



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**RESTRICCIONES ASTROFÍSICAS A LA NATURALEZA DE LA MATERIA  
OSCURA**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTORADO EN CIENCIAS  
(FÍSICA)

PRESENTA:

**ALMA XÓCHITL GONZÁLEZ MORALES**

TUTORES PRINCIPALES:

DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

OCTAVIO VALENZUELA TIJERINO  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS  
INSTITUTO DE FÍSICA

MÉXICO, D. F. ABRIL 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Resumen

Actualmente sabemos que la materia bariónica compone tan solo el 4 % de la energía total en el universo actual. Las observaciones, interpretadas en el marco de la relatividad general, sugieren que una parte del otro 96 % está conformada por *materia oscura*, aproximadamente el 23 %, responsable de la formación de estructura en el universo; y que la expansión acelerada actual del mismo se describe de forma consistente con la presencia de la energía oscura, conformando el 73 % restante.

En esta tesis abordamos la pregunta: *¿Es posible restringir la naturaleza de la materia oscura con observaciones astrofísicas de la estructura a escalas galácticas y sub-galácticas en el universo?* Esta interrogante ha atraído la atención de la comunidad científica a lo largo de los últimos años. Aquí estudiamos las propiedades de la materia oscura desde distintas perspectivas, lo cual nos permite contar con una visión general de las posibilidades que se tienen para avanzar en la tarea de responder a esta pregunta.

Por un lado, establecimos una serie de restricciones a dos modelos de materia oscura escalar a partir de observaciones de la dinámica de galaxias, y el efecto de lente gravitatoria en las mismas, Capítulo 2. Estas observaciones imponen restricciones fuertes a este tipo de modelos. Nuestros resultados sugieren que: *i)* Configuraciones estáticas de campo escalar real no son un buen candidato a conformar la materia oscura de los halos galácticos, ya que al exigir que reproduzcan la dinámica observada en las galaxias, las ecuaciones de Einstein apuntan a que la densidad de materia ha de ser negativa, al menos para una región de la configuración [1]. Como resultado, la función de masa acumulada no es una función creciente y definida positiva, como se espera. *ii)* Para el campo escalar complejo con auto-interacción, las observaciones de lentes gravitatorias imponen restricciones al modo en que la formación de estructura ha de suceder bajo este esquema [2]; además, se

sugiere que la interacción dinámica entre el campo escalar y la materia bariónica puede ser más importante de lo que usualmente se considera, y ha de ser tomada en cuenta en futuros estudios de materia oscura escalar.

También exploramos la posibilidad de restringir las propiedades, masa y abundancia, de las estructuras más pequeñas que se pudieron haber formado en el universo, Capítulo 3. Basándonos en la precisión con que se conoce la dinámica del Sistema Solar, imponemos restricciones a la magnitud de las perturbaciones debidas a la presencia de sub-estructura en nuestra vecindad. Para ello construimos un modelo de la fuerza de marea producida por estructuras filamentarias, y realizamos un estudio de el efecto acumulativo de las perturbaciones de este tipo. Extendimos esta propuesta a la dinámica de estrellas binarias presentes en galaxias enanas del grupo local, complementando esfuerzos anteriores que consideran la presencia de sub-estructura puntual, o esférica. Nuestros resultados demuestran la capacidad que este tipo de pruebas experimental/observacional tiene para restringir la naturaleza de la materia oscura [3]. Las restricciones a las propiedades de la sub-estructura que podría estar presente en los halos galácticos a escalas locales pueden interpretarse en términos de las propiedades de las partículas de materia oscura que dan lugar a su formación.

Finalmente, estudiamos una posible fuente de error en los análisis e interpretaciones, de las observaciones cosmológicas que dan evidencia de la existencia de especies relativistas adicionales a las contempladas en el modelo estándar, Capítulo 4. Usualmente el análisis de estas observaciones se hace bajo el marco Bayesiano, el cual depende de las suposiciones sobre la función de distribución de los parámetros (*priors*). Aquí realizamos un análisis de las observaciones independiente de los priors, en el cual no encontramos evidencia importante de la presencia de especies relativistas extra [4]. La diferencia entre ambas aproximaciones sugiere que los priors juegan un papel más importante del que hasta ahora se había considerado. La evidencia sólida de la existencia de especies relativistas extra impone restricciones a las propiedades de las partículas de materia oscura, ya que ésta puede deberse a la existencia de neutrinos estériles, decaimientos de materia oscura, e incluso a la presencia de fuerzas en el sector oscuro.

## **Agradecimientos**

Gracias a:

CONACyT, al Posgrado en Ciencias Físicas y en especial al Instituto de Ciencias Nucleares por todos los apoyos, tanto económicos como académicos. Al proyecto DGAPA-UNAM IN115311 por los recursos otorgados durante el último año.

A Darío Núñez por todo el apoyo que me brindó durante los primeros semestres del doctorado. Sin su apoyo, no habría podido continuar.

A Octavio Valenzuela por todo el apoyo que me ha brindado, por las discusiones, y por haber estado disponible en todo momento, incluyendo fines de semana y vacaciones.

A Myriam Mondragón, por las discusiones académicas, por sus consejos y su amistad. A todos los investigadores con quienes he tenido el placer de trabajar, porque de cada uno he aprendido algo valioso. Muchas gracias a mis sinodales por haber revisado este manuscrito con tanta premura.

A la familia, por estar siempre cerca a pesar de las agendas apretadas. A los amigos que me han apoyado en todo momento.

En especial, agradezco a Alberto por su amor, paciencia y comprensión en mis momentos más difíciles. Por darme ánimos para terminar este proyecto, así como por ayudarme a revisar y corregir esta tesis. Gracias a planck por sacarme a pasear en los momentos más estresantes, y acompañarme durante las noches de desvelo.

A mis abuelos por su amor y comprensión, por cuidar de mí desde la infancia y hasta la fecha, y por ser ejemplo de trabajo y perseverancia. Finalmente, agradezco mis padres su apoyo y amor incondicional. Este trabajo es suyo; gracias y felicidades a ellos por el excelente trabajo que han realizado.



Emiliano, Tonathiu y Citlali les dedico esta tesis que con mucho trabajo he logrado concluir. Ustedes han sido, y serán siempre mi mayor motivación.

A mis padres, Martha y Miguel.

A Alberto y planck.



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción: La naturaleza de la materia oscura</b>	<b>1</b>
1.1. Evidencia observacional . . . . .	2
1.2. Propiedades de la materia oscura . . . . .	10
1.2.1. Densidad reliquia . . . . .	11
1.2.2. Candidatos . . . . .	14
1.3. Distribución de materia oscura . . . . .	18
1.3.1. Distribución a escalas galácticas y sub-galácticas . . . . .	19
1.3.2. Corte en el espectro de potencias . . . . .	22
<b>2. Materia oscura escalar</b>	<b>27</b>
2.1. Configuraciones estáticas de campo escalar real . . . . .	28
2.1.1. Determinando el potencial $V(\phi)$ a partir de las curvas de rotación . . . . .	30
2.1.2. Una advertencia sobre la determinación de la masa en las galaxias . . . . .	33
2.1.3. Prueba de consistencia: lentes gravitacionales . . . . .	36
2.1.4. Discusión . . . . .	38
2.2. Configuraciones de campo escalar complejo con auto-interacción . . . . .	39
2.2.1. Propiedades de lente gravitatoria . . . . .	41
2.2.2. Lentes gravitatorias vs dinámica de galaxias . . . . .	44
2.2.3. Discusión . . . . .	47

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>3. Materia oscura y sub-estructura</b>	<b>49</b>
3.1. Sub-estructura y perturbaciones dinámicas . . . . .	51
3.1.1. Encuentros individuales con mini-halos . . . . .	51
3.1.2. Encuentros individuales con filamentos . . . . .	52
3.1.3. Efecto acumulado de encuentros: Simulaciones Monte-Carlo de los encuentros	53
3.2. Dinámica de sistemas astrofísicos . . . . .	55
3.2.1. Sistema Solar: perturbaciones a la órbita del sistema Tierra-Luna, y a la órbita de Neptuno . . . . .	56
3.2.2. Binarias abiertas en las galaxias enanas del grupo local . . . . .	61
3.3. Una posible relación entre $\lambda_{st}$ y $m_{mh}$ . . . . .	66
3.4. Discusión . . . . .	68
<b>4. Materia oscura y especies relativistas.</b>	<b>73</b>
4.1. Evidencia de $\Delta N_{eff} > 0$ . . . . .	75
4.2. Aproximación Bayesiana vs frecuentista . . . . .	77
4.3. Análisis . . . . .	79
4.4. Discusión . . . . .	81
<b>5. Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>A. Relatividad general y cosmología</b>	<b>91</b>
A.1. Relatividad general . . . . .	91
A.2. Modelo cosmológico estándar . . . . .	94
A.3. Formación de estructura . . . . .	98
<b>B. Lentes gravitacionales</b>	<b>107</b>
B.1. Deflexión de la luz . . . . .	108
B.2. Ecuación de la lente . . . . .	112
<b>C. Modelos de sub-estructura</b>	<b>115</b>
C.1. Interacción dinámica con filamentos . . . . .	115

## ÍNDICE GENERAL

---

C.2. Correcciones para los modelos esféricos. . . . .	126
---	-----





# Introducción

---

*To understand the things that are at our door is the best preparation for understanding those that lie beyond.*

**Hypatia**

Gracias a la teoría general de la relatividad, formulada a principios del siglo XX por Albert Einstein, y al nacimiento y desarrollo de la cosmología observacional, hoy se cuenta con un modelo que describe consistentemente el origen y evolución de la estructura a gran escala en el universo. El incremento en la precisión de las observaciones cosmológicas de la radiación cósmica de fondo, la abundancia de elementos ligeros, la estructura a gran escala, y la expansión del universo, interpretadas bajo el marco de la relatividad general sugieren la presencia de dos tipos de materia (energía) desconocidos: la *materia oscura* y la *energía oscura*.

La primera corresponde a una componente no relativista (CDM, de sus siglas en inglés “materia oscura fría”), que interactúa principalmente de forma gravitacional con el resto de la materia. La segunda, es responsable de la actual expansión acelerada del universo. Esta última puede entenderse como una constante cosmológica,  $\Lambda$ , presente en las ecuaciones de Einstein; una constante más del modelo, de la misma naturaleza que la constante de la gravitación universal de Newton. O bien, como una componente material cuyo tensor de energía-momento es similar al de un fluido perfecto, con la particularidad de que su ecuación de estado es de la forma  $p = \omega\rho$ , donde, en el caso más simple,  $\omega = \text{cte.} = -1$ .

En el paradigma cosmológico actual, el modelo  $\Lambda$ -CDM, la contribución de la constante cosmológica a la densidad de materia-energía del universo presente es de aproximadamente el 72 %, mientras que solo el 4 % corresponde a materia bariónica.<sup>1</sup> El 23 % restante se le atribuye a la materia oscura

---

<sup>1</sup>De forma genérica se denomina materia bariónica a todo el contenido material del modelo estándar de física de partículas elementales.

## 1.1. EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

fría. Las observaciones del universo a gran y pequeña escala requieren de este tipo de materia para explicar la dinámica de diversos sistemas astrofísicos. Por otro lado, las posibles extensiones al modelo estándar de partículas predicen la existencia de nuevas partículas, algunas de ellas con propiedades tales que pueden conformar la materia oscura.

La materia oscura podría ser bosónica o fermiónica. Esta puede ser vista como manifestaciones diferentes de un campo cuántico, y ser descrita como una colección de partículas, o bien como un estado coherente clásico de un campo bosónico. Cualquiera que sea su representación, el estatus actual de las observaciones cosmológicas y astrofísicas nos permite poner a prueba, y restringir, los distintos modelos de materia oscura. En particular veremos que las observaciones a escalas galácticas y sub-galácticas contienen información muy valiosa respecto a su naturaleza.

A continuación motivaremos la existencia de la materia oscura como ingrediente fundamental en la formación de estructura del universo a partir de observaciones astrofísicas y cosmológicas. Después, haremos un breve resumen de las propiedades de los distintos candidatos a conformarla desde el punto de vista de la física de partículas. Finalmente discutiremos la relación entre la distribución de la materia oscura a escalas galácticas y sub-galácticas, y la naturaleza de la misma.

### 1.1. Evidencia observacional

Históricamente el pionero en señalar la existencia de la materia oscura fue Fritz Zwicky, en la década de 1930 [5]. Zwicky notó que en los cúmulos de galaxias, sus componentes parecen tener velocidades de dispersión demasiado grandes como para permanecer ligadas solo por el efecto mutuo de la gravedad. Esto, junto con el teorema del virial que relaciona la energía cinética y potencial del cúmulo, implicaría la presencia de una gran cantidad de materia gravitante no visible.

Zwicky midió las velocidades radiales de las galaxias que pertenecen al cúmulo de Coma, así como el radio de éste, y fue el primero en inferir la existencia de materia no observada. De hecho, también fue el primero en usar el término *materia oscura* para referirse a la materia faltante. Desde entonces se ha acumulando evidencia observacional que soporta la teoría de la existencia de materia oscura, entre las que se encuentran las siguientes observaciones.

## 1.1. EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

**Curvas de rotación en galaxias espirales.** Las galaxias espirales son sistemas gravitacionalmente estables, cuya materia visible, compuesta principalmente de estrellas y gas inter-estelar, está distribuida en un disco. Las estrellas y el gas se mueven alrededor del centro de la galaxia en orbitas aproximadamente circulares. La condición necesaria para mantener dichas orbitas puede obtenerse directamente de equilibrar la fuerza centrífuga con la fuerza gravitacional, lo cual se resume en que la dependencia radial de la velocidad circular,  $v(r)$ , debe de satisfacer la relación

$$v(r) = \sqrt{\frac{G M(r)}{r}}, \quad (1.1)$$

donde  $M(r)$  es la masa de la galaxia contenida dentro del radio  $r$ .

Desde principios de la década de los 80 se han realizado múltiples observaciones de la velocidad circular en galaxias, tanto dentro como fuera del disco estelar, hasta radios de aproximadamente 25 – 100 Kpc [6–8]. Para ello se utiliza como trazador, principalmente, la línea de 21 cm correspondiente a la transición hiper-fina del átomo de hidrógeno neutro. Este tipo de observaciones han dado evidencia de que las curvas de rotación no siguen una ley  $r^{-1/2}$ , para radios lo suficientemente grandes, más allá de donde se encuentra concentrada la materia visible, como se esperaría, sino que permanecen aproximadamente constantes después de alcanzar su máximo en velocidad. Por tanto, estos resultados, analizados en el marco de la gravitación estándar, están en desacuerdo con la cantidad de materia luminosa presente en las galaxias. Por ejemplo, la figura 1.1 muestra la curva de rotación para la galaxia NGC3198 [9] (puntos con barras de error), así como la correspondiente curva considerando que solo la componente en estrellas y gas determina la dinámica. La materia luminosa no es suficiente para reproducir la curva de rotación observada, sin embargo, la presencia de un halo de materia oscura esféricamente simétrico concilia el modelo con la observación.

Una alternativa a la materia oscura propuesta para explicar el comportamiento de las curvas de rotación es modificar la ley de gravedad. En 1983, Milgrom postuló que la aceleración gravitacional difiere del caso Newtoniano en sistemas con aceleraciones bajas, por debajo de los  $10^{-10} \text{ m/s}^2$  [10, 11]. Este modelo reproduce correctamente las curvas de rotación de muchas galaxias, sin embargo, las formulaciones relativistas de esta idea fallan en reproducir las observaciones de lentes gravitacionales en cúmulos de galaxias [12], que, al parecer, requieren la presencia de al menos una cierta cantidad de materia oscura.

## 1.1. EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

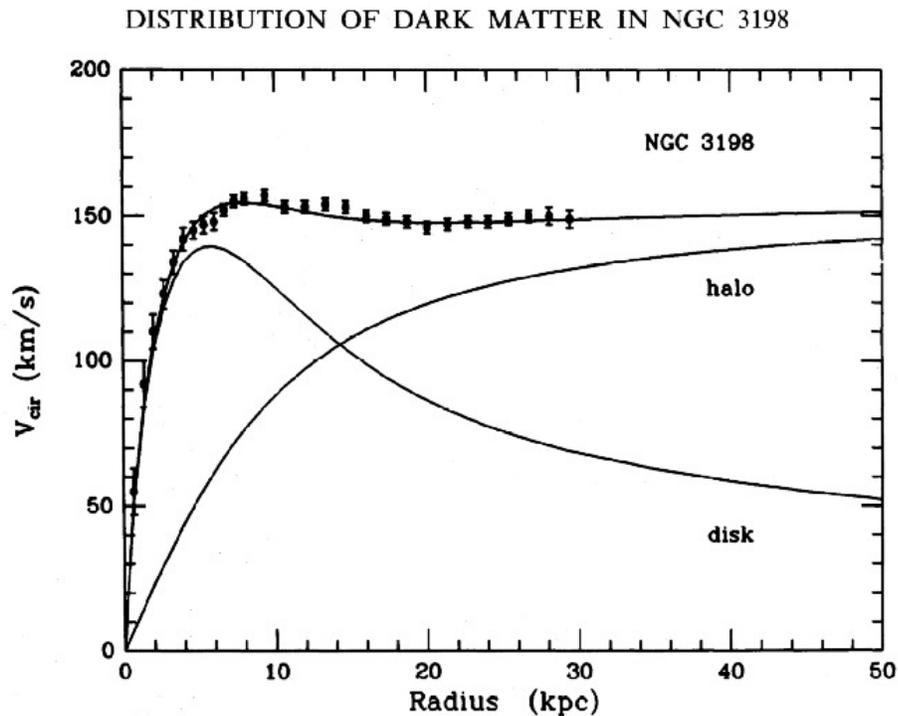


Figura 1.1: Curva de rotación de la galaxia *NGC3198*. Se muestra la curva de rotación determinada sólo por la componente luminosa de la galaxia (disk); por la presencia de un halo de materia oscura (halo), y la total, siendo esta última la que mejor se ajusta a la observación. Imagen tomada de [9]

**Curvas de rotación en galaxias de bajo brillo.** Si bien las curvas de rotación de galaxias espirales sugieren la presencia de una cantidad considerable de materia oscura, las de galaxias de bajo brillo superficial, al estar dominadas por este tipo de materia, proporcionan importantes indicios sobre su naturaleza. La contribución de la materia bariónica a la curva de rotación debe ser modelada a fin de extraer información del contenido no-bariónico. Sin embargo, dilucidar las contribuciones de cada tipo de materia a la masa de las galaxias es complicado. Por tanto, galaxias con bajo contenido bariónico proporcionan las pruebas más directas de la distribución de materia oscura.

Actualmente existe una vasta cantidad de observaciones en galaxias de bajo brillo superficial [13, 14]. Después de ajustar un modelo a la parte bariónica, y un halo esféricamente simétrico a

## 1.1. EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

la parte oscura, estas observaciones sugieren que el perfil de densidad de materia oscura cerca del centro de las galaxias de este tipo es plano,  $\rho(r) \approx \text{cte}$ . Es decir, tienen una estructura de “core”, en lugar de “cusp” como se encuentra en las simulaciones numéricas de formación de estructura [13]. Es importante señalar que estas conclusiones están sujetas al proceso de modelado de la parte bariónica y del halo de materia oscura, por lo que aún son polémicas [15, 16]. Determinar la estructura interna de los halos es importante para discriminar entre distintos candidatos de materia oscura, ya que dependiendo de sus propiedades producen halos con perfiles de densidad de un tipo, u otro.

**Cúmulos de Galaxias** Los cúmulos de galaxias son los objetos gravitacionalmente ligados más grandes del universo. Diferentes tipos de observaciones en estas configuraciones, en el visible y rayos X, así como vía el efecto Sunyaev-Zeldovich [17], dan evidencia sobre la existencia de materia oscura, y algunas pistas sobre sus propiedades. Típicamente se prefieren estas observaciones en cúmulos para estimar la densidad de materia total en el universo, debido a que conforman un porcentaje más alto del universo observado, y por tanto deberían ser menos susceptibles a las fluctuaciones locales de la relación masa-contenido bariónico. A continuación describimos dos de las observaciones usadas para estimar la cantidad de materia oscura en estas estructuras.

En un cúmulo de galaxias relajado, el perfil de temperatura  $T(r)$  del gas como función del radio  $r$  puede ser inferido usando las líneas de emisión del gas, mientras el número de electrones es determinado usando la luminosidad en rayos X. Combinadas, estas dos observaciones dan una estimación del perfil de presión radial,

$$p(r) \propto n_e(r)k_B T(r). \quad (1.2)$$

Por otro lado, un gas gravitante en estado estacionario debe satisfacer la ecuación de equilibrio hidrostático

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M(r)\rho_{gas}(r)}{r^2}. \quad (1.3)$$

donde  $M$  es la masa del cúmulo dentro del radio  $r$ , y  $\rho_{gas}(r)$  es la densidad del gas al mismo radio. Las dos ecuaciones anteriores pueden ser usadas para determinar la masa total de un cúmulo, y comparaciones de esta cantidad con la de materia bariónica  $M_b$  observada muestran, en general, que  $M \gg M_b$  [18, 19].

Por otro lado, los cúmulos de galaxias exhiben el efecto de lente gravitacional, véanse las referen-

## 1.1. EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

cias [20, 21] para una descripción detallada de este fenómeno, o bien un resumen en el Apéndice B de esta tesis. Dada una distribución de materia, la deflexión que sufre un rayo de luz sólo depende de la masa total encerrada dentro de un parámetro de impacto,  $\xi$ . En la aproximación de campo débil el ángulo de deflexión de un rayo de luz está dado por

$$\alpha(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi}. \quad (1.4)$$

Por tanto, a partir de mediciones del ángulo de deflexión y el parámetro de impacto, es posible inferir la masa total  $M$  del cúmulo para diferentes valores del radio. Observaciones de sistemas de lente gravitatoria, sugieren que la masa total de un cúmulo es mucho mayor que la masa correspondiente a la materia bariónica ( $M_b$ ) observada.

Una de las evidencias más recientes de la presencia de materia oscura en cúmulos de galaxias, corresponde a la observación de la colisión de dos de estas configuraciones [12]. En la figura 1.2 se tiene el cúmulo bala (*bullet cluster* en inglés), donde se muestra la distribución de materia estimada a partir del efecto de lente gravitatoria (azul), y la de gas a partir de observaciones en rayos X (rojo). Por un lado, este sistema es evidencia de la existencia de materia oscura, ya que la sola presencia de las galaxias en los cúmulo es insuficiente para describir la dinámica de estos y el efecto de lente gravitatoria observado. Por otro lado, también se considera evidencia de que la materia faltante no es materia bariónica en forma de gas, ya que esta exhibe una dinámica distinta. Es importante señalar que el bullet cluster no es el único sistema en su tipo, se han observado alrededor de 10 más al día de hoy.

Los cúmulos de galaxias restringen de distintas formas la posible auto-interacción entre las partículas de materia oscura. Por ejemplo los halos de los cúmulos formados en las simulaciones de  $n$ -cuerpos son tri-axiales [22, 23], y observaciones de lente gravitacional en cúmulos sugieren también la presencia de triaxialidad [24]. Sin embargo, las simulaciones sugieren que la presencia de auto-interacciones tienden a hacer los halos de los cúmulos más esféricos, a menos que la sección eficaz de la interacción sea menor que la necesaria para producir los perfiles de densidad, planos, de las galaxias de bajo brillo superficial [25, 26]. Por otro lado, en [27] se argumenta que la presencia de una sección eficaz de auto-interacción grande puede causar la evaporación de los halos, afectando así

## 1.1. EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

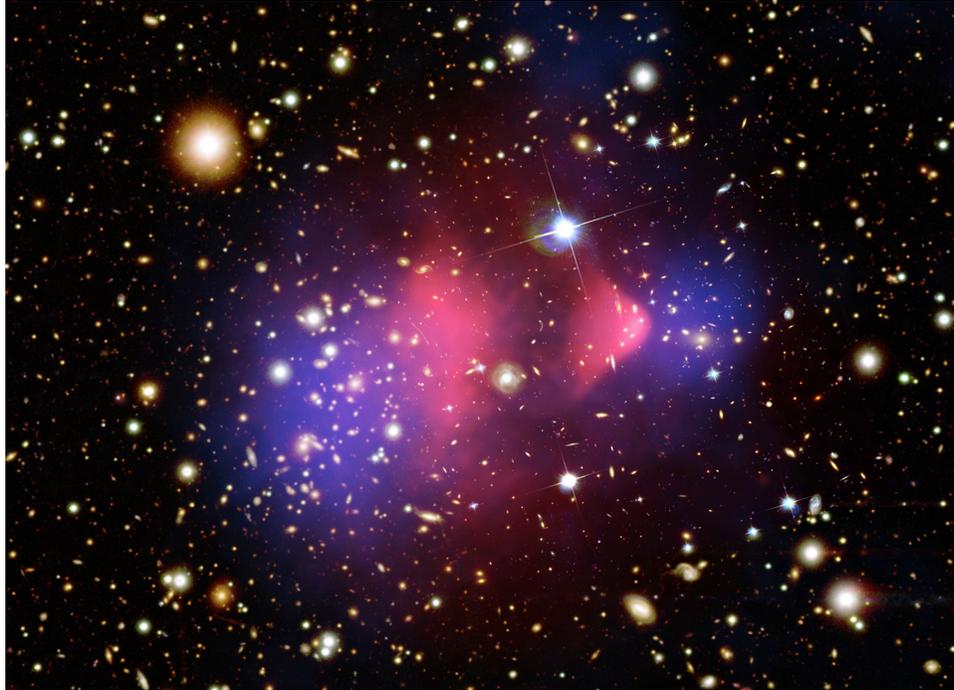


Figura 1.2: Colisión de dos cúmulos de galaxias, el *Bullet cluster*. Se muestra en azul la distribución de materia oscura inferida a través del efecto de lente gravitacional producida por los cúmulos, y en rojo la componente de gas (rayos X). Es una de las evidencias más actuales de la existencia de materia oscura. Imagen tomada de <http://www.nasaimages.org/>

la evolución galáctica en los cúmulos.

Este efecto de lente gravitacional también se observa en galaxias aisladas, produciendo imágenes múltiples de galaxias más lejanas, así como de quásares, dando también evidencia de la presencia de materia oscura. El efecto de lente gravitacional en galaxias y cúmulos de galaxias, se da en dos regímenes principalmente: lente fuerte y lente débil. El primero se refiere a la formación de imágenes múltiples de la fuente, como resultado de la deflexión de la luz. En el segundo, la deflexión solo produce la deformación de la fuente, pero no la formación de imágenes múltiples. La ocurrencia de un efecto u otro depende de la concentración de materia produciendo la lente, así la lente fuerte pone a prueba las regiones internas en galaxias y cúmulos de galaxias, donde la concentración tanto de materia oscura como bariónica es más alta que en las regiones externas, donde sucede el fenómeno

## 1.1. EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

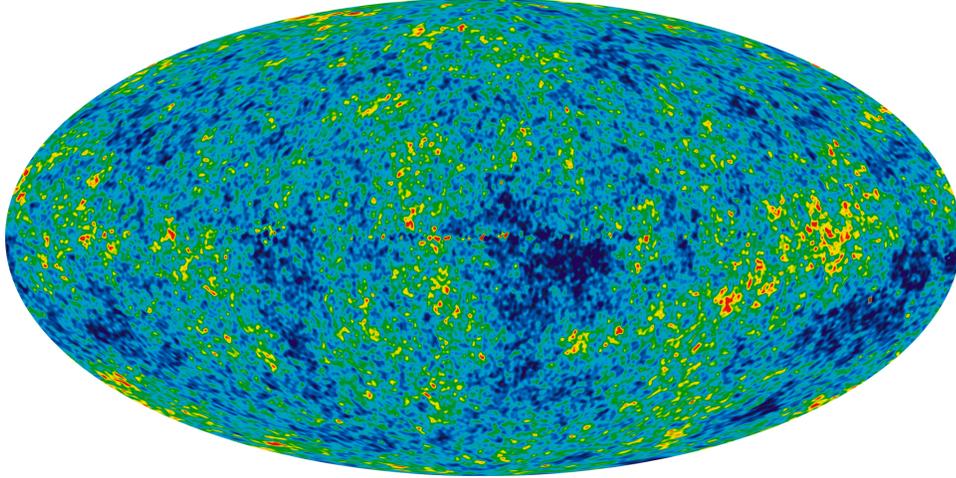


Figura 1.3: Mapa de fluctuaciones de temperatura de la radiación cósmica de fondo (WMAP). Imagen tomada de <http://lambda.gsfc.nasa.gov>

de lente débil [28]. En general el efecto de lente gravitatoria es sensible a la estructura interna de los halos, así como a la presencia de sub-estructura y triaxialidad[29], por lo que observaciones de este tipo son muy útiles en los intentos de imponer restricciones a la naturaleza de la materia oscura.

**Radiación cósmica de fondo de microondas** Las mediciones de la radiación cósmica de microondas son quizá las observaciones que dan la estimación más precisas de la abundancia de materia oscura, así como de que ésta está conformada por materia bariónica [30]. En el año 2005, el satélite WMAP midió la radiación cósmica de fondo con una precisión de  $\Delta T \approx 10^{-5}$  K, un ejemplo de los mapas obtenidos se muestra en la figura 1.3. A partir de estas observaciones se obtiene el espectro de potencias angular  $C_l$  de las anisotropías, como función del multipolo  $l$ , ver figura 1.4. Las predicciones teóricas del espectro de potencias son muy sensibles a los valores de parámetros cosmológicos, como la densidad de materia  $\Omega_m h^2$ , la densidad de bariones  $\Omega_b h^2$ , la constante cosmológica  $\Lambda$ , etc. El mejor ajuste de los parámetros con las observaciones es [31]:  $\Omega_{MB} = 0,0463 \pm 0,0024$ ;  $\Omega_{MO} = 0,233 \pm 0,023$ ; y  $\Omega_\Lambda = 0,721 \pm 0,025$ . Es decir, de acuerdo a esta observación, aproximadamente el 23 % de la densidad de materia en el universo corresponde a materia oscura.

Durante la etapa final de escritura de esta tesis, se hicieron públicos los resultados del satélite

## 1.1. EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

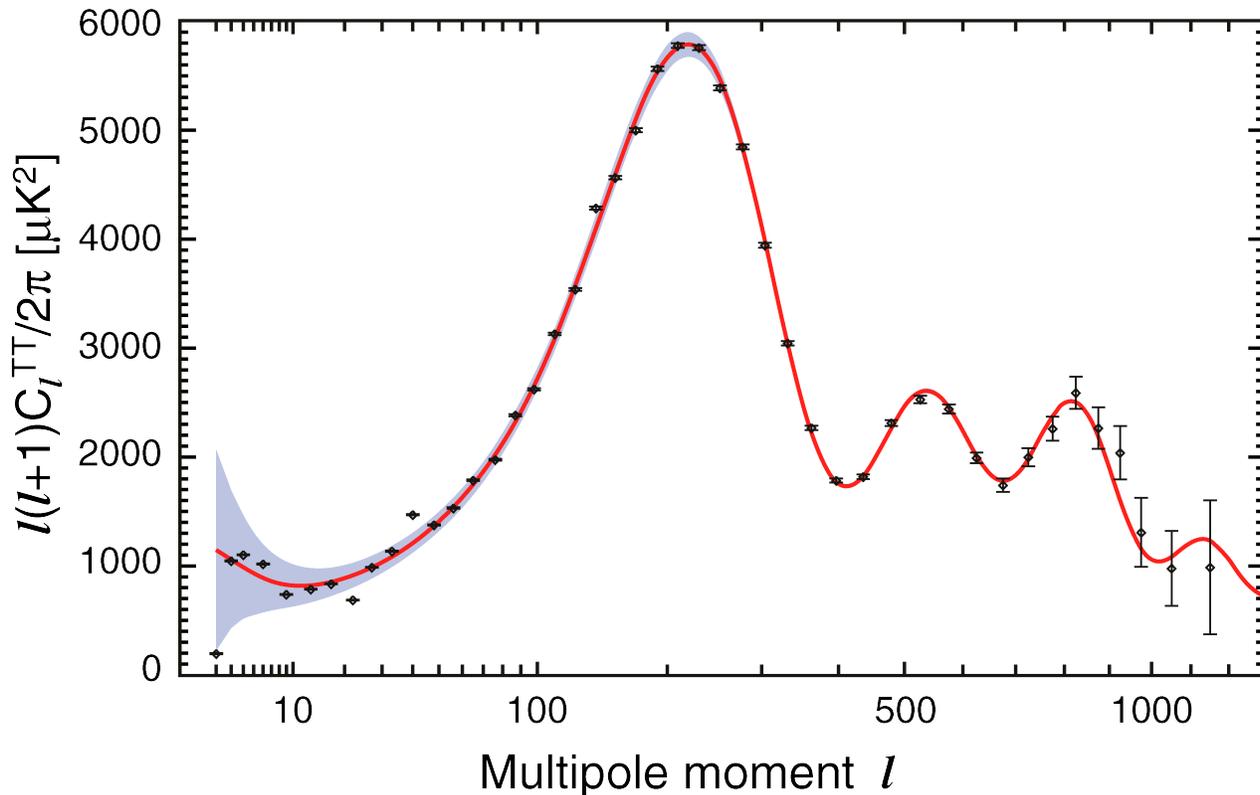


Figura 1.4: Comparación de la predicción teórica del espectro de fluctuaciones en la temperatura de la radiación cósmica de fondo con las observaciones de la misma. Datos de WMAP7 [32]. Imagen tomada de <http://lambda.gsfc.nasa.gov>

Planck. Los parámetros cosmológicos arrojados difieren un poco de los listados para WMAP. Estas diferencias no afectan a los resultados de esta tesis.

**Núcleo-síntesis primordial** Finalmente, la evidencia más importante de que la materia oscura no puede ser bariónica, proviene de la discrepancia entre la densidad de materia total,  $\Omega_m \approx 0,2 - 0,3$ , que se obtiene para explicar las observaciones anteriores, y la predicha por núcleo-síntesis en conjunto con la restricción impuesta por el cociente del primer y segundo pico del espectro de fluctuaciones de

## 1.2. PROPIEDADES DE LA MATERIA OSCURA

---

la radiación cósmica de fondo,  $\Omega_{MB} \approx 0,04$  [33]. La núcleo-síntesis primordial explica la formación y abundancia de los elementos ligeros, H, D,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$ , en los primeros instantes después del Big Bang.

### 1.2. Propiedades de la materia oscura

En su modalidad más simple la materia oscura interactúa solo gravitacionalmente. Ésta debe ser neutra: tanto la carga eléctrica como los momentos multi-polares eléctrico y magnético han de ser nulos. Una consecuencia importante de esto es que la materia oscura no disipa energía en forma de radiación, por tanto no colapsa fácilmente hacia el centro de las galaxias como lo hace la materia bariónica. Además la materia oscura ha de ser prácticamente no colisional; aún cuando no radie, las colisiones harían que los halos de materia oscura fueran completamente esféricos, en desacuerdo con las observaciones que sugieren la triaxialidad de estos. La materia oscura podría tener cierta auto-interacción en la escala débil, siempre y cuando ésta no modifique la estructura a gran escala, pudiendo llegar a ser relevante en zonas de alta densidad. Dichas interacciones pueden ser las responsables de suprimir la formación de estructura a escalas sub-galácticas, así como de aplanar los perfiles de densidad en el centro de los halos galácticos.

La materia oscura puede ser de naturaleza bosónica o fermiónica. En cualquier caso las propiedades de las partículas deben ser compatibles con que éstas estén confinadas en estructuras clásicas estables del tamaño de las galaxias observadas.

**Bosones** Si la materia oscura fuese bosónica, ésta podría exhibir el fenómeno de condensación de Bose-Einstein. El tamaño de las estructuras formadas a partir de estos condensados es diferente dependiendo de si el campo tiene auto-interacciones o no, y de la masa de la partícula fundamental. Los casos más estudiados en la literatura corresponden a: *i*) el campo escalar ultra-ligero sin auto-interacción, el cual puede condensar en estructuras del tamaño de 1 Kpc para masas de la partícula del orden de  $10^{-22}$  eV [34, 35]. *ii*) El campo escalar con auto-interacción, el cual también puede condensar a escalas galácticas si la masa del campo es del orden de 1 eV [36–38]. Otra posibilidad es que el campo escalar colapse en estructuras mucho más pequeñas que sean las unidades que conforman los halos de las galaxias, como es el caso de los axiones [39–41].

---

## 1.2. PROPIEDADES DE LA MATERIA OSCURA

---

**Fermiones** En el caso de la materia oscura fermiónica es posible imponer un limite inferior para la masa de las partículas, basado en el principio de exclusión de Pauli y la densidad del espacio fase de un halo galáctico. Ésta ha de tener un valor máximo de  $f = g h^3$  [42], donde  $g$  es la degeneración del espín. Por otro lado, la densidad en el espacio fase del halo está dada por  $f = \rho/[m^4 (2\pi\sigma^2)^{3/2}]$ , suponiendo una distribución de velocidades Maxwelliana, lo que nos lleva a  $m^4 > \rho h^3/[g (2\pi\sigma^2)^{3/2}]$ . Para una galaxia tipo Vía Láctea, donde  $\rho \sim 1 \text{ GeV cm}^3$  en el centro y  $\sigma \sim 150 \text{ Km/s}$ , y con  $g = 2$ , se tiene que la masa de las partículas ha de ser  $m > 25 \text{ eV}$  [42].

Otro aspecto importante a notar entre los candidatos a materia oscura es el hecho de si estos se produjeron en equilibrio térmico en el universo temprano, o si se crearon fuera del equilibrio en una transición de fase, por ejemplo. La relación entre las propiedades de las partículas, tales como su masa y acoplamientos, y la densidad reliquia de materia es diferente en ambos casos.

### 1.2.1. Densidad reliquia

La densidad de energía de materia oscura observada actualmente es  $\Omega_{MO} h^2 = 0,1147 \pm 0,0051$ . Si la materia oscura se encuentra en equilibrio térmico en el universo temprano, cuando éste se encuentra dominado por radiación, la densidad reliquia depende de la temperatura a la cual se rompe el equilibrio. La tasa de creación y aniquilación de partículas disminuye conforme el universo se expande, hasta llegar al punto en que ésta cae por debajo de la tasa de expansión del universo,  $H$ . Llegados a este punto, la densidad de partículas comóvil permanece aproximadamente constante y se dice que la densidad de materia oscura se “congela”. Esta evolución esta codificada en la ecuación de Boltzmann

$$\frac{dn_X}{dt} + 3 H n_X = \langle \sigma v \rangle [n_X^2 - n_{X_{eq}}^2], \quad (1.5)$$

donde  $n_X$ , y  $n_{X_{eq}}$ , son la densidad de número de partículas, y su valor en equilibrio respectivamente;  $\langle \sigma v \rangle$  es el promedio térmico del producto de la sección eficaz de interacción y la velocidad. En el caso sin interacción, el lado derecho de la ecuación (1.5) es cero, y la densidad del número de partículas evoluciona como se espera,  $n \propto a^3$ . Los detalles del cálculo de la densidad reliquia dependen de si las partículas de materia oscura son relativistas o no.

## 1.2. PROPIEDADES DE LA MATERIA OSCURA

---

En este contexto, definimos temperatura como

$$T_X \equiv \frac{1}{3 m_X n_X} \int \frac{d^3 p}{2\pi^3} p^2 f(p), \quad (1.6)$$

Así, la densidad en equilibrio para partículas no relativistas es  $n_{eq} \propto (m_X T)^{3/2} \exp(-m_X/T)$ . En un universo dominado por radiación, la tasa de expansión del universo es  $H \propto T^2$ . Por tanto, se puede expresar la condición de congelamiento como  $H(T_d) \approx \langle \sigma v \rangle n_{eq}(T_d)$ . De donde se obtiene que la temperatura a la cual se congela la densidad de partículas es  $T_d \propto m_X$  (más correcciones logarítmicas). A partir de aquí se puede mostrar que la densidad de masa  $\rho \sim m n_{eq}(T_d) (T/T_d)^3 \sim T^3 (m/T_d) / \langle \sigma v \rangle$ . Esto implica que cuanto menor sea la sección eficaz de interacción mayor será la densidad reliquia, i.e. cuanto menos eficiente sea el proceso de aniquilación más partículas sobreviven. De forma aproximada la sección eficaz de interacción escala como  $\langle \sigma v \rangle \propto m^{-2}$ , por lo que la densidad reliquia toma la forma

$$\Omega_X h^2 \approx \left( \frac{m_X}{\text{TeV}} \right)^2, \quad (1.7)$$

A partir de esta relación se deriva que cualquier partícula estable cuya masa se encuentre en la escala de la interacción débil (100 GeV), puede producir la densidad de materia reliquia observada. Las partículas débilmente interactuantes, WIMPs (Weakly interactive massive particles, por las siglas en inglés), son consideradas los mejores candidatos a conformar la materia oscura. A lo anterior es a lo que en la literatura suele llamarse el milagro de los WIMPs.

En el caso de partículas relativistas, el procedimiento es distinto. En este caso la densidad reliquia depende solo del número de grados de libertad  $g_\star$  que se tengan en el momento en que ocurre el congelamiento. La densidad reliquia es

$$\Omega_X h^2 \approx \frac{m_X}{100\text{eV}} \left( \frac{g_\star}{10} \right)^{-1}. \quad (1.8)$$

Cabe mencionar que el cálculo detallado de la temperatura de congelamiento, relativista o no relativista, permite predecir con precisión la dependencia de ésta con las propiedades de los diferentes modelos de partículas para la materia oscura, tal como los acoplamientos que ésta pueda tener ya sea con el modelo estándar, o bien dentro del sector oscuro. En [43] se describe un método numérico con

## 1.2. PROPIEDADES DE LA MATERIA OSCURA

---

el cual se resuelve la ecuación general (1.5); la descripción de dicho método queda fuera del alcance de esta tesis. Por otro lado, la temperatura de congelamiento, o desacople, fija la velocidad típica de las partículas en ésta época. A su vez, esto fija una escala típica por debajo de la cual las fluctuaciones no sobreviven, es decir que no se forma estructura. Dada la temperatura del desacople para un tipo de partícula específico, se tiene velocidad típica de las partículas. Clasificando a los candidatos a materia oscura en términos de sus velocidades al momento del desacople se pueden definir tres tipos genéricos:

**Materia oscura caliente.** Se refiere a materia relativista al momento del desacople. La formación de estructura a escalas galácticas y sub-galácticas se ve suprimida para este tipo de partículas, por lo que las configuraciones más pequeñas que se forman en universos dominados por materia oscura caliente son del tamaño de los cúmulos de galaxias. Estructuras más pequeñas podrían formarse por fragmentación de las más grandes, sin embargo, el tiempo de formación de éstas es mucho mayor que la edad del universo. La observación de galaxias al día de hoy excluye que la materia oscura en su totalidad sea de este tipo. Como ejemplo, los neutrinos del modelo estándar son considerados materia oscura caliente, pero aún cuando se tiene evidencia experimental de su existencia, estos solo contribuyen con una pequeña fracción a la densidad de materia oscura en el universo.

**Materia oscura fría.** Materia no-relativista al momento del desacople. La formación de estructuras en escenarios con materia oscura fría se produce de forma jerárquica, en donde las configuraciones más grandes se forman principalmente a partir de la acreción de estructuras más pequeñas. Los candidatos más favorecidos dentro de esta categoría son los que se engloban dentro del concepto WIMP. Ejemplos de WIMPs son los neutralinos en teorías súper-simétricas, y las partículas de Kaluza-Klein provenientes de modelos con dimensiones extra.

**Materia oscura tibia.** Las propiedades de este tipo de materia son intermedias a las dos anteriores. Se desacopla siendo aún relativista, pero sus velocidades son menores que las de los neutrinos ordinarios, permitiendo la formación de estructuras a escalas galácticas. Los neutrinos estériles y los gravitinos son candidatos a conformar este tipo de materia oscura.

