verrà trascurato.

Come abbiamo detto si vuole realizzare questa rottura di simmetria imponendo condizioni al contorno twistate sui campi. Poichè sono presenti simultaneamente twist non banali e una proiezione di orbifold, gli operatori di twist T devono soddisfare la condizione di consistenza:

$$TPT = P. \quad (2.130)$$

La forma più generale di T che soddisfa questa condizione è:

$$T = e^{2\pi i \vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}} = e^{2\pi i (\alpha_4 \lambda_4 + \alpha_5 \lambda_5 + \alpha_6 \lambda_6 + \alpha_7 \lambda_7)}. \quad (2.131)$$

Le condizioni al contorno sui campi sono date in presenza del twist (2.131) da:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y + 2\pi R) &= T\psi(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y + 2\pi R) &= TA_M(x^\mu, y)T^{-1}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Una soluzione alla (2.132) è

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y) &= e^{i(\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}) \frac{y}{R}} \tilde{\psi}(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y) &= e^{i(\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}) \frac{y}{R}} \tilde{A}_M(x^\mu, y) e^{-i(\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}) \frac{y}{R}}, \end{aligned} \quad (2.133)$$

con $\tilde{\psi}$ e $\tilde{A}_M$ campi periodici.

Vogliamo però descrivere la rottura di simmetria seguendo la rappresentazione di Hosotani, nella quale è più diretta la procedura per ricavare lo spettro di massa della teoria dopo la rottura di simmetria.

Per passare alla rappresentazione di Hosotani operiamo una trasformazione di gauge con parametri non periodici,

$$\Omega = e^{-i(\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}) \frac{y}{R}}, \quad (2.134)$$

il cui effetto è quello di eliminare i twist e di introdurre valori d'aspettazione nel vuoto non triviali per i campi di gauge. Il risultato della trasformazione (2.134) sui campi è:

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu, y) &\rightarrow \tilde{\psi}(x^\mu, y) \\ A_M(x^\mu, y) &\rightarrow \tilde{A}_M(x^\mu, y) + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}}{gR}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Nella sua forma generale questa trasformazione induce un vev per tutti i campi scalari sulle brane che compongono il doppietto H . Per rompere la simmetria elettrodebole in modo che la simmetria residua conservi la carica

elettrica (e sia quindi proprio $U(1)_{em}$), dobbiamo orientare lo stato di vuoto lungo la componente neutra del doppietto. Questo può essere fatto senza perdere generalità utilizzando una trasformazione di $SU(2)$; inoltre, si può operare un'ulteriore trasformazione $U(1)$ in modo da orientare il vev $\langle A_5 \rangle$ solo lungo λ_7 .

La forma che il vev assume in seguito a queste trasformazioni è:

$$\langle A_5 \rangle = \frac{2\alpha}{gR} \delta_{a,7}. \quad (2.136)$$

Possiamo ora ricavare lo spettro di massa fisico della teoria compattificata.

Le masse dei fermioni si ricavano a partire dal termine di Lagrangiana pentadimensionale

$$\bar{\psi} \gamma^5 (\partial_y - ig \langle A_5 \rangle) \psi \quad (2.137)$$

con i seguenti passaggi:

1. Si sostituisce ai campi la loro espansione in modi di Kaluza-Klein;
2. Si applica la trasformazione di fase globale

$$\psi \rightarrow e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} \psi \quad (2.138)$$

per rendere i termini di massa reali;

3. si effettua l'integrazione su y .

Seguendo questi passaggi si ottiene nella Lagrangiana effettiva il termine di massa per i fermioni

$$\mathcal{L}_\Psi^{eff} = \bar{\Psi}(x^\mu) M_\Psi \Psi(x^\mu). \quad (2.139)$$

La matrice di massa M_Ψ non diagonale è data da:

$$M_\psi = \begin{pmatrix} \frac{n}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{R} & \frac{\alpha}{R} \\ 0 & \frac{\alpha}{R} & \frac{n}{R} \end{pmatrix}. \quad (2.140)$$

Diagonalizzando la matrice si ottengono gli autovalori:

$$\frac{n}{R}, \quad \frac{n - \alpha}{R}, \quad \frac{n + \alpha}{R}. \quad (2.141)$$

Le masse dei campi di gauge si ricavano invece a partire dal termine della Lagrangiana pentadimensionale

$$-\frac{1}{2} F_{5\mu} F^{5\mu} \quad (2.142)$$

con i seguenti passaggi:

1. Si sostituisce ai campi la loro espansione in modi di Kaluza-Klein;
2. si sostituisce al vev di A_5 il valore (2.136);
3. si effettua l'integrazione su y .

Seguendo questi passaggi si ricava nella Lagrangiana della teoria effettiva il termine di massa

$$\mathcal{L}_A^{eff} = A_\mu^A(x^\mu) M_{AB}^2 A_\mu^B(x^\mu). \quad (2.143)$$

La matrice di massa quadra non diagonale M_{AB}^2 è data da⁵:

$$M_A^2 = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} n^2 + \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 2n\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 + \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 2n\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 + 4\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & -4n\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2n\alpha & 0 & 0 & 0 & n^2 + 4\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2n\alpha & 0 & 0 & 0 & n^2 + \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4n\alpha & 0 & 0 & 0 & n^2 + \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}. \quad (2.144)$$

Diagonalizzando la matrice di massa troviamo gli autovalori:

$$\begin{aligned} & \frac{n}{R}, \quad \frac{n}{R}, \quad \frac{n-2\alpha}{R}, \quad \frac{n+2\alpha}{R}, \\ & \frac{n-\alpha}{R}, \quad \frac{n-\alpha}{R}, \quad \frac{n+\alpha}{R}, \quad \frac{n+\alpha}{R}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Come possiamo vedere dalla (2.121), solo quattro di questi campi hanno modi zero.

Se compiamo le identificazioni

$$\begin{aligned} W_\mu^a &= A_\mu^{a0} \quad \text{con } a = 1, 2, 3 \\ B_\mu &= A_\mu^{80}, \end{aligned} \quad (2.146)$$

possiamo definire il fotone e i bosoni Z e W come:

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{10} \pm iA_\mu^{20}) \\ Z_\mu &= A_\mu^{\bar{3}0} \\ A_\mu^\gamma &= A_\mu^{\bar{8}0}. \end{aligned} \quad (2.147)$$

⁵La (2.144) è ricavata nella base in cui utilizziamo al posto di λ_3 e λ_8 le loro combinazioni $\tilde{\lambda}_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8)$ e $\tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8)$.

Nelle (2.147) abbiamo utilizzato il valore dell'angolo di mescolamento debole ricavato nella (2.124) e abbiamo utilizzato l'apice 0 per indicare i modi zero. Lo spettro dei modi zero è quindi costituito dai campi $W^\pm$, Z^0 , γ . Dalla matrice (2.144) si ottengono le loro masse:

$$m_W = \frac{\alpha}{R} \quad (2.148)$$

$$m_Z = \frac{2\alpha}{R} \quad (2.149)$$

$$m_\gamma = 0. \quad (2.150)$$

Capitolo 3

Modelli di unificazione gauge-Higgs in 6 dimensioni

In questo capitolo illustreremo l'estensione al caso esadimensionale dei modelli di unificazione gauge-Higgs. In sei dimensioni si ha una classe di modelli molto più ricca che in cinque dimensioni, dove esiste un solo tipo di orbifold, perchè è possibile applicare una più vasta gamma di simmetrie discrete allo spazio compatto T^2 . Di conseguenza la matematica necessaria per descriverli diventa più complessa, e si hanno anche nuovi effetti non presenti nel più semplice caso pentadimensionale.

Analizzeremo nel dettaglio tutti i possibili modelli con unificazione gauge-Higgs in uno spazio tempo di tipo $M_4 \times T^2/\mathbb{Z}_N$, cioè tutti gli orbifold costruiti a partire da un toro bidimensionale. Vedremo che questi modelli hanno delle caratteristiche comuni: in particolare, a differenza del caso pentadimensionale $S^1/\mathbb{Z}_2$ in tutti questi modelli è presente un accoppiamento quartico nel settore scalare. Questo suggerisce che si riescano a superare i limiti dei modelli in cinque dimensioni – nei quali non si riescono a riprodurre valori fenomenologicamente accettabili per la massa del campo di Higgs – e costituisce il motivo d'interesse principale nell'estendere il numero di dimensioni dello spazio-tempo da cinque a sei.

Mostriamo poi che ci sono differenze sostanziali tra i modelli costruiti sulla simmetria discreta $\mathbb{Z}_2$, nei quali è possibile ottenere solo modelli con due doppietti di Higgs, e quelli costruiti su $\mathbb{Z}_{3,4,6}$ nei quali è possibile ottenere uno spettro minimale con un solo campo scalare. In quest'ultimo caso si ottengono effettivamente predizioni per la massa del campo di Higgs “model independent” e perfettamente compatibili con i più recenti dati sperimentali.

Analizzando con più attenzione i termini di Lagrangiana localizzati, compatibili con le simmetrie ai punti fissi, si nota che alcuni di questi termini,

detti “tadpoli”, possono dar luogo a nuove divergenze di tipo quadratico, che in questo caso non sono protette dalla simmetria di gauge nel bulk.

Tratteremo dettagliatamente la questione dei tadpoli esponendo i risultati presenti in letteratura sia dal punto di vista del calcolo esplicito, sia da quello delle simmetrie della teoria, e giungeremo alla conclusione che l’unico caso in cui si può avere una cancellazione di questi termini in uno spazio tempo piatto a sei dimensioni è, per un’appropriata scelta del contenuto fermionico, quello dell’orbifold $T_2/\mathbb{Z}_2$.

3.1 Caratteristiche generali dei modelli in 6 dimensioni

Prima di addentrarci nei dettagli matematici relativi alla costruzione di modelli in sei dimensioni, vogliamo descrivere qualitativamente la principale caratteristica che differenzia i modelli esadimensionali da quelli pentadimensionali e che li rende particolarmente interessanti dal punto di vista del model-building, nonostante siano notevolmente più complessi da trattare.

Nei caso di costruzioni che sfruttano l’unificazione gauge-Higgs in uno spazio-tempo a cinque dimensioni, come ad esempio quella illustrata nel § 2.4.1, il potenziale effettivo per la Wilson line, ovvero per il campo di Higgs, è nullo a livello albero. Come conseguenza si ha una predizione per la massa del campo di Higgs notevolmente inferiore ai limiti sperimentali (per i dettagli del calcolo del potenziale effettivo in cinque dimensioni si rimanda alla referenza [25]). Questo è dovuto al fatto che, consistentemente con l’identificazione del campo di Higgs con la componente interna dei campi di gauge nel bulk, sono ammessi nel potenziale effettivo solo termini gauge-invarianti. I primi contributi non nulli al potenziale sono quindi i termini di massa generati a un loop. Questi termini contengono un fattore di loop che sopprime notevolmente il valore della massa del campo di Higgs nella teoria effettiva. Questo fatto costituisce uno degli ostacoli maggiori che impediscono di costruire modelli fenomenologicamente realistici della rottura di simmetria elettrodebole introducendo una sola dimensione extra.

Cosa cambia estendendo a due il numero delle dimensioni extra? La Lagrangiana di Yang e Mills nel bulk è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Tr F_{MN}F^{MN}. \quad (3.1)$$

Questa contiene un termine

$$-\frac{g^2}{2} \sum_{i,j} tr[A_i, A_j]^2. \quad (3.2)$$

Nel caso di un'unica dimensione extra il termine della somma con $i, j \neq 0, \dots, 4$ è chiaramente nullo. Per $d = 2$ invece questo dà luogo a un termine quartico del tipo:

$$V_0 = \lambda(H^\dagger H)^2. \quad (3.3)$$

La presenza di questo potenziale a livello albero, come vedremo nel dettaglio in seguito, in alcune circostanze può dare un notevole contributo alla massa del campo di Higgs.

3.2 Classificazione delle simmetrie discrete su T^2

Iniziamo la trattazione dei modelli di unificazione gauge-Higgs in sei dimensioni [26] classificando tutte le possibili simmetrie discrete $\mathbb{Z}_N$ tramite le quali si può costruire un orbifold a partire da un toro bidimensionale T^2 [27]. Discuteremo poi l'effetto che queste simmetrie hanno sulla rottura del gruppo di simmetria di bulk $\mathcal{G}$ e di conseguenza sulla fisica a bassa energia.

Consideriamo una teoria di gauge in sei dimensioni compattificata su un orbifold $T^2/\mathbb{Z}_N$. Il toro bidimensionale può essere espresso in termini di tre parametri reali: due raggi di compattificazione R_1 e R_2 e un angolo θ . Il toro è definito nel piano mediante le identificazioni

$$\begin{cases} y^1 \equiv y^1 + n \, 2\pi R_1 + m \, 2\pi R_2 \cos \theta \\ y^2 \equiv y^2 + m \, 2\pi R_2 \sin \theta \end{cases}, \quad (3.4)$$

per ogni valore intero di m e n .

Risulta particolarmente pratico lavorare in coordinate complesse:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y^1 + iy^2), \\ \bar{z} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y^1 - iy^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

In questa base le componenti della metrica nel settore $z, \bar{z}$ sono date da $g_{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = -1$. Il tensore metrico completo è dato quindi da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Definito il parametro modulare

$$U = \frac{R_2}{R_1} e^{i\theta}, \quad (3.7)$$

e chiamato $R \equiv R_1$, il reticolo di definizione del toro si riscrive nel piano complesso come

$$z \equiv z + (m + nU) \frac{2\pi R}{\sqrt{2}}. \quad (3.8)$$

Le simmetrie discrete mediante le quali si può costruire un'orbifold partendo dal toro corrispondono a tutte le possibili simmetrie cristallografiche $\mathbb{Z}_N$ di un reticolo bidimensionale: queste esistono solo per $N = 2$ con U arbitrario, o per $N = 3, 4, 6$ con U fissato al valore $U = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. L'azione del generatore k del gruppo di simmetria discreta $\mathbb{Z}_N$ sulle coordinate del toro¹ è data da una rotazione di $\frac{2\pi}{N}$:

$$z \rightarrow \tau z, \quad (3.9)$$

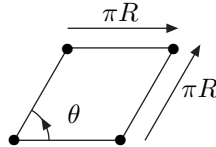
con $\tau = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

Ogni gruppo di simmetria $\mathbb{Z}_N$ ha elementi k^l con $l = 0, \dots, N-1$, ognuno dei quali lascia fissi punti diversi; si possono quindi distinguere diversi settori caratterizzati da diversi valori di l . Bisogna tuttavia notare che, poiché k^{N-l} è l'elemento inverso di k^l , i punti fissi nei settori l e $N-l$ sono gli stessi. Il numero di punti fissi nel settore l -esimo è dato da:

$$N_l = \left[2 \sin \left(\frac{\pi l}{N} \right) \right]^2. \quad (3.10)$$

Inoltre il settore $l = 0$ è triviale e non presenta punti fissi. Quindi i settori fisicamente rilevanti si possono indicare con $l = 1, \dots, [N/2]$, dove $[\dots]$ indica la parte intera.

Facciamo un esempio concreto: nel caso di $T^2/\mathbb{Z}_2$ ci sono quattro punti fissi associati all'unico elemento non banale del gruppo:



¹Indichiamo qui l'azione dell'orbifold sulle coordinate con τ , mentre nel capitolo precedente la indicavamo con ζ . Ciò è dovuto alla scelta di uniformarci alla notazione utilizzata in letteratura nel caso esadimensionale.

La forma più generale che una Lagrangiana può assumere in questo tipo di modelli è la somma di un contributo di bulk e di una serie di contributi localizzati ai punti fissi dell'orbifold. Essa si può scrivere come:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \sum_{l=1}^{[N/2]} \sum_{i_l=1}^{N_l} \delta^{(2)}(z - z_{i_l}) \mathcal{L}_{4,i_l}. \quad (3.11)$$

Nel caso in cui, come discuteremo nel § 3.3, l'azione dell'orbifold è associata a una rottura di simmetria di gauge, la Lagrangiana di bulk deve essere invariante sotto la simmetria di gauge completa $\mathcal{G}$, mentre i contributi localizzati ai punti fissi dell'orbifold devono essere invarianti solo sotto le simmetrie residue sulle brane, appartenenti al gruppo $\mathcal{H}$.

I termini localizzati non sono tuttavia tutti indipendenti: dal momento che la Lagrangiana deve essere invariante sotto le trasformazioni prodotte dai generatori della simmetria discreta, e questi ultimi agiscono in maniera non triviale su alcuni dei punti fissi, ci saranno in generale alcune condizioni che i termini di Lagrangiana localizzati devono rispettare. Inoltre l'orbifold è definito come un reticolo, e di conseguenza presenta una simmetria traslazionale discreta che mappa un punto fisso sotto un elemento k del gruppo in un altro punto fisso; questo implica che i termini $\mathcal{L}_{4,i_l}$ sono tutti uguali tra loro a l fissato, e quindi ci sono solo $[N/2]$ termini indipendenti.

Nel caso di $\mathbb{Z}_4$ e $\mathbb{Z}_6$ inoltre ci sono dei punti che sono fissi sotto l'azione di alcuni elementi del gruppo k^l ma non sotto l'azione di altri elementi del gruppo, i quali hanno però l'effetto di scambiarli tra di loro.

3.3 Rottura di simmetria

Vogliamo estendere ora al caso $T^2/\mathbb{Z}_N$ il meccanismo illustrato nel capitolo precedente tramite il quale si rompe la simmetria di gauge mediante l'azione dell'orbifold. Studieremo concretamente il caso della rottura della simmetria di bulk $\mathcal{G} = SU(3)_w$ alla simmetria $\mathcal{H} = SU(2) \otimes U(1)$ sulle brane ²:

$$SU(3)_w \xrightarrow{\mathbb{Z}_N} SU(2) \otimes U(1). \quad (3.12)$$

Il gruppo $SU(3)_w$ è il gruppo di dimensione minore che contiene i generatori di $SU(2) \otimes U(1)$ e quindi rappresenta la configurazione più semplice che permette di realizzare l'unificazione gauge-Higgs. I generatori di $SU(3)_w$ che corrispondono ai generatori della simmetria residua dopo la rottura $SU(2) \otimes U(1)$ sono:

$$t^a = t^{1,2,3} \text{ e } t^8. \quad (3.13)$$

²Per lo studio della rottura di simmetria con gruppi $\mathcal{G}$ diversi da $SU(3)_w$ si veda [21]

I generatori corrispondenti alle simmetrie rotte dalla proiezione di orbifold sono invece:

$$t^{\hat{a}} = t^{4,5,6,7}. \quad (3.14)$$

Questi ultimi possono essere più convenientemente riespressi nella base degli operatori di innalzamento e abbassamento:

$$\begin{aligned} t^{\pm 1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t^4 \pm it^5), \\ t^{\pm 2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t^6 \pm it^7). \end{aligned} \quad (3.15)$$

In questa base i generatori soddisfano le relazioni:

$$Tr[t^{+i}t^{-j}] = \delta_{ij}, \quad Tr[t^i t^j] = 0 \quad \text{con } i, j = 1, 2. \quad (3.16)$$

L'azione dell'orbifold nel settore di gauge è costituita da una matrice P , tale che $P^N = 1$. Nei casi che siamo interessati a considerare, in cui l'azione dell'orbifold è un automorfismo interno del gruppo di gauge $\mathcal{G}$ si avrà che, a meno di un fattore di fase per i campi di materia, $P \in \mathcal{G}$. La matrice di proiezione P si può esprimere nella maniera più generale come:

$$P = \tau^{2n_p(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}t^8)} = \begin{pmatrix} \tau^{n_p} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{n_p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Questa matrice può essere opportunamente generalizzata ad un campo in una generica rappresentazione $\mathcal{R}$ del gruppo $\mathcal{G} = SU(3)_w$. In questo caso la (3.17) diventa:

$$P_{\mathcal{R}} = \tau^{2n_p(\frac{n_{\mathcal{R}}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}t_{\mathcal{R}}^8)}, \quad (3.18)$$

dove $t_{\mathcal{R}}^8$ è il generatore t^8 nella rappresentazione $\mathcal{R}$, e $n_{\mathcal{R}}$ è un numero intero tale che

$$P_{\mathcal{R}}^N = 1. \quad (3.19)$$

Il valore di $n_{\mathcal{R}}$ per le rappresentazioni rilevanti è dato in Tabella 3.1. Bisogna inoltre notare che il generatore canonicamente normalizzato della simmetria $U(1)$ che sopravvive alla proiezione è dato da

$$Q_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{3}}t_{\mathcal{R}}^8. \quad (3.20)$$

L'azione della matrice di proiezione su una componente $|q\rangle$ con carica q sotto il gruppo $U(1)$ risultante dalla decomposizione $SU(3)_w \rightarrow SU(2) \otimes U(1)$ si riduce a una rotazione di una fase:

$\mathcal{R}$	Decomposizione di $\mathcal{R}$	$n_{\mathcal{R}}$
3	$\mathbf{2}_{\frac{1}{6}} \oplus \mathbf{1}_{-\frac{1}{3}}$	1
6	$\mathbf{3}_{\frac{1}{3}} \oplus \mathbf{2}_{-\frac{1}{6}} \oplus \mathbf{1}_{-\frac{2}{3}}$	2
8	$\mathbf{3}_0 \oplus \mathbf{2}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathbf{2}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathbf{1}_0$	0
10	$\mathbf{4}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathbf{3}_0 \oplus \mathbf{2}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathbf{1}_{-1}$	3

Tabella 3.1: Decomposizione delle principali rappresentazioni di $SU(3)_w$.

$$Q_{\mathcal{R}}|q\rangle = \tau^{2n_p(\frac{n_{\mathcal{R}}}{3}+q)}|q\rangle. \quad (3.21)$$

L'azione dell'orbifold sugli indici di Lorentz è invece legata alla decomposizione del gruppo di Lorentz esadimensionale nel prodotto del gruppo di Lorentz quadridimensionale e del gruppo delle rotazioni interne:

$$SO(1, 5) \rightarrow SO(1, 3) \otimes SO(2). \quad (3.22)$$

L'azione geometrica dell'orbifold è data dalla matrice di rotazione di Lorentz

$$R_s = \tau^s, \quad (3.23)$$

dove s è la carica del campo sotto le rotazioni interne.

