

DISTRIBUTIONS DE MULTIPLICITE

M. LE BELLAC

Physique Théorique
Université de Nice

N TH 73/8

Octobre 1973

Distributions de multiplicité.

M. LE BELLAC

Physique Théorique
Université de Nice + x

COURS DONNE A L'ECOLE DE GIF SUR YVETTE

(24 Septembre - 6 Octobre 1973)

Résumé

On examine les propriétés suivantes
des distributions de multiplicité :

- 1) lois empiriques pour les moments
et la distribution de multiplicité;
- 2) modèles à deux composantes;
- 3) invariance d'échelle KNO;
- 4) fonction génératrice et applications:
modèles multipériphérique, clustering...;
- 5) corrélations entre particules neutres
et particules chargées.

+ Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S.

x Postal Address : Physique Théorique, I.M.S.P., Parc Valrose, 06034 Nice Cedex, France

I. DEFINITIONS.

Dans une collision :

$$a + b \rightarrow n \text{ particules finales}$$

soit σ_n la section efficace de production, et σ_{in} la section efficace totale inélastique :

$$\sigma_{in} = \sum_n \sigma_n \text{ (} \sigma \text{ élastique exclus)}$$

on définit la probabilité : $P_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{in}}$ (1)

$P_n \geq 0$, $\sum P_n = 1$. C'est donc bien une distribution de probabilité = distribution de multiplicité = DM (1).

(On pourrait parfaitement inclure la section élastique.

La tradition veut que l'on travaille en général avec σ_{in} plutôt que σ_T . Si le Muellerisme avec un Poméron factorisable était une théorie correcte, il faudrait utiliser σ_T).

En pratique, il est beaucoup plus aisé d'observer la section efficace topologique, i.e. la section efficace de production de n_c particules chargées + un nombre quelconque de neutres :

$$\sigma_{n_c} : a + b \rightarrow n_c \text{ chargés} + X \text{ neutres}$$

On étudiera donc $P(n_c)$ et non la distribution de multiplicité totale $P(n)$. Il pourrait arriver que des structures apparentes dans $P(n)$ disparaissent dans $P(n_c)$.

n_c varie de 2 en 2; il est parfois commode d'utiliser la variable n_- = nombre de particules négatives, qui varie de 1 en 1. Naturellement :

$$n_- = \frac{n_c - Q}{2}, \quad Q = Q_a + Q_b = \text{charge initiale.}$$

On peut aussi étudier la distribution de multiplicité pour une configuration donnée, par exemple :

- $P(n | \vec{p}) : a + b \rightarrow c(\vec{p}) + (n - 1) \text{ particules} = \text{distribution de multiplicité associée à l'impulsion } \vec{p};$

- multiplicité dans la partie d'annihilation :

$$\begin{aligned}\bar{p} p &\rightarrow n \text{ pions} : P(n | \text{ann.}) \\ K^- p &\rightarrow \Lambda + n \text{ pions} : P(n | \text{ann.})\end{aligned}$$

- multiplicité d'un type donné de particules :

$$p p \rightarrow n (\Omega^-) + X : P(n | \Omega^-)$$

- multiplicité neutre à nombre de chargés fixé :

$$p p \rightarrow n_c \text{ chargés} + n_0 \text{ neutres} : P(n_0 | n_c)$$

etc... Dans plusieurs cas on ne pourra observer expérimentalement que certains moments de cette DM, en intégrant des sections efficaces semi-inclusives.

Par la suite, sauf avis contraire DM = DM chargée dans une collision pp (la mieux connue expérimentalement) ⁽²⁾.

Problèmes expérimentaux.

- haute multiplicité : les expériences de haute énergie (50 à 400 GeV) ont une statistique telle que P_n n'est pas mesurée au-dessous de $\sim 10^{-3}$. On perd donc de l'information sur la queue de la DM. A énergie de PS, certaines expériences descendent à $P_n \sim 10^{-4}$.

- basse multiplicité : problème du 2 branches (pertes de scanning, soustraction de l'élastique). Ceci se traduit par des fluctuations dans les données expérimentales.

Problème théorique : Dans la gamme d'énergie 50-400 GeV, $\frac{d\sigma}{dy}$ et peut-être $\frac{d^2\sigma}{dy_1 dy_2}$ ont un comportement assez simple (plateau, scaling). Mais P_n dépend de toutes les corrélations ($C_1, C_2, \dots, C_k \dots$) ou plus exactement de leur intégrale $= f_k$. Il n'y a aucune raison théorique de prévoir un comportement simple de P_n , et les arguments asymptotiques (type KNO par exemple) n'ont aucune raison d'être valides dans cette gamme d'énergie.

Dans ce cours, je vais

1° étudier le comportement des données,

2° donner un certain nombre d'arguments théoriques supposés valides quand $s \rightarrow \infty$ et en déduire le comportement de P_n .

Il n'y a pas obligatoirement de relation entre 1° et 2°!

Moments: Comme on a une distribution de probabilité, il est utile d'étudier les moments. Selon le problème étudié, un type particulier de moment peut être ^{plus} utile qu'un autre bien que tous les types de moments soient trivialement reliés entre eux.

Moments ordinaires :

$$\mu'_k = \overline{n^k} = \sum n^k P(n) \quad (2)$$

$$\text{On en déduit : } c_k = \frac{\overline{n^k} - \overline{n}^k}{n} \quad (3)$$

les c_k sont relativement peu sensibles à la queue de la DM. On utilise aussi les moments centraux

$$\mu_k = \overline{(n - \bar{n})^k} \quad (4)$$

les moments binomiaux (3)

$$F_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\sigma_{in}} \int \frac{d\sigma}{d^3p_1\dots d^3p_k} d^3p_1\dots d^3p_k \quad (5)$$

(où $d\sigma/d^3p_1\dots d^3p_k$ est la section efficace inclusive de production de n particules),

les moments de Mueller f_k (intégrales des corrélations), et parfois les cumulants κ_k !

A l'ordre 1 pas de problème, un seul moment : $\bar{n}$!

A l'ordre 2 on considère souvent la dispersion D :

$$D^2 = \overline{(n - \bar{n})^2} = \mu_2 \quad (6)$$

(mesure la largeur de la courbe) et le moment de Mueller :

$$f_2 = \overline{n(n-1)} - \bar{n}^2 = D^2 - \bar{n} = \int C_2 d^3p_1 d^3p_2 \quad (7)$$

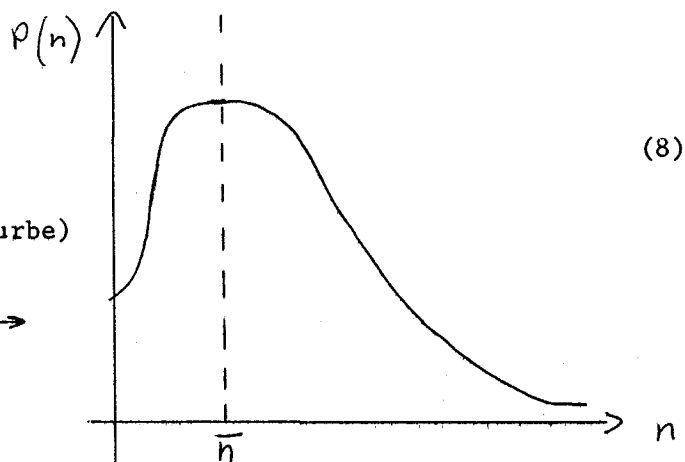
A l'ordre 3 l'asymétrie

$$\gamma = \frac{\mu_3}{D^3} = \frac{(n - \bar{n})^3}{D^3}$$

(mesure l'asymétrie de la courbe)

$P(n)$ avec $\gamma > 0 \rightarrow$

le moment de Mueller f_3



$$f_3 = \gamma D^3 - 3 D^2 + 2\bar{n} = \int C_3 d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \quad (9)$$

Pour se familiariser un peu avec moments, appliquons les définitions à la distribution de Poisson :

$$P_n = \frac{e^{-\bar{n}} (\bar{n})^n}{n!} \quad (10)$$

$$F_k = \bar{n}^k \quad \text{ou } f_k = 0 \text{ d'où } D^2 = \bar{n} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

$$\text{donc } \frac{D}{\bar{n}} \rightarrow 0 \text{ comme } \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \text{ et } \gamma \rightarrow 0 \text{ comme } \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

En plus on peut introduire la médiane et le mode :

$$\text{médiane } M_d : \sum_{n < M_d} P_n = \sum_{n > M_d} P_n$$

$$\text{mode } M_0 : \text{valeur du pic : } \left. \frac{d}{dn} P_n \right|_{n = M_0} = 0 \quad (11)$$

Le mode est une caractéristique intéressante de la DM, dans la mesure où il dépend seulement des sections efficaces topologiques les plus grandes, et non de la queue de la distribution.

II. DONNEES EMPIRIQUES.

Moment d'ordre 1.

Tout physicien de haute énergie doit savoir que $\ell_{ns} = s^{0.3}$, et $\bar{n}_c(s)$ dans pp est assez bien représenté soit par :

$$\bar{n}_c(s) = 1.5 s^{0.3} \quad (12)$$

$$\text{soit par :} \quad \bar{n}_c(s) = A \ell_{ns} + B \quad (13)$$

Le coefficient A de ℓ_{ns} dans (13) varie suivant le domaine d'énergie utilisé. Dans la région 50 - 400 GeV on trouve (figure 1)

$$A \simeq 1.8 \quad B \simeq -2.9$$

Cependant ce fit surestime la multiplicité à basse énergie car la courbe $\bar{n}_c(s)$ en fonction de ℓ_{ns} est concave vers le haut.

Il est aussi intéressant de remarquer que A est donné par la section efficace inclusive à $y = 0$:

$$A = \frac{1}{\sigma_{in}} \left. \frac{d\sigma}{dy} \right|_{y=0} \quad (14)$$

En fait la valeur de A déterminée par (14) est systématiquement plus basse que celle donnée par (13); par exemple à 205 GeV on trouve $A \simeq 1.5 \pm 0.1$.

Pour tenir compte d'effets non asymptotiques, on peut introduire des trajectoires secondaires dans le formalisme de Mueller-Regge (cf. cours de P.Salin). L'intégration en y sur les régions de fragmentation donne une constante + des termes d'ordre $1/\sqrt{s}$. Dans la région de pionisation :

$$\frac{d\sigma}{dy} = A + C' s^{1/2(\alpha_R - 1)} \text{ch} [(\alpha_R - 1) y] \quad (15)$$

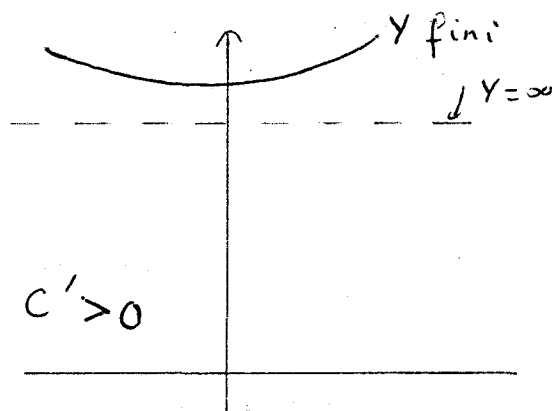
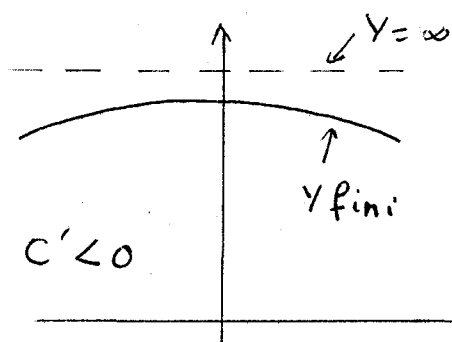
où $\alpha_R \simeq \frac{1}{2}$ est une trajectoire secondaire. Pour fixer les idées je vais prendre $\alpha_R = \frac{1}{2}$ et intégrer (15) de $-(\frac{Y}{2} - \lambda)$ à $(\frac{Y}{2} - \lambda)$ où $Y = \ell_{ns}$ et $\lambda \simeq 2$ est la longueur de corrélation :

$$\int_{-(\frac{Y}{2} - \lambda)}^{Y/2 - \lambda} \frac{d\sigma}{dy} dy = A (Y - 2\lambda) + 2 C' e^{-\lambda/2} - \frac{2C'}{\sqrt{s}} e^{\lambda/2}$$

et finalement :

$$\bar{n}(s) = A \ln s + B + \frac{C}{\sqrt{s}} \quad (16)$$

Expérimentalement $C' < 0$ (approche au scaling par en-dessous = "plateau" concave vers le bas)



Cette analyse de Mueller-Regge suggère de paramétriser $\bar{n}_c(s)$ par (16) et d'après Antinucci et al ⁽⁴⁾ :

$$A = 1.88$$

$$B = -3.8$$

$$C = 6.4$$

Mais ceci ne doit pas être pris très au sérieux à cause des effets de seuil. Dans le langage de Mueller-Regge ce genre d'effets pourrait être représenté par une singularité d'intercept zéro et il faudrait rajouter des termes en $1/s$... ⁽⁵⁾.

Antinucci et al ont aussi analysé les multiplicités pour les différents types de particules : π^+ , π^- , K^+ , K^- , p , $\bar{p}$... Les effets de seuil pour les K et surtout les anti- p sont manifestement très importants (figure 2).

Enfin on peut examiner le comportement de $\bar{n}_c(s)$ dans des réactions autres que pp . Il semble que si l'on porte $\bar{n}_c$ en fonction de $\hat{Q}$ (figure 4) :

$$\hat{Q} = \sqrt{s} - (m_a + m_b)$$

tous les points se placent plus ou moins sur une courbe universelle (6). Toutefois, la multiplicité moyenne des particules positives est plus grande que celle des particules négatives :

$$\bar{n}_c(\pi^+p) > \bar{n}_c(\pi^-p) ; \bar{n}_c(K^+p) > \bar{n}_c(K^-p).$$

Exception : $\bar{n}_c(\bar{p}p) > \bar{n}_c(pp)$

L'effet provient essentiellement de la section efficace à deux branches (figure 5)

$$\sigma_2(\pi^+p) < \sigma_2(\pi^-p) ; \sigma_2(K^+p) < \sigma_2(K^-p)$$

Moments d'ordre 2.

Ici on a le choix entre D , c_2 et f_2 . Voyons d'abord le comportement de D , pour lequel on a la fameuse loi de Wroblewski (figure 6).

$$\frac{\bar{n}_c - 1}{D_c} \simeq 1.7 \simeq \sqrt{3} \quad (17)$$

On a souvent prétendu que $\frac{\bar{n}_c}{D_c} = 2$ pour $E_L \gg 50$ GeV.

Il est clair que $\frac{\bar{n}_c}{D_c}$ décroît de 10 à 50 GeV, mais même au-dessus de 50 GeV on observe également que ce rapport a tendance à décroître (table 1). En particulier l'expérience à 400 GeV est nettement en faveur de la loi de Wroblewski (17). La situation est assez confuse en ce qui concerne les autres réactions : $\bar{n}_c/D_c$ semble décroître vers 2 pour π^-p et K^-p , tandis que pour π^+p et K^+p , $\bar{n}_c/D_c$ décroît également avec $\bar{n}_c$, mais reste sensiblement différent de 2 même à 50 GeV ($\sim 2.3 - 2.4$) (figure 7). C'est encore un effet de σ_2 , car la DM est plus étroite pour π^+p et K^+p et donc $\bar{n}_c/D_c$ est plus grand (figure 5). L'effet observé serait donc trivial si l'on pouvait expliquer de façon simple que $\sigma_2(\pi^-p) > \sigma_2(\pi^+p)$ par 1.5 mb. Dans les collisions $\bar{p}p$, $\bar{n}_c/D_c$ atteint très tôt (dès 7 GeV) une valeur limite de 2, mais croît vers cette valeur limite.

Si $\bar{n}_c/D_c = 2$ on a également $c_2 = 1.25$ indépendamment de s . Ceci est un bon argument pour le scaling KNO, mais si Wroblewski a raison, c_2 doit croître lentement vers une valeur asymptotique de 1.33.

Le moment de Mueller f_2 varie rapidement en fonction de l'énergie; $f_2 < 0$ à basse énergie et $f_2 > 0$ à haute énergie. Ceci veut dire que l'on n'a sûrement pas une distribution de Poisson pour laquelle $f_2 = 0$. En plus, il semble que la courbe f_2^c en fonction de $\hat{Q}$ soit plus ou moins identique pour toutes les réactions (figure 8).

Il est traditionnel de porter f_2^- , et non f_2^c , en fonction de $\bar{n}_-$. La relation entre f_2^- et f_2^c est :

$$f_2^c = -Q + 2\bar{n}_- + 4f_2^- \quad (18)$$

Notez que $f_2^- = 0$ (distribution de Poisson pour les π^-) entraîne $f_2^c \sim n_c$ asymptotiquement. Si au contraire $f_2^c = 0$ (pas de corrélation entre les paires $\pi^+ \pi^-$) on trouve que $f_2^- \simeq -\frac{1}{2}\bar{n}_-$. En tout cas f_2^- est $\neq 0$ (sauf à 50 GeV) et la distribution de multiplicité en π^- est plus étroite que Poisson si $E_L < 50$ GeV, plus large que Poisson si $E_L > 50$ GeV.