## 1.2. PROPIEDADES DE LA MATERIA OSCURA

---

Las observaciones actuales de la formación de estructura en el universo son compatibles tanto con la materia oscura fría, como con la tibia. Sin embargo, la detección de estructuras por debajo de las escalas galácticas podría distinguir entre los distintos candidatos.

### 1.2.2. Candidatos

Desde el punto de vista de la teoría de partículas elementales, la evidencia observacional (astrofísica y cosmológica) de la existencia de materia oscura es también un indicio de la posibilidad de que el modelo estándar de partículas sea el límite de bajas energías de una teoría más fundamental. Esto es debido a que en el modelo estándar no hay una partícula con las características necesarias para conformar la materia oscura. Esta idea se complementa con motivaciones de la física de partículas misma, entre las que podemos mencionar:

- La observación de oscilaciones en neutrinos atmosféricos y solares. Este efecto solo es posible si los neutrinos son masivos. Estas oscilaciones son un indicio de que el modelo debe ser extendido, ya que los neutrinos del modelo estándar no tienen masa.
- El problema de la jerarquía. Se refiere al hecho de que el bosón de Higgs es mucho más ligero que la masa de Planck. A día de hoy no hay un mecanismo en el modelo estándar que permita explicar esto.
- La unificación de todas las interacciones. Esta idea radica en construir una teoría que incluya a todas las interacciones fundamentales conocidas, incluyendo la gravedad.

Algunos ejemplos de extensiones del modelo estándar son la super-simetría y la existencia de dimensiones extra. Un atractivo de ambas extensiones es que predicen candidatos viables para conformar la materia oscura, como lo son el neutralino y la partícula más ligera de Kaluza-Klein. El juego entre la física de partículas, la cosmología, y la astrofísica se hace evidente. Por un lado la física de altas energías estimula la formulación de nuevas teorías que predicen nuevas partículas, mientras las observaciones cosmológicas y astrofísicas restringen sus propiedades, y por tanto los parámetros de las nuevas teorías [44–47].

Algunas de las partículas que surgen de éstas y otras extensiones son:

## 1.2. PROPIEDADES DE LA MATERIA OSCURA

---

**Neutrino estéril.** En el modelo estándar, los neutrinos son partículas sin masa. Sin embargo, la oscilación de neutrinos observada requiere que estos sean masivos. Una de las posibles extensiones consiste en agregar un número arbitrario de neutrinos estériles, cuya interacción con el modelo estándar es solo gravitacional y a través de las oscilaciones.

Los neutrinos estériles fueron originalmente propuestos como candidatos a materia oscura en 1993 por Dodelson y Widrow [48], y desde entonces no han podido ser descartados [49–51]. Los neutrinos estériles juegan un papel importante en la extensión exitosa del modelo estándar de partículas. Vistos como materia oscura, estos pueden ser fríos o tibios, dependiendo del mecanismo de producción. Esto hace que puedan jugar papeles distintos en la formación de estructura.

Actualmente, las restricciones cosmológicas y astrofísicas para la existencia de estas partículas no son concluyentes. Las observaciones parecían ser consistentes con la presencia de una especie extra de neutrinos, o bien de alguna otra partícula relativista, véase el Capítulo 4 [52, 53]. Sin embargo, recientemente se ha visto que las observaciones no estaban siendo analizadas correctamente [31], y que en realidad éstas son consistentes con la no existencia de neutrinos estériles [54]. Por otro lado, en la Sección 4 se muestran los resultados de un estudio en el que se puso a prueba el método estadístico con el cual se infiere la existencia de especies relativistas a partir de las observaciones cosmológicas.

**Neutralino.** La extensión super-simétrica al modelo estándar que contiene el menor número de partículas e interacciones nuevas necesarias para hacer que la teoría sea consistente, es el modelo mínimo supersimétrico. En este modelo:

- Se asocian super-compañeros a todos los campos de norma.
- Se asocian super-compañeros escalares a todos los fermiones.
- Se introduce un campo de Higgs adicional.

Un ingrediente importante de los modelos super-simétricos es la conservación de la paridad-R. Ésta distingue entre materia normal y sus super-compañeros, y se define en términos del número bariónico, leptónico, y de isospín como  $R = (-1)^{2B+L+2S}$ . Las partículas del modelo estándar tienen paridad  $R = 1$ , mientras que todas las super-partículas  $R = -1$ . Una consecuencia de la conservación de la

## 1.2. PROPIEDADES DE LA MATERIA OSCURA

---

paridad-R es que la partícula super-simétrica más ligera es estable, por lo que puede ser considerada como candidato a materia oscura. Dentro del modelo mínimo super-simétrico ésta es el neutralino.

El neutralino es un fermión de Majorana de spin  $1/2$ , lo que implica que es su propia antipartícula. Es débilmente interactuante, neutro, y estable. Una propiedad adicional de la que poco se habla es que al ser un fermión de Majorana su momento anapolar es distinto de cero [55].

**Gravitino.** En algunos modelos super-simétricos, el gravitino  $\tilde{G}$ , el super-compañero del gravitón, puede ser la partícula más ligera y estable. La masa de los gravitinos depende fuertemente del esquema en que se rompa la super-simetría, pero se espera esté en el rango del eV al TeV. El gravitino forma parte de un conjunto de candidatos llamados *super-WIMPs*; otros ejemplos de super-WIMPs son los axinos y quintesinos, el gravitón de Kaluza-Klein, y algunos estados del axion. En contraste con los WIMPs, los super-WIMPs se producen con velocidades de dispersión mayores a tiempos tardíos. Esto tiene dos efectos importantes: primero, la dispersión de velocidades reduce la densidad del espacio fase, haciendo más suave el perfil de densidad central de los halos de materia oscura; segundo, este tipo de partículas modera el espectro de potencias lineal, reduciendo la potencia a escalas pequeñas. Teóricamente el gravitino es un buen candidato, sin embargo, es muy difícil detectarlo pues su única interacción es gravitacional.

**Partícula de Kaluza-Klein.** Aparentemente nuestro universo puede ser descrito en  $3 + 1$  dimensiones, 3 espaciales y 1 temporal; sin embargo, es posible que otras dimensiones existan, pero que sus efectos permanezcan ocultos hasta muy altas energías. El concepto de dimensiones extra adquirió gran atención después de la idea de Kaluza, en 1921, de unificar el electromagnetismo con la gravedad a partir de identificar las componentes extra del tensor métrico con campos de norma. Además, se ha visto que el problema de la jerarquía puede ser estudiado, y posiblemente resuelto, explotando la geometría del espacio-tiempo.

Con la existencia de dimensiones extra, surge la posibilidad de que una colección de partículas nuevas, denominadas de Kaluza-Klein, existan. Esto se explica si se postula que las dimensiones extra están compactificadas en círculos, o alguna otra topología, de cierto tamaño  $R$ . Debido a la compactación de las dimensiones extra, todos los campos que se propagan en el bulto (conjunto total de dimensiones), tienen sus momentos cuantizados en unidades de  $p^2 \sim 1/R^2$ . Como resultado,

## 1.2. PROPIEDADES DE LA MATERIA OSCURA

---

para cada campo del bulto aparece una colección de modos de Fourier, llamados estados de Kaluza-Klein. Desde nuestro punto de vista 4-dimensional, esto aparece como una torre de estados con masas  $m_n = n/R$ , donde  $n$  indica el número del modo. La partícula más ligera de Kaluza-Klein corresponde a  $n = 1$ , y su estudio como candidato a materia oscura empezó con el trabajo de Kolb y Slansky en 1984. La densidad reliquia predicha para estas partículas es consistente con las observaciones cosmológicas si su masa está alrededor de los 900 GeV, y si ningún otro estado de Kaluza-Klein participa en el proceso de desacoplamiento [56]. En el caso de que otros estados de Kaluza-Klein participen en este proceso, la masa de la partícula más ligera puede variar en el rango  $500 \text{ GeV} \lesssim m \lesssim 900 \text{ GeV}$ .

**Axion y otros campos escalares.** Posiblemente el mejor ejemplo de materia oscura producida fuera del equilibrio térmico es el axion. La existencia de esta partícula se propuso inicialmente para resolver el problema de la no conservación de la carga-paridad en el marco de la cromodinámica cuántica. Las restricciones actuales a la masa del axion como candidato a materia oscura sugieren que [57, 58]

$$m_a \geq 21(\pm 2) \mu\text{eV}.$$

Modelos similares al axion son lo que genéricamente se han denominado materia oscura escalar, sin embargo, hasta el momento estos nuevos campos solo han sido motivados para conformar la materia oscura, sin ningún vínculo claro con el modelo estándar de partículas. La diferencia principal entre estos modelos es la escala a la colapsan las configuraciones de campo escalar. En el caso del axion ésta es del orden de  $10^{-18} - 10^{-20} M_\odot$  [40, 41], mientras que para modelos más genéricos del campo escalar puede ser del orden de  $10^{10} M_\odot$ , dependiendo de la masa y auto-interacción del campo [59]. En otras palabras, el halo de materia oscura en una galaxia estaría conformado por una colección de micro-halos de masa muy pequeña, en el caso del axion, o por una distribución homogénea de campo escalar para el caso genérico.

La materia oscura escalar ha sido propuesta para explicar la cantidad observada de subestructura [59, 60], las curvas de rotación de galaxias [61], los perfiles de densidad de las galaxias enanas, [62], la evolución cosmológica de la densidad [63], entre otras. Véase el Capítulo 2 para una discusión más amplia y algunos resultados referentes a estos modelos de materia oscura, obtenidos en esta tesis.

### 1.3. Distribución de materia oscura

Bajo el marco  $\Lambda$ -CDM, la estructura que hoy en día vemos surge a partir de pequeñas perturbaciones en el campo de densidad, las cuales creemos se originaron en el universo temprano. Estas perturbaciones primordiales parecen seguir una distribución Gausiana, cuyas propiedades estadísticas pueden ser descritas por el espectro de potencias,  $P(k)$ . Éste es uno de los conceptos centrales para el entendimiento de la formación de estructura en el universo. Las perturbaciones a la densidad se describen como desviaciones con respecto a la densidad media de fondo,  $\rho_b(t)$  [64],

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_b(t)}{\rho_b(t)}, \quad (1.9)$$

o en el espacio de Fourier,

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.10)$$

Suponiendo que el campo de densidad es estadísticamente homogéneo e isotrópico, tal que no hay dependencia en la dirección de  $\mathbf{k}$ , sino sólo en su magnitud, se define la varianza de las perturbaciones a un tiempo dado como,

$$\sigma^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) |f_k|^2 k^2 d^3 k, \quad (1.11)$$

en donde

$$P(k) = \frac{1}{(2\pi^3)} \langle |\delta(k)|^2 \rangle \quad (1.12)$$

es el espectro de potencias de las perturbaciones y  $f$  la función ventana. Aquí  $\langle \dots \rangle$  denota el promedio sobre un volumen de muestreo. Por otro lado, se define la función de correlación del campo de densidad como

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle, \quad (1.13)$$

o en el espacio de Fourier,

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{V}{2\pi} \int |\delta_k|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 k. \quad (1.14)$$

Nótese que la función de correlación  $\xi(r)$  resulta ser la transformada de Fourier del espectro de potencias  $P(k)$ , y puede determinarse observacionalmente. Por último, es útil definir el espectro de po-

### 1.3. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA OSCURA

---

tencias adimensional  $\Delta^2(k) = V k^3 P(k)/2\pi^2$ , que mide la potencia por intervalo logarítmico en el número de onda. El número de onda para el cual  $\Delta^2 \sim 1$  corresponde a la transición entre la escala lineal y la no lineal.

La relación (1.14) se utiliza al interpretar las observaciones cosmológicas y astrofísicas en términos de la distribución de la materia oscura en el universo. Por ejemplo, comparaciones de la estructura a gran escala del universo, en particular de las grandes muestras de galaxias como SDSS (Sloan Digital Sky Survey), con simulaciones de  $n$ -cuerpos basadas en el modelo  $\Lambda$ -CDM, resultan estar en muy buen acuerdo, tanto desde un punto de vista cualitativo, ver figura 1.5, como cuantitativo.

Las observaciones de la radiación cósmica de fondo, la estadística de galaxias y cúmulos de galaxias, lente gravitacional débil, y la absorción Lyman- $\alpha$  en el espectro de emisión de galaxias y cuásares distantes por el hidrógeno neutro presente en el medio intergaláctico (Ly $\alpha$  forest), restringen el espectro de potencias para escalas por encima de los 100 Kpc, véase la figura 1.6 [66]. Sin embargo, actualmente no se tienen observaciones completas para restringir el espectro de potencias por debajo de esta escala. Aun cuando el espectro de potencias primordial, fijado en la época inflacionaria, sea libre de escala, es posible que las propiedades de las partículas que componen los distintos fluidos del universo, así como la dinámica de las mismas, en particular de la materia oscura, influya en la evolución del espectro causando un corte en el mismo. Es importante contar con una buena caracterización del espectro de potencias en escalas galácticas y sub-galácticas, por dos razones:

- Desde el punto de vista teórico, un corte en el espectro de potencias puede ayudar a discriminar entre los distintos candidatos a materia oscura.
- La correcta caracterización del espectro de potencias es útil al diseñar métodos de detección directa o indirecta de la materia oscura, pues ayuda a determinar las escalas a las cuales aún se pueden encontrar estructuras de materia oscura.

#### 1.3.1. Distribución a escalas galácticas y sub-galácticas

Aunque la evidencia observacional sobre la existencia de materia oscura es lo suficientemente robusta, aún sabemos poco sobre la distribución espacial de ésta, especialmente en las escalas pequeñas. La mayor información con que contamos proviene de los resultados de simulaciones numéricas

### 1.3. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA OSCURA

---

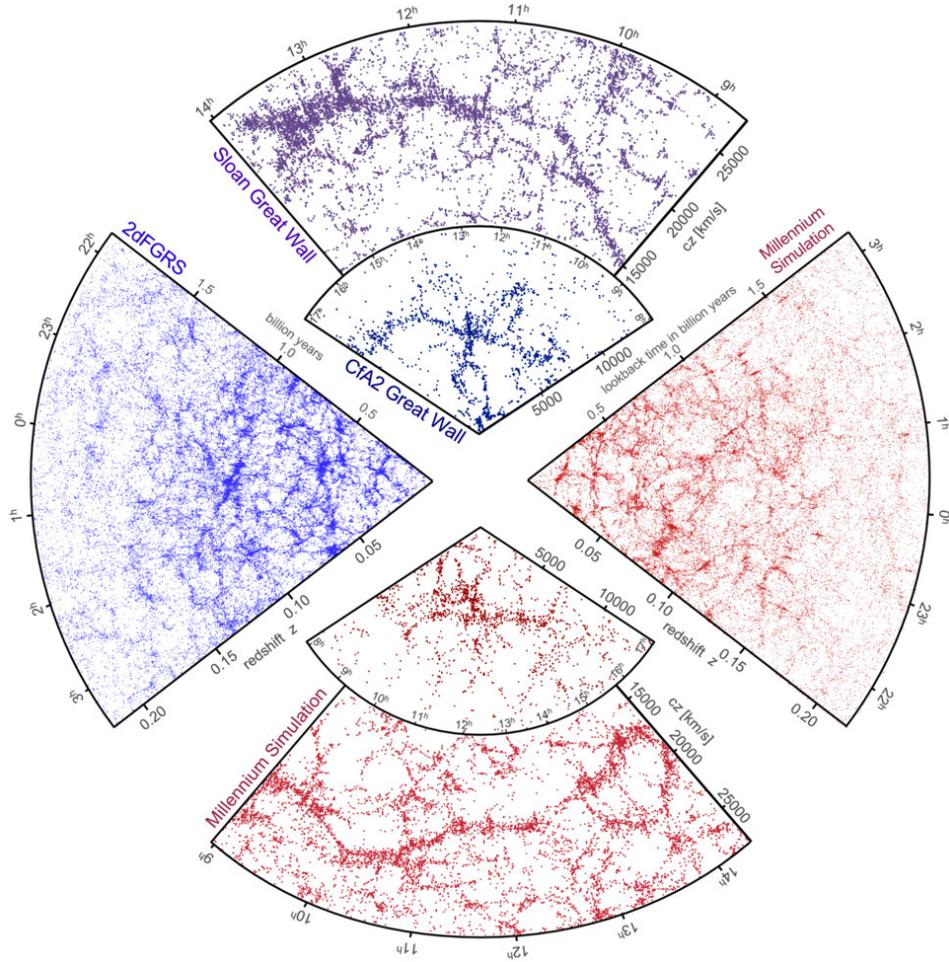


Figura 1.5: Comparación cualitativa de la estructura a gran escala en las muestras de galaxias Sloan y 2dFGRS (azul), y la simulación Millenium de formación de estructura (rojo) [65].

basadas en el modelo  $\Lambda$ -CDM, y de modelos semi-analíticos de formación de estructura. Estos resultados han sido ampliamente contrastados con observaciones de la distribución de galaxias, véase nuevamente la figura 1.6. Sin embargo, se ha sugerido, aunque aún no demostrado, que este modelo falla al explicar las propiedades de la estructura observada a escalas galácticas y sub-galácticas. Se tienen tres discrepancias mayores entre las observaciones a estas escalas, y las predicciones en las simulaciones de  $n$ -cuerpos con solo materia oscura:

### 1.3. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA OSCURA

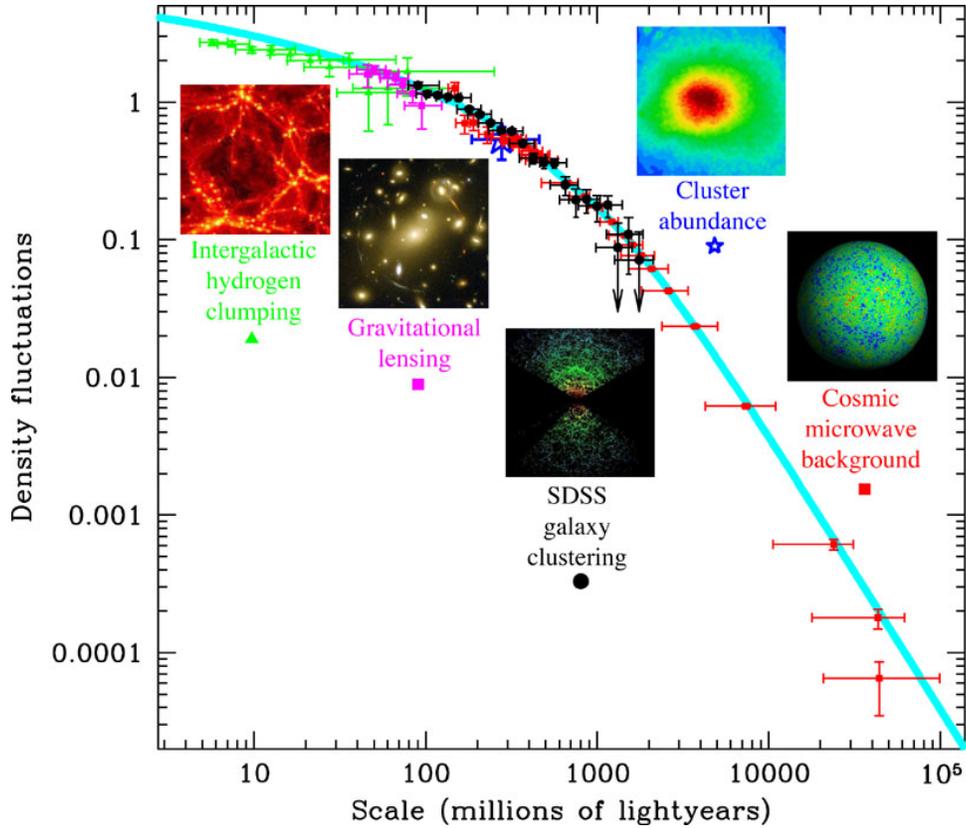


Figura 1.6: Restricciones observacionales actuales al espectro de potencias.

- El “problema” de los satélites faltantes. Las simulaciones de  $n$ -cuerpos muestran la supervivencia de una gran cantidad de sub-halos que habitan en los halos más grandes. Al comparar esta predicción con el número observado de galaxias satélite en el grupo local resulta una diferencia de cerca de dos ordenes de magnitud.
- El “problema” del *cusp vs core*. Las simulaciones numéricas predicen la presencia de perfiles de densidad con cúspide en las partes internas de los halos formados [67], mientras que las observaciones de la estructura central de galaxias enanas y de bajo brillo superficial muestran una preferencia por perfiles más bien constantes en el centro.
- El “problema” del *too big to fail*. Los halos más masivos formados en las simulaciones no se

### 1.3. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA OSCURA

---

corresponden en masa a los halos de los satélites más brillantes de la Vía Láctea. Sin embargo, los halos en las simulaciones son muy grandes para considerarlos como ineficientes en la formación de estrellas, por lo que deberían de ser observados.

Estas discrepancias entre las predicciones del paradigma  $\Lambda$ -CDM y las observaciones a escalas galácticas y sub-galácticas podrían ser aminoradas, e incluso resolverse, al entenderse por completo la física de los bariones. Por ejemplo, el problema de los satélites faltantes podría explicarse si la formación estelar en las galaxias enanas y estructuras menores fuera ineficiente. El problema del *cusp vs core* podría resolverse con la presencia de anisotropías en las dispersiones de velocidades, o la disminución en la densidad central de materia oscura como resultado de los procesos de *feedback* [68]. El problema del *too big to fail* podría entenderse si la formación de galaxias se diera de forma estocástica a estas escalas, o simplemente si la masa de la Vía Láctea fuera menor de lo que usualmente se considera [69].

Por otro lado, las observaciones aún están limitadas por efectos de errores sistemáticos, y por la incompletitud de las muestras. Por ejemplo, recientemente se han detectado algunas galaxias de muy bajo brillo en el Sloan Digital Sky Survey, abriendo la posibilidad de tener más satélites de la Vía Láctea aún sin descubrir, debido a su bajo brillo, sesgo en luminosidad, y limitaciones de cobertura en el cielo. En conclusión, se debe contar con simulaciones más detalladas que incluyan la física de los bariones de forma autoconsistente, así como de mejores observaciones, antes de establecer conclusiones definitivas al respecto de estas discrepancias.

Por otro lado, estas discrepancias también podrían resolverse si el espectro de potencias tiene un corte a escalas más grandes de lo que se espera para los modelos de materia oscura fría. A la fecha, estas inconsistencias aún son tema de investigación tanto desde el punto de vista observacional como teórico. Por mucho tiempo se han considerado como problemas del paradigma cosmológico actual, sin embargo, nosotros preferimos verlas como campos de oportunidad para restringir las propiedades de las partículas, o campos, de materia oscura.

#### 1.3.2. Corte en el espectro de potencias

En el universo temprano, la tasa de aniquilación entre partículas,  $\Gamma \sim n_X \sigma v$ , de materia oscura era mucho mayor que la tasa de expansión del universo,  $H$ . Esto hizo que la materia oscura estuviera

### 1.3. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA OSCURA

---

en equilibrio térmico con las partículas del modelo estándar. Conforme el universo se expandía, la temperatura y densidad de número de partículas disminuían, hasta que la tasa de aniquilación se hizo menor a la tasa de expansión del universo. Entonces, la densidad comóvil de materia oscura se congeló. Como resultado, la densidad de número de partículas a día de hoy es función de la combinación de acoplamientos y masas de las partículas, en caso que sean térmicas, tales que se obtiene un valor de la densidad reliquia de partículas cercana a la densidad de materia oscura observada, ecuación (1.7). Esta descripción corresponde al desacoplamiento “químico” de las partículas.

La temperatura a la cual se produce el desacople químico de la materia oscura juega un papel muy relevante en la determinación de la escala característica por debajo de la cual la formación de estructura se ve suprimida. Hay otras tres escalas que han de tomarse en cuenta: (i) Después del desacople químico las partículas no olvidan instantáneamente el ambiente térmico en que estuvieron, los procesos de dispersión elástica entre las partículas las mantienen en un estado de equilibrio. Mientras éstas se encuentren en equilibrio cinético, no es posible dar lugar al colapso gravitacional, y por ende a la formación de estructura. Es solo hasta que la tasa de dispersiones elásticas cae fuera del equilibrio cinético, que las estructuras empiezan a formarse. A la temperatura a la que esto sucede,  $T_{kd}$ , se le asocia una escala por debajo de la cuál las estructuras no pueden formarse  $k_{kd}$ . (ii) Después del desacoplamiento cinético no hay más interacciones entre la materia oscura y el baño térmico. Sin embargo, en esta época el flujo libre de las partículas de materia oscura también amortigua significativamente las perturbaciones en el campo de densidad. En este proceso, la materia oscura escapa de las zonas de alta densidad a zonas de baja densidad, borrando así las pequeñas inhomogeneidades que se han formado. Esto define otra escala característica de amortiguación por efecto del flujo libre de las partículas,  $k_{fs}$ , que se aproxima a un valor constante [70]:

$$k_{fs} \approx \left( \frac{m_X}{T_{kd}} \right)^{1/2} \frac{a_{eq}/a_{kd}}{\ln(4 a_{eq}/a_{kd})} \frac{a_{eq}}{a_0} H_{eq}, \quad (1.15)$$

donde  $a_{eq}$  es el factor de escala en la época de la igualdad materia-radiación. En general se tiene que  $k_{fs} > kd$ , por tanto  $k_{fs}$  determina la escala donde se encuentra el corte en el espectro de potencias. La masa de las estructuras más pequeñas de materia oscura capaces de colapsar permitida por estos mecanismos se encuentra calculando la masa contenida dentro de una esfera de radio  $\pi/k_{fs}$  [43], i.e.:

### 1.3. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA OSCURA

---

$$M_{\text{fs}} \propto 4\pi/3\rho_X \left( \frac{\pi}{k_{\text{fs}}} \right)^3 = 2,9 * 10^{-6} M_{\odot} \left( \frac{1 + \ln(g_{\star}^{1/4} T_{\text{kd}}/30\text{MeV})/18,56}{(m/100\text{GeV})^{1/2} g_{\star}^{1/4} (T_{\text{kd}}/50\text{MeV})^{1/2}} \right)^3. \quad (1.16)$$

(iii) Finalmente, también se ha mostrado que surge una escala de corte adicional por efecto de las oscilaciones acústicas en la distribución de materia oscura [71, 72]. Estas oscilaciones son remanentes de la época inflacionaria. Los modos en la distribución de materia oscura con  $k$  suficientemente grande tal que entran en el horizonte antes del desacoplamiento cinético, oscilan junto con los modos acústicos y por son suprimidos. Los modos con valores de  $k$  que corresponden a distancias mayores al tamaño del horizonte en el momento del desacoplamiento cinético no experimentan dicha amortiguación, y por tanto pueden crecer. La escala de amortiguación para este proceso es el tamaño del horizonte en la época del desacoplamiento cinético ( $k_{\text{ao}} \approx \pi H_{\text{kd}}$ ), y la masa de corte asociada a este mecanismo es [43]

$$M_{\text{ao}} \approx \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_X}{H^3} \Big|_{T=T_{\text{kd}}} = 3,4 * 10^{-6} M_{\odot} \left( \frac{T_{\text{kd}} g_{\star}^{1/4}}{50\text{MeV}} \right). \quad (1.17)$$

Dependiendo de las propiedades de la materia oscura  $M_{\text{ao}}$  puede ser mayor que  $M_{\text{fs}}$  en cuyo caso la masa de corte estaría determinada por  $M_{\text{ao}}$ , y no por  $M_{\text{fs}}$ . En general se deben calcular ambas escalas y la que resulte mayor es la que determina la masa de corte. Ésta define el tamaño de las estructuras más pequeñas que se pueden formar, (mini-halos, o proto-halos), de los cuales alguna fracción puede sobrevivir y permanecer hasta el universo actual. El cálculo de la temperatura del desacople cinético depende de la física de partículas de los candidatos a materia oscura y se ha estudiado ampliamente cual sería la escala de corte para distintos tipos de partículas [71, 72, 74, 75]; algunas de las estimaciones más recientes sugieren que la masa de las estructuras más pequeñas que se forman en el universo se encuentra en el rango,  $M_{\text{cut}} \sim 10^{-4} - 10^{-12} M_{\odot}$  [70, 73, 76] para partículas tipo WIMP. En la figura 1.7 se muestra la dependencia de la masa de corte en el espectro (y la temperatura de desacoplamiento) con la masa y la magnitud de la sección eficaz de aniquilación para el caso particular de los neutralinos [73]. Por otro lado, cuando la materia oscura no ha estado en equilibrio térmico, hay otros procesos que pueden dar lugar a un corte en el espectro de potencias. Por ejemplo, para el caso de los axiones se espera que la masa de las estructuras más pequeñas sea del orden de  $10^{-18} - 10^{-20} M_{\odot}$  [40, 41], mientras que para los modelos de materia oscura escalar se espera que sea

### 1.3. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA OSCURA

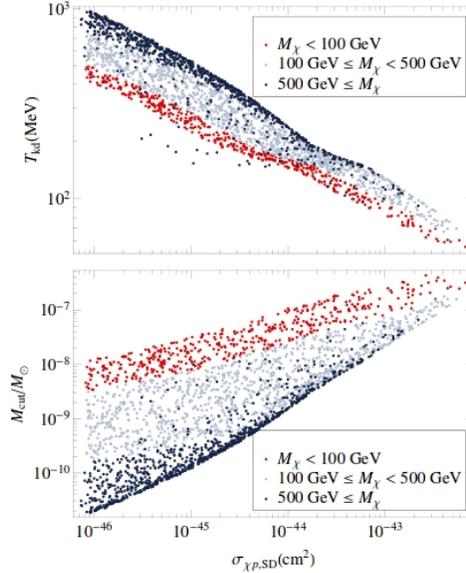


Figura 1.7: Se muestra la temperatura de desacoplamiento cinético ( $T_{\text{kd}}$ ) (panel superior), y la masa de corte ( $M_{\text{cut}}$ ) en el espectro de potencias como función de la sección eficaz de auto-interacción para partículas de materia oscura tipo neutralino con masa  $M_{\chi}$  [73].

del orden de  $10^7 - 10^{10} M_{\odot}$  [59, 77].

En la figura 1.8, mostramos el espectro de potencias para tres tipos de materia oscura distintos, para los cuales se puede observar una escala de corte distinta, y en general un comportamiento característico para las pequeñas escalas. La figura también muestra la transición de las escalas lineales a las no lineales. Como mencionamos en la sección anterior, el espectro de potencias está bien restringido por encima de las escalas galácticas. Las observaciones actuales no restringen las escalas sub-galácticas. Esto ha dado lugar a numerosos estudios, basados en simulaciones de  $n$ -cuerpos, que buscan describir la formación y destino de los halos más pequeños de materia oscura [78–80], con la finalidad de poder restringir las escalas sub-galácticas del espectro de potencias. Es importante determinar si las pequeñas estructuras pueden sobrevivir a las fuerzas de marea a que están sujetas durante el proceso de formación, y evolución de las estructuras más grandes, y si estas podrían estar formando parte de las galaxias actuales [81]. Esto último tendría implicaciones importantes en los métodos de detección directa e indirecta de materia oscura [82, 83]. Este tipo de estudios es lo que ha dado ori-

### 1.3. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA OSCURA

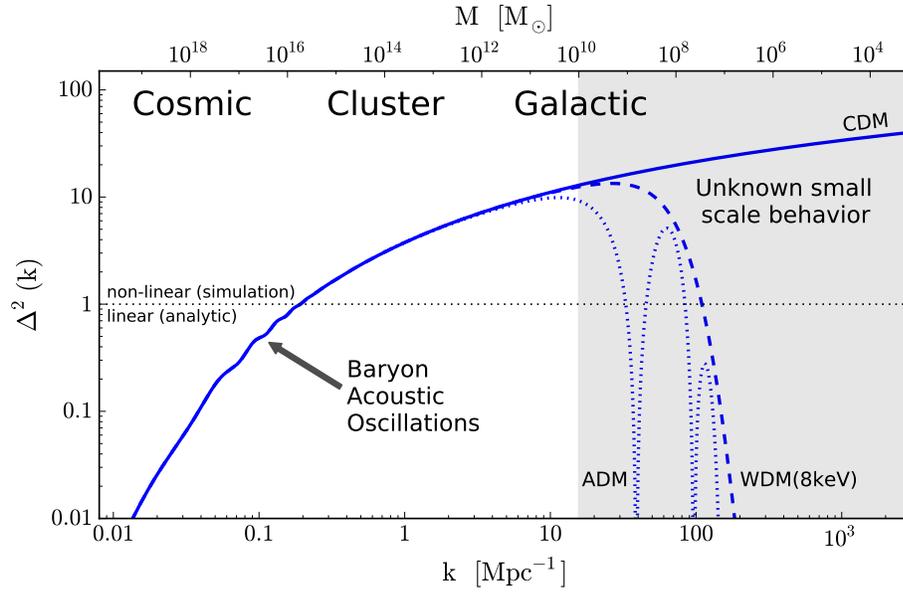


Figura 1.8: Espectro de potencias adimensional, para tres tipos de materia oscura: fría (CDM), tibia (WDM), materia oscura atómica (ADM). La región sombreada indica la región del espectro que no está acotada por las observaciones actuales.

gen al trabajo presentado en la Sección 3 de esta tesis, en donde también discutiremos los prospectos observacionales que se tienen para restringir el espectro de potencias en las escalas pequeñas.  
escala



# *Materia oscura escalar*

---

*El contenido de este capítulo está basado en los resultados publicados en Phys. Rev. D 82 024025 (2010) [1], y Phys. Rev. D 87 021301(R) (2013) [2]*

En cosmología se ha recurrido frecuentemente a describir las componentes oscuras del universo, materia y energía oscura, así como la expansión exponencial del universo temprano, inflación, a partir de campos escalares [84]. Así mismo, estos campos están presentes en el modelo estándar de partículas, siendo el Bosón de Higgs el mejor ejemplo [85, 86].

Si la materia oscura estuviera formada por partículas bosónicas, ésta podría formar un condensado de Bose-Einstein, admitiendo una descripción clásica de campo. Esto no es posible para el caso de la materia oscura fermiónica. Los modelos de materia oscura basados en campos escalares (materia oscura escalar, de ahora en adelante), están definidos a partir de un campo escalar  $\phi$  mínimamente acoplado a la gravedad, y su potencial  $V(\phi)$ , y se consideran una alternativa viable al paradigma actual de la materia oscura fría.

Originalmente la materia oscura escalar fue propuesta con el fin de explicar dos observaciones: los perfiles de densidad en las galaxias de bajo brillo superficial [37, 61, 62, 87], y la abundancia de galaxias satélite en el grupo local [59, 60, 88, 89]; véase la sección 1.3.1. Además, se ha mostrado que la evolución para la densidad de materia [59, 90], así como la formación de estructura a gran escala [63], es muy similar a la predicha por el modelo cosmológico estándar.

Sin embargo, la intención de este capítulo no es tanto la de entablar una discusión sobre las ventajas (desventajas) de este modelo sobre cualquier otro, sino más bien la de establecer condiciones que los campos escalares han de satisfacer a partir de las observaciones astrofísicas. En particular nos enfocaremos en dos tipos de observaciones, la dinámica de galaxias y las lentes gravitatorias. Estudiaremos, por separado, dos modelos particulares de campo escalar: por un lado configuraciones estáticas de campo escalar real, y por otro el campo escalar complejo con auto-interacción. Plantea-

---

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

remos algunas de las condiciones necesarias para que dichos modelos sean capaces de satisfacer las observaciones de forma consistente, o dicho de otro modo, veremos que nos dicen las observaciones a escalas galácticas sobre estos modelos.

### 2.1. Configuraciones estáticas de campo escalar real

Ha habido diferentes intentos por modelar halos de materia oscura en el marco de la relatividad general. Algunos de ellos muestran que ciertos efectos relativistas pueden ser importantes [91–98], aunque, en general, se hace uso de aproximaciones, o límites, que en ocasiones representan suposiciones sobre las propiedades de la materia oscura.

Nosotros consideraremos que el halo de materia oscura está descrito por una configuración de campo escalar real, estático y con simetría esférica, y nos enfocaremos a estudiar este modelo desde el punto de vista de relatividad general. Es decir, no asumiremos de entrada que el límite newtoniano es válido. El tensor de energía momento de este campo escalar real está dado por

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu,\nu}\left(g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + 2V(\phi)\right), \quad (2.1)$$

en donde  $\phi_{,\alpha} = \partial\phi/\partial x^\alpha$  y  $V(\phi)$  es la función potencial. Para este modelo mostraremos explícitamente qué cantidades son determinadas por las observaciones y cuales son suposiciones a priori. Esto es de particular importancia dado que algunas de las hipótesis pueden sesgar, de antemano, el análisis sobre la viabilidad de la materia oscura escalar.

El elemento de línea más general para un espacio-tiempo estático, y esféricamente simétrico, en coordenadas areal-polares (tales que las esferas de radio  $r$  tengan área  $4\pi r^2$ ) toma la forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)/c^2}c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.2)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  es el elemento de ángulo sólido en tres dimensiones. El potencial gravitacional  $\Phi(r)$  y la función de masa  $m(r)$  dependen únicamente de la coordenada radial  $r$ . Dada la

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

métrica (2.2), las componentes  $tt$  y  $rr$  de las ecuaciones de Einstein se simplifican a

$$m'(r) = \frac{4\pi r^2}{c^2} T^t_t \quad (2.3)$$

$$\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) \frac{\Phi'}{c^2} - \frac{Gm}{c^2 r^2} = \frac{4\pi Gr}{c^2} T^r_r. \quad (2.4)$$

Aquí la prima denota la derivada con respecto a la coordenada radial. Para configuraciones estáticas y esféricamente simétricas, las componentes de del tensor (2.1) en coordenadas areal-polares son

$$T^t_t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) \phi'^2 - V(\phi), \quad (2.5)$$

$$T^r_r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) \phi'^2 - V(\phi), \quad (2.6)$$

$$T^\theta_\theta = T^\varphi_\varphi = T^t_t, \quad (2.7)$$

y, de la conservación del tensor de energía-momento,  $\nabla_{;\mu} T^\mu_\nu = 0$ , se llega a la relación

$$(T^r_r)' + (T^r_r - T^t_t) \left(\frac{\Phi'}{c^2} + \frac{2}{r}\right) = 0, \quad (2.8)$$

o, en términos del potencial y el campo escalar,

$$\phi'' + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{\Phi'}{c^2} + \frac{Gm'}{c^2 r} + \frac{(3Gm/c^2) - 2r}{r^2}\right) \phi' - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.9)$$

De este modo, el sistema de ecuaciones que se ha de resolver es el dado por las expresiones (2.3), (2.4) y (2.9). Tenemos por tanto tres ecuaciones para cuatro funciones desconocidas, la función de masa,  $m$ , el potencial gravitacional,  $\Phi$ , el campo escalar,  $\phi$ , y la función potencial  $V(\phi)$ . Hasta este punto el sistema se encuentra indeterminado. Una posibilidad es adoptar un modelo específico para el potencial del campo escalar, y resolver el sistema restante para determinar la forma que adquieren el resto de las funciones. Alternativamente, usaremos la información proveniente de las observaciones de la dinámica de galaxias para fijar uno de los potenciales métricos. Así el sistema de ecuaciones

---

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

quedará cerrado y no habrá mas libertad de escoger arbitrariamente la forma del resto de las funciones, en particular la forma del potencial escalar. Es importante recalcar este punto, pues una vez se introduce información externa al sistema, como la dinámica que estos halos deben de satisfacer, ya no queda espacio para hacer suposiciones extra sobre la materia; más adelante retomaremos esta discusión.

### 2.1.1. Determinando el potencial $V(\phi)$ a partir de las curvas de rotación

El movimiento de las partículas de prueba en un espacio-tiempo dado queda determinado por la ecuación de las geodésicas. Para el caso de partículas masivas moviéndose en orbitas circulares en el espacio-tiempo (2.2), aparece una relación entre la velocidad de rotación de las partículas y el potencial gravitacional,  $\Phi$  [93],

$$\frac{\Phi'}{c^2} = \frac{v_c^2}{r}, \quad (2.10)$$

por conveniencia hemos definido  $v_c$  en unidades de la velocidad de la luz. Esta expresión nos permite reducir el número de funciones indeterminadas a tres. Sustituyendo (2.10) en las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.9), es posible obtener una ecuación diferencial para la función de masa,

$$m' + P_{\text{SF}}(r) m = Q_{\text{SF}}(r), \quad (2.11)$$

con

$$P_{\text{SF}}(r) = \frac{2 r v_c^{2'} - (1 + 2v_c^2) (1 - v_c^2)}{(v_c^2 - 1) r}, \quad (2.12)$$

$$Q_{\text{SF}}(r) = \frac{c^2 r v_c^{2'} + v_c^4}{G (v_c^2 - 1)}. \quad (2.13)$$

Las funciones  $P_{\text{SF}}(r)$  y  $Q_{\text{SF}}(r)$  dependen de solamente del perfil de la curva de rotación observada. La solución general de la ecuación (2.11) es

$$m = \frac{\int \exp\left[\int^r P_{\text{SF}}(r') dr'\right] Q_{\text{SF}}(r) dr + C}{\exp\left[\int^r P_{\text{SF}}(r') dr'\right]}, \quad (2.14)$$

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

en donde la constante de integración  $C$  se determina a partir de las condiciones de frontera, en particular regularidad en el origen,  $m(r = 0) = 0$ . Sustituyendo (2.11) de vuelta en el sistema de ecuaciones (2.3), (2.4), y (2.9), podemos escribir las expresiones correspondientes para el campo y el potencial escalar como

$$\phi'^2 = \frac{c^4}{4\pi G r^2} \left[ \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{Gm'}{c^2} - \frac{Gm}{c^2 r}\right) + v_c^2 \right], \quad (2.15)$$

$$V(\phi(r)) = \frac{c^2}{8\pi r^3} \left[ m \left(1 + 2v_c^2\right) + m' r \right] \quad (2.16)$$

$$- \frac{c^4}{8\pi G} \left(\frac{v_c^2}{r^2}\right). \quad (2.17)$$

Una vez que la función  $v_c = v_c(r)$  está dada, el campo escalar y su potencial pueden obtenerse directamente de las dos expresiones anteriores. A continuación mostramos dos ejemplos sencillos a partir de los cuales uno puede ganar cierta intuición sobre el campo y su potencial para el caso genérico.

**Curva de rotación constante.** Si consideramos que las partículas de prueba en el halo galáctico se mueven con velocidad circular  $v_0$  constante, i.e.  $v_c = v_0$ , el potencial gravitacional estará dado por

$$\Phi = c^2 \ln(r/r_0)^{v_0^2}. \quad (2.18)$$

Esta es una buena aproximación, al menos para ciertos valores de la coordenada radial en las galaxias espirales. La constante  $r_0$  fija el potencial en un punto  $r_0$  de referencia, que puede ser donde termina la parte luminosa de la galaxia, por ejemplo. Resolviendo la ecuación (2.11) para la función de masa obtenemos

$$m_{sf} = -\frac{c^2}{2G} \frac{v_0^4}{1 - v_0^4} r. \quad (2.19)$$

---

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

Ahora, con las funciones métricas ya determinadas, de las ecuaciones (2.15) y (2.17) podemos leer el campo y su potencial asociado

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{c^4}{4\pi G}} v_0 \ln(r/r_0) \quad (2.20)$$

$$V(\phi) = -\frac{c^4}{8\pi G} \frac{2v_0^2}{(1-v_0^2)r_0^2} \exp\left[\mp 2\sqrt{\frac{4\pi G}{c^4}} \frac{\phi}{v_0}\right]. \quad (2.21)$$

Aquí hemos invertido la expresión del campo,  $\phi(r)$ , para así poder expresar el potencial escalar en la forma  $V(\phi)$ . Potenciales análogos, aunque de signo contrario, se han considerado previamente dentro del marco inflacionario [99]. A diferencia de estos últimos, el potencial dado en la ecuación (2.21) es inestable, dado que su masa efectiva, definida a partir de la segunda derivada del potencial escalar es imaginaria  $m_\phi \approx V''(\phi) = \frac{2i}{\sqrt{1-v_0^2}r_0^2}$ . Sin embargo, es importante notar que las curvas de rotación de las galaxias reales no son exactamente planas [100, 101], por lo que a continuación presentamos un ejemplo en el que se relaja esta condición.

