
РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ и МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

РОССИЙСКАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ В
СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ»

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР
«НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И
КОСМОЛОГИИ»

21 - 26 ОКТЯБРЯ 2013, Казань — Казанский университет

ТРУДЫ СЕМИНАРА и ШКОЛЫ



Казанский университет
2013

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

ББК 22.632

Т78

Печатается по рекомендации Ученого Совета Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
проф. Ю.Г. Игнатьева

Труды Российской летней школы «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» (ММ СКМ-4) и Российского семинара «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии» 21 - 26 октября 2013, Казань. / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Казанский университет, 2013. - 248 с.

В сборник вошли труды Российской летней школы и международного семинара, посвященные математическому моделированию фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики (СКМ) и современным теоретическим проблемам нелинейной физики, в частности, релятивистской теории гравитации и космологии. Материалы, содержащиеся в сборнике, представляют оригинальные статьи и обзоры специалистов из различных научных центров России и Зарубежья, а также работы начинающих исследователей. Первый Российский семинар по математическому моделированию в СКМ проходил в Казани, в 2007 году на базе ТГГПУ. Вторая и третья школа-семинар по математическому моделированию в СКМ проходили в Казани в 2010 г. (ТГГПУ) и в 2012 г. (КФУ).

Материалы сборника трудов предназначены для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования, релятивистской теории гравитации, квантовой теории поля и космологии, а также для студентов старших курсов физико-математических отделений университетов. Международный семинар продолжает традицию казанских семинаров «Gracos» по гравитации и космологии (2007, 2009, 2010, 2012).

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований:
гранты РФФИ 13-02-06076 Г и 13-01-06817 мол_г.*

ISBN 978-5-905787-61-4

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632

©Казанский университет, 2013

©Лаборатория информационных технологий в физико-математическом образовании Института математики и механики КФУ, 2013

Оглавление

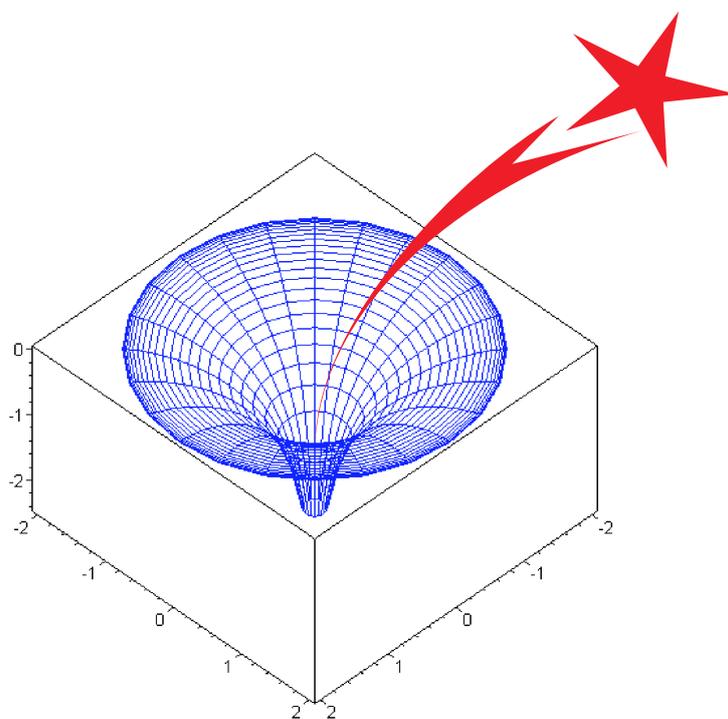
ЧАСТЬ 1. ТРУДЫ СЕМИНАРА.	8
Р.Р. Аббязов. О возмущениях в темной энергии в модели σ CDM	8
Р.А. Абзалов, С.В. Сушков . Космологическая модель с неминимальной кинетической связью	9
Е.В. Асадуллина, А.А. Попов. Эффект самодействия в длинной горловине	9
О.В. Бабурова, В.А. Луговкин. Модель эволюции Вселенной со спин-дилатационной темной материей	17
А.Б. Балакин, Н.Н. Долбилова. Эффекты электро - и магнитострикции в космологических моделях с темной энергией	18
А.М. Баранов. Обобщение одной модели внутреннего источника Райснера-Нордстрема	19
К.Е. Белоушко, В.В. Карбановский. Недиагональные космологические модели Фридмана-Робертсона-Уокера в ОТО	24
К.Е. Белоушко, В.В. Карбановский. О роли «калибровочных функций» для тензора энергии-импульса	25
С.В. Болехов. О возможных обобщениях принципа Фоккера-Фейнмана-Уилера	26
Е.С. Бородина, А.А. Попов. Заряженные антидилатонные, анти-Максвелловские кротовые норы	27
К.А. Bronnikov, M.V. Skvortsova. Variations of the fine structure constant and the gravitational constant from nonlinear multidimensional gravity	36
К.А. Бронников, В.Н. Мельников, С.Г. Рубин и И.В. Сवादковский Вариация постоянной тонкой структуры из дополнительных измерений	37
И.А. Вернигора, Ю.Г. Рудой. Об одной теоретической возможности преодоления предела Грейзена - Зацепина - Кузьмина для протонной компоненты космических лучей при сверхвысоких энергиях	38
В.Т. Волков. Оценка энерговыделений в системах тесных двойных звезд на основе предельной энергетической теоремы для поточных газовых систем	39
В.Т. Волков. Сверхзвуковые закрученные потоки газа и плазмы как основа моделирования квазигравитационных полей	43
А.С. Гаркун, В.И. Кудин и А.В. Минкевич К вопросу об устойчивости космологических решений для регулярной ускоренно-расширяющейся Вселенной в пространстве-времени Римана-Картана	48
А.К. Гуц. Оценка энергии, необходимой для свертывания пространства-времени в пружину	49
В.М. Журавлев. Гравитация, электромагнетизм и геометрия физического пространства	52
В.М. Журавлев. Точные решения в теории самогравитирующей среды. Метод гидродинамических подстановок	53
Ф.Ш. Зарипов. О двухфазной стадии эволюции Вселенной в теории индуцированной гравитации	54
М.Я. Иванов, В.К. Мамаев. Модель космологической материи в свете опытных данных современной астрофизики с приложениями к решению проблем внешней и внутренней аэродинамики	58
V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov. Quantum billiards in multidimensional models with branes	59
Ю.Г. Игнатьев, М.Л. Михайлов. Космологическое расширение двухкомпонентной плазмы с межчастичным скалярным притяжением	60

Р.В. Королев, С.В. Сушков. Точные статические сферически-симметричные решения в теории гравитации с неминимальной кинетической связью	61
А.С. Кубасов, С.В. Червон. Методы решения в киральной двухкомпонентной космологической модели. Тестирование несингулярной (Новорожденной) Вселенной	61
В.А. Лукьянов. Уравнения Эйнштейна и Максвелла как составные части уравнений Янга-Миллса	63
В.К. Мамаев, М.Я. Иванов. К вопросу вакуумного рождения и аннигиляции частиц с соблюдением законов сохранения	66
V.N. Melnikov. <i>Multidimensional Gravitation and Main Problems of Modern Physics</i>	67
А.В. Минкевич. Пуанкаре калибровочная теория тяготения, гравитационное взаимодействие и регулярная ускоренно-расширяющаяся Вселенная	69
Ю.Г. Рудой, А.В. Калмыков. Термодинамическая неустойчивость черной дыры Рейсснера-Нордстрема	74
И.В. Танатаров, О.Б. Заславский. Классификация по Петрову вблизи горизонтов вращающихся грязных черных дыр	75
Б.Н. Фролов, Е.В. Фебрес. Получение сферически симметричного решения конформной теории гравитации со скалярным полем Дезера-Дирака аналитическими и компьютерными символьными методами	76
A.V. Yaparova, A.V. Yurov. <i>Spectral index and Srödinger equation</i>	77
ЧАСТЬ 2. ТРУДЫ ШКОЛЫ.	80
К.О. Агафонова, А.А. Агафонов, С.В. Сушков Компьютерная математическая лаборатория: визуализация математического бильярда	80
Д.Ю. Ахметов, А.М. Елизаров, Е.К. Липачёв Модель сервисов электронного математического журнала и ее облачная реализация на платформе Open Journal System	86
Аян Месут. Создание управляемых динамических моделей основных механических явлений: движение тела, брошенного горизонтально	93
В.А. Бушкова. Исследование и построение анимационных моделей геодезических трубок в локально евклидовых и псевдоевклидовых римановых пространствах	97
Р.Ш. Гайнанова, О.А. Широкова. Компьютерное моделирование при решении геометрических задач средствами объектно-ориентированного программирования	97
Т.Ю. Гайнутдинова, О.А. Широкова. Особенности проведения практикума решения проблемно-ориентированных задач	101
А.М. Гатауллин, Ф.Ш. Зарипов. Внедрение принципа междисциплинарных связей в школьный образовательный процесс(на примере темы "Построение фигур вращения")	104
А.И. Гибадуллина. Использование системы Maple в среднем математическом образовании: опыт школы № 57 города Казани. Сборник методических материалов	111
А.И.Гибадуллина, К.С. Ускова. Обработка спортивных результатов с применением системы Maple	112
Д.П. Голоскоков, Д.А. Кардаков, И.А. Ивачева Математическая модель тепловых процессов в ротовой полости	113
V.A. Dedkov. <i>Algorithms for collective behavior of robots</i>	116
Н.В. Зайцева. Динамическая визуализация задач математической физики для уравнений гиперболического типа	124
Л.Ф. Зарипова, Э.В. Чеботарева. Реализация метода Дюамеля в системе компьютерной математики Maple	125
Ю.Г. Игнатьев, О.А. Сачкова. Программные процедуры автоматизированного решения обыкновенных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и оснащенной динамической визуализации их решений	131
М.Н. Кирсанов, С.А. Ларичев. Маплет для расчета прогиба плоской статически неопределимой фермы	133
И.А. Кох. Алгебра и логика в пакете Maple	137
Е.К. Липачёв. Моделирование рассеяния электромагнитных волн неровной поверхностью на основе метода вейвлетов	138

Р.М. Мавлявиев, И.Б. Гарипов. Фундаментальное решение одного линейного B – эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами	142
П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Метод максимальной энтропии и модели солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы	145
Д.А. Мусаева, В. Гежа, А.А. Синявин, В.К. Ильин. Выбор модели турбулентности для моделирования движения расплава под действием импульсного магнитного поля	146
А.М. Нигмедзянова. Оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников	151
O.S Ryzhkov, N.I. Smirnov. Calculation of the automatic control system (an iterative and numerical methods)	157
А.Р. Самигуллина. Компакт-диск с обучающими материалами по курсу высшей математики с применением СКМ Maple	161
Э.Д. Хусаинова. Решение одной сингулярной задачи дифракции с условиями сопряжения на m концентрических полуокружностях	165
ЧАСТЬ 3. ТРУДЫ СЕМИНАРА: ЛЕКЦИИ И ОБЗОРЫ.	168
В. Дьяконов. Свободные системы компьютерной математики в фундаментальных расчетах и моделировании	168
Ю.Г. Игнатьев. Термодинамическое равновесие в ускоренной Вселенной не достижимо?	201
А.С. Кубасов, С.В. Червон. Методы конструирования точных решений в двухкомпонентной киральной космологической модели	224
ЧАСТЬ 4. РАЗНОЕ / В ПОРЯДКЕ ОБСУЖДЕНИЯ.	240
В.Д. Андреев. Время \rightarrow гравитация \rightarrow масса в модели инверсно–сопряженных пространств . .	240
Б.С. Кочкарев. Доказательство гипотезы Эдмондса и решение проблемы Кука	241
ЧАСТЬ 5. МЕМОРИАЛ.	244
Ю.Г. Игнатьев. Сергей Викторович Червон	244

ТРУДЫ СЕМИНАРА

**ЧАСТЬ 1. ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА**



КАЗАНЬ—КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ 2013

О ВОЗМУЩЕНИЯХ В ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ В МОДЕЛИ σ CDMР.Р. Аббязов¹Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова,
Ульяновск¹E-mail: renren2007@yandex.ru

Последние экспериментальные данные свидетельствуют о доминировании на современном этапе эволюции Вселенной темной энергии. В связи с этим большой интерес вызывают различные модели темной энергии, описывающие переход Вселенной к ускоренному расширению. σ CDM модель, впервые представленная в работе [2], содержит скалярные поля киральной космологической модели (ККМ) [1] которой взаимодействуют через метрику Фридмана с холодной темной материей (CDM) и потенциально способна описать поздний этап эволюции Вселенной. Кроме того, в предложенной модели содержится взаимодействие кинетического типа помимо взаимодействия через потенциал, что приводит к новым эффектам в эволюции возмущений компонент Вселенной, и, в частности, компоненты темной энергии, описываемой скалярными полями ККМ.

В настоящей работе мы рассматриваем σ CDM модель с действием в виде

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} h_{AB} \partial_\mu \varphi^A \partial_\nu \varphi^B - V(\varphi^A) \right) + S_{pf},$$

где S_{pf} часть действия, описывающего идеальную жидкость (в данном случае — холодную темную материю) и с диагональной метрикой внутреннего пространства ККМ в виде $h_{11} = 1$, $h_{22} = \exp\left(\sqrt{\mu} \frac{\varphi - \varphi_i}{M_{Pl}}\right)$ и потенциалом взаимодействия в виде $V = V_0 \exp\left(-\sqrt{\lambda} \frac{\varphi}{M_{Pl}}\right) + V_0 \exp\left(-\sqrt{\lambda} \frac{\chi}{M_{Pl}}\right)$, где $M_{Pl} \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$. Результаты интегрирования уравнений модели основано на подходе, представленном в [2]. Было исследовано поведение возмущений в темной энергии при изменении потенциального взаимодействия между скалярными полями в ККМ. Оказалось (с.м. 1), что возмущения в темной энергии в моделях, согласующихся с экспериментальными данными, достигают значительных величин при определенных значениях параметра потенциального взаимодействия, что может привести к корректировке стандартных представлений о формировании крупномасштабной структуры во Вселенной.

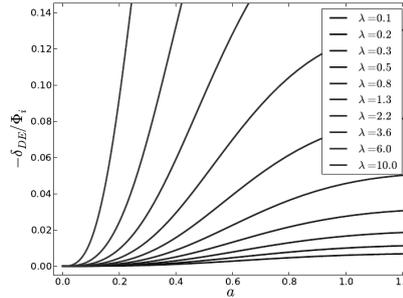


Рис. 1: Возмущения в темной энергии.

Литература

- [1] S.V. Chervon. Chiral cosmological models: Dark sector fields description. *Quantum Matter*, 2(2):71–82, 2013.
- [2] R.R. Abbyazov and S.V. Chervon. Interaction of chiral fields of the dark sector with cold dark matter. *Gravitation and Cosmology*, 18(4):262–269, 2012.

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ

Р.А. Абзалов¹, С.В. Сушков²

¹Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет,

²Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

¹E-mail: , ²E-mail:

В работе исследована космологическая модель с неминимальной кинетической связью скалярного поля с кривизной, а также идеальной двухкомпонентной жидкостью и космологической постоянной. Показано, что рассматриваемая модель хорошо описывает основные эпохи эволюции Вселенной, включая первичную инфляцию, радиационно-доминированную стадию, материально-доминированную стадию, и стадию современного ускоренного расширения (вторичную инфляцию).

ЭФФЕКТ САМОДЕЙСТВИЯ В ДЛИННОЙ ГОРЛОВИНЕ

Е.В. Асадуллина¹, А.А. Попов²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: asadulinaelena@gmail.com, ²E-mail: apopov@ksu.ru

Аннотация. В работе исследуется сила самодействия на статический заряд, являющийся источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля, в области пространства-времени, называемой длинной горловиной.

1 Введение

Изучение силы самодействия имеет длинную историю. Оригинальные исследования сосредотачивались на самоускорении электрически заряженных точечных частиц в плоском пространстве-времени [1]. Позже Де-Витт, Брем и Хоббс [2] изучили влияние силы самодействия на заряд в искривленном пространстве-времени. В отличие от случая с плоским пространством-временем эта сила может быть не нулевой даже для статических зарядов в искривленном пространстве.

Было проанализировано некоторое количество статических конфигураций, в том числе самовоздействие в пространстве-времени черной дыры Шварцшильда [3, 4], черной дыры Керра [5], черной дыры Керра-Ньюмана [4] и в статическом симметричном поле Бранса-Дикке [6]. Аналитические приближения силы самодействия были получены для скалярного заряда, покоящегося в осесимметричном пространстве-времени [7]. Сила самодействия может быть не нулевой для статической частицы в плоском пространстве-времени топологических дефектов [8].

В искривленном пространстве-времени с нетривиальной топологической структурой исследования этого типа имеют дополнительные интересные особенности [9, 10].

Эффект самовоздействия связан с нелокальной структурой безмассового поля, источником которого является заряженная частица. Например, сила самодействия скалярного заряда это [11]

$$f_{\mu} = q^2 \left[\frac{1}{3} (\dot{a}_{\mu} - a^2 u_{\mu}) + \frac{1}{6} (R_{\mu}^{\nu} u_{\nu} + R_{\nu\gamma} u^{\nu} u^{\gamma} u_{\mu}) + \frac{1}{12} (6\xi - 1) R u_{\mu} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau-\epsilon} \nabla_{\mu} G_{ret}(x, x') d\tau' \right] \quad (1)$$

где u_{μ} - это 4-скорость заряда, a_{μ} - это 4-ускорение, $\dot{a}_{\mu} = \partial a_{\mu} / \partial \tau$ - это производная 4-ускорения по собственному времени τ заряда, $G_{ret}(x, x')$ - это запаздывающая скалярная функция Грина и ξ константа связи скалярного поля с кривизной.

Существуют такие ситуации, в которых эффект самодействия определяется локальной геометрией искривленного пространства-времени. Например, такая ситуация имеет место для статического заряда в горловине кротовой норы, если длина этой горловины гораздо больше, чем ее радиус. В качестве примера таких кротовых нор можно рассматривать пространство-время с метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \left(r_0 + \rho \tanh \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2)$$

или

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \left(r_0 + \rho \coth \frac{\rho}{\rho_0} - \rho_0\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3)$$

где r_0 , ρ_0 - константы (r_0 - радиус горловины, ρ_0 - параметр, который описывает длину горловины) и

$$\frac{r_0}{\rho_0} \ll 1. \quad (4)$$

Эффект самодействия в области $\rho \lesssim \rho_0$ не зависит от геометрии пространства-времени за пределами этой области, и мы будем называть эту область длинной горловиной (точное определение длинной горловины см. ниже).

На протяжении всей работы мы используем единицы $c = G = 1$.

2 Общие принципы

Рассмотрим уравнение для скалярного безмассового поля с источником

$$\phi_{;\mu}^{;\mu} - (\xi R + m^2)\phi = -J = -4\pi q \int \delta^{(4)}(x - x_0(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g^{(4)}}}, \quad (5)$$

где ξ - константа связи скалярного поля массы m с кривизной R , $g^{(4)}$ - детерминант метрики $g_{\mu\nu}$, q - скалярный заряд и τ - его собственное время. Мировая линия заряда определяется функциями $\tilde{x}^\mu(\tau)$.

Метрика статического пространства-времени может быть представлена в виде:

$$ds^2 = g_{tt}(x^i)dt^2 + g_{jk}(x^i)dx^j dx^k, \quad (6)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$. Это означает, что можно написать уравнение поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{g^{(3)}}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{g^{(3)}} g^{jk} \frac{\partial \phi(x^i; \tilde{x}^i)}{\partial x^k} \right) - (\xi R(x) + m^2)\phi(x^i; \tilde{x}^i) \\ = -\frac{4\pi q \delta^{(3)}(x^i, \tilde{x}^i)}{\sqrt{g^{(3)}}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $g^{(3)} = \det g_{ij}$ и мы примем во внимание, что $d\tau/dt = \sqrt{g_{tt}}$ для покоящейся (статической) частицы. Процедура оценки силы самодействия требует перенормировки скалярного потенциала $\phi(x; \tilde{x})$, который расходится в пределе $x \rightarrow \tilde{x}$ (см., например, [13, 14]).

Эта перенормировка может быть достигнута путем вычитания из $\phi(x; \tilde{x})$ контрчлена ДеВитта-Швингера $\phi_{DS}(x; \tilde{x})$ и затем устремляя $x \rightarrow \tilde{x}$ [15]:

$$\phi_{ren}(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} [\phi(x; \tilde{x}) - \phi_{DS}(x; \tilde{x})], \quad (8)$$

где

$$\phi_{DS}(x^i; \tilde{x}^i) = q \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{\partial g_{tt}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\sigma^i}{4g_{tt}(\tilde{x})\sqrt{2\sigma}} - m \right), \quad (9)$$

σ - половина квадрата расстояния между точками x и \tilde{x} вдоль кратчайшей геодезической, соединяющей их.

$$\sigma = \frac{g_{ij}(\tilde{x}) \sigma^i \sigma^j}{2} \quad (10)$$

- это половина квадрата расстояния между точками \tilde{x}^i и x^i вдоль кратчайшей геодезической, соединяющей их, и (см., например, [16, 17])

$$\begin{aligned} \sigma^i = & - (x^i - \tilde{x}^i) - \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i (x^j - \tilde{x}^j) (x^k - \tilde{x}^k) \\ & - \frac{1}{6} \left(\Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial \tilde{x}^l} \right) (x^j - \tilde{x}^j) (x^k - \tilde{x}^k) (x^l - \tilde{x}^l) + O((x - \tilde{x})^4), \end{aligned} \quad (11)$$

символы Кристоффеля Γ_{jk}^i вычисляются в точке \tilde{x} .