Un point intéressant est que f_2^- est très négatif dans les réactions d'annihilation ($\bar{p}p$) : la DM est donc très étroite et par exemple pour $\bar{n}_- \simeq 2$, on a $f_2^- \simeq -1.5$ et une dispersion D_- qui vaut $\simeq 0.7$.

Troisième moment.

L'asymétrie $\gamma = M_3/D^3$ obéit également à une loi simple ⁽¹⁾ (figure 9)

$$\gamma \simeq \frac{2}{3} \quad E_L \geq 3 \text{ GeV} \quad (19)$$

Tenant compte de la première loi de Wroblewski on peut calculer f_3^- :

$$f_3^- = 0.128 \bar{n}_-^3 - 0.808 \bar{n}_-^2 + 1.096 \bar{n}_- - 0.234$$

f_3^- serait donc asymptotiquement positif, après avoir déjà changé de signe une première fois aux environs de 50 GeV (figure 10). L'expérience à 405 GeV semble bien confirmer ce changement de signe, ce qui est un succès remarquable, bien qu'un peu tardif, du modèle de nova. Notez enfin que f_3^- est assez sensible à la queue de la distribution de multiplicité. En modifiant P_n de façon raisonnable pour $n > n_{\max}(\text{exp})$, on arrive facilement à modifier f_3^- de 0.2 - 0.3 (erreur exp. à 200 GeV = 0.3).

Formules empiriques.

Après avoir découvert les lois pour les moments, on va essayer de trouver une formule pour la DM elle-même. La première idée, celle de la distribution de Poisson en $n_c/2$ ou n_c ne marche pas, puisque f_2 est $\neq 0$. Il ne faut surtout pas rester sur cet échec, et chercher une variable n' telle que $f'_2 = 0$. Il est clair que la distribution de probabilité de n' aura une meilleure chance de ressembler à Poisson. On va simplement faire un changement d'échelle :

$$n' = \lambda n$$

évidemment :

$$\bar{n}' = \lambda \bar{n} \quad D'^2 = \lambda^2 D^2$$

On veut que $f'_2 = 0$, ou de façon équivalente $D'^2 = n'$. Il suffit de choisir :

$$\lambda = \frac{\bar{n}}{D^2}$$

$$\bar{n}' = \frac{\bar{n}}{D^2} \bar{n} = \frac{\bar{n}^2}{D^2} \quad D'^2 = \frac{\bar{n}^2}{D^4} D^2 = \frac{\bar{n}^2}{D^2}$$

Avec un peu de chance, la DM de n' ne devrait pas être trop différente de Poisson; évidemment n' n'est pas entier, mais on sait écrire $n'! = \Gamma(n' + 1)$, donc

$$P(n') = \frac{e^{-\bar{n}'} (\bar{n}')^{n'}}{\Gamma(n' + 1)}$$

transformant en n (ou plutôt n_c) :

$$P(n_c) = \frac{2 \bar{n}_c}{D_c^2} \frac{e^{-\bar{n}_c^2/D_c^2} (\bar{n}_c^2/D_c^2)^{n_c} \bar{n}_c/D_c^2}{\Gamma\left(\frac{n_c \bar{n}_c}{D_c^2} + 1\right)} \quad (20)$$

Le facteur $\bar{n}/D^2$ vient de $dn' = (\bar{n}/D^2) dn$, et le facteur 2 du fait que n_c va de 2 en 2. $P(n_c)$ est la distribution de Lévy ⁽⁷⁾; en fait Lévy considère seulement le cas où $\bar{n}_c^2/D_c^2 = 4$; posant $z = n_c/\bar{n}_c$, on trouve alors :

$$P(n_c) = \frac{8}{\bar{n}_c} \frac{e^{-4} (4)^{4z}}{\Gamma(4z + 1)} \quad (21)$$

Interprétation physique : on peut réécrire $n' = \lambda n$ sous la forme : $\frac{n'}{4} = \frac{n}{\bar{n}}$. La formule de Lévy se comprend en admettant que l'on forme n' clusters, avec $\bar{n}' = 4$, et que ces clusters se désintègrent ensuite en un nombre moyen p de particules, où p croît avec l'énergie. Autre remarque : $\bar{n}_c P(n_c)$ ne dépend que de la variable $z = n_c/\bar{n}_c$. C'est un cas particulier du scaling KNO, que nous allons voir par la suite. La formule que Lévy donne est en bon accord avec les résultats expérimentaux pour $E_L > 50$ GeV. Toutefois, pour des énergies inférieures, il faut garder le rapport $\bar{n}_c/D_c$ expérimental pour obtenir un fit acceptable.

En résumé, si l'on se donne $\bar{n}$ et D , on peut trouver une variable $n' = (\bar{n}/D^2)n$ dont la distribution est Poisson. A chaque énergie, on doit donc se donner deux paramètres. La formule empirique de Czyzewski-Rybicki ⁽⁸⁾ est une généralisation de celle de Lévy. Elle s'écrit :

$$P_{CR}(n_c) = \frac{2d}{D} e^{-d^2} \frac{d}{\Gamma(d \frac{n_c}{D_c} - d \frac{\bar{n}_c}{D_c} + d^2 + 1)} \quad (22)$$

Elle dépend d'un paramètre supplémentaire $d(d \approx 1.7)$ et se réduit à la formule de Lévy pour $d = \bar{n}_c/D_c$. Cette formule est une excellente représentation des résultats expérimentaux. Cependant en portant $R = P_{CR}(n_c)/P_{exp}(n_c)$ en fonction de n_c , Wroblewski constate des écarts systématiques (figure 11). De même la position du mode n'est pas correctement décrite si $d = Cte$, et il est nécessaire d'admettre que d varie avec l'énergie. ⁽¹⁾

III. MODELE A DEUX COMPOSANTES.

Je passe maintenant aux modèles théoriques pour la DM, en commençant par le modèle à 2 composantes. Dans ce modèle on admet que chaque événement est, soit du type diffraction (D), soit du type pionisation (π), négligeant ainsi toute interférence entre les deux phénomènes.

Première version du modèle à 2 composantes.

Pour des raisons pédagogiques, je discute d'abord l'ancienne version (Wilson) du modèle à 2 composantes, où l'on suppose que les sections efficaces diffractives sont indépendantes de l'énergie, i.e. $\sigma_{Dn}(s) = \sigma_{Dn}$. Dans ce cas évidemment :

$$\sigma_D = \text{Cte} \quad \bar{n}_D = \text{Cte} \quad f_{D2} = \text{Cte} \quad \text{etc...} \quad (23)$$

La deuxième composante, celle de pionisation (π) est supposée vérifier SRC i.e. :

$$\bar{n}_\pi \propto \ln s \quad f_{\pi k} = \alpha_k \ln s + \beta_k \quad \text{etc...} \quad (24)$$

Par souci de simplification (mais cela n'est pas du tout obligatoire) on prend souvent une distribution de Poisson pour les particules négatives :

$$f_{\pi k}^- = 0 \quad k \gg 2$$

on a donc simplement :

$$\sigma_n = \sigma_{Dn} + \sigma_{\pi n} = \sigma_{Dn} + \sigma_\pi \frac{e^{-\bar{n}_\pi} (\bar{n}_\pi)^n}{n!} \quad (n = n_-) \quad (25)$$

C'est très facile de calculer les moments :

$$\bar{n} = \alpha \bar{n}_D + (1 - \alpha) \bar{n}_\pi \quad (\alpha = \sigma_D / \sigma) \quad (26)$$

$$f_2 = \alpha f_{D2} + (1 - \alpha) f_{\pi 2} + \alpha (1 - \alpha) (\bar{n}_\pi - \bar{n}_D)^2 \quad (27)$$

On voit donc qu'asymptotiquement, puisque $\bar{n}_D = \text{Cte}$, $\bar{n}_\pi \sim \ln s$:

$$f_2 \sim \alpha(1-\alpha) \bar{n}^2_{\pi} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \bar{n}^2 \quad (28)$$

et f_2 est une fonction quadratique de $\bar{n}$. De même :

$$f_3 \sim \frac{\alpha(2\alpha-1)}{(1-\alpha)^2} \bar{n}^3 + 0(\bar{n}^2) \quad (29)$$

et en général $f_k \sim \bar{n}^k = \alpha_k \gamma^k$.

De nombreux fits ont été faits avec ce modèle l'année dernière. Les résultats de ces fits sont en accord qualitatif avec pour résultat $\sigma_D \approx 7$ mb, ou $\alpha \approx 0.22$. Le fit de Fiałkowski et Miettinen ⁽⁹⁾ par exemple est correct pour f_2^- (figure 12); cependant la distribution de multiplicité elle-même n'est pas trop bien reproduite, et f_3^- est trop négatif : dans ce modèle $f_3^- \approx -0.20 \bar{n}^3$, et il ne semble pas que ce soit la tendance des résultats expérimentaux (figure 13).

Modification du modèle.

Etant donnés les résultats de NAL et des ISR sur le spectre du proton, on est amené à tenir compte d'une dépendance possible en énergie de la diffraction (cf. cours de Berger). Je vais admettre que l'on peut paramétriser le spectre du proton pour $x > 0.9$ par une formule de triple-Regge (cours de Salin), avec un terme PPM et un terme PPP que je suppose couplé à $t = 0$ (supposer PPP découplé à $t = 0$ ne change rien à ce que je vais dire) ⁽¹⁰⁾. Je vais donc prendre :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt dM^2} = & g_{PPP}(t) s^{2\alpha_P(t)-2} (M^2)^{1-2\alpha_P(t)} \\ & + g_{PPM}(t) s^{2\alpha_P(t)-2} (M^2)^{1/2-2\alpha_P(t)} \end{aligned} \quad (30)$$

Pour obtenir $\frac{d\sigma}{dM^2}$ j'intègre sur t en négligeant l'effet de $t_{\min}$ et en paramétrisant :

$$g_{PPP} = A e^{\beta t} \quad g_{PPM} = C e^{D t} \quad (31)$$

$$\frac{d\sigma}{dM^2} = \frac{A M^{-2}}{(\beta + 2\alpha'_p) \ell_{ns}(s/M^2)} + \frac{C M^{-3}}{D + 2\alpha'_p \ell_n(s/M^2)}$$

Cette formule est supposée valable pour $M_0^2 \leq M^2 \leq rs$, avec $r \simeq 0.1$. En fait on peut se passer du cut-off arbitraire r , pourvu que l'on tienne compte de l'effet de $t_{\min}$. Pour simplifier la présentation, je vais supposer que

$$2 \alpha'_p \ell n(s/M^2) \ll B, D,$$

admettre que la multiplicité d'une collision Pomeron-proton est logarithmique :

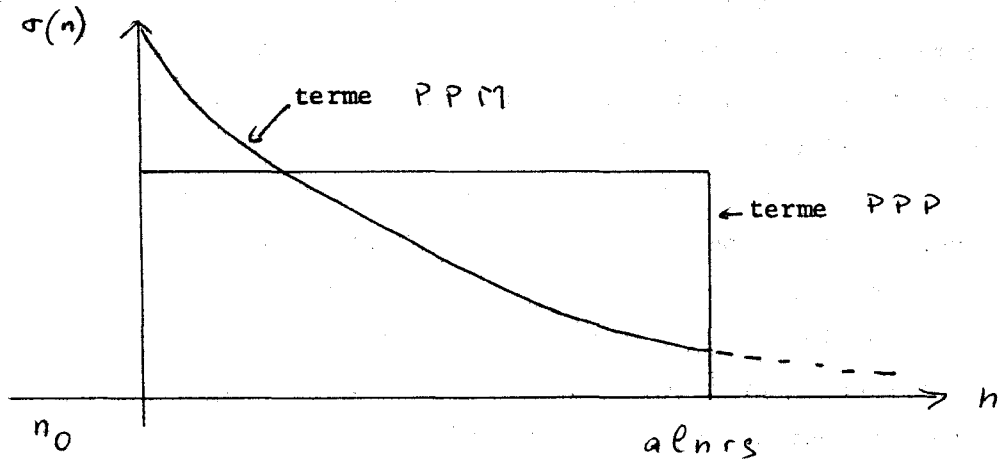
$$\bar{n}(M^2) = a \ell n M^2 \quad (32)$$

et identifier n et $\bar{n}$. On peut évidemment se passer de ces hypothèses simplificatrices dans un calcul numérique. Je fais maintenant le changement de variable

$$M^2 = e^{-n/a}$$

pour trouver :

$$\sigma(n) = \frac{A}{a B} + \frac{C e^{-n/2a}}{a D} \quad n_0 \leq n \leq a \ell n(rs) \quad (33)$$



On voit donc que le terme PPM correspond à une section efficace indépendante de l'énergie, tandis que le terme PPP dépend de l'énergie. La multiplicité moyenne associée à ce terme est clairement $\sim \frac{1}{2} a \ell n s$, et croît donc de façon logarithmique ⁽¹⁰⁾. Il faut remarquer que le facteur $1/2$ provient de l'approximation $\alpha'_p = 0$: lorsque $2 \alpha'_p \ell n s \gg B$, on retrouve une multiplicité

en $a \ln s$, sans facteur $1/2$. Cependant, personne ne croit que le modèle est encore valide pour une telle énergie.

Le terme PPP correspond à une section efficace croissante en $\ln s$. Sur les figures 12 et 13 je montre les prédictions d'un calcul de Roy et Roberts ⁽¹⁰⁾ avec la paramétrisation suivante :

$$A = 5.6 \qquad B = 5.0 \qquad C = 2.0 \qquad D = 2.0$$

(unités GeV et mb). L'augmentation de la section efficace due au terme PPP est de 2.6 mb entre 200 et 1500 GeV. D'autre part j'ai supposé que la distribution $n(M^2)$ était une distribution de Poisson de valeur moyenne $a \ln M^2$, et j'ai également pris une distribution de Poisson (comme dans (25)) pour la partie pionisation (pas de corrélations entre π^- dans la partie pionisation).

Le fait que $\bar{n}_D$ est maintenant logarithmique réduit le terme à "longue portée" $\propto (1 - \alpha) (\bar{n}_\pi - \bar{n}_D)^2$ dans f_2^- (eq.27). Si l'on prend une distribution de Poisson pour les π^- il est évident sur la figure 12 que le f_2^- théorique est trop faible : ceci confirme l'analyse faite par Berger et Fox ⁽¹¹⁾ pour les corrélations, analyse qui conclut à l'existence de corrélations dans la composante de pionisation.

Un bon point pour la nouvelle version du modèle à 2 composantes est qu'il ne prédit plus une distribution bimodale aux énergies d'ISR, prédiction qui semblait peu plausible étant donné les résultats des rayons cosmiques.

Enfin il faut remarquer que dans l'ancienne version du modèle on se donnait arbitrairement la composante de pionisation (en général comme une distribution de Poisson) et on en déduisait la diffraction. Dans la nouvelle version on peut calculer la diffraction à partir des données expérimentales : spectre du proton et désintégration de la boule de feu associée (en particulier $\bar{n}(M^2)$).

IV. SCALING KNO.

Je passe maintenant à un autre type de formule théorique, celle de Koba-Nielsen et Olesen (KNO) ⁽¹²⁾. La formule de KNO peut être démontrée à partir d'arguments asymptotiques basés sur le scaling de Feynman : on a montré que les moments binomiaux, ordinaires, de Mueller etc... se comportent comme $Y^k \sim \bar{n}^{-k}$

$$F_k \sim f_k \sim \mu'_k \sim \mu_k \sim Y^k$$

Naturellement ces moments ont un comportement complètement différent à énergie finie. On peut maintenant se poser la question : y a-t-il des moments d'ordre k qui se comportent comme $c_k \bar{n}^{-k}$ aux énergies actuellement accessibles? La réponse est la suivante : pour $E_L \gg 50$ GeV, et avec une précision de $\sim 10\%$, on a effectivement :

$$\bar{n}^k = \mu'_k = c_k \bar{n}^{-k} \quad (34)$$

Pour une raison que personne ne peut justifier à l'heure actuelle, les moments ordinaires ont apparemment le comportement asymptotique prédit par le scaling de Feynman. Une fois ceci établi expérimentalement, on peut démontrer la formule de KNO. En effet on peut faire un changement d'échelle

$$\hat{n} = n/\bar{n}$$

et il est clair que les moments $\hat{\mu}'$ de la distribution de probabilité $\Psi(\hat{n})$ seront donnés simplement par :

$$\hat{\mu}'_k = c_k$$

Comme ces moments sont indépendants de l'énergie (ou de $\bar{n}$), cela veut dire que $\Psi(\hat{n})$ est elle-même indépendante de $\bar{n}$ (à condition que $\Psi(\hat{n})$ soit déterminée par ses moments!). Revenant à $P(n)$ on a donc :

$$P(n) = \frac{1}{\bar{n}} \Psi(\hat{n}) = \frac{1}{\bar{n}} \Psi\left(\frac{n}{\bar{n}}\right) \quad (35)$$

où le facteur $\bar{n}$ provient du changement de variable $d\hat{n} = \frac{1}{\bar{n}} dn$.
 (Attention à un facteur 2 supplémentaire si on utilise n_c !)
 La fonction ψ doit être normalisée à 1 et son premier moment doit aussi être égal à 1 :

$$\begin{aligned} \int \psi(z) dz &= \int z \psi(z) dz = 1 \\ \int z^k \psi(z) dz &= c_k \end{aligned} \quad (36)$$

Pour rendre plus clair le lien entre (34) et (35), admettons d'abord (35). Nous avons donc :

$$\mu'_k = \sum n^k \frac{1}{n} \psi\left(\frac{n}{\bar{n}}\right) = \bar{n}^k \sum_n \left(\frac{n}{\bar{n}}\right)^k \frac{1}{n} \psi\left(\frac{n}{\bar{n}}\right) \quad (37)$$

Si l'on peut remplacer la somme discrète par une intégrale, en posant $z = n/\bar{n}$ on obtient :

$$\mu'_k \simeq \bar{n}^k \int z^k \psi(z) dz = c_k \bar{n}^k \quad (38)$$

L'erreur commise est en principe de l'ordre de $1/\bar{n}$, mais de l'ordre de $1/\bar{n}^2$ seulement si $\psi(0) = 0$. En fait la table 2 montre qu'il y a numériquement une bonne correspondance entre (34) et (35), et on peut identifier à une excellente approximation la variable discrète $n/\bar{n}$ et la variable continue z .