Il prodotto della parte di gauge e geometrica della proiezione definisce l'azione del gruppo di orbifold $\mathbb{Z}_N$ a meno di una fase moltiplicativa arbitraria, che deve essere scelta in modo tale da rendere triviale l'azione di N trasformazioni del gruppo consecutive. Le condizioni al contorno per un qualunque campo fermionico o bosonico in una rappresentazione $\mathcal{R}$ del gruppo $SU(3)_w$ sono date nella maniera più generale possibile da:

$$\Phi(\tau z) = g_{B,F} R_s P_{\mathcal{R}} \Phi(z). \quad (3.24)$$

Dal momento che si ha $R_s^N = 1$ per i bosoni e $R_s^N = -1$ per i fermioni si vede che le fasi devono soddisfare, rispettivamente, le condizioni:

$$g_B^N = 1, \quad g_F^N = -1. \quad (3.25)$$

È quindi possibile ridefinire queste fasi come

$$g_B = g, \quad g_F = g\tau^{\frac{1}{2}}, \quad (3.26)$$

dove g è in entrambi i casi una radice N -esima dell'unità. Si vede quindi che per il caso $\mathbb{Z}_N$ ci sono N possibili condizioni al contorno, corrispondenti alle N possibili scelte di g , che sono la generalizzazione dei campi pari e dispari presenti quando il gruppo di orbifold è $\mathbb{Z}_2$.

3.3.1 Funzioni d'onda e spettro

Vediamo come si generalizza la costruzione di funzioni d'onda pari e dispari al caso $\mathbb{Z}_N$ e qual'è lo spettro di massa dei modi di Kaluza-Klein corrispondenti. Per costruire le funzioni d'onda è conveniente introdurre due nuove coordinate reali w_1 e w_2 che siano allineate al reticolo del toro, definito dal parametro:

$$U = U_1 + iU_2. \quad (3.27)$$

Queste coordinate hanno la utile proprietà di essere indipendentemente periodiche, con periodo $2\pi R$. In funzione di queste nuove coordinate le coordinate complesse si esprimono come:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 + U w_2). \quad (3.28)$$

Nel caso di $N = 3, 4, 6$ l'azione della simmetria $\mathbb{Z}_N$ sul generico punto del toro, espresso nelle nuove coordinate, è:

$$(w_1, w_2) \xrightarrow{\mathbb{Z}_N} (-w_2, w_1 + \tau_1 w_2) \quad (3.29)$$

(dove τ_1 e τ_2 sono rispettivamente parte reale e immaginaria di τ). Nel caso di $\mathbb{Z}_2$ si ha invece

$$(w_1, w_2) \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \tau(w_1, w_2) \equiv (-w_1, -w_2). \quad (3.30)$$

L'azione della simmetria $\mathbb{Z}_2$ si riduce quindi, analogamente al più familiare caso pentadimensionale, all'inversione.

È conveniente esprimere le trasformazioni indotte da $\mathbb{Z}_N$ sulle coordinate in notazione matriciale:

$$\vec{w} \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} Z_N^t \vec{w}. \quad (3.31)$$

La matrice Z_N è data da:

$$Z_{N \neq 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

In queste coordinate, la base di Fourier di funzioni periodiche sul toro è costituita dalle ordinarie funzioni esponenziali definite, a meno della normalizzazione, da:

$$f_{\vec{n}}(\vec{w}) = e^{i \frac{\vec{n}}{R} \cdot \vec{w}}. \quad (3.33)$$

Riespresse in funzione delle variabili complesse $z, \bar{z}$ e correttamente normalizzate, queste funzioni si esprimono come

$$f_{\vec{n}}(z) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_{\vec{n}} z - \bar{\lambda}_{\vec{n}} \bar{z})}, \quad (3.34)$$

dove V è il volume del toro e

$$\lambda_{\vec{n}} = \frac{n_2 - n_1 \bar{U}}{U_2 R}, \quad \bar{\lambda}_{\vec{n}} = \frac{n_2 - n_1 U}{U_2 R}. \quad (3.35)$$

L'azione del twist $\mathbb{Z}_N$ su queste funzioni e sui coefficienti λ è:

$$f_{\vec{n}}(\tau^k z) = f_{Z_N^k \vec{n}}(z), \quad (3.36)$$

$$\lambda_{Z_N^k \vec{n}} = \tau^k \lambda_{\vec{n}}. \quad (3.37)$$

A partire da questa base di funzioni, si possono costruire sul toro funzioni d'onda covarianti sotto l'azione di $\mathbb{Z}_N$. Queste sono date da

$$h_{\vec{n}}^g(z) = \frac{1}{(N)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta_{\vec{n}, \vec{0}}}} \sum_{k=0}^{N-1} g^{-k} f_{Z_N^k \vec{n}}(z), \quad (3.38)$$

dove g è la fase definita in (3.26). Si può vedere come al variare di g le funzioni h rispettino le varie “parità” possibili su $T^2/\mathbb{Z}_N$. Dalla (3.36) si vede infatti che le h soddisfano condizioni al contorno twistate ³

$$h_{\vec{n}}^g(\tau z) = g h_{\vec{n}}^g(z). \quad (3.39)$$

Si verifica facilmente che anche queste funzioni sono ortonormali rispetto ai modi di KK. Esse non sono tuttavia tutte indipendenti: quelle i cui vettori di modo sono connessi dall'azione dell'orbifold sono infatti uguali a meno di una fase

$$h_{Z_N^k \vec{n}}^g(z) = g^k h_{\vec{n}}^g(z). \quad (3.40)$$

Questo corrisponde al fatto che i vettori di modo di Kaluza-Klein non sono tutti indipendenti ma si suddividono in N domini fondamentali, ognuno dei quali contiene separatamente tutte le configurazioni fisiche distinte. Questi domini vengono trasformati uno nell'altro dall'azione della simmetria discreta sui vettori di modo: per $N \neq 2$ questo corrisponde a una rotazione di fase τ che manda $(m, n) \rightarrow (-m + \tau n)$. Questo significa che lo spazio dei vettori può essere diviso nell'origine, lasciata fissa da $\mathbb{Z}_N$, ed N settori D_k , definiti da

$$D_k = \{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 | (Z_N^k \vec{n})_1 < 0, (Z_N^k \vec{n})_2 \geq 0\}. \quad (3.41)$$

Nel caso di $\mathbb{Z}_2$ i due domini fondamentali sono invece:

$$\begin{aligned} D_0 &= \{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 | n_1 > 0 \oplus (n_1 = 0, n_2 > 0)\}, \\ D_1 &= \{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 | n_1 < 0 \oplus (n_1 = 0, n_2 < 0)\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

³Col termine *twistato* indichiamo in generale condizioni al contorno non triviali sotto una trasformazione discreta.

Portando avanti l'analogia col più intuitivo caso pentadimensionale, la suddivisione dei vettori di modo in domini corrisponde al quello che avviene in $D = 5$ quando si passa dalla base delle funzioni periodiche (esponenziali) alla base delle funzioni di parità definita sul segmento (seni e coseni). Dalle relazioni

$$\cos(nx) \propto e^{inx} + e^{-inx}, \quad \sin(nx) \propto e^{inx} - e^{-inx}, \quad (3.43)$$

si vede chiaramente che per contare una sola volta tutti i gradi di libertà fisici dobbiamo restringere la somma agli n positivi.

Tutte le funzioni d'onda indipendenti per i campi si ottengono quindi prendendo $\vec{n} \in D_0$ in (3.38).

Una volta definita la base delle funzioni ortonormali sullo spazio compatto, si può scrivere l'espansione in modi di Kaluza-Klein di un generico campo ϕ con condizioni al contorno twistate

$$\phi^g(\tau z) = g\phi^g(z) \quad (3.44)$$

come

$$\phi^g(z) = \delta_{g,1} \phi_0^1(x^\mu) h_0^1(z) + \sum_{\vec{n} \in D_0} \phi_{\vec{n}}^g(x^\mu) h_{\vec{n}}^g(z). \quad (3.45)$$

La massa del modo $\vec{n}$ di Kaluza-Klein è data da:

$$m_{\vec{n}}^2 = |\lambda_{\vec{n}}|^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{n_1^2}{R_1^2} + \frac{n_2^2}{R_2^2} - 2 \cos \theta \frac{n_1 n_2}{R_1 R_2} \right). \quad (3.46)$$

3.3.2 Campi di gauge

I campi esadimensionali A_M trasformano come vettori sotto rotazioni di Lorentz esadimensionali $SO(1, 5)$, ed appartengono alla rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge $\mathcal{G} = SU(3)_w$. In coordinate complesse la decomposizione $SO(1, 5) \rightarrow SO(1, 3) \otimes SO(2)$ dà un campo vettoriale A_μ con carica $s = 0$ e due scalari A_z e $A_{\bar{z}}$ con carica $s = -1$ e $s = 1$.

La parte di gauge del twist è diagonale nella base degli operatori di innalzamento-abbassamento, in cui le componenti dei campi sono:

$$A_M^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_M^4 \mp i A_M^5), \quad A_M^{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_M^6 \mp i A_M^7). \quad (3.47)$$

Le condizioni al contorno delle varie componenti di A_M sono date dalle fasi seguenti:

$$\begin{array}{ll} A_\mu^a \rightarrow 1 & A_\mu^{\pm i} \rightarrow \tau^{\pm n_p} \\ A_z^a \rightarrow \tau^{-1} & A_z^{\pm i} \rightarrow \tau^{-1 \pm n_p} \\ A_{\bar{z}}^a \rightarrow \tau & A_{\bar{z}}^{\pm i} \rightarrow \tau^{1 \pm n_p} \end{array} . \quad (3.48)$$

Lo spettro dei modi zero consiste dunque in:

- i bosoni di gauge A_μ^a , nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge $\mathcal{H}$ residuo dopo la proiezione;
- i campi scalari A_z^{+i} e i loro coniugati $A_{\bar{z}}^{-i}$ che formano un doppietto di Higgs carico sotto il gruppo residuo, se $n_p = 1$ modulo N ;
- i campi scalari A_z^{-i} e i loro coniugati $A_{\bar{z}}^{+i}$ che formano un doppietto di Higgs carico sotto il gruppo residuo, se $n_p = -1$ modulo N .

La proiezione di orbifold agisce sulla rappresentazione aggiunta di $SU(3)_w$ mantenendo le componenti $\mathbf{3}_0$ e $\mathbf{1}_0$ per gli indici quadri-dimensionali, e un numero n e n_c di componenti $\mathbf{2}_{\frac{1}{2}}$ e $\mathbf{\bar{2}}_{-\frac{1}{2}}$ per gli indici interni, variabile in funzione di N e n_p (nel dominio fondamentale $n_p = 1, \dots, N-1$). Tutte le possibili costruzioni consistenti sono le seguenti:

$$(n, n_c) = (1, 1) : \text{ per } (N, n_p) = (2, 1) ; \quad (3.49)$$

$$(n, n_c) = (1, 0) : \text{ per } (N, n_p) = (3, 1), (4, 1), (6, 1) ; \quad (3.50)$$

$$(n, n_c) = (0, 1) : \text{ per } (N, n_p) = (3, 2), (4, 3), (6, 5) ; \quad (3.51)$$

$$(n, n_c) = (0, 0) : \text{ per } (N, n_p) = (4, 2), (6, 2), (6, 3), (6, 4) . \quad (3.52)$$

Si vede quindi come sia possibile ottenere mediante la compattificazione su orbifold le seguenti configurazioni di campi scalari, a seconda del gruppo di simmetria discreta K sul quale si costruisce l'orbifold:

1. due doppietti di Higgs con ipercarica opposta per $K = \mathbb{Z}_2$;
2. un singolo doppietto di Higgs con ipercarica $Y = \frac{1}{2}$ o $Y = -\frac{1}{2}$ per $K = \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$;
3. nessun campo di Higgs per $K = \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$.

3.3.3 Campi di materia

Nel caso $D = 6$, a differenza di quello $D = 5$, è possibile definire fermioni chirali (si veda l'app. D per i dettagli). Un fermione di Weyl esadimensionale $\psi_\pm$ di chiralità definita si decompone sotto $SO(1, 3) \otimes SO(2)$ in due fermioni chirali quadridimensionali con carica $s = \pm \frac{1}{2}$:

$$\psi_\pm \longrightarrow (\psi_{L,R})_{s=\frac{1}{2}} \oplus (\chi_{R,L})_{s=-\frac{1}{2}} . \quad (3.53)$$

Nella (3.53) l'indice $+$, $-$ indica la chiralità esadimensionale, L, R quella quadridimensionale. Si vede dunque dalla (3.24) che i due fermioni di opposta

chiralità sono twistati rispettivamente di un fattore g e $g\tau$, moltiplicato per la parte di gauge del twist.

In generale, un campo spinoriale esadimensionale $\psi_{\mathcal{R},\chi_6}$ di chiralità $\chi_6 = \pm 1$, che trasforma in una rappresentazione $\mathcal{R}$ del gruppo di gauge, genera due differenti spinori quadri-dimensionali ψ_{q,χ_4} con carica $U(1)$ q e chiralità $\chi_4 = \pm 1$. La fase da cui è twistata ognuna delle due componenti è

$$\psi_{\mathcal{R},\chi_6}(\tau z) = g\tau^{\frac{1-\chi_4\chi_6}{2}}\tau^{2n_p(\frac{n_{\mathcal{R}}}{3}+q)}\psi_{\mathcal{R},\chi_6}(z). \quad (3.54)$$

A seconda della scelta di g , differenti componenti possono avere modi zero non nulli.

Per quanto riguarda eventuali campi scalari fondamentali l'analisi è più semplice perché sono singoletti sotto le trasformazioni di Lorentz e quindi hanno $s = 0$. Il twist di un campo scalare $\phi_{\mathcal{R}}$ contiene solo la parte di gauge ed è dato da:

$$\phi_{\mathcal{R},q}(\tau z) = g\tau^{2n_p(\frac{n_{\mathcal{R}}}{3}+q)}. \quad (3.55)$$

Bisogna notare che c'è una corrispondenza tra il caso degli scalari e quello degli spinori, dal momento che la fase addizionale $\tau^{\frac{1-\chi_4\chi_6}{2}}$ è sempre una radice N -esima dell'unità e può quindi essere compensata da una differente scelta di g .

Si può facilmente notare che sia nel caso degli scalari che in quello dei fermioni il modo zero di una qualunque componente può essere sempre mantenuto nella proiezione per un'appropriata scelta della fase g .

3.4 Modelli con $N > 2$: il potenziale di Higgs e il problema dei tadpoli

Alla luce di quanto visto nel paragrafo precedente, gli orbifold più promettenti per la costruzione di modelli realistici sembrano essere quelli con $N > 2$, dove per un'opportuna scelta della matrice di proiezione di orbifold è possibile ottenere un solo doppietto di Higgs nello spettro dei modi zero. In questa classe di modelli quindi si ha, a bassa energia, esattamente lo spettro del Modello Standard, senza particelle aggiuntive.

Prima di analizzare la struttura del potenziale in questi modelli per vedere se effettivamente c'è un innalzamento della massa del campo di Higgs, dobbiamo notare un'importante differenza rispetto al caso pentadimensionale illustrato nel capitolo precedente. In cinque dimensioni infatti, dove lo spazio compatto è $S^1/\mathbb{Z}_2$, il vev del campo di Higgs corrisponde a un Wilson loop, che come abbiamo mostrato nel § 2.3.2 parametrizza una direzione

piatta del potenziale classico. Nei modelli in sei dimensioni con $N > 2$ il potenziale classico non ha direzioni piatte e quindi questa interpretazione non è più possibile; nelle teorie di gauge $SU(3)_w$ su $T^2/\mathbb{Z}_{N \neq 2}$, infatti, non esistono famiglie continue di soluzioni alle usuali condizioni di consistenza su orbifold per i Wilson loop. Nel caso $N = 2$, che è l'oggetto specifico di questo lavoro di tesi, la situazione è più complessa e ne rimandiamo l'analisi dettagliata al capitolo successivo.

Vediamo come si determina il potenziale classico V_{tree} in questi modelli con un singolo Higgs. La Lagrangiana della teoria completa esadimensionale è data da

$$\mathcal{L}_{6D} = -\frac{1}{2}tr F_{MN}^2, \quad (3.56)$$

dove il tensore F_{MN} è

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M - ig_6[A_M, A_N]. \quad (3.57)$$

La Lagrangiana per i modi zero $A_\mu^0, A_z^0, A_{\bar{z}}^0$ si ottiene compattificando le due dimensioni addizionali sull'orbifold ed è data da:

$$\mathcal{L}_{4D} = -\frac{1}{2}tr(F_{\mu\nu}^0)^2 + 2tr|D_\mu A_z^0|^2 - g_4^2 tr[A_z^0, A_{\bar{z}}^0]^2. \quad (3.58)$$

Nella (3.58) $g_4 = g_6/\sqrt{V}$ è l'accoppiamento di gauge della teoria quadridimensionale sotto la scala di compattificazione,

$$F_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0 - ig_4[A_\mu^0, A_\nu^0] \quad (3.59)$$

è l'intensità di campo dei bosoni di gauge a massa nulla e

$$D_\mu A_{z,\bar{z}}^0 = \partial_\mu A_{z,\bar{z}}^0 - ig_4[A_\mu^0, A_{z,\bar{z}}^0] \quad (3.60)$$

è la derivata covariante che agisce sul campo di Higgs. I quattro bosoni di gauge corrispondenti all'interazione debole e all'ipercarica sono identificati con le componenti del modo zero del campo A_μ associate ai generatori non rotti dall'orbifold ($a = 1, 2, 3, 8$):

$$A_{\mu a}^0 = W_{\mu a} \text{ per } a = 1, 2, 3 \quad A_{\mu 8}^0 = B_\mu. \quad (3.61)$$

Le componenti con indici quadridimensionali vettoriali del modo zero di A_M si possono quindi riscrivere come:

$$A_\mu^0 = \sum_a A_{\mu a}^0 t^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}B_\mu & \sqrt{2}W_\mu^+ & 0 \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}B_\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}B_\mu \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Le due componenti complesse del doppietto di Higgs sono invece identificate con le componenti del modo zero del campo A_z^0 associate ai generatori rotti dall'orbifold ($\hat{a} = \pm 1, \pm 2$):

$$\begin{aligned} h_u &= A_{z+1}^0, & h_d &= A_{z+2}^0, \\ h_u^* &= A_{\bar{z}-1}^0, & h_d^* &= A_{\bar{z}-2}^0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Le componenti interne del modo zero di A_M si possono quindi riscrivere come:

$$A_z^0 = \sum_i A_{z+i}^0 t^{+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_u \\ 0 & 0 & h_d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

$$A_{\bar{z}}^0 = \sum_i A_{\bar{z}-i}^0 t^{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ h_u^* & h_d^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

La Lagrangiana compattificata (3.58), espressa in termini di questi campi, diventa:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_W^{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4} (F_B^{\mu\nu})^2 + |(\partial_\mu - ig_4 W_{\mu a} \frac{\tau_a}{2} - ig_4 \frac{\tan \theta_W}{2} B_\mu) h|^2 - V_{tree}(h), \quad (3.66)$$

con

$$V_{tree}(h) = \frac{g_4^2}{2} |h|^4. \quad (3.67)$$

Si vede che il solo potenziale classico non è sufficiente a generare la rottura spontanea della simmetria elettrodebole. Per avere la rottura di simmetria bisogna tenere conto anche delle correzioni al potenziale date dalle fluttuazioni quantistiche. Considerando i termini dominanti il potenziale effettivo a un loop è dato da:

$$V_{1loop}(h) = -\mu^2 |h|^2 + \lambda |h|^4. \quad (3.68)$$

dove μ è generato radiativamente, mentre $\lambda = \frac{g^2}{2}$ è l'accoppiamento quartico già presente a livello albero in (3.67). Se $\mu^2 > 0$ si ha rottura di simmetria e il vev di h

$$\langle h \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

che minimizza il potenziale è dato da

$$v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.70)$$

Valgono le seguenti relazioni tra le masse e il vev di h :

$$m_H = \sqrt{2}\mu = v\sqrt{2\lambda} \quad (3.71)$$

$$m_W = \frac{1}{2}gv. \quad (3.72)$$

Dalle (3.71) e (3.72) si ricava il rapporto

$$\frac{m_H}{m_W} = 2, \quad (3.73)$$

che vale in maniera *indipendente dal modello*, cioè indipendente dal numero e dal tipo di campi materia con cui si vuole costruire uno specifico modello. Questo risultato sembra confermare l'ipotesi che l'estensione a sei dimensioni possa aprire la strada verso modelli realistici di rottura della simmetria elettrodebole nel contesto delle dimensioni extra, dal momento che la predizione per la massa dell'Higgs in un generico modello cade al centro del range di valori ammissibili, determinato sperimentalmente da un limite inferiore diretto e da uno superiore indiretto.