Наконец сила самодействия, действующая на статический заряд это

$$f_i(x) = -\frac{q}{2} \nabla_i \phi_{ren}(x). \quad (12)$$

3 ВКБ аппроксимация для силы самодействия

Метрика статического сферически симметричного пространства-времени рассматривается ниже

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (13)$$

В этом пространстве-времени уравнение (7) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - (\xi R + m^2) \right] \phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \\ = -\frac{4\pi q \delta(\rho, \tilde{\rho}) \delta(\theta, \tilde{\theta}) \delta(\varphi, \tilde{\varphi})}{r^2 \sin \theta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Благодаря сферической симметрии рассматриваемой задачи, мы представляем потенциал в виде

$$\phi(x^\alpha; \tilde{x}^\alpha) = q \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) g_l(\rho, \tilde{\rho}), \quad (15)$$

где $\cos \gamma \equiv \cos \theta \cos \tilde{\theta} + \sin \theta \sin \tilde{\theta} \cos(\varphi - \tilde{\varphi})$ и $g_l(\rho, \tilde{\rho})$ удовлетворяют уравнению

$$g_l'' + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2} \right) g_l' - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R \right] g_l = -\frac{\delta(\rho, \tilde{\rho})}{r^2}. \quad (16)$$

В этом выражении и ниже штрихом обозначена производная по ρ . Однородные решения этого уравнения будем обозначать через $p_l(\rho)$ и $q_l(\rho)$. $p_l(\rho)$ — это выбранное решение, которое хорошо ведет себя при $\rho = -\infty$ и расходится при $\rho \rightarrow +\infty$. $q_l(\rho)$ — это выбранное решение, которое расходится при $\rho \rightarrow -\infty$ и хорошо себя ведет при $\rho = \infty$. Таким образом,

$$\left\{ \frac{d}{d\rho^2} + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2} \right) \frac{d}{d\rho} - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R \right] \right\} \begin{Bmatrix} p_l(\rho) \\ q_l(\rho) \end{Bmatrix} = 0, \quad (17)$$

$$g_l(\rho, \tilde{\rho}) = C_l p_l(\rho_{<}) q_l(\rho_{>}) = C_l \left[\Theta(\tilde{\rho} - \rho) p_l(\rho) q_l(\tilde{\rho}) - \Theta(\rho - \tilde{\rho}) p_l(\tilde{\rho}) q_l(\rho) \right], \quad (18)$$

где $\Theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда, т.е., $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$, C_l - константа нормировки, которая может быть включена в определение p_l и q_l . Нормировка g_l достигается интегрированием (16) один раз по ρ от $\tilde{\rho} - \delta$ до $\tilde{\rho} + \delta$ и стремлением $\delta \rightarrow 0$. Это приводит к условию на Вронскиан

$$C_l \left(p_l \frac{dq_l}{d\rho} - q_l \frac{dp_l}{d\rho} \right) = -\frac{1}{r^2}. \quad (19)$$

ВКБ-приближение для радиальных мод p_l и q_l получается заменой переменных

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{1}{\sqrt{2r^2 W}} \exp \left(\int^\rho W d\rho \right), \\ q_l &= \frac{1}{\sqrt{2r^2 W}} \exp \left(- \int^\rho W d\rho \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Подстановка этих выражений в (19) показывает, что условие на Вронскиан выполняется, если

$$C_l = 1. \quad (21)$$

Подстановка в выражение на моду (17) дает следующее уравнение для W :

$$\begin{aligned} W^2 = & \frac{l(l+1) + m^2 r^2 + 2\xi}{r^2} + \frac{(W^2)''}{4W^2} - \frac{5(W^2)'^2}{16W^4} + \frac{(r^2)''}{2r^2} \\ & - \frac{(r^2)'^2}{4r^4} + \frac{Wf'}{2f} + \frac{(r^2)'f'}{4r^2 f} + \frac{(W^2)'f'}{8W^2 f} \\ & + \xi \left(-2\frac{(r^2)''}{r^2} + \frac{(r^2)'^2}{2r^4} - \frac{(r^2)'f'}{r^2 f} - \frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{2f^2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Это уравнение может быть решено методом итераций, если метрическая функция $r^2(\rho)$ меняется медленно, то есть,

$$\varepsilon_{\text{WKB}} = L_*/L \ll 1, \quad (23)$$

где

$$L_*(\rho) = \frac{r(\rho)}{\sqrt{2\xi + m^2 r^2(\rho)}}, \quad (24)$$

и L - характерный масштаб изменения $r(\rho)$ и $f(\rho)$:

$$\frac{1}{L(\rho)} = \max \left\{ \left| \frac{r'}{r} \right|, \left| \frac{f'}{f} \right|, \left| \frac{r'}{r} \sqrt{|\xi|} \right|, \left| \frac{f'}{f} \sqrt{|\xi|} \right|, \left| \frac{r''}{r} \right|^{1/2}, \left| \frac{f''}{f} \right|^{1/2}, \dots \right\}. \quad (25)$$

Мы будем называть область пространства-времени, где метрические функции $r(\rho)$ и $f(\rho)$, медленно меняются, *длинной горловиной*.

Нулевой порядок ВКБ решения уравнения (22) соответствует пренебрежению членами с производными в этом уравнении

$$W^2 = \Omega \cdot \left(1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2) \right), \quad (26)$$

где

$$\Omega(\rho, l + 1/2) = \frac{l(l+1) + m^2 r^2 + 2\xi}{r^2} = \frac{1}{r(\rho)^2} \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \mu^2 \right], \quad (27)$$

и

$$\mu^2 = 2\xi - \frac{1}{4} + m^2 r^2. \quad (28)$$

Ниже предполагается, что

$$\mu^2 > 0. \quad (29)$$

Подчеркнем, что Ω - это точное решение уравнения (22) в пространстве-времени с метрикой $ds^2 = -f_0 dt^2 + d\rho^2 + r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, где f_0, r_0 - константы.

Подставляя решение (26) в (20) и (28), и пренебрегая членами второго порядка и выше по отношению к ε_{WKB} , мы можем получить следующее выражение для приближения нулевого порядка ВКБ аппроксимации для $\phi(x^\alpha; \tilde{x}^\alpha)$ при условиях $\theta = \tilde{\theta}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$ и $\tilde{\rho} = \rho + \delta\rho > \rho$

$$\phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) = \frac{q}{r(\rho)r(\tilde{\rho})} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{\exp \left(- \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', l + \frac{1}{2})} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, l + \frac{1}{2}) \Omega(\tilde{\rho}, l + \frac{1}{2})}}. \quad (30)$$

Сумма по l может быть вычислена с помощью метода суммирования Плана (см., например, [19])

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) = & \frac{q}{r(\rho)r(\tilde{\rho})} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\exp \left(- \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', x)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, x) \Omega(\tilde{\rho}, x)}} x dx \right. \\ & + \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon} \frac{\exp \left(- \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', z)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, z) \Omega(\tilde{\rho}, z)} (1 + e^{i2\pi z})} z dz \\ & \left. - \int_{\epsilon}^{\epsilon + i\infty} \frac{\exp \left(- \int_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho', z)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho, z) \Omega(\tilde{\rho}, z)} (1 + e^{-i2\pi z})} z dz \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Первый интеграл в этом выражении может быть переписан следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \frac{q}{r(\rho)r(\tilde{\rho})} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho',x)} d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,x)\Omega(\tilde{\rho},x)}} x dx \\
 &= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde{\rho})}} \int_0^\infty \frac{x \exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho} \sqrt{x^2+\mu(\rho')^2} d\rho' / r(\rho')\right)}{\sqrt[4]{x^2+\mu(\rho)^2} \sqrt[4]{x^2+\mu(\tilde{\rho})^2}} dx \\
 &= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde{\rho})}} \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2+\mu(\rho)^2} \sqrt[4]{x^2+\mu(\tilde{\rho})^2}} \cdot \exp\left[-\frac{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho}{r(\rho)}\right. \\
 & \quad \left. + \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho^2 - \frac{m^2 r(\rho)^2 r'(\rho)}{2r(\rho)^2 \sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}} \delta\rho^2 + O(\delta\rho^3)\right] \\
 &= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde{\rho})}} \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}} \exp\left[-\frac{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho}{r(\rho)}\right. \\
 & \quad \left. + \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho^2 - \frac{m^2 r(\rho)^2 r'(\rho)}{2r(\rho)^2 \sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}} \delta\rho^2 + O(\delta\rho^3)\right] \\
 & - \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde{\rho})}} \int_0^\infty \frac{x m^2 r(\rho) r'(\rho) \delta\rho}{2(x^2+\mu(\rho)^2)^{3/2}} \cdot \exp\left[-\frac{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho}{r(\rho)} + O(\delta\rho^2)\right] dx \\
 &= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde{\rho})}} \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}} \cdot \\
 & \exp\left[\left(-\frac{\delta\rho}{r(\rho)} + \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \delta\rho^2\right) \sqrt{x^2+\mu(\rho)^2} - \frac{m^2 r'(\rho) \delta\rho^2}{2\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}} + O(\delta\rho^3)\right] \\
 & \quad - \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde{\rho})}} \frac{m^2 r(\rho) r'(\rho) \delta\rho}{2\mu(\rho)} \\
 &= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)}} \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}} \cdot \exp\left[\left(-\frac{\delta\rho}{r(\rho)} + \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \delta\rho^2\right) \sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\right] \cdot \\
 & \quad \left\{1 - \frac{m^2 r'(\rho) \delta\rho^2}{2\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}} + O(\delta\rho^3)\right\} + O(\delta\rho^2) \\
 &= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)}} \frac{\exp\left[-\left(\frac{\delta\rho}{r(\rho)} - \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \delta\rho^2\right) \mu(\rho)\right]}{\frac{\delta\rho}{r(\rho)} - \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \delta\rho^2} \\
 & - \frac{q r'(\rho) m^2 \delta\rho^2}{2r(\rho)} \int_0^\infty \frac{x dx \exp\left[-\left(\frac{\delta\rho}{r(\rho)} - \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \delta\rho^2\right) \mu(\rho)\right]}{x^2 + \mu(\rho)^2} + O(\delta\rho) \\
 &= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)}} \frac{\exp\left[-\left(\frac{\delta\rho}{r(\rho)} - \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \delta\rho^2\right) \mu(\rho)\right]}{\frac{\delta\rho}{r(\rho)} - \frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2} \delta\rho^2}
 \end{aligned} \tag{32}$$

и разложен в ряд по $\delta\rho$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho',x)} d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,x)\Omega(\tilde{\rho},x)}} x dx \\
 &= \frac{q}{r(\rho)} \left[\frac{r(\rho)}{\delta\rho} - \mu(\rho) + \frac{r'(\rho)}{2} + O(\delta\rho) \right].
 \end{aligned} \tag{35}$$

Следующие два интеграла в (31) не расходятся при $\delta\rho \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon-i\infty}^\epsilon \frac{\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho',z)} d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,z)\Omega(\tilde{\rho},z)} (1+e^{i2\pi z})} z dz \right. \\
 & \quad \left. - \int_\epsilon^{\epsilon+i\infty} \frac{\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega(\rho',z)} d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,z)\Omega(\tilde{\rho},z)} (1+e^{-i2\pi z})} z dz \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r(\rho) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{i\epsilon}^{i\epsilon+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\mu^2 - x^2} (1 + e^{2\pi x})} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-i\epsilon}^{-i\epsilon+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\mu^2 - x^2} (1 + e^{2\pi x})} + O(\delta\rho) \right\} \\
&= 2r(\rho) \int_0^\mu \frac{xdx}{\sqrt{\mu^2 - x^2} (1 + e^{2\pi x})} + O(\delta\rho). \tag{36}
\end{aligned}$$

Таким образом, нулевой ВКБ порядок приближения ϕ есть

$$\begin{aligned}
\phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) &= \frac{q}{\delta\rho} + \frac{q}{r(\rho)} \left(-\mu + 2 \int_0^\mu \frac{xdx}{\sqrt{\mu^2 - x^2} (1 + e^{2\pi x})} \right) \\
&\quad + O(\delta\rho). \tag{37}
\end{aligned}$$

Контрчлен ДеВитта-Швингера $\phi_{DS}(x; \tilde{x})$ в пределе $\theta = \tilde{\theta}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$ может быть легко вычислен с помощью метрики (13):

$$\begin{aligned}
2\sigma &= \delta\rho^2 + O(\delta\rho^4), \\
\phi_{DS}(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) &= q \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{\partial g_{tt}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\sigma^i}{4g_{tt}(\tilde{x})\sqrt{2\sigma}} - m \right) \\
&= q \left(\frac{1}{\delta\rho} + \frac{f'}{4f} - m + O(\delta\rho) \right). \tag{38}
\end{aligned}$$

Таким образом, $\phi_{ren}(x)$ это

$$\begin{aligned}
\phi_{ren}(x) &= \lim_{\delta\rho \rightarrow 0} [\phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) - \phi_{DS}(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi)] \\
&= qm + \frac{q}{r(\rho)} \left(-\mu + 2 \int_0^\mu \frac{xdx}{(1 + e^{2\pi x}) \sqrt{\mu^2 - x^2}} \right) \\
&\quad \cdot \left(1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2) \right), \tag{39}
\end{aligned}$$

и единственная ненулевая компонента силы самодействия есть

$$\begin{aligned}
f_\rho(\rho) &= -\frac{q}{2} \frac{\partial \phi_{ren}}{\partial \rho} = -\frac{q^2}{2r^2} \frac{dr}{d\rho} \left[\mu - 2 \int_0^\mu \frac{xdx}{(1 + e^{2\pi x}) \sqrt{\mu^2 - x^2}} \right. \\
&\quad \left. - 4\pi m^2 r^2 \int_0^\mu \frac{e^{2\pi x} dx}{(1 + e^{2\pi x})^2 \sqrt{\mu^2 - x^2}} \right] \left(1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2) \right). \tag{40}
\end{aligned}$$

При $f = 0$ и $m = 0$ получаем:

$$f_\rho(\rho) = \left[-\frac{q^2}{2r^2} \frac{dr}{d\rho} \left(\mu - 2 \int_0^\mu \frac{xdx}{(1 + e^{2\pi x}) \sqrt{\mu^2 - x^2}} \right) \right] \left(1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2) \right), \tag{41}$$

что совпадает с выражением для силы самодействия покоящегося скалярного заряда в длинной горловине ультрастатического сферически симметричного пространства-времени [21].

Мы можем численно оценить

$$F(\mu) = \mu - 2 \int_0^\mu \frac{xdx}{(1 + e^{2\pi x}) \sqrt{\mu^2 - x^2}} \tag{42}$$

$$G(\mu) = \int_0^\mu \frac{e^{2\pi x} dx}{(1 + e^{2\pi x})^2 \sqrt{\mu^2 - x^2}} \tag{43}$$

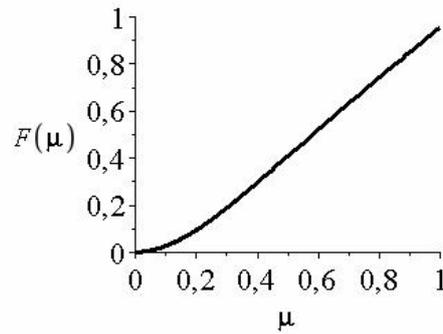


Рис. 1: Кривая представляет собой функцию $F(\mu)$.

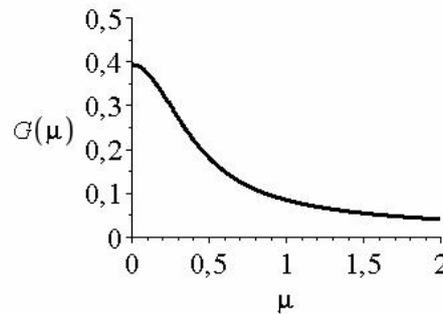


Рис. 2: Кривая представляет собой функцию $G(\mu)$.

Отметим, что если использовать r в качестве новой радиальной координаты

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 dr^2 + r^2(\rho) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (44)$$

выражение (40) может быть записано в виде:

$$f_r = f_\rho \frac{d\rho}{dr} = \left[-\frac{q^2}{2r^2} F(\mu) + 2\pi q^2 m^2 G(\mu) \right] \cdot \left(1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2) \right). \quad (45)$$

4 Пример

В качестве примера, рассмотрим пространство-время

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \left(r_0 + \rho \tanh \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (46)$$

где параметр r_0 характеризует радиус горловины кротовой норы, а ρ_0 – её длину. Приближение длиной горловины (23) справедливо в области $r < \rho_0$, если

$$r_0 \ll \rho_0. \quad (47)$$

В этом случае выражение для (40) имеет вид

$$\frac{f_\rho}{q^2} = -\frac{1}{2 \left(r_0 + \rho \tanh \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2} \left(\tanh \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\rho \left(1 - \tanh \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right)}{\rho_0} \right) \cdot \left[F(\mu) - 4\pi m^2 \left(r_0 + \rho \tanh \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 G(\mu) \right] \left(1 + O(\varepsilon_{\text{WKB}}^2) \right). \quad (48)$$

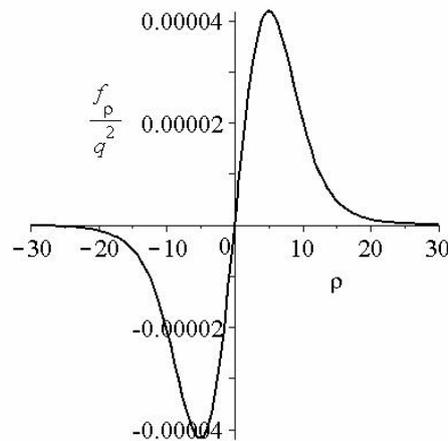


Рис. 3: Кривая представляет собой функцию f_ρ .

5 Заключение

В работе получено приближенное выражение для силы самодействия на статический заряд, являющийся источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля, в пространстве-времени, называемом длинной горловиной.

Дан пример вычисления силы самодействия покоящегося скалярного заряда на себя в заданной длинной горловине кротовой норы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований гранты № 11-02-01162-а и 13-02-00757-а.

Литература

- [1] P. Dirac, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **167** (1938), p. 148
- [2] B. DeWitt and R. Brehme, *Ann. Phys.* **9** (1960), p. 220
- [3] A. Smith and C. Will, *Phys. Rev. D* **22** (1980), p. 1276
- [4] D. Lohiya, *J. Phys. A* **15** (1982), p. 1815
- [5] B. Leaute and B. Linet, *J. Phys. A* **15** (1982), p. 1821
- [6] B. Linet and P. Teyssandier, *Gen. Relativ. Grav.* **10** (1979), p. 313
- [7] L. Burko and Y. Liu, *Phys. Rev. D* **64** (2001), p. 024006
- [8] B. Linet, *Phys. Rev. D* **33** (1986), p. 1833
- [9] N. Khusnutdinov and I. Bakhmatov, *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 124015
- [10] V. Bezerra and N. Khusnutdinov, *Phys. Rev. D* **79** (2009), p. 064012
- [11] T. Quinn, *Phys. Rev. D* **62** (2000), p. 064029
- [12] S. Christensen, *Phys. Rev. D* **17** (1978), p. 946
- [13] E. Rosenthal, *Phys. Rev. D* **69** 064035 (2004).
- [14] E. Rosenthal, *Phys. Rev. D* **70** 124016 (2004).
- [15] A. Popov, *Phys. Rev. D* **84** 064009 (2011).
- [16] J.L. Synge, *Relativity: the general theory* (North-Holland publishing company, Amsterdam, 1960).
- [17] A. Popov, *Grav. & Cosm.* **13**, 119 (2007).
- [18] P. Anderson, W. Hiscock and D. Samuel, *Phys. Rev. D* **51** (1995), p. 4337
- [19] A. Popov, *Phys. Rev. D* **64** (2001), p. 104005
- [20] D. Garfinkle, G. Horowitz and A. Strominger, *Phys. Rev. D* **43** (1991), p. 3140

[21] A. Popov, *Phys. Lett. B* **693** (2010), p. 180

МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ СО СПИН-ДИЛАТАЦИОННОЙ ТЕМНОЙ МАТЕРИЕЙ

О.В. Бабурова¹, В.А. Луговкин²

¹Московский педагогический государственный университет, ² Московский педагогический государственный университет

¹E-mail: baburova@orc.ru, ²E-mail: serafim2014@yandex.ru

Для решения новых проблем в космологии в рамках геометрического подхода привлекается идея обобщения теории гравитации на пространства с более сложной геометрической структурой, чем пространства Римана. В современной космологии используются пространство Римана–Картана с кривизной и кручением, пространство Картана–Вейля с кручением и неметричностью вейлевского типа, а также общее аффинно-метрическое пространство с кривизной, кручением и неметричностью общего вида. Данное направление в космологии получило название "постриманова космология" [1].

Природа темной материи до сих пор не ясна и в настоящее время существует большой разброс мнений по данному вопросу. В рамках геометрического подхода в [2] была высказана гипотеза о том, что темная материя наделена новым типом гравитационного заряда, названным "дилатационным зарядом" и связанным с симметрией относительно растяжений и сжатий (дилатаций) пространства-времени. В качестве модели темной материи может быть рассмотрена модель идеальной спин-дилатационной жидкости [3], частицы которой наделены спиновым моментом и дилатационным зарядом. Вариационная теория данного типа жидкости была развита в [3] в формализме внешних форм в рамках геометрической структуры пространства Картана–Вейля. Источниками гравитационного поля в этой теории являются спиновый момент и дилатационный заряд частиц жидкости, определяющие метрику и связность пространственно-временного многообразия, геометрические свойства которого в свою очередь определяют динамику идеальной жидкости.

Применение описанной теории к космологии привело к построению несингулярной модели эволюции Вселенной, описывающей открытые недавно особенности этой эволюции. Построена несингулярная модель однородной и изотропной вселенной с космологической постоянной в пространстве Картана–Вейля, заполненном темной материей в виде спин-дилатационной жидкости. В рамках данной модели выведено обобщенного уравнения Фридмана–Леметра. Получены различные несингулярные решения обобщенного уравнения Фридмана–Леметра, в частности, решение типа инфляции. Доказано существование в данной космологической модели двух точек перегиба функции масштабного фактора: точки выхода на стадию Фридмана и точки начала стадии расширения с ускорением.

В дополнение к полученным ранее космологическим решениям [4] найдены решения для спин-дилатационной жидкости с уравнениями состояния с отрицательным давлением типа квинтэссенции и газа Чаплыгина.

Литература

- [1] Babourova O.V., Frolov B.N. // *Gravit. Cosmol.*–1999.–V. 5.–N. 4 (20) Suppl.–P. 65–72.
- [2] Babourova O.V., Frolov B.N. // *Class. Quantum Grav.*–2003.–V. 20.–P. 1423–1442 (gr-qc/0209077).
- [3] Babourova O.V., Frolov B.N. // *Mod. Phys. Lett. A.*–1998.–V. 12.–P. 2943–2950 (gr-qc/9708006).
- [4] Babourova O.V. // *Gravit. Cosmol.*–2004.–V. 10.–N 1–2.–P. 121–126 (gr-qc/0507104).

**ЭФФЕКТЫ ЭЛЕКТРО - И МАГНИТОСТРИКЦИИ В КОСМОЛОГИЧЕСКИХ
МОДЕЛЯХ С ТЕМНОЙ ЭНЕРГИЕЙ**

А.Б. Балакин¹, Н.Н. Долбилова²

¹Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт
физики, ²Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт физики

¹E-mail: Alexander.Balakin@ksu.ru, ²E-mail: Nadejda.Dolbilova@gmail.com

Рассмотрена модель, основанная на лагранжевом продолжении на поперечном инварианте, квадратичном по тензору Максвелла и линейным по Тензору давления темной энергии. Имея аналогию с классической электродинамикой сплошных сред, мы предполагаем, что эта часть лагранжиана описывает явления, известные как электрострикция и магнестрикция. Сформулированы расширенные кинетические уравнения, исследована структура линейного тензора отклика и рассмотрены космологические примеры.

В рамках изотропной космологической модели мы подробно исследовали распространение электромагнитных волн зависящих от электрострикции и/или магнестрикции темной энергии, и описали так называемые неосвещенные эпохи в истории Вселенной, когда квадрат эффективного показателя преломления отрицателен. В этом контексте мы анализировать фазовую и групповую скорости электромагнитных волн на примере трех типов давления темной энергии, которые относятся к Λ CDM модели, модели темной энергии с зависящим от времени эффективным уравнением состояния, и к модели Архимедового типа взаимодействия между темной энергией и темной материей.

Литература

- [1] A.B. Balakin, Gravitation and Cosmology, 13, 163 (2007).
- [2] A.B. Balakin, V.V. Bochkarev and J.P.S. Lemos, Rev. D, 85, 064015 (2012).

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВНУТРЕННЕГО ИСТОЧНИКА РАЙСНЕРА-НОРДСТРЕМА

А.М. Баранов¹

Красноярск, КГПУ

¹E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Аннотация. Получено обобщение ранее найденного точного внутреннего решения уравнений Эйнштейна-Максвелла для статического шара, заполненного электрически заряженной идеальной жидкостью. Уравнения тяготения сведены к уравнению типа Штурма-Лиувилля, к которому применен метод Дарбу.