Si l'on se donne les c_k , on peut calculer $\psi(z)$ dont on connaît la fonction caractéristique (i.e. la transformée de Fourier) $\tilde{\psi}(t)$:

$$\tilde{\psi}(t) = \int e^{itz} \psi(z) dz = \sum_k \frac{(it)^k}{k!} c_k \quad (39)$$

Il suffit de faire une transformation de Fourier inverse pour calculer $\psi(z)$.

Slattery ⁽¹³⁾ a montré que le scaling KNO était en bon accord avec les résultats expérimentaux entre 50 et 300 GeV. Ceci peut se voir de deux manières :

1) Les moments c_k sont approximativement indépendants de l'énergie; on trouve (toujours entre 50 et 300 GeV)

$$c_2 = 1.244 \pm 0.006 \quad c_3 = 1.813 \pm 0.020 \quad c_4 = 2.97 \pm 0.06$$

2) Si l'on porte $\bar{n} P(n, \bar{n})$ en fonction de $n/\bar{n}$, on constate que les points tombent sur une courbe universelle ⁽¹³⁾.

La fonction $\psi(z)$ choisie par Slattery est assez compliquée. Une fonction $\psi(z)$ simple et qui décrit convenablement les données est celle de Bozoki et al. - Weisberg ⁽¹⁴⁾:

$$\psi(z) = A z^\beta \exp[-(\gamma z)^2] \quad (40)$$

Cette fonction dépend d'un seul paramètre en raison des deux conditions de normalisation (36). La valeur $\beta = 1.18$ donne un χ^2 de 4.2 pour 69 points expérimentaux de 50 à 400 GeV. (table 3)

Une autre fonction simple est celle de Lévy ⁽⁷⁾:

$$\psi(z) = \frac{4 e^{-4} (4)^{4z}}{\Gamma(4z + 1)}$$

Cependant, au dessous de 50 GeV, la formule de KNO n'est pas en accord avec les données. Ceci peut se comprendre aisément : en effet si $c_2 = \text{Constante}$, on doit avoir également $\bar{n}_c/D_c = \text{Constante}$, ce qui n'est pas vrai en dessous de 50 GeV où :

$$(\bar{n}_c - 1)/D_c = \text{Constante}$$

comme on l'a vu dans la section II. De même, si la tendance indiquée par l'expérience de 400 GeV se confirme, le scaling KNO ne sera plus valide au-delà de 300 GeV. En d'autres termes, la DM expérimentale est plus étroite que celle prévue par KNO à basse énergie, et elle pourrait être plus large à haute énergie.

Si nous examinons la "démonstration" de la formule KNO à partir du scaling de Feynman, il est clair que toute variable du type $(n_c - \alpha)$, où α est une constante, est à priori aussi valable que n_c . Les lois de Wroblewski ^{(17), (19)} pour les moments d'ordre 2 et 3 (section II) suggèrent que l'on doit prendre $\alpha \simeq 1$.

Ces lois sont équivalentes, pour $k = 2$ et 3 à la constance des rapports :

$$\frac{(n_c - \bar{n}_c)^k}{(\bar{n}_c - 1)^k}$$

Pour $k \gg 4$ ces rapports sont aussi approximativement constants ⁽¹⁵⁾, et de toute façon les erreurs deviennent grandes. Une forme du scaling KNO, valable sur un plus grand domaine d'énergie, serait donc ⁽¹⁾, ⁽¹⁵⁾ :

$$P(n_c, \bar{n}_c) = \frac{1}{\bar{n}_c - 1} \psi\left(\frac{n_c - 1}{\bar{n}_c - 1}\right) \quad (41)$$

Ceci pourrait être appelé le (KNO - 1) scaling! Les moments de la fonction ψ doivent être sensiblement différents de ceux utilisés dans la version originale, et en utilisant les lois de Wroblewski ⁽¹⁷⁾ et ⁽¹⁹⁾ on trouve :

$$c_2 \simeq 1.33 \quad c_3 \simeq 2.13$$

(au lieu de 1.25 et 1.81). Si l'on utilise par exemple la formule de Bozoki-Weisberg ⁽⁴⁰⁾, on trouve une valeur de β sensiblement différente ($\beta \simeq 0.7$). Les résultats expérimentaux sont très bien décrits par la formule ⁽⁴¹⁾ entre 5 et 400 GeV (table 3 et figure 14). Il reste toutefois une difficulté avec le mode. En effet dans le scaling KNO ordinaire on a :

$$M_0 = z_0 \bar{n} \quad \text{où } \psi'(z_0) = 0$$

Par exemple si on utilise ⁽⁴⁰⁾ avec $\beta = 1.18$, on trouve $z_0 \simeq 0.82$. Dans le cas du scaling (KNO - 1) et en utilisant le $\psi(z)$ de Buras et al ⁽¹⁵⁾ (deux paramètres libres) :

$$\psi(z) = 2.30 (z + 0.142) \exp(-0.0586 z - 0.659 z^2) \quad (42)$$

on trouve :

$$M_0 = \bar{n}_c \left(0.79 + \frac{0.19}{\bar{n}_c}\right)$$

Dans les deux cas on constate que le mode décroît plus vite que ne le prévoit la formule KNO (figure 15).

Je pense que la discussion qui précède illustre bien le caractère empirique de la formule KNO, qui n'est finalement justifiée que si $\bar{n} \rightarrow \infty$. D'autre part on voit bien les problèmes qui se posent lorsque l'on veut confronter une formule théorique ou semi-théorique avec les données. Faut-il se fixer arbitrairement une énergie de seuil (par exemple 50 GeV) et appliquer la formule seulement au-dessus de cette énergie? Dans ce cas il a (au moins) deux difficultés :

- le choix de l'énergie du seuil est arbitraire,
- le domaine d'énergie utilisé est si restreint que l'on ne peut pas distinguer entre une formule type KNO et type 2 composantes (par exemple). La formule n'est donc pas testée de façon significative.

Si au contraire on essaie de décrire les données dans un intervalle d'énergie aussi grand que possible, on retombe sur des formules avant tout empiriques, dont la validité est probablement accidentelle.

V. FONCTION GENERATRICE.

Avant d'étudier les corrélations entre particules neutres et chargées, j'ai besoin d'introduire un outil qui me sera très utile, la fonction génératrice $G(z)$ de Mueller ⁽³⁾. Par définition :

$$G(z) = \sum_n z^n P(n) \quad (43)$$

Naturellement :

$$P(n) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial z^n} G(z) \right|_{z=0} \quad (44)$$

si je prends la dérivée à $z = 1$:

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial z^k} G(z) \right|_{z=1} = \sum_n n(n-1)\dots(n-k+1) P(n) = F_k$$

d'où :

$$G(z) = \sum \frac{(z-1)^k}{k!} F_k = \sum \frac{h^k}{k!} F_k \quad (h = z - 1) \quad (45)$$

On peut toujours exponentier :

$$G(h) = \exp \left(\sum_k \frac{h^k}{k!} f_k \right) \quad (46)$$

définissant ainsi les f_k . Un théorème classique (théorème de la décomposition en amas) nous dit que les f_k sont précisément les intégrales des corrélations. ⁽³⁾ Je rappelle que dans un modèle de type SRO (cf. cours de Krzywicki)

$$f_k \sim a_k \gamma^k + o(\gamma^{k-1}) \quad (47)$$

tandis que si les corrélations sont à courte portée (SRC = SSRO)

$$f_k = \alpha_k \gamma + \beta_k + o(e^{-c\gamma}) \quad (48)$$

Je vais maintenant donner quelques applications d'utilisation de la fonction génératrice.

Modèle multipériphérique.

Soit $\lambda = g^2$ le carré de la constante de couplage.

Dans le modèle multipériphérique, ou multiregge :

$$\sigma_T(\lambda) = \sum_n \left| \begin{array}{c} \text{---} 1 \\ | \\ \text{---} 2 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} n \end{array} \right| \lambda^n = \sum_n \lambda^n A_n$$

Mais on sait également que la section efficace totale $\sigma_T(\lambda)$ sera contrôlée par une trajectoire de Regge $\alpha_{\text{out}}(\lambda) = \alpha(\lambda)$

$$\sigma_T(\lambda) = e^{\beta(\lambda)} s^{\alpha(\lambda)-1} = \exp((\alpha(\lambda) - 1) \ell_{\text{ns}} + \beta(\lambda))$$

où j'ai écrit le résidu sous forme exponentielle. La fonction génératrice n'est autre que ⁽³⁾ :

$$G(h) = \sigma_T (\lambda(1+h)) / \sigma_T (\lambda)$$

$$= \exp \left\{ \left[\alpha((1+h)\lambda) - \alpha(\lambda) \right] \ell_{ns} + \left[\beta((1+h)\lambda) - \beta(\lambda) \right] \right\}$$

Mais par exemple :

$$\alpha[(1+h)\lambda] - \alpha(\lambda) = \sum_k \frac{h^k \lambda^k}{k!} \alpha^{(k)}(\lambda)$$

il est clair que l'on obtient un modèle satisfaisant SRC (= SSRO) :

$$f_k = \lambda^k \left[\alpha^{(k)}(\lambda) Y + \beta^{(k)}(\lambda) \right]$$

(et en particulier $\bar{n} \propto \ell_{ns}$).

Il est non moins clair que f_k est en général $\neq 0$.
Cependant, si λ est petit, $\alpha(\lambda)$ se développe en puissance de λ ;
en fait

$$\alpha(\lambda) = 2 \alpha_{in} - 1 + \lambda$$

et seul $f_1 \neq 0$. Ceci est le modèle de Chew-Pignotti, et on voit que $f_1 = \bar{n} = \lambda \ell_{ns}$. Dans ce modèle le nombre moyen de particules par unité de rapidité est simplement $\lambda = g^2$. On montre assez facilement que les approximations faites par Chew et Pignotti ne sont valables que si $\lambda \ll 1$, ce qui n'est pas le cas dans la nature (~ 3 particules/unité de rapidité). A priori, il n'y a donc aucune raison de croire aux approximations de Chew et Pignotti, et il n'est absolument pas justifié de dire que le modèle multipériphérique prédit $f_k = 0$, $k \gg 2$ (c'est à dire une distribution de Poisson). Cependant, si on produit des amas (= clusters!), et non des particules individuelles, le nombre d'amas par unité de rapidité est seulement $\sim 3/\langle n \rangle$ où $\langle n \rangle$ est le nombre moyen de particules par amas. Dans ces conditions, on peut penser que la distribution de Poisson pour les amas est peut-être assez réaliste.

Réciproque ⁽¹⁶⁾ : comportement en énergie de σ_n dans SRC.
 Dans le modèle de Chew-Pignotti on a :

$$\sigma_n = \frac{\lambda^n}{n!} \gamma^n s^{2\alpha_{in} - 2}$$

Inversement, que peut-on dire de σ_n quand on a SRC?

$$\varrho_n[G(h)] = \sum_k \frac{h^k}{k!} (\alpha_k \gamma + \beta_k) = \alpha(h) \gamma + \beta(h)$$

et je peux calculer $P(n)$ par dérivation.

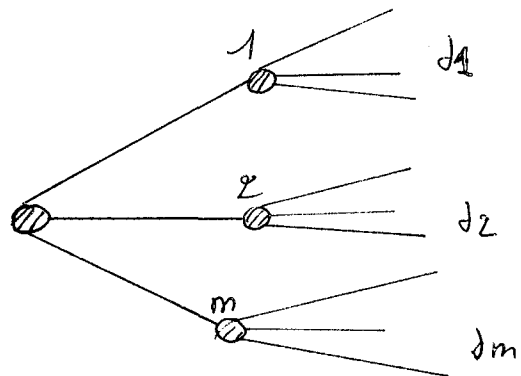
$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h^n} \exp(\alpha(h) \gamma + \beta(h)) \Big|_{h=1} \\ &= \frac{1}{n!} (\text{Pol } d^n \varrho_n \gamma) \cdot e^{\alpha(-1) \gamma + \beta(-1)} \end{aligned}$$

On retrouve donc pour $P(n)$ un comportement du type multipériphérique.
 En particulier $P(n)$ tend vers zéro comme une puissance de s quand $s \rightarrow \infty$. La démonstration précédente n'est pas rigoureuse, mais on peut donner un argument plus précis ⁽¹⁶⁾.

Effet de clustering

Un autre type d'effets qui s'étudie bien au moyen de la fonction génératrice est l'effet de clustering. Supposons que le processus de production se passe de la façon suivante :

On a une probabilité $\tilde{P}(m)$ de produire un cluster, et chaque cluster a une probabilité w_j de se désintégrer en j particules finales. Soit $\lambda(z)$ la fonction génératrice de la désintégration :



$$\lambda(z) = \sum_j w_j z^j \quad (49)$$

$P(n,m)$ la probabilité pour que m clusters se désintègrent en n particules finales :

$$P(n,m) = \sum_{j_1, \dots, j_m} \delta(n - j_1 - \dots - j_m) w_{j_1} \dots w_{j_m}$$

et donc
$$\sum_n P(n,m) = (\lambda(z))^m$$

Calculons $G(z)$ en fonction de la fonction génératrice des clusters $\tilde{G}(z)$:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_n z^n P(n) = \sum_{n,m} z^n P(n,m) \tilde{P}(m) \\ &= \sum_m (\lambda(z))^m \tilde{P}(m) \end{aligned}$$

d'où :

$$G(z) = \tilde{G}(\lambda(z)) \quad (50)$$

Supposons que $\tilde{P}(m)$ soit une distribution de Poisson; alors

$$G(z) = \exp(\bar{m}(\lambda(z) - 1)) \quad (51)$$

et :

$$f_k = \bar{m} \frac{d^k \lambda}{d z^k} \bigg|_{z=1} = \bar{m} \langle j(j-1) \dots (j-k+1) \rangle \quad (52)$$

où $\langle \rangle$ indique une moyenne prise sur la désintégration du cluster, c'est à dire sur la distribution de probabilité w_j .

Notez que $f_k \geq 0 \quad \forall k$.

Deux cas sont alors possibles :

a) $\bar{m}$ croît avec l'énergie comme ℓ_{ns} et w_j est indépendant de l'énergie. On obtient alors un modèle satisfaisant SRC puisque f_k est proportionnel à ℓ_{ns} . Les moments de Mueller permettent alors de mesurer (du moins en principe) les moments binomiaux de la distribution de probabilité w_j .

b) Au contraire $\tilde{P}(m)$ est indépendant de l'énergie, et w_j varie avec l'énergie de telle sorte que $\langle j \rangle \propto \ell_{ns}$. Supposons pour simplifier que :

$$w_j = \delta(j - \langle j \rangle)$$

Dans ce cas $\lambda(z) = z^{\langle j \rangle}$ et d'après (52) :

$$f_k = \bar{m} \langle j \rangle (\langle j \rangle - 1) \dots (\langle j \rangle - k + 1) \quad (53)$$

et il est clair que

$$f_k \sim (\ell_{ns})^k$$

On a donc un modèle du type SRO, et non SRC. Ce modèle est exactement celui de Lévy⁽⁷⁾. Vérifions-le sur la dispersion D^2 :

$$D^2 = f_2 + \bar{n} = \langle j \rangle (\langle j \rangle - 1) \bar{m} + \langle j \rangle \bar{m} = \bar{m} \langle j \rangle^2$$

$$\frac{\bar{n}^2}{D^2} = \frac{\langle j \rangle^2 \bar{m}^2}{\langle j \rangle^2 \bar{m}} = \bar{m}$$

Le nombre moyen de clusters produits dans une collision est donc donné par $\bar{n}^2/D^2$.

(Notez qu'on ne peut pas obtenir $P(n)$ à partir de la fonction génératrice qui n'est pas analytique à $z = 0$. C'est une propriété bien connue des modèles qui satisfont KNO exact).

Généralisation à des particules non identiques.