Tuttavia prima di trarre questa conclusione è necessario condurre un'attenta analisi della natura delle correzioni radiative. Bisogna verificare se anche nel caso esadimensionale la simmetria residua sulle brane è sufficiente a proibire termini di massa divergenti localizzati ai punti fissi, come abbiamo visto nel caso pentadimensionale. Schematizzando, possiamo classificare tutti gli operatori che generano correzioni radiative al potenziale classico (3.67) nella maniera seguente, ricordando che per costruzione *il potenziale effettivo quantistico può dipendere solo da quantità gauge-invarianti*:

- Operatori non locali: sono legati alle Wilson lines nello spazio interno e sono generati sempre con coefficienti finiti controllati dalla scala di compattificazione $\frac{1}{R}$;
- Operatori locali, potenzialmente divergenti. Ci sono due classi di operatori di questo tipo ammessi dall'invarianza di gauge:
 1. potenze pari di F_{MN} nel bulk;
 2. potenze arbitrarie di $F_{z\bar{z}}$ localizzate ai punti fissi.

Possiamo ripetere l'analisi del par. (2.4) generalizzandola al caso $D > 5$, per vedere se anche in questo caso le simmetrie residue sulle brane proibiscono tutti i termini potenzialmente divergenti [28]. La forma infinitesima delle trasformazioni di gauge nel bulk è:

$$\delta_{\mathcal{G}} A_M^A = \partial_M \xi^A + f^{ABC} \xi^B A_M^C. \quad (3.74)$$

La rottura di simmetria sulle brane avviene imponendo le appropriate condizioni di parità sui parametri di gauge⁴

$$\xi^A(x^\mu, -\vec{y}) = \Lambda^{AB} \xi^B(x^\mu, \vec{y}). \quad (3.75)$$

In particolare la rottura $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ avviene imponendo che gli ξ^a siano campi pari e gli $\xi^{\hat{a}}$ siano invece campi dispari.

I campi non nulli sulle brane si possono scrivere in forma generale come

$$\prod_{i=5}^D \partial_i^{n_i} \Phi|_{brana}, \quad (3.76)$$

con $n = \sum n_i$ pari (dispari) per campi pari (dispari).

La Lagrangiana effettiva quadridimensionale si scrive

$$\mathcal{L}_4^{eff} = \int d^d y [\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_4^{brana} \prod_f (\delta(\vec{y} - \vec{y}_f))]. \quad (3.77)$$

Il termine $\mathcal{L}_4^{brana}$ deve contenere tutti i termini ammessi dalla simmetria residua sulle brane, che se non sono già presenti a livello albero saranno generati dalle correzioni radiative.

Tra le trasformazioni di simmetria valide sulle brane ci sono sicuramente le trasformazioni di bulk (3.74) calcolate sulle brane dopo aver applicato l'azione dell'orbifold. Queste trasformazioni, che chiameremo δ_ξ , sono date da:

$$\delta_\xi(A_\mu^a) = \partial_\mu \xi^a + f^{abc} \xi^b A_\mu^c, \quad (3.78)$$

$$\delta_\xi(A_i^{\hat{a}}) = \partial_i \xi^{\hat{a}} + f^{\hat{a}b\hat{c}} \xi^b A_i^{\hat{c}}. \quad (3.79)$$

La simmetria residua sulle brane tuttavia è molto più ampia delle sole trasformazioni (3.78) e (3.79). Infatti c'è un numero infinito di campi indipendenti non nulli sulle brane dati da

$$\frac{\partial^{2k} A_\mu^a}{\partial^{2k} A_i^{\hat{a}}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^{2k+1} A_\mu^{\hat{a}}}{\partial^{2k+1} A_i^a}. \quad (3.80)$$

Ad essi corrisponde un numero infinito di parametri di trasformazione, anch'essi indotti dalla simmetria di bulk:

$$\partial^{2k} \xi^a \quad \text{e} \quad \partial^{2k+1} \xi^{\hat{a}}. \quad (3.81)$$

⁴con $\vec{y}$ indichiamo un generico sistema di coordinate in D dimensioni. In $D = 6$ potrebbero essere, ad esempio, le coordinate complesse.

Le regole di trasformazione di tutti questi campi si possono ricavare dalla (3.74); le prime due ad esempio sono:

$$\delta_\xi(\partial_j A_i^a) = \partial_j(\partial_i \xi^a) + f^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}(\partial_j \xi^{\hat{b}})A_i^{\hat{c}} + f^{abc}\xi^b(\partial_j A_i^c), \quad (3.82)$$

$$\delta_\xi(\partial_i A_\mu^{\hat{a}}) = \partial_\mu(\partial_i \xi^{\hat{a}}) + f^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}(\partial_i \xi^{\hat{b}})A_\mu^{\hat{c}} + f^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}\xi^b(\partial_i A_\mu^{\hat{c}}). \quad (3.83)$$

Tutte queste trasformazioni si possono dividere in maniera naturale in due classi $\delta_{\mathcal{H}}$ e $\delta_{\mathcal{K}}$, a seconda del parametro da cui dipendono:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{H}} & \rightarrow \{\xi^a\} \\ \delta_{\mathcal{K}} & \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \partial^{2k}\xi^a \\ \partial^{2k+1}\xi^{\hat{a}} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Le trasformazioni $\delta_{\mathcal{H}}$ sono le trasformazioni del gruppo di gauge residuo sulle brane $\mathcal{H}$. Si vede dalla forma delle (3.78), (3.79), (3.82) e (3.83) che, come ci si aspetta, i campi A_μ^a trasformano come bosoni di gauge di $\mathcal{H}$, mentre tutti gli altri campi trasformano o nell'aggiunta di $\mathcal{H}$

$$(T^a)_{bc} = if^{abc}, \quad (3.85)$$

o nella rappresentazione i cui generatori sono

$$(T^a)_{\hat{b}\hat{c}} = if^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}. \quad (3.86)$$

Le trasformazioni $\delta_{\mathcal{K}}$ sono invece delle trasformazioni locali ma non di gauge, che costituiscono la generalizzazione dell'invarianza locale sotto traslazioni del caso pentadimensionale (vedi § 2.4).

Dopo aver classificato le simmetrie presenti sulle brane, possiamo costruire la Lagrangiana più generale invariante sotto queste simmetrie nel modo seguente:

1. Per quanto riguarda i termini del tipo $(F_{MN}^A)^2$ la richiesta che il quadrato sia invariante sia sotto $\delta_{\mathcal{H}}$ che sotto $\delta_{\mathcal{K}}$, equivale a chiedere che F stesso sia *invariante sotto $\delta_{\mathcal{K}}$ e covariante sotto $\delta_{\mathcal{H}}$* .
2. Le intensità di campo F_{ij}^α dei fattori $U(1)$ presenti in $\mathcal{H}$ sono esse stesse invarianti e quindi compaiono nella Lagrangiana non al quadrato ma linearmente.

Partendo da questi due principi possiamo trarre le conclusioni seguenti:

- Il campo $A_i^{\hat{a}}$ è $\delta_{\mathcal{H}}$ -covariante ma non $\delta_{\mathcal{K}}$ -invariante. Un termine di massa diretto del tipo

$$A_i^{\hat{a}} M_{\hat{a}\hat{b}} A_j^{\hat{b}} \quad (3.87)$$

non può quindi apparire nell'azione effettiva quadridimensionale, analogamente a quanto accade in cinque dimensioni.

- Se però è presente in $\mathcal{H}$ un fattore $U(1)$ che non era già presente in $\mathcal{G}$, nella Lagrangiana comparirà un fattore ⁵

$$F_{ij}^\alpha = \partial_i A_j^\alpha - \partial_j A_i^\alpha - g f^{\alpha\hat{b}\hat{c}} A_i^{\hat{b}} A_j^{\hat{c}}, \quad (3.88)$$

che contiene un termine bilineare nei campi pari. La presenza di questo termine costituisce una differenza sostanziale rispetto al caso pentadimensionale: esso infatti è un operatore di dimensione due e quindi rinormalizzerà quadraticamente reintroducendo nella teoria effettiva quadridimensionale divergenze quadratiche che destabilizzano l'efficacia del meccanismo di unificazione gauge-Higgs.

Per la grande importanza che rivestono, questi operatori –detti “tadpoli”– saranno oggetto di una discussione approfondita nella prossima sezione.

- Altri termini $\mathcal{H}$ -covarianti e $\mathcal{K}$ -invarianti si trovano facilmente partendo dalle proprietà di trasformazione:

$$\delta_{\mathcal{H}} F_{\mu\nu}^a = -f^{abc} \xi^b F_{\mu\nu}^c, \quad \delta_{\mathcal{K}} F_{\mu\nu}^a = 0, \quad (3.89)$$

$$\delta_{\mathcal{H}} F_{i\mu}^{\hat{a}} = -f^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \xi^{\hat{b}} F_{i\mu}^{\hat{c}}, \quad \delta_{\mathcal{K}} F_{i\mu}^{\hat{a}} = 0, \quad (3.90)$$

$$\delta_{\mathcal{H}} F_{ij}^a = -f^{abc} \xi^b F_{ij}^c, \quad \delta_{\mathcal{K}} F_{ij}^a = 0. \quad (3.91)$$

Ulteriori termini invarianti con le proprietà di trasformazione richieste dalla simmetria residua possono essere costruiti a partire dalle derivate covarianti di questi operatori.

La Lagrangiana effettiva più generale invariante sotto le simmetrie residue sulle brane è data, a livello rinormalizzabile, da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{brana} = & -\frac{1}{4} \mathcal{Z}_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{c}}^{ij} F_{i\mu}^{\hat{a}} F_j^{\hat{c}\mu} - \frac{1}{4} \mathcal{Z}_{ab}^{ijkl} F_{ij}^a F_{kl}^b \\ & + \mathcal{Z}_{\alpha}^{ij} F_{ij}^{\alpha} + \mathcal{Z}_{\alpha}^{kl ij} D_k^{\alpha A} D_l^{AB} F_{ij}^B, \end{aligned} \quad (3.92)$$

dove i tensori $\mathcal{Z}$ devono essere proporzionali a oggetti invarianti sotto la simmetria geometrica del toro.

3.5 Tadpoli in $T^2/\mathbb{Z}_N$

Abbiamo visto che se il gruppo di gauge residuo sulle brane contiene dei fattori $U(1)$, allora per l'invarianza di gauge sono permesse interazioni localizzate lineari nell'intensità di campo F . Se inoltre i fattori $U(1)$ non erano

⁵Usiamo l'indice α per indicare i fattori $U(1)$ generati tramite la rottura di $\mathcal{G}$.

già contenuti nel gruppo di simmetria di bulk $\mathcal{G}$, allora queste interazioni contengono nella loro parte non abeliana un termine di massa per il campo di Higgs, che essendo perfettamente compatibile con tutte le simmetrie della teoria, reintroducono le divergenze quadratiche, la cui eliminazione costituiva la motivazione principale a costruire modelli basati sull'unificazione gauge-Higgs.

Nel caso di nostro interesse, cioè la rottura da parte dell'azione dell'orbifold di una simmetria $SU(3)_w$ di bulk nel gruppo di gauge del Modello Standard sulle brane, le condizioni per la presenza di tadpoli nell'azione effettiva 4-dimensionale sono verificate.

Vogliamo presentare qui i principali risultati ottenuti in letteratura sui tadpoli nei modelli di unificazione gauge-Higgs:

- Il calcolo esplicito, effettuato nella referenza [26], dei tadpoli in tutti gli orbifold esadimensionali volto ad accertare la possibilità di una eventuale cancellazione accidentale a un loop.
- L'individuazione di un ulteriore principio di simmetria (in questo caso non basato sulle simmetrie di gauge) che assicura la cancellazione dei tadpoli su certi tipi particolari di orbifold per un numero generico di dimensioni $D > 6$.

3.5.1 Calcolo dei tadpoli

Il termine che descrive i tadpoli nell'azione effettiva assume la forma, nella notazione del § 3.2:

$$\mathcal{L}_{\text{tad}} = -i \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{\mathcal{C}_k}{N_k} \sum_{i_k=1}^{N_k} \delta^{(2)}(z - z_{i_k}) F_{z\bar{z}}^8(z), \quad (3.93)$$

dove i $\mathcal{C}_k$ sono coefficienti reali di dimensione uno in massa e $F_{z\bar{z}}^8$ è l'intensità di campo del fattore $U(1)$ lasciato intatto dalla rottura di simmetria:

$$F_{z\bar{z}}^8 = \partial_z A_{\bar{z}}^8 - \partial_{\bar{z}} A_z^8 + g_6 f^{8bc} A_z^b A_{\bar{z}}^c. \quad (3.94)$$

I coefficienti $\mathcal{C}_k$ possono essere estratti dal calcolo della funzione a un punto dei modi KK di A_z^8 o dalla funzione a due punti dei modi zero del campo di Higgs. Utilizzando l'espansione in modi si può riscrivere la (3.93) come

$$\begin{aligned} \int d^2z \mathcal{L}_{\text{tad}} = & - \sum_{k=1}^{[N/2]} \mathcal{C}_k \left[\sum_{\vec{n}} \frac{1}{N_k} \sum_{i_k=1}^{N_k} f_{\vec{n}}(z_{i_k}) \left(p_{z,\vec{n}} A_{\bar{z},\vec{n}}^8 - p_{\bar{z},\vec{n}} A_{z,\vec{n}}^8 \right) \right. \\ & \left. + \frac{g_4}{\sqrt{V}} \left(i f^{8+i-j} \right) h_i h_j^\dagger \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.95)$$

dove i puntini rappresenteno i restanti accoppiamenti quadratici tra i modi eccitati dei campi di Higgs.

Utilizzando inoltre l'identità

$$\frac{1}{N_k} \sum_{i_k=1}^{N_k} f_{\vec{n}}(z_{i_k}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \delta_{(1-Z_N^k)^{-1}\vec{n} \in \mathbf{Z}^2}, \quad (3.96)$$

otteniamo la relazione che permette di collegare i coefficienti che compaiono in (3.93) al calcolo della funzione a un punto:

$$\langle A_{z,\vec{n}}^8 \rangle = i p_{\vec{z},\vec{n}} \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{\mathcal{C}_k}{\sqrt{V}} \delta_{(1-Z_N^k)^{-1}\vec{n} \in \mathbf{Z}^2}, \quad (3.97)$$

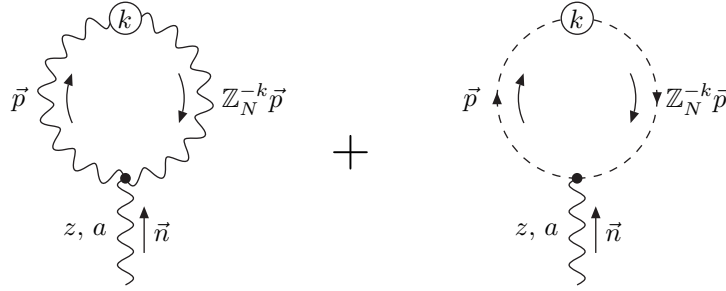


Figura 3.1: Il contributo di gauge e dei ghost alla funzione a un punto $\langle A_{z,\vec{n}}^a \rangle$.

Il calcolo esplicito della funzione a un punto, per i dettagli del quale rimandiamo alla referenza [26], fornisce il risultato

$$\langle A_{z,\vec{n}}^a \rangle = -g_4 D(\Lambda) \sum_{k=1}^{[N/2]} p_{\vec{z},\vec{n}} \delta_{(1-Z_N^k)^{-1}\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \text{Im } \xi_k^a + \dots, \quad (3.98)$$

dove

$$D(\Lambda) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{16\pi^2} \Lambda^2. \quad (3.99)$$

I puntini in (3.99) rappresentano eventuali divergenze logaritmiche e ulteriori correzioni sottodominanti. Gli ξ_k^a sono coefficienti numerici che dipendono dal campo che gira nel loop; essi sono ovviamente diversi da zero solo per $a = 8$ e sono legati ai coefficienti $\mathcal{C}_k$ da

$$\mathcal{C}_k = g_4 \sqrt{V} D(\Lambda) \text{Im } \xi_k^8. \quad (3.100)$$

Riportiamo i risultati del calcolo nelle tabelle seguenti: nella Tabella 3.2 compaiono i contributi ai coefficienti $\mathcal{C}_k$ da parte di fermioni di Weyl con tutti i possibili twist appartenenti alle prime rappresentazioni di $SU(3)_w$; nella Tabella 3.3 compare invece il contributo dei bosoni di gauge e dei ghost.

$\mathbb{Z}_2$	1	τ
$c_1(\mathbf{3})$	-4	4
$c_1(\mathbf{6})$	4	-4
$c_1(\mathbf{8})$	0	0
$c_1(\mathbf{10})$	-12	12

$\mathbb{Z}_3$	1	τ	τ^2
$c_1(\mathbf{3})$	-4	-4	8
$c_1(\mathbf{6})$	-20	16	4
$c_1(\mathbf{8})$	12	-24	12
$c_1(\mathbf{10})$	12	12	-24

$\mathbb{Z}_4$	1	τ	τ^2	τ^3
$c_1(\mathbf{3})$	0	-8	0	8
$c_1(\mathbf{6})$	-24	-16	24	16
$c_1(\mathbf{8})$	24	-24	-24	24
$c_1(\mathbf{10})$	-48	24	48	-24
$c_2(\mathbf{3})$	-4	4	-4	4
$c_2(\mathbf{6})$	4	-4	4	-4
$c_2(\mathbf{8})$	0	0	0	0
$c_2(\mathbf{10})$	-12	12	-12	12

$\mathbb{Z}_6$	1	τ	τ^2	τ^3	τ^4	τ^5
$c_1(\mathbf{3})$	4	-4	-8	-4	4	8
$c_1(\mathbf{6})$	-4	-32	-28	4	32	28
$c_1(\mathbf{8})$	36	0	-36	-36	0	36
$c_1(\mathbf{10})$	-60	-84	-24	60	84	24
$c_2(\mathbf{3})$	-4	-4	8	-4	-4	8
$c_2(\mathbf{6})$	-20	16	4	-20	16	4
$c_2(\mathbf{8})$	12	-24	12	12	-24	12
$c_2(\mathbf{10})$	12	12	-24	12	12	-24
$c_3(\mathbf{3})$	-4	4	-4	4	-4	4
$c_3(\mathbf{6})$	4	-4	4	-4	4	-4
$c_3(\mathbf{8})$	0	0	0	0	0	0
$c_3(\mathbf{10})$	-12	12	-12	12	-12	12

Tabella 3.2: Contributo dei fermioni ai coefficienti $\mathcal{C}_k$. La quantità riportata è $c_k = \sqrt{3} N \text{Im}[\xi_k^8]$. La proiezione considerata è sempre quella con $n_p = 1$.

Si vede da queste tabelle che nei modelli con $N > 2$ è impossibile ottenere una cancellazione a un loop di ogni coefficiente di tadpolo, per qualunque combinazione di rappresentazioni fermioniche.

Le uniche vie percorribili per costruire modelli di unificazione gauge-Higgs prive di divergenze in uno spazio tempo piatto a sei dimensioni sono dunque le seguenti:

1. Su $\mathbb{Z}_4$ sembra possibile (stando a quanto riportato nelle due tabelle) ottenere una cancellazione *globale* del tadpolo: per ottenerla bisogna però imporre condizioni abbastanza restrittive sul contenuto fermionico (ad esempio bisogna avere un numero dispari di fermioni). Questa

	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_6$
$c_1(\mathbf{G})$	0	-21	-36	-45
$c_2(\mathbf{G})$			0	-21
$c_3(\mathbf{G})$				0

Tabella 3.3: Contributo di gauge ai coefficienti $\mathcal{C}_k$. La quantità riportata è $c_k = \sqrt{3} N \text{Im}[\xi_k^8]$. La proiezione considerata è sempre quella con $n_p = 1$.

possibilità sembra quindi poco adatta per la costruzione di un modello realistico di rottura della simmetria elettrodebole.

2. Su $\mathbb{Z}_2$ è invece possibile ottenere una cancellazione *locale* del tadpolo per la scelta

$$N_f = N_s, \quad (3.101)$$

dove N_f è il numero di fermioni in rappresentazione fondamentale e N_s è il numero di fermioni in rappresentazione simmetrica. Un ulteriore motivo di interesse nei confronti di questa possibilità risiede nel fatto che in alcuni modelli recentemente apparsi in letteratura, nei quali si introduce una simmetria di sapore nel contesto delle teorie extra-dimensionali [24, 29], lo spettro fermionico richiesto per riprodurre la gerarchia di massa tra le varie famiglie contiene anche in quel caso un numero uguali di fondamentali e di simmetriche.