**Curva de rotación tipo NFW.** El perfil de densidad NFW (Navarro, Frenk y White [67, 102]) describe muy bien los halos de materia oscura formados en simulaciones de  $n$ -cuerpos. Además, parece ser un modelo fenomenológico viable para describir los halos de las galaxias reales, aunque hay mucha discusión al respecto. En esta sección supondremos que el perfil de velocidad circular asociado a este perfil de densidad parece describir bien la cinemática de los halos galácticos. Considerando nuevamente que el halo de materia oscura consiste de una distribución suave de campo escalar, y que la velocidad circular de las partículas de prueba está dado por

$$v_c^2 = v_{NFW}^2 = \frac{\sigma_0^2 r_0}{r} \left( -\frac{r/r_0}{1+r/r_0} + \ln[1+r/r_0] \right), \quad (2.22)$$

el coeficiente métrico  $\Phi$ , ecuación 2.10, toma la forma

$$\Phi_{NFW}(r) = -\sigma_0^2 \frac{\ln(1+r/r_0)}{r/r_0}. \quad (2.23)$$

---

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

Aquí  $\sigma_0 = (4\pi G/c^2)\rho_0 r_0^2$  es una velocidad característica, y  $r_0$  es el radio de escala del halo. A continuación se sustituye la ecuación anterior en las ecuaciones (2.11), (2.15), y (2.17) y se resuelve numéricamente. En la figura 2.1 se muestra un caso particular de la solución numérica, con un valor ilustrativo de  $\sigma_0 = 0,0008$  en unidades naturales  $G = c = 1$  (aproximadamente 250 Km/s en unidades físicas). En la misma figura también se muestran el campo  $\phi(r)$ , el potencial  $V(r)$ , y el potencial  $V(\phi)$  resultante para la región integrada. El comportamiento de la función de masa resultante no es físico, ya que está debería ser una función positiva definida y creciente. Además, para el potencial  $V(\phi)$  se puede apreciar que se obtiene el mismo comportamiento que en el ejemplo anterior,  $V(\phi) \sim -A \exp(-B\phi)$ , con  $A$  y  $B$  constantes. Por tanto la masa asociada al campo escalar resulta negativa nuevamente. Con este ejemplo mostramos de un modo genérico como es posible reconstruir el potencial de un campo escalar a partir de las observaciones de curvas de rotación en galaxias, aunque los resultados indican que este tipo de configuraciones de campo escalar no son viables para conformar la materia oscura galáctica.

### 2.1.2. Una advertencia sobre la determinación de la masa en las galaxias

A continuación mostramos el resultado que surge de aplicar el formalismo propuesto en la sección anterior a otro tipo de materia, uno descrito por un tensor de energía momento tipo fluido perfecto. Así mismo, compararemos los nuevos resultados con los que obtuvimos para el caso del campo escalar, qué aunque resulto no ser viable nos servirá para ilustrar un punto importante.

La materia oscura estándar puede ser descrita de forma efectiva por un tensor de energía momento de tipo fluido perfecto,  $T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$ , con densidad de masa  $\rho$  y presión  $p$ , y  $u^\mu$  la 4-velocidad normalizada a  $u_\mu u^\mu = -c^2$ . Las componentes  $tt$  y  $rr$  de las ecuaciones de Einstein toman la misma forma que antes, (2.3) y (2.4), pero ahora la ecuación de conservación para el tensor de energía momento,  $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ , implica

$$\left(\rho c^2 + p\right) \frac{\Phi'}{c^2} + p' = 0. \quad (2.24)$$

Dado este nuevo sistema de ecuaciones, y la condición de que el potencial gravitacional  $\Phi(r)$  queda determinado por la velocidad de las partículas de prueba en el halo, ecuación (2.10), tenemos un

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

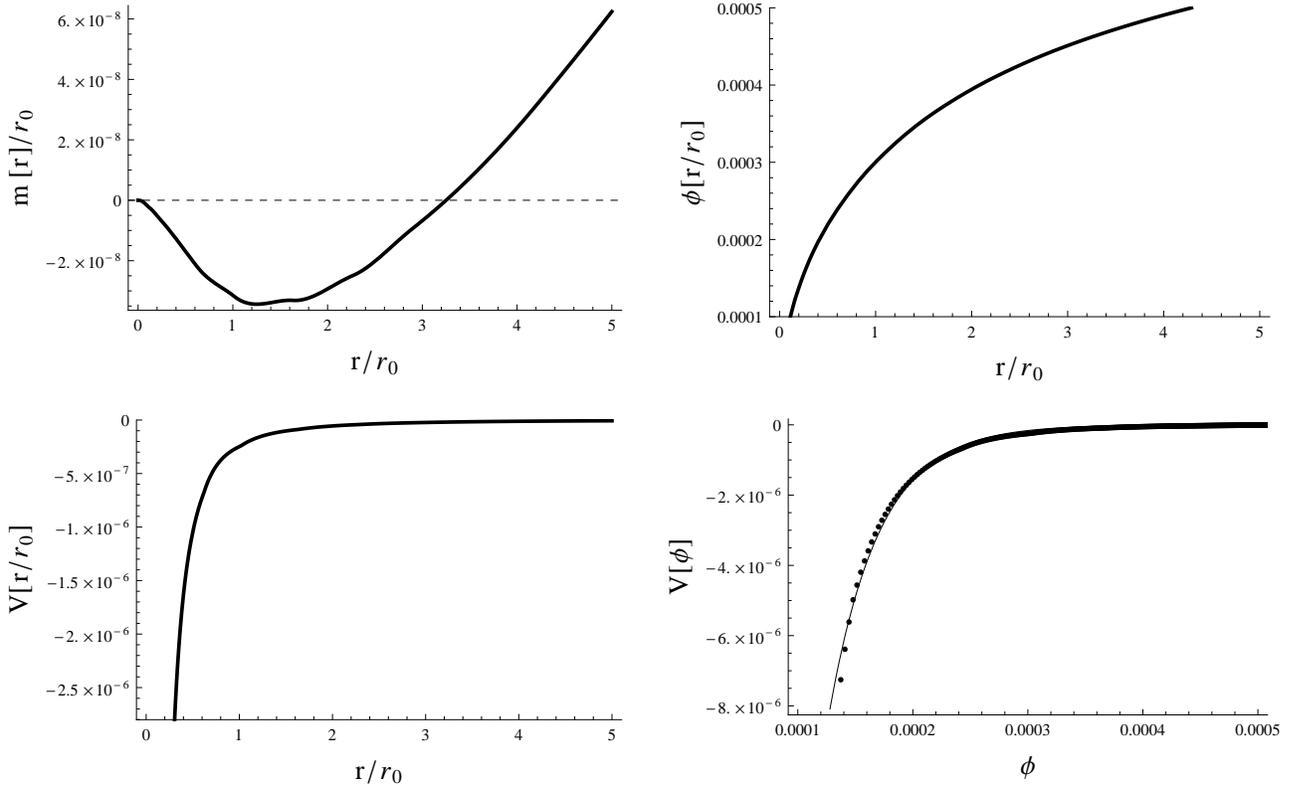


Figura 2.1: Resultados para la función de masa,  $m$ , el potencial,  $V$ , y el campo escalar,  $\phi$ , para un modelo con curva de velocidad circular tipo NFW con  $\sigma_0 = 0,001$ . La línea sólida en el panel del potencial  $V(\phi)$  corresponde a una función exponencial, mostrando que el resultado es consistente con el caso  $v_c = cte$

sistema de tres ecuaciones para tres funciones a determinar: la función de masa  $m$ , la densidad  $\rho$ , y la presión,  $p$ . Es decir, no queda libertad para elegir una ecuación de estado, ésta queda automáticamente determinada por las observaciones de curvas de rotación. Esto es análogo a lo que encontramos para el caso del campo escalar, en donde una vez fijadas las curvas de rotación no teníamos libertad para elegir el potencial del campo escalar. De nuevo es posible escribir una ecuación diferencial para la

---

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

función de masa, expresión (2.11), pero en donde ahora las funciones  $P$  y  $Q$  están dadas por

$$P(r) = \frac{2 r v_c'^2 - (1 + 2 v_c^2) (3 - v_c^2)}{(1 + v_c^2) r}, \quad (2.25)$$

$$Q(r) = \frac{r v_c'^2 - v_c^2 (2 - v_c^2)}{(1 + v_c^2)}. \quad (2.26)$$

Esta ecuación puede resolverse para los dos ejemplos que discutimos cuando presentamos el campo escalar. Para el caso con curvas de rotación planas la solución se puede obtener analíticamente y está dada por

$$m_{pf} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 (2 - v_0^2)}{1 + 2 v_0^2 - v_0^4} r. \quad (2.27)$$

A partir de esta expresión se obtienen las siguientes identidades,

$$\rho = \frac{1}{4 \pi} \frac{v_0^2 (2 - v_0^2)}{r^2 (1 + 2 v_0^2 - v_0^4)}, \quad (2.28)$$

$$p = \frac{1}{8 \pi} \frac{v_0^4}{r^2 (1 + 2 v_0^2 - v_0^4)}, \quad (2.29)$$

$$\frac{p}{c^2 \rho} = \frac{v_0^2}{2(2 - v_0^2)}. \quad (2.30)$$

Por ejemplo, para una velocidad de rotación típica de  $250 \text{ km/s}$ , se tiene que  $p/\rho c^2 \approx 10^{-7}$ . Primero, nótese que estos resultados son iguales a los que se obtienen usando la formulación Newtoniana de la gravedad. Sin embargo, nosotros no impusimos de antemano que las presiones fueran despreciables con respecto a la densidad de masa, pero la combinación de tener un tensor de energía momento del tipo fluido perfecto, junto con velocidades de rotación no relativistas, reduce el problema a satisfacer el límite Newtoniano.

Por otro lado, comparando las funciones de masa para el caso del campo escalar y el fluido perfecto, notamos inmediatamente que aun cuando la dependencia radial es la misma,  $m(r) \propto r$ , en el primer caso la masa resulta negativa. Un comportamiento similar se obtiene aun cuando consideramos que la curva de rotación es un poco más realista. Para el caso de curva de rotación tipo NFW, la figura 2.2a

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

muestra la solución (numérica) obtenida. Por comparación hemos añadido la curva que obtuvimos para el caso del campo escalar. Si bien ambas configuraciones, de campo escalar y fluido perfecto, satisfacen por definición la dinámica propuesta (curva de rotación constante), las estimaciones sobre la función de masa

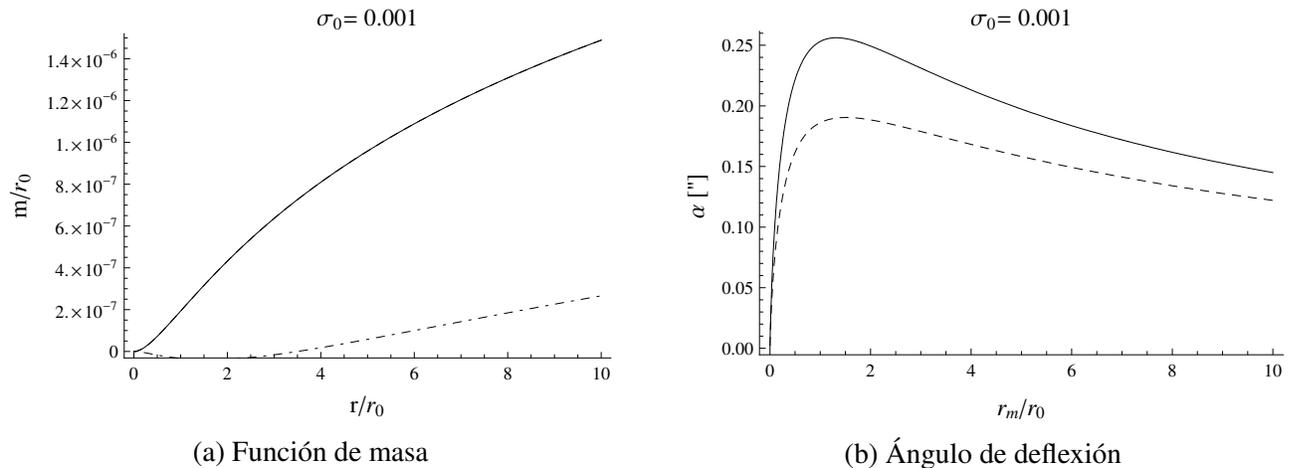


Figura 2.2: Comparación para (a) la función de masa y el (b) ángulo de deflexión obtenidos a partir de un halo descrito por materia oscura escalar (línea punteada) y materia oscura tipo fluido perfecto (línea sólida). Perfil de rotación tipo NFW.

### 2.1.3. Prueba de consistencia: lentes gravitacionales

Un resultado importante de la Sección 2.1.2 es que el perfil de masa asociado a un halo de materia oscura depende fuertemente de la naturaleza de ésta. Diferentes candidatos a materia oscura muestran comportamientos dispares para la función  $m(r)$ , y por tanto la masa contenida dentro de un radio específico resulta también distinta. La pregunta que ahora surge es, ¿podemos de algún modo discriminar entre los distintos modelos?

El fenómeno de lente gravitacional se produce cuando la trayectoria de un rayo de luz es desviada por la acción de un campo gravitatorio. Si este campo es debido a galaxias individuales para las que se conoce su dinámica, es posible usar las observaciones de lente gravitacional para discriminar entre los distintos candidatos a materia oscura. En otras palabras, si a partir de las curvas de rotación

---

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

determinamos las dos funciones métricas  $m$  y  $\Phi$  para distintos tipos de materia, podremos entonces calcular el efecto de lente gravitacional que estas configuraciones producen, y compararlo con las observaciones.

En el apéndice B se explica con más detalle la teoría de lentes gravitacionales. Aquí nos limitaremos a calcular el ángulo de deflexión que un rayo luz experimenta en presencia de una distribución de materia. Aún cuando esta cantidad no es un observable directo, nos dará una idea de cómo se ven afectados los sistemas de lente gravitacional por la naturaleza de la materia oscura. Para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico, ecuación (2.2), el ángulo de deflexión  $\alpha$  que sufre la trayectoria de un rayo de luz pasando a una distancia  $r_m$  del origen está dada por:

$$\alpha(r_m) = 2 \int_0^\infty \frac{r_m dr}{r^2 \sqrt{\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right) \left(e^{-2\Phi(r)/c^2} e^{-2\Phi(r_m)/c^2} - r_m^2/r^2\right)}} - \pi. \quad (2.31)$$

A continuación comparamos el ángulo de deflexión resultante para un halo de materia oscura escalar, con el asociado a un halo descrito por medio de un fluido perfecto. Para ello usaremos las dos curvas de rotación con las que hemos trabajado en las secciones previas.

**Curva de rotación constante.** En el caso en que consideramos  $v_c = v_0$ , el ángulo de deflexión se puede obtener de forma analítica a partir de las ecuaciones (2.18), (2.19) y (2.31), para el campo escalar, o de las ecuaciones (2.18), (2.27) y (2.31), para el fluido perfecto. El resultado en cada caso es:

$$\Delta\varphi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{A_{type} (x^{2v_0^2} - x^2)}}, \quad (2.32)$$

$$A_{pf} = \frac{1}{1 - v_0^2 (v_0^2 - 2)} \quad (2.33)$$

$$A_{sf} = \frac{1}{1 - v_0^4}, \quad (2.34)$$

donde hemos definido  $x = r_m/r$ . Dado que el ángulo de deflexión en ambos casos es constante, i.e. no depende del radio de máximo acercamiento, este puede ser evaluado para valores típicos de la

---

## 2.1. CONFIGURACIONES ESTÁTICAS DE CAMPO ESCALAR REAL

---

constante  $\beta_0$ . Por ejemplo, tomamos  $v_0 = 1/1200$ , que corresponde a una velocidad de  $v_c = 250$  km/s obtenemos, en segundos de arco

$$\alpha_{pf} = 0,899547, \quad (2.35)$$

$$\alpha_{sf} = 0,449546. \quad (2.36)$$

Nótese que la diferencia entre ambos es casi del doble, por lo que observaciones simultaneas de  $v_0$  y  $\alpha$ , podrían ayudarnos a discriminar entre materia oscura escalar y materia oscura estándar.

**Curva de rotación tipo NFW.** En el caso en que  $v_c = v_{NFW}$ , ecuación (2.22), la solución para la función de masa la obtuvimos numéricamente, y por tanto el ángulo de deflexión hemos de obtenerlo también de este modo. El resultado lo mostramos en la figura 2.2b, donde se comparan los casos para el campo escalar y el fluido perfecto. Ahora las diferencias dependen del radio de máximo acercamiento, siendo los radios más pequeños los más afectados. Por tanto, también en este caso, observaciones simultaneas de  $v_{NFW}$  y  $\alpha$ , principalmente a radios pequeños, podrían ayudarnos a discriminar entre materia oscura escalar y materia oscura estándar. Este método de discriminación puede ser muy útil para obtener información sobre la naturaleza de la materia oscura. Sin embargo, como mencionamos anteriormente el ángulo de deflexión  $\alpha$  no es una observable directa; éste se ha de obtener a partir de resolver la ecuación de la lente, de manera análoga a como haremos en la siguiente sección para el campo escalar complejo.

### 2.1.4. Discusión

En esta sección establecimos una metodología para reconstruir el potencial de campo escalar a partir de observaciones de las curvas de rotación en galaxias. Aplicamos este método para curvas de rotación constante, y para curvas de rotación tipo NFW. En ambos casos la función de masa resultó negativa para ciertos valores de la coordenada radial, y el potencial encontrado es inestable. Hay dos posibles interpretaciones para estos resultados. La primera nos refiere a la no completitud del modelo, ya que hasta el momento hemos despreciado la contribución de la materia bariónica. Sería posible que un modelo auto-consistente de materia oscura y materia bariónica sea suficiente para evitar las

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

masas negativas en todo punto del espacio. La segunda, se refiere a la inviabilidad del modelo: desde el punto de vista clásico, tener una función de masa negativa es contra-intuitivo, la función de masa es una función acumulativa por lo que ésta debería ser positiva y creciente. Además, el potencial del campo resultante para los dos ejemplos considerados resulta ser inestable. Esto hace que el modelo sea menos atractivo Sin embargo, cabe mencionar que, independientemente de la interpretación, la estimación del perfil de masa asociada a un halo de materia oscura depende fuertemente del tipo de materia con el cual se modele dicho halo.

Por otro lado, demostramos que la observación conjunta de las curva de rotación, y el efecto de lente gravitacional en una galaxia, nos permitiría discriminar entre distintos candidatos a materia oscura.

## 2.2. Configuraciones de campo escalar complejo con auto-interacción

A partir de ahora dejaremos a un lado las configuraciones de campo escalar real, y pasaremos a estudiar otro tipo de configuraciones que también han sido consideradas para describir los halos galácticos. En esta sección consideraremos un modelo de campo escalar complejo y con auto-interacción, cuyo potencial está dado por

$$V(\phi) = m_{sf}^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (2.37)$$

Este campo complejo satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\square \phi - (m_{sf} c / \hbar)^2 \phi - \lambda |\phi|^2 \phi = 0, \quad (2.38)$$

donde el símbolo  $\square$  denota al operador d'Alambertiano en cuatro dimensiones. Para una métrica esférica simétrica, y si la masa del campo escalar,  $m_{sf}$ , está muy por debajo de la escala de Planck,  $m_{\text{Planck}} = (\hbar c / G)^{1/2}$ , de tal modo que  $\Lambda \equiv \lambda m_{\text{Planck}}^2 / 4 \pi m_{sf}^2 \gg 1$ , el perfil de densidad Newtoniano obtenido de resolver la ecuación (2.38) de manera auto-consistente con las ecuaciones de Einstein

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

toma la forma [37, 103, 104],

$$\rho_{\text{SFDM}}(r) = \begin{cases} \rho_c \frac{\sin(\pi r/r_{\text{max}})}{(\pi r/r_{\text{max}})} & \text{for } r < r_{\text{max}} \\ 0 & \text{for } r \geq r_{\text{max}} \end{cases} . \quad (2.39)$$

Aquí  $r_{\text{max}} \equiv \sqrt{\pi^2 \Lambda/2} (\hbar/m_{\text{sf}} c)$  es una constante con dimensiones de longitud, típicamente asociada a la longitud de Compton de la partícula escalar,  $\hbar/m c$ , multiplicada por un factor  $\Lambda^{1/2}$ , y  $\rho_c$  es la densidad en el centro de la configuración. El perfil de densidad dado en la ecuación (2.39) describe objetos compactos de tamaño  $r_{\text{max}}$ , y masas típicas del orden de  $4\rho_c r_{\text{max}}^3/\pi$ , la cual varía de configuración a configuración de acuerdo al valor específico de la densidad central. La ecuación (2.39) fue obtenida sin tomar en cuenta la influencia gravitacional de otros tipos de materia, y suponiendo que todas las partículas del campo escalar se encuentran en el condensado. Este perfil de masa ha sido usado para modelar la distribución de materia en las galaxias enanas esferoidales, las cuales están dominadas por materia oscura [37, 105–107]. Dicha distribución es suave hacia el centro, resolviendo así el “problema” del *cusp vs core*; véase la Sección 1.3.1

Estudios previos de la dinámica de galaxias enanas sugieren que los parámetros del escalar auto-interactuando han de estar en el rango  $m_{\text{sf}}^4/\lambda \sim 50-75 \text{ (eV/c}^2\text{)}^4$ , i.e.  $r_{\text{max}} \sim 5,5-7 \text{ Kpc}$ , con densidades centrales del orden de  $\rho_c \sim 10^{-3} M_{\odot}/\text{pc}^3$  [37]. Galaxias como la Vía Láctea son al menos un orden de magnitud más grandes que este valor de  $r_{\text{max}}$ , por lo tanto no podrían ser descritas por este modelo. Sin embargo, si no todas las partículas se encuentran en el condensado, pudieran existir configuraciones gravitacionales para las cuales la región central esté aún descrita por el perfil de densidad (2.39), a la vez que se encuentren inmersas en una nube térmica formada por las partículas fuera del condensado [108, 109]. Para los propósitos de esta tesis no será necesario especificar el modelo completo de halo, debido a que el efecto de lente gravitacional fuerte no es muy sensible a la distribución de masa fuera del radio de Einstein, típicamente del orden de unos cuantos Kpc, justo por debajo del valor esperado para  $r_{\text{max}}$ . Por el contrario, si estuviésemos interesados en estudiar el efecto de lente débil, no podríamos obviar el perfil exterior del halo.

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

### 2.2.1. Propiedades de lente gravitatoria

Usando las definiciones dadas en el apéndice B, podemos expresar la ecuación de la lente asociada a una distribución de campo escalar como

$$\beta = \theta - \frac{M_{\text{SFDM}}(\theta)}{\pi D_{\text{OL}}^2 \theta \Sigma_{\text{cr}}}, \quad (2.40)$$

en donde  $\beta$  y  $\theta$  se refieren a las posición angular (en general no-observable) de la fuente, y aparente (observable) de la imagen, respectivamente, ambas medidas con respecto a la línea de visión. La masa proyectada para el perfil (2.39) está dada por:

$$M_{\text{SFDM}}(\xi_*) = 4\rho_c r_{\text{max}} \int_0^{\xi_*} \xi' \int_0^{z_{\text{max}}} \frac{\sin(\pi \sqrt{\xi'^2 + z_*^2})}{\sqrt{\xi'^2 + z_*^2}} dz_* d\xi'. \quad (2.41)$$

Por conveniencia hemos definido las cantidades  $\xi_* \equiv \xi/r_{\text{max}}$  y  $z_* \equiv z/r_{\text{max}}$ . Nótese que la expresión (2.41) puede ser aproximada por

$$M_{\text{SFDM}}(\xi_*) \simeq 2\xi_* J_1(\pi\xi_*) + \pi C \xi_*^2, \quad (2.42)$$

con  $J_1$  la función de Bessel de primer orden, y  $C \equiv -(2/\pi) \int_1^\infty dx \sin(\pi x)/x \simeq 0,178$ . En la figura 2.3 se muestra la expresión (2.41) evaluada numéricamente (línea continua), así como la aproximación (2.42), ambas normalizadas. En el resto del trabajo usaremos la solución completa, pues el uso de la función de Bessel no ofrece mayores ventajas. Pero es posible que la expresión aproximada pueda llegar a ser de utilidad en otras situaciones, por eso la damos aquí.

Volviendo a la ecuación de la lente, ésta puede ser escrita en forma a-dimensional

$$\beta_*(\theta_*) = \theta_* - \bar{\lambda} \frac{m(\theta_*)}{\theta_*}, \quad (2.43)$$

con  $m(\xi_*) = M_{\text{SFDM}}(\xi_*)/\rho_c r_{\text{max}}^3$ ,  $\beta_* = D_{\text{OL}} \beta/r_{\text{max}}$  y  $\theta_* = D_{\text{OL}} \theta/r_{\text{max}}$  la función de masa y las posicio-

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

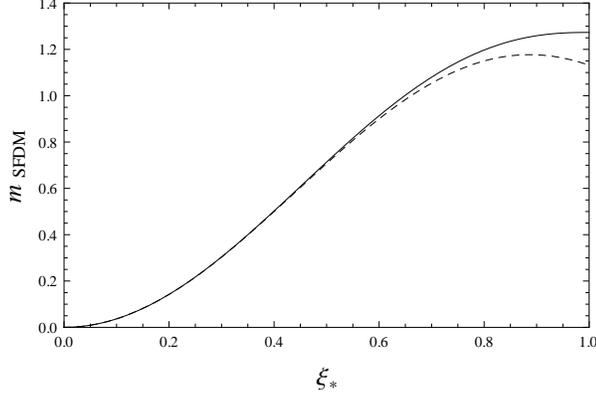


Figura 2.3: Masa proyectada (normalizada) encerrada dentro de un círculo de radio  $\xi_*$ ,  $m_{\text{SFDM}}(\xi_*) \equiv M_{\text{SFDM}}(\xi_*)/\rho_c r_{\text{max}}^3$ , como función de la coordenada  $\xi_*$ , para  $0 < \xi_* < 1$ . La línea sólida corresponde a la ecuación (2.41) evaluada numéricamente, mientras que la línea discontinua corresponde a la expresión aproximada (2.42).

nes angulares de la fuente y las imágenes respectivamente. El parámetro  $\bar{\lambda}$  está dado por

$$\bar{\lambda} \equiv \frac{\rho_c r_{\text{max}}}{\pi \Sigma_{\text{cr}}} = 0,57 h^{-1} \left( \frac{\rho_c}{M_{\odot} \text{pc}^{-3}} \right) \left( \frac{r_{\text{max}}}{\text{kpc}} \right) \frac{d_{\text{OL}} d_{\text{LS}}}{d_{\text{OS}}}. \quad (2.44)$$

Para evitar confusión con el termino de auto-interacción se ha introducido una barra en el nuevo parámetro  $\bar{\lambda}$ . Además se han definido las distancias angulares  $d_A \equiv D_A H_0 / c$ , considerado la constante de Hubble  $H_0 \equiv 100h(\text{km/s})/\text{Mpc}$ , con  $h = 0,710 \pm 0,025$  [110].

En general la ecuación de la lente, expresión (2.43), es no lineal en  $\theta$ . Es posible que para una posición dada de la fuente,  $\beta$ , existan soluciones múltiples para el ángulo  $\theta$ , i.e. imágenes múltiples. Esto es lo que sucede en el régimen de lente fuerte, a discutir a continuación. Un caso particular es el de la alineación perfecta entre la fuente y la lente. A partir de esta configuración se define el anillo de Einstein con radio angular  $\theta_E \equiv \theta(\beta = 0)$ . En la figura 2.4 se muestra el comportamiento de la ecuación (2.43) como función del parámetro  $\bar{\lambda}$ , es decir, para diferentes valores del producto  $\rho_c r_{\text{max}}$ . Se puede apreciar que: *i*) el efecto de lente fuerte se produce solamente para configuraciones con  $\bar{\lambda} > \bar{\lambda}_{\text{cr}} \simeq 0,27$ , y *ii*) para estas configuraciones, solo aquellas con parámetros de impacto  $|\beta_*| < \beta_{*\text{cr}}$  pueden producir múltiple imágenes; nótese que el valor específico de  $\beta_{*\text{cr}}$  depende del parámetro  $\bar{\lambda}$ ,

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

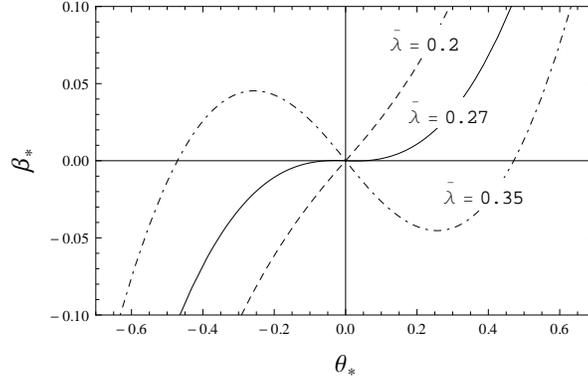


Figura 2.4: La ecuación de la lente para el modelo de campo escalar, expresión (2.43), como función de  $\bar{\lambda}$ . Las raíces de esta ecuación definen el radio de Einstein,  $\theta_{*E}$ , y el máximo local (mínimo) del parámetro de impacto,  $\beta_{*cr}$ . Ambas cantidades están bien definidas solo para valores de  $\bar{\lambda} > \bar{\lambda}_{cr} \approx 0,27$ , que es el valor crítico para producir lente fuerte.

$\beta_{*cr}(\bar{\lambda})$ . Estas condiciones para el perfil de campo escalar son muy similares a las que se obtienen para el modelo de Burkert [111]; esto no es del todo sorprendente ya que ambos modelos son perfiles con core. En este sentido, los halos de campo escalar son similares a los propuestos por Burkert [112], pero con la ventaja de que sus propiedades están claramente relacionadas con las cantidades físicas del modelo.

Por otro lado, en la figura 2.5 mostramos la magnitud del radio de Einstein,  $\theta_{*E}$ , como función del parámetro  $\bar{\lambda}$ , en donde por comparación se ha graficado también la misma cantidad para los modelos NFW [113] y Burkert [111]. El valor mínimo de  $\bar{\lambda}$  necesario para producir imágenes múltiples es mayor para el halo de campo escalar,  $\bar{\lambda}_{cr}^{NFW} = 0 < \bar{\lambda}_{cr}^{Burkert} = 2/\pi^2 < \bar{\lambda}_{cr}^{SFDM} \approx 0,27$ . (Se ha de notar que hay un factor  $1/4\pi$  en nuestra definición de  $\bar{\lambda}$  al compararla con el dado en [111].) Los halos de materia oscura escalar requieren valores más grandes de  $\bar{\lambda}$  para poder producir anillos de Einstein de magnitud similar a los que se obtendrían con los otros modelos. Esto puede ser debido a los efectos de proyección que no se han tomado en cuenta para ninguno de los perfiles [114, 115].

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

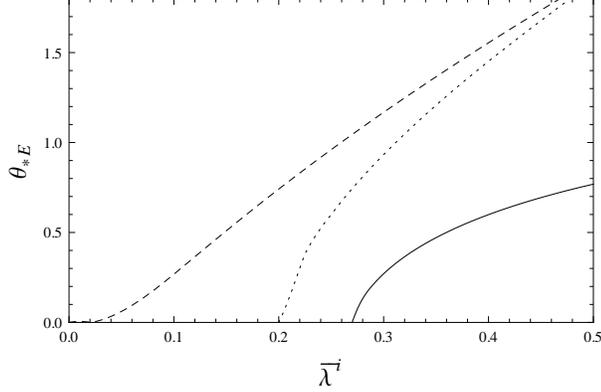


Figura 2.5: Radio del anillo de Einstein,  $\theta_{*E}$ , como función de  $\bar{\lambda}^i$ , para modelos de halo de campo escalar (línea continua), NFW (línea discontinua), y Burkert (línea punteada). Para obtener anillos de Einstein de magnitud similar se requiere  $\bar{\lambda}^{\text{NFW}} < \bar{\lambda}^{\text{Burkert}} < \bar{\lambda}^{\text{SFDM}}$ .

### 2.2.2. Lentes gravitatorias vs dinámica de galaxias

Tomando en cuenta que existe un valor crítico del parámetro  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\lambda}_{\text{cr}} \approx 0,27$ , por debajo del cual no se produce el efecto de lente fuerte, y considerando la definición en la ecuación (2.44), se obtiene la siguiente desigualdad que se ha de satisfacer para producir imágenes múltiples

$$\rho_c r_{\text{max}} [M_{\odot} \text{pc}^{-2}] \gtrsim 473,68 h f_{\text{dist}}, \quad (2.45)$$

con  $f_{\text{dist}} \equiv d_{\text{OS}}/d_{\text{OL}}d_{\text{LS}}$  un factor que depende de las distancias en la configuración de la lente.

Para evaluar el lado derecho de la ecuación (2.45), consideraremos dos muestras de sistemas de lente con imágenes múltiples: CASTLES [116] y SLACS [117]. De éstas seleccionamos aquellos sistemas para los cuales se han determinado los corrimientos al rojo, tanto de la fuente como de la lente (aproximadamente 60 sistemas en cada muestra), y calculamos el correspondiente factor de distancia  $f_{\text{dist}}$  a cada elemento de la sub-muestra. Para CASTLES (SLACS) los factores de distancia se encuentran en el intervalo  $4 \lesssim f_{\text{dist}} \lesssim 27$ , ( $6 \lesssim f_{\text{dist}} \lesssim 25$ ), con un valor promedio de  $f_{\text{dist}} \approx 7$ , ( $f_{\text{dist}} \approx 11$ ), por que el lado derecho de la ecuación (2.45) adquiere valores en el rango 1400 – 9000, (2000 – 8500). Algunos ejemplos representativos de las muestra de SLACS se muestran en la tabla 2.1 (galaxias lente). En términos de los valores promedio, podemos reescribir la desigualdad (2.45) como:

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

Dinámica de galaxias enanas		Galaxias lente		
Galaxia	$\rho_c r_{\max} [M_{\odot} \text{pc}^{-2}]$	Galaxia	$f_{\text{dist}}$	$\rho_c r_{\max} [M_{\odot} \text{pc}^{-2}]$
Ho II	36.19	J0008–0004	6.61	2029.68
DDO 154	66.47	J1250+0523	8.46	2832.41
DDO 53	67.53	J2341+0000	9.12	3053.38
IC2574	81.89	J1538+5817	11.74	3930.44
NGC2366	85.45	J0216–0813	13.03	4362.44
Ursa Minor	104.72	J1106+5228	15.74	5269.75
Ho I	120.23	J2321–0939	16.23	5433.80
DDO 39	145.94	J1420+6019	19.72	6602.26
M81 dwB	265.87	J0044+0113	25.26	8457.05

Cuadro 2.1: Estimaciones del producto  $\rho_c r_{\max}$  para diferentes galaxias. *Izquierda*. Reportadas en las referencias [105, 106], usando dinámica de galaxias. *Derecha*. Derivadas a partir de la ecuación (2.45); recordemos que estos valores representan un limite inferior (y que solo estamos mostrando una submuestra representativa de la muestra completa de SLACS). Notemos la diferencia de un orden de magnitud entre los valores del producto  $\rho_c r_{\max}$  para galaxias enanas en el universo local, y el limite inferior de esta misma cantidad para las galaxias que producen lente fuerte a  $z \sim 0,5$ .

$$\rho_c r_{\max} [M_{\odot} \text{pc}^{-2}] \gtrsim 2000, \quad (\text{CASTLES}) \quad (2.46a)$$

$$\rho_c r_{\max} [M_{\odot} \text{pc}^{-2}] \gtrsim 4000, \quad (\text{SLACS}) \quad (2.46b)$$

Estos números son un orden de magnitud mayores a los obtenidos a partir de la dinámica de galaxias enanas,  $\rho_c r_{\max} [M_{\odot} \text{pc}^{-2}] \simeq 100$ , cuando ésta es estudiada usando el mismo perfil de densidad [105, 106]; ver la tabla 2.1 nuevamente. Éste es el principal resultado de esta sección. Hemos de recordar que el valor de  $r_{\max}$  se relaciona directamente con los parámetros fundamentales del modelo, la masa de la partícula escalar y el termino de auto-interacción, y que ha de permanecer constante a lo largo de la formación de estructura.

Recordemos que las desigualdades en la ecuación (2.46) no toman en cuenta el efecto de los bariones presentes en las galaxias. El efecto de lente gravitatoria no distingue entre materia oscura y

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

materia luminosa, por lo que la contribución de esta última al efecto de la lente puede ser muy significativo en algunos casos. Por ejemplo, para los sistemas de la muestra SLACS se sabe que la fracción de materia bariónica contenida hasta el radio de Einstein es, en promedio, de 0,4, con una dispersión de 0,1 [118]. Por lo tanto hemos de corroborar que nuestras estimaciones en la ecuación (2.46) no sean muy sensibles a la inclusión de la componente bariónica.

Para este propósito añadimos la contribución de un perfil tipo *de Vacouler* de brillo superficial, para la materia luminosa, a la ecuación de la lente [119],

$$\beta_*(\theta_*) = \theta_* - \bar{\lambda} \frac{m(\theta_*)}{\theta_*} - \bar{\lambda}_{\text{lum}} \frac{f(\theta_*/r_{e*})}{\theta_*}. \quad (2.47)$$

Ahora  $\bar{\lambda}_{\text{lum}}$  es un parámetro análogo al dado en la ecuación (2.44)

$$\bar{\lambda}_{\text{lum}} \equiv \frac{(M/L)L}{2\pi\Sigma_{\text{cr}}}, \quad (2.48)$$

y  $f(x)$  es la masa estelar proyectada (sin dimensiones),

$$f(x) = \frac{1}{2520} \left[ e^q (q^7 - 7q^6 + 42q^5 - 210q^4 + 840q^3 - 2520q^2 + 5040q - 5040) + 5040 \right], \quad (2.49)$$

$$-2520q^2 + 5040q - 5040) + 5040], \quad (2.50)$$

con  $q \equiv -7,76 x^{-1/4}$ . El factor masa-luminosidad,  $M/L$  (considerando una función de masa inicial de Chabrier), y el radio efectivo,  $r_e$ , para cada uno de los sistemas en la muestra SLACS están reportados en la referencia [118]. Usando la nueva ecuación de la lente, expresión (2.47), vemos que el efecto de lente fuerte es siempre posible, sujetos solamente a que el parámetro de impacto sea menor que  $\beta_{\text{cr}}$ . Esto hace que debemos imponer una condición diferente si queremos seguir restringiendo el producto  $\rho_c r_{\text{max}}$  en cada galaxia, tal como demandar la formación de anillos de Einstein de determinada magnitud.

Para ello usamos una pequeña sub-muestra de SLACS que incluye aquellos elementos para los cuales, además de tener determinados los corrimientos al rojo, se ha estimado el tamaño del radio de Einstein, así como los parámetros de la densidad superficial de la masa estelar. De ellos elegimos los sistemas que tienen el valor mínimo, máximo, y promedio del radio de Einstein, y de la densidad

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

superficial de masa, respectivamente.

Debido a que la nueva ecuación de la lente, expresión (2.47), depende del factor  $r_{e*} = r_e/r_{\max}$ , debemos fijar a priori el valor de  $r_{\max}$  para poder calcular la magnitud del radio de Einstein. Usando la nueva ecuación de la lente, encontramos el valor de  $\bar{\lambda}$  que produce el radio de Einstein apropiado para cada elemento de la sub-muestra. Hacemos esto usando dos valores distintos de  $r_{\max}$ : 5 y 10 Kpc. El producto resultante de  $\rho_c r_{\max}$  es compatible (en orden de magnitud) con las desigualdades obtenidas de la ecuación (2.45). Solo para aquellos sistemas de la muestra pequeña que contienen una alta concentración de materia bariónica, el valor de  $\rho_c r_{\max}$  puede decrecer sustancialmente. Sin embargo, es importante tener en mente que las incertidumbres asociadas a la distribución de la materia luminosa, como la elección de la función inicial de masa, pueden ser mucho más relevante en estos casos. En general, estas estimaciones son sensibles a los detalles de cada configuración particular, por lo que se requiere de un análisis más detallado de cada sistema.

### 2.2.3. Discusión

En el marco de la materia oscura escalar, el perfil de densidad en la ecuación (2.39) puede ser usado para describir las regiones centrales de los halos de galaxias a diferentes corrimientos al rojo. En esta sección hemos visto que al usar este perfil para describir la dinámica de galaxias y el efecto de lente gravitatoria, aparece una discrepancia. Específicamente, hemos encontrado que para poder satisfacer las condiciones necesarias para producir el efecto de lente fuerte observado en las muestras SLACS y CASTLES, las galaxias con corrimientos al rojo del orden de  $z \sim 0,5$  deben ser más densas que las galaxias enanas esferoidales en el universo local.

Cabe mencionar que el estudio que aquí mostramos toma en cuenta galaxias que son intrínsecamente diferentes, en términos de su masa total y de la concentración de materia barionica presente. Las galaxias enanas muestran un brillo superficial muy bajo, y aparentemente están dominadas por materia oscura, mientras que la componente estelar en las galaxias masivas, del tipo más bien tempranas, es compacto y denso. En el modelo cosmológico estándar la evolución de los halos de materia oscura puede producir diferencias en la concentración para halos con diferentes masas, debido principalmente a que las épocas de ensamblaje han sido diferentes; los halos más pequeños colapsan en un universo temprano y denso, por tanto se espera que sean más concentrados. Por otro lado, es bien sabi-

## 2.2. CONFIGURACIONES DE CAMPO ESCALAR COMPLEJO CON AUTO-INTERACCIÓN

---

do que la presencia de bariones durante el proceso de ensamblaje de las galaxias puede alterar el perfil de densidad del halo, haciéndolo más (compresión adiabática [120]) o menos (*feedback* [121, 122]) concentrado. Por tanto, la distribución de materia barionica puede revelar diferentes aspectos de la evolución de halos de alta o baja masa, durante la formación de las galaxias.

En el caso de los modelos de campo escalar la interacción dinámica entre los bariones y el campo también podría estar modificando la estructura interna de los halos, ecuación (2.39), explicando así la discrepancia que encontramos. Por ejemplo, nuestro resultado podría ser suavizado si la concentración en la componente estelar estuviera correlacionada con la del halo, como en el modelo de compresión adiabática aplicada a los modelos de materia oscura estándar. Sin embargo, por el momento no contamos con una descripción de qué tan compresibles son los halos de materia oscura escalar. Por otro lado, si las modificaciones debidas a la presencia de bariones fueran insuficientes, se estaría sugiriendo una evolución intrínseca de este tipo de halos a lo largo del tiempo cósmico. Por ejemplo, si las galaxias grandes fueran el producto de la colisión de galaxias pequeñas, entonces, las densidades centrales de éstas serían naturalmente mayores; después de todo,  $r_{\max}$  es una constante del modelo, y uno esperaría que la masa total del sistema se conserve durante los encuentros de las galaxias. Actualmente no se sabe cual de estos dos mecanismos, cambios intrínsecos al modelo o debidos a la presencia de los bariones, es el dominante.

Una imagen global del problema requiere el conocimiento de la distribución de valores de la densidad central en distintas galaxias, el cual debería ser generado a partir de la evolución del espectro primordial de las fluctuaciones después de inflación. Dicho resultado no está disponible actualmente, sin embargo, hemos visto que es posible empezar a trazar la forma que esta distribución ha de tener usando observaciones de galaxias a distintos corrimientos al rojo, y de distintas morfologías. Aquí hemos presentado, por primera vez, restricciones observacionales a la evolución dinámica de halos de materia oscura escalar en presencia de bariones, que deben ser considerados en los subsecuentes estudios, (semi-)analíticos y/o numéricos, de la formación de galaxias bajo el marco de la materia oscura escalar.