В работе [1] получено точное решение уравнений Эйнштейна, связанное с решением самосогласованной системы уравнений Эйнштейна-Максвелла для электрически заряженной паскалевой идеальной жидкости с параболическим распределением плотности массы нейтральной компоненты жидкости, но без конкретизации уравнения состояния.

Обобщение этой модели для измененного закона распределения плотности массы нейтральной жидкости было рассмотрено в [2]. Оказывается, что для другого поведения плотности массы и нового распределения плотности заряда, «растворенного» в жидкости, можно получить точное статическое сферически симметричное внутреннее решение. В любом случае внешнее гравитационное поле должно описываться решением Райснера-Нордстрема (см., например, [3]).

В дальнейшем предполагается, что модель статическая, сферически симметричная, без вращения и излучения.

Метрический интервал в [2] был выбран в виде

$$ds^2 = F(r)dt^2 + 2L(r)dtdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где величины $F = F(r)$ и $L = L(r)$ суть метрические функции радиальной переменной r ; t – временная координата; θ и φ – угловые переменные; скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная здесь выбраны равными единице.

С помощью тетрад (с мнимой единицей i и греческими индексами, пробегающими значения 0, 1, 2, 3), построенных на основе заданной метрики (1),

$$g_{(0)\mu} = \delta_\mu^0; \quad g_{(1)\mu} = L\delta_\mu^1 + \frac{1}{2}F\delta_\mu^0; \quad (2)$$

$$g_{(2)\mu} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta_\mu^2 + i\sin\theta\delta_\mu^3); \quad g_{(3)\mu} = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta_\mu^2 - i\sin\theta\delta_\mu^3); \quad (3)$$

$$g_{(0)}^\mu = L^{-1}\delta_1^\mu; \quad g_{(1)}^\mu = \delta_0^\mu + \frac{1}{2}FL^{-1}\delta_1^\mu; \quad (4)$$

$$g_{(2)}^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu); \quad g_{(3)}^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu), \quad (5)$$

уравнения Эйнштейна в тетрадных обозначениях

$$G_{(\alpha)(\beta)} = R_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)}R = -\kappa T_{(\alpha)(\beta)}, \quad (6)$$

могут быть переписаны явно в виде системы следующих четырех уравнений относительно безразмерной радиальной переменной $x = r/R_0$ ($0 \leq x \leq 1$, R_0 – внешний радиус шара):

$$\frac{2}{xL^2}(\ln L)' = \chi T_{(0)(0)}; \quad (7)$$

$$\frac{F^2}{2xL^2}(\ln L)' = \chi T_{(1)(1)}; \quad (8)$$

$$\frac{F}{xL^2}(\ln L)' - \frac{1}{2L^2}\left(F'' + \frac{2}{x}F' - F'(\ln L)'\right) = -\chi\left(T_{(0)(1)} - \frac{1}{2}T\right); \quad (9)$$

$$\frac{1}{x^2} \left(-1 + \frac{F}{L^2} + \frac{x F'}{L^2} - x \frac{F}{L^2} (\ln L)' \right) = -\chi \left(T_{(2)(3)} + \frac{1}{2} T \right), \quad (10)$$

где $G_{(\alpha)(\beta)}$ — тензор Эйнштейна; $R_{(\alpha)(\beta)}$ — тензор Риччи; $R = R_{(\alpha)(\alpha)}$ — скалярная кривизна; $\kappa = 8\pi$ — постоянная Эйнштейна в выбранной нами системе единиц, все производные относительно переменной x обозначены штрихом, $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{R_0 \partial x}$, а новая постоянная $\chi = \kappa R_0^2 = 8\pi R_0^2$.

При этом был использован результирующий ТЭИ материи $T_{(\alpha)(\beta)}$, взятый в виде прямой суммы ТЭИ идеальной паскалевой жидкости нейтральной материи и ТЭИ электромагнитного поля:

$$T_{(\alpha)(\beta)}^{fluid} = (\mu + p) u_{(\alpha)} u_{(\beta)} - p g_{(\alpha)(\beta)} \equiv \mu u_{(\alpha)} u_{(\beta)} + p b_{(\alpha)(\beta)}, \quad (11)$$

где

$$T_{(\alpha)(\beta)}^{fluid} = (\mu + p) u_{(\alpha)} u_{(\beta)} - p g_{(\alpha)(\beta)} \equiv \mu u_{(\alpha)} u_{(\beta)} + p b_{(\alpha)(\beta)}; \quad (12)$$

$$T_{(\alpha)(\beta)}^{el-mag} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{(\alpha)(\sigma)} F_{(\beta)}^{(\sigma)} + \frac{1}{4} g_{(\alpha)(\beta)} F_{(\sigma)(\tau)} F^{(\sigma)(\tau)} \right); \quad (13)$$

$\mu(r)$ — плотность массы-энергии; $p(r)$ — давление идеальной паскалевой жидкости; $u_{(\alpha)} = g_{(\alpha)\mu} \frac{dx^\mu}{ds}$ — скорость в тетрадных обозначениях; $b_{(\alpha)(\beta)} = u_{(\alpha)} u_{(\beta)} - g_{(\alpha)(\beta)}$ — 3-проектор на пространственноподобную гиперповерхность (или 3-метрика), ортогональный 4-скорости, $b_{(\alpha)(\beta)} u^{(\alpha)} = 0$; $F_{(\alpha)(\beta)}$ — антисимметричный тензор электромагнитного поля.

Дополним систему (9)-(13) второй парой уравнений Максвелла

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} = -4\pi j^\mu, \quad (14)$$

где j^μ — плотность электрического тока, точка с запятой обозначает ковариантную производную. Тензор электромагнитного поля как обычно записывается через альтернацию производных 4-потенциала A_μ как $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. Отличной от нуля будет лишь одна компонента тензора электромагнитного поля $F_{01} = -A_{0,1} = -R_0 A'_0$ и от системы уравнений Максвелла, принимая во внимание выражение для определителя ковариантной метрики, останется одно уравнение:

$$\frac{1}{x^2 L} (x^2 L F^{01})' = -4\pi R_0 j^0. \quad (15)$$

В неподвижной сопутствующей системе отсчета компоненты 4-вектора скорости в статическом случае равны

$$u^\mu = \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{g_{00}}} \equiv \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{F(r)}}, \quad u_\mu = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}} \equiv \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{F(r)}}. \quad (16)$$

Введем физически наблюдаемые величины, которые соответственно запишутся в следующем виде:

$$\mu_{phys} = T_{\mu\nu}^{fluid} u^\mu u^\nu = \mu(x); \quad \rho_{phys} \equiv \rho(x) = j^\mu u_\mu = j^0 \sqrt{g_{00}} \equiv j^0 \sqrt{F(x)}; \quad (17)$$

$$E_\nu^{phys} = -F_{\nu\mu} u^\mu = -F_{\nu\mu} \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{F_{0\nu}}{\sqrt{F(x)}}, \quad E_{phys} \equiv E_1 = \frac{F_{01}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{E}{\sqrt{F(x)}}, \quad (18)$$

$$W_{el} = T_{\mu\nu}^{el-mag} u^\mu u^\nu = \frac{E^2}{8\pi L^2}, \quad (19)$$

где μ_{phys} — наблюдаемая плотность массы-энергии; ρ_{phys} — наблюдаемая плотность электрического заряда; E_ν^{phys} — физически наблюдаемый 3-вектор напряженности электрического поля; $E_{phys} \equiv E_1$ — радиальная компонента наблюдаемой напряженности электрического поля; W_{el} — наблюдаемая плотность энергии электрического поля.

Введение таких величин позволяет переписать уравнение Максвелла (17) в пригодном для дальнейшего применения виде:

$$\left(\frac{x^2 E}{L} \right)' = 4\pi \rho(x) R_0 \frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (20)$$

где введена новая функция $\varepsilon = F/L^2$.

Путем подстановки в правую часть системы гравитационных уравнений (9)-(13) тетрадных компонент ТЭИ: $T_{(0)(0)} = (\mu + p)/F$; $T_{(1)(1)} = F(\mu + p)/4$; $T_{(0)(1)} = (\mu - p)/2 + W_{el}$; $T_{(2)(3)} = T_{(3)(2)} = p + W_{el}$, преобразуем систему к виду:

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' = \frac{\chi}{2}(\mu + p); \quad (21)$$

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{F''}{F} + \frac{2}{x}(\ln F)' - (\ln F)'(\ln L)' \right) = -\chi(p + W_{el}); \quad (22)$$

$$-\frac{1}{x^2}(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{x} \left(\ln \frac{F}{L} \right)' = -\chi \left(\frac{1}{2}(\mu - p) + W_{el} \right). \quad (23)$$

Далее, исключая плотность массы-энергии и давление, получаем линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами на функцию $G(x)$:

$$G'' + f(x)G' + g(x)G = 0, \quad (24)$$

где $G = \sqrt{F}$, $f(x) = (\ln \varphi)'$, $\varphi(x) = \sqrt{\varepsilon}/x$, а коэффициент $g(x)$ равен

$$g(x) = \frac{2(1 - \varepsilon) + x\varepsilon'}{2x^2\varepsilon} - \frac{2\chi}{\varepsilon}W_{el}. \quad (25)$$

Видно, что влияние электромагнитного поля явно проявляется через функции $\varepsilon(x)$, и $W_{el}(x)$, входящих в приведенное здесь гравитационное уравнение (24).

Если перейти к новой переменной $\zeta = \zeta(x)$ как

$$d\zeta = \frac{x dx}{\sqrt{\varepsilon(x)}}, \quad (26)$$

то (24) трансформируется в уравнение для нелинейного пространственного осциллятора

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega^2(\zeta(x))G = 0, \quad (27)$$

относительно переменной ζ . Так как выражение (26), вообще говоря, не может быть проинтегрировано в элементарных функциях, то квадрат «частоты» Ω^2 проще использовать при дальнейших вычислениях в следующей записи:

$$\Omega^2 = -\frac{d}{dy} \left(\frac{\Phi}{y} \right) - \frac{2\chi}{y}W_{el}, \quad (28)$$

где $y = x^2$, а функция Φ является аналогом ньютоновского гравитационного потенциала внутри жидкого заряженного шара и выражается из гравитационных уравнений через функцию ε как

$$\Phi = 1 - \varepsilon = \frac{\chi}{x} \int (\mu(x) + W_{el}(x))x^2 dx = \frac{\chi}{2\sqrt{y}} \int (\mu(y) + W_{el}(y))\sqrt{y} dy. \quad (29)$$

В отличие от работы [1], где плотность массы нейтральной жидкости имеет следующий закон распределения внутри шара:

$$\mu(y) = \mu_0(1 - by), \quad (30)$$

в работе [2] рассмотрено поведение системы для более общего распределения плотности массы нейтрального вещества

$$\mu(y) = \mu_0(1 - by + dy^2 - fy^3 + gy^4 - hy^5), \quad (31)$$

где b, d, f, g, h – постоянные, μ_0 – центральная плотность массы.

При этом соответствующая плотность электрического заряда имеет вид [2]:

$$\rho(y) = \rho_0(1 - ay + cy^2)\sqrt{\varepsilon(y)}, \quad (32)$$

где ρ_0 – центральная плотность электрического заряда.

Учитывая определение плотности энергии электрического поля (22), из уравнения (24) нетрудно найти

$$W_{el} = \frac{1}{2} \frac{\pi R_0^2}{y^2} \left(\int \frac{\rho(y)\sqrt{y} dy}{\sqrt{\varepsilon(y)}} \right)^2 \quad (33)$$

или, принимая во внимание (32),

$$W_{el} = \alpha_0 \mu_0 \left(\frac{2}{9} - \frac{4}{15} ay + \frac{4}{21} cy^2 + \frac{2}{25} a^2 y^2 - \frac{4}{35} acy^3 + \frac{2}{49} c^2 y^4 \right) y \quad (34)$$

где

$$\alpha_0 \equiv \pi R_0^2 \rho_0^2 / \mu_0. \quad (35)$$

В отличие от [2] при вычислении квадрата функции Ω из (28) и требовании ее постоянства в настоящей работе ограничимся выбором параметра $f = 0$ в выражении для плотности нейтрального вещества μ в (31).

Условие $\Omega^2 \equiv \Omega_0^2 = const > 0$ позволяет легко записать решение уравнения (27) в виде гармонических функций, например,

$$G = G_0 \cos(\Omega_0 \zeta(x) + \varphi) \quad (36)$$

со сдвигом фазы φ и получить ряд соотношений и ограничений между параметрами h, g, d и a, b, c :

$$b > \frac{22}{9} \alpha_0; \quad c = -\frac{21}{50} a^2; \quad d = \frac{32}{15} \alpha_0 a; \quad g = -\frac{39}{125} \alpha_0 a^3; \quad h = \frac{279}{6250} \alpha_0 a^4. \quad (37)$$

Таким образом, плотности масс и электрического заряда соответственно принимают вид:

$$\mu(y) = \mu_0 (1 - by + \alpha_0 a \left(\frac{32}{15} y^2 - \frac{39}{125} a^2 y^4 - \frac{279}{6250} a^3 y^5 \right)); \quad (38)$$

$$\rho(y) = \rho_0 (1 - ay - \frac{21}{50} a^2 y^2) \sqrt{\varepsilon(y)}, \quad (39)$$

а плотность энергии электрического поля переписывается как

$$W_{el} = \alpha_0 \mu_0 \left(\frac{2}{9} - \frac{4}{15} ay + \frac{6}{125} a^3 y^3 + \frac{9}{1250} a^4 y^4 \right) y. \quad (40)$$

Перейдем теперь к обобщению модифицированного решения с помощью метода Дарбу [4], [5]. Суть этого метода для уравнений типа уравнения Штурма-Лиувилля в применении к данной задаче состоит в следующем. Без ограничения общности перепишем общее решение (36) уравнения (27) в виде

$$G_{tot.}(\zeta) \equiv G(\zeta) = A \sin(\Omega_0 \zeta + \varphi_0) \quad (41)$$

где φ_0 - новый сдвиг фазы.

Возьмем одно из частных решений уравнения (27)

$$G_{partial}(\zeta) \equiv \tilde{G}(\zeta) = \cos(\beta_0 \zeta), \quad (42)$$

где β_0 - некоторая положительная постоянная. Тогда уравнение

$$G''_{\zeta\zeta} + \Omega^2(\zeta) G \equiv G''_{\zeta\zeta} + [\Omega_0^2 + W(\zeta)] G = 0, \quad (43)$$

обобщающее уравнение (27), имеет следующее общее решение:

$$G_{total}(\zeta) = G'_\zeta - G \cdot (\ln \tilde{G})'_\zeta, \quad (44)$$

при этом функция $W(\zeta)$ обязана быть равной

$$W(\zeta) = 2 \cdot \ln(\tilde{G})''_{\zeta\zeta} = -2\beta_0^2 \sec^2(\beta_0 \zeta) \quad (45)$$

Применим описанный здесь метод Дарбу к решению [2] с выше приведенными допущениями по поводу коэффициента f в выражении для плотности массы. Ясно, что для нового решения получим и новое результирующее распределение плотности энергии, как сумму плотностей энергии нейтральной и электрически заряженной компонент жидкости, заполняющей шар радиуса R_0 .

Согласно процедуре Дарбу решение уравнения

$$G''_{\zeta\zeta} + [\Omega_0^2 - 2\beta_0^2 \sec^2(\beta_0 \zeta)] G = 0, \quad (46)$$

можно сразу записать в виде

$$G(\zeta) = A \Omega_0 \cos(\Omega_0 \zeta + \varphi_0) + A \beta_0 \cdot tg(\beta_0 \zeta) \cdot \sin(\Omega_0 \zeta + \varphi_0) \quad (47)$$

где A и β_0 - постоянные, которые находятся из сшивки со внешним решением Райснера-Нордстрема.

Возведение в квадрат выражения (47) позволяет получить метрический коэффициент $g_{00} = F = G^2$. Метрический коэффициент $g_{01} = L$ легко находится, если известна новая функция Φ , так как $L = \sqrt{F/\varepsilon}$, а $\varepsilon = 1 - \Phi$. Поэтому перейдем к нахождению новой функции Φ .

Отвечающая решению (47) функция $\Phi(y)$ записывается как квадратура соотношения (28):

$$\Phi(y) = -y \left(\int \left(\Omega_0^2 - 2\beta_0^2 \sec^2(\beta_0 \zeta(y)) + \frac{2\chi}{y} W_{el}(y) \right) dy \right) \quad (48)$$

или в данном случае

$$\Phi(y) = \Phi_0(y) + 2y\beta_0^2 \int \sec^2(\beta_0 \zeta(y)) dy, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(y) = Cy - \Omega_0^2 y^2 - \chi \alpha_0 \mu_0 \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{15} ay + \frac{3}{125} a^3 y^3 + \frac{9}{3125} a^4 y^4 \right) \\ + 2y\beta_0^2 \int \sec^2(\beta_0 \zeta(y)) dy, \end{aligned} \quad (50)$$

постоянная C определяет плотность энергии в центре шара.

С другой стороны, для функции Φ справедливо соотношение (29), где результирующая плотность энергии нейтральной и заряженной жидкости есть

$$w(y) = \mu(y) + W_{el}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (\sqrt{y}\Phi(y))' = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} (x\Phi(x)). \quad (51)$$

Тогда, с учетом (49) и (50) получаем

$$\begin{aligned} \chi w(y) = 3C - 5\Omega_0^2 - \left(\frac{20}{9} - \frac{28}{15} ay + \frac{33}{125} a^3 y^3 + \frac{117}{3125} a^4 y^4 \right) y + \\ 4\beta_0^2 y \sec^2(\beta_0 \zeta(y)) + 6\beta_0^2 \int \sec^2(\beta_0 \zeta(y)) dy. \end{aligned} \quad (52)$$

Примененная выше процедура Дарбу меняет и переменную $\zeta(y)$, которая теперь определяется как следующая квадратура:

$$\begin{aligned} \zeta(y) = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \Phi(y)}} = \\ \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \Phi_0(y) - 2\beta_0^2 y \int \sec^2 \left(\beta_0 \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \Phi_0(y) - 2\beta_0^2 y \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \Phi_0(y) - 2\beta_0^2 y \int \sec^2 \frac{1}{2} \int \dots}}}} \right)}}} \end{aligned} \quad (53)$$

Сшивка с внешним решением Райснера Нордстрема позволяет получить, что функция $\Phi(y)$ на поверхности заряженного жидкого шара равна компактности

$$\Phi(y=1) = \eta^* = \eta - \frac{Q^2}{R^2} = \frac{2m}{R} - \frac{Q^2}{R^2} \leq 1 \quad (54)$$

где η^* - эффективная компактность, m - интегральная масса звезды, Q - интегральный электрический заряд звезды, η - «Шварцшильдовская» компактность. Насколько велика или мала средняя плотность массы астрофизического объекта характеризуется параметром компактности η . Возрастание величины этого параметра означает увеличение средней плотности объекта.

В заключение необходимо отметить, что, применяя метод Дарбу к ранее полученному в [2] точному статическому внутреннему решению уравнений тяготения, описывающему гравитационное поле невращающегося электрически заряженного астрофизического объекта, заполненного идеальной паскалевой заряженной жидкостью заданными распределениями плотностей массы и энергии электрического поля, получено новое внутреннее решение с законом распределения результирующей плотности энергии, обобщающим предыдущее. Найденное решение может быть использовано для моделирования компактных астрофизических объектов несущих электрический заряд.

Литература

- [1] А.М.Баранов, *Осцилляционный подход к описанию статической звезды с нейтральной и заряженной идеальной жидкостью*, Вестник Красноярского государственного университета. Физические и математические науки, №1, 5 (2002).
- [2] А.М.Баранов, З.В.Власов, *О новом точном решении уравнений Эйнштейна-Максвелла для электрически заряженной звезды*, Вторая Российская летняя школа-семинар «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии», GRACOS-2009, труды семинара, 23 (2009).
- [3] А.С.Эддингтон, *Математическая теория относительности*, Харьков-Киев: Гос. научно-тех. изд-во, 265 (1933).
- [4] G. Darboux, *Sur une proposition relative aux équations linéaires*, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), **94**, 1456-1459 (1882).
- [5] Э.Л.Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 176 (1939).

НЕДИАГОНАЛЬНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФРИДМАНА-РОБЕРТСОНА-УОКЕРА В ОТО

К.Е. Белоушко, В.В. Карбановский¹

Мурманский государственный технический университет, Мурманск

¹E-mail: abeloushko@mail.ru

Как известно, метрика Фридмана - Робертсона - Уокера, описывающая однородную и изотропную Вселенную, в простейшем случае имеет вид

$$ds^2 = -b(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (1)$$

Для такой метрики, записанной в диагональном виде, уравнения ОТО приводят также к диагональному тензору энергии-импульса (ТЭИ). В работе [1] было показано, что невырожденными координатными преобразованиями метрику (1) можно привести к недиагональному виду, что позволяет получить и недиагональные компоненты ТЭИ. Это позволяет:

1. построить модели Вселенной из «обычной» материи, не прибегая к «экзотической»;
2. ввести в модель наблюдаемый микроволновой космический фон, которому соответствуют недиагональные компоненты ТЭИ (плотности потока энергии σ и тензор натяжений τ);
3. согласовать неоднородность распределения материи с общей однородностью геометрии пространства.

В настоящей работе рассмотрены несколько вариантов рассогласования метрики (1) по радиальной r и двум угловым φ и θ координатам. Приводятся результаты исследования статических и динамических недиагональных моделей.

Литература

- [1] V. V. Karbanovski et al. - JETP, 112 (2011), 60.

О РОЛИ «КАЛИБРОВОЧНЫХ ФУНКЦИЙ» ДЛЯ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

К.Е. Белоушко, В.В. Карбановский¹

Мурманский государственный технический университет, Мурманск

¹E-mail: abeloushko@mail.ru

Как известно, в рамках СТО тензор энергии-импульса (ТЭИ) материи определён неоднозначно. Главным условием при его формулировке является следующее (запятой обозначено дифференцирование по координатам пространства Минковского)

$$T^{ik}{}_{;k} = 0 \quad (1)$$

Очевидно, требование (1) не нарушается в результате преобразования вида

$$T^{ik} \rightarrow \tilde{T}^{ik} = T^{ik} + h^{ikl}{}_{;l}, \quad (2)$$

где тензор h^{ikl} удовлетворяет свойству

$$h^{ikl} = -h^{ilk} \quad (3)$$

Обобщению ограничения (1) на произвольное риманово пространство-время соответствует следующее условие для ТЭИ (точкой с запятой обозначается ковариантное дифференцирование по координатам)

$$T^{ik}{}_{;k} = 0 \quad (4)$$

Тогда для ТЭИ должно иметь место преобразование

$$T^{ik} \rightarrow \tilde{T}^{ik} = T^{ik} + h^{ikl}{}_{;l}, \quad (5)$$

не нарушающее свойство (4), если выполняется ограничение

$$h^{ikl}{}_{;l;k} = 0 \quad (6)$$

В свою очередь, учитывая (3) в равенстве (6), получим

$$h^{ikl}{}_{;l;k} = \frac{1}{2}(h^{ikl} - h^{ilk}){}_{;l;k} = \frac{1}{2}R^i{}_{mlk}h^{mlk} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, условие (7) можно рассматривать как «риманово ограничение» для h^{ikl} . В плоском пространстве (т.е. при $R^i{}_{klm} = 0$) оно обращается в тождество, что позволяет в качестве «калибровочных функций» h^{ikl} преобразования (2) использовать любой тензор с компонентами, удовлетворяющими требованию (3).