Lo studio approfondito della rottura di simmetria elettrodebole sull'orbifold $T^2/\mathbb{Z}_2$ in modelli con $N_f = N_s$ costituisce lo scopo di questo lavoro di tesi, e ne rimandiamo quindi la trattazione al capitolo successivo.

3.5.2 Tadpoli e simmetrie

Presentiamo un criterio (introdotto in [30]) che garantisce la cancellazione dei tadpoli in un numero generico di dimensioni ($T_d/\mathbb{Z}_N$) se alcune condizioni sono verificate. Questo criterio si basa ancora una volta su un principio di simmetria: in questo caso il gruppo di simmetria in questione è quello delle rotazioni interne sullo spazio compatto.

Su uno spazio di Riemann d -dimensionale non singolare (ad esempio il toro) è possibile definire in ogni punto uno spazio tangente sul quale agiscono le trasformazioni ortogonali del gruppo $SO(D)$. L'azione dell'orbifold su questo spazio rompe il gruppo delle rotazioni interne $SO(D)$ in un suo sottogruppo O_f ai punti fissi y_f . Se chiamiamo la simmetria che genera l'orbifold $\mathbb{K}$, ogni

punto fisso sarà lasciato invariante da un suo sottogruppo $\mathbb{K}_f$. Il gruppo $\mathbb{K}$ è in generale dato dal prodotto di un sottogruppo discreto di $SO(d)$ e da una traslazione appartenente al reticolo Λ su cui è definito il toro. L'azione di un suo elemento k sul generico punto y è data da

$$k \cdot y = P_k y + u, \quad (3.102)$$

dove $P_k \in SO(D)$ e $u \in \Lambda$. Analogamente a quanto accade per il gruppo di gauge, il sottogruppo delle rotazioni O_f residuo ai punti fissi è dato dai generatori di $SO(D)$ che commutano con l'azione dell'orbifold:

$$[O_f, P_{k_f}] = 0, \quad (3.103)$$

dove $k_f \in \mathbb{K}_f$.

Nel punto y_f possono essere localizzati solo operatori $\Phi_{\mathcal{R},s}$ invarianti sotto $\mathbb{K}_f$, che soddisfano la proprietà

$$k_f \cdot \Phi_{\mathcal{R},s}(y_f) = \Phi_{\mathcal{R},s}(y_f). \quad (3.104)$$

Un operatore di questo tipo costruito a partire dai campi di gauge $A_M = (A_\mu, A_i)$ è ad esempio F_{ij} (con $\mathcal{R} = Adj$ e $s = 2$). Sui punti fissi y_f , dove sopravvive solo $O_f \subseteq SO(D)$, la rappresentazione vettoriale A_i di $SO(D)$ si decompone in rappresentazioni irriducibili di O_f .

Abbiamo quindi individuato una nuova simmetria che possiamo aggiungere all'elenco delle invarianze che la Lagrangiana ai punti fissi deve rispettare, che ricapitolando sono:

- Invarianza di Lorentz quadridimensionale: $SO(1, 3)$;
- Invarianza sotto l'azione dell'orbifold: $\mathbb{K}$;
- Invarianza di gauge ridotta : $\mathcal{H}$;
- Residuo dell'invarianza di gauge di bulk: $\mathcal{K}$;
- Invarianza sotto rotazioni discrete sullo spazio tangente: O_f .

Dobbiamo ora chiederci sotto quali condizioni il termine di tadpolo

$$F_{ij}^\alpha = \partial_i A_j^\alpha - \partial_j A_i^\alpha - g f^{\alpha\hat{b}\hat{c}} A_i^{\hat{b}} A_j^{\hat{c}} \quad (3.105)$$

rispetta questa ulteriore simmetria del sistema. Come abbiamo detto la rappresentazione A_i di $SO(D)$ si decompone in rappresentazioni irriducibili

di O_f . È quindi evidente che, se il sottogruppo delle rotazioni che agisce sugli indici (i, j) è $SO(2)$, il termine

$$\epsilon^{ij} F_{ij}^\alpha, \quad (3.106)$$

dove ϵ^{ij} è il tensore di Levi-Civita, è invariante sotto il gruppo O_f . Se invece il sottogruppo delle rotazioni è $SO(p)$ con $p > 2$, il tensore di Levi-Civita è $\epsilon^{i_1, \dots, i_p}$ e oggetti invarianti possono essere costruiti solo partendo da p -forme: in questo caso l'assenza del termine di tadpolo (3.105) è garantita dalla simmetria.

Vogliamo ora applicare questo principio al caso di nostro interesse, cioè la classe di orbifold $T_d/\mathbb{Z}_N$ con $d \geq 2$. Per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_N$ il generatore del gruppo di orbifold è definito da

$$P_N = \prod_{i=1}^{d/2} e^{2\pi i \frac{k_i}{N} J_{2i-1, 2i}}, \quad (3.107)$$

dove $J_{2i-1, 2i}$ è il generatore delle rotazioni nel piano (y_{2i-1}, y_{2i}) con angolo $2\pi \frac{k_i}{N}$. Esso può essere riscritto come

$$J_{2i-1, 2i} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

dove la matrice di Pauli σ_2 costituisce l' i -esimo blocco 2×2 . Il generatore P_N si può allora scrivere come

$$P_N = \begin{pmatrix} R_i & & \\ & \ddots & \\ & & R_{d/2} \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

La rotazione discreta nel piano (y_{2i-1}, y_{2i}) è data da

$$R_i = \begin{pmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{pmatrix}, \quad (3.110)$$

con

$$c_i = \cos\left(\frac{2\pi k_i}{N}\right) \quad s_i = \sin\left(\frac{2\pi k_i}{N}\right). \quad (3.111)$$

Sia y_f un punto fisso invariante sotto il sottogruppo dell'orbifold $\mathbb{K}_f = \mathbb{Z}_{N_f}$ con $N_f \leq N$. Il gruppo delle rotazioni interne O_f è definito come il sottogruppo di $SO(D)$ che commuta col generatore dell'orbifold P_{N_f} . Possiamo distinguere due casi:

1. $N_f > 2$: il gruppo O_f è dato dal prodotto tensoriale:

$$\mathcal{O}_f = \bigotimes_{i=1}^{d/2} SO(2)_i, \quad (3.112)$$

dove $SO(2)_i \subseteq SO(d)$ è la rotazione sul piano (y_{2i-1}, y_{2i}) . In ognuno di questi piani il tensore di Levi-Civita è dato da ϵ^{IJ} ($I, J = 2i - 1, 2i$, $i = 1, \dots, d/2$) e quindi i tadpoli sono sempre ammessi.

2. $N_f = 2$: in questo caso il generatore di $\mathbb{K}_f = \mathbb{Z}_2$ è $P = -\mathbf{1}$ e quindi commuta con tutti i generatori di $SO(D)$; il gruppo O_f è quindi $SO(D)$ stesso. In questo caso il tensore di Levi-Civita è $\epsilon^{i_1 \dots i_d}$ e i tadpoli sono ammessi solo nel caso $d = 2$ ($D = 6$).

Capitolo 4

Rottura della simmetria elettrodebole in $T^2/\mathbb{Z}_2$

Abbiamo visto nel corso dei capitoli precedenti quali siano le motivazioni che spingono a studiare nel dettaglio la rottura di simmetria elettrodebole in modelli costruiti su uno spazio-tempo piatto a sei dimensioni di tipo $\mathcal{M} \times T^2/\mathbb{Z}_2$. Riassumiamo brevemente le principali:

- In una teoria di campo con dimensioni extra è possibile costruire modelli basati sull'*unificazione gauge-Higgs*. In questo caso la simmetria di gauge che proibisce i termini di massa per i campi vettoriali viene estesa ai campi scalari della teoria effettiva quadridimensionale.
- Se lo spazio compatto è liscio le masse degli scalari non sono rigorosamente nulle: compaiono delle correzioni finite proporzionali a $\frac{1}{R}$, che quindi si annullano nel limite $R \rightarrow \infty$.
- Per costruire modelli realistici bisogna ipotizzare che lo spazio compatto non sia liscio ma abbia la struttura di un *orbifold*, cioè abbia dei punti di singolarità. Questo è necessario essenzialmente per due ragioni:
 1. avere fermioni quadridimensionali chirali;
 2. dare i giusti numeri quantici ai campi scalari, che altrimenti sarebbero nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge.

Nel caso della compattificazione su orbifold la finitezza della massa dei campi scalari non è più garantita, dal momento che l'invarianza di gauge di bulk non si estende ai punti fissi, dove possono sorgere termini di massa localizzati.

- Nel caso dei modelli in cinque dimensioni ($S^1/\mathbb{Z}_2$) le simmetrie residue ai punti fissi sono sufficienti a cancellare i termini di massa divergenti localizzati: la massa dei campi scalari resta finita. In questo caso tuttavia il potenziale classico per i campi scalari è nullo; il potenziale effettivo è dunque interamente generato radiativamente, e viene predetta una massa per il campo di Higgs notevolmente inferiore ai limiti sperimentali.
- Nel caso dei modelli in sei dimensioni il potenziale dei campi scalari contiene invece un termine quartico a livello albero, che viene dalla compattificazione del termine cinetico di Yang e Mills. In sei dimensioni è possibile costruire diversi tipi di orbifold $T^2/\mathbb{Z}_N$, che si possono suddividere in due classi:
 1. $N = 3, 4, 6$: su questi orbifold è possibile costruire modelli con un solo doppietto di Higgs. La predizione per la massa del campo di Higgs, indipendentemente dai dettagli del modello, è $m_H = 2m_W$, perfettamente compatibile col range di valori ammessi sperimentalmente. In tutti questi modelli tuttavia, nella Lagrangiana effettiva di brana, sono presenti dei termini lineari nell'intensità di campo per i fattori $U(1)$ residui, compatibili con tutte le simmetrie presenti ai punti fissi. Questi termini, detti *tadpoli*, contengono un termine di massa divergente per i campi scalari e distruggono quindi la stabilizzazione della rottura di simmetria elettrodebole che era stata introdotta realizzando l'unificazione gauge-Higgs.
 2. $N = 2$: su quest'orbifold sono ammessi solo modelli con due doppietti di Higgs. In questo caso esistono particolari scelte del contenuto fermionico del modello ($N_f = N_s$) per le quali i termini di tadpolo si cancellano.

Nel contesto delle teorie di campo con sei dimensioni piatte dello spazio tempo, quindi, i modelli costruiti su orbifold $T^2/\mathbb{Z}_2$ sono gli unici che potrebbero portare a una descrizione realistica della rottura di simmetria elettrodebole, se – grazie alla presenza del termine quartico nel potenziale – la predizione per la massa del campo di Higgs fosse simile a quella del caso $N \neq 2$. In alcuni lavori presenti in letteratura ([31]) questo modello viene studiato dal punto di vista teorico, in particolare mostrando come si possa inserire nel contesto di una teoria di stringa di tipo I; in questi lavori tuttavia non viene presentata un'analisi fenomenologica completa della rottura di simmetria elettrodebole.

L'obiettivo che ci siamo posti in questo lavoro è quindi quello di completare questa analisi, prestando particolare attenzione al valore predetto per

la massa del campo scalare leggero. Nel caso $T^2/\mathbb{Z}_2$ l'analisi è notevolmente complicata dalla presenza nel potenziale classico $V(H_1, H_2)$ di una *direzione piatta*.

4.1 Modelli sull'orbifold $T^2/\mathbb{Z}_2$

Rottura di simmetria

Lo schema di rottura di simmetria studiato è

$$SU(3)_w \longrightarrow SU(2) \otimes U(1). \quad (4.1)$$

L'azione dell'orbifold sui campi si ottiene applicando le definizioni generali date nel § 3.3 al caso specifico $N = 2$. La parte di gauge dell'azione dell'orbifold è data dalla matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

L'azione dell'orbifold sui numeri quantici di Lorentz è invece data, per quanto riguarda i campi di gauge, da:

$$\begin{aligned} A^\mu &\xrightarrow{\mathbb{Z}_2} A^\mu, \\ A^i &\xrightarrow{\mathbb{Z}_2} -A^i \quad (i = 5, 6). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le componenti del campo A_M residue dopo la proiezione sono quelle con indice $a = 1, 2, 3, 8$ per i bosoni di gauge 4-dimensionali:

$$A_\mu = \sum_a A_{\mu a} t^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} B_\mu & \sqrt{2} W_\mu^+ & 0 \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} B_\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} B_\mu \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

e quelle con indice $\hat{a} = 4, 5, 6, 7$ per i campi scalari:

$$H_i = \sum_{\hat{a}} A_i^{\hat{a}} \frac{\lambda_{\hat{a}}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_i^4 - iA_i^5 \\ 0 & 0 & A_i^6 - iA_i^7 \\ A_i^4 + iA_i^5 & A_i^6 + iA_i^7 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

I campi con numeri quantici ben definiti non sono però H_5 e H_6 ma le due combinazioni lineari definite da:

$$H_5 - iH_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_1^- \\ 0 & 0 & H_1^0 \\ H_2^+ & H_2^0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

La teoria effettiva quadridimensionale contiene dunque due doppietti di Higgs di opposta ipercarica:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \text{ con } Y = -\frac{1}{2}, \quad (4.7)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \text{ con } Y = \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

Passiamo alla notazione usata nel capitolo 3, in cui si usano le coordinate complesse

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y^5 + iy^6) \\ \bar{z} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y^5 - iy^6), \end{aligned} \quad (4.9)$$

e in cui i generatori residui dopo la rottura di simmetria si scrivono come operatori di innalzamento e abbassamento

$$\begin{aligned} t_{\pm 1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t_4 \pm it_5) \\ t_{\pm 2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t_6 \pm it_7). \end{aligned} \quad (4.10)$$

In questo caso le componenti dei doppietti assumono la forma particolarmente semplice:

$$H_1 = \begin{pmatrix} A_{\bar{z}+2} \\ A_{\bar{z}+1} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} A_{\bar{z}-1} \\ A_{\bar{z}-2} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Analogamente a quanto avviene nel caso $N \neq 2$ è presente un termine un termine quartico a livello albero:

$$V_0 = \frac{g^2}{2} \text{Tr}([A_z, A_{\bar{z}}]^2) = \frac{g^2}{2} (|H_1|^2 - |H_2|^2)^2. \quad (4.13)$$

Questo potenziale, simile a quello presente nel MSSM, ha delle direzioni piatte. Nel caso esadimensionale è quindi possibile recuperare l'interpretazione dei vev dei doppietti di Higgs come Wilson lines, nel caso in cui questi siano orientati lungo una *direzione piatta* del potenziale classico.

Fermioni

In sei dimensioni, come in ogni numero pari di dimensioni, è possibile avere campi fermionici chirali. Mentre un fermione di Dirac ha 8 componenti, un fermione chirale esadimensionale ha quattro componenti, e contiene dunque i gradi di libertà di due fermioni chirali 4-dimensionali.

Una rappresentazione esplicita delle matrici di Dirac esadimensionali è data da:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\Gamma^5 = i\gamma^5 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\Gamma^6 = i\gamma^5 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_5 \\ i\gamma_5 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

A partire dalle matrici Γ_5 e Γ_6 si possono definire le matrici in coordinate complesse:

$$\Gamma^{z,\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^5 \pm i\Gamma^6) = \sqrt{2}i\gamma^5 \otimes \sigma_\pm. \quad (4.17)$$

La matrice di chiralità è invece data in sei dimensioni da:

$$\Gamma_7 = -\Gamma_0 \dots \Gamma_6 = \gamma_5 \otimes \sigma_3. \quad (4.18)$$

I gradi di libertà di un fermione chirale esadimensionale possono essere rappresentati in termini dei due fermioni 4-dimensionali come

$$\Psi_+ = \xi_R \oplus \xi_L, \quad \Psi_- = \chi_L \oplus \chi_R, \quad (4.19)$$

dove ξ e χ sono nella stessa rappresentazione $\mathcal{R}$ di $SU(3)_w$ di Ψ . Possiamo limitarci nel seguito a considerare solo fermioni 6D con chiralità negativa. Le decomposizioni sotto la rottura $G \rightarrow H$ rispettivamente della fondamentale e della simmetrica sono:

$$\mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{2}_{\frac{1}{6}} \oplus \mathbf{1}_{-\frac{1}{3}}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{6} \longrightarrow \mathbf{3}_{\frac{1}{3}} \oplus \mathbf{2}_{-\frac{1}{6}} \oplus \mathbf{1}_{-\frac{2}{3}}. \quad (4.21)$$

L'azione dell'orbifold sulle varie componenti della decomposizione è data da:

$$\begin{aligned} 2_{R,L}^F(\tau z) &= g^F \tau^{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}} 2_{R,L}^F(z) \\ 1_{R,L}^F(\tau z) &= g^F \tau^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} 1_{R,L}^F(z) \\ 3_{R,L}^S(\tau z) &= g^S \tau^{\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}} 3_{R,L}^S(z) \\ 2_{R,L}^S(\tau z) &= g^S \tau^{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}} 2_{R,L}^S(z) \\ 1_{R,L}^S(\tau z) &= g^S \tau^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} 1_{R,L}^S(z) \end{aligned} \quad (4.22)$$

A seconda delle scelte possibili del twist otteniamo i seguenti modi zero residui sulle brane:

$$\begin{aligned} g^F = 1 & \rightarrow 2_R^F, 1_L^F \\ g^F = -1 & \rightarrow 2_L^F, 1_R^F \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} g^S = 1 & \rightarrow 3_L^S, 2_R^S, 1_L^S \\ g^S = -1 & \rightarrow 3_R^S, 2_L^S, 1_R^S \end{aligned} \quad (4.24)$$

In tutte le analisi effettuate considereremo il numero di fermioni come un parametro libero. Non siamo infatti interessati a costruire uno specifico modello, ma a studiare gli effetti della rottura di simmetria al variare del contenuto di matreria. L'unica condizione che imponiamo sullo spettro fermionico è che sia soddisfatta la condizione di cancellazione dei tadpoli, $N_f = N_s$. Nel seguito indicheremo quindi il numero di fermioni col parametro N_F : per ogni unità di N_F si ha un fermione nella fondamentale e uno nella simmetrica.

4.2 Calcolo del potenziale nel caso delle Wilson lines

Come abbiamo visto, nell'orbifold $T^2/\mathbb{Z}_2$ è possibile interpretare la rottura di simmetria elettrodebole in termini del meccanismo di Hosotani perchè a differenza di quanto accade nel caso $N \neq 2$ il potenziale classico ha delle direzioni piatte. Le configurazioni corrispondenti alle direzioni piatte del potenziale sono quelle in cui i vev dei due campi scalari sono orientati lungo direzioni commutanti nello spazio di gauge e quindi l'intensità di campo F_{56} si annulla. Sembra quindi probabile che in questa configurazione la massa assunta dinamicamente dal campo scalare leggero, corrispondente al campo di Higgs del Modello Standard, sarà ancora una volta troppo piccola. E tuttavia importante effettuare questo calcolo esplicitamente per vedere se questa previsione è effettivamente verificata.

Generalizzando al caso esadimensionale la procedura di Coleman e Weinberg per calcolare il potenziale effettivo [32, 33], si ottiene che il contributo di un campo ψ al potenziale è dato da:

$$V_{eff} = \frac{1}{V} (-)^S \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \log[p_E^2 + m_{\vec{n}}^2], \quad (4.25)$$

con $S = 0$ per i bosoni e $S = 1$ per i fermioni. Questo rappresenta il contributo al potenziale effettivo a un loop dato da un generico campo di

bulk, cioè la somma di tutti i diagrammi a un loop con un numero arbitrario di linee esterne A_i .

Nel caso in cui la massa dei modi di Kaluza-Klein è proporzionale a uno shift introdotto dalle Wilson lines, è utile esprimere il potenziale in funzione della grandezza:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{V} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \left[p_E^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{(n-\alpha)^2}{R_1^2} + \frac{(m-\beta)^2}{R_2^2} - 2 \frac{(n-\alpha)(m-\beta)}{R_1 R_2} \cos \theta \right) \right]. \quad (4.26)$$

$I(\alpha, \beta)$ rappresenta il contributo al potenziale effettivo di un insieme completo di modi di Kaluza-Klein twistati di α, β .