# 3

## *Materia oscura y sub-estructura*

---

El contenido de este capítulo está basado en los resultados publicados en JCAP 03 001 (2013) (2013) [3]

En el modelo cosmológico estándar la formación de estructura se da de un modo jerárquico. Los primeros objetos en formarse son pequeñas estructuras sub-galácticas, que colapsan a partir de pequeñas fluctuaciones en la densidad de energía. Las propiedades, masa y tamaño, de las estructuras más pequeñas que pudieron formarse en el universo temprano pueden predecirse, en cierta medida, a partir del espectro de potencias. En la sección 1.3.2 vimos como, desde el punto de vista observacional, el espectro de potencias solo está bien restringido en el régimen lineal, por encima de la escala de los Mpc. Sin embargo, las escalas más pequeñas, aún no restringidas, contienen información muy valiosa respecto a la naturaleza de la materia oscura. En general, el espectro de potencias tiene una escala de corte característica, a la cual se le asocia la masa de las estructuras más pequeñas que pudieron haberse formado. Por ejemplo, para partículas tipo WIMP, esta masa de corte está en el rango  $M_{\min} \approx 10^{-4} - 10^{-12} M_{\odot}$  [70, 73, 76], para los axiones en  $M_{\min} \approx 10^{-15} M_{\odot}$  [40, 41], y para algunos modelos de campo escalar en  $M_{\min} \approx 10^7 - 10^{10} M_{\odot}$  [59, 77].

Confirmar (refutar) la existencia de estructuras con una masa tan pequeña como la predicha por el corte en el espectro de potencias, *mini-halos*, es crucial para determinar la naturaleza de la materia oscura. Por un lado puede restringir la física, a nivel de los modelos de partículas; por otro, en caso de existir, estas configuraciones podrían afectar las búsquedas directas e indirectas de materia oscura, que ya se llevan a cabo actualmente.

Esto ha motivado una serie de trabajos dedicados a estudiar la evolución, y en específico la supervivencia, de la sub-estructura debido a su interacción con estrellas, el potencial de la galaxia a la que pertenecen, o incluso con otros sub-halos [81, 82, 123–125]. Algunos de estos resultados parecen

---

indicar que la mayoría de los mini-halos sobreviven al proceso de formación de estructura [80, 126]. Otros sugieren que solo una fracción muy pequeña permanece en forma de mini-halos, formándose otro tipo de estructuras, una especie de filamentos, como remanentes de los mini-halos [79, 127].<sup>1</sup>

En este capítulo exploramos una metodología complementaria que nos permitirá poner algunos límites a la masa y fracción de mini-halos o filamentos en el halo de la galaxia. En algunos de los trabajos mencionados se estudia la destrucción de los mini-halos por su interacción con las estrellas. Nosotros nos enfocaremos en estudiar lo que le sucede al sistema dinámico que está ligado a estas estrellas, como sistemas planetarios, estrellas binarias, etc., debido a su interacción dinámica con los mini-halos y/o filamentos.

Nuestro propio Sistema Solar es un excelente candidato para explorar esta propuesta. Los elementos orbitales en éste son conocidos con una precisión excepcional, tal que ha sido ampliamente usado para poner a prueba diferentes teorías de la gravedad. Aquí consideraremos las perturbaciones dinámicas que el sistema Tierra-Luna, y el sistema Sol-Neptuno, podrían experimentar debido a la interacción con una población de mini-halos, o filamentos, y como estas se comparan con las incertidumbres observacionales actuales. Esto nos permitirá restringir la cantidad de subestructura, y sus propiedades, que puede estar presente en el halo galáctico. Otros sistema que usaremos, dentro de este marco, son las binarias abiertas en las galaxias enanas del grupo local. En particular, la interacción de las binarias con la sub-estructura podría causar que éstas se destruyan. Esto ha sido discutido antes en [128], para encuentros catastróficos con mini-halos, y en [129] para efectos de fricción dinámica por la presencia de materia oscura. Aquí reconsideramos la situación estimando el efecto acumulado de encuentros múltiples con mini-halos y filamentos.

En ambos casos estudiaremos la estabilidad dinámica de los sistemas astrofísicos al considerar la tasa de inyección de energía debida a la interacción con una distribución de mini-halos de materia oscura, y de filamentos, cuyos tamaños y abundancias podrían relacionarse con las propiedades de algunos candidatos a conformar la materia oscura.

---

<sup>1</sup>Es importante diferenciar lo que en este contexto llamamos filamentos, de lo que esta palabra significa en el contexto cosmológico. Aquí nos referimos exclusivamente a las colas de marea producidas por la interacción de los sub-halos con las estrellas, con el potencial de la galaxia, etc.

## 3.1. Sub-estructura y perturbaciones a la dinámica de sistemas astrofísicos

La dinámica de algunos sistemas astrofísicos se conoce con un alto grado de precisión, tal como la de nuestro Sistema Solar, que es posible restringir cualquier tipo de perturbaciones que puedan afectarla. Incluyendo la presencia de sub-estructura de materia oscura. Este tipo de sistemas experimentan un efecto despreciable si la materia oscura está distribuida de forma homogénea dentro del halo. Sin embargo, si está distribuida en forma de mini-halos, o filamentos, estas estructuras actuarán como perturbadores. El efecto producido por un solo encuentro puede ser pequeño, pero el efecto acumulado de toda la sub-estructura dentro del halo puede jugar un papel importante en la dinámica del sistema astrofísico bajo estudio. A continuación, mostraremos un formalismo que nos permitirá cuantificar el efecto dinámico que producen las perturbaciones debidas a la presencia de mini-halos, y filamentos. Trabajaremos con sistemas binarios, como blancos de las perturbaciones, pero debemos mantener en mente que el mismo desarrollo es aplicable a cualquier sistema al describirlo en el marco de referencia del centro de masa.

### 3.1.1. Encuentros individuales con mini-halos

Si los mini-halos no han sido destruidos de forma importante pueden ser tratados como perturbadores esféricos. Cuando los encuentros ocurren a distancias mucho más grandes que el tamaño característico del blanco, y cuando el tiempo de interacción es mucho más corto que el tiempo dinámico del blanco, —digamos el periodo orbital de un planeta—, se dice que el encuentro ocurre en el régimen distante e impulsivo. En este régimen, la energía de perturbación, por unidad de masa, debida a un solo encuentro está dada por:

$$\langle \Delta E \rangle_{\text{mh}} = \frac{7 G^2 m_{\text{mh}}^2}{3 v_0^2 p^4} a^2 U(p/r_h). \quad (3.1)$$

donde, el parámetro de impacto  $p$  es la distancia más corta entre el centro del blanco y el mini-halo,  $m_{\text{mh}}$  es la masa del mini-halo,  $v_0$  es la velocidad relativa del encuentro,  $a$  es el tamaño característico del blanco (e.g. la separación media entre partículas), y  $r_h$  el radio característico del perturbador [130].

### 3.1. SUB-ESTRUCTURA Y PERTURBACIONES DINÁMICAS

---

La función  $U$  es un factor de corrección que toma en cuenta los efectos del tamaño finito del perturbador (ecuación (3) en [131]); éste depende del perfil de densidad del perturbador y puede tomar valores entre 0 y 1. Conforme el parámetro de impacto es más grande que el tamaño característico del perturbador, la función  $U$  tiende a uno y la aproximación de masa puntual es válida. La mayoría de los encuentros en nuestro estudio están dentro de esta aproximación, sin embargo para aquellos encuentros que no lo estén usaremos la función  $U$  dada en la sección C.2. La perturbación al sistema la caracterizamos por la energía fraccional normalizada con la energía de enlace ( $|E_b| = GM_c/(2a)$ ), con  $M_c$  la masa del cuerpo central en el sistema que sirve de blanco, dada por:

$$\frac{\langle \Delta E \rangle_{\text{mh}}}{|E_b|} = \frac{14 G m_{\text{mh}}^2}{3 M_c v_0^2 p^4} a^3. \quad (3.2)$$

En el caso de que la aproximación de encuentros distantes no sea apropiada, aplicaremos la corrección descrita en la sección C.2.

#### 3.1.2. Encuentro individuales con filamentos

Definimos a los filamentos como aquellos mini-halos iniciales de materia oscura (sub-halos en general) que ya han sido destruidos debido a fuerzas de marea. La interacción dinámica de estos filamentos con sistemas ligados de tamaño finito, puede ser vista como la interacción gravitatoria entre dicho sistema y una estructura de simetría cilíndrica. El modelo más simple para un filamento es el de una dimensión, i.e. una línea de longitud  $L$  y densidad de masa lineal  $\lambda_{\text{st}}$ . Modelos más realistas incluyen: filamentos con sección transversal finita y de densidad constante (CD); y filamentos con sección transversal finita y perfil de densidad constante hacia el centro (Core), o con perfil de densidad con cúspide hacia el centro (Cusp). Las ecuaciones (3.3) describen la energía de perturbación que recibe el blanco debido a la interacción con los distintos tipos de filamentos.

---

### 3.1. SUB-ESTRUCTURA Y PERTURBACIONES DINÁMICAS

---

$$\frac{\langle \Delta E \rangle_{\text{st}}}{|E_b|} = \frac{4 G \pi^2 \lambda_{\text{st}}^2}{M_c v_0^2 \sin(\theta)^2 p^2} a^3 \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{T}(\alpha, \psi) & \text{(1D)} & (3.3a) \\ \mathbb{T}(\alpha, \psi) \mathbb{B}^2(R_0/p) & \text{(CD)} & (3.3b) \\ \mathbb{C}(R_0/p, \alpha, \beta, \psi) & \text{(Core)} & (3.3c) \\ \mathbb{D}(R_0/p, \alpha, \beta, \psi) & \text{(Cusp).} & (3.3d) \end{array} \right.$$

Las funciones  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  son  $a$ -dimensionales y contienen información sobre la geometría del encuentro, (definida por los ángulos  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\psi$ ), y sobre el radio característico de la sección transversal del filamento,  $R_0$ . Estas funciones son equivalentes a la función  $U$  en el caso esférico. La ecuación para los distintos modelos con sección transversal finita convergen al caso de 1 dimensión cuando el parámetro de impacto es mucho mayor que el radio característica del filamento. En la sección [C.1](#) mostramos la derivación detallada de las ecuaciones (3.3) y una explicación más amplia de los distintos parámetros.

#### 3.1.3. Efecto acumulado de encuentros: Simulaciones Monte-Carlo de los encuentros

Independientemente de si las perturbaciones son debidas a la interacción con mini-halos, o con filamentos, la energía fraccional del sistema blanco, cambiara como resultado de el efecto acumulado de encuentros. Aquí se pueden distinguir dos regímenes contrastantes: en el primero, el régimen “difusivo”, la energía de enlace crece de forma, lenta pero constante, conforme el efecto de encuentros individuales se acumula. En el segundo, el régimen “catastrófico”, unos cuantos encuentros (incluso uno solo), son suficientes para desligar el blanco. Nuestra aproximación general para estudiar el efecto acumulado de los encuentros consiste en realizar experimentos Monte-Carlo de los encuentros, este método automáticamente toman en cuenta los dos regímenes. Realizamos los experimentos como se describe a continuación:

1. Primero, se construyen las historias individuales de encuentros.

- a) Se hace un muestreo azaroso de los parámetros de un encuentro, (parámetro de impacto,

### 3.1. SUB-ESTRUCTURA Y PERTURBACIONES DINÁMICAS

---

velocidad del encuentro, orientación del blanco, etc.), siguiendo la función de distribución correspondiente.

- b)* Se usan los parámetros que muestrados para calcular el efecto de un único encuentro a través de la fracción de energía dada por la ecuación (3.2) para mini-halos, o las ecuaciones (3.3) si el perturbador es un filamento. Usando la ecuación correspondiente al tipo de encuentro bajo estudio.
  - c)* En este paso se actualiza el tamaño del blanco de acuerdo a la fracción de energía que se deposita en el blanco como resultado del encuentro anterior. La relación entre la fracción de energía depositada en el sistema, y el cambio en la separación promedio del mismo es  $|\Delta E/E| = |\Delta a/a|$  (a partir de la definición de la energía de ligadura, y su derivada).
  - d)* Después se incrementa la variable temporal del experimento usando el tiempo que le toma al perturbador recorrer una distancia igual al doble del parámetro de impacto, a la velocidad del encuentro  $v_0$ :  $\Delta t_{\text{enc}} = 2p/v_0$ .
  - e)* Finalmente se repiten los pasos (a) a (d) hasta que se alcanza el tiempo total de la evolución del sistema (e.g. el tiempo que el sistema ha estado bajo perturbaciones), o hasta que la inyección de energía iguala la energía de ligadura.
2. Lo anterior da la energía fraccional total debido a una historia de encuentros entre el blanco y una realización dada de la distribución de perturbadores. La segunda parte de la realización Monte-Carlo consiste en crear un ensamble de este tipo de historias, (i.e. se repite el procedimiento anterior un cierto numero de veces), de tal modo que sea posible calcular el valor medio de la inyección de energía total que la distribución de sub-estructura produce en la dinámica de un blanco específico.

#### **Distribución de los parámetros en los encuentros.**

Describimos ahora las funciones de distribución que usamos para muestrear los diferentes parámetros que caracterizan los encuentros entre el blanco (sistema astrofísico) y la sub-estructura. Para los encuentros con mini-halos, se obtienen el parámetro de impacto a partir de una función de distribución de distancias entre vecinos más cercanos, (distribución de Poisson), modulada por la densidad

---

### 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

---

local de materia oscura ( $\rho_{\text{dm}}$ ), la masa de los perturbadores ( $m_{\text{mh}}$ ) y la fracción ( $f_s$ ) de la densidad que se encuentra en forma de mini-halos:

$$f(p) dp = 4\pi v p^2 \exp\left(\frac{-4\pi v p^3}{3}\right), \text{ with } v = \frac{f_s \rho_{\text{dm}}}{m_{\text{mh}}}. \quad (3.4)$$

Por otro lado, para en encuentros con filamentos se obtiene el parámetro de impacto a partir de la función de distribución que se muestra en la figura C.4b. En este caso no podemos usar la ecuación (3.4), modulada por la densidad de masa lineal del filamentos, debido a que la distribución de parámetros de impacto final depende del volumen de la muestra que se use para generarla, el cual no puede ser determinado a priori. Por lo que se adopto un procedimiento básico que no depende del volumen de muestreo y que se describe en la sección C.1.

Para los dos tipos de encuentros, con mini-halos ó con filamentos, muestreamos la velocidad relativa del encuentro a partir de una función de distribución de Maxwell-Boltzmann. Es decir, consideramos que la distribución de sub-estructuras está en un estado de equilibrio [127]. Finalmente, los parámetros que describen la geometría del encuentro ( $\theta$ ,  $\alpha$ , etc.) se obtienen a partir de funciones de distribución uniformes.

### 3.2. Dinámica de sistemas astrofísicos

Si una distribución de mini-halos, y/o filamentos, conforman el halo de Galaxia, como algunos modelos de materia oscura sugieren, es bastante probable que su presencia pueda ser inferida de forma indirecta a partir de el efecto acumulado que produce en la dinámica de algunos sistemas astrofísicos, la cual puede ser muy sensible a perturbaciones externas. A continuación exploramos la dinámica del sistema solar bajo las perturbaciones debidas a la presencia de sub-estructura.

## 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

---

### 3.2.1. Sistema Solar: perturbaciones a la órbita del sistema Tierra-Luna, y a la órbita de Neptuno

La dinámica del Sistema Solar se conoce con alto grado de precisión. Por ejemplo, la incertidumbre en la determinación del semi-eje mayor de la órbita de Júpiter es del orden de  $10^{-9}$  AU y del orden de  $10^{-6}$  AU para Neptuno [132], mientras que la distancia Tierra-Luna, está determinada con una precisión de  $\Delta a/a \sim 10^{-13}$  [133]. Ésta precisión ha hecho que el Sistema Solar sea muy usado para probar la validez tanto de la relatividad general como de teorías alternativas (ver por ejemplo [134, 135]). Esto hace que sea particularmente atractivo para restringir la cantidad de materia oscura que puede estar presente en el Sistema Solar [136–139]. Por lo mismo, es interesante poder restringir la presencia de sub-estructura en la vecindad solar.

Conforme el sistema solar se mueve a través del halo galáctico, las órbitas de los planetas no experimentarían prácticamente ningún tipo de perturbación si la materia oscura está distribuida de forma homogénea. Por el contrario, si está distribuida en forma de mini-halos o filamentos, la dinámica de estos sistemas puede verse modificada. En este último caso, las perturbaciones producidas por la sub-estructura, sobre las órbitas de los planetas, pueden producir evolución secular de las mismas, en incluso su disolución. Compararemos el efecto dinámico predicho, cambios en el semi-eje mayor de las órbitas, con los límites observacionales actuales, para imponer restricciones a las propiedades de la sub-estructura que puede estar presente.

Elegimos los sistemas Tierra-Luna, y Sol-Neptuno, como sistemas a perturbar. Ambos sistemas tienen restricciones muy fuertes en la determinación de su semi-eje mayor, y es posible tratar los encuentros con sub-estructuras en el régimen impulsivo. Suponemos que la velocidad de los encuentros es del orden de 200 km/s, ya que el sol se mueve alrededor del centro galáctico a aproximadamente 220 km/s y el halo prácticamente no rota. Esto implica que un perturbador cruza la órbita de Neptuno en solo 1,4 años, este tiempo es mucho menor que el periodo orbital de Neptuno, 164,8 años; por tanto el régimen impulsivo es aplicable. Un argumento similar se aplica al sistema Tierra-Luna. Al considerar el efecto acumulado de encuentros, usaremos una distribución del tipo Maxwell-Boltzmann centrada en 220 km/s, como es usual, para muestrear la velocidad relativa de los encuentros. Finalmente, usamos un valor estándar para la densidad local de materia oscura,  $\rho_{\text{dm}} = 10^{-18} M_{\odot} \text{AU}^{-3}$  (0,35 GeV/cm<sup>3</sup>) [140–144] (a menos que se especifique otra cosa).

### 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

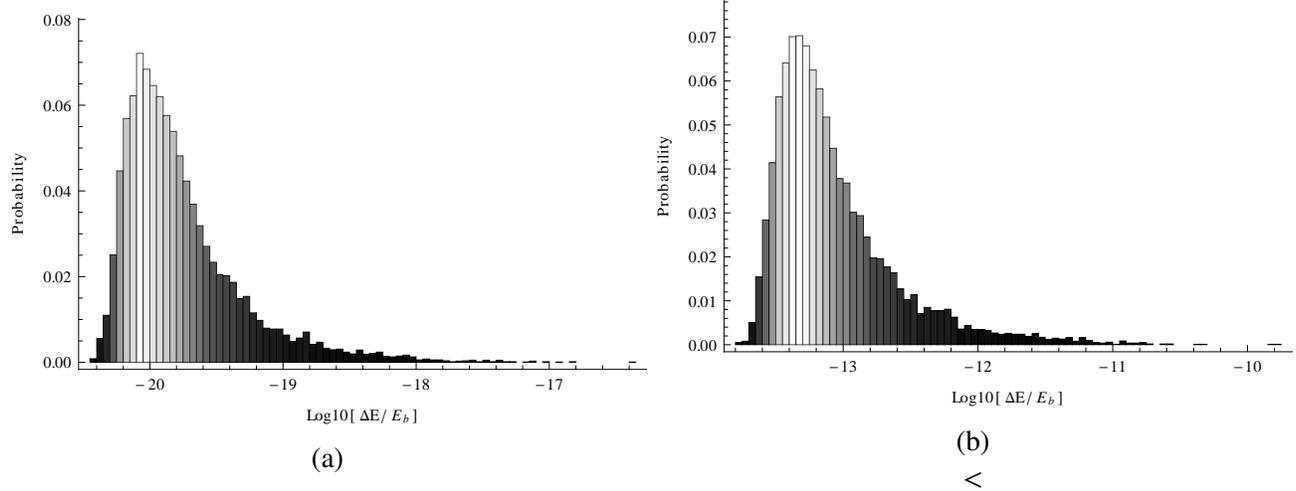


Figura 3.1: Función de distribución de valores de la energía fraccional inyectada al sistema Tierra-Luna debido al efecto acumulado de encuentros con: (a) mini-halos de masa  $m_{\text{mh}} = 10^{-6} M_{\odot}$ , y (b) filamentos de densidad lineal  $\lambda_{\text{st}} = 10^{-6} M_{\odot}/\text{AU}$ . El ensamble contiene aproximadamente 10,000 historias de la evolución del sistema Tierra-Luna, bajo la interacción con los perturbadores correspondientes; por aproximadamente 4 Gyr cada historia.

En la figura (3.1) mostramos un par de ejemplos de la distribución de la energía fraccional,  $\Delta E/E_b$ , obtenida en uno de los ensambles de nuestros experimentos Monte-Carlo. Cada uno de los elementos del ensamble corresponde a una historia de encuentros entre el sistema Tierra-Luna y una población de mini-halos de masa  $m_{\text{mh}} = 10^{-6} M_{\odot}$  (Figure (3.1a)), o filamentos de densidad de masa lineal  $\lambda_{\text{st}} = 10^{-6} M_{\odot}/\text{AU}$  (Figure (3.1b)). El tiempo de evolución del sistema en cada historia es de 4 Gyr, aproximadamente la edad del sistema Tierra-Luna, y el tiempo que Neptuno ha estado en su órbita actual [145, 146]. Cada ensamble consiste de 10000 historias de la evolución del sistema. Para ambos sistemas la distribución de energía fraccional resultante es no-simétrica, por lo que reportaremos los resultados en términos del valor medio y el rango intercuartilico.

Primero, veamos los resultados para encuentros con mini-halos. En las figuras (3.2a), y (3.2b), resumimos estos resultados para el sistema Tierra-Luna, y la órbita de Neptuno, respectivamente. La masa de los perturbadores se encuentra en el rango  $10^{-12} < m_{\text{mh}} < 10^4$ . Se puede observar que ninguno de los dos sistemas es realmente sensible para restringir este tipo de sub-estructura, ni con el valor de la densidad de materia oscura estándar (línea azul), ni a valores más altos (línea roja y verde). Excepto

### 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

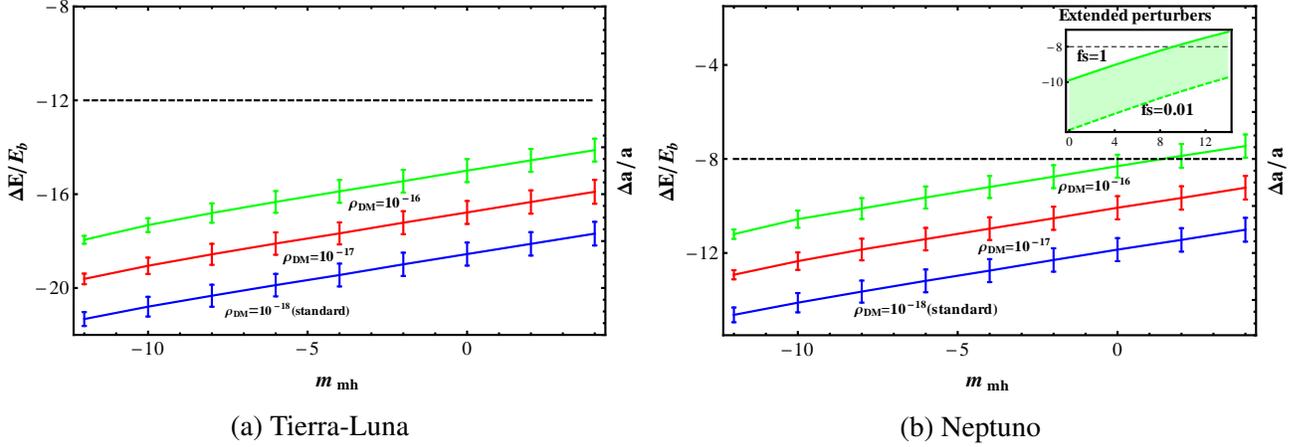


Figura 3.2: Restricciones a la masa de los mini-halos en términos de los encuentros con (a) el sistema Tierra-Luna y (b) la órbita de Neptuno. Mostramos el valor medio de la energía fraccional ganada debido a la interacción con mini-halos, como función de su masa. Comparamos con la incertidumbre en la medición del semi-eje mayor de la órbita correspondiente.[132, 133] (línea discontinua). Mostramos tres valores de la densidad local de materia oscura  $\rho_{\text{DM}}(M_{\odot}/\text{AU}^3)$ . Las barras de error corresponden al rango intercuartil de la realización Monte-Carlo. En la sub-figure se muestra el efecto de incluir la extensión de los perturbadores, y el de variar la fracción de sub-estructura.

para los perturbadores más masivos, más de  $10^2 M_{\odot}$ , y en el caso más denso  $\rho_{\text{dm}} > 10^{-18} M_{\odot}/\text{AU}^3$ . Este sería el efecto máximo que los mini-halos pueden producir, dado que consideramos que la fracción de masa en mini-halos es igual a uno, y los tratamos como perturbadores puntuales. Es interesante notar que aún en el caso de hacer estas aproximaciones el efecto en la dinámica no es observable. Se espera que los mini-halos sean estructuras extendidas y difusas [126], ambas propiedades tienden a disminuir el efecto. Por otro lado, la fracción de sub-estructura depende de la pendiente de la función de masa en sub-estructura,  $n$ , la cual es solo accesible a partir de la extrapolación de ésta función a escalas mayores [147]. El caso  $n = -2$  sugiere que los halos de materia oscura no son homogéneos, y que la materia oscura está contenida. Aunque, resultados recientes sugieren una pendiente de  $n \sim -1,9$ , implicando la presencia de una componente del halos suave, y homogénea, y una fracción en subestructura por debajo de la unidad, este resultado deberá de ser verificado con las simulaciones futuras. Considerar la extensión de los mini-halos, y fracciones menores de sub-estructura, resultará

## 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

---

en valores menores de la inyección de energía (ver sección C.2, y la sub-figura en la figura (3.2b)).

Ahora, veamos el caso de la interacción de estos sistemas con filamentos oscuros; los valores de la densidad lineal usados en este caso están en el rango  $10^{-12} < \lambda_{\text{st}}(M_{\odot}/\text{AU}) < 10^0$ . Las figuras (3.3a) y (3.3b), resumen los resultados. De forma contraria al caso puntual, ambos sistemas son afectados significativamente por la presencia de los filamentos. Con el valor estándar de la densidad de materia oscura local (línea azul), y la sub-figura, el sistema Tierra-Luna excluye la posibilidad de tener la materia oscura distribuida en filamentos con  $\lambda_{\text{st}} \gtrsim 10^{-10} M_{\odot}/\text{AU}$ , mientras que la órbita de Neptuno no impone restricción alguna. Por otro lado, si consideramos valores más altos de la densidad local (línea roja y verde) las restricciones son más fuertes. Ambos sistemas serían compatibles con la presencia de filamentos de densidad lineal  $\lambda_{\text{st}} \lesssim 10^{-11} M_{\odot}/\text{AU}$ , en el caso de mayor densidad. Inicialmente consideramos que toda la materia oscura está distribuida en filamentos, i.e.  $f_s = 1$ . Una vez que relajamos esta condición (región azul en las figuras), se pueden ver distintas combinaciones de la fracción de sub-estructura y de la densidad lineal que están permitidas por las restricciones observacionales. Las regiones permitidas, y no permitidas se muestran en la figura 3.4, que representa la diferencia entre el cambio fraccional de la energía del sistema y la restricción observacional a la misma cantidad, la línea continua indica donde estas cantidades son iguales, separando la región excluida del espacio de parámetros (amarillo-rojo), respecto de la región permitida (verde-azul).

Una situación más realista sería una en la cual una fracción de la densidad de materia oscura local estuviera distribuida en filamentos, mientras que otra fracción está distribuida en mini-halos, y posiblemente una tercera fracción se encuentra en distribuida de forma homogénea. Dado que los encuentros con filamentos o mini-halos son independientes, entonces, en general, las perturbaciones mayores serán producidas por la especie dominante. Podemos ver a partir de las figuras, que el efecto producido por los filamentos será el dominante en la mayoría de los casos.

**Evolución de la unidad astronómica** Actualmente se tiene evidencia de algunas anomalías respecto a datos astrométricos, incluyendo: la anomalía de las Pioneer, variaciones de la unidad astronómica, las anomalías en sobre vuelos terrestres de satélites artificiales, el incremento en la excentricidad de la órbita de la luna, (estas anomalías son discutidas con mayor detalle en [148]). La primera, ya ha sido explicada al modelar con mayor detalle las fuerzas por presión de radiación inherentes a la nave [149], por lo que se ha descartado la posibilidad de que la presencia de materia oscura en el sistema

### 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

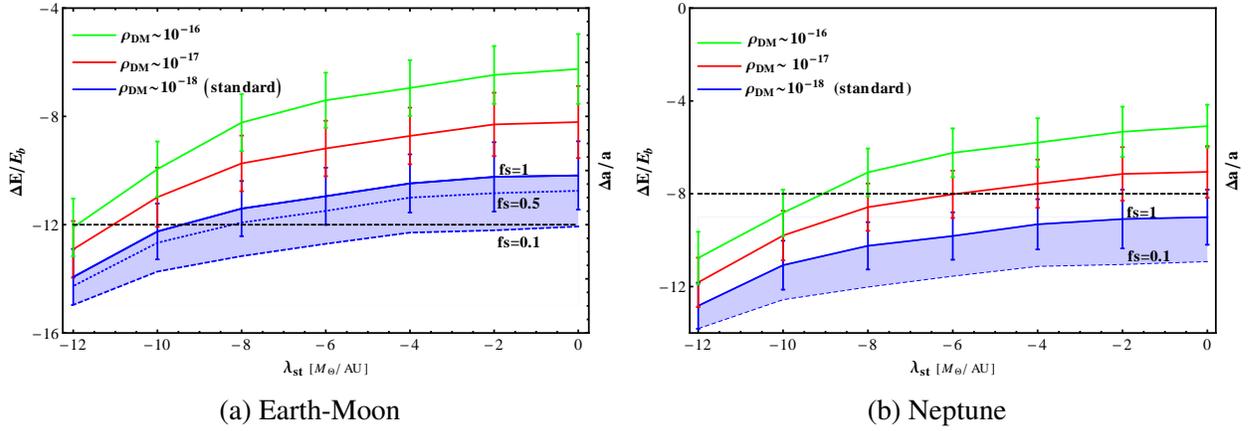


Figura 3.3: Restricciones a la densidad de masa lineal de filamentos oscuros en términos de restricciones a la evolución de (a) el sistema Tierra-Luna y (b) la órbita de Neptuno. Se muestra el valor medio de la inyección de energía debido a encuentros con filamentos como función de su densidad lineal, para tres valores diferentes de la densidad de materia oscura local,  $\rho_{\text{DM}}(M_{\odot}/\text{AU}^3)$ . Las barras de error corresponden al rango intercuartil, y la línea continua corresponde al valor experimental de la incertidumbre en la determinación del semi-eje mayor de la órbita correspondiente.

solar sea la responsable de esta anomalía, (además ver [150]). El incremento reportado en la unidad astronómica es de aproximadamente  $15 \text{ cm yr}^{-1}$  [148]. Hemos usado nuestro formalismo para estimar el efecto acumulado de encuentros con subestructura de materia oscura que tendría sobre la órbita de la Tierra, para verificar si dicha anomalía podría ser explicada debido a este tipo de perturbaciones. Encontramos que usando la densidad local de materia oscura toma el valor estándar, e independientemente de la fracción de subestructura, ni las perturbaciones debidas a la presencia de mini-halos, ni de filamentos, serían lo suficientemente energéticas para explicar la variación en la unidad astronómica. Si se consideran valores más altos de la densidad local de materia oscura, sería posible explicar esta anomalía, sin embargo esto causaría también una evolución secular no observada en otros sistemas, como la Tierra-Luna.

## 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

---

### 3.2.2. Binarias abiertas en las galaxias enanas del grupo local

Se sabe que en el halo estelar de la Vía Láctea se pueden encontrar sistemas binarios de estrellas con separaciones de aproximadamente 0,1 pc [151, 152], pero su existencia en las galaxias enanas esferoidales (dSph's) del grupo local no ha sido corroborada aún. La sobre-vivencia de las binarias abiertas a la interacción con materia oscura ha sido discutida antes. Por ejemplo, las binarias abiertas en la Vía Láctea se han usado para imponer límites a la masa de los llamados MACHOS (halos masivos y compactos, massive compact halos en inglés) [153]. Y recientemente, se ha propuesto que la existencia de este tipo de sistemas en las dSph's puede ser un prueba discriminante a la hipótesis de la materia oscura fría [154, 155]. En particular, en [155] se argumenta que este tipo de binarias debería ser destruida por la interacción dinámica con la sub-estructura presente en el halo de las galaxias enanas, si ésta está presente como se predice en el modelo de materia oscura fría. En este estudio, sólo se consideran los encuentros que dentro de la aproximación de fuerzas de marea lejana resultan catastróficos. También se asume que la función de masa en sub-halos es como la que se encuentra en las simulaciones de  $N$ -cuerpos a escalas más grandes. Además, es importante señalar que el proceso de formación de estas binarias, así como su tiempo de vida, no son temas de los cuales se tenga suficiente información [156, 157], por lo que al menos el tiempo de vida debe ser también un parámetro libre en el estudio. Estas suposiciones que se hacen pueden jugar un papel importante en el momento de estimar las perturbaciones que sufren las binarias abiertas debido a la presencia de sub-estructura de materia oscura. De acuerdo a estos estudios previos, la existencia de binarias abiertas en las dSph's no sería compatible con la hipótesis de la materia oscura.

Nosotros estudiamos la ruptura de binarias abiertas debido a su interacción dinámica con dos tipos de sub-estructura: mini-halos y filamentos. Consideramos solo el efecto de la sub-estructura que está ligada al halo de la galaxia enana, y no aquella ligada al halo de la Vía Láctea. Esto podemos hacerlo, ya que la densidad del halo de la Vía Láctea no coincide con la de las galaxias enanas, en la posición en que se encuentran las estrellas binarias, de otro modo la galaxia enana misma estaría desligada [158]. Calcularemos el efecto acumulado de las interacciones con la sub-estructura haciendo uso de los experimentos Monte-Carlo que describimos en la sección 3.1.3, con lo que automáticamente consideraremos encuentros tanto en el régimen difusivo, como catastrófico.

Consideraremos binarias que estén presentes a una distancia  $r \sim 0,1 \text{ kpc}$  del centro de la galaxia

### 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

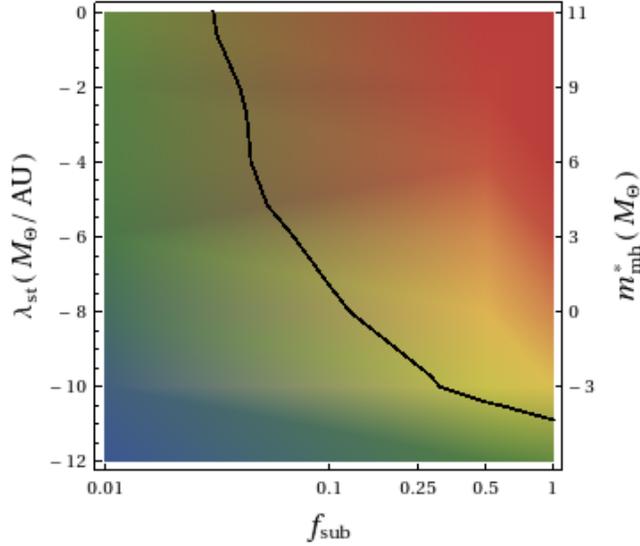


Figura 3.4: Energía fraccional inyectada al sistema Tierra-Luna como función de la fracción de sub-estructura,  $f_s$ , y la densidad lineal de los filamentos,  $\lambda_{st}$ . La línea sólida indica donde la perturbación iguala al límite observacional, con un valor estándar de la densidad local de materia oscura. El eje del lado derecho corresponde a una posible relación entre la densidad lineal de los filamentos y la masa de los sub-halos a partir de los cuales se formaron, ver sección 3.3.

enana, donde un valor típico para la densidad de materia oscura es  $\rho_{dm} \sim 2,2 * 10^{-17} M_{\odot}/AU^3$ , (el halo de materia oscura está descrito por un perfil de densidad del tipo Navarro-Frenk-White, con masa virial  $M_{vir} = 10^9 M_{\odot}$  y concentración  $c = 23,1$ , tal como se considera en [155]).<sup>1</sup> Las velocidades de dispersión en galaxias enanas son del orden de  $\sigma \approx 10\text{km/s}$  [159]. Entonces, consideramos que la velocidad relativa de los encuentros sigue una distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, como en la sección anterior, pero con una dispersión de  $\sqrt{2}\sigma \sim 14\text{km/s}$ . A continuación mostramos los resultados que obtuvimos al seguir la evolución de las binarias abiertas a partir de su interacción con la sub-estructura.

**Interacción con mini-halos** En la figura (3.5a) reportamos el cambio en la energía interna del siste-

<sup>1</sup>Este radio en particular es más pequeño que al cual se tiene la mitad de luminosidad en las galaxias enanas [159], y más pequeño que el considerado en [155]. Lo elegimos de este modo porque a radios más pequeños, se tienen más estrellas, y también la densidad de materia oscura es más alta, por lo cual las interacciones debieran ser más frecuentes.

### 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

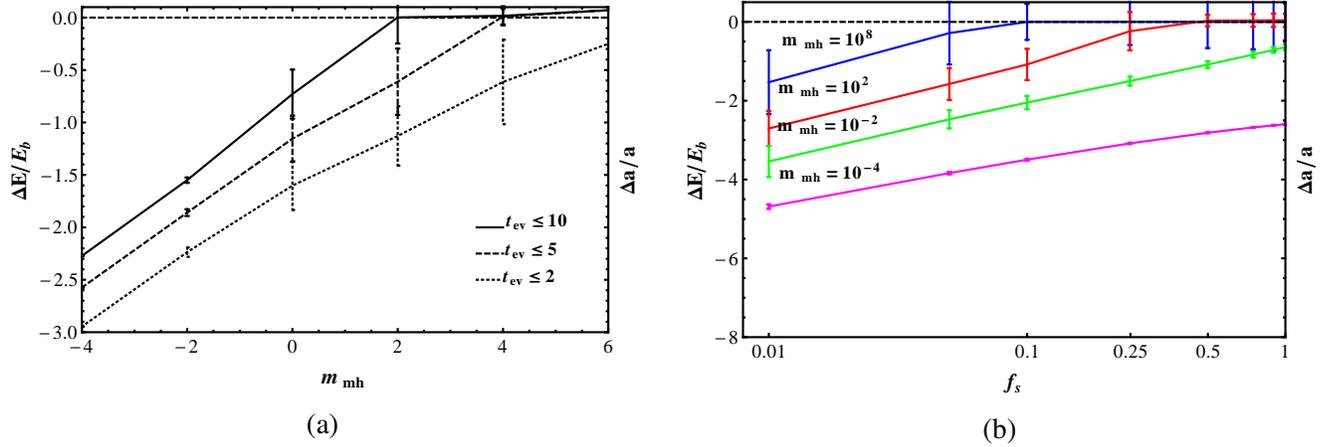


Figura 3.5: Valor medio de la energía de perturbación sobre el sistema de estrellas binarias debido a la interacción con mini-halos. (a) Como función de la masa del mini-halo,  $m_{\text{mh}}(M_{\odot})$ , y para tres tiempos distintos de evolución  $t_{\text{ev}}(\text{Gyr})$ . (b) Como función de la fracción de la masa distribuida en los mini-halos  $f_s$ , de masa distinta.

ma binario como función de la masa de los perturbadores, para el rango de masas  $10^{-4} < m_{\text{mh}} < 10^6 M_{\odot}$ . Se consideraron tres tiempos de evolución distintos: la línea continua corresponde al valor usado en trabajos previos ( $t_{\text{ev}} \sim 10 \text{ Gyr}$ ), la línea discontinua y punteada corresponden a tiempos más cortos (5Gyr y 2Gyr). La línea en  $\delta E/E_b = 0$  representa el límite en el cual la inyección de energía debida a los encuentros iguala la energía de enlace de la binaria, i.e. el momento en el cuál la binaria se separa. Podemos ver que imponer restricciones al tiempo de vida de las binarias, puede imponer límites al máximo valor de la masa de los perturbadores que pueden estar presentes en las enanas esferoidales. Sin embargo, ésta también dependerá de la fracción de la densidad local que esté distribuida en forma de mini-halos. En la figura 3.5b mostramos el efecto de variar la fracción de sub-estructura para algunos valores de la masa del perturbador. Notemos que en el caso de tener perturbadores muy masivos,  $> 10^2 M_{\odot}$  (el límite de masa entre los encuentros catastróficos y difusivos impuesta en [155]) sería posible destruir las binarias, solo si toda la materia oscura estuviera distribuida en mini-halos de esta masa, y el tiempo de evolución fuera tan largo como 10 Gyr. La probabilidad de tener un perturbador masivo con un parámetro de impacto pequeño disminuye, ya que los parámetros de impacto pa-

## 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

---

ra perturbadores más masivos tienen que ser menor que para los perturbadores menos masivos, pues en ambos casos se está sujeto al valor de la densidad de materia oscura local. Por lo cual es más probable producir una evolución secular de la binaria por la presencia de perturbadores de baja masa, que tener encuentros que realmente sean catastróficos.

**Interacción con filamentos** En el caso de la interacción con filamentos, realizamos el mismo procedimiento de antes pero ahora considerando la densidad de masa lineal  $\lambda_{st}$ . Los resultados se muestran en las figuras (3.6a) y (3.6b). Nuevamente, las binarias pueden ser destruidas usando distintas combinaciones de  $\lambda_{st}$ ,  $t_{ev}$  y  $f_s$ . Las restricciones al tiempo de vida de las binarias, impondrían algunos límites a la fracción de la densidad de materia oscura que puede estar distribuida en filamentos de una densidad lineal en particular. Por ejemplo, si consideramos que las binarias han estado bajo la influencia de perturbadores por aproximadamente  $2Gyr$ , entonces no podría haber filamentos con densidades lineales mayores a  $10^{-6}M_{\odot}/AU$ , que conformaran más del 10 % de la densidad de materia oscura, de otro modo las binarias estaría ya destruidas. De forma similar, si el tiempo de evolución de las binarias es de  $10Gyr$ , entonces no podría haber filamentos con  $\lambda_{st} < 10^{-10}M_{\odot}/AU$ , o incluso  $\lambda_{st} < 10^{-8}M_{\odot}/AU$ , dependiendo del parámetro  $f_s$ . Es interesante notar como la restricción a densidad lineal de los filamentos impuesto por la sobrevivencia de las binarias, es similar al impuesto por la dinámica del sistema Tierra-Luna en la sección 3.2.1.

Una situación más general, es aquella en la cual una fracción de la densidad de materia oscura está distribuida en filamentos, y otra en mini-halos. En este caso, la energía de perturbación total dependerá de los detalles de la distribución de los parámetros. En la figura (3.7), mostramos un ejemplo, en el cual comparamos las perturbaciones producidas por mini-halos con la producida por los filamentos. Hicimos la comparación para dos valores de la masa de los mini-halos  $m_{mh}$  (líneas rojas) y dos valores de la densidad lineal de los filamentos  $\lambda_{st}$  (líneas azules). La intersección entre las líneas rojas y azules muestran indican las regiones para las cuales las perturbaciones de un tipo de estructura dominan sobre la otra. En el caso de tener, además, una componente homogénea del halo, la fracción de la masa en mini-halos y la fracción en filamentos, ya no son complementarias, sin embargo, el efecto combinado puede leerse directamente de la figura (3.7).