Pour éviter d'avoir un nombre d'indices trop grand, je considère uniquement 2 types de particules c et d. On construit la fonction génératrice :

$$G_{cd}(z_c, z_d) = \sum z_c^{n_c} z_d^{n_d} P(n_c, n_d) \quad (54)$$

Il est facile de voir que :

$$G_c(z_c) = G_{cd}(z_c, 1) \quad (55)$$

Au contraire si on ne distingue pas entre c et d :

$$G_{\text{tot}}(z) = G_{cd}(z, z) \quad (56)$$

Un cas intéressant est celui où $c = \pi^+$, $d = \pi^-$. On doit avoir $n_+ - n_- = Q = \text{charge initiale}$, et dans ce cas la fonction génératrice est seulement une fonction du produit $z_+ z_-$:

$$G_{+-}(z_+, z_-) = (z_+ z_-)^Q G_-(z_+ z_-) \quad (57)$$

En particulier, on obtient la relation entre fonction génératrice des particules chargées et des particules négatives :

$$G_{ch}(z) = z^Q G_-(z^2) \quad (58)$$

VI. CORRELATIONS ENTRE PARTICULES NEUTRES ET PARTICULES CHARGÉES.

On peut observer expérimentalement la section efficace semi-inclusive de production de π^0 (ou plus exactement de photons) à nombre de particules négatives fixé. Soit $d\sigma_{n_-}/d^3p_0$ cette section efficace semi-inclusive; en l'intégrant on obtiendra le nombre moyen de π^0 à n_- fixé, $\overline{n_0}(n_-)$:

$$\overline{n_0}(n_-) = \frac{1}{\sigma_{n_-}} \int \frac{d\sigma_{n_-}}{d^3p_0} d^3p_0 \quad (59)$$

Cette quantité s'obtient également à partir de la fonction génératrice (cf. eq. 54) :

$$G(z_-, z_0) = \sum_{n_-, n_0} z_-^{n_-} z_0^{n_0} P(n_-, n_0) \quad (60)$$

$$\overline{n_0}(n_-) = \frac{1}{P(n_-)} \frac{1}{n_-!} \frac{\partial^{n_-+1}}{\partial z_-^{n_-} \partial z_0} G(z_-, z_0) \bigg|_{\substack{z_0 = 1 \\ z_- = 0}} \quad (61)$$

Une expérience plus délicate, mais réalisable dans un proche avenir, consiste à mesurer la section efficace semi-inclusive pour la production de $2 \pi^0$

$$\frac{d\sigma_{n_-}}{d^3p_{01} d^3p_{02}}$$

dont l'intégrale donne le moment binomial $F_2^0(n_-)$. Ce moment binomial peut se déduire de la fonction génératrice par une généralisation triviale de (61). Il est utile de définir aussi le moment de Mueller :

$$f_2^0(n_-) = F_2^0(n_-) - \overline{n_0(n_-)}^2 \quad (62)$$

La quantité $\overline{n_0(n_-)}$ a été mesurée expérimentalement à plusieurs énergies ⁽¹⁷⁾ (figure 16). On constate qu'à 12 GeV $\overline{n_0(n_-)}$ est grossièrement indépendant de n_- , c'est à dire qu'il n'y a pas de corrélation entre production de π^0 et π^- . Par contre pour $E \gtrsim 50$ GeV, $\overline{n_0(n_-)}$ est approximativement représenté par une droite :

$$\overline{n_0(n_-)} = a + b n_- \quad (63)$$

avec un coefficient b qui croît avec l'énergie, vers une limite $b \sim 1$. Pour des grandes valeurs de n_- , $\overline{n_0(n_-)}$ décroît, mais ceci est sans aucun doute un effet d'espace de phase.

Il est utile de noter deux conséquences immédiates de (63) :

$$\overline{\overline{n_0}} = a + b \overline{n_-} \quad (64)$$

et

$$\begin{aligned} f_2^0 &= \sum_{n_0, n_-} n_0 n_- P(n_0, n_-) - \overline{n_0} \overline{n_-} \\ &= b D_-^2 = b (f_2^- + \overline{n_-}) \end{aligned}$$

Trois méthodes ont été proposées pour étudier théoriquement $\overline{n_0(n_-)}$ et $f_2^0(n_-)$.

Méthode 1. ⁽¹⁸⁾ On se donne a priori une distribution de multiplicité totale $P(N)$, et on suppose ensuite que les N pions se répartissent en π^+ , π^0 , π^- avec une probabilité $p(n_+, n_-, n_0 | N)$:

$$P(n_+, n_-, n_0) = \tilde{P}(N) p(n_+, n_-, n_0 | N)$$

Pour $p(n_+, n_-, n_0 | N)$ on peut par exemple choisir les coefficients d'isospin statistique. L'inconvénient de cette méthode est évidemment que l'on risque de biaiser les résultats en se donnant $\tilde{P}(N)$ a priori. M. Bardadin-Otwinowska ⁽¹⁸⁾ et al ont utilisé pour $\tilde{P}(N)$ une distribution de Czyzewski - Rybicki dépendant de deux paramètres, N et D_{tot} , qui satisfont une loi du type Wroblewski :

$$D_{\text{tot}} = 0.68 \overline{N} - 2.26$$

Ce choix donne une description tout à fait satisfaisante de $P(n_-)$ et $\overline{n_0(n_-)}$.

Méthode 2 ⁽¹⁹⁾. Dans cette méthode on évite de se donner a priori $\tilde{P}(N)$ afin de tester $p(n_+, n_0, n_- | N)$. Je vais discuter brièvement quatre modèles standard pour cette quantité.

modèle σ : on suppose que les pions sont produits par l'intermédiaire de résonances d'isospin zéro (σ) qui se désintègrent en $\pi^+ \pi^-$ avec une probabilité p et en $\pi^0 - \pi^0$ avec une probabilité q . Par invariance d'isospin, $p = 2/3$ et $q = 1/3$. Soit z_- la variable associée aux π^- , z' celle associée aux paires de π^0 (puisque l'on a toujours un nombre pair de π^0) et $\tilde{G}$ la fonction génératrice de production des σ (cf. section V). On trouve aisément d'après (64) :

$$\begin{aligned} G(z_-, z') &= \tilde{G}(pz_- + qz') \\ P(n_-) &= \frac{1}{n_-!} p^{n_-} \tilde{G}^{(n_-)}(q) \\ \overline{n_0(n_-)} &= 2 (P(n_-))^{-1} p^n q \tilde{G}^{(n+1)}(q) \end{aligned} \quad (65)$$

d'où :

$$\overline{n_0(n_-)} = \left(\frac{2q}{p}\right) (n_- + 1) \frac{P(n_- + 1)}{P(n_-)} \quad (66)$$

de même :

$$F_2^0(n_-) = \left(\frac{2q}{p}\right)^2 (n_- + 1) (n_- + 2) \frac{P(n_- + 2)}{P(n_-)} + \overline{n_0(n_-)} \quad (67)$$

D'après (66) et (67) on peut donc calculer directement $\overline{n_0(n_-)}$ et $F_2^0(n_-)$ à partir des résultats expérimentaux pour $P(n_-)$.

modèle ρ - ρ : dans ce modèle ⁽²⁰⁾ on suppose que l'on produit initialement des paires de ρ dans l'état d'isospin zéro. L'intérêt de ce modèle est qu'il correspond à des clusters de 4 pions, ce qui est exactement la valeur proposée par Berger et Fox ⁽¹¹⁾. D'autre part on peut calculer le rapport R pour les corrélations à deux particules (cf. cours de Berger) pour les différents types de charge :

$$R^{cc} : R^{0c} : R^{--} = 1 : 1 : 1/2$$

ce qui est sûrement compatible avec les données sur les corrélations.

Par invariance d'isospin ce modèle donne un état final $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ avec une probabilité $p = 2/3$, et un état final $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ avec une probabilité $q = 1/3$. La fonction génératrice de désintégration est donc :

$$\lambda(z_-, z') = p z_- z' + q z_-^2 \quad (68)$$

Un calcul analogue à celui du modèle σ donne :

$$\overline{n_0(n_-)} = 2 \sum_{i=0}^{n_- - 1} \left(\frac{-2q}{p}\right)^i (n_- - i) \frac{P(n_- - i)}{P(n_-)} \quad (69)$$

modèle π : On suppose que $p(n_+, n_0, n_-)$ est proportionnel à

$$\frac{q^{n_+}}{n_+!} \frac{q^{n_-}}{n_-!} \frac{p^{n_0}}{n_0!} \quad (q = p) \quad (70)$$

ce qui est la forme limite d'un coefficient d'isospin statistique. Le résultat final est (19) :

$$\overline{n_0(n_-)} = (n_- + \frac{3}{4}) \frac{P(n_- + 1/2)}{P(n_-)} \quad (71)$$

Il faut remarquer l'apparition de valeurs demi-entières du nombre de π^- , et il est nécessaire d'avoir un fit de la DM pour évaluer (71).

modèle ρ : On produit cette fois $N_+ \rho^+$, $N_- \rho^-$ et $N_0 \rho^0$ avec une probabilité donnée par (70). Comme :

$$n_+ = N_+ + N_0 \quad n_- = N_- + N_0 \quad n_0 = N_+ + N_-$$

(si $Q_a + Q_b = 0$); en posant $n_0/2 = \ell$:

$$p(n_+, n_0, n_-) = \frac{q^{2\ell} p^{n_- - \ell}}{(\ell!)^2 (n_- - \ell)!} \quad (q = p) \quad (72)$$

Le résultat pour $\overline{n_0(n_-)}$ est cette fois :

$$\overline{n_0(n_-)} = 2 n_- + 2 \sum_{i=1}^{2n_- - 1} \left(\frac{-p}{q}\right)^i (2 n_- - i) \frac{P(n_- - i/2)}{P(n_-)} \quad (73)$$

Les prédictions de (66), (71) et (73) sont comparées aux résultats expérimentaux sur la figure (17). On voit que les trois modèles donnent des résultats analogues, et en accord avec l'expérience, pour $\overline{n_0(n_-)}$. Par contre les prédictions sont sensiblement différentes pour $f_2^0(n_-)$ ce qui montre l'intérêt de mesurer expérimentalement ce paramètre.

Méthode 3. Enfin Krzywicki ⁽²¹⁾ a proposé une méthode basée sur la théorie de Mueller-Regge, qui suppose simplement que le Pomeron a isospin zéro. Dans ce cas, il est facile de se rendre compte que $n_{\alpha}^p n_{\beta}^q$, où $\alpha, \beta = +, -, 0$ ne doit pas dépendre asymptotiquement des indices α et β . Si l'on écrit, suivant KNO :

$$\overline{n_{\alpha}^p n_{\beta}^q} = c_{p,q} \overline{n_{\alpha}^p} \overline{n_{\beta}^q}$$

on doit avoir :

$$c_{p,q} = c_{p+q} \quad (74)$$

Cette relation peut être testée pour $\alpha = -, \beta = 0$, p quelconque et $q = 1$ ⁽²¹⁾. Elle est en bon accord avec les données expérimentales; cependant les erreurs sont grandes, et la méthode a les mêmes problèmes que le scaling KNO (section IV). L'avantage de cette méthode est qu'on ne doit rien supposer pour $p(n_+, n_0, n_- | N)$.

Table I

Moments de la distribution de multiplicité

p_L (GeV/c)	$\bar{n}_c$	$\bar{n}_-$	f_2^-	f_3^-	$\bar{n}_c/D_c$	$(\bar{n}_c-1)/D_c$	ℓ_{ns}
19	4.02 $\pm$.02	1.01 $\pm$.01	- .24	.21	2.29 $\pm$.03	1.72 $\pm$.03	3.63
50	5.36 $\pm$.14	1.68 $\pm$.07	- .04 $\pm$.09	-.24 $\pm$.16	2.09 $\pm$.06	1.70 $\pm$.06	4.56
69	5.91 $\pm$.08	1.95 $\pm$.04	.12 $\pm$.06	-.28 $\pm$.11	2.05 $\pm$.03	1.70 $\pm$.03	4.88
102	6.32 $\pm$.08	2.16 $\pm$.04	.28 $\pm$.07	-.50 $\pm$.15	2.02 $\pm$.03	1.70 $\pm$.03	5.27
205	7.77 $\pm$.10	2.88 $\pm$.05	.87 $\pm$.12	-.85 $\pm$.25	2.00 $\pm$.03	1.75 $\pm$.03	5.96
303	8.75 $\pm$.15	3.37 $\pm$.08	1.53 $\pm$.25	-.81 $\pm$.74	1.98 $\pm$.06	1.75 $\pm$.06	6.35
405	8.97 $\pm$.14	3.49 $\pm$.07	2.14 $\pm$.20	.20 $\pm$.90	1.89 $\pm$.05	1.68 $\pm$.05	6.64

Table II

Equivalence du scaling KNO et de $\bar{n}^k = c_k \bar{n}^k$ à $p_L = 50$ GeV/c.

La fonction $\psi(z) = A z^\beta \exp(-\gamma^2 z^2)$, $\beta = 1.18$.

(A) moments expérimentaux. (B) $c_k = \int_0^1 z^k \psi(z) dz$.

(C) $c_k = \sum_{n=1}^{\infty} (n/\bar{n})^k \psi(n/\bar{n})$. (D) $c_k = \sum_{n=1}^{\infty} (n/\bar{n})^k \psi(n/\bar{n})$

A	1.000	1.000	1.228	1.754	4.93	40.0	- 0.04	- 0.24
			± 0.030	± 0.143	± 0.51	± 7.0	$\pm .9$	$\pm .16$
B	1.000	1.000	1.249	1.822	5.41	49.7	0.08	- 0.37
C	0.988	1.000	1.248	1.817	5.34	46.6	0.08	- 0.40
D	0.988	1.000	1.249	1.821	5.40	49.6	0.08	- 0.37

Table III (χ^2)

Fits de la distribution de multiplicité. Ces fits sont donnés à titre d'illustration : je n'ai pas recherché systématiquement les meilleurs fits. Entre parenthèses le nombre de points expérimentaux.

(A) KNO $\psi(z) = A z^\beta \exp(-\gamma^2 z^2)$ $\beta = 1.18$

(B) (KNO - 1) même $\psi(z)$, $\beta = 0.70$

(C) (KNO - 1) $\psi(z)$ de Buras et al (référence 15)

(D) Modèle à 2 composantes de Fiałkowski-Miettinen (référence 9)

p_L (GeV/c)	19 (7)	50 (8)	69 (9)	102 (10)	205 (13)	303 (13)	405 (16)	χ^2_{total} 50-400
(A)	167.5	6.5	11.9	5.2	18.5	14.5	26.3	82.9
(B)	53.4	6.3	11.6	6.9	13.1	11.9	21.8	71.6
(C)	40.9	4.0	9.4	4.0	19.9	14.2	21.7	73.2
(D)	278.7	14.0	15.8	10.9	10.7	16.7	37.0	105.1

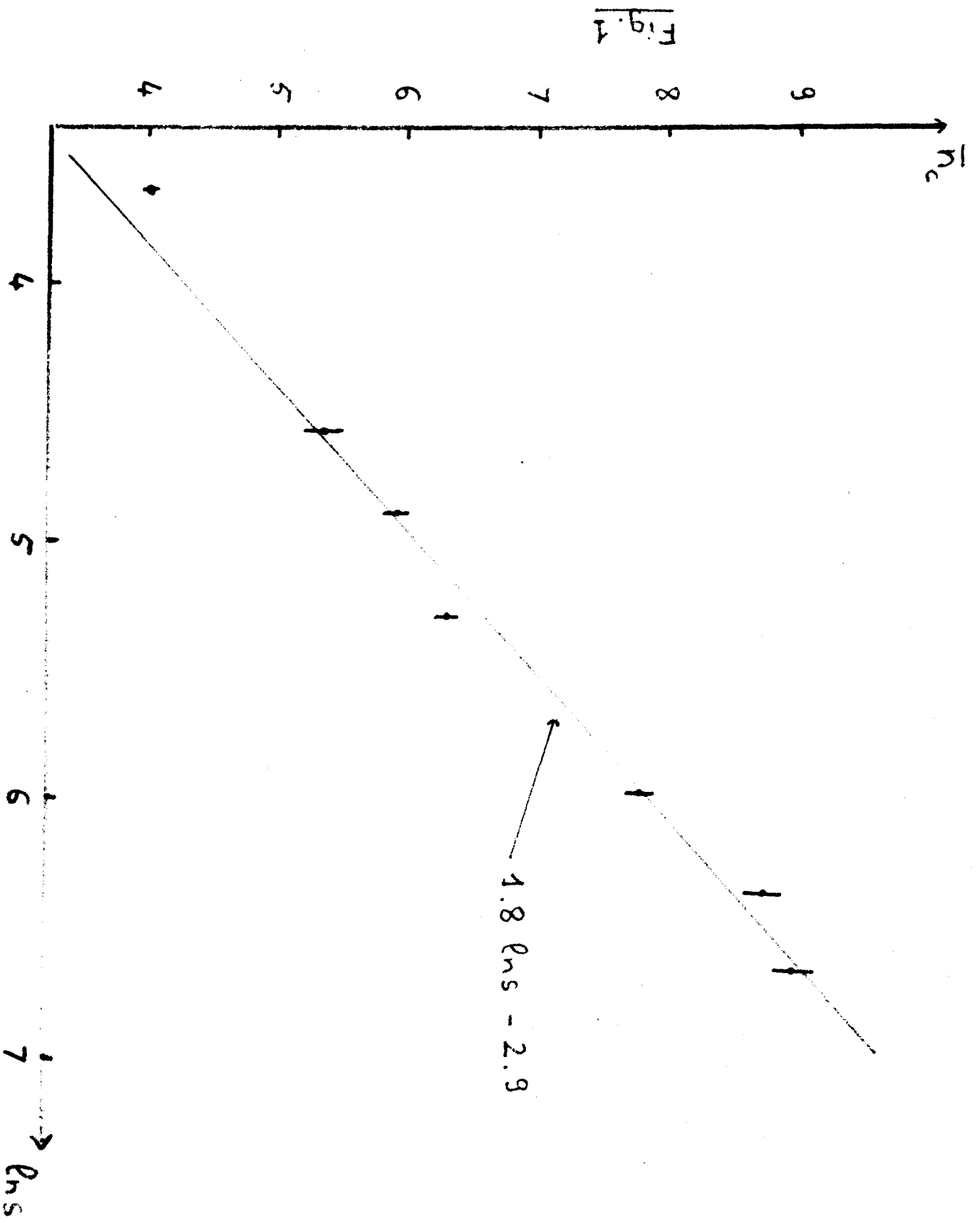
Légende des figures.