Usando la rappresentazione di Schwinger del logaritmo

$$\log(x) = \int_0^\infty dt \frac{e^{-xt}}{t}, \quad (4.27)$$

ed effettuando l'integrazione in p la (4.26) si può scrivere come:

$$\frac{1}{(32\pi^2)V} \sum_{m,n} \int_0^\infty \frac{dt}{t^3} e^{-t \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{(n-\alpha)^2}{R_1^2} + \frac{(m-\beta)^2}{R_2^2} - 2 \frac{(n-\alpha)(m-\beta)}{R_1 R_2} \cos \theta \right) \right]}. \quad (4.28)$$

Effettuiamo la sostituzione $t = \frac{1}{l}$ e utilizziamo la formula di risommazione di Poisson:

$$\frac{1}{V} \sum_{m,n} F\left(\frac{n}{R_1}, \frac{m}{R_2}\right) = \sum_{m',n'} f(2\pi R_1 m', 2\pi R_2 n'), \quad (4.29)$$

dove $f(x, y)$ è la trasformata di Fourier di $F(p, q)$, definita da:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} e^{-i(px+qy)} F(p, q). \quad (4.30)$$

Dalla (4.28) si ottiene allora:

$$\frac{1}{(32\pi^2)} \sum_{m,n} e^{-2\pi i(m\alpha+n\beta)} \frac{\sin \theta}{4\pi} \int_0^\infty dl l^2 e^{-l \left[(\pi R_1 m)^2 + (\pi R_2 n)^2 + 2 \cos \theta (\pi R_1 m)(\pi R_2 n) \right]}. \quad (4.31)$$

Infine eseguendo l'integrazione in l e riarrangiando gli esponenziali come coseni si ottiene:

$$\begin{aligned}
I(\alpha, \beta) = & \frac{\sin \theta}{32\pi^9} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n\alpha}{n^6 R_1^6} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m\beta}{m^6 R_2^6} + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(n\alpha + m\beta)}{(n^2 R_1^2 + m^2 R_2^2 + 2mn R_1 R_2 \cos \theta)^3} + \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(n\alpha - m\beta)}{(n^2 R_1^2 + m^2 R_2^2 + 2mn R_1 R_2 \cos \theta)^3} \right]. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Nel caso in cui i campi H_1 e H_2 sono identificati con le Wilson lines, possiamo parametrizzarli come:

$$\langle H_1 \rangle = \frac{2\alpha}{gR} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_2 \rangle = \frac{2\beta}{gR} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

I vev indotti dalle Wilson lines introducono quindi degli shift nella massa dei modi di Kaluza-Klein. L'espressione della massa diviene quindi:

$$(m_{\vec{n}}^i)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{(n - q_i \alpha)^2}{R_1^2} + \frac{(m - q_i \beta)^2}{R_2^2} - 2 \frac{(n - q_i \alpha)(m - q_i \beta)}{R_1 R_2} \cos \theta \right). \quad (4.34)$$

I valori dei q_i si ottengono diagonalizzando le matrici di massa dei modi di Kaluza-Klein dei vari campi, analogamente a quanto mostrato (per il caso 5D) nel § 2.4.1. In questo modo si ottiene il risultato seguente:

- Il contributo dal settore di gauge al potenziale effettivo è dato da:

$$V_{eff}^{b+g+s} = 4I(\alpha, \beta) + 8I(2\alpha, 2\beta); \quad (4.35)$$

- Il contributo di un fermione nella fondamentale è dato da:

$$V_{eff}^{ff} = -4I(\alpha, \beta) - 4I(2\alpha, 2\beta); \quad (4.36)$$

- Il contributo di un fermione nella simmetrica è dato da:

$$V_{eff}^{fs} = -4I(\alpha, \beta). \quad (4.37)$$

Per ottenere il potenziale totale bisogna quindi sommare i contributi di gauge e fermionici. Possiamo tralasciare nella somma i termini che non dipendono da α e β , in quanto un termine costante nel potenziale V non influenza

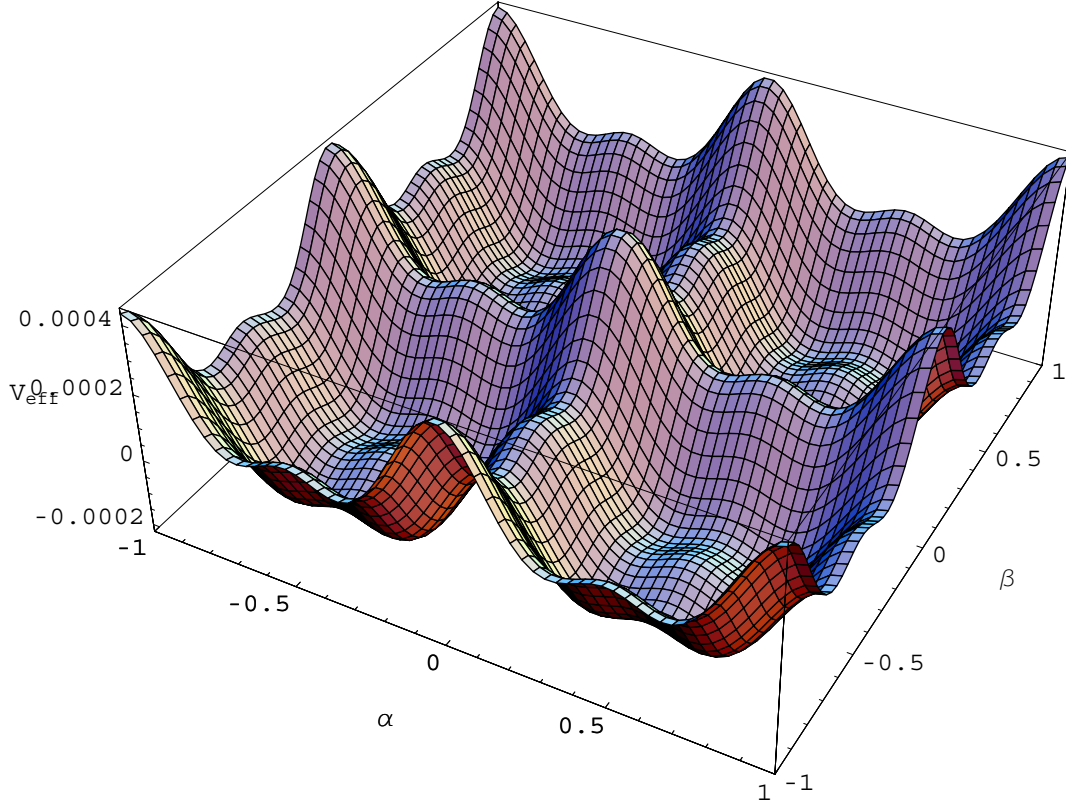


Figura 4.1: Il potenziale effettivo a un loop $V_{eff}(\alpha, \beta)$ nel caso $N_F = 25$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

né i minimi (che dipendono dalla derivata prima di V) né le masse (derivata seconda di V).

Per un arbitrario numero di fermioni N_F il potenziale effettivo totale a un loop è :

$$V_{eff}^{1-loop} = V_{eff}^{g+s}(\alpha, \beta) + V_{eff}^{ff}(\alpha, \beta) + V_{eff}^{fs}(\alpha, \beta) = \frac{\sin \theta}{32\pi^9} ((4 - 4N_F)I(2\alpha, 2\beta) + (8 - 8N_F)I(\alpha, \beta)) . \quad (4.38)$$

Una volta ottenuto numericamente il minimo del potenziale, si possono calcolare le masse dei due campi diagonalizzando la matrice di massa,

ottenuta dalle derivate seconde del potenziale:

$$M_{ij} = \frac{g^2 R_i R_j}{4} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}. \quad (4.39)$$

Se poniamo $R_1 = R_2$, il raggio comune R delle extra dimensioni si può fissare imponendo che la teoria riproduca la massa misurata del bosone W , mediante la relazione:

$$M_W^2 = \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} (\alpha^2 + \beta^2 - 2 \cos \theta \alpha \beta). \quad (4.40)$$

Utilizzando anche la relazione che lega la costante d'accoppiamento di gauge esadimensionale a quella 4-dimensionale

$$g_4^2 = \frac{g_6^2}{4\pi^2 R^2 \sin \theta}, \quad (4.41)$$

si ottiene infine, sostituendo nella (4.39):

$$m_i^2 = 4\pi^3 \alpha_w \sin \theta \frac{M_W^2}{\alpha_0^2 + \beta_0^2 - 2 \cos \theta \alpha_0 \beta_0} \mu_i, \quad (4.42)$$

dove i μ_i sono gli autovalori della matrice M .

L'andamento della massa del campo scalare leggero, M_h , al variare del valore dell'angolo del toro ha il massimo in $\theta = \frac{\pi}{2}$, come si può vedere in Fig. 4.2; questo vale per un generico valore di N_f . Ci concentriamo quindi nel seguito sul caso $\theta = \frac{\pi}{2}$. Il risultato che si ottiene per la massa del campo scalare leggero al variare del numero di fermioni N_F è riportato in Fig. 4.2.

Fermioni massivi

In generale nella Lagrangiana di bulk è ammesso un “termine di massa” per i fermioni del tipo

$$M(\bar{\Psi}\tilde{\Psi} + \tilde{\bar{\Psi}}\Psi), \quad (4.43)$$

dove Ψ e $\tilde{\Psi}$ sono due campi fermionici appartenenti alla stessa rappresentazione di $SU(3)$ ma con parità opposte sotto $\mathbb{Z}_2$. Questo termine di massa può ad esempio aiutare, in modelli in cui si introduca una struttura di sapore, a riprodurre la gerarchia di massa tra le differenti famiglie [24].

Può essere interessante quindi studiare come cambia la struttura del potenziale V_{eff} nel caso di fermioni massivi.

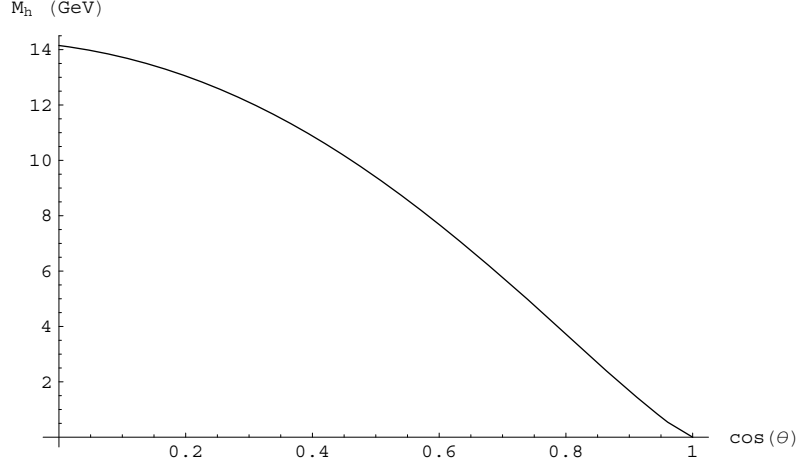


Figura 4.2: Massa del campo di Higgs leggero al variare del coseno dell'angolo interno del toro θ ($N_F = 25$).

Nel caso di fermioni con massa M_f , la grandezza I viene sostituita da:

$$I'(\alpha, \beta, M_f) = \frac{1}{V} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log [p_E^2 + M_f^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{(n-\alpha)^2}{R_1^2} + \frac{(m-\beta)^2}{R_2^2} - 2 \frac{(n-\alpha)(m-\beta)}{R_1 R_2} \cos \theta \right)] . \quad (4.44)$$

In questo caso la (4.31) diventa:

$$\frac{1}{(32\pi^2)} \sum_{m,n} e^{-2\pi i(m\alpha+n\beta)} \frac{\sin \theta}{4\pi} \int_0^\infty dl \, l^2 e^{-\frac{M^2}{l} - l[(\pi R_1 m)^2 + (\pi R_2 n)^2 + 2 \cos \theta (\pi R_1 m)(\pi R_2 n)]} . \quad (4.45)$$

Al posto della (4.32) si ha:

$$I'(\alpha, \beta, M_f) = \frac{\sin \theta}{32\pi^9 R^6} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n\alpha}{n^3} K_3(2\lambda n) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m\beta}{m^3} K_3(2\lambda m) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(n\alpha + m\beta)}{(n^2 + m^2 + 2mn \cos \theta)^{3/2}} K_3((2\lambda(m^2 + n^2 + 2mn \cos \theta))^{1/2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(n\alpha - m\beta)}{(n^2 + m^2 + 2mn \cos \theta)^{3/2}} K_3((2\lambda(m^2 + n^2 + 2mn \cos \theta))^{1/2}) \right] . \quad (4.46)$$

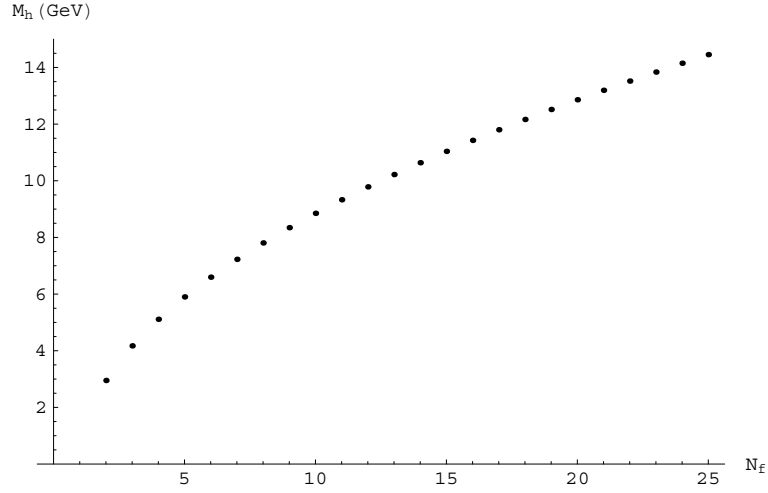


Figura 4.3: Massa del campo di Higgs leggero al variare del numero di fermioni N_F .

dove K_3 e' una funzione di Bessel modificata del terzo tipo.

Abbiamo espresso la dipendenza da M_f tramite la grandezza adimensionale λ , che è data dal prodotto tra la massa e la lunghezza dell'orbifold πR :

$$\lambda = \pi R M_f. \quad (4.47)$$

Per ottenere V_{eff} bisogna prendere il potenziale precedente ed effettuare la sostituzione

$$I(\alpha, \beta) \rightarrow I'(\alpha, \beta, M_f) \quad (4.48)$$

Poiché la funzione K_3 ha un andamento esponenziale decrescente per $\lambda > 1$ si riscontra un'ulteriore soppressione della massa degli scalari. Il risultato che si ottiene per la massa del campo scalare leggero al variare parametro λ è riportato in Fig. 4.4.

4.3 Calcolo del potenziale nel caso generale

Come abbiamo visto, calcolando l'effetto delle correzioni radiative sul potenziale effettivo sotto l'ipotesi restrittiva che i vev dei due doppietti di Higgs siano orientati lungo la direzione piatta del potenziale classico, si ottiene un risultato molto simile al caso pentadimensionale, in cui il più leggero dei campi scalari assume nel processo di rottura della simmetria una massa troppo piccola, incompatibile con i limiti sperimentali.

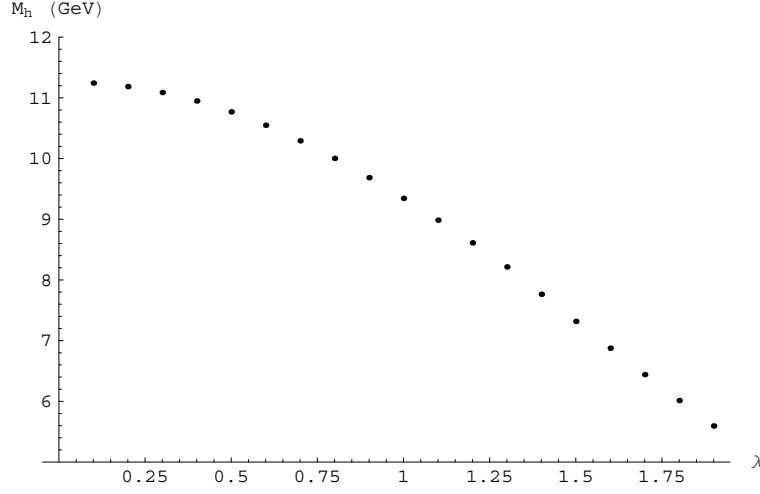


Figura 4.4: Massa del campo di Higgs leggero M_h al variare del parametro λ che regola la massa dei fermioni di bulk ($N_F = 20$)

Bisogna dunque abbandonare questa ipotesi e calcolare le correzioni radiative generate da una configurazione arbitraria dei vev, senza imporre a priori la direzione in cui sono orientati.

4.3.1 Struttura del potenziale completo a 1 loop

Potremmo decidere in prima approssimazione di considerare solo i termini di massa generati a un loop tascurando le correzioni quartiche poiché queste ultime sono sopprese di un ulteriore fattore g^2 .

$$V = \lambda(\Phi_1^2 - \Phi_2^2)^2 + M^2(|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2) + m^2(\Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1). \quad (4.49)$$

Possiamo però trarre alcune conclusioni riguardo a questa approssimazione prima di calcolare i coefficienti esplicitamente:

1. Le condizioni di minimizzazione di questo potenziale sono:

$$2\lambda(|v_1|^2 - |v_2|^2)v_1^* + M^2v_1^* + m^2v_2 = 0 \quad (4.50)$$

$$2\lambda(|v_1|^2 - |v_2|^2)v_2^* + M^2v_2^* + m^2v_1 = 0. \quad (4.51)$$

Poiché senza perdere generalità si può scegliere uno dei due vev reale, queste equazioni mostrano che anche l'altro sarà necessariamente reale

2. Il potenziale 4.49 è simmetrico sotto lo scambio:

$$v_1 \leftrightarrow v_2. \quad (4.52)$$

Si vede quindi come considerando il potenziale (4.49) si ottengono necessariamente due vev reali e uguali in modulo, quindi ancora una volta orientati lungo la direzione piatta di V_{tree} . Per ottenere una fase generata dinamicamente e quindi un minimo orientato lungo una direzione diversa da quella piatta dobbiamo quindi tenere conto anche delle correzioni quartiche a un loop.

Il più generale potenziale di due doppietti $SU(2)_L$ di ipercarica opposta Φ_1 e Φ_2 è:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 + [m_{12}^2 \Phi_1 \Phi_2 + \text{h.c.}] \\ & + \lambda_1 (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + \lambda_2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2) + \lambda_4 (\Phi_1 \Phi_2) (\Phi_2^\dagger \Phi_1^\dagger) \\ & + [\lambda_5 (\Phi_1 \Phi_2) + \lambda_6 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) + \lambda_7 (\Phi_2^\dagger \Phi_2)] \Phi_1 \Phi_2 + \text{h.c.} . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Nella (4.53) i termini $m_{11}^2, m_{22}^2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ devono essere reali per soddisfare la condizione di hermiticità del potenziale; i parametri $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ possono invece in generale essere complessi.

Il prodotto $H_1 H_2$ è una notazione abbreviata per

$$H_1^a \epsilon_{ab} H_2^b , \quad (4.54)$$

dove ϵ è il tensore totalmente antisimmetrico 2×2 , quindi

$$H_1 H_2 = H_1^+ H_2^- - H_1^0 H_2^0 . \quad (4.55)$$

Possiamo subito fare alcune osservazioni generali sulla struttura di questo potenziale:

1. Esiste un gruppo di trasformazioni a tre parametri nello spazio dei coefficienti che lascia invariante il potenziale (“invarianza sotto riparametrizzazione”). Queste trasformazioni si possono rappresentare tramite la loro azione sui campi, una trasformazione unitaria

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} , \quad (4.56)$$

$$\hat{\mathcal{F}} = e^{-i\rho_0} \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\rho/2} & \sin \theta e^{i(\tau-\rho/2)} \\ -\sin \theta e^{-i(\tau-\rho/2)} & \cos \theta e^{-i\rho/2} \end{pmatrix} . \quad (4.57)$$

Queste trasformazioni si riducono a una trasformazione di fase con fasi indipendenti nel caso $\theta = 0$.

2. Il potenziale V , nella forma generale (4.53) con coefficienti complessi, viola esplicitamente $\mathcal{CP}$.
3. La condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathcal{V}$ conservi esplicitamente $\mathcal{CP}$ è che esista una base in cui tutti i coefficienti del potenziale sono reali. Una condizione equivalente è che le combinazioni invarianti sotto riparametrizzazione

$$\lambda_5^*(m_{12}^2)^2, \quad \lambda_6^* m_{12}^2, \quad \lambda_7^* m_{12}^2 \quad (4.58)$$

siano tutte reali in una base generica.

4. Condizione necessaria e sufficiente affinché sia assente anche una violazione spontanea di $\mathcal{CP}$ è che esista una base in cui entrambi i vev sono reali. Questo avviene ad esempio se il potenziale è invariante sotto una simmetria $\mathbb{Z}_2$ sotto la quale

$$H_1 \rightarrow H_1 \quad H_2 \rightarrow -H_2. \quad (4.59)$$

Quest'invarianza si ha in (4.53) per

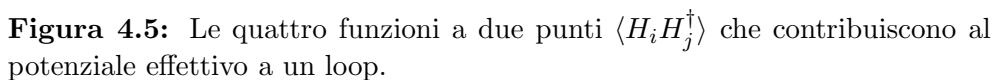
$$\lambda_6 = \lambda_7 = m_{12}^2 = 0. \quad (4.60)$$

5. Nel caso di conservazione di $\mathcal{CP}$ lo spettro dopo la rottura di simmetria consiste in:
 - Campi neutri: un bosone di Goldstone G^0 ; due campi scalari massivi pari sotto $\mathcal{CP}$ h e H ; un campo scalare massivo A dispari sotto $\mathcal{CP}$.
 - Campi carichi: due bosoni di Goldstone $G^\pm$; due campi scalari carichi massivi $H^\pm$.
6. Nel caso in cui c'è violazione di $\mathcal{CP}$ gli autostati di massa nel settore neutro sono tre combinazioni lineari di h , H , e A con parità non definita sotto $\mathcal{CP}$.