## 3.2. DINÁMICA DE SISTEMAS ASTROFÍSICOS

---

**Comparación con trabajo reciente** La destrucción de binarias abiertas por la interacción con subestructura de materia oscura, se estudió antes en [155]. A continuación resumimos las principales diferencias, y puntos de convergencia, entre dicho estudio y el que presentamos aquí. En este trabajo no despreciamos a priori, la contribución de los encuentros en el régimen difusivo a la evolución de las binarias, en cambio estudiamos cual sería el efecto acumulado de este tipo de encuentros. En [155] todos los encuentros considerados son catastróficos. Aquí vemos que el calentamiento debido a encuentros difusivos puede producir por si mismo la evolución secular del sistema binario, y puede modificar la configuración original de la binaria antes de que un encuentro catastrófico pueda ocurrir. Por otro lado, la elección de los parámetros de los encuentros es diferente en ambas aproximaciones. En [155] se está sujeto a los resultados de simulaciones de  $N$  – *cuerpos*, en cambio nosotros muestreamos las funciones de distribución de los parámetros, las cuales solo depende de la densidad local de materia oscura. Notemos que la línea negra (continua) en la figura 3.5a corresponde a lo que se esperaba del análisis en [155]. Sin embargo, nuestra aproximación nos permite estudiar el efecto que tiene el tiempo de evolución de las binarias bajo las perturbaciones,  $t_{ev}$ . Conforme el tiempo de evolución disminuye, la región en la cual ocurren encuentros catastróficos se hace menor. Finalmente, nosotros podemos estudiar el efecto dinámico debido a la presencia de subestructuras filamentosarias, figures 3.6a y 3.6b; e incluso la distribución mixta de mini-halos y filamentos, figure 3.7. Hasta aquí, lo único que aún no podemos tomar en cuenta de forma auto-consistente es una relación entre la masa de los perturbadores (densidad lineal si es el caso), y la fracción de sub-estructura. Ésta, en principio, podría tomarse a partir de la extrapolación de simulaciones de  $N$ -cuerpos a escalas más grandes [147]. Aunque esta extrapolación deberá ser verificada en estudios futuros, queremos mantener nuestra aproximación lo más independiente posible de este tipo de resultados. Son, embargo es de suponer que los resultados de incluir esta función de masa en nuestro análisis encajen en las regiones intermedias de los casos límites que ya hemos considerado.

Resumiendo, hemos encontrado que hay una región bastante grande del espacio de parámetros de los encuentros con subestructura que pueden producir la evolución secular de las binarias abiertas, por lo cual, la distribución final de separaciones de las binarias no puede ser independiente de la masa y la abundancia de sub-estructura, haciendo que ésta prueba no sea un discriminante robusto de la hipótesis de la materia oscura, como sugiere en [155]. Sin embargo, puede ser una prueba muy útil para restringir las propiedades de la sub-estructura, especialmente cuando estas restricciones se

### 3.3. UNA POSIBLE RELACIÓN ENTRE $\lambda_{\text{ST}}$ Y $M_{\text{MH}}$

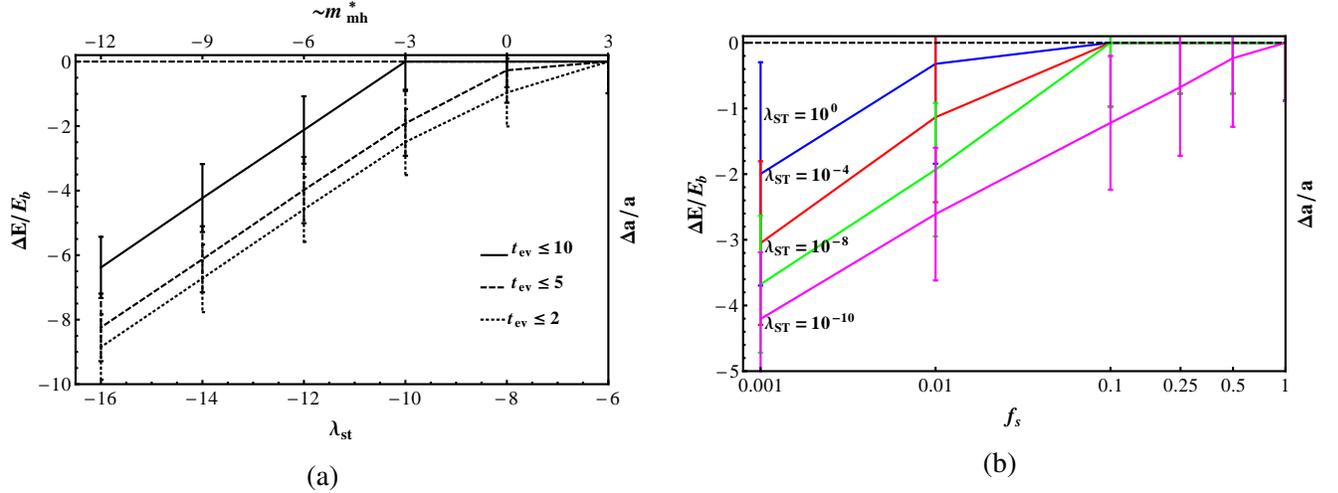


Figura 3.6: Valor medio de la inyección de energía al sistema de binarias abiertas, debido a las perturbaciones por la interacción con filamentos de materia oscura. (a) Como función de la densidad de masa lineal de los filamentos,  $\lambda_{\text{st}}$  y para tres tiempos distintos de la evolución,  $t_{\text{ev}}$  (Gyr). (b) Como función de la fracción de la densidad de materia oscura que está distribuida en filamentos, y para cuatro valores distintos de la densidad de masa lineal.

combinan con otras restricciones astrofísicas.

### 3.3. Una posible relación entre $\lambda_{\text{st}}$ y $m_{\text{mh}}$

Las restricciones impuestas a las estructuras filamentarias podrían ser interpretados en términos de la masa de los sub-halos a partir de los cuales se formaron, si tuviéramos información sobre el tiempo de formación ( $t$ ) de los filamentos, y de la historia de formación de estos. Estos aspectos no son fáciles de determinar, ni siquiera con simulaciones numéricas. Aquí proponemos una aproximación bastante simple para establecer esta conexión. Estimaremos la masa por unidad de longitud de filamento resultante,  $\lambda_{\text{st}}$ , al aproximar primero la longitud de  $L$  con la relación  $L \approx \sigma_{\text{mh}} t$  [127], la cual considera que las partículas dentro del filamento se mueven con la velocidad correspondiente a la dispersión de velocidades que había en el mini-halo progenitor, y que la evaporación se da principalmente en una sola dirección debido a las fuerzas de marea. Por simplicidad consideraremos que

### 3.3. UNA POSIBLE RELACIÓN ENTRE $\lambda_{\text{ST}}$ Y $M_{\text{MH}}$

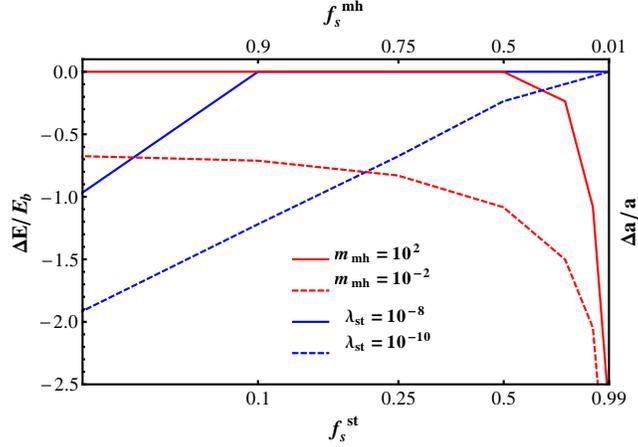


Figura 3.7: Comparación de las perturbaciones producidas a las binarias abiertas, por la presencia de mini-halos y filamentos. Para valores específicos de la densidad de masa lineal de los filamentos, ( $\lambda_{\text{st}}$ , azul), y de la masa de los mini-halos ( $m_{\text{mh}}$ , rojo), como función de la fracción de densidad en sub-estructura correspondiente. La intersección entre las líneas azul y roja indican donde el efecto producido por un tipo de perturbador se vuelve dominante sobre el otro.

inicialmente los mini-halos tienen un perfil de densidad del tipo NFW, y que la máxima velocidad de dispersión puede ser inferida a partir de la masa virial [160] como,

$$\sigma_0^2 \approx 0,472 V_{\text{max}}^2 \quad (3.5)$$

$$V_{\text{max}}^2 = \frac{G M_{\text{vir}}}{2r_s} \frac{0,432}{\text{Log}[1+c] - \frac{c}{1+c}}$$

donde  $r_s$ , y  $r_{\text{vir}}$  son el radio de escala y el radio virial, respectivamente. Usamos las definiciones:  $r_{\text{vir}} = (M_{\text{vir}}/(4\pi/3\rho_{\text{cr}}\Omega_m\delta_{\text{th}}))^{1/3}$  con  $\rho_{\text{cr}} = 270,5M_{\odot}/Kpc^3$ , la densidad crítica  $\delta_{\text{th}} = 340$  la sobre-densidad de un objeto colapsado, de acuerdo al esquema de colapso para el modelo  $\Lambda - \text{CDM}$  con  $\Omega_m = 0,3$ ; y, la concentración para sub-halos  $c = r_{\text{vir}}/r_s = 12 * (M_{\text{vir}}/h^{-1} 10^{12})^{-0,12}$  [161]. Dadas las relaciones anteriores, la dispersión de velocidades resultantes para la masa de los mini-halos en el rango  $10^{-6} < m_{\text{mh}}(M_{\odot}) < 10^0$  es  $10^{-4} < \sigma_{\text{mh}}(\text{km/s}) < 10^{-2}$ . Por tanto, después de la evolución por un tiempo de Hubble, la longitud de los filamentos sería  $7 < L(pc) < 370$ . Usando, una interpolación lineal obtenemos la siguiente relación entre la densidad de masa lineal de los filamentos, y la masa de

### 3.4. DISCUSIÓN

---

los sub-halos iniciales:

$$\lambda_{\text{st}} \approx 10^{-8} m_{\text{mh}}^{0.7}. \quad (3.6)$$

Por ejemplo, sería posible asociar a un mini-halo masa inicial  $10^{-6} M_{\odot}$  un filamento de densidad de masa lineal de  $10^{-13} M_{\odot}/\text{AU}$ . De acuerdo a la figura (3.3a) este tipo de estructuras estaría perfectamente permitidas por la dinámica del Sistema Solar. Por comparación hemos escalado nuestros resultados en las figuras (3.4), y (3.6a), usando esta relación (3.6). Sin embargo, para tener una relación más precisa entre  $\lambda_{\text{st}}$  y  $m_{\text{mh}}$  se requiere de un estudio estadístico de la interacción entre mini-halos y perturbadores, lo cual está fuera de el alcance de este estudio.

### 3.4. Discusión

Hemos estimado el efecto dinámico que produciría la sub-estructura presente en el halo galáctico sobre la evolución de las orbitas planetarias en el Sistema Solar; la orbita Tierra-Luna, y las orbitas de la Tierra y Neptuno específicamente. Comparamos este efecto con la precisión observacional que se tienen actualmente de la determinación del correspondiente semi-eje mayor (precisión milimétrica para el sistema Tierra-Luna, gracias al proyecto APOLLO-LLR [133]), y encontramos que una distribución local de materia oscura formada completamente por estructuras filamentosarias de densidad de masa lineal  $\lambda_{\text{st}} \gtrsim 10^{-10} M_{\odot}/\text{AU}$  en la vecindad solar, causaría evolución secular no observada del sistema Tierra-Luna, mayor a los límites observados actualmente, (aunque la orbita de Neptuno permite valores mayores). También hemos mostrado regiones del espacio de parámetros, que estarían permitidas y no permitidas, de los filamentos, basados en la precisión actual de la medición de la distancia Tierra-Luna.

Aquí es importante enfatizar la importancia que el valor de la densidad local de materia oscura tiene en nuestro estudio. La forma estándar de restringir esta cantidad es a partir de estudios dinámicos, los cuales están asociados a diferentes fuentes de incertidumbres astrofísicas. De acuerdo a diferentes autores, la densidad local de materia oscura en la vecindad solar varia en el rango  $\approx 10^{-18} M_{\odot}/\text{AU}^3$  ( $0,2 - 0,85 \text{ GeV cm}^{-3}$ ) [140–144, 162]. La mayoría de estos estudios están basados en la determinación de la curva de rotación de la Galaxia, y están sujetos a errores sistemáticos asocia-

### 3.4. DISCUSIÓN

---

dos a la forma no conocida del halo de la Galaxia. Otras determinaciones de la densidad son locales y en principio están libres de errores sistemáticos [162]. Sin embargo, la calidad de las observaciones aún debe mejorar para poder tener mejores restricciones del valor de la densidad local de materia oscura. La misión GAIA mejorará estas determinaciones [163, 164].

También es importante decir que todas estas determinaciones dan información solo sobre el valor promedio de la densidad, en escalas de cientos a miles de parsecs, pero no dicen nada sobre la forma en que la materia oscura está distribuida a menor escala. De hecho, la densidad en la escala del sistema solar podría presentar importantes sobre-densidades (baja-densidad), independientemente del valor promedio a mayor escala. En este trabajo usamos diferentes valores de la densidad local, que en algunos casos están fuera del rango de las incertidumbres observacionales actuales. Esto lo hicimos con la finalidad de explorar de forma independiente el espacio de parámetros. Nuestro estudio, indica que si la materia oscura en la vecindad solar estuviera distribuida en mini-halos, la densidad podría ser hasta un orden de magnitud mayor que el valor promedio estándar, sin estar en conflicto con la dinámica del Sistema Solar y las restricciones observacionales antes descritas, pero no si está distribuida principalmente en filamentos.

También aplicamos nuestro formalismo para determinar si la presencia de sub-estructura de materia oscura en las galaxias enanas podría estar en conflicto con la presencia de binarias abiertas en estas galaxias. El caso de encuentros acumulados, el régimen difusivo, y la interacción con filamentos no ha sido considerado antes. Hemos demostrado, que los encuentros catastróficos no necesariamente son el mecanismo principal de la destrucción de binarias abiertas. El efecto acumulado de encuentros con perturbadores pequeños también puede causar evolución secular. Nuestros resultados indican que tener mejores restricciones del tiempo de vida de las binarias abiertas puede imponer fuertes restricciones a las propiedades de la sub-estructura. Pero, dado que hay diferentes combinaciones de los parámetros de la sub-estructura,  $(m_{mh}, \lambda_{st}, f_s, t_{ev})$ , para los cuales es posible causar evolución secular del sistema binario, o incluso destruirlo; consideramos que la existencia de este tipo de estrellas binarias no es un discriminante robusto de la hipótesis de la materia oscura. Sin embargo, tener una buena caracterización de la distribución de estas binarias sería muy útil para restringir las propiedades de la sub-estructura de materia oscura, especialmente cuando se combina con otras restricciones astrofísicas.

Además, al relacionar la densidad de masa lineal de los filamentos con la masa del halo progenitor

### 3.4. DISCUSIÓN

---

(usando una aproximación simple), concluimos que el corte típico en el espectro de potencias, i.e. la masa de la estructura más pequeña formada en el universo,  $m_{\min} \sim 10^{-4} - 10^{-12} M_{\odot}$  [70, 76], correspondería a filamentos con densidad lineal  $\lambda_{st} \sim 10^{-11} - 10^{-17} M_{\odot}/\text{AU}$ . Estos valores son compatibles con la dinámica del sistema solar, (se obtuvieron conclusiones similares cuando consideramos los mini-halos como perturbadores puntuales), y serían compatibles también con la existencia de binarias abiertas en las galaxias enanas en el grupo local, si dichas binarias fueran detectadas. Por otro lado, para filamentos con  $\lambda_{st} \approx 10^{-10} - 10^{-8} M_{\odot}/\text{AU}$  ( $m_{\min} \sim 10^{-3} - 10^0 M_{\odot}$ ), la energía fraccional inyectada a las estrellas binarias podría causar su destrucción, y el efecto correspondiente sobre el sistema Tierra-Luna estaría justo debajo de las restricciones observacionales. Esto implicaría, que si las binarias abiertas en galaxias enanas con separaciones de  $a \sim 0,1 pc$  no se observaran, esto podría ser debido a la presencia de filamentos con  $\lambda_{st} > 10^{-10} M_{\odot}/\text{AU}$  ( $m_{\min} \sim 10^{-3}$ ), pero la presencia de este tipo de estructuras en la vecindad solar sería incompatible con la dinámica del sistema Tierra-Luna (aunque dependerá de la fracción de sub-estructura). Este es un ejemplo de como restricciones combinadas, de diferentes sistemas astrofísicas, podría estar revelando el corte en el espectro de potencias.

Finalmente, comentamos sobre la relación de este trabajo con los métodos de detección directa, e indirecta de materia oscura. Primero, es bien sabido que la presencia de sub-estructura en la vecindad solar puede afectar la tasa de eventos y el espectro de energías, y consecuentemente los límites de exclusión definidos por los experimentos actuales. De nuestro estudio podemos decir que que la dinámica del Sistema Solar no sería afectada significativamente por ninguno de los tipos de estructuras, mini-halos o filamentos, (ni siquiera en el caso idealizado de que la fracción de sub-estructura sea igual a uno). Esto abre la posibilidad de que el sistema solar esté en una región sobre-densa y sugiere que los modelos de halo de materia oscura que incluyen la presencia de sub-estructura deberían ser usados cuando se interpretan los resultados experimentales. Sin embargo, también está la posibilidad de estar en una región menos densa, lo cual no sería distinguible del caso estándar por estudios dinámicos, pero que tendría consecuencias importantes para los métodos de detección directa.

Por otro lado, la presencia de sub-estructura en los halos galácticos, puede afectar también la interpretación de los resultados de los experimentos de detección indirecta, ya que en algunos casos estos experimentos requieren de la presencia de un mecanismo de aumento en la magnitud de la interacción, usualmente asociado al mecanismo de Sommerfeld, el cual depende de la velocidad.<sup>1</sup> Dado

---

<sup>1</sup>Si la materia oscura está compuesta por partículas débilmente interactuantes, la detección de los productos de la auto-

### 3.4. DISCUSIÓN

---

que los mini-halos y los filamentos son, en general, cinemáticamente más fríos que la componente homogénea del halo galáctico, entonces, los límites a las propiedades de la sub-estructura impuestas en este trabajo pueden ser útiles para interpretar resultados de los experimentos de detección indirecta.

---

aniquilación de estas partículas ofrece una oportunidad de inferir de forma indirecta la existencia de este tipo de partículas. Los experimentos Fermi y PAMELA muestran excesos en la detección de electrones y positrones, estos excesos pueden ser explicados por la presencia de materia oscura [165, 166]. Aunque la señal también puede ser atribuida a fuentes astrofísicas aún no identificadas

### 3.4. DISCUSIÓN

---

# 4

## *Materia oscura y especies relativistas.*

---

El contenido de este capítulo está basado en los resultados reportados en arXiv:1106.5052 (2011) [4]

Es bien sabido que los neutrinos del modelo estándar contribuyen con solo una pequeña fracción a la densidad de energía en el universo,  $\Omega_\nu h^2 \approx 0,0062$  [110]. Las tres especies de neutrinos del modelo estándar son partículas sin masa, sin embargo, las observaciones de oscilaciones del sabor entre las diferentes especies han dado evidencia de que estas partículas han de ser masivas. Se requiere física más allá del modelo estándar para entender estas oscilaciones. En concreto, algunos de los mecanismos propuestos requieren la existencia de especies de neutrinos adicionales, denominados estériles. Estos tienen suprimidas todas las interacciones fundamentales, excepto la gravitatoria. Su existencia podría explicar los resultados de los experimentos LSND y MiniBooNE [167–169], así como las anomalías en la emisión de rayos X de la galaxia enana esferoidal Willman 1 [170]. Los neutrinos estériles, además de explicar las oscilaciones, pueden comportarse como materia oscura tibia, e incluso fría, dependiendo de su mecanismo de producción, y así contribuir a la densidad de materia del universo.

Por otro lado, la expansión del universo puede verse afectada por la presencia de especies relativistas no estándar. La densidad de energía para ésta componente se expresa como  $\rho_r \approx \rho_\gamma(1 + 0,2271N_{\text{eff}})$ , en donde  $\rho_\gamma$  corresponde a la densidad de energía en fotones (muy restringida por observaciones de la radiación cósmica de fondo),  $N_{\text{eff}}$  al número efectivo de especies de neutrinos. Este último difiere del número de especies de neutrinos, incluso en el modelo cosmológico estándar,  $N_\nu = 3,04$ , debido a ciertos efectos cuánticos y al hecho de que los neutrinos no se desacoplan instantáneamente del resto de partículas, véase la referencia [51] para una revisión completa.

El parámetro  $N_{\text{eff}}$  suele nombrarse como número efectivo de especies de neutrinos, número de

---

especies relativistas, o “radiación oscura”, debido a que básicamente es una parametrización de cualquier proceso que pueda cambiar la tasa de expansión en dicha época. Es decir, las desviaciones con respecto a  $N_{\text{eff}} = 3,04$  también pueden surgir por la presencia de axiones [171, 172], por el decaimiento de partículas de materia oscura [173–175], por la presencia de fuerzas de largo alcance en el sector oscuro, “electromagnetismo oscuro” [176], entre otros modelos [177–181].

Las restricciones para  $N_{\text{eff}}$  provenientes de nucleosíntesis, radiación cósmica de fondo, y formación de estructura, corresponden a diferentes épocas en la evolución del universo, involucrando procesos físicos diferentes. Por tanto, el uso conjunto de estas observaciones puede verse como una prueba de consistencia. En la sección 4.1 revisaremos la situación actual acerca de la evidencia observacional de la existencia de componentes de radiación extra en el universo, con base a observaciones cosmológicas, las cuales sugieren una ligera preferencia por valores de  $N_{\text{eff}}$  mayores al número estándar.

En su mayoría, las restricciones reportadas sobre  $N_{\text{eff}}$  han sido derivadas bajo una interpretación Bayesiana de las observaciones. Dichas restricciones se obtienen a partir de la distribución de probabilidad a posteriori, la cual es marginalizada sobre todos los demás parámetros para obtener los intervalos de confianza. La ventaja de este formalismo es que nos permite hacer inferencia estadística sobre los parámetros involucrados, sin embargo, la distribución a posteriori puede depender fuertemente de las suposiciones que se hagan a priori sobre la distribución de estos. En algunos casos la elección de los *priors* es arbitraria. (Por simplicidad usaremos la palabra *prior*, proveniente de la literatura en inglés, para referirnos a las suposiciones a priori).

En este capítulo mostramos una metodología que nos permite obtener intervalos de confianza para el valor de  $N_{\text{eff}}$  a partir de las observaciones cosmológicas, los cuales son independientes de los *priors*. Ésta se basa en el uso del factor generalizado de verosimilitud (*generalized likelihood ratio*) en un formalismo frecuentista, para reportar los intervalos de confianza. Este tipo de análisis es de particular utilidad para entender el papel que juega la elección de los *priors* en la determinación del número efectivo de especies de relativistas. Es muy importante contar con evidencia confiable ya que, como hemos mencionado, la evidencia de  $\Delta N_{\text{eff}}$  puede estar asociada a las propiedades de la materia oscura.

### 4.1. Evidencia de $\Delta N_{\text{eff}} > 0$

Las observaciones de la radiación cósmica de fondo han mostrado cierta preferencia por un exceso en la densidad de energía de especies relativistas en la época del desacople [182]. Entre los resultados más notables están los reportados por la colaboración del *Atacama Cosmology Telescope* (ACT) de  $N_{\text{eff}} = 5,3 \pm 1,3$  [53], en combinación con las observaciones de ACBAR (Arcminute Cosmology Bolometer Array). En la figura 4.1 se muestra una compilación de las restricciones para  $N_{\text{eff}}$ , obtenidas en éste y otros análisis [183], en su mayoría obtenidas bajo un formalismo Bayesiano, (aunque no siempre adoptando una técnica tipo MonteCarlo basada en cadenas de Markov). Claramente los diferentes análisis realizados muestran una preferencia por números de  $N_{\text{eff}}$  mayores al estándar. Cabe mencionar que los últimos resultados, tanto de WMAP 9 y PLANCK no están incluidos. Se ha de tomar en cuenta que en algunos análisis, de los antes mencionados, el valor estándar de  $N_{\text{eff}}$  está descartado en con más de un 95 % de confianza, por ejemplo, [184], mientras que en otros análisis no, por ejemplo [185]. En particular, en [186], se consideraron las restricciones cosmológicas sobre el número de especies de neutrinos, y su posible conexión con los experimentos de física de partículas. Se encontró que los datos cosmológicos, en combinación con las restricciones de núcleo-síntesis, favorecerían débilmente la existencia de radiación adicional en el universo, más allá de los fotones y neutrinos ordinarios, dando así evidencia de la existencia de neutrinos estériles. Se encontró que la cantidad de radiación adicional correspondía a una unidad extra de  $N_{\text{eff}}$ , por lo que una especie de neutrino estéril podría hacer compatibles las observaciones cosmológicas, y los experimentos de oscilaciones del sabor.

Por otro lado, en [52] se muestra que la preferencia por valores de  $N_{\text{eff}}$  mayores al valor estándar proviene de su contribución a la tasa de expansión antes de la recombinación. Este análisis también descarta el número efectivo de neutrinos estándar con el 95 % y 98,4 %, usando conjuntos de datos del radiación cósmica de fondo, y de una combinación de ésta, la estructura a gran escala y la constante de Hubble. La interpretación física que se ofrece es que el incremento de  $N_{\text{eff}}$  produce un aumento en la amortiguación de los modos con alto  $\ell$ , y esto parece mejorar el ajuste a los datos.

#### 4.1. EVIDENCIA DE $\Delta N_{\text{EFF}} > 0$

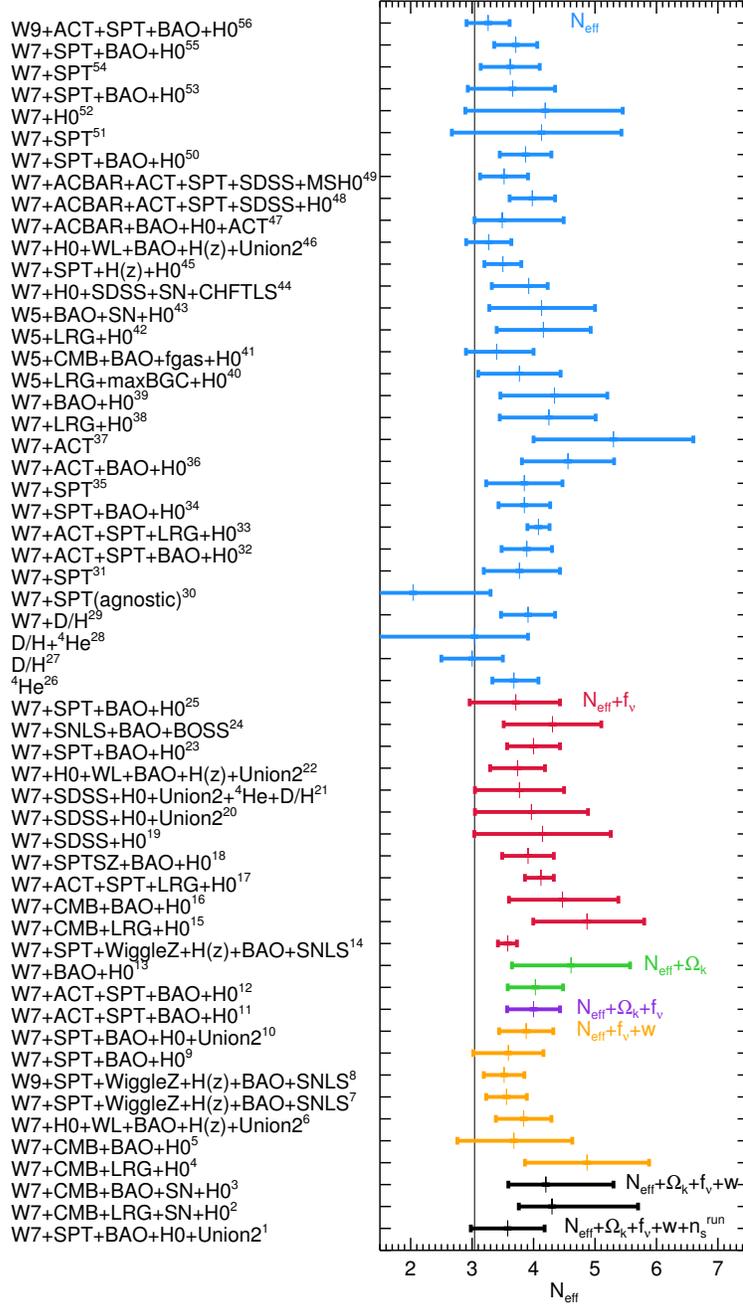


Figura 4.1: Compilación de restricciones al valor de  $N_{\text{eff}}$  en diferentes análisis a  $1-\sigma$ . Los superíndices corresponden a las referencias en [183]

### 4.2. Aproximación Bayesiana vs frequentista

En cosmología las restricciones para los parámetros cosmológicos se obtienen a partir de la distribución de probabilidad a posteriori en un marco Bayesiano. En este marco, la pregunta que se realiza es ¿cuál es la distribución de probabilidad para un conjunto de parámetros del modelo  $H$  (e.g. el modelo  $\Lambda$ -CDM), dadas las observaciones que dan lugar al conjunto de datos  $D$  (CMB)?. En el lenguaje estadístico esto se refiere a encontrar la función de distribución a posteriori  $P(H|D)$  de los parámetros que definen la hipótesis mediante el teorema de Bayes

$$P(H|D) = \frac{P(H)P(D|H)}{P(D)} \quad (4.1)$$

en donde  $P(D|H)$  es la probabilidad de la observación dada la hipótesis, denominada *likelihood*, o verosimilitud, y  $P(H)$  es la distribución de probabilidad a priori de la hipótesis (representa nuestros conocimientos previos sobre la hipótesis). De aquí, las restricciones sobre un parámetro de interés específico se obtienen al marginalizar sobre los demás parámetros. Este formalismo es extremadamente poderoso ya que nos permite hacer inferencia estadística, sin embargo, la distribución a posteriori puede depender fuertemente de los priors. Al derivar los intervalos de confianza el procedimiento de marginalización da un peso a los parámetros en base al volumen de la distribución a posteriori, en lugar de solo en base a que tan bien se ajustan los parámetros a los datos. Cuando se considera un espacio de parámetros de muchas dimensiones y, especialmente, cuando los conjuntos de datos no son muy restrictivos los intervalos de confianza pueden depender fuertemente de la elección de los priors, y del volumen en el espacio de parámetros. Para algunos parámetros cosmológicos dicha elección es arbitraria, en particular para el parámetro  $N_{\text{eff}}$ .

Por otro lado el programa “Get Dist”, parte del paquete CosmoMC [187], por defecto calcula intervalos de confianza (Bayesianos) centrados, mientras que unos intervalos de confianza mínimos serían mas adecuados para la inferencia estadística. Como se menciona en [188] estos dos tipos de intervalos de confianza difieren significativamente si la distribución a posteriori esta sesgada, y el efecto puede ser particularmente grande para  $N_{\text{eff}}$  si el conjunto de datos elegido no es muy restrictivo. En principio, cuantos más conjuntos de datos sean considerados las degeneraciones se reducen y la distribución a posteriori se aproxima a una Gausiana. Entonces los dos tipos de intervalo de confianza

## 4.2. APROXIMACIÓN BAYESIANA VS FREQUENTISTA

---

deberían de aproximarse entre sí.

En general, se debe ser consciente que diferentes autores eligen diferentes priors en los análisis cosmológicos, por ejemplo algunos pueden incluir un prior uniforme en  $H_0$ , o un prior uniforme en  $\Omega_\Lambda$ . Entonces, resulta importante establecer si los intervalos de confianza para los parámetros, tal como la evidencia de  $N_{\text{eff}} > 3,04$ , pudieran estar dominados por cualquiera de los efectos antes mencionados, en cuyo caso estos deberían ser interpretados con mucho cuidado. La dependencia en la elección de los priors, algunas veces arbitraria, en los efectos de volumen de la distribución a posteriori durante la marginalización, y la ambigüedad entre intervalos de confianza, centrales vs mínimos, puede ser minimizada haciendo el análisis tan independiente de los priors como sea posible, usando una aproximación frecuentista.

En el formalismo frecuentista es común el uso del perfil verosimilitud (*likelihood profile*), para reportar los intervalos de confianza. El factor de verosimilitud es una técnica bien establecida para calcular intervalos de confianza cuando solo se considera un parámetro, pero no se tienen una función equivalente a la marginalización Bayesiana para tratar con problemas de muchos parámetros. Sin embargo, el factor generalizado de verosimilitud (*generalized likelihood ratio*) incluye dicha funcionalidad. Afortunadamente, es posible extraer de forma aproximada el perfil generalizado de verosimilitud, a partir de la salida estándar de los análisis cosmológicos realizados con los métodos tipo MonteCarlo basado en cadenas de Markov (Markov Chain MonteCarlo, MCMC) [185].

Las cadenas resultantes en un análisis con CosmoMC, para un conjunto de datos dado, contienen el valor de la verosimilitud para cada conjunto de parámetros aceptado. Dado que estamos interesados solo en restricciones a  $N_{\text{eff}}$ , buscamos el valor de máxima verosimilitud ( $L_{N_{\text{eff}}}$ ) como función  $N_{\text{eff}}$  sobre el espacio de parámetros muestreado en la cadena, sin importar el valor que el resto de los parámetros haya tomado. En la práctica, dividimos el rango de variación de  $N_{\text{eff}}$  en pequeños sub-intervalos, de tamaño 0,5 a 0,1., y obtenemos el perfil de verosimilitud al considerar  $\ln(L_{N_{\text{eff}}} / L_{\text{max}})$  como función de  $N_{\text{eff}}$ ; donde  $L_{\text{max}}$  es el máximo de la verosimilitud en toda la cadena. Verificamos que nuestros resultados no dependen significativamente de la elección del tamaño de los sub-intervalos, siempre que estos no sean tan pequeños que resulten en una estimación muy ruidosa, y no tan grandes que borren la señal. En general, usar sub-intervalos muy grandes pueden suavizar demasiado la curva y dar una pequeña sobre estimación de los intervalos de confianza, por otro lado, sub-intervalos muy pequeños producen una curva, e intervalos de confianza, muy ruidosa. Hemos fijado el tamaño del

---

### 4.3. ANÁLISIS

---

sub-intervalo a 0,2, en todo el análisis, a menos que especifiquemos otra cosa.

Una vez construido el perfil de verosimilitud, se pueden obtener los intervalos de confianza identificando [185, 188],

$$\ln(L_{N_{\text{eff}}} / L_{\text{max}}) = 1/2 \chi^2 \quad (4.2)$$

De tal modo que  $\Delta \ln(L_{N_{\text{eff}}}/L_{\text{max}}) = 0,5$  y  $\Delta \ln(L_{N_{\text{eff}}}/L_{\text{max}}) = 2$  corresponden a las regiones con 68,3 % y 95,4 % de confianza, respectivamente. Finalmente, reportamos nuestros resultados en términos de la probabilidad de  $\Delta N_{\text{eff}} = N_{\text{eff}} - 3,04$  para cada conjunto de datos que hemos considerado. La correspondencia entre los intervalos  $\chi^2$  y el factor de verosimilitud se hace suponiendo estadística Gaussiana, como es costumbre en este contexto. Estrictamente hablando, esta aproximación puede dar como resultado intervalos de confianza muy anchos, (sobre estimados) o muy estrechos (sub-estimados) dependiendo de la forma específica de la función de verosimilitud. En la mayoría de las aplicaciones en cosmología, si el perfil de verosimilitud real se desvía de la Gaussiana, éste tiende a sobre estimar los intervalos de confianza. Hemos ajustado los perfiles de verosimilitud con Gaussianas y no hemos encontrado desviaciones significativas, lo cual da soporte a nuestra aproximación en el cálculo de los intervalos de confianza.

### 4.3. Análisis

Para nuestro análisis consideramos los siguientes conjuntos de datos de WMAP 7 en combinación con (i) un prior constante en la constante de Hubble [32, 189, 190], (ii) restricciones de las oscilaciones acústicas bariónicas del Sloan Digital Sky Survey versión 7 (WMAP+BAO) [191], (iii) el espectro de potencias del SDSS DR7 LRG [192] (WMAP+LRG), y (iv) mediciones de supernovas tipo 1A, (WMAP+SN) [193]. Estas cadenas de Markov están disponibles a través del archivo público LAMBDA (Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis, <http://lambda.gsfc.nasa.gov>). También consideramos combinaciones que incluyen experimentos de alta resolución de la radiación cósmica de fondo, para los cuales los espectros de potencias angulares y funciones de verosimilitud estaban disponibles públicamente al momento de escribir el trabajo original: ACBAR [194] y ACT [53]. En nuestro análisis mantuvimos la fracción de masa de Helio ( $Y_p$ ) fija al valor de concordancia. Algunos análisis permiten que  $Y_p$  varíe [52, 53], sin embargo, añadir otro parámetro libre al

### 4.3. ANÁLISIS

---

análisis solo da lugar a tener degeneraciones extra, (en particular  $N_{\text{eff}}$  y  $Y_P$  están anti-correlacionadas), y posiblemente exacerbar los efectos del prior que pueden sesgar las distribuciones de probabilidad a posteriori.

En las cadenas de Markov que obtuvimos usamos un prior plano en  $H_0$ , en lugar de usar un prior plano en la distancia angular a la superficie de ultima dispersión, como está hecho en la implementación estándar de CosmoMC. Ésto debido a que la expresión que usa el código CosmoMC para calcular la distancia angular es correcta para el número estándar de especies de neutrinos, pero no en casos más generales. En la practica, usar un prior plano en esta cantidad es equivalente a usar un prior más complejo en la distancia angular verdadera. Esto no es necesario si se usa un prior plano en  $H_0$  y obviamos la aproximación analítica para calcular la distancia angular (véase [195] para una discusión más amplia). Ya que nosotros usaremos el perfil de verosimilitud la elección del prior no es tan relevante, de hecho lo verificamos al correr algunas cadenas con los dos priors, uno plano en  $H_0$  y uno en la distancia angular. En estos casos, el perfil de verosimilitud resultante es indistinguible, no así la distribución de probabilidad a posteriori.

En la figura 4.2a se muestra una compilación de las restricciones impuestas por los diferentes conjuntos de datos que consideramos usando el método que aquí proponemos. Se ha de notar que para todos los conjuntos de datos,  $\Delta N_{\text{eff}} = 0$  está siempre dentro de las barras de error al 95 % de confiabilidad, aún cuando el valor de máxima verosimilitud esta siempre en la región  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$ . Todas las combinaciones que se muestran tienen datos del WMAP 7 en común, por lo cual no son estadísticamente independientes. No es de extrañar que si para WMAP 7 el valor de máxima verosimilitud es  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$ , esto persista para el resto de las combinaciones. En la figura 4.2b, mostramos un ejemplo para ilustrar cómo se derivaron los intervalos de confianza a partir del perfil del factor de verosimilitud, mostramos la curva que obtenemos para la combinación WMAP 7+LRG. Éste se puede comparar directamente con los resultados en [185].

En la figura 4.3a se muestran las restricciones que obtuvimos a partir de combinaciones que involucran WMAP 7 y ACT. Las restricciones para las distintas combinaciones se resumen en la figura , y mostramos un ejemplo ilustrativo de de la curva de probabilidad para una de las combinaciones el la figura 4.3b. Nuevamente, el valor estándar  $\Delta N_{\text{eff}} = 0$  esta siempre dentro de la región del 95,4 % de credibilidad, y en muchas ocasiones incluso dentro de la región  $1 - \sigma$ .

## 4.4. DISCUSIÓN

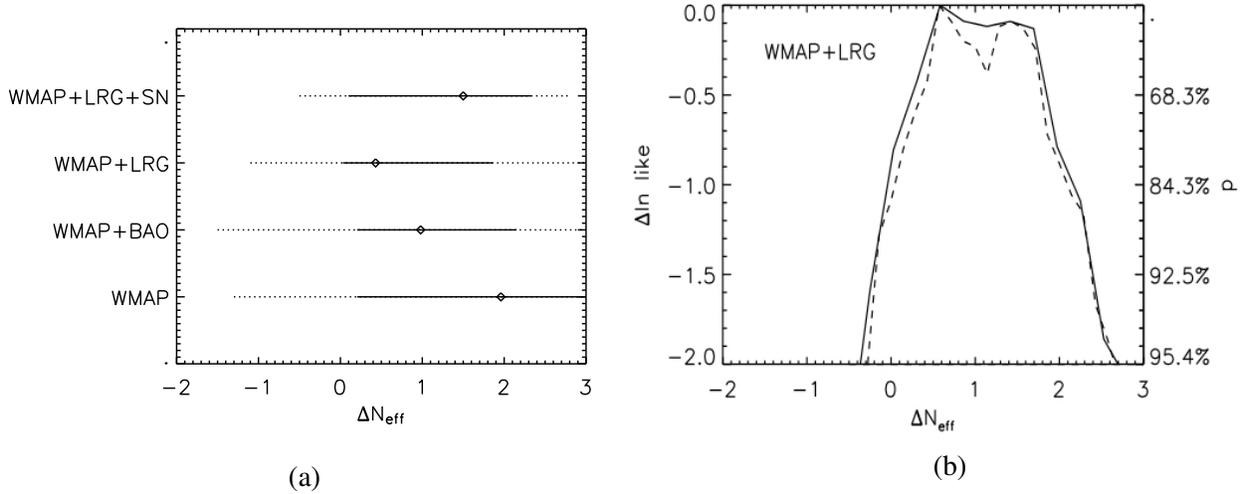


Figura 4.2: (a) Restricciones a uno y dos  $\sigma$  en el número de especies adicionales de neutrinos, para diferentes conjuntos de datos. Se incluyen combinaciones de WMAP7, LRG,BAO y SN. Note que el valor correspondiente a ninguna especie extra,  $\Delta N_{\text{eff}} = 0$ , esta siempre dentro del intervalo  $2 - \sigma$  y siempre muy cerca del intervalo  $1 - \sigma$ . (b) Curva (ejemplo) de probabilidad que se obtiene a partir del perfil del factor de verosimilitud para la combinación de datos WMAP 7 +LRG. Un análisis Bayesiano del mismo conjunto de datos resultaría en  $\Delta N_{\text{eff}} = 1,21$  a  $1 - \sigma$  ( $0,41 \leq \Delta N_{\text{eff}} \leq 1,97$ ); y a  $2 - \sigma$  ( $-0,44 \leq \Delta N_{\text{eff}} \leq 2,86$ ). Mostramos el análisis con el tamaño del sub-intervalo de 0,5 (línea solida) y 0,25 (línea punteada), para mostrar que el análisis depende poco de este parámetro.