Впервые проблема определения тензора h^{ikl} в римановом пространстве была рассмотрена Эйнштейном в работе [1] с целью обобщения СТО. В [2, §96] этот вопрос был поднят при исследовании возможности построения ТЭИ для «чистого» гравитационного поля. Однако, в нашей работе указывается, что нековариантной является сама процедура построения t^{ik} в [2], а псевдотензор Ландау-Лифшица не имеет физического смысла. Поэтому проблема построения h^{ikl} с условием (7) остаётся актуальной.

В данной работе предлагается её решение на основе использования ограничения (7).

Возможная роль «калибровочных функций» h^{ikl} иллюстрируется на двух примерах - при построении космологической модели и решении вакуумной задачи.

Литература

- [1] Эйнштейн А. Собрание научных работ Т.1. - М.: Наука, 1965.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1988.

О ВОЗМОЖНЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ПРИНЦИПА ФОККЕРА–ФЕЙНМАНА–УИЛЕРА

С.В. Болохов¹

*Российский университет дружбы народов, Институт гравитации и космологии,
Москва*

¹E-mail: bol-rgs@yandex.ru

В работе рассматриваются возможные пути обобщения принципов теории прямого межчастичного взаимодействия, первоначально развитой в работах Тетроде, Фоккера, Фейнмана и Уилера в применении к электромагнетизму, на случай других видов полей (в частности, нелинейных и неабелевых). Мотивация к анализу данного класса теорий проистекает из идейных предпосылок реляционного подхода к описанию пространства-времени и физических взаимодействий, в рамках которого на смену классической концепции поля, заданного непрерывным образом на точках гладкого фонового многообразия, приходит понятие *эффективного поля*, определяемого суммой взаимных вкладов от прямого (релятивистски-инвариантного) взаимодействия частиц на нулевой поверхности светового конуса. Структура взаимодействия при этом описывается известным действием Тетроде–Фоккера, которое в классическом пределе эквивалентно стандартной теории Максвелла с запаздывающими потенциалами. С точки зрения реляционного подхода, теория прямого межчастичного взаимодействия рассматривается как промежуточное звено на пути к построению моделей дискретного пространства-времени, допускающих переход к статистически-континуальному пределу на макромасштабах.

В работе кратко анализируются следующие возможные пути построения обобщенного принципа Фоккера:

1. Электромагнетизм, линеаризованная гравитация в 4-мерных теориях фоккеровского типа.
2. Электромагнетизм, гравитация и скалярные поля в 5-мерной теории фоккеровского типа.
3. Прямое обобщение классического фоккеровского действия на неабелев случай в рамках перехода к N-точечному взаимодействию, приводящее к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению на эффективную двухточечную функцию.
4. N-точечное действие фоккеровского типа для нелинейной гравитации и электромагнетизма в реляционной модели.
5. Предложенная в работах Владимирова, Турыгина рекуррентная фоккеровская схема для 4-мерной эйнштейновской гравитации и ее возможное обобщение на многомерный случай с включением неабелевых полей по схеме Калуцы–Клейна.

Литература

- [1] Fokker A.D. Ein invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen. Z. Phys., Bd. 58, p. 386-393 (1929).
- [2] Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю. Теория прямого межчастичного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат (1986).
- [3] Vladimirov Yu.S. Gravitation interaction in the relational approach. Grav. Cosmol. V14(1), p. 41-52 (2008).
- [4] S.V. Bolokhov, A.N. Klenitsky. On the Construction of Effective Metrics in a Relational Model of Space-Time. Grav. Cosmol. V.19(1), p. 35-41 (2013).

ЗАРЯЖЕННЫЕ АНТИДИЛАТОННЫЕ, АНТИ-МАКСВЕЛЛОВСКИЕ КРотовые НОРЫ

Е.С. Бородин¹, А.А. Попов²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: katya140889@mail.ru, ²E-mail: apopov@ksu.ru

Аннотация. В статье приведено статическое асимптотически плоское решение в теории Эйнштейна-анти-Максвелла-антидилатона, описывающие кротовые норы в четырехмерных пространствах-времени.

Введение

Низкоэнергетический предел теории струн включает скалярное дилатонное или антидилатонное поле. Известно, что решения, которые соответствуют электрически заряженным черным дырам, изменяются при наличии дилатонного поля. Такие решения были изучены, например в [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Как известно, ведение в теорию скалярного поля с отрицательным кинетическим членом в лагранжиане (к этой случаю относится и антидилатонное поле) может приводить к появления в такой теории кротовых нор: топологических ручек, соединяющих удаленные области одной или различных вселенных. Такой случай рассматривался, например, в работах [7, 8]. В этой работе получено решение в теории Эйнштейна-анти-Максвелла-антидилатона, описывающие кротовую нору в четырехмерном пространстве-времени.

В работе используются геометрические единицы $c = G = 1$.

Теория Эйнштейна-анти-Максвелла-антидилатона.

В низкоэнергетическом пределе теории струн действие имеет следующий вид

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \eta_1 2\phi_{,k}\phi^{,k} - \eta_2 e^{-2\phi} F_{kl}F^{kl} \right]. \quad (1)$$

Константа связи дилатонного и гравитационного полей η_1 может принимать либо значение $\eta_1 = 1$ (дилатон), либо значение $\eta_1 = -1$ (антидилатон), константа связи Максвелловского и гравитационного полей η_2 принимает значение $\eta_2 = 1$ (Максвелловское поле), либо значение $\eta_2 = -1$ (анти-Максвелловское поле). В дальнейшем будем рассматривать только случай антидилатонного $\eta_1 = -1$ и анти-Максвелловского $\eta_2 = -1$ полей. Уравнения гравитационного поля для метрики $g_{\mu\nu}$, анти-Максвелловского поля для векторного потенциала A_μ и антидилатонного поля для ϕ имеют вид

$$G_\mu^\nu = 8\pi T_\mu^\nu = \phi_{,k}\phi^{,k}\delta_\mu^\nu - 2\phi_{,\mu}\phi^{,\nu} - e^{-2\phi} \left(2F_{\mu k}F^{\nu k} - \frac{\delta_\mu^\nu}{2} F_{kl}F^{kl} \right), \quad (2)$$

$$\left(e^{-2\phi} F^{\mu\nu} \right)_{;\mu} = 0, \quad (3)$$

$$\phi^{;\mu} + \frac{1}{2} e^{-2\phi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0. \quad (4)$$

Линейный интервал для статического сферически симметричного пространства времени может быть записан следующим образом

$$ds^2 = -f^2 dt^2 + w^2 dr^2 + h^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5)$$

где f , w и h являются функциями только r радиальной координаты.

Статическое сферически симметричное анти-Максвелловское поле электрического заряда радиально в каждой точке

$$F_{rt} = \mathcal{F}(r). \quad (6)$$

Уравнения Максвелла в этом случае(3) могут быть проинтегрированы и дают обобщение закона Гаусса в искривленном пространстве-времени с антидилатонным полем

$$e^{-2\phi} \frac{h^2}{fw} \mathcal{F} = Q_e, \quad (7)$$

где Q_e - электрический заряд. Нетривиальные компоненты уравнений Эйнштейна (2) имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{w^2} \left(\frac{h''}{h} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{2h^2} \right) - \frac{1}{h^2} = \frac{\phi'^2}{w^2} + Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^4}, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{w^2} \left(\frac{2f'h'}{fh} + \frac{h'^2}{h^2} \right) - \frac{1}{h^2} = -\frac{\phi'^2}{w^2} + Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^4}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{w^2} \left(\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} + \frac{f'h'}{fh} - \frac{f'w'}{fw} - \frac{w'h'}{wh} \right) = \frac{\phi'^2}{w^2} - Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^4}. \quad (10)$$

$$\frac{1}{w^2} \left(\phi'' + \frac{f'}{f} - \frac{w'}{w} + 2\frac{h'}{h} \right) \phi' = Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^4}, \quad (11)$$

Штрих означает дифференцирование по радиальной координате r . Электромагнитная часть тензора энергии-импульса бесследова. Таким образом вклад в скалярную кривизну дает только дилатонное поле. Взяв след от уравнения Эйнштейна можно получить, что

$$R = 2 - \phi'^2/w^2. \quad (12)$$

Это уравнение дает простой способ для определения скалярной кривизны метрики, которая является решением уравнений Эйнштейна. Мы берем следующие их линейные комбинации

$$\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{w^2} \left(\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} + \frac{3f'h'}{fh} - \frac{f'w'}{fw} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{h^2} - \frac{w^2}{h^2} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{w} \left(\frac{h''}{h} - \frac{f'h'}{fh} - \frac{w'h'}{wh} \right) = 2\frac{\phi'^2}{w}, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{w} \left(\frac{h''}{h} + \frac{f'h'}{fh} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{h^2} - \frac{w^2}{h^2} \right) = 2Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^4}, \quad (15)$$

Заметьте, что уравнение (1) содержит только метрические поля. Оно может быть записано в виде

$$\left[\frac{(fh)'h}{w} \right]' = fw. \quad (16)$$

Метрика для статического сферически симметричного пространства времени дается уравнением (5). Эта форма метрики не изменяется под действием следующего преобразования, которое является следствием инвариантности метрики при следующем координатном преобразовании

$$r \rightarrow \tilde{r}, \quad w^2 \rightarrow w^2 \left(\frac{dr}{d\tilde{r}} \right)^2. \quad (17)$$

Мы воспользуемся свободой выбрать w^2 таким образом, что

$$fw = 1. \quad (18)$$

Сделав такое калибровочное преобразование мы фиксируем свободу в уравнении (17). Уравнение (16) может быть проинтегрировано и дает

$$(fh)^2 = (r - r_1)(r - r_2), \quad (19)$$

где r_1 и r_2 - произвольные постоянные. Случай, когда оба r_1 и r_2 действительны и положительны соответствует черной дыре с двумя горизонтами, находящимися в точках $r = r_{1,2}$. Экстремальная черная дыра возникает при $r_1 = r_2$. Случай, когда r_1 и r_2 являются взаимно сопряженными комплексными числами, соответствует всюду регулярному решению. Такой анализ аналогичен анализу решения Рейснера-Нордстрема. Мы часто будем использовать следующую линейную комбинацию параметров

$$\Delta = r_1 - r_2. \quad (20)$$

В калибровке (18) уравнения Эйнштейна (1,2) и (3) принимают следующий вид

$$w = 1/f, \quad (fh)^2 = (r - r_1)(r - r_2), \quad (21)$$

$$h'' - h\phi'^2 = 0, \quad (22)$$

$$(f^2 h h')' = 1 + Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^2}. \quad (23)$$

Антидилатонное уравнение (11) тоже упрощается и может быть записано в виде

$$(f^2 h^2 \phi')' = -Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^2}. \quad (24)$$

А решение уравнений анти-Максвелловского поля (3) есть

$$F_{rt} = \frac{Q_e e^{2\phi}}{h^2}. \quad (25)$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (4), найдем

$$(f^2 h h'_r)' - (f^2 h^2 \phi'_r)' = 1, \quad (26)$$

что дает

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)}. \quad (27)$$

Подстановка этого выражения в (2) дает

$$\phi''_{rr} + 2 \frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)} \phi'_r = - \frac{(C - r_1)(C - r_2)}{(r - r_1)^2 (r - r_2)^2}. \quad (28)$$

Заряженные антидилатонные кротовые норы

Обозначим

$$r_1 = r_0 + iv, r_2 = r_0 - iv, \quad v > 0. \quad (29)$$

Тогда

$$f^2 h^2 = (r - r_1)(r - r_2) = (r - r_0)^2 + v^2, \quad (30)$$

Введем еще одно новое обозначение

$$\kappa = \frac{r_0 - C}{2v}. \quad (31)$$

Тогда уравнение (27) можно переписать так

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)} = \frac{r - r_0 + 2v\kappa}{(r - r_0)^2 + v^2}. \quad (32)$$

А его решение имеет вид

$$h^2 e^{-2\phi} = A^2 [(r - r_0)^2 + v^2] e^{4\kappa \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right)}. \quad (33)$$

Чтобы решить уравнение (28) введем новую переменную

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right). \quad (34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (r - r_0)^2 + v^2 &= \frac{v^2}{\cos^2 \eta}, \quad \frac{d}{dr} = \frac{\cos^2 \eta}{v} \frac{d}{d\eta}, \\ \frac{d^2}{dr^2} &= \frac{\cos^4 \eta}{v^2} \frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{2}{v^2} \sin \eta \cos^3 \eta \frac{d}{d\eta}, \\ \frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)} &= \frac{2\kappa \cos^2 \eta}{v} + \frac{\sin \eta \cos \eta}{v}, \\ \frac{(C - r_1)(C - r_2)}{(r - r_1)^2 (r - r_2)^2} &= \frac{1 + 4\kappa^2}{v^2} \cos^4 \eta. \end{aligned} \quad (35)$$

а уравнение (28) можно переписать так

$$\frac{\cos^4 \eta}{v^2} \left(\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + 4\kappa \frac{d\phi}{d\eta} + 1 + 4\kappa^2 \right) = 0. \quad (36)$$

Тип I ($r_1 = r_2^*$, $\kappa \neq 0$)

Решение уравнения (36) для $\kappa \neq 0$ есть

$$\phi = -\left(\kappa + \frac{1}{4\kappa}\right)\eta - \frac{C_1}{2}e^{-4\kappa\eta} + \frac{1}{2}\ln C_2^2. \quad (37)$$

Учитывая (34), а также (33) и (30), получим

$$e^{2\phi} = C_2^2 \exp\left[-\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right)\eta - C_1 e^{-4\kappa\eta}\right], \quad (38)$$

$$h^2 = \frac{A^2 C_2^2 v^2}{\cos^2 \eta} \exp\left[\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\eta - C_1 e^{-4\kappa\eta}\right], \quad (39)$$

$$f^2 = \frac{1}{A^2 C_2^2} \exp\left[-\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\eta + C_1 e^{-4\kappa\eta}\right], \quad (40)$$

Подстановка (38), (39) и (40) в (3) и (4) дает

$$C_1 = -\frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2 v^2}. \quad (41)$$

Таким образом, общее статическое сферически симметричное решение типа I есть

$$e^{2\phi} = C_2^2 \exp\left[-\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right)\eta + \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2 v^2} e^{-4\kappa\eta}\right], \quad (42)$$

$$h^2 = \frac{A^2 C_2^2 v^2}{\cos^2 \eta} \exp\left[\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\eta + \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2 v^2} e^{-4\kappa\eta}\right], \quad (43)$$

$$f^2 = \frac{1}{A^2 C_2^2} \exp\left[-\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\eta - \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2 v^2} e^{-4\kappa\eta}\right], \quad (44)$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{A^2 v^2} e^{-4\kappa\eta} \cos^2 \eta, \quad (45)$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right). \quad (46)$$

Тип I ($r_1 = r_2^*$, $\kappa \neq 0$). Асимптотически плоское решение при $r \rightarrow \infty$

Требуя $\phi \rightarrow 0$ и $f^2 \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, получим

$$A^2 = e^{-2\pi\kappa}, \quad C_2^2 = \exp\left[\frac{\pi}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right) - \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\right]. \quad (47)$$

Поэтому

$$e^{2\phi} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right)(\pi - 2\eta) - \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}(1 - e^{2\kappa(\pi - 2\eta)})\right], \quad (48)$$

$$h^2 = \frac{v^2}{\cos^2 \eta} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)(\pi - 2\eta) - \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}(1 - e^{2\kappa(\pi - 2\eta)})\right], \quad (49)$$

$$f^2 = \exp\left[\frac{1}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)(\pi - 2\eta) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}(1 - e^{2\kappa(\pi - 2\eta)})\right], \quad (50)$$

$$F_{rt} = Q_e \frac{\cos^2 \eta}{v^2} e^{2\kappa(\pi - 2\eta)}, \quad (51)$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right). \quad (52)$$

Вычисление антидилатонного заряда дает

$$\begin{aligned} Q_d &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[h^2 \left(\phi'_r - \frac{F_{rt} A^t}{e^{2\phi} f^2} \right) \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} [h^2 \phi'_r] \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ v \left[-\frac{1}{2} \left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa} \right) - \frac{Q_e^2}{4\kappa v^2} e^{2\kappa(\pi - 2\eta)} \right] \right. \\ &\quad \left. \exp \left[-\frac{1}{2} \left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa} \right) (\pi - 2\eta) - \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2} (1 - e^{2\kappa(\pi - 2\eta)}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

или

$$Q_d = -\frac{v}{2} \left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa} \right) - \frac{Q_e^2}{4\kappa v}. \quad (54)$$

А разложение f^2 (50) при $r \rightarrow \infty$ определяет массу

$$M = -\frac{v}{2} \left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa} \right) + \frac{Q_e^2}{4\kappa v}. \quad (55)$$

Таким образом

$$v = \sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2} > 0, \quad \kappa = -\frac{(Q_d + M)}{2\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} \neq 0. \quad (56)$$

Таким образом, учитывая, что

$$\cos^2 \eta = \cos^2 \left[\arctan \left(\frac{r - r_0}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} \right) \right] = \frac{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2 + (r - r_0)^2}, \quad (57)$$

статическое асимптотически плоское решение типа СI имеет вид

$$e^{2\phi} = \exp \left[-\frac{(2Q_d^2 + 2Q_d M - Q_e^2)}{2(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} (\pi - 2\eta) - \frac{Q_e^2}{2(Q_d + M)^2} \left(1 - e^{-(\pi - 2\eta)(Q_d + M)/\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} \right) \right], \quad (58)$$

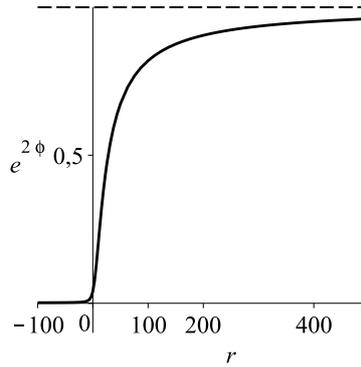


Рис. 1: Пример поведения функции $e^{2\phi}$ при $M = 2, Q_e = 1, Q_d = 10$.

$$h^2 = \left[(r - r_0)^2 + (Q_d^2 - M^2 - Q_e^2) \right] \exp \left[\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)}{2(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} (\pi - 2\eta) - \frac{Q_e^2}{2(Q_d + M)^2} \left(1 - e^{-(\pi - 2\eta)(Q_d + M)/\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} \right) \right], \quad (59)$$

$$f^2 = \exp \left[-\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)}{2(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} (\pi - 2\eta) + \frac{Q_e^2}{2(Q_d + M)^2} \left(1 - e^{-(\pi - 2\eta)(Q_d + M)/\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} \right) \right], \quad (60)$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{[(r - r_0)^2 + (Q_d^2 - M^2 - Q_e^2)]} e^{-(\pi - 2\eta)(Q_d + M)/\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}, \quad (61)$$

$$Q_d^2 - M^2 - Q_e^2 > 0, \quad \eta = \arctan \left(\frac{r - r_0}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} \right). \quad (62)$$

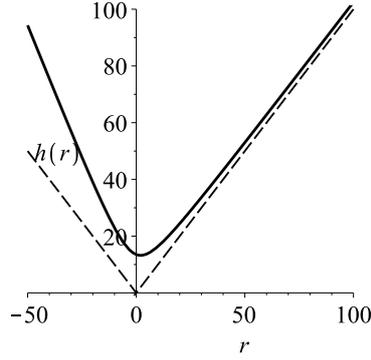


Рис. 2: Пример поведения функции $h(r)$ при $M = 2, Q_e = 1, Q_d = 10$. Штриховые линии соответствуют плоским пространствам.

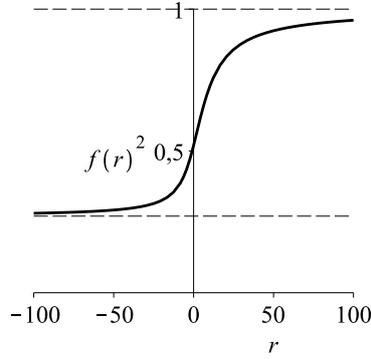


Рис. 3: Пример поведения функции f^2 при $M = 2, Q_e = 1, Q_d = 10$.

В частном случае $Q_e = 0$ получим кротовую нору Бронникова-Эллиса

$$e^{2\phi} = \exp \left[-\frac{Q_d}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}} (\pi - 2\eta) \right], \quad (63)$$

$$h^2 = \left[(r - r_0)^2 + (Q_d^2 - M^2) \right] \exp \left[\frac{M}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}} (\pi - 2\eta) \right], \quad (64)$$

$$f^2 = \exp \left[\frac{-M}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}} (\pi - 2\eta) \right], \quad (65)$$

$$F_{rt} = 0, \quad (66)$$

$$Q_d^2 > M^2, \quad M + Q_d \neq 0, \quad \eta = \arctan \left(\frac{r - r_0}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}} \right). \quad (67)$$

Тип I описывает антидилатонную заряженную кротовую нору.