- 1) Multiplicité $\bar{n}_c$ en fonction de ℓ_{ns} entre 50 et 400 GeV.
Fit par $\bar{n}_c = 1.8 \ell_{ns} - 2.9$.
- 2) Multiplicité pour différents types de particules (référence 4).
- 3) Multiplicité $\bar{n}_0$ des π^0 (K.Jaeger et al, référence 17).
- 4) Multiplicité chargée pour diverses réactions (d'après V.Ammosov et al, référence 6). $\hat{Q} = \sqrt{s} - (m_a + m_b)$.
- 5) Comparaison entre les DM de π^+_p et π^-_p à 50 GeV/c.
- 6) Rapport $(\bar{n}_c - 1)/D_c$ (A.Wroblewski, référence 1).
- 7) Rapport $\bar{n}_c/D_c$ pour diverses réactions (d'après V.Ammosov et al, référence 6).
- 8) f_2^c pour diverses réactions (référence 6).
- 9) Asymétrie $\gamma = \mu_3/D^3$ pour pp (référence 1).
- 10) Prédiction pour f_3^- de la courbe $\gamma = 2/3$ (référence 1).
- 11) Comparaison entre la formule de Czyzewski-Rybicki et l'expérience (référence 1).
- 12) Prédictions de divers modèles pour f_2^- .
... Modèle à 2 composantes, Fialkowski-Miettinen, référence 9 (FM)
— Modèle à 2 composantes : Roy-Roberts, référence 10.
-- KNO, $\psi(z) = A z^\beta \exp(-\gamma^2 z^2)$, $\beta = 1.18$
--- (KNO - 1), même $\psi(z)$, $\beta = 0.70$.
- 13) Prédictions de divers modèles pour f_3^- . Même légende que pour la figure 12.
- 14) (KNO - 1) scaling (référence 15).
- 15) Mode et prédictions de KNO : trait plein, et (KNO - 1) : tirets (d'après A.Wroblewski, référence 1).
- 16) $\overline{n_0}(n_-)$ (K.Jaeger et al, référence 17).
- 17) Prédictions de divers modèles pour $\overline{n_0}(n_-)$ et $f_2^0(n_-)$ (D.Drijard et S.Pokorski, référence 19).

Références

- (1) A.WROBLEWSKI : Cours à l'Ecole de Zakopane, prêtirage Varsovie (1973). La discussion de la section II est basée essentiellement sur cet article. Voir également E.BERGER; rapport à la Conférence d'Aix en Provence (1973).
- (2) 19 GeV/c : H.BØGGILD et al : Nucl. Phys. B27, 285 (1971).
 50,69 GeV/c : V.AMMOSOV et al : Phys. Lett. 42B, 519 (1972).
 102 GeV/c : J.CHAPMAN et al : Phys. Rev. Lett. 29, 1686 (1972) et T.FERBEL, communication privée (collaboration Michigan-Rochester).
 205 GeV/c : G.CHARLTON et al : Phys. Rev. Lett. 29, 515 (1972) et J.WHITMORE, communication privée.
 303 GeV/c : F.DAO et al : Phys. Rev. Lett. 29, 1627 (1972).
 La valeur de σ_2 est corrigée suivant : F.DAO et al, Phys. Lett. 45B, 402 (1973).
 405 GeV/c : Résultats préliminaires de la collaboration Michigan-Rochester; T.FERBEL, communication privée ("use at own risk results").
- (3) L'utilité des moments binomiaux et des moments f_k a été montrée par A.MUELLER : Phys. Rev. D4, 150 (1971). La démonstration de (5) est donnée dans la plupart des cours sur les réactions inclusives. Voir en particulier le cours d'A.KRZYWICKI à cette école.
- (4) M.ANTINUCCI et al : N.C. Letters, 6, 121 (1973).
- (5) H.M.CHAN et al : Phys. Lett. 40B, 406 (1972).
 L.CANESCHI : prêtirage CERN TH 1704 (1973).
 J.L.MEUNIER : prêtirage Nice NTH 73/9 (1973).
- (6) V.AMMOSOV et al : Nucl. Phys. B58, 55 (1973).
 Collaboration France-U.R.S.S. : communication à la Conférence d'Aix en Provence (1973).
- (7) D.LEVY : Nucl. Phys. B59, 583 (1973). Voir également S.ORFANIDIS et V.RITTENBERG : prêtirage Rockfeller (1973).
- (8) O.CZYZEWSKI et K.RYBICKI : Nucl. Phys. B47, 633 (1972).
- (9) K.FIAŁKOWSKI et H.MIETTINEN : Phys. Lett. 43B, 61 (1973).
- (10) R.ROBERTS et D.ROY : Phys. Lett., à paraître (1973).
 W.FRAZER et D.SNIDER : Phys. Lett. 45B, 136 (1973).
- (11) E.BERGER et G.FOX : Phys. Lett., à paraître (1973).
- (12) Z.KOBA, H.NIELSEN et P.OLESEN : Nucl. Phys. B40, 317 (1971).
- (13) P.SLATTERY : Phys. Rev. D (1973).
- (14) G.BOZOKI et al : N.C. 64A, 881 (1969).
 H.WEISBERG : prêtirage Université de Pennsylvanie (1973).

- (15) A.BURAS, J.DIAS DE DEUS et R.MØLLER : prêtirage Institut Niels Bohr (1973).
- (16) M. LE BELLAC : N.C. Letters 2, 437 (1971). Phys. Lett. 37B, 413 (1971).
- (17) 19 GeV/c : H.BØGGILD et al, référence 2.
69 GeV/c : H.BLUMENFELD et al : Phys. Lett. 45B, 528 (1973).
205 GeV/c : K.JAEGER et al, prêtirage Argonne (1973).
303 GeV/c : F.DAO et al, Phys. Rev. Lett. 30, 1151 (1973).
- (18) M.BARDADIN-OTWINOWSKA et al : prêtirage Université de Varsovie (1973).
- (19) D.DRIJARD et S.POKORSKI : Phys. Lett. 43B, 509 (1973).
- (20) F.HAYOT et A.MOREL : prêtirage Saclay (1973).
- (21) A.KRZYWICKI : Nucl. Phys. B58, 633 (1973).



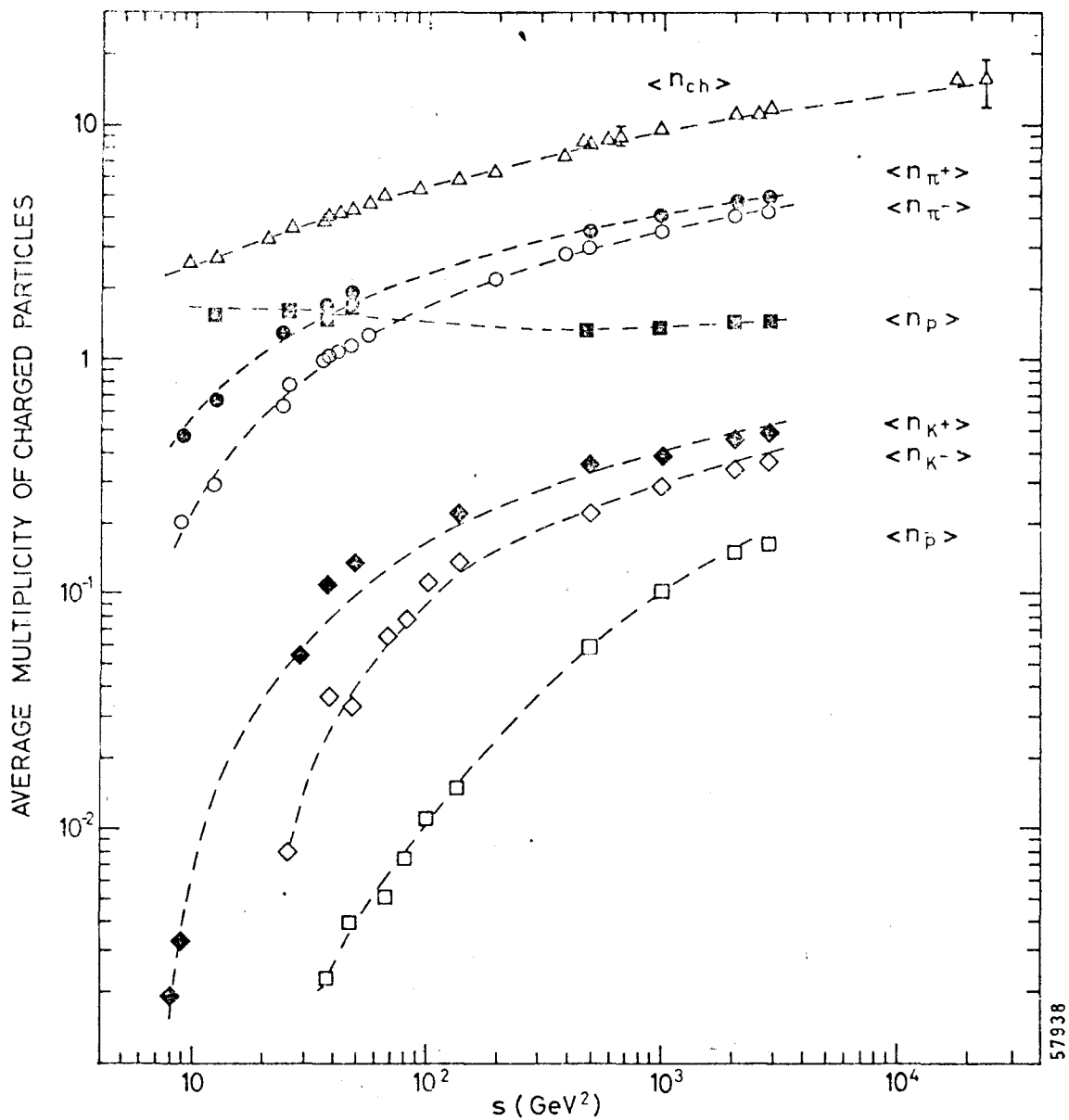
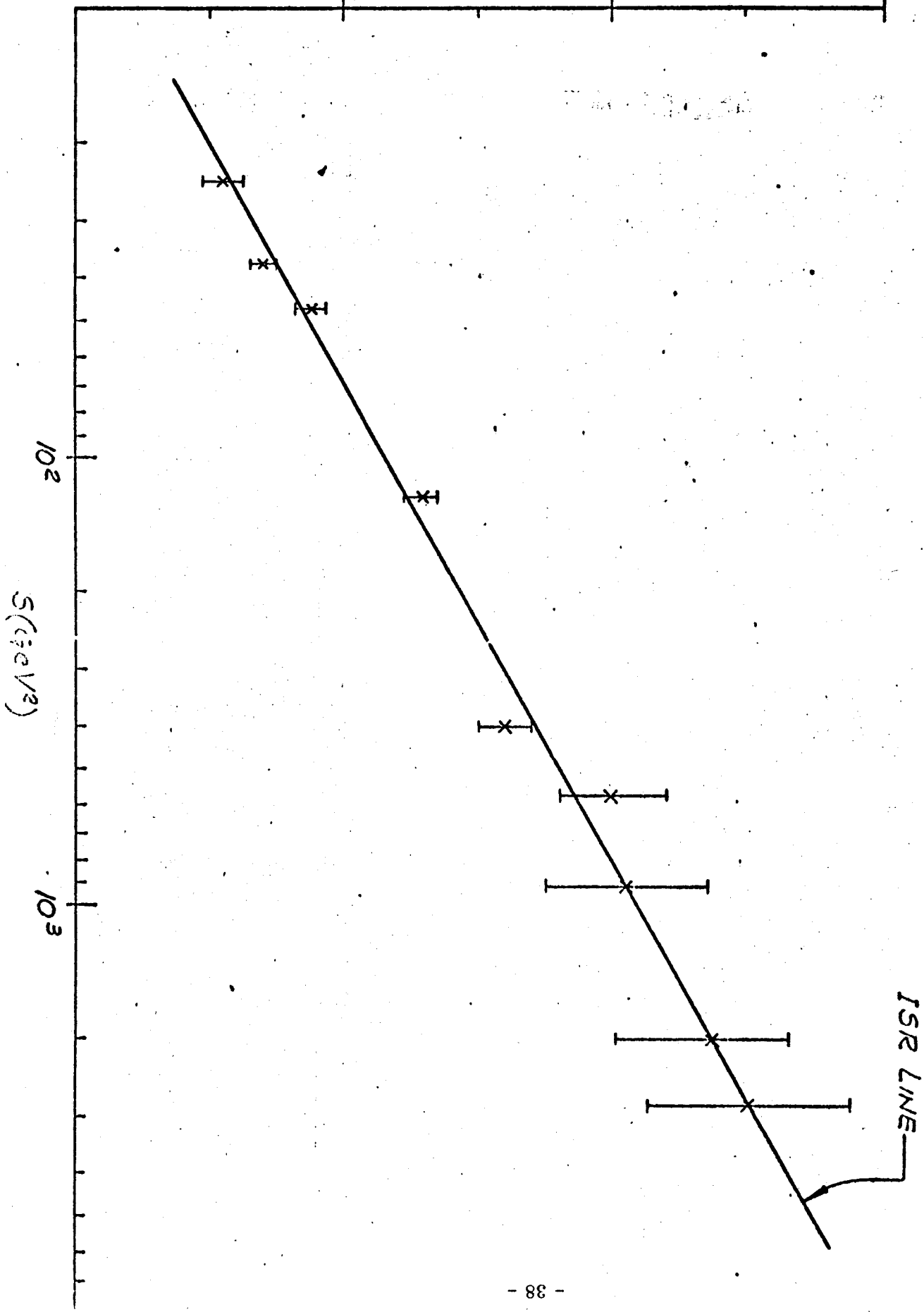