## 4.4. Discusión

Si hubiéramos mirado la marginalización de la distribución de probabilidad a posteriori, (como esta hecho en la literatura), en algunos casos, no siempre, hubiéramos encontrado una indicación de  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$  a  $2 - \sigma$ : el equipo de WMAP encuentra que  $\Delta N_{\text{eff}} = 0$  esta permitido dentro del intervalo de confianza a  $2 - \sigma$  (ver [189]), pero, para las combinaciones  $RCFM + H0 + SN + BAO$  y  $RCFM + H0 + SN + LSS$  (sin incluir ACT), referencia [184], se encuentra señal de  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$  a  $2 - \sigma$ , y en [52] se encuentra lo mismo para la combinación  $WMAP7 + ACT + ACBAR + BAO + H0$ , aunque se usan diferentes priors y ligeramente diferentes conjuntos de datos (i.e. el tratamiento de  $Y_P$  es diferente). También podemos tratar de comparar los resultados con [186] y [196]. En estas referencias los autores permite que la masa de los neutrinos también varié. Los datos cosmológicos actuales no

## 4.4. DISCUSIÓN

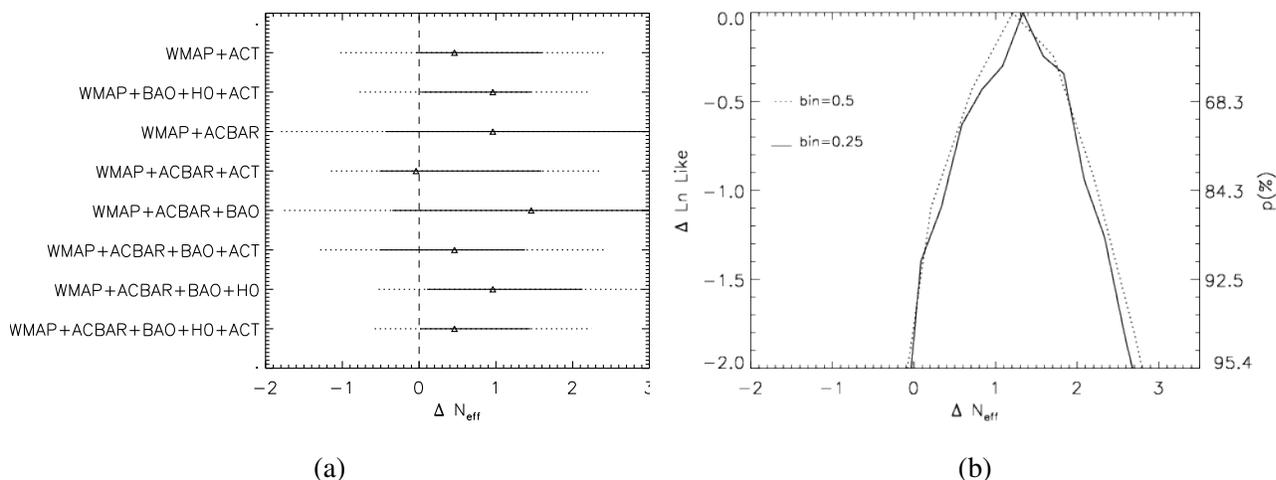


Figura 4.3: **(a)** Visión general de las restricciones, a uno y dos  $\sigma$ , sobre el número de especies de neutrinos para diferentes conjuntos de datos que involucran WMAP7 en combinación con ACT y ACBAR. El hecho de que las restricciones parezcan estar, sistemáticamente, desplazadas (aún que esto es por menos de  $1-\sigma$ ) hacia valores  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$  es debido a que las restricciones no son independientes: los datos de WMAP, que tienen mucho peso estadístico, son comunes a todas las combinaciones de conjuntos de datos. **(b)** Curva (ejemplo) de probabilidad que se obtiene a partir del perfil del factor de verosimilitud para WMAP 7 + ACBAR + BAO + ACT + H0. Se muestra para dos valores del tamaño del sub-intervalo usado, para ilustrar que el análisis no es muy sensible a cambios de este parámetro.

muestran evidencia alguna de masas distintas de cero y no tienen el suficiente poder estadístico para detectar la suma de la masas de los neutrinos ( $\Sigma$ ) por debajo de  $0,3eV$  (e.g., [185, 197], pero también ver e.g., [198] para prospectos a futuro). Incluyendo tanto a  $N_{\text{eff}}$  como a la masa de los neutrinos como parámetros libres, añadiría nuevas degeneraciones y exacerbar el efecto del volumen de los priors en la distribución de probabilidad a posteriori, especialmente por que  $N_{\text{eff}}$  y  $\Sigma$  están positivamente correlaciones. Para comparar con nuestro análisis, necesitamos considerar solo la restricción para  $\Sigma = 0$ . Ellos encuentran indicación de  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$  a  $2 - \sigma$ <sup>1</sup>

Las combinaciones de conjuntos de datos que contienen datos de ACT, tienden a preferir valores mas grandes de  $\Delta N_{\text{eff}}$ , sin embargo  $\Delta N_{\text{eff}} = 0$  siempre esta dentro del intervalo de confianza con 95,4 % de probabilidad. Los análisis con MCMC usan un criterio de convergencia para calcular el

<sup>1</sup>Debemos resaltar que los contornos a  $1 - \sigma$  en 2 dimensiones están más cerca de  $2 - \sigma$  en 1 dimensión que del  $1 - \sigma$ .

## 4.4. DISCUSIÓN

---

promedio y la varianza de los parámetros, a partir de la distribución de probabilidad a posteriori; este criterio no garantiza, necesariamente, que el perfil del factor de verosimilitud ha convergido también. Por lo cual la estimación de este puede ser ruidosa (ver por ejemplo, [199]). Para remediar esto, una posibilidad sería implementar un algoritmo, y análisis, completamente diferente para obtener el perfil del factor de verosimilitud (ver e.g., [200]). Sin embargo, nos gustaría mantener, dentro de lo posible, la ventaja de usar las cadenas resultantes de un análisis Bayesiano MCMC e interpretarlos en términos del perfil del factor de verosimilitud.

Para resumir, el número efectivo de especies de neutrinos parametriza cualquier tasa de expansión no estándar del universo. La evidencia de  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$  puede ser interpretada como la existencia de especies extra de neutrinos (estériles), pero también como cualquier otro tipo de partícula, ligera, que no se acople a los electrones; al decaimiento de partículas de materia oscura; radiación extra por quinta-esencia temprana; e incluso como evidencia de una fenomenología para el sector oscuro más rica de la que usualmente se considera. Análisis cosmológicos recientes han reportado indicios de  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$ , dentro de un formalismo de inferencia Bayesiana. Cuando se considera un espacio de parámetros de muchas dimensiones, como es el caso, los intervalos de confianza reportados sobre un parámetro pueden depender fuertemente de la elección de los priors, y del volumen del espacio de parámetros asociado. Si como resultado de un análisis de las observaciones cosmológicas la evidencia de  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$  resulta estar dominada por efecto de los priors, ésta debe ser interpretada con mucho cuidado. Aquí presentamos una forma de hacer el análisis de las observaciones tan independiente de los priors como es posible.

Vale la pena mencionar que en los análisis de los últimos datos de WMAP, WMAP 9, junto con ACT y SPT, no dan evidencia significativa de desviaciones al número estándar de especies relativistas [31, 201]. Las diferencias entre estos últimos resultados y los de WMAP 7, provienen de modelar de forma distinta las fuentes que están en primer plano, y que no corresponden a información del CMB. Diferentes modelos involucran priors distintos. Nuestros resultados fueron los primeros indicios de que un análisis más cuidadoso de las observaciones podría ser necesario. Por otro lado, los recientes resultados de la colaboración PLANCK tampoco dan evidencia significativa del número efectivo de neutrinos mayores al estándar. Sin embargo, el parámetro de Hubble resultó menor que lo esperado por WMAP y por las observaciones de supernovas, lo que apunta a la presencia de fuentes de error en el análisis, o bien a la necesidad de introducir radiación extra. Cabe señalar también que el análisis

#### 4.4. DISCUSIÓN

---

de las observaciones con PLANCK ahora incluyen un análisis frecuentista para verificar que el efecto de los priors no es importante [202].

# 5

## Conclusiones

---

One never notices what has been done; one can only see what remains to be done.

**Marie Curie**

En esta tesis hemos explorado la posibilidad de restringir la naturaleza de la materia oscura con base a observaciones astrofísicas. Hemos abordado el tema desde distintas perspectivas, tanto teóricas como observacionales. Obtuvimos una serie de resultados particulares que, vistos en conjunto, demuestran el potencial que las observaciones astrofísicas tienen para restringir la naturaleza de la materia oscura, especialmente a escalas galácticas y sub-galácticas.

Hemos intentado establecer una relación explícita entre diferentes áreas de la física: cosmología, astrofísica, y física de partículas, principalmente. Los resultados obtenidos son un ejemplo claro del poder que tiene esta aproximación multidisciplinaria al problema de la materia oscura. A continuación resumimos las conclusiones particulares que se obtuvieron.

### **Restricciones a la materia oscura real.**

En el capítulo 2 exploramos la posibilidad de que la materia oscura estuviera descrita por configuraciones de campo escalar, y vimos que las observaciones de curvas de rotación y lentes gravitatorias imponen fuertes restricciones a este tipo de modelos.

**Campo escalar real.** Por un lado, en la sección 2.1 consideramos configuraciones estáticas y esféricas de campo escalar real para describir los halos de materia oscura. Consideramos que las trayectorias para las partículas de prueba, en este caso materia bariónica, son órbitas circulares, como las observadas en las curvas de rotación de las galaxias. Bajo estas suposiciones obtuvimos una ecuación diferencial de primer orden para la función de masa,  $m(r)$ , que solo depende del perfil de velocidad circular que se elija.

---

Resolvimos esta ecuación en dos casos diferentes: para una curva de rotación constante, y para una curva de rotación del tipo Navarro-Frenk-White. En el primer caso obtuvimos una función de masa definida negativa, mientras que en el segundo caso se obtuvo que ésta es negativa solo en una región del espacio, ver figura 2.1. Dado que se espera que la función de masa sea una función acumulada, y por tanto una función creciente y definida positiva, concluimos que las configuraciones estáticas y esféricas de campo escalar real no son candidatos viables a conformar la materia oscura en las galaxias.

Adicionalmente nos dimos cuenta que, si suponemos que las curvas de rotación fijan la forma del potencial gravitacional, y elegimos una forma específica para el tensor de energía momento, se elimina la posibilidad de elegir una función potencial cualquiera, o una ecuación de estado para el caso de un fluido perfecto. Comparando el resultado obtenido al usar un tensor de energía momento del tipo fluido perfecto, con el caso del campo escalar real, vimos que el comportamiento de la función de masa es distinto para estas dos distribuciones. De igual modo, el ángulo de deflexión asociado a ambas configuraciones resulta distinto, por lo que observaciones de lente gravitatoria nos permiten discriminar entre diferentes tipos de materia oscura. En conclusión, hemos mostrado que las observaciones de lente gravitatoria y curvas de rotación, usadas de forma conjunta, pueden dar indicios sobre la naturaleza de la materia oscura.

**Restricciones al campo escalar con auto-interacción** Por otro lado, en el capítulo 2.2 estudiamos las propiedades de lente gravitatoria para configuraciones esféricas de campo escalar con auto-interacción. Usando las observaciones de las muestras SLACS y CASTLES, establecimos las condiciones que los parámetros del campo escalar han de satisfacer para ser consistentes con la formación de imágenes múltiples. Éstas demandan configuraciones con  $\rho_c r_{\max} [M_{\odot} pc^2] > 2000$ , en donde  $\rho_c$  es el valor para la densidad de masa en el centro de la distribución y  $r_{\max}$  un parámetro del modelo. Por otro lado, en estudios previos de la dinámica de galaxias de bajo brillo superficial se obtienen configuraciones con  $\rho_c r_{\max} [M_{\odot} pc^2] \sim 100$ . Comparando ambos resultados se puede observar que hay una inconsistencia de al menos un orden de magnitud. Dado que el parámetro  $r_{\max}$  está íntimamente relacionado con la auto-interacción y masa del campo escalar, éste ha de ser constante en el modelo. Por tanto, la discrepancia encontrada solo puede ser explicada si la densidad central de las galaxias que producen lente gravitatoria es más alta que la densidad central de los halos de las galaxias enanas.

---

En nuestro análisis comprobamos que la presencia de la materia bariónica observada en los sistemas de lente gravitacional no modifica de forma cuantitativa estas conclusiones, por lo que las condiciones impuestas a los parámetros del campo escalar son robustas. Se debe resaltar que la materia bariónica está presente en este tipo de sistemas, independientemente de las propiedades de la materia oscura, por lo que es importante estudiar el efecto que ésta puede causar sobre las configuraciones de campo escalar. Por tanto, la inconsistencia que encontramos puede estar íntimamente relacionada al proceso de formación de estructuras en el marco de la materia oscura escalar, y así mismo puede dar evidencia de que es necesario tomar en cuenta el efecto de la materia bariónica. Nuevamente las observaciones de la dinámica de galaxias y de lente gravitatoria imponen condiciones fuertes a este tipo de modelos, además de proporcionar pistas sobre la evolución de los halos galácticos.

En este capítulo de la tesis presentamos, por primera vez, restricciones observacionales a la evolución dinámica de los halos formados por configuraciones de campo escalar, en donde además se incluye la presencia de la materia bariónica.

### **Restricciones a la cantidad de sub-estructura.**

La precisión en las mediciones de la dinámica de algunos sistemas astrofísicos nos ha permitido restringir la existencia de pequeñas perturbaciones gravitacionales. En particular, la dinámica de nuestro sistema solar nos da la posibilidad de poner a prueba la abundancia, masa, y tamaño de las estructuras de materia oscura que pueden estar presente en la vecindad solar. En el capítulo 3 comparamos la inyección de energía debido a la interacción dinámica entre el Sistema Solar y una población de sub-estructura. Usando un valor estándar de la densidad local de materia oscura, encontramos que ésta puede estar compuesta de pequeños halos de masa menor a la del sol, y no alterar la dinámica del Sistema Solar, independientemente de la fracción de sub-estructura. Por otro lado, encontramos que es posible excluir la presencia de filamentos oscuros con densidad de masa lineal mayores que  $\lambda_{st} > 10^{-10} M_{\odot}/AU$  (aproximadamente la masa de la Tierra extendida a lo largo del Sistema Solar, hasta el cinturón de Kuiper). También estudiamos la dinámica de estrellas binarias abiertas en las galaxias enanas, cercanas a la Vía Láctea. La dinámica de estos sistemas parece ser compatible con la presencia de una gran cantidad de sub-estructura. De acuerdo a nuestro estudio, la existencia de binarias abiertas en estos sistemas no es una prueba muy robusta a la hipótesis de la existencia de la

---

materia oscura, como se ha sugerido en trabajos previos.

Las cotas que encontramos son más restrictivas a la presencia de filamentos que a la presencia de mini-halos. Por lo que hemos establecido una posible relación entre las propiedades de los primeros y las de los halos originales a partir de los cuales se formaron. De donde concluimos que la escala de corte típica en el espectro de potencias, i.e. la masa de las subestructuras más pequeñas formadas en el universo  $M_{min} \sim 10^{-4} - 10^{-12} M_{\odot}$ , corresponderían a filamentos de densidad de masa lineal del orden de  $\lambda_{st} \sim 10^{-11} - 10^{-17} M_{\odot}/AU$ . Estos valores son compatibles con la dinámica del sistema solar, y serían compatibles con la existencia de binarias abiertas en las galaxias enanas del grupo local, si éstas fueran detectadas. Por otro lado, para filamentos con  $\lambda_{st} \sim 10^{-8} - 10^{-10} M_{\odot}/AU$  ( $m_{min} \sim 100 - 10^{-3} M_{\odot}$ ), la fracción de energía inyectada a las estrellas binarias causaría su destrucción, y el efecto correspondiente en el sistema Tierra-Luna, queda justo por debajo (por encima) de la restricción observacional. Esto implica que si no se observan binarias con separaciones de  $a \sim 0,1 pc$ , esto podría ser debido a la presencia de filamentos con  $\lambda_{st} \approx 10^{-10} M_{\odot}/AU$  ( $m_{min} \sim 10^{-3} M_{\odot}$ ), sin embargo la presencia de estas estructuras sería incompatible con la dinámica del sistema Tierra-Luna (aunque esto depende de la fracción de la masa que se encuentre en este tipo de estructuras). Esto es un ejemplo de que como la combinación de restricciones impuestas por diferentes sistemas astrofísicos, puede revelar la escala de corte en la función de masa de sub-estructura, y por tanto darnos indicios sobre la naturaleza de la materia oscura.

## **Restricciones al numero efectivo de especies relativistas.**

En el capítulo 4 hicimos un análisis crítico de la evidencia cosmológica sobre la existencia de especies relativistas extra. Ya que está puede ser interpretada como evidencia de la existencia de especies de neutrinos estériles, decaimientos de materia oscura, e incluso como evidencia de una fenomenología del sector oscuro más complicada de lo que usualmente se considera. En otras palabras, la existencia de radiación extra puede estar dando información sobre la naturaleza de la materia oscura.

Hasta hace poco la evidencia cosmológica analizada en un marco Bayesiano sugería que  $\Delta N_{eff} > 0$ . En este marco, cuando se consideran espacios de parámetros de grandes dimensiones, y especialmente si el conjunto de datos usados no es muy restrictivos, y/o existen degeneraciones, los intervalos de confianza resultantes pueden depender fuertemente de la elección de los priors. Si los resultados

---

de análisis cosmológicos, como la evidencia de  $\Delta N_{\text{eff}} > 0$ , resultan estar dominados por este tipo de efectos, estos deben ser interpretados cuidadosamente. Establecimos una metodología que nos permite hacer un análisis de la evidencia cosmológica lo más independiente posible de los priors (suposiciones iniciales sobre de la función de distribución de los parámetros). A partir de la cual, usando los datos cosmológicos existentes encontramos que la evidencia previamente reportada estaba siendo sesgada por efecto de los priors. Abogamos por el uso de un marco frecuentista para cuantificar la influencia de los priors en los análisis Bayesianos estándar, mientras los datos observacionales no fueran los suficientemente restrictivos.

Actualmente, los últimos resultados de WMAP y PLANCK, en conjunto con ACT y SPT, sugieren que  $\Delta N_{\text{eff}}$  es consistente con el valor estándar, y que las aproximaciones frecuentistas y Bayesianas están mejor acuerdo, reflejando el incremento estadístico en estas observaciones, y reduciendo los efectos de los priors, como se esperaba.

---

---



# *Relatividad general y cosmología*

---

---

El planteamiento de la Relatividad General (RG), por Einstein en 1916-1917, nos ha permitido contar con una teoría falsable sobre la evolución del universo. El paradigma cosmológico actual toma como base que RG da una descripción adecuada de la gravitación a escalas cosmológicas. Dedicaremos la sección [A.1](#) a describir las herramientas necesarias para entender las ecuaciones básicas que aparecen en cosmología, y también en algunos temas de astrofísica que cubriremos en esta tesis (lentes gravitatorias y dinámica de galaxias en modelos con materia oscura escalar), y en la sección [A.2](#) revisaremos las bases del modelo cosmológico actual. El contenido de este capítulo está basado en [\[203\]](#), [\[64\]](#), y [\[204\]](#), (la notación es compatible con estos textos).

## **A.1. Relatividad general**

La RG es una teoría métrica, i.e. asume que las longitudes y los intervalos de tiempo son independientes del instrumento físico usado para medirlos, así como del observador, y están descritos por un tensor  $g_{\mu\nu}$ . Una de las ideas fundamentales de la RG es que la métrica incorpora la gravedad. En lugar de pensar en la gravedad como una fuerza externa y hablar de partículas moviéndose en un campo gravitacional, se incluye a la gravedad en la métrica y se habla de partículas moviéndose libremente en un espacio-tiempo curvo. En un espacio-tiempo de 4 dimensiones el elemento de línea invariante

## A.1. RELATIVIDAD GENERAL

---

es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.1})$$

donde los índices  $\mu$  y  $\nu$  varían de 0 a 3; el primero está reservado para coordenada temporal ( $x^0 = ct$ ) y los tres restantes para las coordenadas espaciales, (usaremos la convención de suma de índices repetidos). La métrica  $g_{\mu\nu}$  es simétrica. Ésta representa la conexión entre los valores de las coordenadas y el valor físico, medible, del intervalo  $ds^2$ . Un ejemplo particular es la métrica de Minkowski,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , con

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

que describe el espacio plano.

Las ecuaciones de movimiento para partículas de prueba, i.e. que no producen curvatura, en espacios-tiempo caracterizados por  $g_{\mu\nu}$  están dadas por las ecuaciones geodésicas;

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} \frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} \quad (\text{A.3})$$

donde,  $\Gamma$  son los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right). \quad (\text{A.4})$$

El objetivo principal de relatividad general es el vincular la materia a la métrica. Este vínculo está dado por las ecuaciones de Einstein, las cuales relacionan las componentes del tensor de Einstein ( $G_{\mu\nu}$ ), que describen la geometría del espacio-tiempo, con el tensor de energía momento ( $T_{\mu\nu}$ ), que describe el tipo de materia y energía contenida en el espacio-tiempo

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.5})$$

## A.1. RELATIVIDAD GENERAL

---

Aquí  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci, que depende de la métrica y sus derivadas;  $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  es el escalar de Ricci, y  $G$  es la constante de Newton (a partir de ahora asumiremos  $G = c = 1$ ). El tensor de Ricci suele expresarse en términos de los símbolos de Christoffel, (las comas denotan derivadas respecto a la coordenada  $x$  correspondiente),

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}. \quad (\text{A.6})$$

El lado izquierdo de la ecuación A.5 es una función de la métrica, mientras que el lado derecho es función de la materia (energía). Es decir, la materia (energía) determina la curvatura del espacio tiempo. Por otro lado, es la curvatura la que define la dinámica que la materia (energía) ha de seguir, mediante las ecuaciones geodésicas. Una consecuencia de las ecuaciones de Einstein es que el tensor de energía momento satisface la ecuación de conservación

$$T_{\nu;\nu}^{\mu} = \frac{T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu}T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (\text{A.7})$$

donde el símbolo  $;$ , indica la derivada covariante.

En particular, los dos tensores de energía momento que usaremos en esta tesis son

1. El tensor de energía-momento para un fluido perfecto,

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu} \quad (\text{A.8})$$

con presión  $p$ , densidad de masa  $\rho$ , y  $u^{\mu}$  la velocidad comóvil normalizada a  $u_{\mu}u^{\mu} = -1$ .

2. El tensor de energía momento de un campo escalar real, estático y esférico simétrico,

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu,\nu}(g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + 2V(\phi)), \quad (\text{A.9})$$

donde  $\phi_{,\alpha} = \partial\phi/\partial x^{\alpha}$  y  $V(\phi)$  es el potencial como función del campo escalar  $\phi$ .

Con esto hemos definido las herramientas necesarias para describir el modelo cosmológico actual.

## A.2. Modelo cosmológico estándar

### universo homogéneo e isótropo

La descripción del universo a gran escala recae fuertemente en el principio cosmológico, el cual establece que a escalas suficientemente grandes, el universo es homogéneo e isótropo. En estas escalas, las propiedades del universo son las mismas en distintos puntos del espacio (homogéneo) y en todas las direcciones (isotropía). Si bien el planteamiento inicial del principio cosmológico está basado en simplificaciones más que en observaciones reales, (podría decirse que una distribución homogénea de materia es la más simple que se puede considerar para iniciar el estudio de la dinámica del universo), las mediciones actuales de la radiación del fondo cósmico de microondas [32], los mapas de la distribución de galaxias [205], y la distribución de rayos X provenientes de fuentes distantes, son evidencia observacional de que en efecto el universo real es homogéneo e isótropo en escalas mayores a los  $10Mpc$ . Asumiendo el principio cosmológico, el espacio-tiempo puede ser descrito por la métrica FRW (Friedman-Robertson-Walker):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (\text{A.10})$$

donde,  $t$  es el tiempo comovil;  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas areal-polares;  $a(t)$  es el factor de escala, que describe la evolución temporal de la sección espacial del universo; y  $k$  caracteriza la curvatura del mismo, ( $k$  puede tomar los valores  $k = 1$  (universo cerrado),  $0$  (plano), ó  $-1$  (abierto)).

**Ecuaciones de Friedmann** A gran escala, la materia puede ser descrita por un fluido perfecto. Dados el tensor de energía momento, ecuación (A.8), la métrica (A.10), y las ecuaciones de Einstein (A.5), se pueden derivar las ecuaciones de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \quad (\text{A.12})$$

## A.2. MODELO COSMOLÓGICO ESTÁNDAR

---

donde el punto indica derivada respecto al tiempo. A partir de estas ecuaciones es posible escribir la ecuación de evolución para la densidad

$$a^{-3} \frac{\partial(\rho a^3)}{\partial t} = -3 \frac{\dot{a}}{a} p, \quad (\text{A.13})$$

y se define el factor de Hubble como  $\dot{a}/a$ , el cual da una medida de la tasa de expansión del universo.

Para obtener la evolución del factor de escala, y/o la evolución de la densidad de materia, es necesario especificar una ecuación de estado,  $p = p(\rho)$ , que depende de las propiedades de la materia. Básicamente las ecuaciones de Friedmann junto con la ecuación de estado describen la evolución del universo. Finalmente, definimos la densidad crítica como,

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (\text{A.14})$$

de tal modo que la ecuación A.12 evaluada al día de hoy implica

$$1 = \Omega_k + \Omega \quad (\text{A.15})$$

en donde  $\Omega_k = 8\pi k c^2 / 3H_0^2$  y  $\Omega = \rho/\rho_c$  es la densidad total de materia (energía) (a la cual contribuyen todas las posibles especies: materia, radiación, etc.). Con esta definición, en un universo dominado por materia, i.e.  $\Omega = 1$ , la sección espacial del espacio-tiempo es necesariamente plana,  $k = 0$ .

**Modelo  $\Lambda$ -CDM** El modelo cosmológico  $\Lambda$ -CDM asume la existencia de un tipo de materia desconocida, la materia oscura fría, y asume también la presencia de una constante cosmológica,  $\Lambda$ . Éste es el modelo más exitoso, y más simple, capaz de describir las principales observaciones del universo a gran escala:

- La abundancia de elementos ligeros: Hidrógeno, Helio, Litio y Deuterio (Big-Bang Nucleosíntesis)
- La existencia, y la estructura, de la radiación cósmica del fondo de microondas (CMB, por las siglas en inglés).

## A.2. MODELO COSMOLÓGICO ESTÁNDAR

---

- La expansión acelerada del universo observada, principalmente, a través de las explosiones de supernovas.
- La estructura a gran escala en la distribución de galaxias.

De acuerdo con las observaciones la densidad de materia (energía) en el universo está distribuida, a día de hoy, de la siguiente forma:

**Neutrinos ( $\nu$ ) y fotones ( $\gamma$ ):** La contribución de las partículas relativistas a la densidad de materia del universo es mínima, solo el 0,1 – 2 % se encuentra en forma de neutrinos, (de los cuales hablaremos en la sección 1.2 y 4), y un 0,0006 % se encuentra en forma de fotones.

**Materia bariónica (MB):** Solo el 4,6 % de la densidad de materia en el universo corresponde a la materia bariónica, de la que están compuestas todas las cosas que conocemos, y que detectamos a través de sus interacciones electro-débiles y fuertes.

**Materia oscura (MO):** Aproximadamente el 23 % corresponde a la materia oscura, la cual podría estar compuesta de una, o varias especies, de partículas que interactúan muy débilmente con la materia ordinaria, por lo que solo podemos inferir su existencia a partir de sus efectos gravitacionales. En el capítulo 1.2 discutiremos ampliamente sobre las evidencias observacionales en que se basa la propuesta de su existencia, los posibles candidatos a conformarla, y sus propiedades.

**Constante Cosmológica ( $\Lambda$ )** El 72 % corresponde a la densidad de energía asociada a la constante cosmológica, o bien a su interpretación alternativa, la energía oscura. Los primeros indicios observacionales de la existencia de la constante cosmológica se trasladan a los años 1990's, cuando se usaron observaciones de explosiones de supernovas para trazar la historia de expansión del universo (en un intervalo de tiempo relativamente corto y cercano al presente), el resultado fue que aparentemente la expansión se acelera, en lugar de desacelerar, como se esperaba. Inicialmente se pensó en una mala interpretación de los datos de supernovas, sin embargo estudios subsecuentes son consistentes. Por otro lado, las observaciones de WMAP son consistentes con que la densidad de energía asociada a la constante cosmológica sea del 72 %, ya que junto con

## A.2. MODELO COSMOLÓGICO ESTÁNDAR

---

el resto de los componentes, se tiene la densidad exacta para explicar el universo plano, tal como sugieren las observaciones.

Cada uno de los ingredientes antes mencionados puede ser descrito por un fluido perfecto, ecuación (A.8). (En el caso de la constante cosmológica, es posible asociar una ecuación de estado  $p = -\rho_\Lambda$ , de tal modo que en la ecuación A.13 la densidad de energía  $\rho_\Lambda$  permanezca constante). En general, el tensor de energía momento de la materia (energía) en el universo puede escribirse como la superposición de fluidos

$$T^{\mu\nu} = T_{MB}^{\mu\nu} + T_{MO}^{\mu\nu} + T_{\Lambda}^{\mu\nu} + T_{\nu}^{\mu\nu} + T_{\gamma}^{\mu\nu}, \quad (\text{A.16})$$

cada componente del tensor de energía-momento total tiene su propia ecuación de estado:  $p = 0$  para MB y MO;  $p = 1/3\rho_\gamma$  para  $\gamma$ , ( $\nu$ ); y  $p = -\rho_\Lambda$  para  $\Lambda$ . La densidad de energía total del universo ( $\rho$ ) también puede ser escrita como la suma de las densidades de las distintas componentes,  $\rho = \rho_{MB} + \rho_{MO} + \rho_\Lambda + \rho_\gamma + \rho_\nu$ , ya que cada componente satisface su propia ecuación de conservación.

Con estas consideraciones se obtiene que la evolución para la densidad de energía de las distintas componentes de materia (energía) del universo está dada por:

$$\rho_{MO} = \rho_{0MO} a^{-3}, \quad (\text{A.17})$$

para la materia oscura y la materia bariónica, respectivamente.

$$\rho_\gamma = \rho_{0\gamma} a^{-4}, \quad (\text{A.18})$$

para la radiación, y los neutrinos (si los consideramos no masivos). Para  $\Lambda$ , la densidad de energía simplemente permanece constante,  $\rho_\Lambda = \rho_{0\Lambda}$ . Las constantes de integración  $\rho_0$  y  $a_0$  se normalizan a día de hoy,  $a_0 = 1$ . Finalmente, La evolución del factor de escala es

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_{MO} a^{-1} + \Omega_{MB} a^{-1} + \Omega_\Lambda + \Omega_\gamma a^{-2} + \Omega_\nu a^{-2}} \quad (\text{A.19})$$

donde hemos normalizado la densidad a la densidad crítica,  $\Omega = \rho/\rho_c$ . A partir de esta última relación se identifican las distintas épocas por las cuales ha atravesado la evolución del universo: primero

---

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

una época dominada por radiación, después dominada por materia y actualmente dominada por la constante cosmológica.

Las observaciones más recientes de la radiación cósmica de fondo [31] imponen las siguientes cotas (a día de hoy) para las densidades de energía:  $\Omega_{MB} = 0,0449 \pm 0,0028$ ;  $\Omega_{MO} = 0,222 \pm 0,026$ ; y  $\Omega_{\Lambda} = 0,734 \pm 0,029$ . Con lo cual se confirma que el universo es plano, i.e.  $k = 0$ .

Esto es, a grandes rasgos, la descripción a gran escala del modelo cosmológico actual. Dicho modelo es capaz de reproducir las principales observaciones cosmológicas: abundancia de elementos ligeros, existencia de la radiación cósmica de fondo y expansión acelerada del universo. Sin embargo, falta ver que reproduce correctamente la formación de estructura en el mismo, es decir, que describe la distribución de galaxias a gran escala.

### A.3. Formación de estructura

La descripción que hemos dado hasta el momento está basada en un universo homogéneo, en el cual no es posible formar estructuras, contrario a lo que la simple observación de nuestro entorno nos indica. Esto no significa que debamos abandonar el principio cosmológico, por el contrario nos da idea de que en el universo temprano debieron existir pequeñas fluctuaciones en la densidad de materia, tal que en promedio el principio de homogeneidad es válido pero que conforme el universo ha ido evolucionando, las fluctuaciones se han amplificado hasta formar el universo como lo conocemos.

El origen de estas fluctuaciones (ó in-homogeneidades) en el universo temprano es por sí mismo un tema de investigación. La teoría provee un mecanismo mediante el cual las fluctuaciones cuánticas se convierten en fluctuaciones en la densidad de materia del universo, además de resolver algunos problemas como el de la planitud, el problema del horizonte, y la abundancia de partículas reliquia. En principio, estas fluctuaciones forman un campo a partir del cual, bajo acción de la gravedad, se inicia la formación de estructuras.

En general, se asume que el campo de fluctuaciones primordial puede ser descrito por un campo aleatorio Gaussiano en la densidad de contraste

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_b(t)}{\rho_b(t)}, \quad (\text{A.20})$$

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

donde  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es la densidad en la posición  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$ , y  $\rho_b$  es la densidad de fondo (usamos "b" de background), promedio a ese tiempo. A tiempos tempranos  $\delta$  sigue una distribución Gaussiana con promedio  $\langle \delta \rangle = 0$  y varianza  $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$ . Esta distribución evoluciona en el tiempo, bajo el efecto dominante de la gravedad, pasando dos etapas bien diferenciadas: el régimen lineal cuando  $|\delta| \ll 1$  y cuando  $|\delta| \geq 1$  corresponde al régimen no lineal de la formación de estructura.

#### **Evolución lineal –aproximación Newtoniana–**

La evolución del campo de densidad puede seguirse de forma analítica en el régimen lineal. La idea es que las ecuaciones de evolución para el sistema pueden expandirse en series de potencias, y para  $|\delta| \ll 1$  podemos mantener solo los términos lineales de dicha expansión. Si por un momento nos olvidamos de la expansión del universo, podemos escribir las ecuaciones que gobiernan la evolución de un fluido en un campo gravitacional  $\Phi$ . Describiendo al fluido en términos de su presión  $p$ , densidad  $\rho$  y campo de velocidad  $\mathbf{v}$ , tenemos el siguiente conjunto:

$$\text{Ec. de continuidad} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (\text{A.21})$$

$$\text{Ec. de Euler} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi \quad (\text{A.22})$$

$$\text{Ec. de Poisson} \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (\text{A.23})$$

Siguiendo la derivación original de Jeans, asumimos que existe una solución estática a estas ecuaciones, i.e.  $\rho = \rho_b$ ,  $p = p_b$  y  $\mathbf{v} = 0$ , la cual perturbaremos un poco y veremos como evolucionan las perturbaciones en el tiempo. Se trata de un tratamiento a primer orden, por lo que escribimos las cantidades perturbadas como sigue

$$\rho = \rho_b + \delta\rho, \quad (\text{A.24})$$

$$p = p_b + \delta p, \quad (\text{A.25})$$

$$\Phi = \Phi_b + \delta\Phi, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}. \quad (\text{A.27})$$

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

Sustituyendo en las ecuaciones de evolución del fluido, Ec. A.22, A.23 y A.23, obtenemos, a primer orden en las cantidades perturbadas

$$0 = \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_b \nabla \cdot (\delta \mathbf{v}), \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{c_s^2}{\rho_b} \nabla \delta \rho - \nabla \delta \Phi, \quad (\text{A.29})$$

$$\nabla^2 \delta \Phi = 4 \pi G \delta \rho, \quad (\text{A.30})$$

donde hemos asumido que la presión es función solo de la densidad y definido  $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$ . El sistema se puede reescribir como una sola ecuación de evolución para las perturbación en la densidad

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} = 4 \pi G \rho_b \delta \rho + c_s^2 \nabla^2 \delta \rho \quad (\text{A.31})$$

o bien en el espacio de Fourier,

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} = 4 \pi G \rho_b \delta \rho - k^2 c_s^2 \delta \rho. \quad (\text{A.32})$$

Esta ecuación de evolución nos dice que la presión y la gravedad compiten entre si determinando si la fluctuación en la densidad crece, y en tal caso lo hará de forma exponencial. La longitud de onda de Jeans,  $\lambda_J$ , se define como a partir de la cual la presión y la fuerza de gravedad se anulan entre si,

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \left( \frac{\pi c_s^2}{G \rho_b} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.33})$$

Esto implica que un objeto con longitud típica  $\lambda > \lambda_J$  será gravitacionalmente inestable y colapsará, por tanto  $\delta \rho$  crecerá. El tiempo típico de colapso está dado por el tiempo de caída libre  $t_{coll} \sim (G \rho_b)^{-1/2}$ . Para longitudes de onda pequeñas, comparadas con  $\lambda_J$ , el termino de presión en la ecuación A.32 domina por lo que las fluctuaciones de la densidad oscilan como una onda de sonido. La Longitud de Jeans es un tamaño característico de colapso de estructuras. Recordemos que en este análisis no tomamos en cuenta la expansión del universo. De haberlo hecho, el sistema de ecuaciones A.22, A.23 y A.23, se modifica dando como resultado la siguiente ecuación de evolución para la el

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

contraste de densidad (en el espacio de Fourier)

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \rho_b \delta - k^2 c_s^2 \delta. \quad (\text{A.34})$$

Ahora la ecuación tiene dos soluciones, una en la cual las fluctuaciones crecen y otra en la que estas se amortiguan, en ambos casos se da siguiendo una ley de potencias (no exponencialmente como antes). La solución general será entonces una combinación lineal de las dos soluciones, pero dado que ambas siguen una ley de potencias, después de un cierto intervalo de tiempo la solución dominante será creciente y dará comienzo a la formación de estructuras.

Cabe señalar que el análisis aquí presentado, asume que el fluido es colisional. En particular la materia oscura se considera que es no colisional, por lo que en principio pueden colapsar estructuras de cualquier tamaño. Sin embargo, veremos en el siguiente capítulo que algunos efectos dinámicos, y otros relacionados con la física de partículas asociada a los diferentes candidatos a conformar esta materia oscura, producen una escala típica de colapso (similar a la escala de Jeans) por debajo de la cual no es posible formar estructuras.

#### **Evolución lineal –tratamiento relativista–**

Formalmente, el estudio de la formación de estructura en el universo inicia con el planteamiento de una métrica no homogénea, y no isotrópica, y las correspondientes ecuaciones de evolución dinámica, dadas por las ecuaciones de Einstein, en el marco de la RG. Esto puede no ser tan sencillo como resultado en el tratamiento Newtoniano, sin embargo hacerlo nos permitirá entender mejor el desarrollo de la sección 1.3.2. A continuación esbozamos el procedimiento usual para obtener las ecuaciones de evolución de las fluctuaciones en el campo de densidad.

En la sección (A.2) describimos la evolución de un universo homogéneo, e isótropo; sin embargo, hemos visto que requerimos la presencia de in-homogeneidades en la densidad, lo que induce también in-homogeneidades en el espacio-tiempo. La descripción de este universo in-homogéneo se hace de forma perturbativa. Empecemos por asumir que las in-homogeneidades son muy pequeñas, de ésta forma podemos describir el espacio-tiempo con la métrica (Nota: en esta sección trabajaremos en

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

coordenadas cartesianas, por simplicidad)

$$ds^2 = -(1 + 2\psi(\mathbf{x}, t))c^2 dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j(1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)). \quad (\text{A.35})$$

Basados en las observaciones actuales, consideramos de inicio un universo plano, aunque un análisis más general deberá incluir un termino de curvatura. A partir de las ecuaciones de Einstein se obtienen las ecuaciones de evolución para los potenciales gravitacionales; pero, debemos tomar en cuenta que en las ecuaciones de Einstein aparecerán las componentes del tensor de energía momento que describa la materia (energía) en el universo. Por tanto, las ecuaciones de evolución del potencial gravitacional estarán acopladas a las ecuaciones de evolución para la densidad de los distintos tipos de materia que consideremos, las cuales también deben ser perturbadas para tomar en cuenta las fluctuaciones primordiales.

En la sección A.1 describimos la materia (energía) a través del tensor de energía momento. Una forma alternativa es describirla a partir de su función de distribución en el espacio fase,  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , la cual debe satisfacer la ecuación de Boltzmann

$$\frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{dt} = C[f]. \quad (\text{A.36})$$

El término  $C[f]$  contiene todos los posibles términos de colisión. A partir de la ecuación de Boltzmann obtendremos las ecuaciones de evolución para las fluctuaciones en la densidad, en lugar de usar las ecuaciones de conservación en RG, esto es posible ya que siempre se puede dar una descripción estadística de las componentes del universo. Ambos formalismos están relacionados por la definición

$$\rho = \int f(x, p, t)d\Gamma, \quad (\text{A.37})$$

donde  $\Gamma$  representa el volumen del espacio fase.

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

#### Materia oscura no colisional

Para ejemplificar lo anterior, veamos como se obtiene la ecuación de evolución para las fluctuaciones en el campo de densidad de la materia oscura. Expandiendo la ecuación (A.36) tenemos

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a E} \frac{\partial f_m}{\partial x^i} - \frac{\partial f_m}{\partial E} \left[ \frac{da/dt}{a} \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = C[f], \quad (\text{A.38})$$

donde  $E \equiv \sqrt{p^2 + m^2}$  es la energía de una partícula, y  $\hat{p}$  es el vector momento unitario. El término de colisión  $C[f]$  es idénticamente cero si se considera materia oscura cuya única interacción es gravitacional; éste es el caso que consideraremos aquí, sin embargo en la sección 1.3.2 veremos las implicaciones de considerar algunas propiedades de la materia oscura, como es el caso de la auto-aniquilación. Definimos la densidad del número de partículas y la velocidad como:

$$n = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_m, \quad v^i = \frac{1}{n_m} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_m \frac{p \hat{p}^i}{E}, \quad (\text{A.39})$$

Con lo que la ecuación A.38 toma la forma:

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial n_m v^i}{\partial x^i} + 3 \left[ \frac{da/dt}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] n_m = C[f] \quad (\text{A.40})$$

de manera análoga a lo que hicimos en la sección A.3, definimos la perturbación al numero de partículas,

$$n_m = n_m^0 [1 + \delta] \quad (\text{A.41})$$

con  $\delta = \frac{\delta \rho}{\rho}$ . Con estas definiciones, y la ecuación A.40, la ecuación a orden cero en las perturbaciones es:

$$\frac{\partial n_{dm}}{\partial t} - 3 H n_{dm} = C[f] \quad (\text{A.42})$$

mientras que a primer orden(en el espacio de Fourier) está dada por:

$$\dot{\delta} + ikv + 3\dot{\Phi} = 0 \quad (\text{A.43})$$

Como habíamos anticipado, se requiere conocer la evolución del potencial gravitacional  $\Phi$ . La

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

cual se obtiene de las ecuaciones de Einstein

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi\right) = 4\pi G a^2 [\rho_{MO}\delta + \rho_{rad}\Theta_{r,0}]. \quad (\text{A.44})$$

De forma análoga a como se ha obtenido la ecuación A.43, se deben escribir las correspondientes a la radiación, la materia bariónica, los neutrinos, etc. En total estas forman un conjunto de 9 ecuaciones acopladas, que determinan la evolución de los potenciales gravitacionales, así como de las fluctuaciones de las principales especies de materia (energía) que componen el universo: materia oscura, materia bariónica, radiación y neutrinos. La ecuación de evolución para los bariones es similar a la de la materia oscura, A.43, pero del lado derecho incluye la contribución tanto de la dispersión Compton, como la dispersión de Coulomb para el caso de los protones. La componente de radiación se describe mediante una función de distribución de Bose-Einstein, que queda caracterizada completamente por la temperatura. Se toma como campo de temperatura de fondo el de la radiación cósmica de fondo. Por tanto, cuando perturbamos el campo de temperatura, la ecuación de Boltzmann nos permite escribir la ecuación de evolución para las anisotropías a la radiación cósmica de fondo. (Es común expresar el campo de anisotropías en una base de polinomios de Legendre de modo que los multipolos,  $\ell$ , son comparables directamente con las observaciones de WMAP).

Este conjunto de ecuaciones acopladas se pueden resolver con los códigos: CMBfast y CAMB, los cuales son de distribución libre (y constantemente actualizados (<http://camb.info/>)). Además pueden ser modificados de acuerdo a los requerimientos del usuario.

Una de las grandes ventajas de usar estos códigos, es que es posible comparar directamente los resultados, para un modelo cosmológico dado, con las observaciones de WMAP. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 1.4, donde se compara el resultado para las fluctuaciones en el campo de radiación con las observaciones del CMB, para el modelo cosmológico estándar, y se observa un acuerdo impresionante.

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

#### **Evolución no lineal**

La evolución no-lineal del contraste de densidad  $\delta$  es un problema complicado y en general no se cuenta con una descripción analítica. La forma mas común de estudiar está evolución no-lineal es usando simulaciones numéricas, las llamadas simulaciones de  $N$ -cuerpos. Una simulación de  $N$ -cuerpos es una simulación de un sistema dinámico conformado por  $N$  partículas, bajo la acción de una fuerza física, la gravedad en este caso. Existe toda una familia de códigos numéricos que son usados para estos fines, algunos de los cuales son de uso publico. Algunos de estos códigos evolucionan solamente la materia oscura, en un universo en expansión, dejando a un lado la contribución de la materia bariónica (ya que la física de ésta es mucho más complicada, y difícil de incluir). Usualmente la evolución lineal de fluctuaciones sirve para establecer las condiciones iniciales necesarias para llevar acabo este tipo de estudios numéricos. En la presente tesis no haremos uso de esta herramienta.