4.3.2 Calcolo dei coefficienti

Nel nostro caso i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che compaiono nella (4.53) sono la somma di un termine a livello albero e un termine generato radiativamente a un loop, mentre i restanti coefficienti hanno solo il contributo a un loop. Valgono inoltre le relazioni:

$$\lambda_{1,tree} = \lambda_{2,tree} = \frac{1}{2} \lambda_{3,tree} = \frac{g^2}{2}, \quad (4.61)$$



Per determinare il valore dei 14 coefficienti che compaiono nel potenziale completo a 1 loop dobbiamo quindi calcolare:

- I diagrammi che contribuiscono al generico correlatore a due punti tra la componente A_M^C e la componente A_N^B del vettore $\mathbf{A}$ sono quelli in Fig. 4.7, quelli che contribuiscono ai correlatori a quattro punti sono invece riportati in Fig. 4.8.

Se dovessimo calcolare questi diagrammi sul toro tutto ciò di cui avremmo bisogno sarebbe l'estensione delle usuali regole di Feynman a uno spazio-tempo piatto a sei dimensioni, che riportiamo qui nella gauge di Feynman.

$$\begin{array}{c} B, N \\ \swarrow \\ (q, q_5) \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ (p, p_5) \\ \swarrow \\ (r, r_5) \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ A, M \\ \searrow \\ C, R \end{array} = g f^{ABC} \left((r - q)_M g_{NR} + (q - p)_R g_{MN} + (p - r)_N g_{RM} \right). \quad (4.63)$$

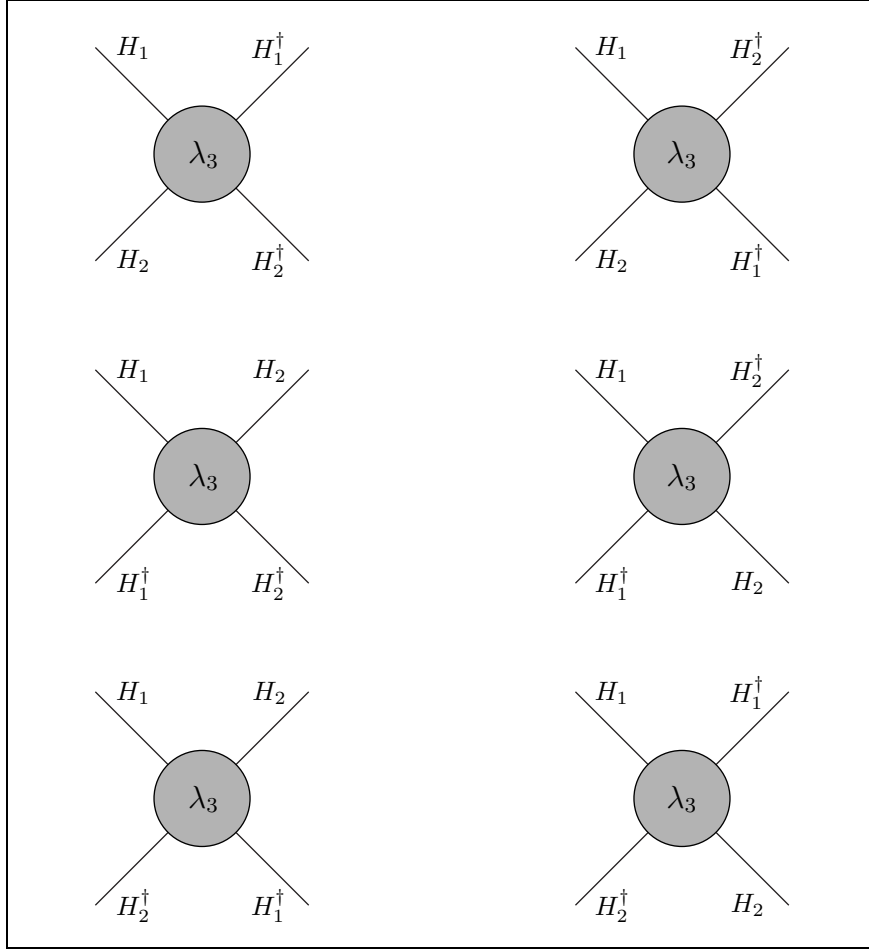


Figura 4.6: I sei contributi topologicamente distinti alla funzione a quattro punti $\langle H_1 H_1^\dagger H_2 H_2^\dagger \rangle$.

Il vertice quartico tra campi vettoriali è:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} B, N \\ (q, q_5) \end{array} \quad \begin{array}{c} A, M \\ (p, p_5) \end{array} \\
 & \begin{array}{c} (r, r_5) \\ C, R \end{array} \quad \begin{array}{c} (s, s_5) \\ D, S \end{array} \\
 & = -ig^2 \left(f^{ABE} f^{CDE} (g_{MR} g_{NS} - g_{NR} g_{MS}) \right. \\
 & \quad + f^{CBE} f^{ADE} (g_{MR} g_{NS} - g_{NM} g_{RS}) \\
 & \quad \left. + f^{DBE} f^{CAE} (g_{SR} g_{NM} - g_{NR} g_{MS}) \right). \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

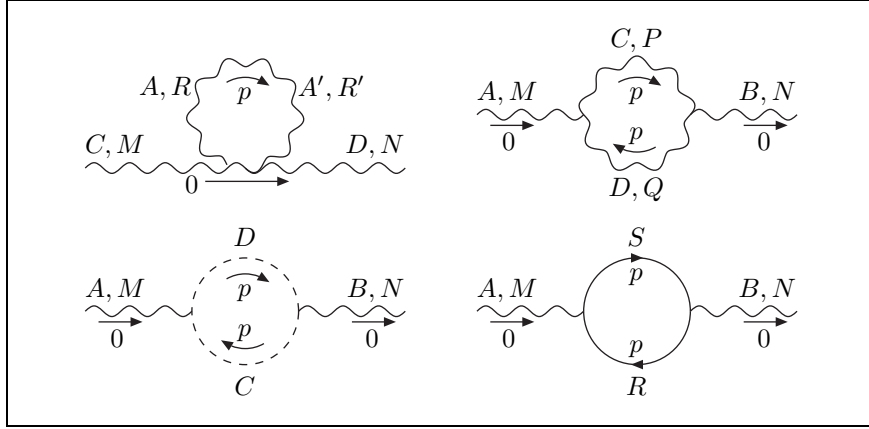


Figura 4.7: I quattro diagrammi che contribuiscono alla generica funzione a due punti $\langle A_M^A A_N^B \rangle$.

L'accoppiamento tra fermioni e bosoni di gauge è:

$$\begin{array}{c}
 b \\
 (q, q_5) \searrow \\
 (r, r_5) \nearrow \\
 c
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (p, p_5) \\
 \leftarrow \\
 A, M
 \end{array}
 = ig \gamma_M (T^A)^c_b. \quad (4.65)$$

L'accoppiamento tra bosoni di gauge e ghost è:

$$\begin{array}{c}
 B \\
 (q, q_5) \searrow \\
 (r, r_5) \nearrow \\
 C
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (p, p_5) \\
 \leftarrow \\
 A, M
 \end{array}
 = g f^{ABC} q_M. \quad (4.66)$$

I propagatori sono invece:

$$\begin{aligned}
 G^A(p_\mu, p_i) &= -i \frac{\delta^{BC}}{p^2} g_{MN}, \\
 G^c(p_\mu, p_i) &= i \frac{\delta^{BC}}{p^2}, \\
 G^\Psi(p_\mu, p_i) &= i \frac{\Gamma^M p_M}{p^2}.
 \end{aligned} \quad (4.67)$$

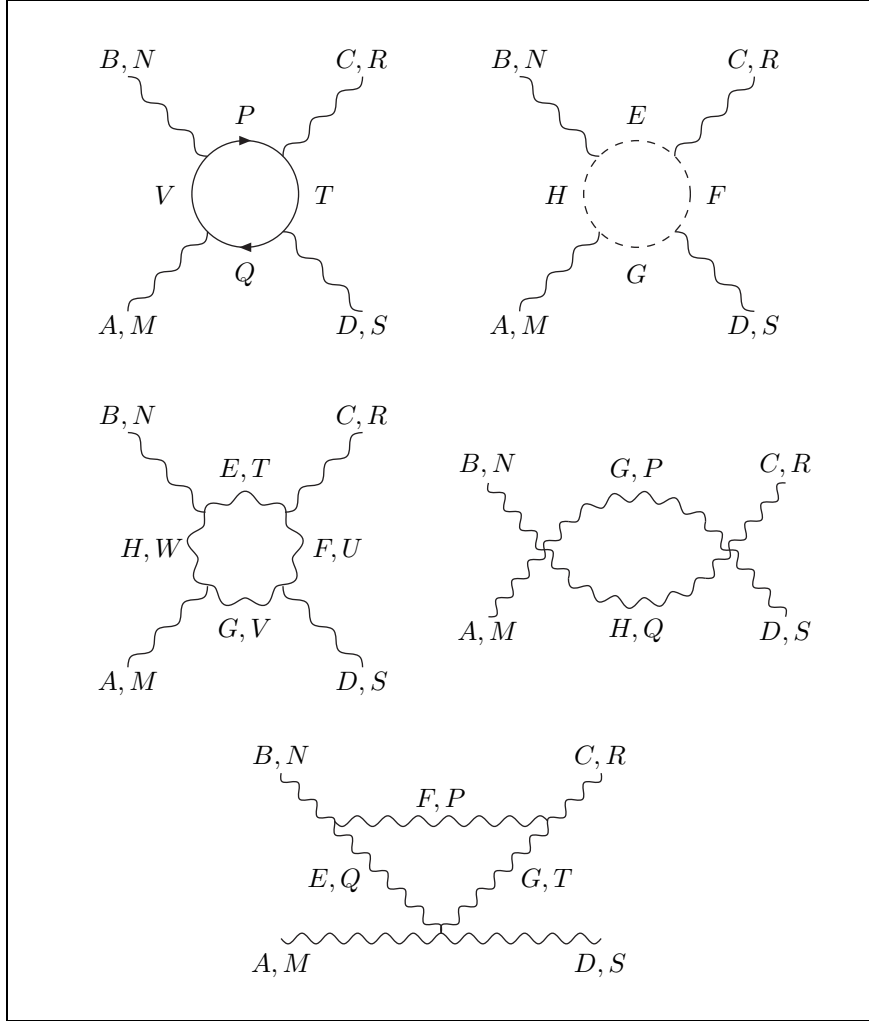


Figura 4.8: I cinque diagrammi che contribuiscono alla generica funzione a quattro punti $\langle A_M^A A_N^B A_R^C A_S^D \rangle$.

Le regole di Feynman sull'orbifold sono in generale più complesse, ma sfruttando alcune proprietà della decomposizione in modi possono essere scritte in una forma semplice, in cui l'unico effetto dell'orbifold è l'inserimento di un twist nei propagatori o in altre parole una non conservazione dell'impulso di Kaluza-Klein sulle linee interne.

Mostriamo quindi come si scrive il propagatore di un generico campo $\Phi(z)$ su un orbifold $T^2/\mathbb{Z}_N$. Possiamo definire l'espansione in modi di Φ in

maniera ridondante come:

$$\Phi(z) = \sum_{\vec{n}} \Phi_{\vec{n}} f_{\vec{n}}(z), \quad (4.68)$$

dove $f_{\vec{n}}$ è la base delle funzioni esponenziali definita in (3.28). Poichè i modi di Kaluza Klein che compaiono in (4.68) non sono tutti indipendenti, i loro propagatori sono chiaramente non diagonali nello spazio degli impulsi di KK. Utilizzando la relazione

$$\Phi(\tau z) = P\Phi(z) \quad (4.69)$$

si può riscrivere il campo Φ in termini di campi liberi sul toro φ come

$$\Phi(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{P}^k \varphi(\tau^{-k} z). \quad (4.70)$$

Il propagatore di Φ (nello spazio delle coordinate) si può quindi riscrivere in funzione del propagatore di φ come

$$\begin{aligned} \langle \Phi(z_1) \Phi^\dagger(z_2) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=0}^{N-1} \mathcal{P}^k \langle \varphi(\tau^{-k} z_1) \varphi^\dagger(\tau^{-l} z_2) \rangle (\mathcal{P}^\dagger)^l \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{P}^k \langle \varphi(\tau^{-k} z_1) \varphi^\dagger(z_2) \rangle. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Infine otteniamo per i propagatori nello spazio degli impulsi:

$$\langle \Phi_{\vec{m}} \Phi_{\vec{n}}^\dagger \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{P}^k G_{\vec{n}} \delta_{\vec{m}, Z_N^{-k} \vec{n}}, \quad (4.72)$$

dove i G sono i propagatori sul toro scritti precedentemente.

In particolare, nel caso di $\mathbb{Z}_2$ la (4.72) diventa

$$\langle \Phi^{\vec{m}'} \bar{\Phi}^{\vec{m}} \rangle = \frac{1}{2} G^\Phi(p_\mu, p_i) (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_\Phi \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}). \quad (4.73)$$

Il propagatore sull'orbifold è dunque dato dalla somma di due termini, uno dei quali non conserva l'impulso lungo le direzioni interne.

Un'altra proprietà utile nel calcolo dei diagrammi è la seguente (diamo solo l'enunciato, per la dimostrazione rimandiamo il lettore alla referenza [26]):

Se in un vertice convergono K propagatori, non bisogna necessariamente sommare sui twist di tutti i K propagatori, ma uno di essi può essere sostituito dal propagatore non twistato, moltiplicato per N .

Mostriamo qui in dettaglio il calcolo del coefficiente m_{11}^2 , che permette di mostrare con relativa semplicità le tecniche utilizzate. Il calcolo dei coefficienti λ_i pur non presentando nuovi elementi è tecnicamente molto più complesso; per non appesantire l'esposizione ne rimandiamo la trattazione alle appendici.

Calcolo di m_{11}^2

Per ottenere il valore del coefficiente bobbiamo:

1. Calcolare i quattro diagrammi in Fig. 4.7 per indici di Lorentz generici M, N ;
2. Sommare i contributi di ogni diagramma, specificando $M = z, N = \bar{z}$.

DIAGRAMMI

(disposti nell'ordine in cui compaiono in Fig. 4.7)

- **Diagramma 1:**

Il diagramma 1 è proporzionale a:

$$i(-ig^2)\frac{1}{2}f^{ACE}f^{ADE}\frac{1}{2}(\delta_{\vec{m}'-\vec{m}}+\mathcal{P}_A\delta_{\vec{m}'+\vec{m}})\frac{ig_{RR'}}{p^2+|\lambda_{\vec{m}}|^2}12g_{MN}. \quad (4.74)$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ è dovuto alla simmetria del diagramma sotto lo scambio di due linee interne.

- **Diagramma 2:**

Il diagramma 2 è proporzionale a:

$$\begin{aligned} & (ig^2)\frac{1}{2}(\delta_{\vec{m}'-\vec{m}}+\mathcal{P}_A\delta_{\vec{m}'+\vec{m}})\frac{i}{p^2+|\lambda_{\vec{m}}|^2} \\ & \times f^{ACD}[g_{PQ}(-2p)_M + g_{PM}p_Q + g_{MQ}p_P] \\ & \times \frac{i}{p^2+|\lambda_{\vec{m}'}|^2}f^{BCD}[g_{PQ}(-2p)_M + g_{PN}p_Q + g_{NQ}p_P]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

dove il fattore $1/2$ è un fattore di simmetria dovuto all'invarianza del diagramma sotto lo scambio delle due linee fermioniche interne.

La contrazione sugli indici di gauge dà:

$$f^{ACD}f^{BCD} = C_2(8)\delta_{AB}. \quad (4.76)$$

La contrazione sugli indici di Lorentz dà:

$$2p_6^2 g_{MN} + 18p_M p_N, \quad (4.77)$$

dove p_6^2 indica $p_6^2 = p^2 + 2p_z p_{\bar{z}}$.

• **Diagramma 3:**

Il diagramma in cui girano i ghost nel loop è proporzionale a:

$$-ig^2 \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_c \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} f^{ACD} p_M \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} f^{BCD} p_N. \quad (4.78)$$

• **Diagramma 4:**

Il diagramma 4 è proporzionale a:

$$\begin{aligned} -i(ig)^2 & \left[\frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_\Psi \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \left(-i \frac{\Gamma_R p_R}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} \right) \Gamma_M T^A \right. \\ & \times \left. \left(-i \frac{\Gamma_S p_S}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} \right) \Gamma_N T^B \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

La traccia sulle matrici gamma seguita dalla contrazione sugli indici di Lorentz dà un fattore:

$$Tr[\Gamma_M \Gamma_R \Gamma_N \Gamma_S] p_R p_S = -8p^2. \quad (4.80)$$

La traccia sugli indici di $SU(3)$ dà un fattore

$$Tr[T_{\mathcal{R}}^A T_{\mathcal{R}}^B] = C(\mathcal{R}). \quad (4.81)$$

SOMMA

- Sommando la parte dei quattro diagrammi senza propagatori twistati otteniamo:

$$\langle H_{z,i} H_{\bar{z},-j} \rangle = -i \frac{g^2}{2} (4C_2(8) - N_F(C(f) + C(s))) \sum_{\vec{m}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 + |\lambda|^2)^2} \quad (4.82)$$

Questo è un termine di massa *finito*, proporzionale a $\frac{1}{R^2}$, come ci aspettavamo dalla discussione dei capitoli precedenti ¹.

¹Per la risoluzione dell'integrale si veda l'App. A

- Nei termini della somma che contengono un propagatore twistato è presente un fattore

$$\delta_{\vec{m}-\vec{m}'}\delta_{\vec{m}+\vec{m}'} , \quad (4.83)$$

che è non nullo solo nel caso in cui nel loop gira un modo zero. In questo caso l'integrale sull'impulso è

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \sim \Lambda^2 , \quad (4.84)$$

che diverge quadraticamente.

Utilizzando le relazioni

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}} [t^{-j}t^{+i}P^k] = -if_8^{+i-j} \frac{1}{1-\tau^l} \text{Tr}_{\mathcal{R}} [t^8P^k] \quad (4.85)$$

e

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}} [P^k t^8] = \sqrt{3} \sum_{\mathcal{R}_r} d_{\mathcal{R}_r} q_{\mathcal{R}_r} \tau^{2n_p(\frac{n_{\mathcal{R}}}{3}+q_{\mathcal{R}_r})k} , \quad (4.86)$$

si verifica facilmente che la traccia sugli indici di $SU(3)$ si annulla per la rappresentazione aggiunta, mentre per le rappresentazioni fondamentale e simmetrica si ha:

$$\text{Tr}_f[t^i t^{-j}P] = -\text{Tr}_s[t^i t^{-j}P] . \quad (4.87)$$

La somma dei contributi divergenti è quindi nulla nella configurazione $N_f = N_s$.

Calcolando in maniera analoga i restanti diagrammi e includendo tutte le configurazioni topologicamente distinte per ogni correlatore otteniamo:

- Un contributo *finito* nei termini di massa, proporzionale a $\frac{1}{R^2}$, proveniente dai diagrammi senza inserzione di propagatori twistati, come ad esempio (4.82);
- Un contributo *divergente quadraticamente* ai termini di massa proveniente dai diagrammi con un propagatore twistato. A causa dell'inversione dell'impulso di KK dovuto al twist questo contributo viene solo dai diagrammi in cui girano modi zero; questo termine viene dalla stessa Lagrangiana di brana (3.93) che genera i tadpoli ed è quindi assente nella configurazione che stiamo studiando, come abbiamo mostrato esplicitamente per m_{11}^2 ;
- Un contributo *finito* ai termini quartici, proveniente dall'inserzione di zero e due propagatori twistati;

- Un contributo *divergente logicamente*, proveniente dai diagrammi con l'inserzione di un solo propagatore twistato. Questo termine è presente solo nei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che sono quelli già presenti a livello albero, e contribuisce alla rinormalizzazione della costante d'accoppiamento di gauge. La struttura di questo operatore corrisponde al terzo termine della Lagrangiana di brana (3.92).

Riportiamo ora la parte finita dei coefficienti:

$$m_{11}^2 = \frac{1}{2}(12 - \frac{11}{2}N_F) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^2} \quad (4.88)$$

$$m_{22}^2 = \frac{1}{2}(12 - \frac{11}{2}N_F) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^2} \quad (4.89)$$

$$m_{12}^2 = \frac{1}{2}(12 - \frac{11}{2}N_F)(1 + 2i) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_z p_{\bar{z}}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^2} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{95}{2} \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(p_z p_{\bar{z}})^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \\ &+ \frac{1}{2}(8N_F - 235) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 p_z p_{\bar{z}}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \\ &- 5(N_F - 2) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^4}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\frac{95}{2} \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(p_z p_{\bar{z}})^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \\ &+ \frac{1}{2}(8N_F - 235) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 p_z p_{\bar{z}}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \\ &- 5(N_F - 2) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^4}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -104 \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(p_z p_{\bar{z}})^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \\ &+ \frac{1}{2}(56N_F - 617) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 p_z p_{\bar{z}}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \\ &- 2(2N_F - 9) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^4}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\lambda_5 = -\frac{7}{2}(8N_F - 65) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_{\vec{z}}^4}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \lambda_6 &= -\frac{439}{2} \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_z p_{\vec{z}}^3}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \\ &+ 2(9N_F - 128) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 p_{\vec{z}}^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \lambda_7 &= -\frac{139}{2} \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_z p_{\vec{z}}^3}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \\ &+ (18N_F - 181) \sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 p_{\vec{z}}^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Gli integrali che compaiono nelle (4.88)–(4.96) sono calcolati, per $R_1 = R_2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, in App. A.