Тип I ($r_1 = r_2^*$, $\kappa \neq 0$). Асимптотика решения при $r \rightarrow -\infty$

Требуя что $\phi \rightarrow 0$ и $f^2 \rightarrow 1$ при $r \rightarrow -\infty$, получим

$$e^{2\phi} = \exp \left[-\frac{(2Q_d^2 + 2Q_dM - Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} - \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d+M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}} \right)}{(Q_d + M)^2} \right] - \exp \left[-\frac{(2Q_d^2 + 2Q_dM - Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} - \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d+M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}} \right)}{(Q_d + M)^2} \right] \cdot \left(\frac{2Q_d^2 + 2Q_dM - Q_e^2}{Q_d + M} + \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 e^{-\frac{2\pi(Q_d+M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}} (2Q_d + 2M)}{(Q_d + M)^2} \right) r \quad (68)$$

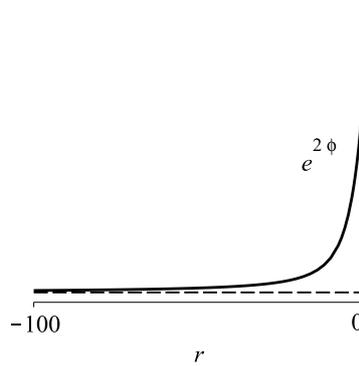


Рис. 4: Асимптотическое поведение функции $e^{2\phi}$ при $r \rightarrow -\infty$, $M = 2$, $Q_e = 1$, $Q_d = 10$. Штриховая линия определяет соответствующую асимптоту этой функции.

$$h^2 = \exp \left[\frac{(2M^2 + 2Q_dM + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} - \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d+M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}} \right)}{(Q_d + M)^2} \right] r^2 - \exp \left[\frac{(2M^2 + 2Q_dM + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} - \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d+M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}} \right)}{(Q_d + M)^2} \right] \cdot \left(-\frac{2M^2 + 2Q_dM + Q_e^2}{Q_d + M} + \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 e^{-\frac{2\pi(Q_d+M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}}}{(Q_d + M)^2} \right) r \quad (69)$$

$$f^2 = \exp \left[-\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} + \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d + M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}}\right)}{(Q_d + M)^2} \right] - \exp \left[-\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} + \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d + M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}}\right)}{(Q_d + M)^2} \right] \cdot \left(\frac{2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2}{Q_d + M} - \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 e^{-\frac{2\pi(Q_d + M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}} (2Q_d + 2M)}{(Q_d + M)^2} \right) \quad (70)$$

Таким образом, на асимптотике $r \rightarrow -\infty$ время течет медленнее (при

$$\exp \left[-\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} + \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d + M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}}\right)}{(Q_d + M)^2} \right] > 1) \text{ или быстрее}$$

$$(\text{при } \exp \left[-\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} + \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d + M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}}\right)}{(Q_d + M)^2} \right] < 1, \text{ как в примере, рассмотренном на графике}$$

(3)), чем время на асимптотике $r \rightarrow +\infty$. Кроме того, на асимптотике $r \rightarrow -\infty$ пространство имеет избыток телесного угла

$$(\text{при } \exp \left[\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} - \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d + M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}}\right)}{(Q_d + M)^2} \right] > 1) \text{ или недостаток телесного угла (при}$$

$$\exp \left[\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} - \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d + M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}}\right)}{(Q_d + M)^2} \right] < 1). \text{ Следовательно, на этой асимптотике пространство}$$

время не является плоским при

$$\exp \left[\frac{(2M^2 + 2Q_d M + Q_e^2)\pi}{(Q_d + M)\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}} - \frac{1}{2} \frac{Q_e^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi(Q_d + M)}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 - Q_e^2}}}\right)}{(Q_d + M)^2} \right] \neq 1.$$

Диаграмма вложения

Рассмотрим двумерную поверхность:

$$t = \text{const}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (71)$$

метрика на этой поверхности имеет следующий вид

$$ds^2 = \frac{dr^2}{f^2} + h^2 d\varphi^2 = \frac{dh^2}{f^2 \left(\frac{dh}{dr}\right)^2} + h^2 d\varphi^2. \quad (72)$$

Рассмотрим поверхность $z = z(h)$. в трехмерном евклидовом пространстве: метрика на этой поверхности имеет вид

$$ds^2 = dz(h)^2 + dh^2 + h^2 d\varphi^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dh} \right)^2 \right] dh^2 + h^2 d\varphi^2. \quad (73)$$

Выберем $z(h)$ так, чтобы метрики (72) и (73) совпадали. это условие определяет уравнение на $z(h)$

$$1 + \left(\frac{dz}{dh} \right)^2 = \frac{1}{f^2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2} \quad (74)$$

или

$$\frac{dz}{dh} = \pm \sqrt{\frac{1}{f^2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2} - 1}. \quad (75)$$

При $M = 2, Q_e = 1, Q_d = 10, r_0 = 0$ функция $z(h)$ имеет вид

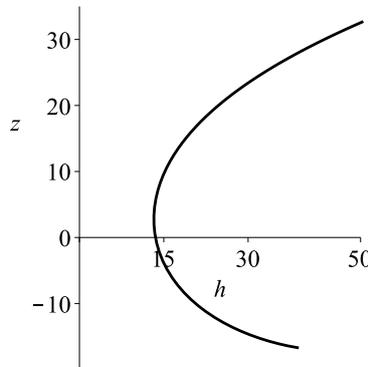


Рис. 5: Функция $z(h)$ при $M = 2, Q_e = 1, Q_d = 10, r_0 = 0$.

Минимум функции $z(h)$ соответствует горловине кротовой норы.

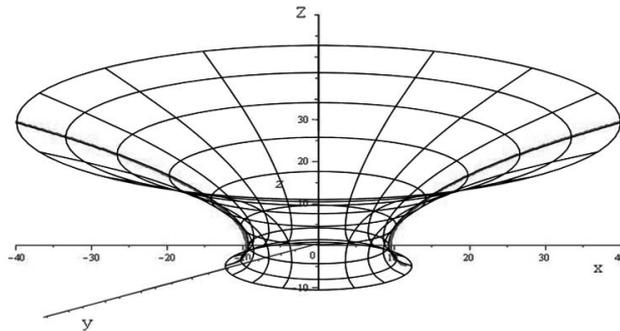


Рис. 6: Диаграмма вложения при $M = 2, Q_e = 1, Q_d = 10, x = h(r) \cos(\varphi), y = h(r) \sin(\varphi)$.

Тип II ($r_1 = r_2^*, \kappa = 0$)

Решение уравнения (36) для $\kappa = 0$ есть

$$\phi = -\frac{\eta^2}{2} + \frac{F}{2}\eta + \frac{1}{2} \ln E^2. \quad (76)$$

Поэтому

$$e^{2\phi} = E^2 e^{\eta(F-\eta)}, \quad (77)$$

$$h^2 = \frac{A^2 v^2}{\cos^2 \eta} E^2 e^{\eta(F-\eta)}, \quad (78)$$

$$f^2 = \frac{1}{A^2 E^2 e^{\eta(F-\eta)}}, \quad (79)$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e \cos^2 \eta}{A^2 v^2}, \quad (80)$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r-r_0}{v}\right). \quad (81)$$

Подстановка (77), (78) и (79) в (3) и (4) дает

$$Q_e^2 = -A^2 v^2. \quad (82)$$

Это означает, что решения для типа II нет.

Заключение

В работе получено статическое асимптотически плоское решение в теории Эйнштейна-анти-Максвелла-антидилатона, описывающие кротовые норы. Это решение определяются массой, электрическим и антидилатонным зарядами и удовлетворяющим условиям:

$$Q_d^2 - M^2 - Q_e^2 > 0, \quad M + Q_d \neq 0. \quad (83)$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований гранты № 11-02-01162-а и 13-02-00757-а.

Литература

- [1] D.J. Boulware and S. Deser, Phys. Lett. B175 (1986) 409
- [2] T. Koikawa and M. Yoshimura, Phys. Lett. B189 (1987) 29
- [3] G.W. Gibbons and K. Maeda, Nucl. Phys. B298 (1988) 741
- [4] M. Yoshimura, Prog. Theor. Phys. 81 (1989) 576
- [5] N. Marcus, Gen. Rel. Grav. 22 (1990) 873
- [6] D. Garfinkle, G.T. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. D43 (1991) 3140
- [7] G. W. Gibbons, D. A. Rasheed, Nucl.Phys. **B476** 515-547 (1996)
- [8] Clément G., Fabris J., Rodrigues M., Phys. Rev. D **79** 064021 (2009)

VARIATIONS OF THE FINE STRUCTURE CONSTANT AND THE GRAVITATIONAL CONSTANT FROM NONLINEAR MULTIDIMENSIONAL GRAVITY

K.A. Bronnikov¹, M.V. Skvortsova²

¹*Center for Gravitation and Fundamental Metrology, Russian Research Institute for Metrological Service (VNIIMS), 46 Ozyornaya St., Moscow 119361, Russia,*

²*Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of Russia (PFUR), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia*

¹E-mail: kb20@mail.ru, ²E-mail:

To explain the recently reported large-scale spatial variations of the fine structure constant α (the so-called Australian dipole), we apply some models of curvature-nonlinear multidimensional gravity [1-3]. Under the reasonable assumption of slow changes of all quantities as compared with the multidimensional Planck scale, the original theory reduces to a multi-scalar field theory in four dimensions. On this basis, we consider different variants of isotropic cosmological models in both the Einstein and Jordan conformal

frames. One of the models is viable only in the Einstein frame since in Jordan's it predicts an excessively large universe acceleration. Another model turns out to be equally viable in both frames, but in the Jordan frame it predicts simultaneous variations of α and the gravitational constant G , equal in magnitude. Large-scale small inhomogeneous perturbations of these models allow for explaining the observed spatial distribution of α values.

Литература

- [1] К.А. Бронников, С.А. Кононогов, В.Н. Мельников, *Variations of the fine structure constant and multidimensional gravity*. *Izm. Tekhnika* No. 1, 7-13 (2013).
- [2] К.А. Бронников, В.Н. Мельников, С.Г. Рубин, and И.В. Свядковский, *Nonlinear multidimensional gravity and the Australian dipole*. ArXiv: 1301.3098.
- [3] К.А. Бронников and М.В. Сквортсова, *Variations of α and G from nonlinear multidimensional gravity*. *Grav. Cosmol.* **19**, 114 (2013).

ВАРИАЦИЯ ПОСТОЯННОЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ИЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

К.А. Бронников¹, В.Н. Мельников², С.Г. Рубин³ и И.В. Свядковский⁴,

^{1,2}ВНИИМС, РУДН, Москва; ^{3,4}НИЯУ МИФИ, Москва

¹E-mail: kb20@yandex.ru, ²E-mail: melnikov@phys.msu.ru, ³E-mail: sergeirubin@list.ru, ⁴E-mail: igor_svadkovsky@mail.ru

Наблюдения спектров поглощения удаленных квазаров указывают на несколько меньшее значение величины α в прошлом по сравнению с ее значением в современную эпоху ($\delta\alpha/\alpha \sim 10^{-5}$ по данным телескопа Кекк). Аналогичные данные телескопа VLT говорят о вариациях противоположного знака, что приводит к выводу о пространственных вариациях величины α дипольного характера. Отклонение значений α в произвольной точке пространства r от ее современного значения α_0 , измеренного на Земле, описывается формулой

$$\delta\alpha/\alpha_0 = (1.10 \pm 0.25) \times 10^{-6} r \cos \psi, \quad (1)$$

где ψ – угол между направлением измерения и осью диполя, расстояние r измеряется в миллиардах световых лет.

В настоящей работе для объяснения эффекта вариации постоянной тонкой структуры нами используется подход, основанный на предположении о существовании дополнительных пространственно-временных измерений. Для этого рассмотрим D -мерное многообразие с метрикой $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\beta(x)} b_{ab} dx^a dx^b$, где компоненты метрики в дополнительных измерениях b_{ab} не зависят от координат x^μ четырехмерного пространства-времени. В данной геометрии будем использовать нелинейную по кривизне теорию гравитации с действием

$$S = \frac{1}{2} m_D^{D-2} \int \sqrt{|D|} g d^D x (F(R) + c_1 R^{AB} R_{AB} + c_2 K + L_m) \quad (2)$$

где $F(R)$ – произвольная гладкая функция, K – скаляр Кречмана, c_1 и c_2 – константы, L_m – лагранжиан материи. Рассматривая в исходном лагранжиане в качестве материи электромагнитное поле $L_m = \alpha_1^{-1} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, где α_1 – некоторая постоянная, после редукции к четырехмерному пространству и переходе к картине Эйнштейна получаем для постоянной тонкой структуры выражение вида

$$\alpha/\alpha_0 = e^{d_1(\beta-\beta_0)} \quad (3)$$

где α_0 и β_0 – значение величин в фиксированной точке пространства-времени, например, где и когда происходит наблюдение (β_0 имеет смысл эффективного скалярного поля), d_1 – размерность дополнительного пространства. Выражение (5) дает нам зависимость величины α от метрики дополнительного пространства.

Для описания пространственных вариаций α необходимо ввести в рассмотрение пространственные флуктуации скалярного поля и метрики. Для этого рассмотрим космологическая модель ФРУ с ускоренным расширением и неоднородную метрику вида

$$ds_E^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\lambda} dx^2 - e^{2\eta} (dy^2 + dz^2), \quad (4)$$

где γ, λ, η – функции x и t .

Флуктуации метрики во время инфляции могут проявлять себя как пространственная неоднородность масштабного фактора дополнительных измерений. А это, в свою очередь, влияет на величину пространственных вариаций фундаментальных физических констант, и, в частности, α . Полученные в работе результаты согласуются с наблюдениями (1) для определенного набора начальных значений, которые возникают на стадии инфляции и представляют собой случайные значения метрики.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕОДОЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ГРЕЙЗЕНА - ЗАЦЕПИНА - КУЗЬМИНА ДЛЯ ПРОТОННОЙ КОМПОНЕНТЫ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

И.А. Вернигора¹, Ю.Г. Рудой²

¹Москва, Российский университет дружбы народов, ²Москва, Российский университет дружбы народов

¹E-mail: wenera83@mail.ru, ²E-mail: rudikar@mail.ru

Одной из актуальных проблем физики космических лучей (КЛ) в области сверхвысоких энергий порядка $10^{18} \div 10^{20}$ эВ (начиная с 1966 года) остается проблема наличия или отсутствия т.н. предела Грейзена - Зацепина - Кузьмина, согласно которому спектр протонной компоненты КЛ должен резко обрываться при энергиях порядка $5 \cdot 10^{19}$ эВ из-за интенсивного фоторождения пионов в реакции $p + \gamma_{СМВ} \rightarrow p + \pi^0$. Благодаря этому расстояние прихода фотонов l ограничивается внутригалактическим масштабом порядка 50 Мпс, тогда как данные наблюдений указывают на отсутствие в этой области пространства источников протонов подходящей энергии.

К сожалению, экспериментальный статус "проблемы ГЗК" пока не является вполне определенным, и различные исследовательские группы (AGASA, HiRes, Pierre Auger) дают противоречивые результаты (см., например, [1]). В связи с этим в данной работе предлагается достаточно простой расчет, развивающий предложенный Киржницем и Чечиным в 1972 году подход к обобщению релятивистской кинематики при очень высоких значениях лоренц-фактора (порядка $10^{10} - 10^{11}$). В отличие от [2], предлагаемый подход основан не на нарушении лоренц-инвариантности, а на ее расширении до конформной инвариантности, что в значительной мере устраняет присущий этому подходу произвол и позволяет повысить l на один-два порядка за счет соответствующего сдвига порога неупругости протонов.

[1] arXiv: astro-ph/0703099v2. 15 Feb 2008.

[2] Д.А. Киржниц, В.А. Чечин. ЯФ, т. 15, с. 1051 (1972).

[3] И.А. Вернигора, Ю.Г. Рудой. Тезисы НЕА-2009, с. 14.

ОЦЕНКА ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД НА ОСНОВЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОТОЧНЫХ ГАЗОВЫХ СИСТЕМ

В.Т. Волов¹

Самарский институт фундаментальных исследований, 443008, Самара, ул.
Физкультурная, 31а

¹E-mail: vtvolov@mail.ru

Аннотация. В статье приводится краткое изложение предельной энергетической теоремы с целью использования ее для анализа предельных энерговыделений в системах тесных двойных звезд. Анализ показал, что энерговыделение в тесных двойных звездах будет меньше, чем $\frac{1}{\gamma} \dot{G} c^2$, где γ , \dot{G} – коэффициент Пуассона и расход смеси аккрецирующих газов соответственно.

В астрофизике получило широкое распространение использование нерелятивистского газодинамического и термодинамического инструментария и аналогий при изучении различных астрофизических феноменов.

Так, например, в работе У. Унру [1] приводится аналогия между определенными характеристиками "черной дыры" и течением в сверхзвуковом сопле Лавала: в сверхзвуковом сопле Лавала возмущения вверх по потоку не передаются, так же как электромагнитные сигналы от "черной дыры". В работах А.М. Черепашука [2] при определении масс ядер галактик использовались законы вращения идеального газа.

Я. Бекенштейн [3], используя теорему С. Карно и проводя мысленный эксперимент с грузом, опускающимся на "черную дыру" определил температуру "черной дыры" $T_{BH} \sim 10^{-7} K$. В своем исследовании он пришел к выводу, что энтропия "черной дыры" пропорциональна площади поверхности её горизонта событий.

В настоящей работе сделана попытка осуществить оценку предельно возможных энерговыделений в системе тесных двойных звезд, на основе доказанной автором предельной теоремы [4] для систем с быстрой прокачкой газообразной среды. Под поточной газовой системой в настоящей работе понимается такая газовая система с быстрой прокачкой в которой может происходить преобразование энергии газового потока в излучение, тепловую, акустическую энергию, а преобразование в механическую работу отсутствует ($L_{tech} \equiv 0$). Кроме того поточные газовые системы работают тем эффективнее, чем более полно проходит преобразование кинетической энергии потока в потенциальную энергию давления на выходе из системы [4]. Для получения предельной оценки энергопреобразования в поточной системе при доказательстве теоремы использовалось приближение идеального газа и условие полной утилизации кинетической энергии на выходе из поточной системы $\lambda_{out} \rightarrow 0$ (λ_{out} – коэффициент скорости потока на выходе из системы).

Теорема. Коэффициент эффективности преобразования энергии в необратимом процессе в поточной газовой системе не может превысить величины ΔN_{max} , где

$$\Delta \bar{N}_{max} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\bar{\gamma}_i - 1}{\bar{\gamma}_i} \mu_i \bar{R}_i \Theta_i \left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\bar{\gamma}_i + 1}\right) + \bar{Q}}{\sum_{i=1}^m \mu_i \bar{c}_{pi} \Theta_i + \bar{Q}} - \frac{\bar{\gamma}_1 - 1}{\bar{\gamma}_1} \frac{\bar{R}_{mix}}{\bar{c}_{pmix}}, \quad (1)$$

где безразмерные величины соответственно равны:

$$\bar{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_1}, \quad \mu_i = \frac{G_i}{G_1}, \quad \Theta_i = \frac{T_i^*}{T_1^*}, \quad \Theta_j = \frac{T_{mixj}^*}{T_1^*}, \quad \bar{c}_{pmix} = \frac{c_{pmix}}{c_{p1}} = \frac{\sum_{j=1}^n c_{pj} \Theta_j \mu_j}{c_{p1} \sum_{j=1}^n \Theta_j \mu_j},$$

$$\bar{Q} = \frac{\dot{Q}}{c_{p1} T_1^* G_1}, \quad \bar{R}_{mix} = \frac{R_{mix}}{R_1} = \frac{\sum_{j=1}^n R_j \Theta_j \mu_j}{R_1 \sum_{j=1}^n \Theta_j \mu_j}, \quad \bar{R}_i = \frac{R_i}{R_1}, \quad \bar{c}_{vmix} = \frac{\sum_{j=1}^n c_{vj} \Theta_j \mu_j}{c_{v1} \sum_{j=1}^n \Theta_j \mu_j}. \quad (2)$$

В выражениях (2) γ_i , R_i , – показатели адиабаты и газовой постоянной i -й компоненты смеси, соответственно; R_{mix} – газовая постоянная смеси; T_i^* , $i = 1, 2, \dots, m$, T_{mix}^* – полная температура газа на i -м входе и j -м выходе, соответственно; c_{pi} , $i = 1, 2, \dots, m$, c_{pmix} – теплоемкость газа при постоянном давлении на i -входе и теплоемкость при постоянном давлении смеси, соответственно; G_1 , $i = 1, 2, \dots, m$ – расход среды через i -й вход; G_j , $j = 1, 2, \dots, n$, – расход через j -й выход; \bar{Q} – подведенная (или отведенная) энергия к поточной газовой системе; i_1^* , i_2^* – энтальпии заторможенного потока на входе и выходе поточной газовой системы; $\gamma_j = \frac{c_{pj}}{c_{vj}}$ – показатель адиабаты на j -м выходе из поточной системы, ν_i – скорость в i -м сечении на входе в поточную газовую систему; $\lambda_i = \frac{\nu_i}{\sqrt{\frac{2\gamma_i}{\gamma_i+1} R_i T_i^*}}$ – коэффициент скорости.

Следствие 1. Глобальный максимум утилизированной механической энергии (мощности) газового потока, а также подведенной (или отведенной) энергии (мощности) в форме тепла, излучения, электрической или акустической энергии в поточной газовой системе вычисляется по формуле:

$$\lim_{\substack{\lambda_{out} \rightarrow 0 \\ \lambda_i \rightarrow \lambda_{max}}} \Delta \bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i \bar{R}_i \Theta_i \frac{\gamma_i}{\gamma_i-1} \frac{\gamma_1-1}{\gamma_1} + \bar{Q}}{\sum_{i=1}^m \bar{c}_{pi} \Theta_i \mu_i + \bar{Q}} - \frac{\gamma_1-1}{\gamma_1} \frac{\bar{R}_{mix}}{\bar{c}_{pmix}}. \quad (3)$$

Формула (3) получена в приближении максимально возможной скорости на входе в поточную систему ($\lambda_i \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i-1}}$) и полной утилизации кинетической энергии на выходе из неё ($\lambda_{out} \rightarrow 0$).

В случае равенства температур и расходов одноименных газов на m входах в газовую систему выражение (9) принимает простой вид:

$$\Delta \bar{N}_{max} = \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (4)$$

Выражение (1) имеет то же значение для одноименных газов на m входах при бесконечно большом подводе (при отводе) энергии (мощности) \bar{Q} к поточной газовой системе ($\bar{Q} \rightarrow \infty$):

$$\lim_{\bar{Q} \rightarrow \infty} \Delta \bar{N}_{max} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}. \quad (5)$$

В упрощенном случае одного входа и одного выхода в газовой системе и использовании только одного газа (Рис. 1) предельное относительное значение $\Delta \bar{N}_{max}$ (1) имеет вид:

$$\Delta \bar{N}_{max} = \frac{\frac{1}{\gamma} \eta_{Carnot}^G + \frac{1}{\gamma} \bar{Q}}{1 + \bar{Q}}, \quad \text{где } \eta_{Carnot}^G = 1 - \frac{T_1}{T_1^*} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda_1^2 \quad (6)$$

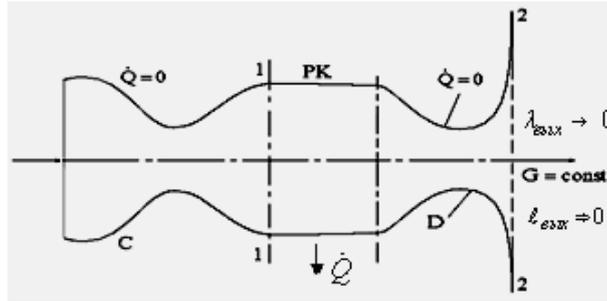


Рис. 1. Принципиальная схема поточной газовой системы ($L_{tech} = 0$), $\lambda_{вых}$ – коэффициент скорости потока на выходе из системы, $\ell_{вых}$ – момент количества движения на выходе из системы, C – сверхзвуковое сопло, PK – пространство поточной системы, где отводится (или доводится) энергия \bar{Q} , D – диффузор.