### A.3. FORMACIÓN DE ESTRUCTURA

---

# *B* *Lentes gravitacionales*

---

La deflexión de la luz en un campo gravitacional, predicha por la Relatividad General, es una de las primeras verificaciones de la teoría de Einstein. Las primeras observaciones de este fenómeno fueron en estrellas individuales, en 1920. Años más tarde, Zwicky mostró que, si el objeto que causa la deflexión fuera una galaxia en lugar de una estrella, la deflexión de la luz proveniente de las galaxias en segundo plano, resultaría en imágenes que se pueden observar con mayor frecuencia y mejor resolución, que en el caso de estrellas individuales. Este efecto, proveería información sobre la masa de la galaxia que produce la deflexión y podría hacer posible la observación de objetos a distancias mayores debido a la amplificación de la luz, siendo la lente un telescopio natural. La primera observación, en 1979 por Walsh, Carswell y Weymann, de las imágenes múltiples del quásar distante Q0957 + 561 abrió una nueva área de investigación que se ha convertido en un campo muy activo en astronomía, con importantes repercusiones en Cosmología. Otra manifestación de lente gravitacional fue descubierta en 1986 por Lynds, Petrosian, y Soucail, en forma de grandes arcos luminosos; estos son producto del efecto de lente por cúmulos de galaxias sobre galaxias del fondo. A partir de este tipo de observaciones, se puede inferir la masa en las regiones centrales de los cúmulos, mientras que en las regiones externas la distribución de masa puede ser reconstruida por la forma de las imágenes de miles de galaxias del fondo que aparecen ligeramente deformadas.

El proceso físico detrás del fenómeno de lente gravitacional, es la deflexión de la luz por materia. Esta deflexión es un efecto puramente relativista, dado que los fotones al ser partículas sin masa no sienten una atracción gravitatoria en el marco de la gravitación Newtoniana, por tanto su trayectoria no puede ser desviada por la presencia de un cuerpo masivo. En relatividad general, la presencia de

---

## B.1. DEFLEXIÓN DE LA LUZ

---

un cuerpo masivo provoca la curvatura del espacio-tiempo, con lo que cualquier partícula, incluyendo los fotones, siguen trayectorias determinadas por dicha curvatura. Por tanto, se denomina deflexión de la luz, a la diferencia entre la trayectoria que siguen los fotones en un espacio curvo, en presencia de una distribución de materia, y la trayectoria que seguirían en ausencia de dicha curvatura.

En esta sección derivaremos las ecuaciones básicas de la teoría de lentes gravitacional.

### B.1. Deflexión de la luz

El ángulo de deflexión de la luz puede ser obtenido a partir del conocimiento de la trayectoria de la luz, la cual corresponde a las geodésicas nulas y por tanto son solución de la ecuación a partir de las ecuaciones geodésicas, A.3. Estas ecuaciones a su vez requieren la especificación de la métrica, en el caso de una distribución de materia esféricamente simétrica y estática esta puede ser escrita como:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)/c^2} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\Phi(r)$  y  $m$ , son los dos coeficientes métricos que describen la distribución de materia y que dependen solo de la coordenada radial.

Por simetría se elige el plano de las trayectorias de luz en  $\theta = \pi/2$ , de tal modo que

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)/c^2} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}} + r^2 d\phi^2. \quad (\text{B.2})$$

Dado que la métrica no depende explícitamente de las coordenadas  $\phi$  y  $t$ , se tienen las siguientes cantidades conservadas

$$r^2 \dot{\phi} = J \quad (\text{B.3})$$

$$e^{2\Phi(r)/c^2} c^2 \dot{t} = A \quad (\text{B.4})$$

donde  $J$  y  $A$  son constantes, y el punto se refiere a derivadas respecto a la parámetro  $\lambda$ . Por otro lado,

## B.1. DEFLEXIÓN DE LA LUZ

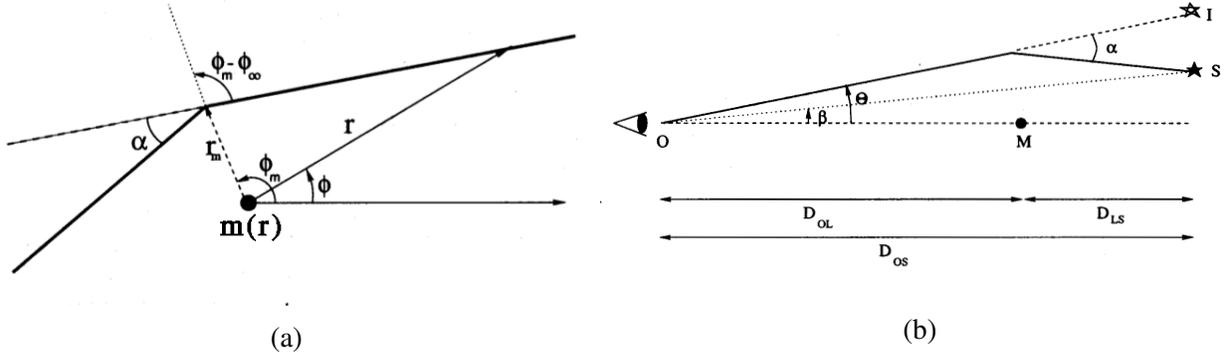


Figura B.1: (a) Geometría involucrada en la deflexión de la luz. (b) Configuración de lente gravitatoria

a partir de la restricción  $ds/d\lambda = 0$ , y usando las cantidades conservadas, tenemos

$$\dot{r} = \sqrt{\left(-\frac{J^2}{r^2} + c^2 e^{2\Phi(r)/c^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)}. \quad (\text{B.5})$$

Se elije el parámetro  $\lambda$  de tal modo que  $A = c^2$  en la ecuación B.4. Finalmente, combinando las ecuaciones B.4 y B.5 obtenemos la ecuación de la trayectoria

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{J}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{J^2}{r^2} + c^2 e^{2\Phi(r)/c^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)}}, \quad (\text{B.6})$$

la cual, una vez integrada nos proporciona el ángulo de deflexión de un rayo de luz pasando cerca de la distribución de materia caracterizada por las dos funciones métricas,  $\Phi(r)$ , y  $m$ . En la figura, B.1a, se muestra la geometría del problema. Se define el parámetro de impacto,  $r_m$ , la distancia de máximo acercamiento, tal que  $r = r_m$ ,  $\phi = \phi_m$  y  $dr/d\phi = 0$ . Dada esta definición se obtiene el valor de la constante,

$$J = e^{-\phi(r_m)/c^2} r_m c, \quad (\text{B.7})$$

con lo cual podemos escribir la expresión para el ángulo de deflexión de la siguiente forma:

## B.1. DEFLEXIÓN DE LA LUZ

---

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\Delta\phi(r_m) - \pi \quad \text{con} \\ \Delta\phi &= \phi_m - \phi_\infty = \int_\infty^{r_m} \frac{r_m dr}{r^2 \sqrt{\left(e^{2\Phi(r)/c^2} e^{-2\Phi(r_m)/c^2} - \frac{r_m}{r}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)}}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Un caso particular es el caso de la deflexión causada por una distribución de materia puntual, en cuyo caso se satisface

$$\begin{aligned} m(r) &= m \\ \Phi(r) &\simeq 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

con lo que

$$\Delta\phi_p = \int_\infty^{r_m} \frac{r_m dr}{r^2 \sqrt{1 - x^2 - \frac{2Gm}{c^2 r_m} (1 - x^3)}}. \quad (\text{B.10})$$

con  $x = r_m/r$ . Una expresión aproximada al ángulo de deflexión en este caso es:

$$\alpha = \frac{4Gm}{c^2 r_m} \quad (\text{B.11})$$

Entonces, la deflexión que sufren los rayos de luz pasando cerca de un cuerpo masivo es proporcional a la masa este, e inversamente proporcional a la distancia minima de acercamiento. La ecuación B.11 es la base de la teoría de lentes gravitacionales en el limite de campo débil.

Consideremos ahora una distribución de masa extendida  $\rho(x)$ , actuando como lente. Cuando la extensión de la distribución de masa es menor que la longitud de la trayectoria de la luz, podemos aproximar esta trayectoria como compuesta de dos líneas rectas que sufren una única deflexión, la cual sucede exactamente en la posición donde se encuentra la distribución de materia. Esta aproximación es llamada de lente delgada.

Se define  $\Sigma(x)$  como la densidad de masa superficial, correspondiente a la proyección de la distribución de masa sobre el plano que pasa a través de su centro de masa y es ortogonal a la dirección de

## B.1. DEFLEXIÓN DE LA LUZ

---

los rayos de luz,

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int dz \vec{\xi}, \rho(\vec{\xi}, z) \quad (\text{B.12})$$

donde  $\vec{\xi}$  es un vector en dos dimensiones que indica la posición en el plano de la lente, y  $z$  la coordenada ortogonal.

La deflexión de la luz, que se puede considerar como que sucede en el punto donde los rayos luz intersectan el plano, se puede obtener a partir de la superposición de las deflexiones producidas por los diferenciales de masa individuales, de este modo

$$\alpha = \frac{4G}{c^2} \int d^2\xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}. \quad (\text{B.13})$$

Esto es valido porque en el limite de campo débil, las ecuaciones de RG se linealizan, y por tanto el principio de superposición se satisface. Se ha de notar que en general el angulo de deflexión tiene dos componentes, magnitud y dirección de la deflexión, mientras que para el caso de la deflección por una masa puntual era suficiente con considerar solo la magnitud. En el caso de distribuciones de materia con simetria esferica el problema se reduce a una dimensión nuevamente, y de forma analoga a la ecuación [B.11](#)

$$\alpha = \frac{4GM(\vec{\xi})}{c^2\xi} \quad \text{con} \quad (\text{B.14})$$

$$M(\vec{\xi}) = 2\pi \int_0^\xi d\xi' \xi' \Sigma(\xi').$$

Las ecuaciones [B.15](#) y [B.9](#) son equivalentes, sin embargo, el uso de una u otra depende de si el limite de campo débil es aplicable, o no, respectivamente, a la distribución de materia que usemos para describir la lente. Es importante señalar que el ángulo de deflexión de la luz, si bien es una cantidad fundamental en el estudio de las lentes gravitatorias, no es una cantidad observable.

### B.2. Ecuación de la lente

La deflexión de la luz por la presencia de distribuciones de materia da lugar a distintos fenómenos de lente gravitatoria que modifican la forma en que distintas fuentes de radiación en el universo son apreciadas por un observador. A continuación presentare la ecuación de la lente, a partir de la cual es posible describir estos fenómenos. La ecuación de la lente relaciona la posición de las imágenes producidas por el efecto de deflexión de la luz con la posición real de la fuente. Discutiremos las propiedades básicas de esta ecuación y la formación de imágenes múltiples.

Consideramos primero el caso de la lente producida por una masa puntual,  $M$ , localizada cerca de la línea de visión del observador a la fuente  $S$ , como muestra en la figura B.1b. El ángulo  $\beta$  describe la posición (no observable), de la fuente respecto del eje óptico, (elegido en la dirección de la lente como referencia), y  $\theta$  la posición aparente (observable) de la imagen formada por la lente  $I$ . Debido a la presencia de la masa puntual la trayectoria de los rayos de luz son deflectados por un ángulo  $\alpha$ . En el caso en que los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\theta$  sean pequeños, se tiene la siguiente relación:

$$\theta, D_{OS} = \beta D_{OS} + \alpha D_{LS} \quad (\text{B.15})$$

Las distancias angulares  $D_{OS}$ ,  $D_{OL}$ , y  $D_{LS}$  se refieren a la distancia del observador a la fuente, del observador a la lente, y de la lente a la fuente, respectivamente. En general la ecuación de la lente, B.15, describe la relación entre las posiciones real y aparente de la fuente, cualquiera que sea la distribución de materia causante de la deflexión.

Vimos que en el caso de una masa puntual el ángulo de deflexión esta dado por B.11. Tomando en cuenta que la distancia mínima de los rayos de luz a la lente es  $r_{m=D_{OL}\theta}$ , la ecuación de la lente toma la forma:

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \frac{4GM}{c^2 \theta}. \quad (\text{B.16})$$

Resolviendo la ecuación de la lente para una posición de la fuente particular,  $\beta$  fijo, es posible obtener los valores de  $\theta$ , que corresponden a las posiciones de las imágenes producidas. Un caso particular es cuando la fuente esta perfectamente alineada con la lente, i.e.  $\beta = 0$ , en cuyo caso la imagen producida

## B.2. ECUACIÓN DE LALENTE

---

es un anillo se produce como imagen de la fuente un anillo de radió igual al ángulo de Einstein,

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \frac{4 G M}{c^2}}. \quad (\text{B.17})$$

Este tipo de imágenes se conocen como anillos de Einstein, y se producen también cuando la distribución de materia que produce la lente es extendida y tiene simetría esférica, siempre que la fuente y la lente estén alineadas. En este caso, el tamaño del ángulo de Einstein depende de la masa total contenida dentro de este ángulo. Para una posición genérica de la fuente, habrá dos imágenes situadas en las posiciones angulares

$$\theta_{\pm} = \frac{\beta}{2} \pm \theta_E \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4 \theta_E^2}}. \quad (\text{B.18})$$

En el caso en que la materia causante de la deflexión corresponda a una distribución extendida, se deberá usar la expresión para el ángulo de deflexión correspondiente, ecuación B.15 ó B.9, dependiendo de si la distribución satisface la condición de campo débil o no. En cualquier caso la solución de la ecuación de la lente resultante nos dará la conexión del ángulo de deflexión con las observables en la lente gravitatoria. Es posible definir otras observables de interés a partir de la ecuación de la lente, pero esto lo haremos en el texto principal cuando sea necesario.

## B.2. ECUACIÓN DE LA LENTE

---



# *Modelos de sub-estructura*

---

## **C.1. Interacción dinámica con filamentos**

En este apéndice derivamos expresiones analíticas para fuerza y el campo de marea producido por los modelos de filamentos que consideramos en la sección 3. Estos modelos presentan simetría axial. El modelo más simple es un modelo de una dimensión, cuya distribución de masa queda caracterizada por la densidad de masa lineal  $\lambda_{\text{st}}$  (S-1D). Además consideramos filamentos con sección transversal finita de radio  $R_o$ , y perfil de densidad constante. Finalmente, consideramos filamentos cuyo perfil de densidad en la sección transversal varía como una ley de potencias, la cual puede tender a una constante en el centro (S-Core), o ser un perfil con cúspide (S-Cusp):

$$\Sigma(R; R_o, \alpha, \gamma) = \Sigma_o (R/R_o)^{-\alpha} [1 + (R/R_o)]^{\alpha-\gamma}, \quad (\text{C.1})$$

donde  $\Sigma_o$  es una densidad característica,  $R_o$  un radio característico y  $\alpha, \gamma$  son exponentes sin dimensiones que satisfacen:

$$0 \leq \alpha < 2, \quad \gamma > 2. \quad (\text{C.2})$$

La restricción  $\alpha \geq 0$  es para evitar que el perfil de densidad se invierta en el centro, mientras que  $\alpha < 2$  evita tener una singularidad infinita en el perfil de masa ( $0 < \alpha < 2$  produce una singularidad finita en la masa). La restricción  $\gamma > 2$  es para obtener que la masa por unidad de longitud sea finita.

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---

Para  $\alpha = 0$  se tiene el centro de densidad constante (core), mientras que para  $\alpha > 0$  el perfil de densidad es cúspide en el centro.

### Fuerza

El campo de fuerza se puede obtener usando la ecuación integral de Poisson:

$$\int \nabla \cdot \mathbf{F} dV = -4\pi G M. \quad (\text{C.3})$$

Tomando ventaja de la simetría axial del problema, la fuerza resultante para los distintos modelos esta dada por:

$$F^{S-1D}(R) = -\frac{2G\lambda_{st}}{R}, \quad (\text{C.4})$$

$$F^{S-CD}(R) = -F_o \frac{(\text{Min}[\eta, 1])^2}{\eta}, \quad (\text{C.5})$$

$$F^{S-Core}(R) = -F_o \frac{\eta^2 - \gamma\eta(1 + \eta) + (1 + \eta)^\gamma - 1}{\eta(1 + \eta)^\gamma}, \quad (\text{C.6})$$

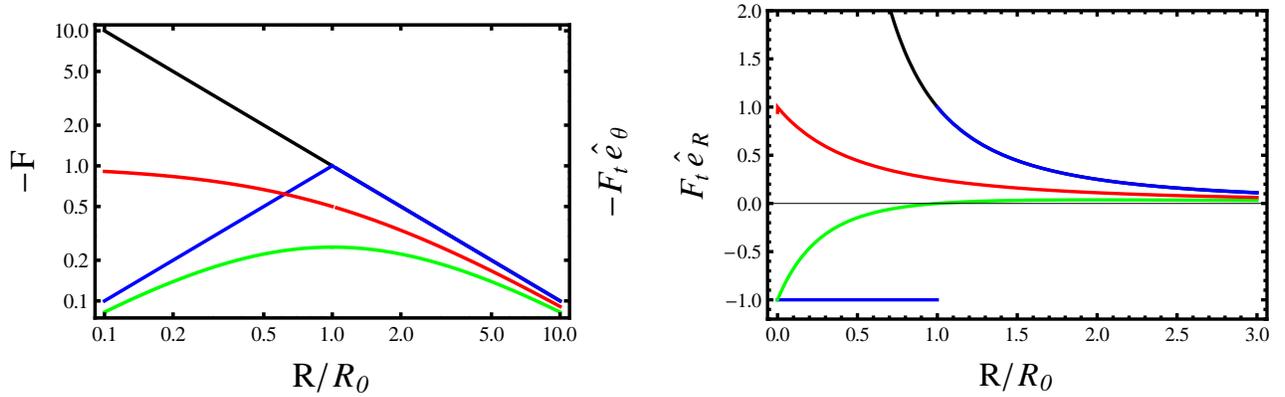
$$F^{S-Cusp}(R) = -F_o \frac{1 - (1 + \eta)^{2-\gamma}}{\eta} \quad (\alpha = 1), \quad (\text{C.7})$$

donde, hemos introducido la longitud a-dimensional  $\eta = R/R_o$  y  $F_o \equiv 2G\lambda_{st}/R_o$ , con  $\lambda_{st}$  igual a la masa total por unidad de longitud (integrada sobre la sección transversal del filamento). En todos los casos, la fuerza es ortogonal al filamento y esta dirigida hacia el. El caso del perfil de densidad con cúspide no se tiene una expresión analítica que sea general, por lo que solo mostramos el caso especial  $\alpha = 1$ , y este será el único modelo que trabajaremos de ahora en adelante.

La figura (C.1a) muestra la magnitud de la fuerza para filamentos con  $\lambda_{st} = 1$ , o  $F_o = 1$ , respectivamente; y  $\gamma = 3$  para los modelos cusp y core. Vemos que los modelos S-1D y S-CD coinciden para  $R > R_o$ , mientras que el primero diverge en el centro, el último converge linealmente a cero. El modelo con core también tiende a cero en el centro, mientras que el modelo con cusp es discontinuo en la superficie del filamento. Para valores grandes de  $R$  todos los modelos coinciden, como era de esperarse pues la estructura de los filamentos se hace indistinguible.

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---



(a) Magnitud de la fuerza producida por los modelos de filamentos como función de la distancia desde el eje central del filamento,  $R$ . Esta distancia coincide con la fuerza de marea en la dirección  $\theta$ , ecuación (C.10).

(b) Magnitud de la fuerza de marea en la dirección  $R$ , producida por los diferentes modelos de filamentos, como función de la distancia al eje central del filamento,  $R$ .

Figura C.1: Las curvas corresponden a los modelos S1-D (negro), perfil de densidad constante S-CD (azul), perfil de densidad que tiende a constante en el centro S-Core (verde), y perfil que tiende a una cúspide en el centro S-Cusp (rojo). En cada caso, normalizamos con  $\lambda_{st}$ ,  $F_0$  y  $\zeta_0$  igual a uno. Para los modelos cusp y core usamos  $\gamma = 3$ .

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---

### Fuerza de marea

Las componentes de la fuerza de marea producida por el campo de fuerza  $\mathbf{F}$  sobre un blanco de tamaño  $d\mathbf{r}$  en la posición  $\mathbf{r}$ , en la aproximación lineal, ( usamos coordenadas generalizadas  $x^\alpha$  y la convención de suma de Einstein), están dadas por :

$$F_{ix^\alpha} = -\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\beta} dx^\beta = \tau_{\alpha\beta} dx^\beta \quad (\text{C.8})$$

El tensor  $\tau$ , simétrico y de segundo orden, corresponde al Jacobiano del campo de fuerza gravitacional, y es el negativo de la matriz Hessiana,  $H$ , del potencial escalar  $\Phi$ .<sup>1</sup> El tensor  $\tau$  puede escribirse en cualquier sistema de coordenadas curvilíneas, usando la derivada covariante en dichas coordenadas [Ver el apendice A de la referencia 206, para una explicación detallada], i.e.

$$\tau_{\alpha,\beta} = -H_{\alpha\beta}(\Phi) = F_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma F_\gamma, \quad (\text{C.9})$$

donde,  $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ . Los símbolos de Christophel,  $\Gamma$ , y la fuerza  $\mathbf{F}$ , debe ser escrita en el sistema coordenado elegido. En nuestro caso específico de filamentos con simetría axial, es conveniente usar coordenadas cilíndricas definidas como se muestra en la figura (C.2a); por lo que en este caso particular, la fuerza de marea toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) &= \tau_{rr} dr \hat{\mathbf{e}}_r + \tau_{\theta\theta} r d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \frac{\partial F(r)}{\partial r} dr \hat{\mathbf{e}}_r + F(r) d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Usando las expresiones para la fuerza de cada uno de los modelos de filamentos, ecuaciones (C.4) a (C.7) respectivamente, se obtienen directamente las expresiones correspondientes para la fuerza de marea, sustiyendo en la ecuación (C.10). Por ejemplo, la fuerza de marea para el modelo de filamento 1-D es,

---

<sup>1</sup>El vector  $\mathbf{r}$  abarca todo el rango a lo largo del cual se calculara el efecto diferencial.

---

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---

$$\mathbf{F}_t^{S-1D} = \frac{2G\lambda_{st}}{R^2} dr \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{2G\lambda_{st}}{R} d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (\text{C.11})$$

La figura (C.1b) muestra la componente radial de la fuerza de marea para filamentos con  $\lambda_{st} = 1$ , o  $F_0 = 1$ ; asumiendo  $\gamma = 3$  para los modelos con cusp y core. Para los modelos S-1D y S-CD la fuerza fuera del filamento es de estiramiento, mientras que una vez dentro del filamento, la fuerza es compresiva. El caso del filamento con core presenta un comportamiento similar ya que en un rango da una fuerza compresiva mientras que en otra la fuerza es de estiramiento. Para los filamentos con cusp, la fuerza es siempre compresiva. La componente tangencial de la fuerza de marea coincide con la fuerza neta, y el efecto es siempre compresivo para todos los modelos.

### El cambio fraccional de la energía del blanco

Ahora, para cuantificar el efecto de un encuentro con un filamento nos enfocaremos en el cambio de la energía interna del blanco, la cual es principalmente cinética. Necesitamos calcular la integral de la fuerza de marea durante el tiempo que dura el encuentro para obtener el incremento en la velocidad durante el encuentro,

$$\delta\mathbf{v} = \int \mathbf{F}_t(\mathbf{R}, \delta\mathbf{r}) dt, \quad (\text{C.12})$$

donde  $\mathbf{R}$  es el vector de posición, en coordenadas cilíndricas, del centro del blanco respecto al punto más cercano al filamento, y  $\delta\mathbf{r}$ , es el vector de posición de un elemento en el blanco, respecto al centro del mismo. Ambos vectores,  $\mathbf{R}$  y  $\delta\mathbf{r}$  son función del tiempo. La integral en la ecuación (C.12) debe realizarse a largo del tiempo que dura el encuentro, en general esto puede realizarse usando simulaciones numéricas. Sin embargo, este problema puede ser tratado de forma analítica en dos regímenes opuestos: Si el tiempo que dura el encuentro es mucho menor que el tiempo dinámico del blanco, entonces podemos considerar que  $\delta\mathbf{r}$  queda fijo y solamente tomar en cuenta la variación de  $\mathbf{R}(t)$ , este es el llamado *régimen impulsivo*. El régimen contrario es cuando el tiempo del encuentro es mucho mayor que el tiempo dinámico del blanco, en cuyo caso es posible promediar el efecto de la fuerza de marea sobre la escala de tiempo total y usar este promedio como integrando en la ecuación (C.12), este es el *régimen adiabático*.

Los sistemas de interés en este trabajo son apropiados para ser tratados en el régimen impulsivo-

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---

vo, por lo que estimaremos el efecto de un solo encuentro usando esta aproximación. El incremento en la velocidad lo obtenemos de la ecuación (C.12) una vez que sustituimos la fuerza de marea correspondiente, (C.10), para los diferentes modelos. Pero antes debemos considerar algunos aspectos geométricos del problema. Hay dos puntos que debemos tomar en cuenta: primero, la geometría del encuentro filamento-blanco definirá la forma de  $\mathbf{R}(t)$ ; y segundo, la orientación del blanco respecto del filamento definirá las componentes de  $\delta\mathbf{r}$ .

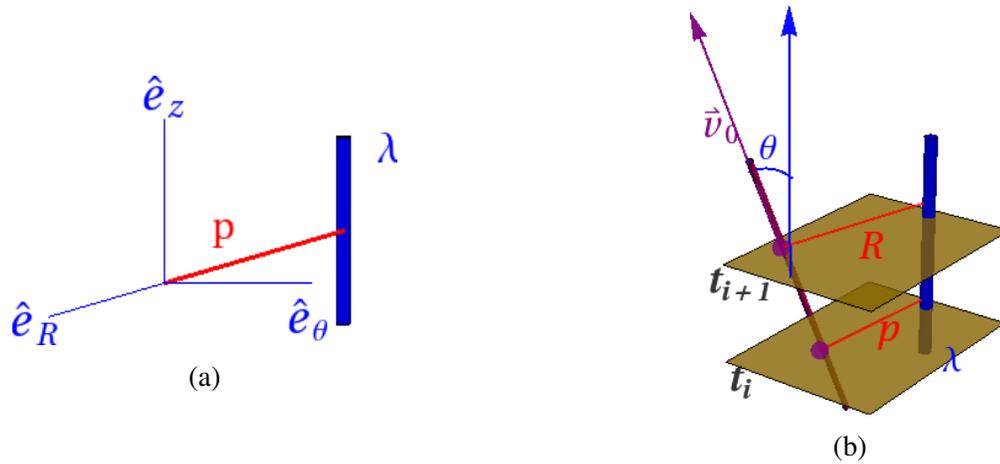


Figura C.2: (a) Sistema coordenado de referencia usado para calcular las componentes del tensor de marea. (b) Definición de la dirección relativa de movimiento en el encuentro entre el filamento y el blanco.

**La geometría de los encuentros** Introducimos ahora el concepto de parámetro de impacto,  $p$ , para encuentros con filamentos. Lo definimos como la distancia más corta entre el filamento y el blanco, con la particularidad de que debe ser siempre ortogonal al eje  $z$  del filamento. Ahora, veamos la relación entre el parámetro de impacto y el vector de posición  $R$  del blanco respecto al filamento. Supongamos que definimos el parámetro de impacto al tiempo  $t = t_i$ , este debe hallarse sobre el plano normal a  $z$ . A este tiempo el parámetro de impacto,  $p$ , y el vector de posición  $R$  coinciden. Conforme el tiempo avanza, el blanco empezará a moverse en alguna dirección relativa al filamento, de tal modo que el vector de posición ya no coincidirá con el parámetro de impacto. La diferencia entre estos será simplemente la distancia que el blanco se ha desplazado, moviéndose a una velocidad  $v_0$  relativa

---

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---

al filamento. Esta distancia dependerá de la dirección relativa de movimiento entre el filamento y el blanco, siendo  $\theta$  el ángulo que caracteriza esta dirección, como se muestra en la figura (C.2b). Entonces, la ecuación que nos da la variación temporal de la magnitud del vector de posición del blanco respecto al filamento,  $R$ , es:

$$R(t; p, \theta, v_0) = \sqrt{p^2 + (v_0 t \sin \theta)^2} \quad (\text{C.13})$$

Verificamos que  $\theta = 0$  corresponde al caso en el que el filamento y el blanco se mueven paralelos, i.e. con parámetro de impacto constante.

**La geometría de la orientación del blanco** Ahora, dirigimos nuestra atención a describir la orientación del blanco respecto a la orientación del filamento. Lo que debemos hacer es expresar el vector de posición de un elemento del blanco,  $\delta \mathbf{r}$ , en el marco de referencia definido por el filamento (ver figura C.2a), es decir, expresar  $\delta \mathbf{r}$  respecto a la triada de vectores unitarios ( $\hat{e}_R, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$ ).

Podemos describir esta transformación en términos de las rotaciones siguientes:

1. Rotación del plano del blanco por un ángulo  $\alpha$  respecto al eje  $\hat{e}_\theta$  (figura C.3a).
2. Rotación del plano del blanco por un ángulo  $\beta$  respecto al eje original  $\hat{e}_z$  (figura C.3b).
3. Rotación del plano del blanco por un ángulo  $\psi$  respecto al vector normal al plano del blanco  $\hat{e}_n$  (figure C.3c).

Los primeros dos ángulos definen la orientación espacial del plano del blanco respecto al plano del filamento, mientras que el tercer ángulo corresponde a la fase orbital del elemento en el blanco, ver figura C.3 para una descripción gráfica de la definición de los ángulos. Es claro que  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ , y  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ . La matriz de las rotaciones individuales son:

$$\lambda_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---

Para obtener la matriz de rotación final apropiada, deberemos aplicar las rotaciones individuales en el siguiente orden: primero la rotación por el ángulo  $\beta$ , seguido de la rotación por el ángulo  $\alpha$ , y finalmente la rotación por un ángulo  $\psi$ . Esta inversión en el orden de las primeras dos rotaciones es para hacer que el pivote para la rotación por el ángulo  $\alpha$  sea respecto al eje  $\hat{e}_\theta$  rotado. Si lo hacemos en el orden inverso, el pivote de la segunda rotación ( $\beta$ ) sería el eje  $\hat{e}_z$  original, y no su versión transformada, lo cual complica el álgebra. La expresión para el vector  $\delta\mathbf{r}$  en el sistema de referencia anclado al filamento es:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r} = & \delta r \{ [\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) - \sin(\beta) \sin(\psi)] \hat{\mathbf{e}}_R \\ & + [\cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) + \cos(\beta) \sin(\psi)] \hat{\mathbf{e}}_\theta - [\cos(\psi) \sin(\alpha)] \hat{\mathbf{e}}_z \} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

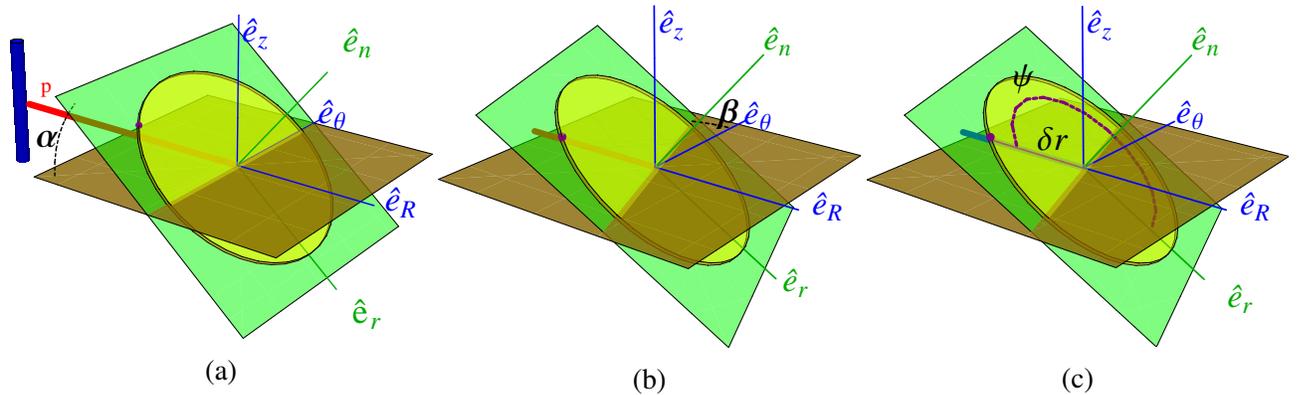


Figura C.3: Mostramos la definición de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\psi$  que nos permiten expresar el vector de posición de un elemento en el blanco,  $\delta r$  (el cual yace sobre el plano del blanco, en verde), en el sistema de referencia anclado al filamento (plano café).

Finalmente, la energía (por unidad de masa) transferida a la dinámica interna del sistema blanco, debida a un solo encuentro con un filamento estará dada por

$$\Delta E = \Delta(1/2v^2) = (\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v}) + 1/2(\Delta\mathbf{v})^2 \sim 1/2(\Delta v)^2 \quad (\text{C.16})$$

donde en el ultimo paso, despreciamos el termino lineal de la velocidad,  $\mathbf{v}$ , multiplicado por el incremento en la velocidad  $\Delta\mathbf{v}$  (dado que las orientación se elegirá al azar, este termino se hace

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---

cero en promedio). Y comparamos esta energía de perturbación con la energía de enlace del blanco,  $E_b = -G M_c/(2a)$ , y sustituyendo las ecuaciones (C.15) y (C.10) (C.12). La integración se realiza considerando  $\delta\mathbf{r}$  constante, i.e.  $\delta r, \alpha, \beta$  y  $\psi$  constantes durante el encuentro. A continuación mostramos los resultados para los diferentes modelos de filamentos:

$$\frac{\langle \Delta E \rangle_{st}}{|E_b|} = \frac{4 G \pi^2 \lambda^2}{M_c v_0^2 \sin^2(\theta)^2 p^2} a^3 \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{T}(\alpha, \psi) & (1\mathbb{D}) & (C.17a) \\ \mathbb{T}(\alpha, \psi) \mathbb{B}^2(R_0/p) & (C\mathbb{D}) & (C.17b) \\ \mathbb{C}(R_0/p, \alpha, \beta, \psi) & (\text{Core}) & (C.17c) \\ \mathbb{D}(R_0/p, \alpha, \beta, \psi) & (\text{Cusp}). & (C.17d) \end{array} \right.$$

donde las funciones geométricas ,  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$ , y  $\mathbb{D}$  están dadas por:

---

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS

---

$$\mathbb{T} = \left[ \cos^2(\alpha) \cos^2(\psi) + \sin^2(\psi) \right] \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= \frac{2}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{R_0/p}{\sqrt{1-R_0/p^2}}\right) - R_0/p \sqrt{1-R_0/p^2} \right] \quad R_0/p \leq 1 \\ &= 1, \quad R_0/p \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= I_1^2(R_0/p) [\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) - \sin(\beta) \sin(\psi)]^2 + \\ &I_2^2(R_0/p) [\cos(\alpha) \cos(\psi) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\psi)]^2, \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\tau^2} - R_0/p}{[\sqrt{1+\tau^2} + R_0/p]^3} d\tau$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{[\sqrt{1+\tau^2} + R_0/p]^2} d\tau$$

$$\mathbb{D} = I_3^2(R_0/p) [\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) - \sin(\beta) \sin(\psi)]^2 + \quad (\text{C.21})$$

$$I_4^2(R_0/p) [\cos(\alpha) \cos(\psi) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\psi)]^2,$$

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{[R_0/p \sqrt{1+\tau^2}]^2} d\tau$$

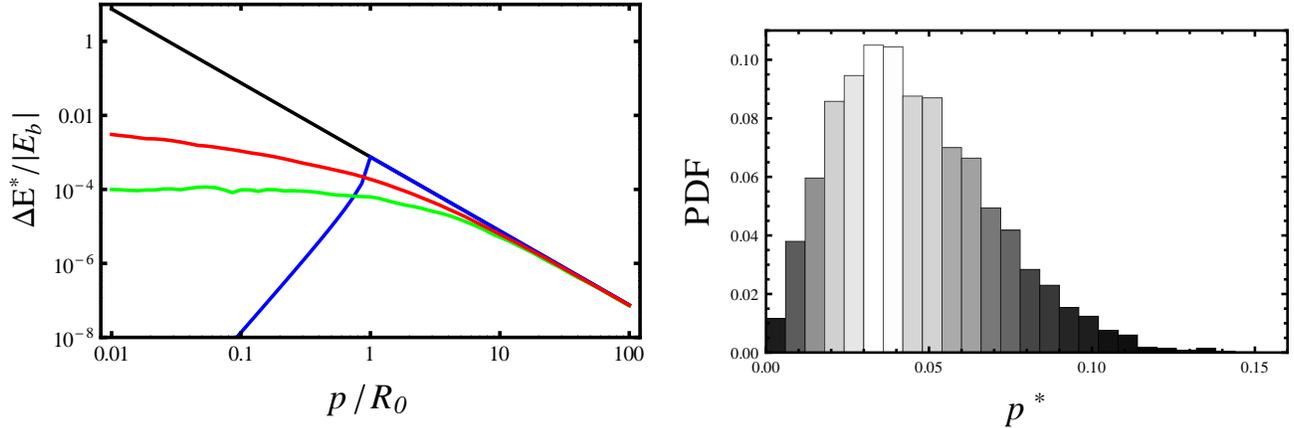
$$I_4 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^2} [R_0/p + \sqrt{1+\tau^2}]} d\tau$$

Todas las funciones  $\Delta E/E_b$  para los diferentes modelos convergen al modelo S-1D para parámetros de impacto grandes, ver figura C.4a.

### Parámetros de impacto para filamentos.

Con el fin de generar la función de distribución de parámetros de impacto para filamentos, usamos el siguiente procedimiento. Empezamos por generar líneas aleatorias dentro de una región del espacio. Después generamos una colección de puntos uniformemente distribuidos en la misma región, y determinamos la distancia de cada punto a la línea más cercana, que corresponde al parámetro de impacto. Esto resulta en muestreo de la función de distribución de parámetros de impacto que es com-

## C.1. INTERACCIÓN DINÁMICA CON FILAMENTOS



(a) Energía de perturbación producida por los filamentos, como función del parámetro de impacto  $p$ . Los colores corresponden a los mismos modelos que en la figura C.1a

(b) Función de distribución del parámetro de impacto para filamentos, calculada con el procedimiento descrito en el texto.

Figura C.4

pletamente independiente de un volumen de muestreo. En la figura (C.4b) mostramos la distribución resultante. Aún necesitamos relacionar esta realización con una distribución específica de materia, con una densidad de masa particular,  $\rho$ , y la densidad de masa lineal de los filamentos (líneas),  $\lambda$ , de tal modo que el parámetro de impacto etiquetado por  $p^*$  pueda tener las dimensiones correctas, de acuerdo a la situación específica. Esto lo hacemos, introduciendo un volumen de muestreo que nos permita medir la densidad de masa en torno a los puntos de prueba. Realizamos varios experimentos, manteniendo fijo el número total de líneas en la realización, así como el volumen de la misma, pero variando el tamaño del volumen de muestreo,  $R^*$ , y encontramos que la densidad de número de líneas varía con este tamaño, pero la densidad de masa no. Por lo tanto, en nuestro procedimiento, la densidad de masa es una cantidad bien definida cuyo valor es independiente del tamaño de la región usada para calcularla. En la práctica, normalizamos el valor de la densidad lineal de los filamentos a uno, de tal modo que la densidad de masa obtenida del muestreo es  $\rho^*$ . Al realizar el análisis dimensional del problema llegamos a la conclusión de que la relación entre el parámetro de impacto en la realización azarosa,  $p^*$ , y el parámetro de impacto físico  $p$ , está dada por:  $p = \left( \sqrt{\lambda_{st} \rho^* / f_s \rho} \right) p^*$ , donde  $\lambda_{st}$  y  $\rho$

---

## C.2. CORRECCIONES PARA LOS MODELOS ESFÉRICOS.

---

están dados en unidades físicas, y  $\rho^*$  es el valor numérico de la densidad de masa obtenida en una realización en específica.

En este trabajo usamos la función de distribución mostrada en la figura C.4b, que corresponde a un valor numérico de la densidad de masa de  $\rho^* = 1205,08$ ; los parámetros  $\lambda_{st}$ ,  $f_s$ , y  $\rho$ , lo fijaremos de acuerdo a la situación específica bajo estudio.

## C.2. Correcciones para los modelos esféricos.

### Corrección para perturbadores extendidos.

En esta sección presentamos el comportamiento de la función  $U$ , que aparece en la ecuación (3.1), la cual toma en cuenta la extensión y estructura de los mini-halos de materia oscura. Para esto hemos asumido que los mini-halos tienen un perfil de masa del tipo Navarro-Frenk-White. Normalizado a la masa virial, el perfil de masa es:

$$\mu(r/r_s) = \frac{1}{\log(1+c) - \frac{c}{1+c}} \left( \log[1+r/r_s] - \frac{r/r_s}{1+r/r_s} \right), \quad (\text{C.22})$$

donde  $c = r_{\text{vir}}/r_s$  es la concentración;  $r_s$  y  $r_{\text{vir}}$  son el radio de escala, y virial, respectivamente. Siguiendo el procedimiento en [131], y dado que el perfil de masa está normalizado, definimos la función  $U$  como :

$$U(\xi) = \begin{cases} \int_1^\infty \mu(p\xi) \xi^{-2} (\xi^2 - 1)^{-1/2} d\xi & \text{for } p/r_s < c \\ \int_1^\infty \xi^{-2} (\xi^2 - 1)^{-1/2} d\xi = 1 & \text{for } p/r_s > c. \end{cases} \quad (\text{C.23a})$$

## C.2. CORRECCIONES PARA LOS MODELOS ESFÉRICOS.

---

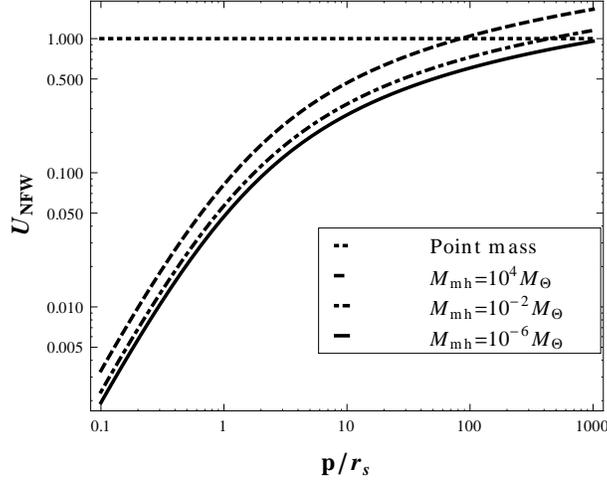


Figura C.5: Función de estructura,  $U$ , para halos con perfil de densidad NFW. Se muestra como función de la masa de los mini-halos. Por comparación añadimos una línea que corresponde a la aproximación de perturbador puntual, ( $U_{\text{NFW}} = 1$ ), para ver a partir de que escala es válida esta aproximación

Una vez realizada la integración, la función  $U$  toma la forma:

$$U(\xi) = \begin{cases} \frac{\frac{\text{ArcSec}[p]}{\sqrt{-1+p^2}} + \log\left[\frac{p}{2}\right]}{\left(-\frac{c}{1+c} + \log[1+c]\right)} & \text{for } p/r_s < c \\ 1 & \text{for } p/r_s > c, \end{cases} \quad (\text{C.24a})$$

gráficamente se muestra en la figura C.5, para diferentes valores de la masa del mini-halo. La función  $U$  cruza interseca la aproximación de masa puntual aproximadamente cuando  $r/p = c$  para las diferentes masas. Por comparación añadimos una línea indicando el caso de la aproximación de masa puntual ( $U_{\text{NFW}} = 1$ ), para ver a que escala esta empieza a ser válida. Podemos ver que esta corrección es menos importante para mini-halos pequeños.