4.3.3 Minimizzazione e spettro di massa

Ottenuti i coefficienti possiamo procedere con la minimizzazione del potenziale. Utilizzando rotazioni di $SU(2)$ e $U(1)$ per orientare i campi possiamo parametrizzare i vev, senza perdere generalità, in funzione di due parametri reali v_1, v_2 e di una fase χ :

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \langle H_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_2 e^{i\chi} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.97)$$

Definiamo $v_i = \omega_i/R$ in modo da avere un potenziale omogeneo nella grandezza R , che deve essere fissata dinamicamente a partire dal valore dei minimi. Una volta ottenuti i valori di v_1, v_2, χ che minimizzano il potenziale, possiamo espandere i campi nella maniera seguente:

$$H_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1^+ \\ \frac{v_1 + \sigma_1 + i\eta_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} \frac{v_2 + \sigma_2 + i\eta_2}{\sqrt{2}} \\ \varphi_2^- \end{pmatrix}. \quad (4.98)$$

In questo caso, poichè il potenziale viola $\mathcal{CP}$, non c'è disaccoppiamento tra il settore reale e quello immaginario, quindi dobbiamo considerare gli autostati della matrice 4×4 completa. Questi saranno:

- Un campo neutro a massa nulla, uno dei tre bosoni di Goldstone necessari a dare massa ai $W^\pm$ e allo Z^0 ;

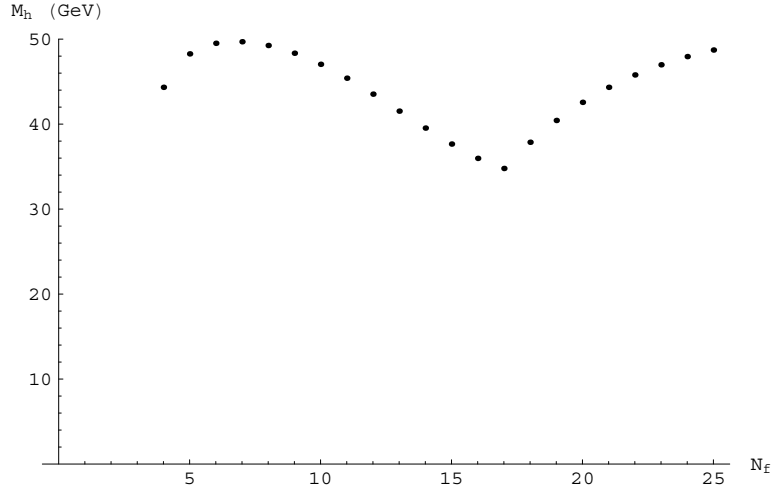


Figura 4.9: Valore della massa M_h del campo scalare leggero al variare del numero di fermioni N_F .

- Tre campi con autovalore non definito sotto $\mathcal{CP}$, dati dal mescolamento dei campi h, H, A nel settore neutro.

Una volta ottenuto numericamente il minimo del potenziale (ω_1, ω_2) , si possono calcolare le masse dei due campi diagonalizzando la matrice di massa, ottenuta dalle derivate seconde del potenziale:

$$M_{ij} = R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial h_i \partial h_j} \Big|_{H_i = \langle H_i \rangle} \quad (4.99)$$

dove $h_{i,j}$ può assumere i valori $\sigma_{1,2}, \eta_{1,2}$.

Anche in questo caso il valore del parametro R , il raggio di compattificazione delle extra-dimensioni, deve essere fissato imponendo che la teoria riproduca il valore noto della massa del bosone W . La relazione tra massa del W e il raggio R è in questo caso:

$$M_W^2 = \frac{1}{4} g_4^2 v^2 = \frac{g_4^2}{4R^2} (\omega_1^2 + \omega_2^2). \quad (4.100)$$

Riportiamo in Fig. 4.9 il risultato ottenuto per la massa del campo scalare leggero in funzione del numero di fermioni nella teoria, mentre in Fig. 4.10 è riportato il valore, sempre in funzione di N_F , del parametro $1/R$. (ricordiamo che un'unità di N_F corrisponde a un fermione nella fondamentale e uno nella simmetrica).

Alcune osservazioni su questi risultati:

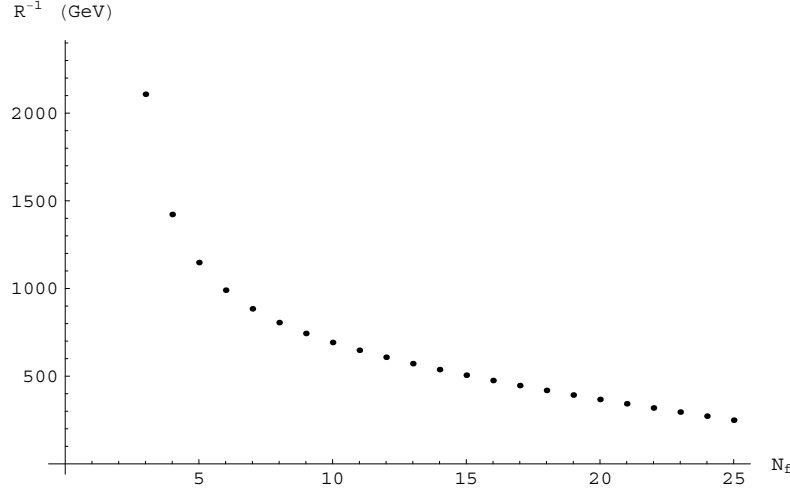


Figura 4.10: Valore dell'inverso del raggio di compattificazione R al variare del numero di fermioni N_F .

- C'è un significativo innalzamento della massa del campo scalare leggero rispetto al caso delle Wilson lines;
- C'è un innalzamento rispetto al caso pentadimensionale;
- Nonostante ciò la massa del campo più leggero continua a essere troppo bassa rispetto ai limiti sperimentali;
- C'è invece un innalzamento notevole, rispetto al caso 5D, del parametro $1/R$. Questo è un parametro molto importante perchè rappresenta il cut-off della teoria effettiva quadridimensionale, ovvero la scala a cui interviene *nuova fisica*. Sappiamo dai più recenti risultati sperimentali che si deve avere $R^{-1} \gtrsim 1$ TeV.

Appare evidente dai risultati dell'analisi condotta che nell'orbifold $T^2/\mathbb{Z}_2$ la presenza della direzione piatta nel potenziale fa sì che la massa del campo scalare leggero sia troppo bassa per poter costruire modelli realistici di rottura della simmetria elettrodebole, nonostante il significativo innalzamento rispetto al caso pentadimensionale. È tuttavia possibile che introducendo campi fermionici localizzati sulle brane si riesca ad ottenere un ulteriore fattore di innalzamento nella massa degli scalari come è mostrato ad esempio (nel caso pentadimensionale) nella referenza [24].

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo studiato la possibilità di costruire modelli basati sulla presenza di dimensioni extra in cui la rottura della simmetria elettrodebole avvenga senza generare correzioni radiative divergenti alla massa degli scalari. Questa possibilità si basa sul meccanismo di unificazione gauge-Higgs in cui diverse componenti del vettore di gauge D -dimensionale assumono il ruolo nella Lagrangiana effettiva di campi di gauge quadridimensionali e di campi scalari. Per ottenere quest'effetto è necessario compattificare la teoria su orbifold.

Per poter costruire modelli realistici in questo contesto è necessario ottenere modelli in cui la predizione per la massa dei campi scalari che rompono la simmetria elettrodebole sia compatibile con gli attuali limiti sperimentali. Questo non avviene nei modelli in cinque dimensioni, studiati in letteratura, perché in quel caso il potenziale nel settore scalare è nullo a livello albero. Nel caso dei modelli in sei dimensioni è invece presente un termine quartico a livello albero la cui presenza, nel caso degli orbifold $T_2/\mathbb{Z}_{3,4,6}$, induce un notevole innalzamento della massa del campo di Higgs. In questo caso si ha infatti la predizione $M_h = 2M_W$, in ottimo accordo con i limiti sperimentali.

Passando in sei dimensioni vi è però anche un'altra differenza rispetto al caso pentadimensionale: in questo caso la Lagrangiana localizzata ai punti fissi contiene termini di massa per i campi divergenti. Questi termini vanificano la stabilizzazione della scala di rottura della simmetria elettrodebole ottenuta grazie al meccanismo di unificazione gauge-Higgs. Il calcolo esplicito mostra che nel caso dell'orbifold $T_2/\mathbb{Z}_2$ si ha una cancellazione delle divergenze quadratiche se si sceglie come contenuto di materia un uguale numero di rappresentazioni fondamentali e simmetriche. Abbiamo quindi condotto un'analisi dettagliata della rottura della simmetria elettrodebole su $T_2/\mathbb{Z}_2$ con $N_f = N_s$, per verificare quali siano in questo caso le predizioni per la massa dei campi scalari. In questo caso l'analisi è complicata dal fatto che si possono definire solo modelli con due doppietti di Higgs, e che il potenziale nel settore scalare ha una direzione piatta.

L'analisi delle fluttuazioni intorno alla direzione piatta viene effettuata

nella maniera più generale, tenendo conto di tutte le correzioni radiative a un loop. I risultati di questa analisi mostrano un significativo miglioramento rispetto al caso pentadimensionale, ma non sufficiente a rendere le predizioni di questi modelli compatibili con i risultati sperimentali. Esiste tuttavia la possibilità che introducendo campi fermionici localizzati ai punti fissi dell'orbifold si riesca ad ottenere un ulteriore innalzamento della massa degli scalari, analogamente a quanto avviene nel caso pentadimensionale. Contiamo di poter tornare in un prossimo futuro su questi argomenti.

Ringraziamenti

Ringrazio il Prof. Guido Martinelli e il Dott. Luca Silvestrini per la loro disponibilità e per avermi permesso di affrontare questo lavoro di tesi e di intraprendere l'affascinante cammino della ricerca. Ringrazio inoltre tutti coloro che nel corso degli anni hanno arricchito le mie conoscenze e stimolato i miei interessi, permettendomi di arrivare fin qui.

Un ringraziamento sentito va a tutti i ragazzi della Saletta Laureandi Teorici la cui simpatia ha reso più piacevoli le lunghe giornate di lavoro di questi mesi: Alessio “il matto”, Antonio, Kristina, Tommaso (per gli amici messer Maso), Umberto; Lisa e Paolo (oltre al resto) per le discussioni di fisica e Marco e Tommaso per quelle di informatica.

Ringrazio inoltre gli amici e colleghi fisici con i quali ho condiviso i momenti più significativi di questi anni, dentro e fuori l'università: Barbara, Beta, Francesco, Giacomo, Giorgio (fidato compare di tre anni di fisichetta...), Laura, Manuela, Sergio, Walter.

Grazie a tutti i partecipanti del “SNFT 2005” per le interessanti diquisizioni di fisica teorica e per la compagnia in altrettanto interessanti esperienze enogastronomiche...

Un ringraziamento particolare agli amici di sempre, che hanno continuato a essermi vicini nonostante io sia più di una volta scomparso, sommerso da pagine di conti: Alice, Bea, David, Enrico & Rosa, Francesca, quell'animale di Giulio, Luca.

Infine, last but not least, un grande ringraziamento va ai miei genitori per il continuo sostegno e incoraggiamento.

Appendice A

Integrali di loop

Mostriamo in questa appendice come si calcolano gli integrali sull'impulso di loop che intervengono nel calcolo dei diagrammi di Feynman 6-dimensionali.

La forma generale degli integrali per i diagrammi con due linee esterne è:

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p^2)^\alpha (p_z)^\beta (p_{\bar{z}})^\gamma}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^2} \quad \text{con } \frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma = 2. \quad (\text{A.1})$$

La forma generale degli integrali per i diagrammi con quattro linee esterne è:

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p^2)^{\alpha'} (p_z)^{\beta'} (p_{\bar{z}})^{\gamma'}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} \quad \text{con } \frac{\alpha'}{2} + \beta' + \gamma' = 4. \quad (\text{A.2})$$

Risulta utile nel calcolo di questi integrali definire la grandezza:

$$\mathcal{B}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}. \quad (\text{A.3})$$

Utilizzando la formula di Poisson si ricava la relazione:

$$\mathcal{B}(s) = s^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}\left(\frac{1}{s}\right). \quad (\text{A.4})$$

Derivando due volte si ottengono le ulteriori relazioni:

$$\mathcal{B}'(s) = -\frac{1}{2} s^{-\frac{3}{2}} \mathcal{B}\left(\frac{1}{s}\right) - s^{\frac{5}{2}} \mathcal{B}'\left(\frac{1}{s}\right) \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{B}''(s) = \frac{3}{4} s^{-\frac{5}{2}} \mathcal{B}\left(\frac{1}{s}\right) + 3s^{-\frac{7}{2}} \mathcal{B}'\left(\frac{1}{s}\right) + s^{-\frac{9}{2}} \mathcal{B}''\left(\frac{1}{s}\right) \quad (\text{A.6})$$

Risultano utili inoltre le seguenti relazioni:

- La formula di Schwinger:

$$\frac{1}{(p^2 + m^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dt \, t^{n-1} e^{-(p^2 + m^2)t} \quad (\text{A.7})$$

- Gli integrali gaussiani:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2 t} = \frac{1}{(16\pi^2)t^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^2 e^{-p^2 t} = \frac{(-2)}{(16\pi^2)t^3}, \quad (\text{A.9})$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^4 e^{-p^2 t} = \frac{(3!)}{(16\pi^2)t^4}. \quad (\text{A.10})$$

Passiamo quindi a calcolare gli integrali:

1.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^2} = \quad (\text{A.11})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^2 \int_0^\infty dt \, e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.12})$$

usando (A.9)

$$\frac{1}{2 \cdot (8\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty \frac{dt}{t^3} e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)t} = \quad (\text{A.13})$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$\frac{1}{\pi^2 R^4 (8\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt \frac{(\mathcal{B})^2(t)}{t^3} + \int_0^1 dt \frac{(\mathcal{B})^2(t)}{t^3} \right). \quad (\text{A.14})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\frac{1}{(8\pi^2)\pi^2 R^4} \frac{-1 - 2i}{2} \int_1^\infty dt \left(t^2 (\mathcal{B}(t))^2 + \frac{(\mathcal{B}(t))^2}{t^4} + \frac{(\mathcal{B}(t))^2}{t^3} \right). \quad (\text{A.15})$$

2.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_z p_{\bar{z}}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^2} = \quad (\text{A.16})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p_z p_{\bar{z}} \int_0^\infty dt e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.17})$$

usando (A.8)

$$\frac{1}{(16\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty dt \frac{1}{t^2} \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)t} = \quad (\text{A.18})$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$\frac{1}{\pi^2 R^4 (16\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt \frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t^2} + \int_0^1 dt \frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t^2} \right). \quad (\text{A.19})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\frac{1}{(16\pi^2)\pi^2 R^4} \int_1^\infty dt \left(\frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t^2} + \frac{1}{2} t^2 (\mathcal{B}(t))^2 + t^3 \mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t) \right). \quad (\text{A.20})$$

3.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_{\bar{z}} p_z}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^2} = \quad (\text{A.21})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p_{\bar{z}} p_z \int_0^\infty dt e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.22})$$

usando (A.8)

$$\frac{1}{(16\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty dt \frac{1}{t^2} \frac{1}{2} \left(\frac{-2m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2} - 2i \frac{mn}{R^2} \right) e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)t} = \quad (\text{A.23})$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$\frac{1}{\pi^2 R^4 (16\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt (-1 - 2i) \frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t^2} + \int_0^1 dt (-1 - 2i) \frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t^2} \right). \quad (\text{A.24})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\frac{1}{(16\pi^2)\pi^2 R^4} \frac{-1-2i}{2} \int_1^\infty dt \left(\frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t^2} + t^2(\mathcal{B}(t))^2 + t^3\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t) \right). \quad (\text{A.25})$$

4.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p^2)^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} = \quad (\text{A.26})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^4 \int_0^\infty dt e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.27})$$

usando (A.10)

$$\frac{1}{(16\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)t} = \quad (\text{A.28})$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$\frac{1}{(16\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt \frac{\mathcal{B}^2(t)}{t} + \int_0^1 dt \frac{\mathcal{B}^2(t)}{t} \right). \quad (\text{A.29})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\frac{1}{(16\pi^2)} \int_1^\infty dt \left(\frac{(\mathcal{B}(t))^2}{t} + (\mathcal{B}(t))^2 \right). \quad (\text{A.30})$$

5.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 p_z p_{\bar{z}}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} = \quad (\text{A.31})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^2 p_z p_{\bar{z}} \int_0^\infty dt e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.32})$$

usando (A.9)

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(16\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty dt \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)} = \quad (\text{A.33})$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$\frac{1}{3(16\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt \mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t) + \int_0^1 dt \mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t) \right). \quad (\text{A.34})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\frac{1}{3(16\pi^2)} \int_1^\infty dt \left(\mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t) + \frac{1}{2} (\mathcal{B}(t))^2 + \frac{\mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t)}{t} \right). \quad (\text{A.35})$$

6.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 (p_{\bar{z}})^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} = \quad (\text{A.36})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^2 (p_{\bar{z}})^2 \int_0^\infty dt e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.37})$$

usando (A.9)

$$\frac{1}{3} \frac{1}{(16\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty dt \frac{1}{2} \left(-2 \frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2} - 2i \frac{mn}{R^2} \right) e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)} = \quad (\text{A.38})$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$-\frac{(1+2i)}{6(16\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt \mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t) + \int_0^1 dt \mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t) \right). \quad (\text{A.39})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\frac{-(1+2i)}{6(16\pi^2)} \int_1^\infty dt \left(\mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t) + \frac{1}{2} (\mathcal{B}(t))^2 + \frac{\mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t)}{t} \right). \quad (\text{A.40})$$

7.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p_z p_{\bar{z}})^2}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} = \quad (\text{A.41})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (p_z p_{\bar{z}})^2 \int_0^\infty dt e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.42})$$

usando (A.10)

$$\frac{1}{3!} \frac{1}{(16\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty dt \frac{1}{4} t \left(\frac{m^4}{R^4} + \frac{n^4}{R^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{R^4} \right) e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)} = \quad (\text{A.43})$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$\frac{1}{2 \cdot 3! (16\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt t (\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t) + (\mathcal{B}'(t))^2) \right) \quad (\text{A.44})$$

$$+ \int_0^1 dt t (\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t) + (\mathcal{B}'(t))^2) \Big). \quad (\text{A.45})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 3! (16\pi^2)} \int_1^\infty dt \left(\frac{\mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t)}{t} + (\mathcal{B}(t))^2 + \frac{\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t)}{t^2} \right. \\ \left. + \frac{(\mathcal{B}'(t))^2}{t^2} + t(\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t)) + t(\mathcal{B}'(t))^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

8.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p_z p_{\bar{z}}) p_{\bar{z}} p_{\bar{z}}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} = \quad (\text{A.47})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (p_z p_{\bar{z}}) p_{\bar{z}} p_{\bar{z}} \int_0^\infty dt e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.48})$$

usando (A.10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \frac{1}{(16\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty dt \frac{1}{4} t \left(-2 \frac{m^4}{R^4} - 2i \frac{m^3 n}{R^4} + \frac{n^4}{R^4} - \right. \\ \left. - 2i \frac{m n^4}{R^4} - 2 \frac{m^2 n^2}{R^4} \right) e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)} = \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$\frac{1}{4 \cdot 3! (16\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt \, t (-\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t) - (4i+1)(\mathcal{B}'(t))^2) + \int_0^1 dt \, t (-\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t) - (4i+1)(\mathcal{B}'(t))^2) \right). \quad (\text{A.50})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{4 \cdot 3! (16\pi^2)} \int_1^\infty dt \left(t(\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t)) + (4i+1)t(\mathcal{B}'(t))^2 + \frac{\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t)}{t^2} \right. \\ \left. + \frac{(\mathcal{B}'(t))^2}{t^2} + (4i + \frac{7}{4})(\mathcal{B}(t))^2 + (4i+4) \frac{\mathcal{B}'(t) \mathcal{B}(t)}{t} \right) \quad (\text{A.51}) \end{aligned}$$

9.