Доказанная предельная теорема дает связь с двумя предельными теоремами термодинамики – теоремой С. Карно и теоремой В. Нернста: коэффициент эффективности преобразования энергии в газовой системе ($\eta_{G>0}^{ideal}$, $\bar{Q} = 0$) будет меньше в γ – раз газодинамического к.п.д. цикла Карно ($\frac{1}{\gamma} \eta_{Carnot}^G$). При этом даже для идеального газа вследствие недостижимости абсолютного нуля $T_2 > 0$ (теорема Нернста) к.п.д. Карно меньше единицы. В связи с этим фактом для коэффициента эффективности преобразования энергии в поточной системе получаем:

$$\eta_{G>0}^{ideal} = \frac{1}{\gamma} \eta_{Carnot}^G < \frac{1}{\gamma}. \quad (7)$$

Рассмотрим случай неперемешивающихся газов на выходе из поточной газовой системы. В этом случае оценка предельной эффективности преобразования энергии в поточной газовой системе сводится к суммированию решения для m входов и n выходов:

$$\Delta \bar{N}_i = \frac{\frac{1}{\gamma_i} \eta_i + \frac{1}{\gamma_i} \bar{Q}_i}{1 + \bar{Q}_i} \Rightarrow \Delta \bar{N}_i = \frac{\Delta N_i}{c_{pi} T_i^* G_i + \bar{Q}_i},$$

отсюда:

$$\Delta N_i = \Delta \bar{N}_i c_{pi} T_i^* G_i (1 + \bar{Q}_i).$$

Суммарное значение утилизированной механической энергии потока на m -входах равно:

$$\Delta N_\Sigma = \sum_{i=1}^m c_{pi} T_i^* \bar{Q}_i (1 + \bar{Q}_i) \Delta \bar{N}_i,$$

отсюда:

$$\Delta \bar{N}_\Sigma = \frac{\Delta N_\Sigma}{N_\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^m c_{pi} T_i^* G_i (1 + \bar{Q}_i) \Delta \bar{N}_i}{i_\Sigma^* + Q_\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^m i_i^* (1 + \bar{Q}_i) \Delta \bar{N}_i}{i_\Sigma^* + Q_\Sigma}. \quad (8)$$

В соответствии с теоремой о среднем получаем оценку

$$\eta_{G>0}^{ideal} = \Delta \bar{N}_\Sigma = \langle \Delta \bar{N}_i \rangle, \quad (9)$$

или для случая максимальной входной скорости в поточную газovou систему ($\lambda_i = \sqrt{\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i-1}}$) получаем:

$$\eta_{G>0}^{ideal} = \left\langle \frac{1}{\gamma_i} \right\rangle. \quad (10)$$

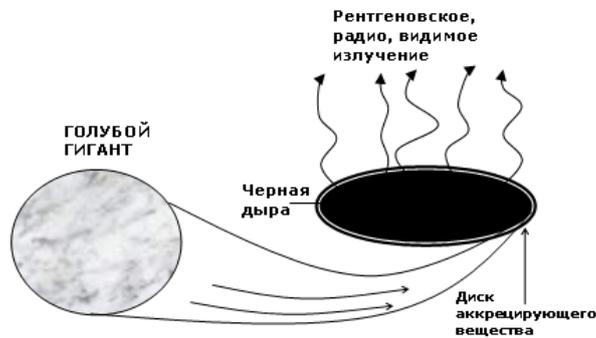


Рис. 2. Астрофизическая поточная газовая система.

Система тесных двойных звезд представляет собой астрофизическую термодинамическую машину, которая наиболее близко соответствует идеальной термодинамической поточной системе, исследуемой в вышеизложенной теореме [4].

Как следует из принципиальной схемы поточной газовой системы имеется определенная аналогия с системой тесных двойных звезд (голубой гигант - "черная дыра"): скорость и момент количества движения на выходе из системы стремятся к нулю (отток вещества от "черной дыры" отсутствует, а момент гасится).

Прежде чем упасть на "черную дыру", газ интенсивно закручивается в аккреционном диске, где происходит интенсивное излучение в оптическом, радио- и рентгеновском диапазонах (Рис. 2). В идеальной поточной системе преобразование в механическую работу отсутствует ($L_{tech} = 0$), а преобразование энергии может реализоваться в виде излучения, тепла, перераспределения энергии в потоке (вихревые течения).

Таким образом, имеется аналогия между астрофизической термодинамической машиной – системой тесных двойных звезд - и идеальной поточной системой для которой была доказана теорема [4]. Для энерговыделений в аккреционных дисках "черных дыр" получаем предельную оценку при подстановке условия ($\bar{Q} \gg 1, \bar{Q} \sim \dot{G}c^2$) в уравнение (5):

$$\eta_{G>0}^{ideal} < \frac{1}{\gamma} \approx 0.6, \text{ где } \gamma_{He} \approx 1.65. \quad (11)$$

Таким образом, согласно теореме в долях $\dot{G}c^2$ энерговыделение в системе тесных двойных звезд будет меньше 60%.

Как показали астрофизические исследования, максимальное излучение в системе тесных звезд получено для вращающихся "черных дыр", которое равно $E_{rad} = 0.42\dot{G}c^2$ [1], что не противоречит полученной оценке.

Литература

- [1] W.G. Unruh, *Notes on Black Hole Evaporation*, Phys. Rev., **D14** (4), 870 (1976).
- [2] А.М. Черепашук, *Сверхмассивные черные дыры в ядрах галактик*, Соревский образовательный журнал, Т. **6**, №11, 66 (2000).
- [3] D. Jacob, *Bekenstein Black Holes and Entropy*, Phys. Rev., **D7**, 2333 (1973).
- [4] В.Т. Волов, *Предельная энергетическая теорема для расходной тепловой машины*, Доклады академии наук, Т. **381**, № 4, 475 (2001).

СВЕРХЗВУКОВЫЕ ЗАКРУЧЕННЫЕ ПОТОКИ ГАЗА И ПЛАЗМЫ КАК ОСНОВА МОДЕЛИРОВАНИЯ КВАЗИГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

В.Т. Волов¹

Самарский институт фундаментальных исследований, 443008, Самара, ул.
Физкультурная, 31а

¹E-mail: vtvolov@mail.ru

Аннотация. В линейном приближении получено решение уравнений Эйнштейна для цилиндрически симметричного закрученного идеального газа с переменной угловой скоростью и ненулевым давлением для потенциала Ренкина, относящегося к типу I по классификации Петрова. При этом скалярная кривизна данного пространства отрицательна и пропорциональна абсолютной температуре газа. Уравнение состояния имеет более сложный вид, чем известные уравнения состояния теории вакуума. Намечены перспективы проведения экспериментального моделирования квазигравитационных полей.

Принцип «эквивалентности» А. Эйнштейна провозглашает подобие между гравитационными полями и неинерциальными системами отсчета. Тела будут двигаться подобным образом, то есть иметь одинаковые ускорения, что и при движении в гравитационном поле, обусловленном распределением в пространстве некоторой массы [1]. Однако реально эквивалентность естественных гравитационных и «эффе́ктивных» гравитационных полей, порожденных неинерциальными системами отсчета, может выполняться только локально для стационарных полей [1, 2]. Это объясняется прежде всего вырождением естественного гравитационного поля на бесконечности. В то же время поля, порожденные неинерциальными системами, напротив, неограниченно возрастают на бесконечности (вращающиеся системы отсчета) или остаются конечными по величине для неинерциальных систем отсчета, движущихся поступательно с постоянным ускорением.

Таким образом, поля, создаваемые неинерциальными системами отсчета, эквивалентны истинным гравитационным полям, порождаемым распределенной в пространстве массой, только в узком пространственно-временном масштабе, где гравитационное поле можно считать однородным. Для любой неинерциальной системы всегда можно противопоставить другую неинерциальную систему, относительно которой все гравитационные эффекты исчезают. Перечисленные выше различия между истинными гравитационными полями и неинерциальными полями имеют свое отражение при аналитическом описании свойств пространства-времени [1]. Однако имеется класс неинерциальных систем, отвечающий принципу эквивалентности в большем, чем другие неинерциальные системы – это закрученные газообразные потоки.

Ниже будет приведен анализ указанного типа поля и получено решение уравнений Эйнштейна для потенциала вихря Ренкина.

Из анализа уравнений газовой динамики закрученных потоков [3] следует, что решениями уравнения движения для окружной составляющей скорости является закон вращения твердого тела ($V_\varphi = \omega \cdot r$) и потенциальное течение газа ($V_\varphi \sim 1/r$). Данные решения являются общими для идеального газа и частными для вязкого ламинарного течения газа. Другое, частное решение уравнений Навье-Стокса [3], стационарного закрученного потока, часто называемое вихрем Бюргерса, имеет также четко выделенные области вращения ядра течения ($\omega \approx const$) и потенциального течения ($V_\varphi \sim 1/r$). Этот факт говорит об устойчивости данных решений. Эксперимент подтверждает данное утверждение для закрученных потоков в камерах и свободных струй [3, 4], где имеются четко выделенные две зоны течения: 1) зона вращения твердого тела и 2) потенциальное течение. Следует отметить, что финитность поля окружной скорости, создаваемого закрученными газожидкостными потоками в камерах выполняется на стенке камеры из-за прилипания газа. В работах [4, 5, 6, 7] показано, что при расчете сильнозакрученных течений в вихревых камерах, где имеют место рекордные значения турбулентной кинематической вязкости ($\nu_{turb} = \nu_{mol} \cdot 10^4$), пренебрежение вязкими эффектами оправдано тем обстоятельством, что инерциальные силы играют более существенную роль по сравнению с силой вязкости, за исключением узкого пристенного слоя. Таким образом, ни вязкость газа, ни сжимаемость, а также наличие стенок не могут принципиально изменить характер течения в закрученных потоках газов.

Не теряя общности подхода, рассмотрим моделирование квазигравитационных полей идеальными закрученными газовыми потоками для цилиндрически симметричного стационарного газового потока ($\partial_t = \partial_\varphi = \partial_z = 0$). При этом термин «квазигравитационные поля» введен для того, чтобы подчеркнуть отличие данных полей, обусловленных сильнозакрученными газовыми потоками, от реальных гравитационных полей, обусловленных распределением массы в пространстве. Под термином «квазигравитационное поле» понимается поле имеющее качественное подобие с реальным гравитационным полем распределение

потенциала и напряженности, но убывающим быстрее, чем $1/r$ и $1/r^2$ соответственно для потенциала ψ и напряженности поля g во внешней области ($r > r_*$). В ядре сильнозакрученного потока идеального сжимаемого газа, как отмечено выше, имеет место закон вращения твердого тела, поэтому напряженность и потенциал квазигравитационного поля изменяется по следующим законам:

$$\begin{cases} g_{quasi} = \omega^2 r, & |g_{quasi}| \gg g_{natural}, \\ \psi_{quasi} = \omega^2 \left(r_*^2 - \frac{r^2}{2} \right), & |\psi_{quasi}| \geq \psi_{natural} \approx const, \end{cases} \quad (1)$$

где $r \leq r_*$, ω – угловая скорость вращения ядра газового потока, r_* – радиус разделения течения на вихревую ($\omega = const$) зону и область потенциального течения ($V_\varphi \sim 1/r$), $g_{body, gas}$, $\psi_{body, gas}$ – напряженность и потенциал естественного поля, создаваемого гравитирующим телом и массой газа.

Потенциал естественного гравитационного $\varphi_{body, gas}$ в рамках настоящего исследования является практически постоянной величиной и в расчетах квазигравитационного поля учитываться не будет.

Из условия равенства давлений в зоне сшивки течений [5, 6] газа можно найти радиус для идеального сжимаемого разделения r_* и значение угловой скорости ядра потока ($\omega = V_\varphi^{max}/r_*$). Напряженность и потенциал квазигравитационного поля вне ядра потока описываются следующими выражениями:

$$g_{quasi} = \frac{\omega^2 r_*^4}{r^3}, \quad \varphi_{quasi} = \frac{\omega^2 r_*^4}{2r^2} \quad r > r_*. \quad (2)$$

Из сравнения напряженностей и потенциалов следует, что квазигравитационные и естественные гравитационные поля ведут себя подобным образом, но первые убывают быстрее ($g_{quasi} \sim 1/r^3$). Внутри гравитирующей сферы и в ядре газового потока гравитационные поля ведут себя качественно одинаковым образом.

Как показывает расчет, центробежные ускорения (напряженность квазигравитационного поля) в сверхзвуковых закрученных потоках высокотемпературной плазмы [6] для специальных вихревых устройствах могут достигать гигантских величин ($g_{quasi} \approx 10^{10}g$).

При этом парадоксальным является факт, что максимальная скорость вращения газа на много порядков меньше скорости света $V_\varphi^{max} \ll c$, а скалярная кривизна локального пространства-времени в вихре может достигать существенных по абсолютной величине значений и имеет отрицательное значение ($R \approx 10^{-4} \div 10^{-5} \text{м}^{-2}$).

Ввиду вышесказанного представляет интерес более подробное исследование локальных свойств пространства-времени полей, индуцированных сильнозакрученными газовыми потоками, на основе уравнений Эйнштейна.

Постановка задачи состоит в приближенном решении уравнений Эйнштейна для стационарного ($\partial_t = 0$), цилиндрически симметричного случая вращающейся ($\partial_\varphi = 0$) газовой среды для потенциала вихря Ренкина (1)–(2). Ставится обратная задача определения элементов тензора энергии–импульса T_μ^ν по заданному метрическому тензору с потенциалом Ренкина.

Уравнения Эйнштейна для одновременного наличия гравитационного поля и поля, обусловленного сильнозакрученными потоками газа, запишутся в смешанной форме для сигнатуры +2 следующим образом:

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_\mu^\nu, \quad (3)$$

где R_μ^ν – тензор Риччи, $\delta_\mu^\nu = 1 (\nu = \mu)$, $\delta_\mu^\nu = 0 (\nu \neq \mu)$, R – свертка тензора Риччи, G – гравитационная постоянная, T_μ^ν – тензор энергии–импульса.

Тензор энергии–импульса для первой задачи является диагональным, так как рассматривается в квазистатическом приближении $g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$:

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \varepsilon_{quasi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{quasi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{quasi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_{quasi} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Такая запись тензора T_μ^ν соответствует общепринятой форме тензора энергии–импульса для идеальной жидкости в случае отсутствия вращения [2]. Отличие тензора энергии–импульса (4) от известных выражений T_μ^ν состоит в том, что элементы диагонали – плотность энергии и давления являются квазигравитационными величинами, определяемыми потенциалом Ренкина.

Ввиду нелинейности уравнений Эйнштейна принцип суперпозиции полей не выполняется. Однако для слабых гравитационных полей, для линеаризованных уравнений Эйнштейна принцип суперпозиции справедлив. В случае цилиндрической или сферической симметрии в ньютоновском приближении g_{00} элемент метрического тензора равен:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\psi_\Sigma}{c^2}, \quad (5)$$

где ψ_Σ – алгебраическая сумма потенциалов естественного гравитационного поля и поля, индуцированного закрученным потоком газа. Суммарный потенциал равен:

$$\psi_z = \psi_{body} + \psi_{gas} + \psi_{quasi}. \quad (6)$$

Необходимо подчеркнуть, что квазигравитационных полей отдельно от естественных гравитационных полей не существует: квазигравитационные поля являются локальными, так как на значительном удалении они вырождаются в естественные гравитационные поля. На радиусе r_{**} суммарная напряженность поля закрученного потока и естественного гравитационного поля обращается в ноль. При $r > r_{**}$

$$\begin{cases} g_{quasi} \Rightarrow g = -\frac{MG}{r^2} + \frac{\omega^2 r_*^4}{r^3} \approx -\frac{MG}{r^2}, \\ \psi_{quasi} \Rightarrow \psi = -\frac{MG}{r} + \frac{\omega^2 r_*^4}{2r^2} \approx -\frac{MG}{r}, \end{cases} \quad (7)$$

где $M = M_{body} + M_{gas}$; M_{body} – масса некоторого тела, в гравитационном поле которого исследуется поле закрученных газовых потоков; M_{gas} – масса газа закрученного потока.

Ниже будут приведены вычисления исключительно для случая локального квазигравитационного поля.

Для осесимметричного ($\partial_\varphi = 0$) стационарного случая ($\partial_t = 0$) вращения идеального газа метрику можно записать в виде [8]–[10]:

$$dS^2 = g_{00}c^2 dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\varphi^2 + g_{33}dz^2 + 2g_{02}d\varphi dt + 2g_{13}d\varphi dr + 2g_{01}dr dt. \quad (8)$$

Во внутренней области закрученного потока имеет место закон вращения твердого тела ($\omega_0 = const$), в связи с чем два последних перекрестных члена в (8) равны нулю. В случае слабой гравитации $g_{00} \approx g_{11} \approx g_{33} \approx 1$, $g_{22} \approx r^2$, $g_{02} \approx \omega r^2$.

Во внешней области закрученного потока ($r > r_*$), где угловое ускорение переменное ($\omega \sim 1/r^2$), последние два перекрестных члена в метрике (8) остаются. Однако при сшивке метрик во внутренней и внешней областях должны быть равны соответствующие элементы метрического тензора $g_{ik}(\psi_\Sigma)$ по основным координатам (r, ψ, z) и их первые производные

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{r_*-\varepsilon} &= g_{\mu\nu}^{r_*+\varepsilon}, \\ g_{\mu\nu}^{r_*-\varepsilon} &= g_{\mu\nu}^{r_*+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\varepsilon > 0$. В связи с этим два последних перекрестных члена во внешней области также равны нулю.

Таким образом, метрика для цилиндрически симметричного случая поля, индуцированного закрученными газовыми потоками, в изотропных координатах после обезразмеривания может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} d\bar{S}^2 &= -\left(1 + \frac{2\psi}{c^2}\right) d\bar{t}^2 + \left(1 - \frac{2\psi}{c^2}\right) (d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2) + \\ &+ \left(1 - \frac{2\psi}{c^2}\right) \bar{r}^2 d\varphi^2 + \frac{2\omega r_*}{c} \left(1 + \frac{2\psi}{c^2}\right) \bar{r}^2 d\varphi d\bar{t}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{r} = \frac{r}{r_*}$, $\bar{z} = \frac{z}{r_*}$, $\bar{t} = t \frac{c}{r_*}$, $\omega = \omega_0$ при $\bar{r} \leq 1$, $\omega = \frac{\omega_0}{\bar{r}^2}$ при $\bar{r} > 1$. Потенциалы ψ во внутренней ($\bar{r} \leq 1$) и внешней ($\bar{r} > 1$) областях определяются по соотношениям (1), (2), что соответствует на бесконечности вырождению метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в Галилееву метрику плоского пространства-времени:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow (-1, 1, 1, 1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Решение уравнений (3)–(8) разделим на две задачи: в первой задаче будем искать решение уравнений Эйнштейна для квазистатического случая, когда вращением гипотетической (“отрицательной”) массы можно пренебречь ($g_{02} = 0$) и считать ее сосредоточенной в области твердого вращения газа, а во второй задаче учтем перекрестный член g_{02} .

Для решения первой задачи оценим вклад перекрестного члена g_{02} в метрику (10). Из (6) находим, что $\frac{g_{02}}{g_{11}} \approx A \approx \frac{\omega r_*}{c} \approx \frac{V_{gas}^{max}}{c} \ll 1$, то есть вкладом перекрестного члена $d\varphi dt$ в метрику в первом приближении можно пренебречь.

Подтверждением данного факта служат прямые вычисления элементов тензора Риччи для вращающейся идеальной жидкости по закону твердого тела [8]. Единственный ненулевой внедиагональный элемент тензора Риччи, обусловленный вращением для нашего случая, будет также существенно меньше диагональных

членов R_i^i :

$$\frac{R_0^2}{R_i^i} \approx 20 \frac{V_\varphi^{max}}{c} < 10^{-4} \ll 1. \quad (12)$$

В виду этого квазистатический подход к анализу слабых гравитационных полей (задача 1), обусловленных сверхзвуковыми закрученными потоками газа, корректен.

Вычисление элементов тензора Римана и тензора энергии импульса для квазигравитационного поля с потенциалами (1)–(2) для внутренней ($r \leq r_*$) и внешней ($r_* < r < r_{**}$) области цилиндра осуществлялось с помощью техники внешних дифференциальных форм [9]. Из уравнений Эйнштейна на основе вычисленных значений элементов тензора Риччи R_μ^v получаем в приближении $1/c^2$ значения элементов тензора Риччи $R_{\mu\nu}$ и плотности квазигравитационной массы ρ_{quasi} :

$$R_{tt} = R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{zz} = -4A^2, \quad \rho_{quasi} = -\frac{\omega^2}{\pi G}, \quad 0 < \bar{r} < r_*. \quad (13)$$

Давление ρ_{quasi} , как и следовало ожидать, в указанном приближении $1/c^2$ оказалось равным нулю ($p_{quasi} \ll \varepsilon_{quasi}$) $p_{quasi} \cong 0$.

Свертка уравнений Эйнштейна для исследуемого поля после несложных преобразований имеет вид:

$$R_{quasi} = \frac{8\pi G T_i^i}{c^4} \cong -4A^2 = -Q_G y_1 \beta T^*, \quad (14)$$

где T^* – температура торможения газа; $y_1 = 4y$, $y = \frac{2k}{k+1} \frac{1}{\mu}$ – параметр, учитывающий физико-химические

свойства закрученного потока газа, генерирующего поле; $Q_G = \frac{R_{gas}}{c^2} \cong 0,92503 \cdot 10^{-13} \text{ кг} \cdot (\text{Кмоль} \cdot \text{К})^{-1}$ – константа поля, генерированного закрученными газовыми потоками, представляющая комплекс фундаментальных мировых констант; k – постоянная Пуассона; R_{gas} – универсальная газовая постоянная; μ – молекулярный вес газа; $\lambda_\varphi^{max} = \frac{\lambda_1}{\bar{r}_*}$ – коэффициент максимальной окружной скорости в вихре ($r = r_*$),

$$\beta = \frac{(\lambda_\varphi^{max})^2}{\bar{r}_*^2}.$$

Левая часть уравнения состояния (14) содержит параметры квазигравитационного поля, а правая часть содержит кинематические и термодинамические параметры закрученного потока газа, генерирующего квазигравитационное поле.

Из уравнений (14) следует, что скалярная кривизна исследуемого поля прямо пропорциональна температуре торможения газа T^* закрученного потока.

Во внешней области $r_* < r < r_{**}$ для метрики (10) с потенциалом получаем следующие значения элементов тензора Риччи:

$$R_{tt} = R_{rr} = R_{\varphi\varphi} = R_{zz} \cong \frac{2A^2}{\bar{r}^4}. \quad (15)$$

Так как разложение в ряд выражений метрического тензора $g_{\mu\nu}$ во внешней области ($r > r_*$) реализуется по степеням $1/r$, то четвертая степень разложения $1/r^4$ дает хорошее приближение нуля.

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{2A^2}{\bar{r}^4} \approx 0 \quad (\mu = \nu). \quad (16)$$

Таким образом, полученные результаты можно интерпретировать как подтверждение гипотезы об эквивалентной отрицательной массе, сосредоточенной в области $r \leq r_*$, а во внешней области ($r > r_*$) пространство пустое ($R_{\mu\nu} \approx 0$).

Тензор энергии–импульса T_μ^ν во второй задаче будет отличаться от тензора энергии–импульса первой задачи тем, что в нем будут присутствовать внедиагональные элементы, обусловленные вращением газа ($g_{02} \neq 0$). Однако, после группировки членов метрика (10) принимает следующий вид:

$$d\bar{S}^2 = -(1 + 2A^2) d\bar{t}^2 + (1 - 2A^2 + A^2 \bar{r}^2) \bar{r}^2 (d\varphi + \Omega d\bar{t})^2 + \\ + (1 - 2A^2 + A^2 \bar{r}^2) (d\bar{z}^2 + d\bar{r}^2),$$

где

$$\Omega = A \frac{1 + 2A^2 - A^2 \bar{r}^2}{1 - 2A^2 + A^2 \bar{r}^2} \cong A (1 + 4A^2 - 2A^2 \bar{r}^2), \quad d\chi = d\varphi + \Omega d\bar{t}, \quad A = \frac{\omega_0 r_*}{c},$$

и решение задачи 2 сводится к решению задачи 1, но в пространстве переменных $(\bar{t}, \bar{r}, \chi, \bar{z})$, для которых мы в дальнейшем используем унифицированные обозначения $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{\chi}, \hat{z})$. Тензор энергии–импульса в новом

базисе $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{\chi}, \hat{z})$ будет иметь также диагональный вид (4). Решение второй задачи ($g_{02} \neq 0$) по вычислению элементов тензора Римана и тензора энергии–импульса для квазигравитационного поля с потенциалами (1), (2) для внешней ($r_* < r < r_{**}$) и внутренней ($r \leq r_*$) области цилиндра осуществлялось также с помощью техники внешних дифференциальных форм [9]. Компоненты тензора Риччи и плотность энергии имеют вид:

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = 0, R_{\hat{\chi}\hat{\chi}} = -3A^2, R_{\hat{r}\hat{r}} = -3A^2, R_{\hat{z}\hat{z}} = -2A^2, \rho_{quasi} = -\frac{\omega_0^2}{2\pi G}. \quad (17)$$

Как следует из (17) плотность энергии квазигравитационного поля, также как и в задаче 1, пропорциональна квадрату угловой скорости, что согласуется с выводом работы [11], о том, что плотность энергии вакуумного поля тем выше, чем выше скорость вращения газа.