Fig 2

$\langle \pi^0 \rangle$



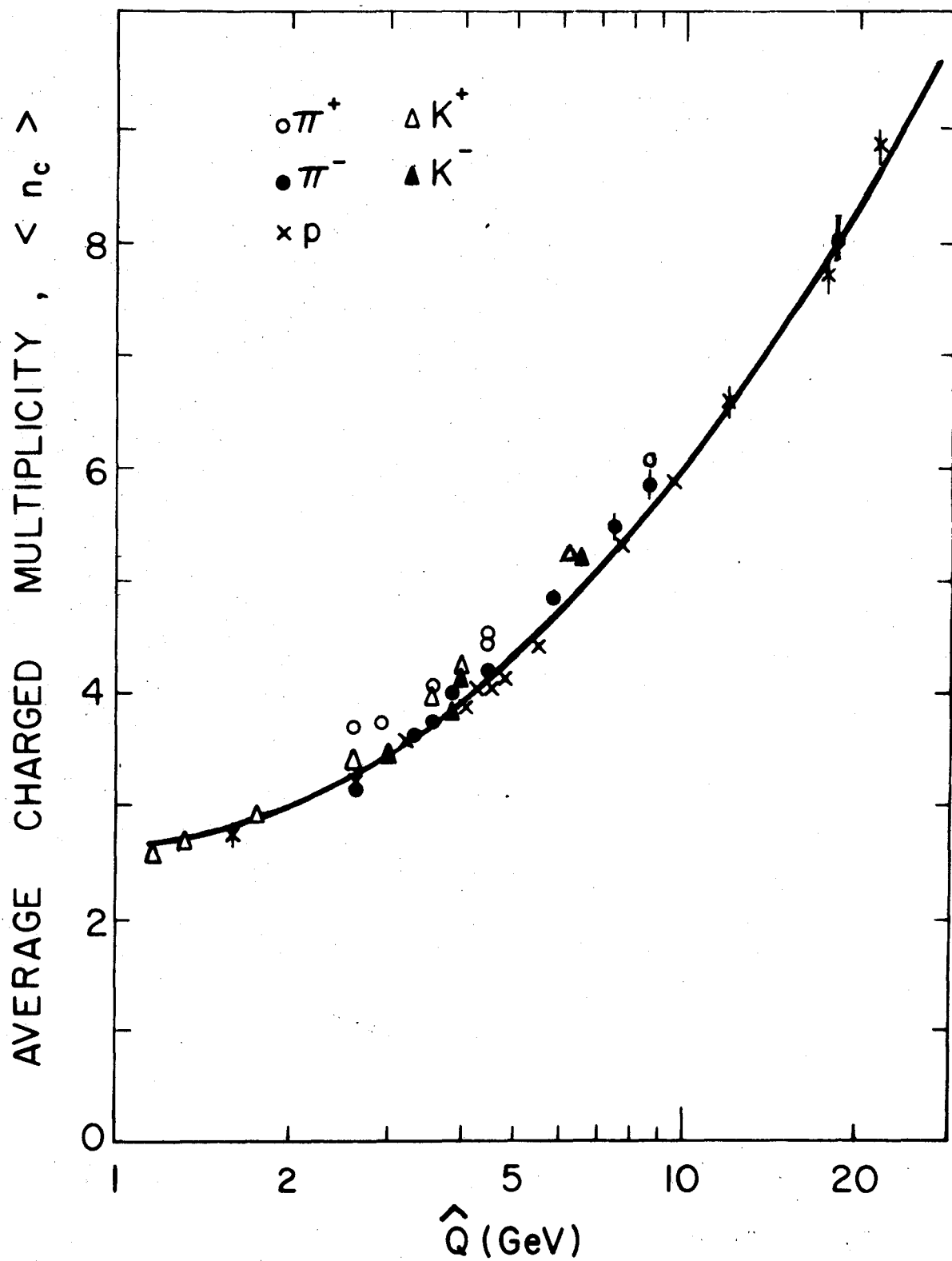
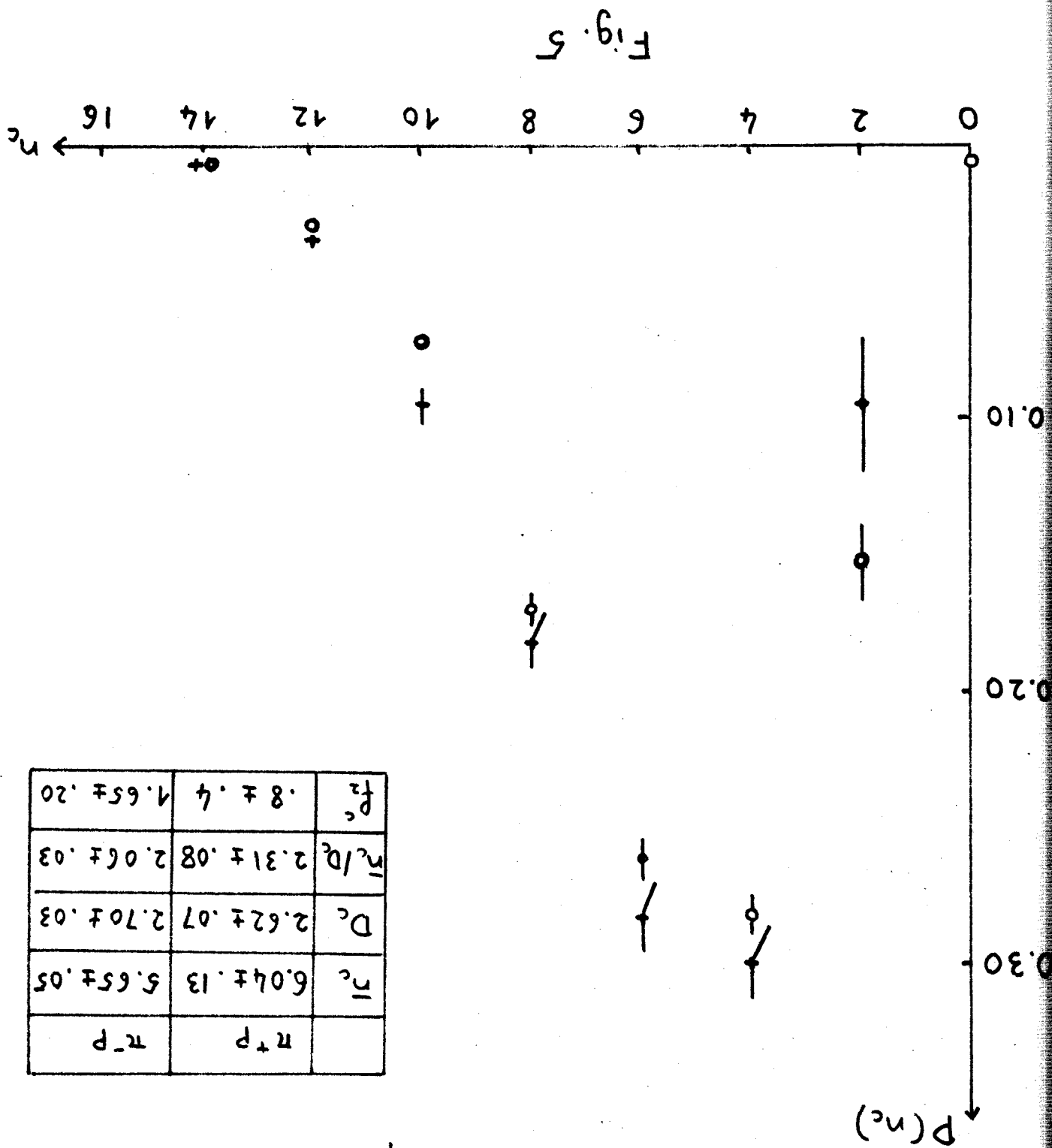


Fig. 4

+ $\pi^+ p$ 50 GeV/c
 o $\pi^- p$ 50 GeV/c

	$\pi^+ p$	π^-	D_c	n_c/q_c	f_2^c
		$6.04 \pm .13$	$2.62 \pm .07$	$2.31 \pm .08$	$.8 \pm .4$
	$\pi^- p$	$5.65 \pm .05$	$2.70 \pm .03$	$2.06 \pm .03$	$1.65 \pm .20$