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_{\bar{z}} p_{\bar{z}} p_{\bar{z}} p_{\bar{z}}}{(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)^4} = \quad (\text{A.52})$$

usando (A.7)

$$\sum_{\vec{n}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p_{\bar{z}} p_{\bar{z}} p_{\bar{z}} p_{\bar{z}} \int_0^\infty dt \, e^{-(p^2 + |\lambda_{\vec{n}}|^2)t} = \quad (\text{A.53})$$

usando (A.10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3! (16\pi^2)} \sum_{m,n} \int_0^\infty dt \, \frac{1}{4} t \left(4 \frac{m^4}{R^4} + 4i \frac{m^3 n}{R^4} + \frac{n^4}{R^4} - \right. \\ \left. - 4i \frac{m n^4}{R^4} - 8 \frac{m^2 n^2}{R^4} \right) e^{-\left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)} = \quad (\text{A.54}) \end{aligned}$$

con la sostituzione $t \rightarrow t' = \pi R^2 t$

$$\frac{1}{4 \cdot 3! (16\pi^2)} \left(\int_1^\infty dt \, t (5\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t) - 8(\mathcal{B}'(t))^2) \right) \quad (\text{A.55})$$

$$+ \int_0^1 dt \, t (5\mathcal{B}''(t) \mathcal{B}(t) - 8(\mathcal{B}'(t))^2) \right). \quad (\text{A.56})$$

Con la sostituzione $t \rightarrow \frac{1}{s}$ nell'integrale con intervallo $(0, 1)$ e usando le (A.4), (A.5), e (A.6) si ottiene infine:

$$\frac{1}{4 \cdot 3!(16\pi^2)} \int_1^\infty dt \left(7 \frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t} + \frac{7}{4}(\mathcal{B}(t))^2 + 5 \frac{\mathcal{B}''(t)\mathcal{B}(t)}{t^2} - 8 \frac{(\mathcal{B}'(t))^2}{t^2} + 5t\mathcal{B}''(t)\mathcal{B}(t) - 8t(\mathcal{B}'(t))^2 \right). \quad (\text{A.57})$$

Tutti gli integrali si possono esprimere in funzione degli integrali numerici:

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{(\mathcal{B}(t))^2}{t} = 0,044668 \quad (\text{A.58})$$

$$I_2 = \int_1^\infty (\mathcal{B}(t))^2 = 0,056212 \quad (\text{A.59})$$

$$I_3 = \int_1^\infty \mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t) = 0,090170 \quad (\text{A.60})$$

$$I_4 = \int_1^\infty \frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t} = 0,071806 \quad (\text{A.61})$$

$$I_5 = \int_1^\infty t\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t) = 0,118276 \quad (\text{A.62})$$

$$I_6 = \int_1^\infty t(\mathcal{B}'(t))^2 = 0,013604 \quad (\text{A.63})$$

$$I_7 = \int_1^\infty \frac{\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t)}{t} = 0,071806 \quad (\text{A.64})$$

$$I_8 = \int_1^\infty \frac{(\mathcal{B}'(t))^2}{t^2} = 0,009129 \quad (\text{A.65})$$

$$I_9 = \int_1^\infty t\mathcal{B}''(t)\mathcal{B}(t) = 0,371651 \quad (\text{A.66})$$

$$I_{10} = \int_1^\infty \frac{\mathcal{B}''(t)\mathcal{B}(t)}{t^2} = 0,185889 \quad (\text{A.67})$$

$$I_{11} = \int_1^\infty \mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t) = 0,0591509 \quad (\text{A.68})$$

$$I_{12} = \int_1^\infty t^2(\mathcal{B}(t))^2 = 0,102828 \quad (\text{A.69})$$

$$I_{13} = \int_1^\infty t^3\mathcal{B}'(t)\mathcal{B}(t) = 0,244413 \quad (\text{A.70})$$

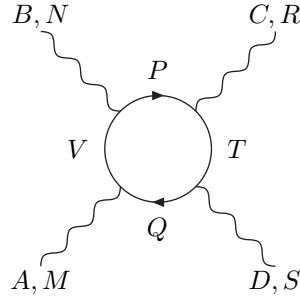
$$I_{14} = \int_1^\infty \frac{(\mathcal{B}(t))^2}{t^3} = 0,531019 \quad (\text{A.71})$$

$$I_{15} = \int_1^\infty \frac{(\mathcal{B}(t))^2}{t^4} = 0,360091. \quad (\text{A.72})$$

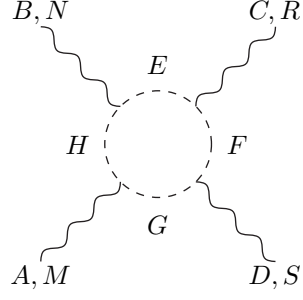
Appendice B

Diagrammi a 4 punti

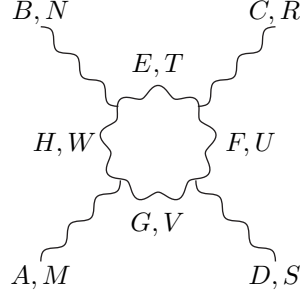
Riportiamo in questa appendice le espressioni esplicite dei diagrammi a un loop con quattro linee esterne, che avevamo omesso nel capitolo 4 per non appesantire la trattazione.



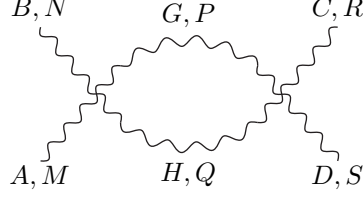
$$\begin{aligned}
 & - i(ig)^4 Tr \left[\frac{i\Gamma_{MPM}}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} \Gamma_P T^A \right. \\
 & \times \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_\Psi \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{i\Gamma_{NP_N}}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} \Gamma_Q T^B \\
 & \times \frac{i\Gamma_{RP_R}}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} \Gamma_T T^C \\
 & \left. \times \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_\Psi \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{i\Gamma_{SP_S}}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} \Gamma_V T^D \right] \quad (B.1)
 \end{aligned}$$



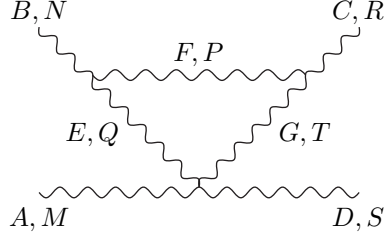
$$\begin{aligned}
& - \quad g^4 \left[\frac{i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} f^{HAE} p_M \right. \\
& \times \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_C \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} f^{EBF} p_N \\
& \times \frac{i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} f^{FCG} p_R \\
& \times \left. \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_C \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} f^{GDH} p_S \right] \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& g^4 \left[f^{HAE} (g_{VW}(-2p_M) + g_{VM}p_W + g_{WM}p_V) \right. \\
& \times \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} \\
& \times f^{EBF} (g_{WT}(-2p_N) + g_{WN}p_T + g_{TN}p_W) \\
& \times \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_A \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} \\
& \times f^{FCG} (g_{TV}(-2p_R) + g_{TR}p_U + g_{UR}p_T) \\
& \times \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} \\
& \times f^{GDH} (g_{UV}(-2p_S) + g_{US}p_V + g_{VS}p_U) \\
& \times \left. \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_A \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} \right] \tag{B.3}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (-ig^2)^2 \left\{ \left[f^{GBE} f^{AHE} (g_{MN} g_{RS} - g_{NS} g_{RM}) \right. \right. \\
& + f^{ABE} f^{GHE} (g_{NR} g_{MS} - g_{NS} g_{RM}) \\
& + f^{HBE} f^{GAE} (g_{NR} g_{MS} - g_{MN} g_{RS}) \Big] \\
& \times \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} \\
& \times \left[f^{GCF} f^{HDF} (g_{RS} g_{PQ} - g_{RQ} g_{PS}) \right. \\
& + f^{GHF} f^{CDF} (g_{RP} g_{SQ} - g_{RQ} g_{PS}) \\
& + f^{GDF} f^{CHF} (g_{RP} g_{SQ} - g_{RS} g_{PQ}) \Big] \\
& \times \left. \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_A \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} \right\} \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& g^4 \left[f^{GEH} f^{ADH} (g_{QM} g_{ST} - g_{QS} g_{MT}) \right. \\
& + f^{AEH} f^{GDH} (g_{QT} g_{MS} - g_{QS} g_{MT}) \\
& + f^{DEH} f^{GAH} (g_{QT} g_{MS} - g_{QM} g_{ST}) \Big] \\
& \times \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}}|^2} \\
& \times f^{EBF} [g_{PQ} (-2p_N) + g_{QN} p_p + g_{NP} p_Q] \\
& \times \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_A \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} \\
& \times f^{FCG} [g_{PT} (-2p_R) + g_{RT} p_P + g_{RP} p_T] \\
& \times \frac{1}{2} (\delta_{\vec{m}' - \vec{m}} + \mathcal{P}_A \delta_{\vec{m}' + \vec{m}}) \frac{-i}{p^2 + |\lambda_{\vec{m}'}|^2} \Big] \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Appendice C

Algebra del numeratore

Riportiamo in questa appendice la generalizzazione al caso D -dimensionale delle tracce sulle matrici di Dirac, e alcune relazioni di teoria di gruppi utilizzate nel calcolo dei diagrammi.

Tracce

$$tr\{\Gamma_D^M \Gamma_D^N\} = 2^{\frac{D}{2}} g^{MN} \quad (C.1)$$

$$tr\{\Gamma_D^M \Gamma_D^N \Gamma_D^P \Gamma_D^Q\} = 2^{\frac{D}{2}} (g^{MN} g^{PQ} - g^{MP} g^{NQ} + g^{MQ} g^{NP}) \quad (C.2)$$

$$tr\{\Gamma_D^M \Gamma_D^N \Gamma_D^P \Gamma_D^Q \Gamma_D^R \Gamma_D^S\} = 2^{\frac{D}{2}} (g^{MN} g^{PQ} g^{RS} - \dots) \quad (C.3)$$

La traccia di un generico numero dispari di matrici Γ è nulla.

Teoria dei gruppi

I generatori nella fondamentale sono indicati con la t minuscola, quelli nell'aggiunta con la T maiuscola.

$$Tr[t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (C.4)$$

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \quad (C.5)$$

$$\{t^a, t^b\} = \frac{1}{N} \delta_{ab} + \frac{1}{2} d^{abc} t^c + \frac{1}{2} i f^{abc} t^c \quad (C.6)$$

$$(t^a)_{ij} (t^a)_{kl} = -\frac{1}{4N} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} \quad (C.7)$$

$$Tr[t^a t^b t^c] = \frac{1}{4}(d^{abc} + i f^{abc}) \quad (C.8)$$

$$Tr[t^A t^B t^C t^D] = \frac{1}{4N}\delta_{ab}\delta_{cd} + \frac{1}{8}(d^{abe} + i f^{abe})(d^{cde} + i f^{cde}) \quad (C.9)$$

$$(T^a)_{bc} = -i f^{abc} \quad (C.10)$$

$$f^{acd} f^{bcd} = C_2(N) \quad (C.11)$$

$$f^{abe} f^{ecd} = [Tr(t^a t^b t^c t^d) - Tr(t^b t^c t^a t^d) - Tr(t^a t^b t^d t^c) + Tr(t^b t^a t^c t^d)] \quad (C.12)$$

$$Tr[T^a T^b T^c] = \frac{N}{2} i f^{abc} \quad (C.13)$$

$$Tr(T^a T^b T^c T^d) = \delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \frac{N}{4}(d^{abe} d^{cde} - d^{ace} d^{bde} + d^{ade} d^{bce}) \quad (C.14)$$

Appendice D

Fermioni in D dimensioni

Riassumiamo alcuni risultati noti riguardanti le rappresentazioni spinoriali del gruppo di Lorentz $SO(D-1, 1)$ in uno spazio-tempo con dimensione D generica. Definiamo un insieme di matrici finite Γ_M , le matrici di Dirac, come i generatori dell'algebra di Clifford. Esse soddisfano quindi per definizione le relazioni di anticommutazione

$$\{\Gamma_M, \Gamma_N\} = 2\eta_{MN} \quad (D.1)$$

A partire dalle Γ possiamo definire gli operatori

$$\Sigma_{MN} \equiv \frac{1}{4i}[\Gamma_M, \Gamma_N], \quad (D.2)$$

che soddisfano le regole di commutazione dei generatori del gruppo di Lorentz:

$$i[\Sigma_{MN}, \Sigma_{RS}] = \eta_{NR}\eta_{MS} - \eta_{MR}\eta_{NS} - \eta_{SM}\eta_{RN} + \eta_{SN}\eta_{RM} \quad (D.3)$$

Vogliamo ora mostrare che la rappresentazione (D.2):

- nel caso D pari è una *rappresentazione riducibile*, ed è possibile definire rappresentazioni irriducibili chirali (rappresentazioni di Weyl);
- nel caso D dispari è una *rappresentazione irriducibile*, ed è possibile quindi definire solo rappresentazioni vettoriali (di Dirac).

D pari

Per costruire una rappresentazione specifica delle matrici gamma in $D = 2n$ dimensioni, introduciamo le n matrici

$$a_k \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_{2k-1} + i\Gamma_{2k}) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (D.4)$$

Queste hanno regole di anticommutazione:

$$\{a_k, a_l^\dagger\} = \delta_{kl}, \quad \{a_k, a_l\} = \{a_k^\dagger, a_l^\dagger\} = 0. \quad (\text{D.5})$$

Introduciamo un vettore $|0\rangle$ nello spazio sul quale agiscono le matrici gamma, definito dalla condizione

$$a_k^\dagger |0\rangle = 0. \quad (\text{D.6})$$

Definiamo inoltre i vettori di base

$$|s_1 s_2 \dots s_n\rangle = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_n^{s_n} |0\rangle. \quad (\text{D.7})$$

Lo spazio così definito (spazio degli spinori di Dirac) ha dimensione 2^n .

Possiamo ora definire la matrice Γ_{2n+1} analogamente alla matrice di chiralità γ_5 in quattro dimensioni:

$$\Gamma_{2n+1} \equiv i^n \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{2n}. \quad (\text{D.8})$$

Essa gode della proprietà:

$$\Gamma_{2n+1}^2 = \mathbf{1}. \quad (\text{D.9})$$

Dalle relazioni di anticommutazione (D.1) segue che la Γ_{2n+1} anticommuta con tutte le altre matrici gamma:

$$\{\Gamma_{2n+1}, \Gamma_M\} = 0 \quad \text{per } M = 1, 2, \dots, 2n. \quad (\text{D.10})$$

Dalla (D.10) segue che la Γ_{2n+1} commuta con i generatori dell'algebra di Lorentz:

$$[\Gamma_{2n+1}, \Sigma_{MN}] = 0. \quad (\text{D.11})$$

I Σ_{MN} non possono quindi essere una rappresentazione irriducibile di $SO(D-1, 1)$. I generatori delle rappresentazioni irriducibili (di "Weyl") possono invece essere definiti come:

$$\Sigma_{MN}^\pm \equiv \Sigma_{MN} \left(\frac{1 \pm \Gamma_{2n+1}}{2} \right). \quad (\text{D.12})$$

Gli elementi della rappresentazione generata dai $\Sigma^\pm$ hanno quindi chiralità definita (spinori di Weyl).

D dispari

Nel caso di dimensione dispari $D = 2n + 1$ l'algebra di Clifford è data dalle stesse $2n$ matrici Γ_M del caso precedente *con l'aggiunta della matrice* Γ_{2n+1} definita in (D.8).

In questo caso non è possibile trovare una matrice non triviale che commuti con tutti i generatori di Lorentz. In questo caso infatti si ricava dalle (D.8 e D.9) che il prodotto di tutte le matrici gamma è triviale:

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{2n} \Gamma_{2n+1} = i^{-n} \cdot \mathbf{1}. \quad (\text{D.13})$$

In questo caso quindi i generatori Σ_{MN} sono una rappresentazione irriducibile del gruppo di Lorentz e non è possibile definire fermioni chirali.

Bibliografia

- [1] P. Ramond, *Journeys Beyond The Standard Model*. Perseus, 1999.
- [2] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics Of The Standard Model*. Cambridge university press, 1992.
- [3] G. G. Ross, *Grand Unified Theories*. The Benjamin/Cummings publishing company, 1984.
- [4] M. Peskin and V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [5] S. Weinberg, *The Quantum Theory Of Fields*, vol. 1. Cambridge University press, 1995.
- [6] J.-P. Derendinger, “Lecture notes on globally supersymmetric theories in four- dimensions and two-dimensions,”. Prepared for 3rd Hellenic School on Elementary Particle Physics, Corfu, Greece, 13-23 Sep 1989.
- [7] R. Barbieri, “Looking beyond the Standard Model: the supersymmetric option,” *Riv. Nuovo Cim.* **11N4** (1988) 1–45.
- [8] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry And Supergravity*. Princeton University press, 1983.
- [9] J. R. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner, “Radiative corrections to the masses of supersymmetric higgs bosons,” *Phys. Lett.* **B257** (1991) 83–91.
- [10] F. Feruglio, “Extra dimensions in particle physics,” *Eur. Phys. J.* **C33** (2004) s114–s128, [hep-ph/0401033](#).
- [11] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys. Lett.* **B429** (1998) 263–272, [hep-ph/9803315](#).

- [12] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV,” *Phys. Lett.* **B436** (1998) 257–263, [hep-ph/9804398](#).
- [13] L. Randall and R. Sundrum, “A large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370–3373, [hep-ph/9905221](#).
- [14] M. Quiros, “New ideas in symmetry breaking,” [hep-ph/0302189](#).
- [15] A. Masiero, C. A. Scrucca, M. Serone, and L. Silvestrini, “Non-local symmetry breaking in Kaluza-Klein theories,” *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 251601, [hep-ph/0107201](#).
- [16] R. Barbieri, L. J. Hall, and Y. Nomura, “Models of Scherk-Schwarz symmetry breaking in 5D: Classification and calculability,” *Nucl. Phys.* **B624** (2002) 63–80, [hep-th/0107004](#).
- [17] Y. Hosotani, “Dynamical mass generation by compact extra dimensions,” *Phys. Lett.* **B126** (1983) 309.
- [18] Y. Hosotani, “Dynamical gauge symmetry breaking as the Casimir effect,” *Phys. Lett.* **B129** (1983) 193.
- [19] G. von Gersdorff and M. Quiros, “Supersymmetry breaking on orbifolds from Wilson lines,” *Phys. Rev.* **D65** (2002) 064016, [hep-th/0110132](#).
- [20] A. Hebecker and J. March-Russell, “The structure of GUT breaking by orbifolding,” *Nucl. Phys.* **B625** (2002) 128–150, [hep-ph/0107039](#).
- [21] C. Csaki, C. Grojean, and H. Murayama, “Standard model Higgs from higher dimensional gauge fields,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 085012, [hep-ph/0210133](#).
- [22] G. von Gersdorff, N. Irges, and M. Quiros, “Bulk and brane radiative effects in gauge theories on orbifolds,” *Nucl. Phys.* **B635** (2002) 127–157, [hep-th/0204223](#).
- [23] G. von Gersdorff, N. Irges, and M. Quiros, “Finite mass corrections in orbifold gauge theories,” [hep-ph/0206029](#).
- [24] C. A. Scrucca, M. Serone, and L. Silvestrini, “Electroweak symmetry breaking and fermion masses from extra dimensions,” *Nucl. Phys.* **B669** (2003) 128–158, [hep-ph/0304220](#).

- [25] M. Kubo, C. S. Lim, and H. Yamashita, “The Hosotani mechanism in bulk gauge theories with an orbifold extra space S^1/Z_2 ,” *Mod. Phys. Lett. A* **17** (2002) 2249–2264, [hep-ph/0111327](#).
- [26] C. A. Scrucca, M. Serone, L. Silvestrini, and A. Wulzer, “Gauge-Higgs unification in orbifold models,” *JHEP* **02** (2004) 049, [hep-th/0312267](#).
- [27] S. Forste, H. P. Nilles, and A. Wingerter, “Geometry of rank reduction,” *Phys. Rev. D* **72** (2005) 026001, [hep-th/0504117](#).
- [28] G. von Gersdorff, N. Irges, and M. Quiros, “Radiative brane-mass terms in $D > 5$ orbifold gauge theories,” *Phys. Lett. B* **551** (2003) 351–359, [hep-ph/0210134](#).
- [29] G. Martinelli, M. Salvatori, C. A. Scrucca, and L. Silvestrini, “Minimal gauge-Higgs unification with a flavour symmetry,” [hep-ph/0503179](#).
- [30] C. Biggio and M. Quiros, “Higgs-gauge unification without tadpoles,” *Nucl. Phys. B* **703** (2004) 199–216, [hep-ph/0407348](#).
- [31] I. Antoniadis, K. Benakli, and M. Quiros, “Finite Higgs mass without supersymmetry,” *New J. Phys.* **3** (2001) 20, [hep-th/0108005](#).
- [32] S. R. Coleman and E. Weinberg, “Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **7** (1973) 1888–1910.
- [33] Y. Hosotani, S. Noda, and K. Takenaga, “Dynamical gauge symmetry breaking and mass generation on the orbifold T^2/Z_2 ,” *Phys. Rev. D* **69** (2004) 125014, [hep-ph/0403106](#).
- [34] S. Weinberg, *The Quantum Theory Of Fields*, vol. 3. Cambridge University press, 2000.
- [35] S. Davidson and H. E. Haber, “Basis-independent methods for the two-Higgs-doublet model,” [hep-ph/0504050](#).
- [36] I. F. Ginzburg and M. Krawczyk, “Symmetries of two Higgs doublet model and CP violation,” [hep-ph/0408011](#).