Из уравнений (14) следует, что скалярная кривизна исследуемого поля прямо пропорциональна абсолютной температуре газа T^* закрученного потока.

Во внешней области $r_* < r < r_{**}$ для метрики (10) с потенциалом (2) получаем следующие значения элементов тензора Риччи.

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{4A^2}{\bar{r}^4}, R_{\hat{\chi}\hat{\chi}} = \frac{3A^2}{\bar{r}^4}, R_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{A^2}{\bar{r}^4}, R_{\hat{z}\hat{z}} = \frac{2A^2}{\bar{r}^4}, R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 0. \quad (18)$$

Так как разложение в ряд выражений метрического тензора $g_{\mu\nu}$ во внешней области реализуется по степеням $1/r$, то четвертая степень разложения $1/r^4$ дает хорошее приближение нуля.

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{const}{r^4} \approx 0 \quad (\mu = \nu). \quad (19)$$

Для определения значения давления квазигравитационного поля используется уравнение гравитационного равновесия, являющегося следствием закона сохранения энергии ($T_{\mu,v}^v = 0$):

$$\frac{\partial p_{quasi}}{\partial r} + \rho_{quasi} \psi'_{quasi} = 0. \quad (20)$$

Выражение для давления локального поля закрученных газовых потоков p_{quasi} имеет вид:

$$p_{quasi} = \frac{\omega_0^4 r_*^2}{4\pi G} (1 - \bar{r}^2). \quad (21)$$

Уравнение состояния квазигравитационного поля имеет следующий вид:

$$\frac{p_{eq}}{\varepsilon_{eq}} = -\frac{\omega_0^2 r_*^2}{4c^2} (1 - \bar{r}^2) \quad (22)$$

или

$$\frac{p_{eq}}{\varepsilon_{eq}} = -\frac{\pi^2 \nu^2 r_*^2}{c^2} (1 - \bar{r}^2). \quad (23)$$

Уравнения (22) и (23) можно назвать оптической формой или «эйконал-формой» (ω_0/c^2) уравнения состояния исследуемого локального поля.

Выразив угловую скорость вращения ω через термодинамические и кинематические параметры закрученного потока газа, получим другую форму уравнения состояния:

$$\frac{p_{quasi}}{\varepsilon_{quasi}} = -Q_G y_1 \Theta^* (1 - \bar{r}^2), \quad (24)$$

где $\Theta^* = (\lambda_\varphi^{max})^2 T^*$ – величина, включающая термодинамические (p^*, T^*) и кинематические параметры газа.

Уравнение (24) представляет собой газодинамическую форму уравнения состояния для квазигравитационного поля (задача 2).

Левая часть уравнения состояния (24) содержит параметры квазигравитационного поля, а правая часть содержит кинематические и термодинамические параметры закрученного потока газа.

Полученный результат соответствует теореме (Ehlers, 1962) [12], согласно которой каждому статическому вакуумному решению можно сопоставить твердотельное вращающееся стационарное решение для пыли. Отличие заключается в том, что давление в нашем случае ненулевое и уравнение состояния имеет более сложный вид, чем для известных вакуумных решений [12].

Кроме того, качественным отличием уравнений состояния (21), (22) от известных релятивистских и ультрарелятивистских [12] является тот факт, что $0 < p_{eq} \ll \varepsilon_{eq}$, и его можно идентифицировать как «инфрарелятивистский» случай.

Таким образом, получено новое приближенное решение уравнений Эйнштейна для вращающихся газобразных сред с ненулевым давлением и переменной угловой скоростью. Оно относится по классификации Петрова к I типу ($I (M^{-1})$) [13] и в соответствии с теоремой (Ehlers, 1962) [11] может быть сопоставлено со статическим вакуумным решением уравнения Эйнштейна.

Литература

- [1] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., Pt. 2, 844 (1915).
- [2] Л.Д. Ландау, *Теория поля*, М.: Наука, 1973, 427 с.
- [3] А. Гупта, Д. Лилли, Н. Сайред, *Закрученные потоки*, М.: Мир, 1987.
- [4] М.А. Гольдштик, *Вихревые течения*, Новосибирск: Наука, 1983, 387 с.
- [5] А.П. Меркулов, *Вихревой эффект и его применение в технике*, М.: Машиностроение, 1969, 183 с.
- [6] В.Т. Волков, *Термодинамика и теплообмен сильно закрученных потоков*, Харьков: ХАИ, 1992, 236 с.
- [7] В.Т. Волков, *Метод расчета вихревого диффузорного устройства*, ИФЖ, Т. **X.IV**, № 1, 35 (1983).
- [8] W. Davidson, *A Petrov type I cylindrically symmetric solution for perfect fluid in steady rigid body rotation*, Class. Quantum Grav. Vol. **13**, 283 (1996).
- [9] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, Т. 1,2, М: Мир, 1977.
- [10] С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, в 2-х частях, М.: Мир, 1986.
- [11] Farup & Qyvind Grq, *Vacuum Energy and Inertial Dragging*, General Relativity and Gravitation, Vol. **28**, No. 4, 441 (1996).
- [12] *Точные решения уравнений Эйнштейна*, под ред. Э. Шмунцера, М.: Энергоиздат, 1982.
- [13] V.T. Volov, *Gas Dynamic Theory of Local Quasigravity*, arXiv: 1205.2473.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ РЕГУЛЯРНОЙ УСКОРЕННО-РАСПИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ РИМАНА-КАРТАНА

А.С. Гаркун¹, В.И. Кудин², А.В. Минкевич^{2,3}

¹198035, Национальная Академия Наук Беларуси; ²Белгосуниверситет, Минск, Беларусь; ³Варминьско-Мазурский университет, Ольштын, Польша

¹E-mail: garkun@presidium.bas-net.by, ²E-mail: minkav@bsu.by, ³E-mail: awm@matman.uwm.edu.pl

Аннотация. Исследована устойчивость космологических решений для однородных изотропных моделей в зависимости от неопределенных параметров в пространстве-времени Римана-Картана. Показано, что космологические решения для регулярной ускоренно-расширяющейся Вселенной устойчивы.

Изотропная космология, построенная в рамках Пуанкаре калибровочной теории тяготения (ПКТТ), базирующейся на использовании достаточно общего выражения гравитационного лагранжиана, включающего помимо скалярной кривизны квадратичные относительно кривизны и кручения инварианты с неопределенными параметрами, открывает возможности для построения регулярного космологического сценария со стадией ускоренного космологического расширения в современную эпоху [1]. Соответствующие космологические решения получены при наложении некоторых ограничений на неопределенные параметры гравитационного лагранжиана. Важное значение имеет вопрос об устойчивости космологических решений в асимптотике, когда плотность энергии стремится к нулю.

Устойчивость космологических решений в зависимости от неопределенных параметров исследована для однородных изотропных моделей (ОИМ) с предельной плотностью энергии [4], а также в случае наиболее

общих космологических уравнений (без высших производных) с 4 неопределенными параметрами [1]. Показано, что космологические решения для ОИМ с предельной плотностью энергии в случае используемых ограничений на параметры устойчивы в асимптотике на стадии расширения подобно соответствующим фридмановским космологическим решениям в общей теории относительности. В случае наиболее общих ОИМ с 4 неопределенными параметрами найдены особые точки космологических решений в асимптотике, а также условия их устойчивости в зависимости от неопределенных параметров. Найденные условия устойчивости, в частности, имеют место в случае ограничений на неопределенные параметры, накладываемых при получении решений для ускоренно-расширяющейся Вселенной.

Литература

- [1] Minkevich A.V., Garkun A.S., Kudin V.I., *On some physical aspects of isotropic cosmology in Riemann-Cartan spacetime*, JCAP, 03 (2013) 40 (Preprint Arxiv: 1302.2578 [gr-qc]).
- [2] Minkevich A.V., *Limiting energy density and a regular accelerating Universe in Riemann-Cartan spacetime*, Письма в ЖЭТФ, **94**, No 12, 913-917 (2011); JETP Letters, **94**, No. 12, 831-836 (2011).

ОЦЕНКА ЭНЕРГИИ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ СВЕРТЫВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В ПРУЖИНУ

А.К. Гуц¹

Омск, ОмГУ им. Ф.М. Достоевского

¹E-mail: guts@omsu.ru

Аннотация. Светывая пространство-время в пружину (*resilient leaf*), можно сделать Прошое лежащим на времениподобной кривой в близком будущем относительно 5-мерной метрики. Дается оценка энергии, которая требуется для совершения такого геометрического преобразования.

Пространство-время будем представлять как слой слоения \mathcal{F} коразмерности 1 пятимерного лоренцева многообразия M^5 , называемого ниже Гиперпространством. Слоение \mathcal{F} можно различным образом деформировать, т.е. преобразовывать и получать слоения \mathcal{F}' с иными геометрическими свойствами по отношению к их расположению в объемлющем Гиперпространстве. Если после преобразования новое слоение \mathcal{F}' будет обладать пружинными слоями (*resilient leaves*), то в этих слоях становится возможным путешествие в свое прошлое [1].

Каковы затраты энергии, требуемые для совершения таких действий?

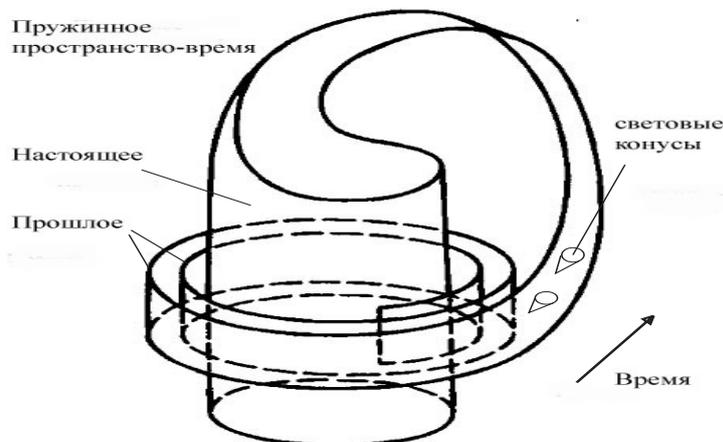


Рис.1. Пространство-время, свернутое в пружину в объемлющем пятимерном Гиперпространстве.

Пусть $\langle M^5, g_{AB}^{(5)} \rangle$ – 5-мерное замкнутое риманово многообразие. Поскольку для замкнутого 5-мерного многообразия характеристика Эйлера-Пуанкаре $\chi(M^5) = 0$, то на M^5 существует единичное гладкое векторное поле ξ . Рассмотрим базис $e_0 = \xi, e_1, \dots, e_4$ в M_x^5 и двойственный к нему $\theta_0, \dots, \theta_4$.

Тогда имеем форму кривизны

$$\Omega_{AB} = \frac{1}{2} R_{ABCD}^{(5)} \theta^C \wedge \theta^D.$$

Предположим, что многообразие является сасакиевым, т.е.

$$R^{(5)}(X, \xi)Y = g^{(5)}(X, Y)\xi - g^{(5)}(\xi, Y)X,$$

а поле ξ регулярное, т.е. все траектории поля ξ имеют общую длину $l(\xi)$.

Тогда справедлива формула¹ Гаусса-Бонне-Танно [2]

$$\begin{aligned} & \frac{l}{4\pi^2 l(\xi)} \int_{M^5} [\Omega_{12} \wedge \Omega_{34} + \Omega_{13} \wedge \Omega_{42} + \Omega_{14} \wedge \Omega_{23} + \\ & + 3\theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \Omega_{24} + 3\theta_2 \wedge \theta_4 \wedge \Omega_{13} + 15\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4 - \\ & - \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \Omega_{12} + 2\theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \Omega_{13} - \theta_1 \wedge \theta_4 \wedge \Omega_{14} - \\ & - \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \Omega_{23} + 2\theta_2 \wedge \theta_4 \wedge \Omega_{24} - \\ & - \theta_3 \wedge \theta_4 \wedge \Omega_{34}] \wedge \theta_0 = 3 - 2\beta_1(M^5) + \beta_2(M^5), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\beta_j(M^5)$ – j -мерное число Бетти.

Для того чтобы оценить энергию, которая необходима для свёртывания пространства-времени $\langle M^4, g \rangle$ в пружинный слой в лоренцевом Гиперпространстве $\langle M^5, g_{AB}^{(5)} \rangle$, мы перейдем к евклидовой 5-мерной метрике, совершая поворот Вика, меняющего время на мнимое время. Тогда Гиперпространство, которое, по-прежнему, обозначаем $\langle M^5, g_{AB}^{(5)} \rangle$, становится римановым (евклидовым), и мы можем воспользоваться формулой (1) для оценки энергии.

Из уравнений гравитационного поля для 5-мерного лоренцева Гиперпространства, ставшего евклидовым,

$$R_{AB}^{(5)} - \frac{1}{2} g_{AB}^{(5)} R^{(5)} = \varkappa \varepsilon_{(5)} u_A u_B,$$

а также из структуры формулы для компонент тензора кривизны получаем, что

$$R^{(5)} \sim \varkappa \varepsilon_{(5)}, \quad R_{ABCD}^{(5)} \sim [\varkappa \varepsilon_{(5)}], \quad R_{AB}^{(5)} \sim [\varkappa \varepsilon_{(5)}].$$

Тогда из (1) имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{l}{4\pi^2 l(\xi)} [\text{const} \cdot (\varkappa \varepsilon_{(5)})^2 + \text{const} \cdot (\varkappa \varepsilon_{(5)}) v(M^5)] \sim \\ & \sim 3 - 2\beta_1(M^5) + \beta_2(M^5). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассматривая случаи $\delta[\varkappa \varepsilon_{(5)}] < 1$ и $\delta[\varkappa \varepsilon_{(5)}] > 1$, легко понять, что они сводятся к одному условию:

$$\frac{l}{4\pi^2 l(\xi)} [\varkappa \varepsilon_{(5)}] v(M^5) \sim 3 - 2\beta_1(M^5) + \beta_2(M^5). \quad (3)$$

При этом следует помнить, что свёртывание пространства-времени M^4 , т.е. появление пружинного слоя, означает (неинтегрируемую) деформацию слоения в новое слоение, имеющего пружинный слой. Следовательно, после деформации в силу того, что возможно изменение геометрии, т.е. изменятся G_{AB} и ξ , их новые значения помечаем штрихом '. Тогда имеем вместо (2) следующую оценку:

$$\frac{l}{4\pi^2 l(\xi')} [\varkappa \varepsilon'_{(5)}] v'(M^5) \sim -2\beta'_1(M^5) + \beta'_2(M^5). \quad (4)$$

Поэтому из (3), (4) получаем оценку для скачка энергии $\delta[\varepsilon_{(5)}] = \varepsilon'_{(5)} - \varepsilon_{(5)}$:

$$\begin{aligned} \delta[\varepsilon_{(5)}] \sim & \frac{4\pi^2}{\varkappa} \left[\frac{l(\xi')}{v'(M^5)} [-2\beta'_1(M^5) + \beta'_2(M^5)] - \right. \\ & \left. - \frac{l(\xi)}{v(M^5)} [-2\beta_1(M^5) + \beta_2(M^5)] \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

¹В статье [3] дается аналогичная формула, но без требования сасакиевости геометрии многообразия.

Деформация не меняет топологию и гладкую структуру. Поэтому числа Бетти не меняются, т.е. $\beta'_A(M^5) = \beta_A(M^5)$; меняется метрика и объём.

Но если изначально $\beta_2(M^5) = 0$, например $\beta_2(S^5) = 0$, то любая деформация слоения без пружинных слоёв не даст слоение с пружинными слоями. Поэтому следует предположить, что за счёт скачка энергии происходит переход к новой топологии, к новой гладкости в M^5 с $\beta_2(M^5) \neq 0$. Другими словами, имеем переход

$$\langle M^5, \mathcal{T}, F, \beta_2(M^5) = 0 \rangle \rightarrow \langle (M')^5, \mathcal{T}', F', \beta_2((M')^5) \neq 0 \rangle,$$

где штрих ' говорит о новой топологии \mathcal{T}' и новой гладкости F' на M^5 (как на множестве, т.е. на носителе топологии и гладкости), дающий возможность появиться пружинному слоению. При этом Гиперпространство $\langle (M')^5, \mathcal{T}', F' \rangle$ приобретает необходимые нам 3- и 4-мерные дыры.

Таким образом, локальное силовое (энергетическое) действие способно изменить размещение пространства-времени в Гиперпространстве.

Литература

- [1] А.К. Гуц, *Элементы теории времени*, М., УРСС, (2012).
- [2] S. Tanno, *A formula on some odd-dimensional Riemannian manifolds related to the Gauss-Bonnet formula* J. Math. Soc. Japan, **24**, 204 (1972).
- [3] A. Reventos, *On the Gauss-Bonnet formula on the odd-dimensional manifolds*, Tohoku Math. J., **31**, 165 (1979).

ГРАВИТАЦИЯ, ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ГЕОМЕТРИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В.М. Журавлев¹

Ульяновск, Ульяновский государственный университет

¹E-mail: zhvictorm@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается способ описания гравитационного и электромагнитного полей, основанный на топологической интерпретации электрического заряда и массы частиц. Излагаются общие вопросы построения такой теории и результаты ее применения для описания свойств частиц и материальных объектов. Основное внимание уделено описанию гравитационного поля. Обсуждается вопрос о существовании в такой теории эффекта темной материи.

Развитый в [1, 2] подход позволяет на основе топологических соображений ввести понятие частиц с целочисленным электрическим зарядом, динамика которых описывается с помощью уравнений Шредингера. В таком подходе физическое пространство представляется трехмерной гиперповерхностью V^3 , вложенной в евклидово пространство W^4 четырех измерений. Геометрия V^3 описывается одной функцией высоты F , играющей роль фундаментального потенциала. Координатное пространство, с которым связывается система отсчета, представляет собой трехмерную гиперплоскость P^3 в W^4 . В теории постулируется, что связь между физическими характеристиками материи и геометрией физического пространства устанавливается с помощью геометрических маркеров $e^a = e^a(\mathbf{x}, t)$ - совокупности скалярных функций координат и времени, определяющих криволинейную систему координат на V^3 .

В [2] показано, что якобиан отображения $P^3 \rightarrow V^3$: $J = \det(\partial e^a / \partial x^\alpha)$ играет в теории важную роль и представляет собой геометрический эквивалент квадрата плотности волновой функции, что позволяет в рамках данной концепции ввести как классическое, так и квантовое описание динамики частиц. В данной работе показывается, что в рамках данной концепции масса частиц и энергия собственного электромагнитного поля линейно связаны, что представляет собой формулу Эйнштейна связи массы и энергии. Плотности энергии и массы частиц связаны с величиной $|J|$. Этот факт позволяет ввести в теорию поле тяготения, удовлетворяющее уравнению Пуассона: $\operatorname{div}(\mathbf{g}) = 4\pi|J|$, где \mathbf{g} - векторное поле, играющее роль локального ускорения свободного падения. Полученное геометрическое описание гравитационного поля близко к ньютоновскому, но отличается от него тем, что $\operatorname{rot}(\mathbf{g}) \neq 0$.

Литература

- [1] Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленным зарядом и топология. Изв. вузов. Серия физика.- N2.- с. 134-140, (2000)
- [2] Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure. Gravitation and Cosmology, **Vol. 17**, No. 3, pp. 201-217, (2011)

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ. МЕТОД ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОК.

В.М. Журавлев¹

Ульяновск, Ульяновский государственный университет

¹E-mail: zhvictorm@gmail.com

Аннотация. В работе излагается метод построения точных решений для ряда задач динамики самогравитирующей среды. Метод основан на использовании теории функциональных подстановок типа Коула-Хопфа к системам гидродинамических уравнений идеальной и вязкой жидкости. В качестве самогравитирующей среды рассматривается пыль и плазма. Представлены конкретные примеры точных решений

В работах [1, 2] был развит подход к описанию динамики самогравитирующей среды для случая плоской цилиндрической и сферической симметрий. Подход опирается на общие идеи, изложенные в работе [3], относительно применения метода гидродинамических подстановок к задачам гидродинамики сжимаемой среды.

В работе исследуется система уравнений, описывающих динамику нелинейных волн в сжимаемой плазме, можно записать в виде системы из пяти уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_e + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e v) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_m v) = 0, \quad (1)$$

$$v_t + vv_x = -\frac{\rho_e}{\rho_m} \phi_{e,x} - \phi_{m,x}, \quad \phi_{xx} = -4\pi\rho_e, \quad \psi_{xx} = 4\pi G\rho_m, \quad (2)$$

Первая группа уравнений представляет собой законы сохранения заряда и массы, вторая - уравнение Эйлера течения идеальной плазмы, а так же уравнения Пуассона для потенциалов электрического и гравитационного полей с потенциалами ϕ_e и ϕ_m соответственно. В работе излагается сам метод и некоторые конкретные результаты его применения к некоторым задачам теории плазмы и астрофизики.

Литература

- [1] V. M. Zhuravlev and D.A.Zinov'ev. *Nonlinear Waves in Self-Gravitating Compressible Fluid and Generalized Cole-Hopf Substitutions*. Physics of Wave Phenomena, **Vol. 19**, No. 4, pp. 313–317, (2011)
- [2] В.М.Журавлев, Д.А.Зиновьев. *Интегрируемые модели динамики сжимаемой среды в собственном поле тяготения. Метод подстановок Коула – Хопфа*. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-мат. естественные науки, No.4, стр. 174-190,(2012).
- [3] В.М. Журавлев. *Точные решения гидродинамики сжимаемой жидкости и функциональные подстановки Коула-Хопфа*. Сб. Инновационные технологии, Ульяновск, УлГУ, С. 77-93 (2010)

О ДВУХФАЗНОЙ СТАДИИ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ В ТЕОРИИ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Ф.Ш. Зарипов¹

Казань, КФУ

¹E-mail: farhat.zaripov@kpfu.ru

Аннотация. В предложенной модели возникают эволюционирующие во времени гравитационная (G_{eff}) и космологическая (Λ_{eff}) "постоянные", которые определяются "средним квадратом" скалярных полей (X, X). Эти величины могут быть согласованы с наблюдательными данными, описываемыми как феномен темной энергии и темной материи. В рамках теории приводится механизм разрешения проблемы космологической постоянной.