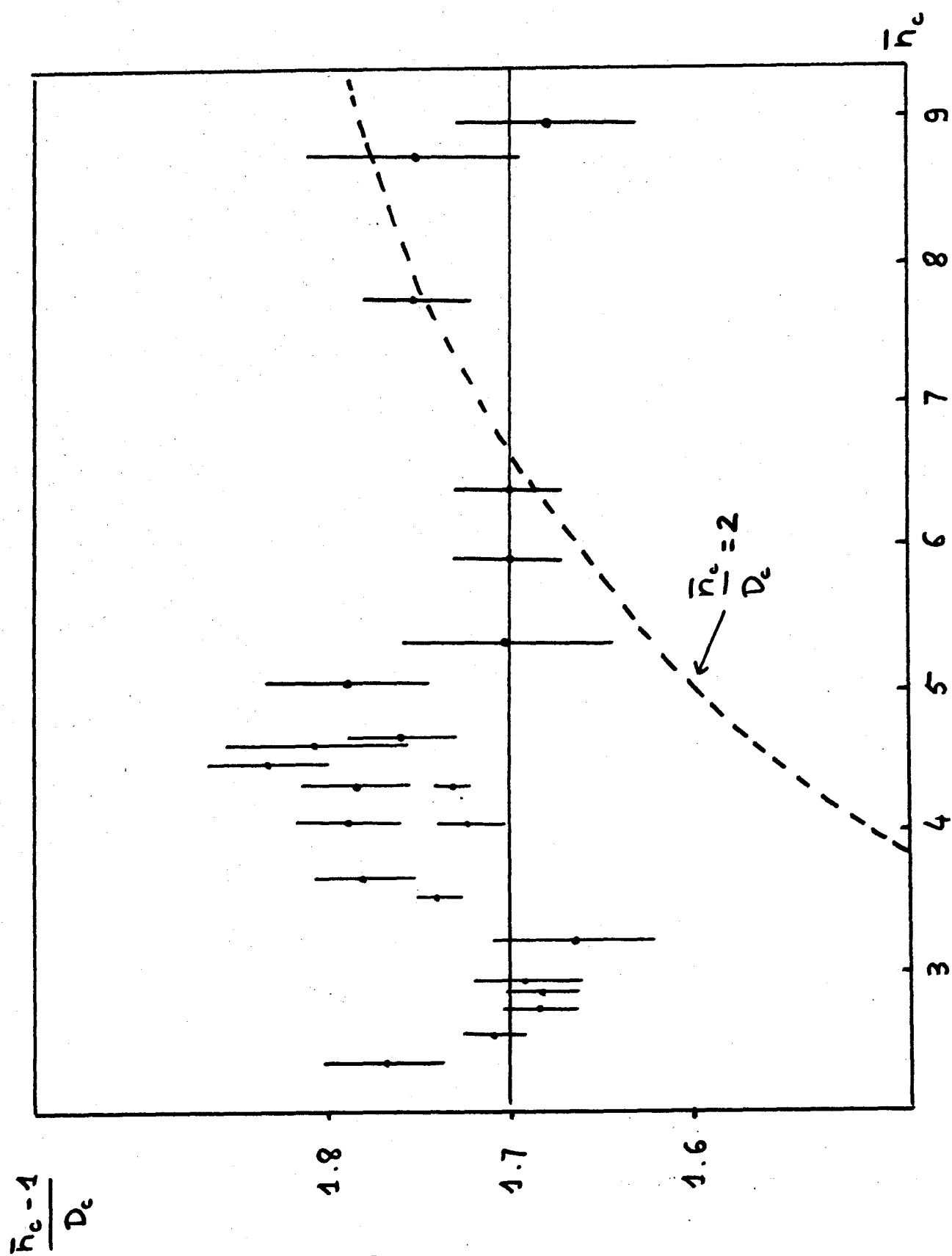


Fig. 6

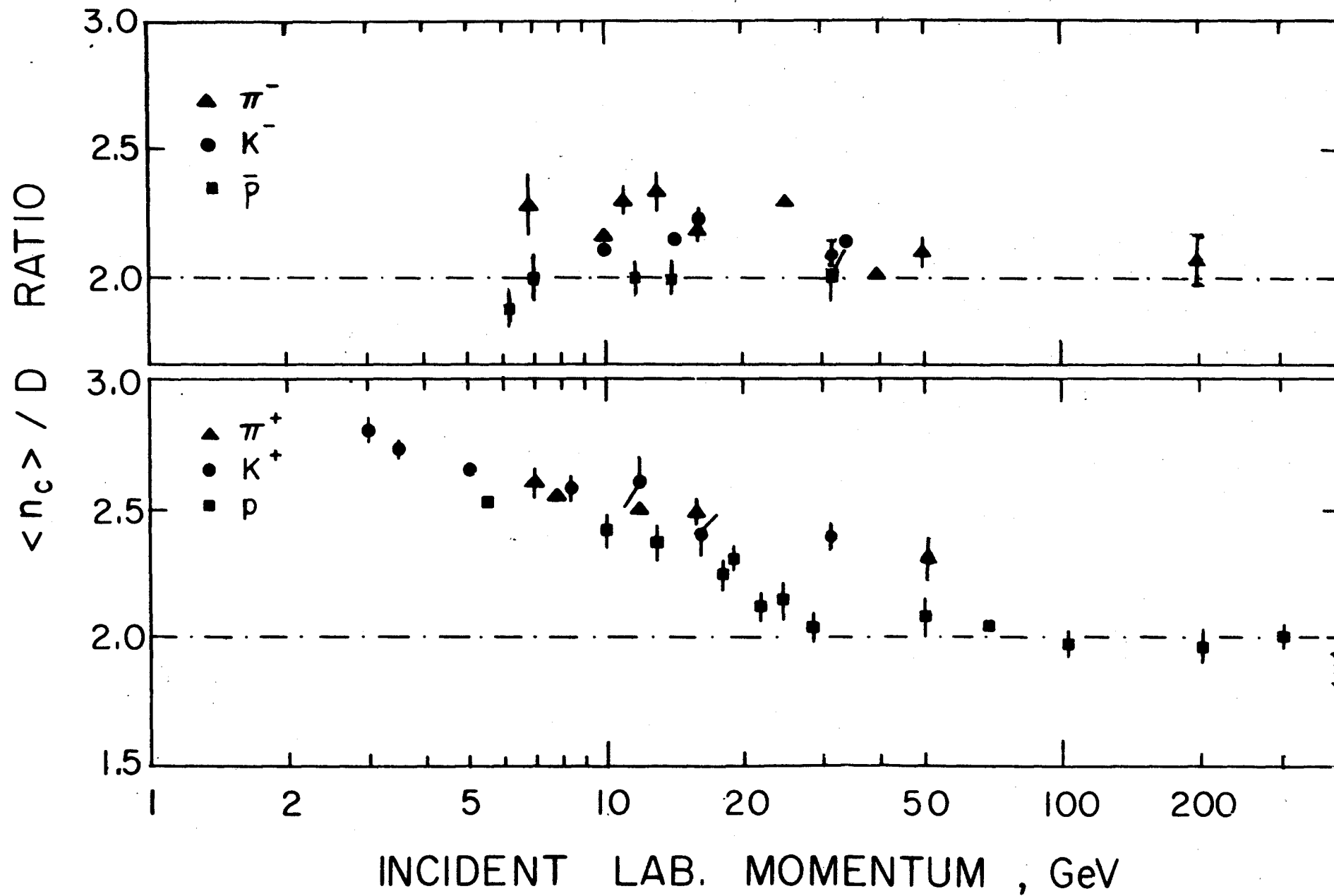


Fig. 7

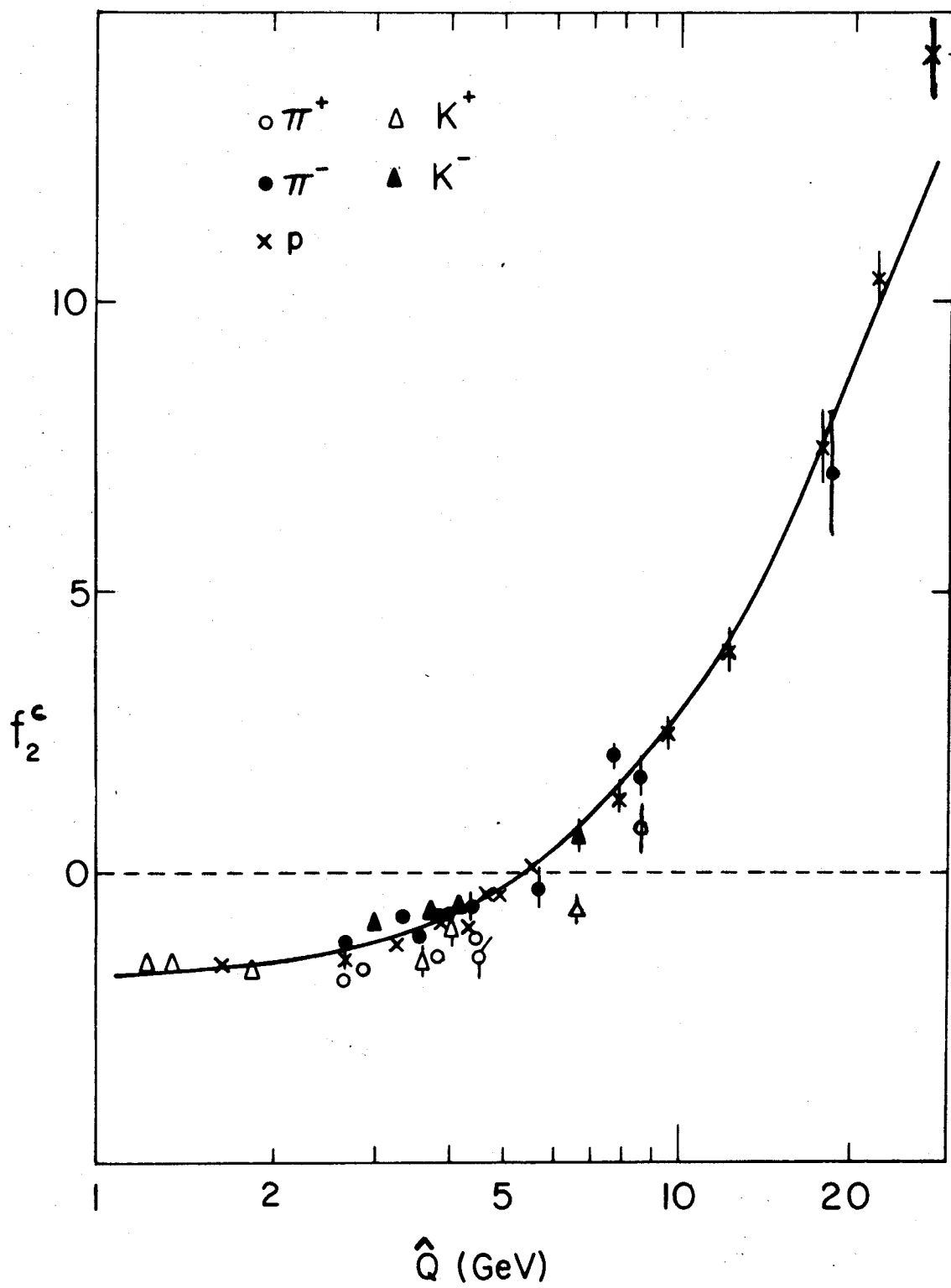
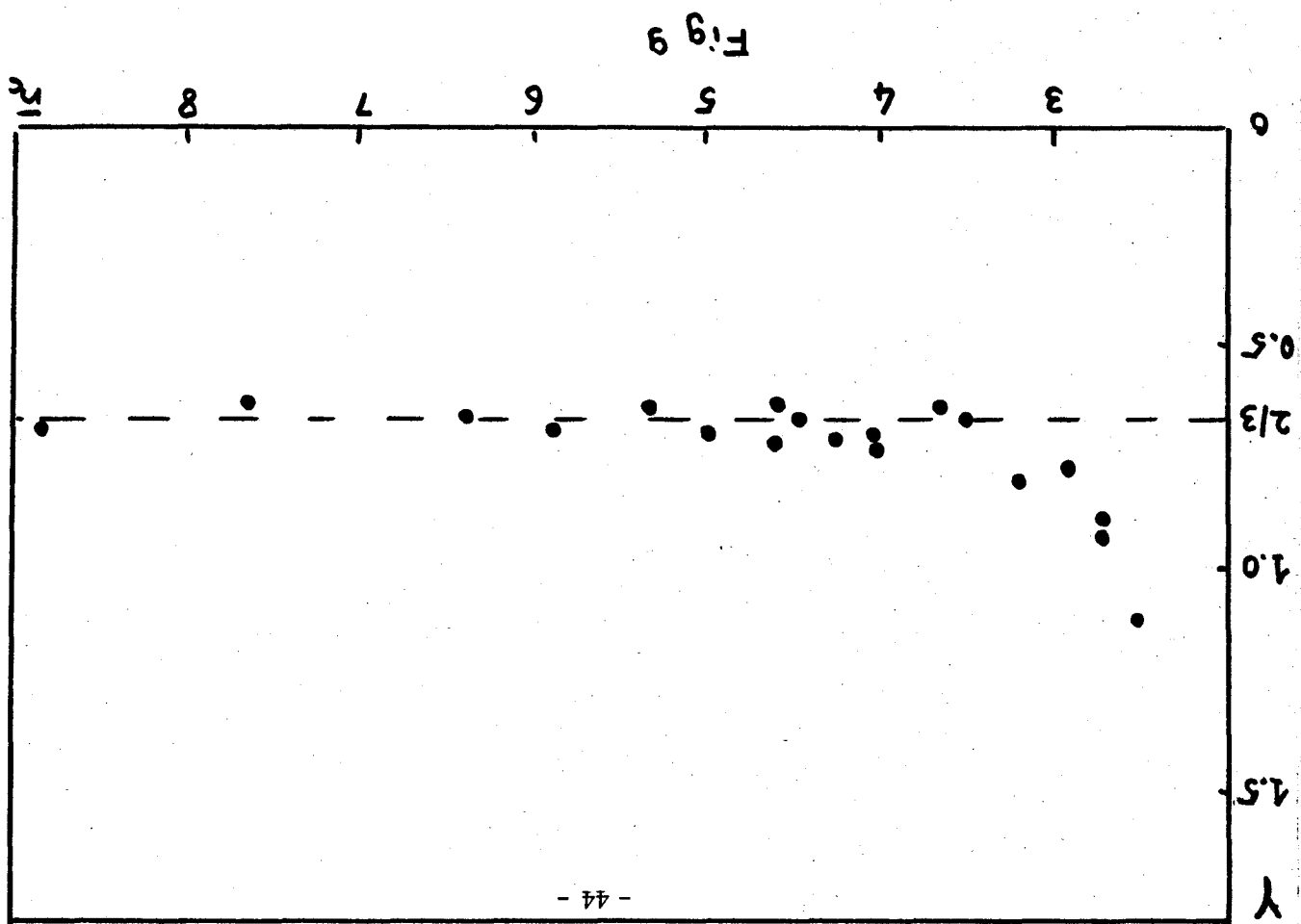
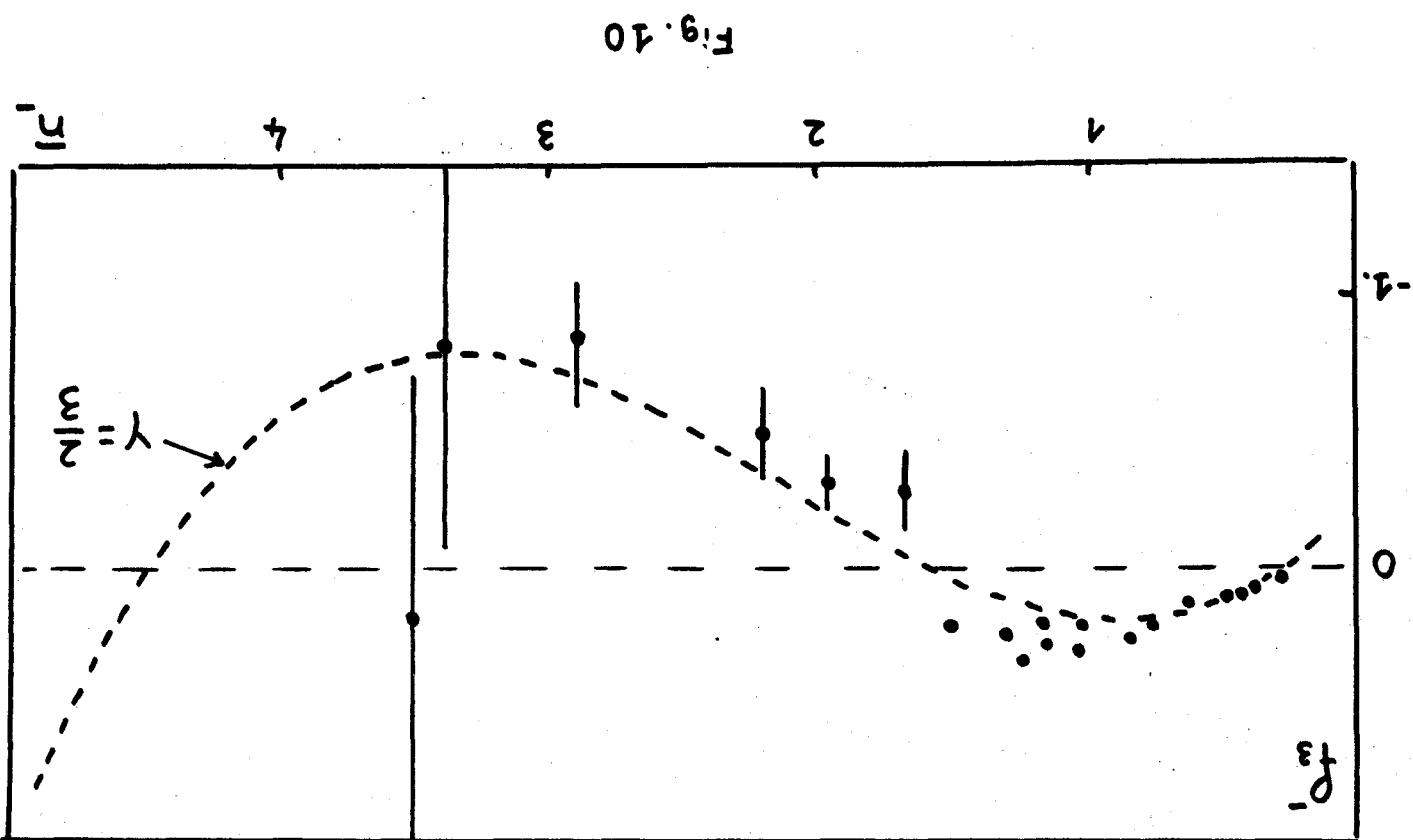
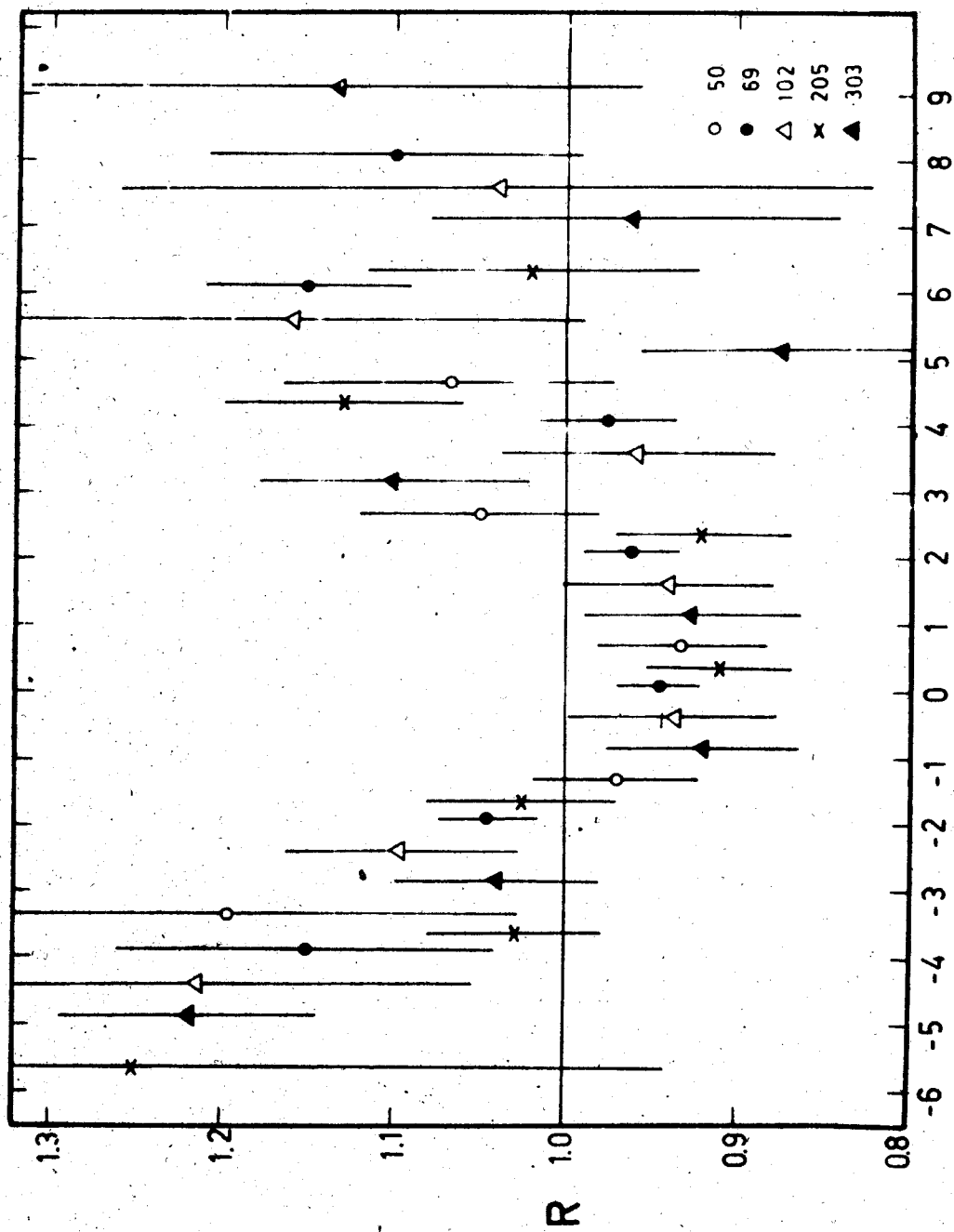