---

## C.2. CORRECCIONES PARA LOS MODELOS ESFÉRICOS.

---

### Correcciones para encuentros que no satisfacen la condición de encuentros distantes.

En esta sección tratamos los encuentros para los cuales la aproximación de marea lejana no es aplicable. En particular, esto sucede cuando se trata la interacción de las binarias abiertas y la subestructura puntual (esférica) presente en las galaxias enanas esferoidales. Nos basaremos en este sistema para establecer cual es problema, y como lo resolvemos, pero esto serpa aplicable para cualquier otro sistema en el que la aproximación de marea lejana no sea aplicable..

La aproximación de marea lejana es aplicable cuando el tamaños típico del sistema blanco, es mucho menor que el parámetro de impacto. Para determinar si esta condición es aplicable, o no, consideraremos los parámetros que usamos en la sección 3.2.2, para estudiar la evolución de las binarias abiertas. Estos son:  $\rho_{\text{dm}} = 2,210^{-17} M_{\odot}/\text{AU}^3$ ,  $a=0,1pc$ ,  $M_b = 1M_{\odot}$ . Comparamos entonces la separación de las binarias con el parámetro de impacto promedio en los encuentros, i.e.  $\langle p \rangle = \Gamma(1/3)(36\pi\rho_{\text{dm}}/m_{\text{mh}})^{(-1/3)}$  (definido a partir de la distribución de vecinos más cercanos), para diferentes valores de la masa del perturbador. En la tabla C.6a se muestra esta comparación; los valores menores, o cercanos a uno implican que la aproximación de marea lejana no es aplicable. Para los perturbadores menos masivos, prácticamente no es posible tratar los encuentros en la aproximación de marea lejana. Dado que el muestreo de los parámetros de impacto es azaroso, no hay forma de saber, a priori, cuales y cuantos de los encuentros pueden ser tratados bajo esta aproximación y cuales no. En la practica, haremos esta comparación para cada encuentro y decidiremos si es apropiado usar la aproximación de marea lejana, o si debemos calcular directamente el incremento en la velocidad de cada componente de la binaria, y después calcular la inyección de energía como se describe a continuación.

Para cada componente de la binaria, el incremento en la velocidad debido a un encuentro, en la aproximación no distante, esta dado por

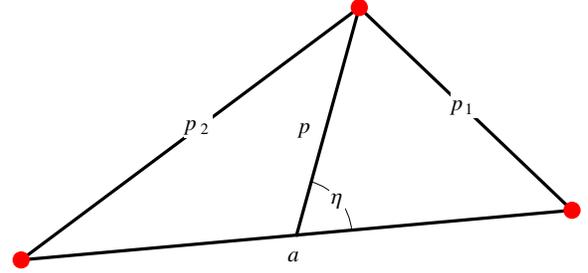
$$\Delta \mathbf{v}_i = \frac{2GM_p}{v} U(p_i) \frac{\hat{\mathbf{p}}_i}{p_i} \quad (\text{C.25})$$

donde  $U(p)$  es una función que depende del perfil de densidad del perturbador, y que tiende a uno cuando el parámetro de impacto es mucho más grande que el tamaño característico del perturbador,

## C.2. CORRECCIONES PARA LOS MODELOS ESFÉRICOS.

$m_{\text{mh}}(M_{\odot})$	$p/a$
$10^{-6}$	0.33
$10^{-4}$	1.55
$10^{-2}$	7
1	33
$10^2$	155
$10^6$	335

(a)



(b)

Figura C.6: (a) Se muestra el factor  $p_{\text{mean}}/a$  para diferentes valores de la masa de los perturbadores puntuales (esféricos). Valores cercanos a uno implican que la aproximación de marea lejana, en el cálculo del efecto dinámico de encuentro entre un blanco y una población de mini-halos, no es aplicable. (b) El diagrama muestra las definiciones usadas para calcular la corrección por encuentros no-distantes con mini-halos.

(esta corrección se describe detalladamente en [131], y en el apéndice C.2). El subíndice  $i$  se refiere a la  $i$ -ésima componente de la binaria. La energía diferencial por unidad de masa, transferida al sistema binario es:

$$\Delta E = 0,5\Delta v_{\text{diff}}^2 + \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} \quad (\text{C.26})$$

donde  $\Delta v_{\text{diff}} = |\Delta \mathbf{v}_2 - \Delta \mathbf{v}_1|$ , es la diferencia vectorial de las contribuciones individuales de ambas componentes del sistema.

En nuestra aproximación, el parámetro de impacto es muestreado a partir de una función de distribución de vecinos cercanos, por lo que debemos especificar respecto a que punto de la binaria está definido, por simplicidad asumiremos que es respecto al centro de masa de la binaria, de tal modo que los parámetros de impacto individuales de cada componente de la binaria están dados por:

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p^2 + (a/2)^2 - p a \cos \eta \\ p_2^2 &= p^2 + (a/2)^2 + p a \cos \eta. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$\eta$  es la dirección relativa entre la línea auxiliar que une las componentes de la binaria, y la que

## C.2. CORRECCIONES PARA LOS MODELOS ESFÉRICOS.

---

define la dirección del parámetro de impacto, (este ángulo lo generaremos a partir de una distribución uniforme entre  $0$  y  $\pi$ , ya que es igualmente probable tener una orientación u otra). Dada esta geometría, reescribimos la ecuación (C.26) en términos del parámetro de impacto y la separación de la binaria,

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= 0,5 \left( \frac{2GM_p}{v} \right)^2 \delta v_{\text{tot}}^2 \quad \text{donde} \\
 \delta v_{\text{tot}}^2 &= \delta v_1^2 + \delta v_2^2 - 2\delta \mathbf{v}_1 \cdot \delta \mathbf{v}_2 \\
 &= \left( \frac{U(p_1)}{p_1} \right)^2 + \left( \frac{U(p_2)}{p_2} \right)^2 - 2 \frac{U(p_1) U(p_2)(p_1^2 + p_2^2 - a^2)}{p_1^2 p_2^2}
 \end{aligned} \tag{C.28}$$

Esta última expresión será usada siempre que no se satisfaga la condición de encuentros lejanos, en nuestro análisis. Hemos de notar que despreciamos la contribución del término lineal en la velocidad, en la ecuación (C.26), porque se espera que como resultado de la simetría este término tienda a cero cuando  $\Delta E$  se sume sobre todos los encuentros (ver [131]).

# Referencias

- [1] D. Nuñez, A. X. Gonzalez-Morales, J. L. Cervantes-Cota, and T. Matos. Testing dark matter halos using rotation curves and lensing: A warning on the determination of the halo mass. *Phys. Rev. D*, 82(2), 2010. [i, 27](#)
- [2] Alma X. Gonzalez-Morales, Alberto Diez-Tejedor, L. Arturo Urena-Lopez, and Octavio Valenzuela. Hints on halo evolution in SFDM models with galaxy observations. *Phys.Rev.*, D87:021301, 2013. [i, 27](#)
- [3] Alma X. Gonzalez-Morales, Octavio Valenzuela, and Luis A. Aguilar. Constraining dark matter sub-structure with the dynamics of astrophysical systems. *JCAP*, 1303:001, 2013. [ii, 49](#)
- [4] Alma X. Gonzalez-Morales, Robert Poltis, Blake D. Sherwin, and Licia Verde. Are priors responsible for cosmology favoring additional neutrino species? *arXiv:1106.5052*, 2011. [ii, 73](#)
- [5] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933. [2](#)
- [6] V. C. Rubin, N. Thonnard, and W. K. Ford, Jr. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC. *ApJL.*, 225:L107–L111, 1978. [3](#)
- [7] V. C. Rubin. Velocities and mass distribution in the barred spiral NGC 5728. *ApJ.*, 238:808–817, 1980.
- [8] A. Bosma. 21-cm line studies of spiral galaxies. I - Observations of the galaxies NGC 5033, 3198, 5055, 2841, and 7331. II - The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types. *AJ*, 86:1791–1846, 1981. [3](#)
- [9] T.S. van Albada, J.N. Bahcall, K Begeman, and R Sancisi. Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198. *ApJ*, 295:305–313, 1985. [3, 4](#)
- [10] M. Milgrom. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *ApJ.*, 270:365–370, 1983. [3](#)
- [11] M. Milgrom. A modification of the Newtonian dynamics - Implications for galaxies. *ApJ.*, 270:371–389, 1983. [3](#)

## REFERENCIAS

---

- [12] Douglas Clowe, Marusa Bradac, Anthony H. Gonzalez, et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *ApJ.*, 648:L109–L113, 2006. 3, 6
- [13] W.J.G. de Blok and A. Bosma. High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies. *Astron.ApJ.*, 385:816, 2002. 4, 5
- [14] W.J.G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, et al. High-Resolution Rotation Curves and Galaxy Mass Models from THINGS. *Astron.J.*, 136:2648–2719, 2008. 4
- [15] Octavio Valenzuela, George Rhee, Anatoly Klypin, et al. Is there evidence for flat cores in the halos of dwarf galaxies?: the case of ngc 3109 and ngc 6822. *ApJ.*, 657:773–789, 2007. 5
- [16] Joshua J. Adams, Karl Gebhardt, Guillermo A. Blanc, et al. The central dark matter distribution of NGC 2976. *ApJ.*, 745:92, 2012. 5
- [17] R. A. Sunyaev and L. G. Titarchuk. Comptonization of X-rays in plasma clouds - Typical radiation spectra. 86:121–138, 1980. 5
- [18] M. Markevitch, A. Vikhlinin, W. R. Forman, and C. L. Sarazin. Mass Profiles of the Typical Relaxed Galaxy Clusters A2199 and A496. *ApJ.*, 1999. 5
- [19] Alexey Vikhlinin, A. Kravtsov, W. Forman, et al. Chandra sample of nearby relaxed galaxy clusters: Mass, gas fraction, and mass-temperature relation. *ApJ.*, 640:691–709, 2006. 5
- [20] S Mollerach and E Roulet. *Gravitational lensing and microlensing*. World Scientific, 2002. 6
- [21] P Schneider, C. S. Kochanek, and J Wambsganss. Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro. *Saas-Fee Advanced Courses, Volume 33.*, 2006. 6
- [22] P. A. Thomas, J. M. Colberg, H. M. P. Couchman, et al. The structure of galaxy clusters in various cosmologies. *MNRAS*, 296:1061–1071, 1998. 6
- [23] Y. P. Jing and Y. Suto. Triaxial Modeling of Halo Density Profiles with High-Resolution N-Body Simulations. *ApJ.*, 574:538–553, 2002. 6
- [24] Virginia Corless and L. King. A Statistical Study of Weak Lensing by Triaxial Dark Matter Halos: Consequences for Parameter Estimation. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 380:149–161, 2007. 6
- [25] Naoki Yoshida, Volker Springel, Simon D.M. White, and Giuseppe Tormen. Weakly self-interacting dark matter and the structure of dark halos. *ApJ.*, 544:L87–L90, 2000. 6
- [26] J. Miralda-Escude. A Test of the Collisional Dark Matter Hypothesis from Cluster Lensing. *ApJ.*, 564: 60–64, 2002. 6

## REFERENCIAS

---

- [27] Oleg Y. Gnedin and Jeremiah P. Ostriker. Limits on collisional dark matter from elliptical galaxies in clusters. *ApJ.*, 561:61–68, 2001. [6](#)
- [28] Tommaso Treu. Strong Lensing by Galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48(1): 87–125, 2010. [8](#)
- [29] Massimo Meneghetti, Rodolfo Argazzi, Francesco Pace, et al. Arc sensitivity to cluster ellipticity, asymmetries and substructures. *Astron.ApJ.*, 461:25–38, 2007. [8](#)
- [30] J. Dunkley, D. N. Spergel, E. Komatsu, et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Bayesian Estimation of Cosmic Microwave Background Polarization Maps. 701:1804–1813, 2009. [8](#)
- [31] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. 2012. [8](#), [15](#), [83](#), [98](#)
- [32] D. Larson, J. Dunkley, G. Hinshaw, et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-derived Parameters. *ApJS*, 192:16, 2011. [9](#), [79](#), [94](#)
- [33] F. Iocco, G. Mangano, G. Miele, et al. Primordial nucleosynthesis: From precision cosmology to fundamental physics. *physrep*, 472:1–76, 2009. [10](#)
- [34] Wayne Hu, Rennan Barkana, and Andrei Gruzinov. Fuzzy cold dark matter: The wave properties of ultralight particles. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1158–1161, Aug 2000. [10](#)
- [35] Tonatiuh Matos and L. Arturo Urena-Lopez. Quintessence and scalar dark matter in the universe. *Class.Quant.Grav.*, 17:L75–L81, 2000. [10](#)
- [36] P. J. E. Peebles. Fluid Dark Matter. *ApJL*, 534:L127–L129, 2000. [10](#)
- [37] Alexandre Arbey, Julien Lesgourgues, and Pierre Salati. Galactic halos of fluid dark matter. *Phys.Rev.*, D68:023511, 2003. [27](#), [40](#)
- [38] Juan Magana, Tonatiuh Matos, Abril Suarez, and F.J. Sanchez-Salcedo. Structure formation with scalar field dark matter: the field approach. 2012. [10](#)
- [39] Xavier Hernandez, Tonatiuh Matos, Roberto A Sussman, and Yosef Verbin. Scalar field mini-machos: A New explanation for galactic dark matter. *Phys.Rev.*, D70:043537, 2004. [10](#)
- [40] M. C. Johnson and M. Kamionkowski. Dynamical and gravitational instability of an oscillating-field dark energy and dark matter. 78(6):063010–+, 2008. [17](#), [24](#), [49](#)
- [41] J Barranco and A Bernal. Self-gravitating system made of axions. *Phys.Rev.*, D83:43525, 2011. [10](#), [17](#), [24](#), [49](#)

## REFERENCIAS

---

- [42] Scott Tremaine and James E. Gunn. Dynamical role of light neutral leptons in cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 42:407–410, Feb 1979. [11](#)
- [43] Torsten Bringmann. Particle Models and the Small-Scale Structure of Dark Matter. *New J.Phys.*, 11: 105027, 2009. [12](#), [23](#), [24](#)
- [44] Gianfranco Bertone, Dan Hooper, and Joseph Silk. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Phys.Rept.*, 405:279–390, 2005. [14](#)
- [45] G Jungman, M Kamionkowski, and K Griest. Supersymmetric dark matter. *Phys. Rep.*, 267:195–373, 1996.
- [46] K. A. Olive. Dark matter and dark matter candidates. *Advances in Space Research*, 42:581–590, 2008.
- [47] F. D. Steffen. Dark-matter candidates. Axions, neutralinos, gravitinos, and axinos. *European Physical Journal C*, 59:557–588, 2009. [14](#)
- [48] S Dodelson and L. M. Widrow. Sterile neutrinos as dark matter. *Physical Review Letters*, 72:17–20, 1994. [15](#)
- [49] A. D. Dolgov and S. H. Hansen. Massive sterile neutrinos as warm dark matter. *Astroparticle Physics*, 16:339–344, 2002. [15](#)
- [50] Dan Hooper, Manoj Kaplinghat, Louis E. Strigari, and Kathryn M. Zurek. MeV Dark Matter and Small Scale Structure. *Phys.Rev.*, D76:103515, 2007.
- [51] Julien Lesgourgues and Sergio Pastor. Massive neutrinos and cosmology. *Phys.Rept.*, 429:307–379, 2006. [15](#), [73](#)
- [52] Zhen Hou, Ryan Keisler, Lloyd Knox, et al. How Massless Neutrinos Affect the Cosmic Microwave Background Damping Tail. 2011. [15](#), [75](#), [79](#), [81](#)
- [53] J. Dunkley, R. Hlozek, J. Sievers, et al. The Atacama Cosmology Telescope: Cosmological Parameters from the 2008 Power Spectra. *ApJ.*, 739:52, 2011. [15](#), [75](#), [79](#)
- [54] Stephen M. Feeney, Hiranya V. Peiris, and Licia Verde. Is there evidence for additional neutrino species from cosmology? 2013. [15](#)
- [55] Luis G. Cabral-Rosetti, Myriam Mondragon, and Esteban Reyes-Perez. Toroidal Dipole Moment of the Lightest Neutralino in the cMSSM. 2012. [16](#)
- [56] J. A. R. Cembranos, J. L. Feng, and L. E. Strigari. Exotic collider signals from the complete phase diagram of minimal universal extra dimensions. 75(3):036004–+, 2007. [17](#)
- [57] Olivier Wantz and E.P.S. Shellard. Axion Cosmology Revisited. *Phys.Rev.*, D82:123508, 2010. [17](#)

## REFERENCIAS

---

- [58] Masahiro Kawasaki and Kazunori Nakayama. Axions : Theory and Cosmological Role. 2013. [17](#)
- [59] Tonatiuh Matos and L. Arturo Urena-Lopez. A Further analysis of a cosmological model of quintessence and scalar dark matter. *Phys.Rev.*, D63:063506, 2001. [17](#), [25](#), [27](#), [49](#)
- [60] Tonatiuh Matos, Francisco Siddhartha Guzman, and L. Arturo Urena-Lopez. Scalar field as dark matter in the universe. *Class.Quant.Grav.*, 17:1707–1712, 2000. [17](#), [27](#)
- [61] C.G. Boehmer and T. Harko. Can dark matter be a Bose-Einstein condensate? *JCAP*, 0706:025, 2007. [17](#), [27](#)
- [62] Tonatiuh Matos and Dario Nunez. Flat central density profiles from scalar field dark matter halo. 2003. [17](#), [27](#)
- [63] Tonatiuh Matos, J. Alberto Vazquez, and Juan Magana.  $\phi^2$  as Dark Matter. 2008. [17](#), [27](#)
- [64] J.~A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1999. [18](#), [91](#)
- [65] Volker Springel, Carlos S. Frenk, and Simon D.M. White. The large-scale structure of the Universe. *Nature*, 440:1137, 2006. [20](#)
- [66] M. Tegmark and M. Zaldarriaga. Separating the early universe from the late universe: Cosmological parameter estimation beyond the black box. 66(10):103508–+, 2002. [19](#)
- [67] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D.M. White. A Universal density profile from hierarchical clustering. *ApJ.*, 490:493–508, 1997. [21](#), [32](#)
- [68] Till Sawala, Cecilia Scannapieco, and Simon D.M. White. Formation of Isolated Dwarf Galaxies with Feedback. 2009. [22](#)
- [69] Jie Wang, Carlos S. Frenk, Julio F. Navarro, and Liang Gao. The Missing Massive Satellites of the Milky Way. 2012. [22](#)
- [70] Anne M. Green, Stefan Hofmann, and Dominik J. Schwarz. The power spectrum of SUSY - CDM on sub-galactic scales. *MNRAS*, 353:L23, 2004. [23](#), [24](#), [49](#), [70](#)
- [71] Abraham Loeb and Matias Zaldarriaga. The Small-scale power spectrum of cold dark matter. *Phys.Rev.*, D71:103520, 2005. [24](#)
- [72] Anne M. Green, Stefan Hofmann, and Dominik J. Schwarz. The First wimpy halos. *JCAP*, 0508:003, 2005. [24](#)
- [73] Jonathan M. Cornell and Stefano Profumo. Earthly probes of the smallest dark matter halos. *JCAP*, 1206:011, 2012. [24](#), [25](#), [49](#)

## REFERENCIAS

---

- [74] Edmund Bertschinger. The Effects of Cold Dark Matter Decoupling and Pair Annihilation on Cosmological Perturbations. *Phys.Rev.*, D74:063509, 2006. [24](#)
- [75] Torsten Bringmann and Stefan Hofmann. Thermal decoupling of WIMPs from first principles. *JCAP*, 0407:016, 2007. [24](#)
- [76] Stefano Profumo, Kris Sigurdson, and Marc Kamionkowski. What mass are the smallest protohalos? *Phys.Rev.Lett.*, 97:031301, 2006. [24](#), [49](#), [70](#)
- [77] J.-W. Lee and S. Lim. Minimum mass of galaxies from BEC or scalar field dark matter. *JCAP*, 1:7, 2010. [25](#), [49](#)
- [78] Jurg Diemand, Michael Kuhlen, and Piero Madau. Early supersymmetric cold dark matter substructure. *ApJ.*, 649:1–13, 2006. [25](#)
- [79] H Zhao, J. E. Taylor, J Silk, and D Hooper. Earth-mass dark halos are torn into dark mini-streams by stars. 2005. [50](#)
- [80] B. Moore, J. Diemand, J. Stadel and T. R. Quinn. On the survival and disruption of Earth mass CDM micro- haloes. 2005. [25](#), [50](#)
- [81] T. Goerdt, O. Y. Gnedin, B. Moore, J. Diemand and J. Stadel. The survival and disruption of CDM micro-haloes: implications for direct and indirect detection experiments. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 375:191–198, 2007. [25](#), [49](#)
- [82] J. Diemand, M. Kuhlen, P. Madau, et al. Clumps and streams in the local dark matter distribution. *Nature*, 454:735–738, 2008. [25](#), [49](#)
- [83] M Kuhlen, N Weiner, J Diemand, et al. Dark matter direct detection with non-Maxwellian velocity structure. *JCAP*, 2:30, 2010. [25](#)
- [84] Michael S. Turner. Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, 28:1243–1247, Sep 1983. doi: 10.1103/PhysRevD.28.1243. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.1243>. [27](#)
- [85] The ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. 2012. [27](#)
- [86] The CMS Collaboration. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. 2012. [27](#)
- [87] J. Lesgourgues, A. Arbey, and P. Salati. A light scalar field at the origin of galaxy rotation curves. *New Astron.Rev.*, 46:791–799, 2002. [27](#)

## REFERENCIAS

---

- [88] L. Arturo Urena-Lopez. Bose-Einstein condensation of relativistic Scalar Field Dark Matter. *JCAP*, 0901:014, 2009. [27](#)
- [89] Miguel Alcubierre, Francisco Siddhartha Guzman, Tonatiuh Matos, et al. Galactic collapse of scalar field dark matter. *Class.Quant.Grav.*, 19:5017, 2002. [27](#)
- [90] Michael S. Turner. Coherent Scalar Field Oscillations in an Expanding Universe. *Phys.Rev.*, D28:1243, 1983. [27](#)
- [91] Dario Nunez. Oscillating shells: A Model for a variable cosmic object. *ApJ.*, 482:963–970, 1997. [28](#)
- [92] Dario Nunez, Hernando Quevedo, and Marcelo Salgado. Dynamics of a spherically symmetric scalar shell. *Phys.Rev.*, D58:083506, 1998.
- [93] Tonatiuh Matos, Dario Nunez, Francisco Siddhartha Guzman, and Erandy Ramirez. Geometric conditions on the type of matter determining the flat behavior of the rotational curves in galaxies. *Gen.Rel.Grav.*, 34:283–305, 2002. [30](#)
- [94] Francisco Siddhartha Guzman, Tonatiuh Matos, Dario Nunez, and Erandy Ramirez. Quintessence - like dark matter in spiral galaxies. *Rev.Mex.Fis.*, 49:203–206, 2003.
- [95] Jorge L. Cervantes-Cota, Mario A. Rodriguez-Meza, and Dario Nunez. A spherical scalar-tensor galaxy model. *Phys.Rev.*, D79:064011, 2009.
- [96] Kamal K. Nandi, Ildar Valitov, and Nail G. Migranov. Remarks On The Spherical Scalar Field Halo In Galaxies. *Phys.Rev.*, D80:047301, 2009.
- [97] Somnath Bharadwaj and Sayan Kar. Modeling galaxy halos using dark matter with pressure. *Phys.Rev.*, D68:023516, 2003.
- [98] Tristan Faber and Matt Visser. Combining rotation curves and gravitational lensing: How to measure the equation of state of dark matter in the galactic halo. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 372:136–142, 2006. [28](#)
- [99] F. Lucchin and S. Matarrese. Power Law Inflation. *Phys.Rev.*, D32:1316, 1985. doi: 10.1103/PhysRevD.32.1316. [32](#)
- [100] Paolo Salucci, A. Lapi, C. Tonini, et al. The Universal Rotation Curve of Spiral Galaxies. 2. The Dark Matter Distribution out to the Virial Radius. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 378:41–47, 2007. [32](#)
- [101] Paolo Salucci and Christiane Frigerio Martins. The mass distribution in Spirals. 2009. [32](#)
- [102] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D.M. White. The Structure of cold dark matter halos. *ApJ.*, 462:563–575, 1996. [32](#)

## REFERENCIAS

---

- [103] M. Colpi, S.L. Shapiro, and I. Wasserman. Boson Stars: Gravitational Equilibria of Selfinteracting Scalar Fields. *Phys.Rev.Lett.*, 57:2485–2488, 1986. [40](#)
- [104] Jae-weon Lee and In-gyu Koh. Galactic halos as boson stars. *Phys.Rev.*, D53:2236–2239, 1996. [40](#)
- [105] T. Harko. Bose-Einstein condensation of dark matter solves the core/cusp problem. *JCAP*, 1105:022, 2011. [40](#), [45](#)
- [106] V. Lora, Juan Magana, Argelia Bernal, et al. On the mass of ultra-light bosonic dark matter from galactic dynamics. *JCAP*, 1202:011, 2012. [45](#)
- [107] Victor H. Robles and Tonatiuh Matos. Flat Central Density Profile and Constant DM Surface Density in Galaxies from Scalar Field Dark Matter. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 422:282–289, 2012. [40](#)
- [108] Neven Bilic and Hrvoje Nikolic. Selfgravitating bosons at nonzero temperature. *Nucl.Phys.*, B590: 575–595, 2000. [40](#)
- [109] Tiberiu Harko and Eniko J.M. Madarassy. Finite temperature effects in Bose-Einstein Condensed dark matter halos. *JCAP*, 1201:020, 2012. [40](#)
- [110] N. Jarosik, C.L. Bennett, J. Dunkley, et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results. *ApJ.Suppl.*, 192:14, 2011. [42](#), [73](#)
- [111] Yousin Park and Henry C. Ferguson. Gravitational lensing by burkert halos. *ApJ.*, 589:L65–L68, 2003. [43](#)
- [112] A. Burkert. The Structure of Dark Matter Halos in Dwarf Galaxies. *ApJ.*, 447:L25, 1995. [43](#)
- [113] C. O. Wright and T. G. Brainerd. Gravitational Lensing by NFW Halos. *ApJ*, 534:34–40, 2000. [43](#)
- [114] Edward A. Baltz, Phil Marshall, and Masamune Oguri. Analytic models of plausible gravitational lens potentials. *JCAP*, 0901:015, 2009. [43](#)
- [115] Thomas P. Kling and Simonetta Frittelli. Study of errors in strong gravitational lensing. *ApJ.*, 675: 115–125, 2008. [43](#)
- [116] E.E. Falco, C.S. Kochanek, J. Lehar, et al. The castles gravitational lensing tool. 1999. URL <http://www.cfa.harvard.edu/castles/>. [44](#)
- [117] Adam S. Bolton, Scott Burles, Leon V.E. Koopmans, et al. The Sloan Lens ACS Survey. V. The Full ACS Strong-Lens Sample. *ApJ.*, 682:964–984, 2008. [44](#)
- [118] M.W. Auger, T. Treu, A.S. Bolton, et al. The Sloan Lens ACS Survey. IX. Colors, Lensing and Stellar Masses of Early-type Galaxies. *ApJ.*, 705:1099–1115, 2009. [46](#)

## REFERENCIAS

---

- [119] Dan Maoz and Hans-Walter Rix. Early type galaxies, dark halos, and gravitational lensing statistics. *ApJ*, 416:425, 1993. [46](#)
- [120] G. R. Blumenthal, S. M. Faber, R. Flores, and J. R. Primack. Contraction of dark matter galactic halos due to baryonic infall. *ApJ*, 301:27–34, 1986. [48](#)
- [121] Daniel Ceverino and Anatoly Klypin. The role of stellar feedback in the formation of galaxies. *ApJ*, 695:292–309, 2009. [48](#)
- [122] Fabio Governato, Chris Brook, Lucio Mayer, et al. At the heart of the matter: the origin of bulgeless dwarf galaxies and Dark Matter cores. *Nature*, 463:203–206, 2010. [48](#)
- [123] H Zhao, D Hooper, G. W. Angus, et al. Tidal Disruption of the First Dark Microhalos. *ApJ*, 654:697–701, 2007. [49](#)
- [124] V. S. Berezinsky, V. I. Dokuchaev, and Y. N. Eroshenko. Small-scale clumps in the Galactic halo. *Physics of Atomic Nuclei*, 73:179–190, 2010.
- [125] G. W. Angus and H Zhao. Cold dark matter microhalo survival in the Milky Way. *MNRAS*, 375:1146–1156, 2007. [49](#)
- [126] B Moore J. Diemand, J Stadel, J Diemand, and B Moore. Earth-mass dark-matter haloes as the first structures in the early universe. *Nature*, 433:389–391, 2005. [50](#), [58](#)
- [127] Aurel Schneider, Lawrence Krauss, Ben Moore, and L M Krauss A. Schneider. Impact of Dark Matter Microhalos on Signatures for Direct and Indirect Detection. pages 1–6, 2010. [50](#), [55](#), [66](#)
- [128] J. Penarrubia, S. E. Koposov, M. G. Walker, et al. Binary stars as probes of dark substructures in dwarf galaxies. 2010. [50](#)
- [129] X. Hernandez and William H. Lee. The tightening of wide binaries in dSph galaxies through dynamical friction as a test of the Dark Matter hypothesis. *MNRAS*, 387:1727, 2008. [50](#)
- [130] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Published by Princeton University Press, Princeton, NJ USA, 2008., 2008. ISBN 978-0-691-13026-2 (HB). [51](#)
- [131] L. A. Aguilar and S. D. M. White. Tidal interactions between spherical galaxies. *ApJ*, 295:374–387, 1985. [52](#), [126](#), [129](#), [130](#)
- [132] E.V. Pitjeva and N.P. Pitjev. Estimations of changes of the Sun’s mass and the gravitation constant from the modern observations of planets and spacecraft. *Solar System Research*, 46:78, 2011. [56](#), [58](#)
- [133] T. W. Murphy, Jr., E. G. Adelberger, J. B. R. Battat, et al. APOLLO: millimeter lunar laser ranging. *Classical and Quantum Gravity*, 29(18):184005, 2012. [56](#), [58](#), [68](#)

## REFERENCIAS

---

- [134] James G. Williams, Slava G. Turyshev, and Dale Boggs. Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29:184004, 2012. [56](#)
- [135] Lorenzo Iorio. Constraints on Galileon-induced precessions from solar system orbital motions. *JCAP*, 1207:001, 2012. [56](#)
- [136] Lorenzo Iorio. Effect of Sun and Planet-Bound Dark Matter on Planet and Satellite Dynamics in the Solar System. *JCAP*, 1005:018, 2010. [56](#)
- [137] H Saadat, S. N. Mousavi, M Saadat, et al. The Effect of Dark Matter on Solar System and Perihelion Precession of Earth Planet. *International Journal of Theoretical Physics*, 49:2506–2511, 2010.
- [138] P Jetzer and M Sereno. Limits on dark matter and cosmological constant from solar system dynamics. In E Pécontal, T Buchert, P di Stefano, and Y Copin, editors, *EAS Publications Series*, volume 36 of *EAS Publications Series*, pages 127–132, 2009.
- [139] J.-M. Frere, Fu-Sin Ling, and G. Vertongen. Bound on the Dark Matter Density in the Solar System from Planetary Motions. *Phys.Rev.*, D77:083005, 2008. [56](#)
- [140] Fabio Iocco, Miguel Pato, Gianfranco Bertone, and Philippe Jetzer. Dark Matter distribution in the Milky Way: microlensing and dynamical constraints. *JCAP*, 1111:029, 2011. [56](#), [68](#)
- [141] P. Salucci, F. Nesti, G. Gentile, and C.F. Martins. The dark matter density at the Sun’s location. *Astron.ApJ.*, 523:A83, 2010.
- [142] Riccardo Catena and Piero Ullio. A novel determination of the local dark matter density. *JCAP*, 1008:004, 2010.
- [143] Lawrence M. Widrow and John Dubinski. Equilibrium disk-bulge-halo models for the Milky Way and Andromeda galaxies. *ApJ.*, 631:838–855, 2005.
- [144] de Boer, W. and Weber, M. The Dark Matter Density in the Solar Neighborhood reconsidered. *JCAP*, 1104:002, 2011. [56](#), [68](#)
- [145] Michael Perryman. The Origin of the Solar System. 2011. [57](#)
- [146] A. Crida. Solar System formation. 2009. [57](#)
- [147] Volker Springel, Jie Wang, Mark Vogelsberger, et al. The Aquarius Project: the subhalos of galactic halos. *MNRAS*, 391:1685–1711, 2008. [58](#), [65](#)
- [148] J. D. Anderson and M. M. Nieto. Astrometric solar-system anomalies. In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, and M. H. Soffel, editors, *IAU Symposium*, volume 261, page 189, 2010. [59](#), [60](#)

## REFERENCIAS

---

- [149] Benny Rievers and Claus Lammerzahl. High precision thermal modeling of complex systems with application to the flyby and Pioneer anomaly. *Annalen Phys.*, 523:439–449, 2011. [59](#)
- [150] Lorenzo Iorio. An Empirical Explanation of the Anomalous Increases in the Astronomical Unit and the Lunar Eccentricity. *Astron.J.*, 142:68, 2011. [60](#)
- [151] J. N. Bahcall and R. M. Soneira. The distribution of stars to  $V = 16$ th magnitude near the north galactic pole - Normalization, clustering properties, and counts in various bands. *ApJ*, 246:122–135, 1981. [61](#)
- [152] D. W. Latham, P. Schechter, J. Tonry, et al. Detection of binaries with projected separations as large as 0.1 parsec. *ApJL*, 281:L41–L45, 1984. [61](#)
- [153] Jaiyul Yoo, Julio Chaname, and Andrew Gould. The end of the MACHO era: limits on halo dark matter from stellar halo wide binaries. *ApJ*, 601:311–318, 2004. [61](#)
- [154] X. Hernandez, M.A. Jimenez, and C. Allen. Wide binaries as a critical test of Classical Gravity. *Eur.Phys.J.*, C72:1884, 2012. [61](#)
- [155] Jorge Penarrubia, Sergey E. Koposov, Matthew G. Walker, et al. Binary stars as probes of dark substructures in dwarf galaxies. 2010. [61](#), [62](#), [63](#), [65](#)
- [156] Nickolas Moeckel and Matthew R. Bate. On the evolution of a star cluster and its multiple stellar systems following gas dispersal. *MNRAS*, 404:721, 2010. [61](#)
- [157] M.B.N. Kouwenhoven, S.P. Goodwin, Richard J. Parker, et al. The formation of very wide binaries during the star cluster dissolution phase. *MNRAS*, 404:1835, 2010. [61](#)
- [158] Justin I. Read, M.I. Wilkinson, N. Wyn Evans, et al. The importance of tides for the local group dwarf spheroidals. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 367:387–399, 2006. [61](#)
- [159] Matthew G. Walker, Mario Mateo, Edward W. Olszewski, et al. Velocity Dispersion Profiles of Seven Dwarf Spheroidal Galaxies. *ApJL*, 667:L53, 2007. [62](#)
- [160] Anatoly A. Klypin, Stefan Gottlober, and Andrey V. Kravtsov. Galaxies in N body simulations: Overcoming the overmerging problem. *ApJ*, 516:530–551, 1999. [67](#)
- [161] A. Klypin, S. Trujillo-Gomez, and J. Primack. Halos and galaxies in the standard cosmological model: results from the Bolshoi simulation. *ApJ*, 70:102, 2010. [67](#)
- [162] Silvia Garbari, Chao Liu, Justin I. Read, and George Lake. A new determination of the local dark matter density from the kinematics of K dwarfs. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 425:1445, 2012. [68](#), [69](#)
- [163] Emmanouil Papastergis, Ann M. Martin, Riccardo Giovanelli, and Martha P. Haynes. The velocity width function of galaxies from the 40shedding light on the cold dark matter overabundance problem. *ApJ*, 739:38, 2011. [69](#)

## REFERENCIAS

---

- [164] Anthony Brown, Hector Velazquez, and Luis Aguilar. Detection of satellite remnants in the Galactic halo with Gaia. 1. The Effect of the Galactic background, observational errors and sampling. *MNRAS*, 359:1287–1305, 2005. [69](#)
- [165] Oscar Adriani et al. An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5-100 GeV. *Nature*, 458:607–609, 2009. [71](#)
- [166] M. Ackermann et al. Measurement of separate cosmic-ray electron and positron spectra with the Fermi Large Area Telescope. *Phys.Rev.Lett.*, 108:011103, 2012. [71](#)
- [167] Sergei N. Gninenko. A resolution of puzzles from the LSND, KARMEN, and MiniBooNE experiments. *Phys.Rev.*, D83:015015, 2011. [73](#)
- [168] Evgeny Akhmedov and Thomas Schwetz. MiniBooNE and LSND data: Non-standard neutrino interactions in a (3+1) scheme versus (3+2) oscillations. *JHEP*, 1010:115, 2010.
- [169] Carlo Giunti and Marco Laveder. Short-Baseline Electron Neutrino Disappearance, Tritium Beta Decay and Neutrinoless Double-Beta Decay. *Phys.Rev.*, D82:053005, 2010. [73](#)
- [170] Michael Loewenstein and Alexander Kusenko. Dark Matter Search Using Chandra Observations of Willman 1, and a Spectral Feature Consistent with a Decay Line of a 5 keV Sterile Neutrino. *ApJ.*, 714: 652–662, 2010. [73](#)
- [171] Alessandro Melchiorri, Olga Mena, and Anze Slosar. An improved cosmological bound on the thermal axion mass. *Phys.Rev.*, D76:041303, 2007. [74](#)
- [172] O. Erken, P. Sikivie, H. Tam, and Q. Yang. Axion Dark Matter and Cosmological Parameters. *Phys.Rev.Lett.*, 108:061304, 2012. [74](#)
- [173] Steen Hannestad. Decay produced neutrino hot dark matter. *Phys.Rev.Lett.*, 80:4621–4624, 1998. [74](#)
- [174] Kazuhide Ichikawa, Masahiro Kawasaki, Kazunori Nakayama, et al. Increasing effective number of neutrinos by decaying particles. *JCAP*, 0705:008, 2007.
- [175] Willy Fischler and Joel Meyers. Dark Radiation Emerging After Big Bang Nucleosynthesis? *Phys.Rev.*, D83:063520, 2011. [74](#)
- [176] Lotty Ackerman, Matthew R. Buckley, Sean M. Carroll, and Marc Kamionkowski. Dark Matter and Dark Radiation. *Phys.Rev.*, D79:023519, 2009. [74](#)
- [177] Robert E. Lopez, Scott Dodelson, Robert J. Scherrer, and Michael S. Turner. Probing unstable massive neutrinos with current cosmic microwave background observations. *Phys.Rev.Lett.*, 81:3075–3078, 1998. [74](#)

## REFERENCIAS

---

- [178] S.A. Bonometto and E. Pierpaoli. Mixed models with  $n > 1$  and large scale structure constraints. *New Astron.*, 1998.
- [179] Manoj Kaplinghat and Michael S. Turner. Precision cosmology and the density of baryons in the universe. *Phys.Rev.Lett.*, 86:385, 2001.
- [180] Hooman Davoudiasl. Constraining Unparticle Physics with Cosmology and Astrophysics. *Phys.Rev.Lett.*, 99:141301, 2007.
- [181] Jorge Mastache and Axel de la Macorra. Extra relativistic degrees of freedom without extra particles using Planck data. 2013. [74](#)
- [182] E. Komatsu, J. Dunkley, M. R. Nolta, et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation. 180:330–376, 2009. [75](#)
- [183] Signe Riemer-Sorensen, David Parkinson, and Tamara M. Davis. What is half a neutrino? Reviewing cosmological constraints on neutrinos and dark radiation. 2013. [75](#), [76](#)
- [184] M.C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, and Jordi Salvado. Robust Cosmological Bounds on Neutrinos and their Combination with Oscillation Results. *JHEP*, 1008:117, 2010. [75](#), [81](#)
- [185] Beth A. Reid, Licia Verde, Raul Jimenez, and Olga Mena. Robust Neutrino Constraints by Combining Low Redshift Observations with the CMB. *JCAP*, 1001:003, 2010. [75](#), [78](#), [79](#), [80](#), [82](#)
- [186] Jan Hamann, Steen Hannestad, Georg G. Raffelt, et al. Cosmology seeking friendship with sterile neutrinos. *Phys.Rev.Lett.*, 105:181301, 2010. [75](#), [81](#)
- [187] Antony Lewis and Sarah Bridle. Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach. *Phys.Rev.*, D66:103511, 2002. [77](#)
- [188] Jan Hamann, S. Hannestad, G.G. Raffelt, and Yvonne Y.Y. Wong. Observational bounds on the cosmic radiation density. *JCAP*, 0708:021, 2007. [77](#), [79](#)
- [189] E. Komatsu et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *ApJ.Suppl.*, 192:18, 2011. [79](#), [81](#)
- [190] Adam G. Riess, Lucas Macri, Stefano Casertano, et al. A Redetermination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope from a Differential Distance Ladder. *ApJ.*, 699:539–563, 2009. [79](#)
- [191] Will J. Percival et al. Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 401:2148–2168, 2010. [79](#)
- [192] Beth A. Reid, Will J. Percival, Daniel J. Eisenstein, et al. Cosmological Constraints from the Clustering of the Digital Sky Survey DR7 Luminous Red Galaxies. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 404:60–85, 2010. [79](#)

## REFERENCIAS

---

- [193] M. Kowalski et al. Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Data-sets. *ApJ.*, 686:749–778, 2008. [79](#)
- [194] C.L. Reichardt, P.A.R. Ade, J.J. Bock, et al. High resolution CMB power spectrum from the complete ACBAR data set. *ApJ.*, 694:1200–1219, 2009. [79](#)
- [195] Francesco de Bernardis, Alessandro Melchiorri, Licia Verde, and Raul Jimenez. The Cosmic Neutrino Background and the Age of the Universe. *JCAP*, 0803:020, 2008. [80](#)
- [196] Elena Giusarma, Martina Corsi, Maria Archidiacono, et al. Constraints on massive sterile neutrino species from current and future cosmological data. *Phys.Rev.*, D83:115023, 2011. [81](#)
- [197] Molly E.C. Swanson, Will J. Percival, and Ofer Lahav. Neutrino Masses from Clustering of Red and Blue Galaxies: A Test of Astrophysical Uncertainties. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 409:1100–1112, 2010. [82](#)
- [198] Carmelita Carbone, Licia Verde, Yun Wang, and Andrea Cimatti. Neutrino constraints from future nearly all-sky spectroscopic galaxy surveys. *JCAP*, 1103:030, 2011. [82](#)
- [199] Farhan Feroz, Kyle Cranmer, Mike Hobson, et al. Challenges of Profile Likelihood Evaluation in Multi-Dimensional SUSY Scans. *JHEP*, 1106:042, 2011. [83](#)
- [200] Jan Hamann. Evidence for extra radiation? Profile likelihood versus Bayesian posterior. *JCAP*, 1203:021, 2012. [83](#)
- [201] R. Keisler, C.L. Reichardt, K.A. Aird, et al. A Measurement of the Damping Tail of the Cosmic Microwave Background Power Spectrum with the South Pole Telescope. *ApJ.*, 743:28, 2011. [83](#)
- [202] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. 2013. [84](#)
- [203] P.J.E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993. [91](#)
- [204] S. Dodelson. *Modern cosmology*. Amsterdam (Netherlands): Academic Press, 2003. [91](#)
- [205] Max Tegmark et al. Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies. *Phys.Rev.*, D74:123507, 2006. [94](#)
- [206] Marco Masi. On compressive radial tidal forces. *Am.J.Phys.*, 75:116–124, 2007. [118](#)