Fig. 8





$n_e - \bar{n}_e$

Fig 11

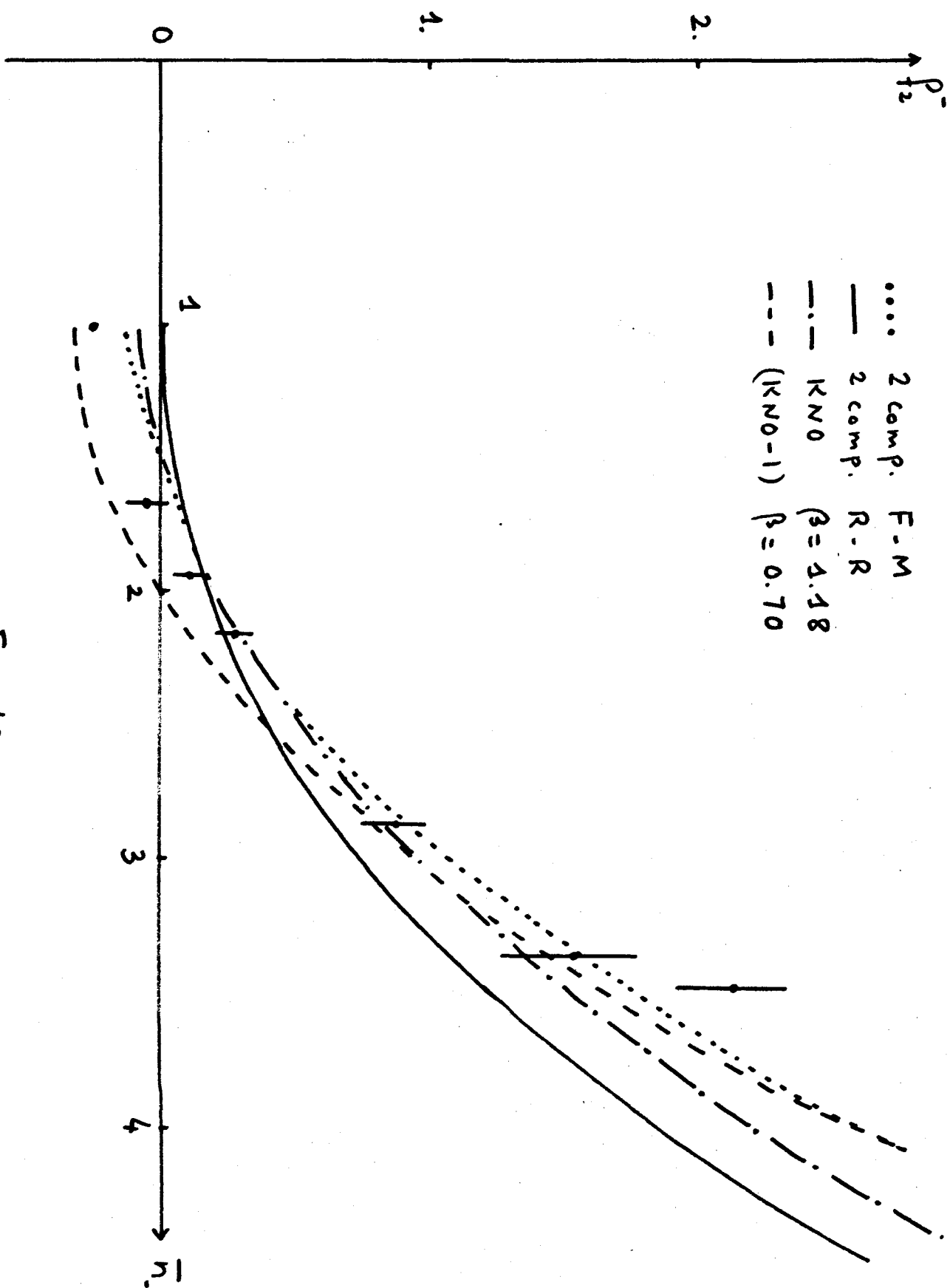


Fig. 12

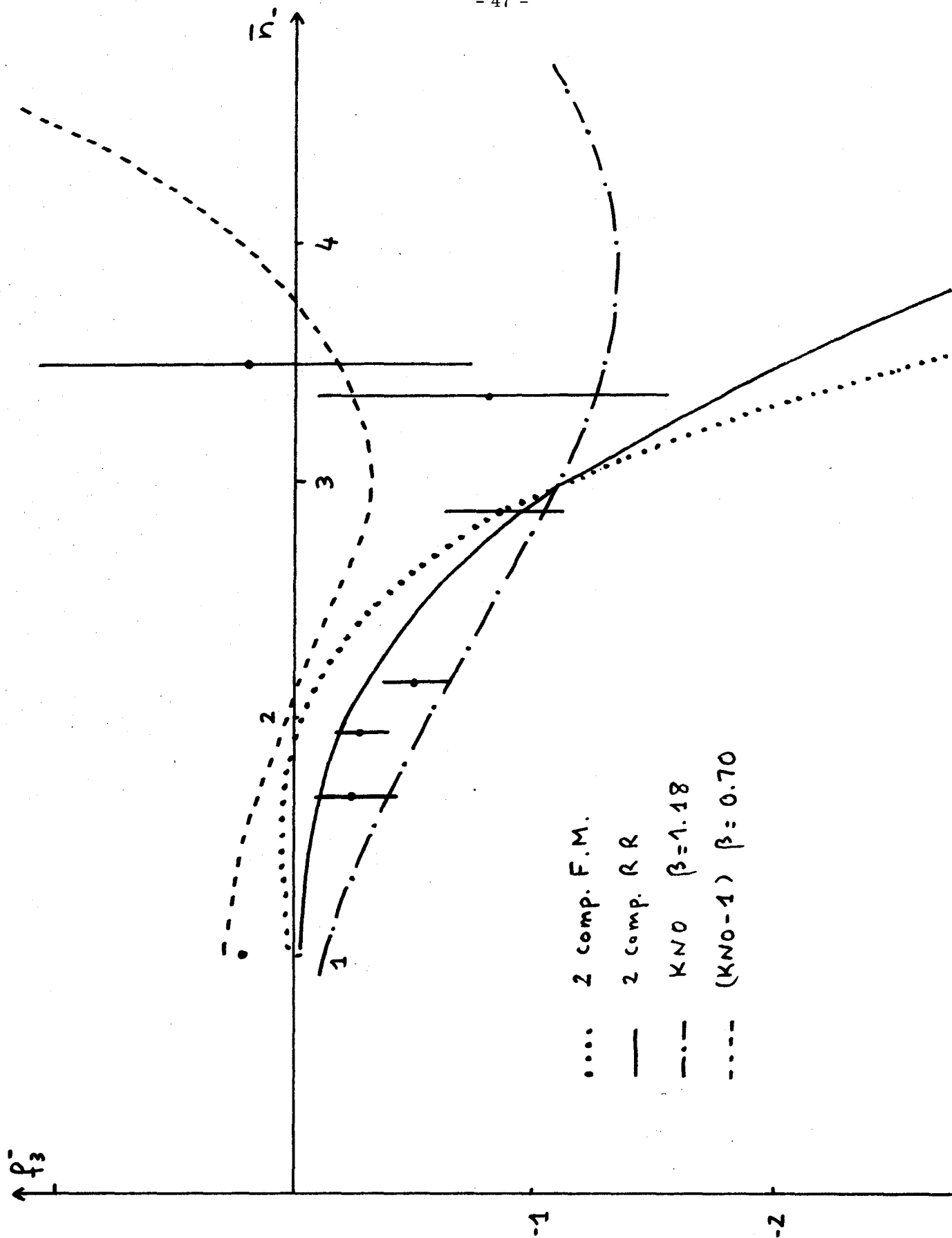
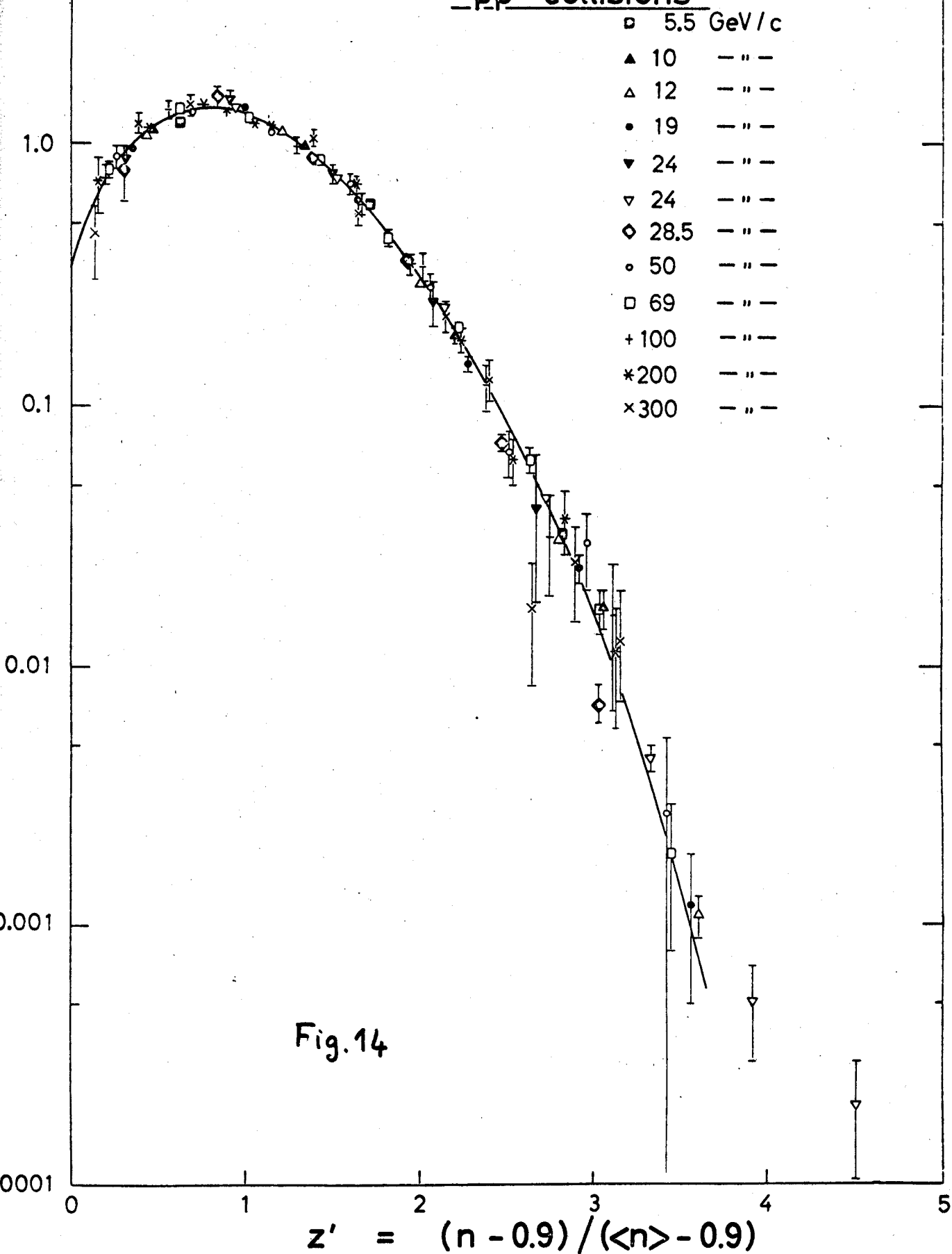


Fig. 13

-48- Charged multiplicity
distributions for
pp - collisions

$$\psi(z') = \langle n - 0.9 \rangle \sigma_n / \sigma_{\text{inel}}$$



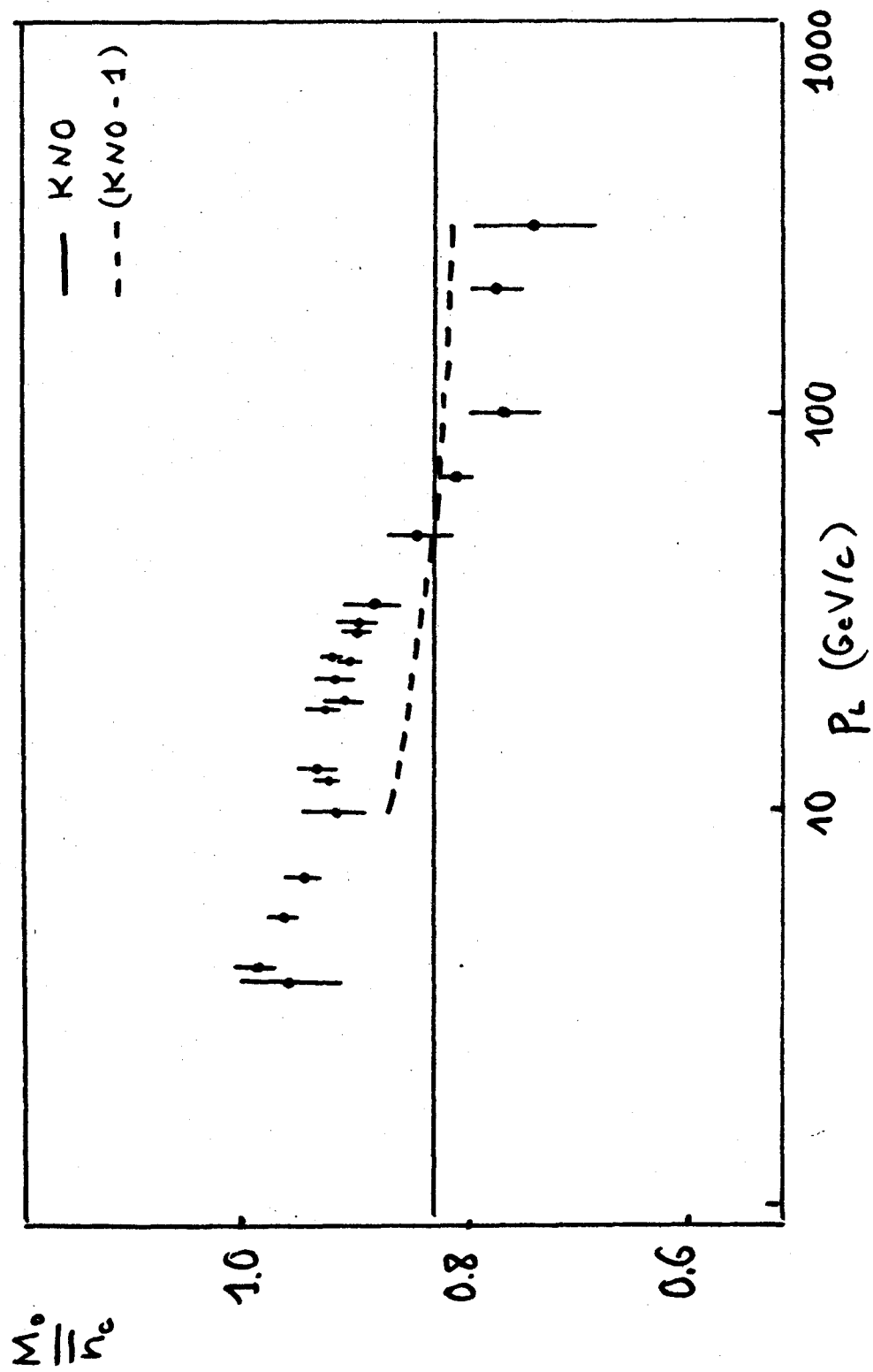


Fig. 15

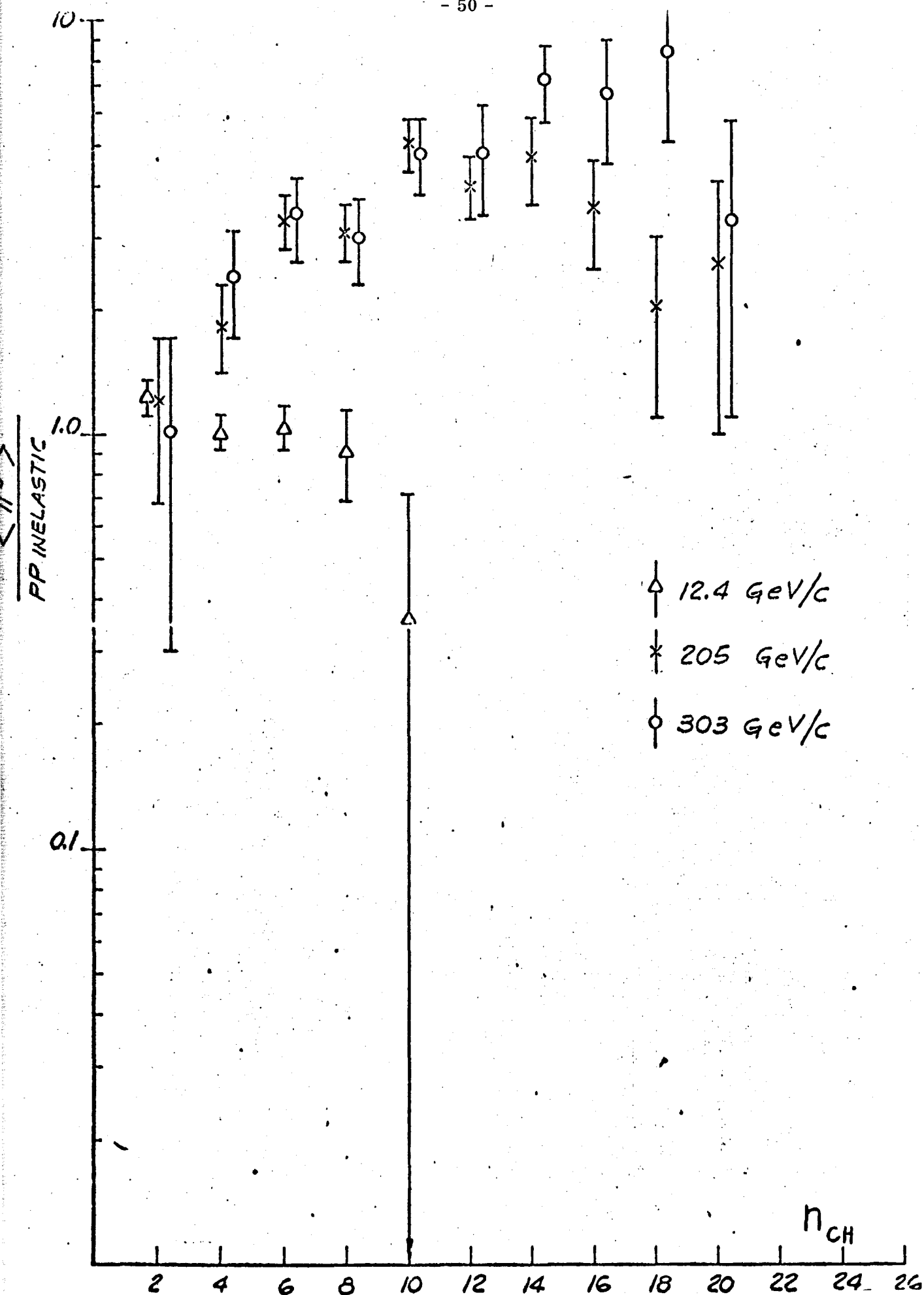


Fig. 16

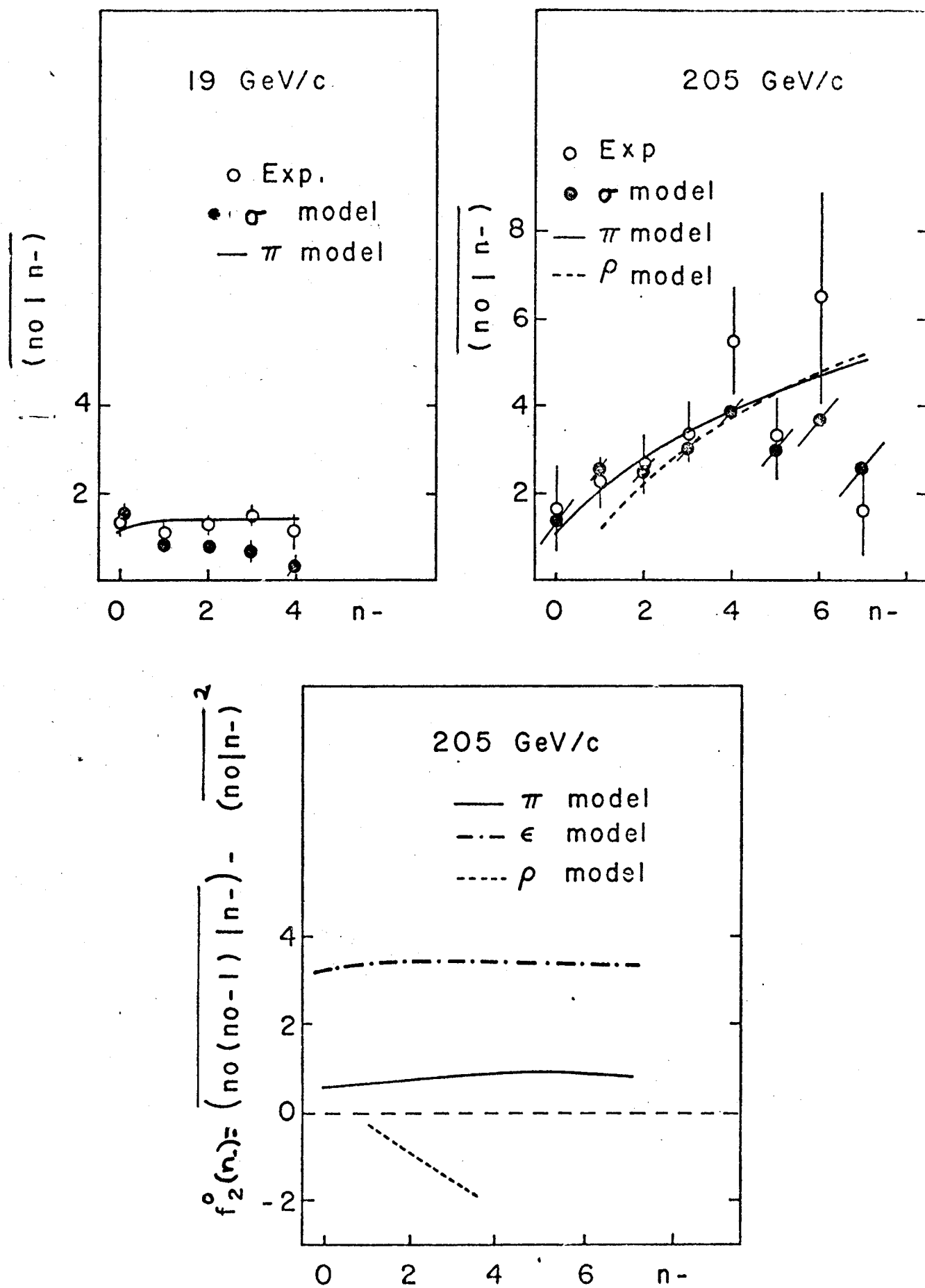


Fig 17