В предыдущих статьях автора [1, 2], для гравитирующей системы с материей, взаимодействующей с скалярными полями, были получены следующие уравнения:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\xi Y} \left[-\frac{n-2}{2} B + U \right] g_{\alpha\beta} + \frac{1}{Y} [\nabla_\alpha \nabla_\beta - g_{\alpha\beta} \square] Y + \frac{w}{2\xi Y} T_{(e)\alpha\beta}, \quad (1)$$

где $G_{\alpha\beta}$ - тензор Эйнштейна; $T_{(e)\alpha\beta}$ - ТЭИ полей материи (например, идеальной жидкости), ξ, w - постоянные, $U = U(Y)$ - потенциал самодействия скалярных полей. Следствием этих уравнений является закон сохранения энергии, имеющего вид:

$$-\frac{n-2}{2} \nabla_\beta B + \nabla_\beta Y \cdot (\xi R + \frac{dU}{dY}) + w \nabla_\alpha T_{(e)\beta}^\alpha = 0, \quad (2)$$

и уравнение на поле Y :

$$\square Y = \frac{n-2}{4(n-1)\xi} [-nB + 2\xi RY + \frac{2n}{n-2} U] + \frac{w}{2\xi(n-1)} T_{(e)\alpha}^\alpha \quad (3)$$

Уравнения (1) - есть аналог уравнений Эйнштейна для макроскопической среды. Они получены из действия:

$$S_0 = \frac{1}{w} \int \left\{ -\frac{1}{2} (\nabla_\nu X, \nabla^\nu X) + \xi R(X, X) + U \right\} \sqrt{-g} \hat{d}^n \sigma, \quad (4)$$

где приняты обозначения: $(X, X) = X^A X^B \eta_{AB} \equiv Y$, $(\nabla_\nu X, \nabla^\nu X) = \nabla_\nu X^A \nabla_\mu X^B g^{\nu\mu} \eta_{AB}$, $U = U(X^A)$ - потенциал зависящий от полей X^A . В статье [?] мы принимали $U(X^A) = U_0 \equiv \Lambda_X(X, X)^\rho$, где $\rho = \frac{n}{n-2}$. Для простоты записи будем считать $U(X^A) = U(Y(X^A))$. В действии (4) функции $X^A = X^A(\sigma^\mu)$, где $A, B = 1, 2, \dots, D$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$, отображают n -мерное многообразие Π описываемое метрикой $g_{\mu\nu}$, в D -мерное пространство - время M с метрикой η_{AB} , где пространство M определяется метрикой Минковского с сигнатурой $(-, +, \dots, +)$. Однако, как выясняется при детальном рассмотрении удобнее оставлять сигнатуру M произвольной.

При выводе уравнений делаются следующие предположения:

1) что индуцированная метрика (отображения) $(\nabla_\mu X, \nabla_\nu X)$ связана с метрикой многообразия M посредством формулы:

$$g_{\mu\nu} = B_0 (\nabla_\mu X, \nabla_\nu X) \quad \mu, \nu = \overline{0, n-1}, \quad (5)$$

- рассматриваемая модель позволяет интерпретировать развитие Вселенной как развитие $n = 4$ мерных объектов, вложенных в многомерное плоское пространство-время Π .

2) за счет взаимодействия с векторными полями уравнение для скалярных полей приобретает дополнительный член S^A . То есть эти уравнения меняются на уравнения

$$\square X^A + 2\xi R X^A + 2 \frac{dU}{dY} X^A = S^A. \quad (6)$$

Конкретный вид этого члена зависит от модели. Рассматривается в самый общий случай. При всем этом будем предполагать, что имеет место общий закон сохранения.

Уравнения (1), за исключением первого члена в правой части уравнения, совпадают с частным случаем уравнений теории Бранса - Дикке, если скалярное поле в этой теории положить: $\Phi = 16\pi\xi Y/w$. Поля X^A ,

как координаты пространства M имеют размерность сантиметр, откуда следует $[Y] = cm^2$ и $[w] = cm^4$. Действие (4) мы взяли безразмерной величиной.

Первый член в уравнениях (1) можно интерпретировать как "космологическую постоянную". Однако, чтобы учесть влияние энергии поляризации вакуума в гравитацию, выделим из ТЭИ материи часть связанную с этой энергией, удовлетворяющей уравнению состояния: $\varepsilon_v + p_v = 0$. Предполагается, что вакуум (в среднем) обладает свойствами однородности и изотропии. Тогда, в уравнениях (1) член связанный с эффективной "космологической постоянной" будет иметь вид:

$$\Lambda_{eff} = \frac{1}{2\xi Y} \left(-\frac{n-2}{2} B_0 + w\varepsilon_v + U \right). \quad (7)$$

В дальнейшем введем обозначение $-B = -\frac{n-2}{2} B_0 + w\varepsilon_v$.

Таким образом, возникают эволюционирующие во времени гравитационная (G), космологическая (Λ_{eff}) "постоянные":

$$G = \frac{wc^3}{16\pi\xi Y\hbar}, \quad \Lambda_{eff} = \frac{1}{2\xi Y} (-B + U), \quad n = 4, \quad (8)$$

здесь ε_v - плотность энергии поляризации вакуума, \hbar - постоянная планка.

Космологическая модель без самодействия ($U = 0$)

Существуют решения описывающие эволюцию Вселенной, когда величины Y , G , Λ_{eff} являются функциями времени. Для случая $U = 0$ получены аналитические решения $Y = Y(t)$, $a(t)$ уравнений (1)-(3). Метрическая форма многообразия Π , соответствующей однородной, изотропной космологической модели имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[(d\chi)^2 - K(\chi)d\Omega^2], \quad (9)$$

где $K(\chi) = \{\text{sh}^2 \chi; \sin^2 \chi; \chi^2\}$ - соответственно для моделей открытого, закрытого и плоского типов. $d\Omega^2$ - метрическая форма сферы, единичного радиуса, выраженная в сферических координатах. для космологической модели.

Плотность энергии соответствующую материи и взаимодействию ее со скалярным полем представляем в виде:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_r}{a^4} + \frac{\varepsilon_p}{a^3} + Y(f_\lambda + \frac{f_r}{a^4} + \frac{f_p}{a^3}) \quad (10)$$

Уравнения можно привести к следующему виду:

$$\dot{Y} \left\{ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\mu_\lambda}{2} - \frac{2\mu_p}{a^3} - \frac{F_0 + 2\mu_r \ln(a)}{a^4} \right\} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{Y}}{aY} - \frac{\Lambda_{eff}}{3} - \frac{w}{6\xi} \left\{ \frac{1}{Y} \left(\frac{\varepsilon_r}{a^4} + \frac{\varepsilon_p}{a^3} \right) + f_\lambda + \frac{f_r}{a^4} + \frac{f_p}{a^3} \right\} = 0 \quad (12)$$

Произведена шивка решений для инфляционной стадии расширения Вселенной. В начальной стадии, Вселенная находится в режиме экспоненциального расширения:

$$Y = Y_0 = const, \quad a_1(t) = \frac{\text{sh}(tH_{op})}{H_{op}}, \quad H_{op} = \sqrt{-\frac{B}{6\xi Y_0}}, \quad (13)$$

которая описывается Эйнштейновскими уравнениями и продолжается короткое время. Эта фаза переходит в радиационно-доминирующую стадию. При этом $\dot{Y} \neq 0$. Решения уравнений (11)-(19) имеют вид:

$$a = a_2(t) = \sqrt{x^2 - F_0}, \quad x = t - t_2;$$

$$Y(t) = -\frac{BF_0}{6\xi} - \frac{Bx^2}{12\xi} + \frac{BF_0 x \ln(|x+a|)}{4\xi a} + \frac{c_1 x}{a} - \frac{\rho_p}{a} + \frac{\rho_r}{F_0}, \quad (14)$$

где

$$\rho_p = \frac{w\varepsilon_p}{6\xi}, \quad \rho_r = \frac{w\varepsilon_r}{6\xi}, \quad \mu_p = \frac{wf_p}{6\xi}, \quad \mu_\lambda = \frac{wf_\lambda}{6\xi}, \quad \mu_r = \frac{wf_r}{6\xi},$$

В формулах (13)-(15) приведены решения для случая пространства открытого типа ($k = -1$), где F_0 , t_2 , c_1 - постоянные интегрирования. Решения получены для более простого случая, когда $\mu_\lambda = \mu_p = \mu_r = 0$. В этом случае имеет место отдельное сохранение ТЭИ материи.

Приравняв соответствующие функции (13)-(15) и их первые производные найдем масштабный фактор $a_0 = a(x_0)$ и время x_0 сшивки решений. Из этих уравнений следует соотношение:

$$\frac{\rho_p}{Y_0 a_0^3} + \frac{\rho_r}{Y_0 a_0^4} + \frac{\Lambda_{ef0}}{3} = \frac{F_0}{a_0^4}, \quad (15)$$

где

$$\Lambda_{ef0} = -\frac{B}{2\xi Y_0}.$$

Мы произвели сшивку двух фаз решений (13)-(15) в момент времени, когда материя отсутствует $\rho_r = 0$, $\rho_p = 0$ и произвели сравнение значений величин, которые получаются из нашей теории с их значениями полученными из астрофизических наблюдений.

Для решения парадоксов Фридмановской космологии (плоскостности, однородности и изотропии и т.д.) достаточно, чтобы инфляция продолжалась около 70 Хаббловских времен. За это время масштабный фактор (первоначальным размером порядка $10^{-33} cm$) увеличивается в $e^{70} \sim 10^{33}$ раз, и к моменту начала Фридмановской стадии масштабный фактор оказывается порядка $10^{-3} cm$, что и требуется для решения проблемы горизонта. Значение постоянной Хаббла на стадии инфляции составляет $10^{42} cек^{-1} > H > 10^{36} cек^{-1} \sim 10^{26} cm^{-1}$. Таким образом, стадия инфляции за время $\delta t = 10^{-34} c \sim 10^{-24} cm$ "готовит" первичное вещество в области с размером порядка 0.001 см, которое расширяется по инерции с $\ddot{a} < 0$ ([?], [?]).

Измерения, основанные на эффекте разбегания галактик, дают очень малое значение для космологической постоянной:

$$\Lambda_{ef} = \frac{5.98 \cdot 10^{-9} g}{c^2 cm} \sim \frac{1.242 \cdot 10^{-56}}{cm^2}.$$

Плотность энергии вакуума, связанную с квантовыми эффектами связывают (в КТП) с ультрафиолетовым обрезанием. $\Lambda_{vac} = \frac{8\pi c^3}{G_{mod} h} = 9.62 \cdot 10^{66} cm^{-2}$ [?]. Эффективная космологическая постоянная в нашей теории равна

$$\frac{-B_0 + \varepsilon_{vac} w}{2\xi Y_{mod}} = \frac{-B_0}{2\xi Y_{mod}} + \Lambda_{vac} = 1.242 \times 10^{-56} cm^{-2},$$

где Y_{mod} - современное значение $Y(t)$.

С другой стороны гравитационная постоянная

$$\frac{w}{2\xi Y_{mod}} = G_{mod} = 6.565362150 \times 10^{-65} cm^2 \quad (16)$$

Решая эти два уравнения, полагая при этом: $B_0 = 1$, $\xi = -1/12$, находим:

$$Y_{mod} = -6.236 \times 10^{-67} cm^2; \quad w = 6.823 \times 10^{-132} cm^4$$

Неизвестная постоянная теории w имеет величину планковского масштаба $l_w = (w_h)^{1/4} = 1.4 \times 10^{-33} cm$. Таким образом за счет сокращения двух "космологических постоянных"- геометрической и квантовой природы получаем эффективную "космологическую постоянную", согласованную астрофизическими данными.

Подставляя найденные значения постоянных величин, и учитывая выше приведенные условия сшивки, а именно, мы налагаем условие:

$$\frac{sh(10^{-24} H_{op})}{H_{op}} = 10_1^k \quad (17)$$

Из этого начального условия и уравнений сшивки, при $k_1 = -0.043$, находим $H_{op} = 5.99 \times 10^{25}$, $F_0 = c_0^2$, $c_0 = 4.917 \times 10^{25} cm$, $c_1 = -5.540 \times 10^{-70} cm^2$. Время существования инфляционной стадии $\delta t = 10^{-24} cm - 10^{-33} cm$. За это время масштабный фактор увеличивается до значения $0.905 cm$.

Найденные значения постоянных подставим в формулу (15) и вычислим значение функции $Y(t)$ в современную эпоху $x_{mod} = 1.3 \times 10^{28} cm$: $Y(x_{mod}) = -2.231 \times 10^{-67} cm^2$. При этом значение этой переменной в момент перехода из инфляционной стадии $10^{-24} cm$ составляет $Y(t_0) = -4.7341 \times 10^{-172} cm^2$. Значение постоянной Хаббла \dot{a}/a , в современную эпоху, вычисленная по формуле (15) равняется $7.605 \times 10^{-29} cm$ и это не противоречит современным астрономическим данным. Величина, которая не согласуется с наблюдениями - это относительное изменение гравитационной постоянной:

$$\frac{\dot{G}}{G} \simeq -1.438 \times 10^{-10} year.$$

Однако, было замечено следующее явление: наблюдаемые величины: H - параметр Хаббла, $\Lambda_{ef0} = -\frac{B}{2\xi Y}$ - эффективная космологическая постоянная вычисляемые по полученным формулам сшивки двух функций

(13)-(15) не зависят от величины B . Это объясняется тем, что из начального условия (17) следует: $2\xi Y(t) = -\dot{Y}(t) \times B$; а из (16) следует, что

$$w = G_{mod} \tilde{Y}(t_{mod}) \times B \Rightarrow G_{eff} = \frac{G_{mod} \tilde{Y}_{mod}}{\tilde{Y}}. \quad (18)$$

Таким образом параметр B из уравнений можно исключить, за счет перепараметризации функций. $B = B_0 - \varepsilon_{vac} w$ и мы приходим к выводу что в рассматриваемой модели, **энергия поляризации не наблюдаемая величина**. При этом теория все таки содержит космологический член который имеет вид

$$\Lambda_{eff} = \frac{1}{\tilde{Y}}.$$

В наших численных вычислениях, без учета влияния материи, это величина $3.465 \times 10^{-56} cm^2$, что в три раза больше величины принятой в стандартной теории гравитации, согласующейся наблюдаемыми данными.

Предположим, что в конце радиационно-доминирующей фазы есть асимптотика $Y(t) \rightarrow Y_1 = const$, $\Rightarrow \rho_r = F_0 Y_1$. Для учета влияния материи излучения подставим это значение постоянной ρ_r в формулу (15), где $Y_1 = -B/(2\xi\Lambda_{cosm})$; $\dot{Y}1 = 3\Lambda_{cosm}$, $\Lambda_{cosm} = 1.24110^{-56} cm^{-2}$ - предполагаемое значение космологической постоянной. Компьютерные вычисления показывают, что при временах $t_1 = 10^{11} c$ функция G_{eff} (18), с точностью до четвертого знака совпадает с ее современным значением. Предположим, что в этот момент времени происходит второй фазовый переход от фазы $Y \neq const$ к фазе $Y = Y_1 = const$. Тогда эволюция последней фазы описывается уравнениями Эйнштейна:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\Lambda_{ef}}{3} - G_{mod} \left(\frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_p}{a^3} \right) = 0 \quad (19)$$

Выводы

1. Уравнения теории имеют решения которые могут как совпадать с решениями стандартной теорией гравитации, так и не совпадать. Это связано с тем, что фундаментальные "постоянные" теории, такие как гравитационная и космологическая могут эволюционировать во времени, а также зависеть от координат. Таким образом, в достаточно общем случае, теория описывает две системы (стадии): эйнштейновскую и "эволюционирующую" или "перестрочную" (название предложенное автором). Данный процесс напоминает явление фазового перехода, где различные фазы (эйнштейновские гравитационные системы, но с различными постоянными) переходят друг в друга.

2. В рассматриваемой модели существует эффект сокращения влияния космологической постоянной. За счет начальных условий, гравитационная постоянная пропорциональна этой постоянной.

Литература

- [1] F. Zaripov *A conformally invariant generalization of string theory to higher-dimensional objects. Hierarchy of coupling constants*, Gravitation and Cosmology, Vol. 13 (2007), No. 4. <http://arxiv.org/abs/0810.2626>.
- [2] F.Sh. Zaripov, *Modified equations in the theory of induced gravity. Solution to the cosmological constant problem*, <http://arxiv.org/abs/1305.5512>.

МОДЕЛЬ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МАТЕРИИ В СВЕТЕ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ СОВРЕМЕННОЙ АСТРОФИЗИКИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМ ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ АЭРОДИНАМИКИ

М.Я. Иванов¹, В.К. Мамаев²

¹Центральный Институт Авиационного Моторостроения (ЦИАМ), Москва,

²Центральный Институт Авиационного Моторостроения (ЦИАМ), Москва

¹E-mail: ivanov@ciam.ru, ²E-mail:

Вторая половина XX века ознаменовалась новыми, принципиальными для вопросов теоретической космологии экспериментальными достижениями в области астрофизики. Прежде всего, следует отметить обнаружение конечной температуры Космического Микроволнового Фонового Излучения (КМФИ) $T = 2.725$ и Темной Материи (ТМ). Была зарегистрирована крупномасштабная дипольная анизотропия реликтового излучения. Эта анизотропия может объясняться движением Солнечной системы и всей местной группы галактик, включающей Млечный путь, относительно реликтового фона (со скоростью примерно 630 км/с). Отмеченные факты положены в основу рассмотренной в докладе классической модели космологической материи.

Важными для дополнительного обоснования предлагаемой нами модели являются также последние экспериментальные данные, полученные на Большом Адронном Коллайдере (БАКе). Представленный на последних трех традиционных мартовских конференциях «Rencontres de Moriond» (Ля Туиль, Италия, 2013) тщательный анализ экспериментальных данных БАКА по поиску ТМ позволяет сделать обоснованный вывод о том, что эта проблема еще весьма далека от своего решения (см., например, [1,2]). В то же время, возврат с позиций современной науки к истокам физики начала XX века (к основополагающим работам Планка, Эйнштейна, де Бройля и др.) позволяет предложить конкретные решения для ряда загадочных проблем физики сегодняшнего дня. В частности, для ТМ и проблемы определения «частицы Бога» (частицы, отвечающей за рождение массы обычной материи) можно использовать соотношения

$$E = mc^2 = h\nu \approx kT,$$

которые позволяют определить массу частицы $m \approx kT/c^2$. Экспериментальная регистрация температуры физического вакуума (приравненная температуре КМФИ) $T = 2.725K$ при известной скорости распространения возмущений в вакууме $c = 2.998 \cdot 10^8$ / и известном значении постоянной Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К определяет нам характерную величину массы частицы вакуума (бозона скрытой массы [3-5]).

В первой части настоящего доклада на основе полученного бозона скрытой массы построена единая модель космологической материи и физического вакуума. Приведена термодинамически согласованная система законов сохранения материи и фонового излучения [6,7]. Показано, что имеющиеся затруднения в экспериментальном обосновании ТМ не являются препятствием на дальнейшем пути развития теоретической физики. Справедливость рассмотренной модели материи и физического вакуума демонстрируется рядом экспериментальных примеров [8].

Во второй части доклада предложенная модель применена к конкретным теплофизическим проблемам высокотемпературной внешней и внутренней аэродинамики, которые, по мнению авторов, определяются интенсивным взаимодействием газообразной среды, космологической материи и излучения. В частности, анализируются вопросы проектирования возвращаемых космических аппаратов и входящих в плотные слои атмосферы тел с уточненным учетом наличия ТМ, процессов ионизации и влияния теплового излучения. Рассмотрено тепловое состояние типичной наветренной поверхности торможения спускаемого управляемого аппарата (типа шаттла «Колумбия»). Проанализированы радиационные и теплофизические процессы взрыва Челябинского метеорита. Развитая теория позволяет достаточно надежно описать все стадии теплового взрыва – интенсивного лучистого и аэродинамического разогрева и детонационного режима сгорания Челябинского и Тунгусского метеоритов [9,10]. Далее в докладе анализируются радиационные и теплофизические проблемы высокотемпературных воздушно-реактивных двигателей (ВРД), связанные с появлением так называемого «непредвиденного» тепла рабочего процесса [11,12]. Это обнаруженное экспериментально дополнительное тепло существенно затрудняет процесс проектирования высокотемпературных ТРДД и высокоскоростных ВРД. Оно, по мнению авторов, непосредственно связано с дополнительным лучистым тепловыделением, имеющим ту же природу, что и КМФИ (в связи с чем, может также описываться в рамках предложенной модели).

Литература

- [1] Mavromatos N. Recent results from indirect and direct dark matter searches – Theoretical scenarios. Proc. of the 13th ICATPP Conference. Villa Olmo, Como 3-7 Oct. 2011. P.23.

- [2] Narain M. The Higgs Boson and its Implications. 48-th Rencontres de Moriond. 2013, La Thuile, Italy.
- [3] Ivanov M.Ja. Hidden Mass Boson as real Dark Matter. 48-th Rencontres de Moriond. 2013, Italy.
- [4] Ivanov M.Ja., Mamaev B.K. Hidden mass boson. Journal of Modern Physics. 2012, Vol. 3, No. 8, pp. 686-693..
- [5] Ivanov M.Ja. Classic Dark Matter Theory with Experimental Confirmations, Exact Solutions and Practical Applications. Cosmology. 47-th Rencontres de Moriond. 10 – 17 March, 2012, La Thuile, Italy.
- [6] Ivanov M.Ja., Zhestkov G.B. Dimensional Analysis, Thermodynamics and Conservation Laws in Problem of Radiation Processes Simulation. Journal of Mathematical Research. 2012, Vol. 4, No. 2, pp. 10-19.
- [7] Иванов М.Я. Термодинамически согласованные законы сохранения в модели излучающего теплопроводного газа. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т. 51, № 1, с. 142-151.
- [8] Ivanov M.Ja. Space Energy. INTECH, Energy Conservation, 2012, pp. 4-56.
- [9] Ivanov M.Ja. Thermal death of the Chelyabinsk meteor with energy nearly 500 kilotons. Rencontres de Moriond, VHEPE, 9-16 March 2013, La Thuile, Italy.
- [10] Терентьева Л.В., Иванов М.Я., Малинин А.В., Серов Ю.Л. О плазмодинамических аспектах моделирования процессов детонации и горения. – XX Международная конференция по ВРД (ISABE-2011), Гетеборг, Швеция, 2011.
- [11] Aviation Week, 2012, Vol.174, No.29, p.17.
- [12] Flight, 2012, Vol.181, No.5343, p.33.

QUANTUM BILLIARDS IN MULTIDIMENSIONAL MODELS WITH BRANES

*V.D. Ivashchuk*¹, *V.N. Melnikov*²

¹VNIIMS, RUDN, Moscow, ²VNIIMS, RUDN, Moscow

¹E-mail: , ²E-mail:

Gravitational $(n + 1)$ -dimensional model with l scalar fields and several forms is considered. When cosmological type diagonal metric is chosen, electro-magnetic composite brane ansatz is adopted and certain restrictions on branes are imposed the conformally-covariant Wheeler-DeWitt (WDW) equation for the model is studied. Under certain restrictions asymptotic solutions to WDW equation are found in the limit of the formation of the billiard walls which reduce the problem to the so-called quantum billiard on the $(n + l - 1)$ -dimensional Lobachevsky space. Two examples of quantum billiards are considered. The first one deals with 9-dimensional quantum billiard for $D = 11$ model with 330 four-forms which mimic space-like $M2$ - and $M5$ -branes of $D = 11$ supergravity. The second one deals with the 9-dimensional quantum billiard for 10-dimensional gravitational model with one scalar field, 210 four-forms and 120 three-forms which mimic space-like $D2$ -, $D4$ -, $FS1$ - and $NS5$ -branes in $D = 10$ *IIA* supergravity. In both examples wave functions vanish in the limit of the formation of the billiard walls. The special case of quantum billiard in $11D$ model which mimics $M2$ branes was considered earlier in [1].

References

- [1] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Quantum billiards in multidimensional models with fields of forms, *Grav. Cosmol.* **19**, No. 3 (2013); arXiv: 1306.6521.

КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ СКАЛЯРНЫМ ПРИТЯЖЕНИЕМ

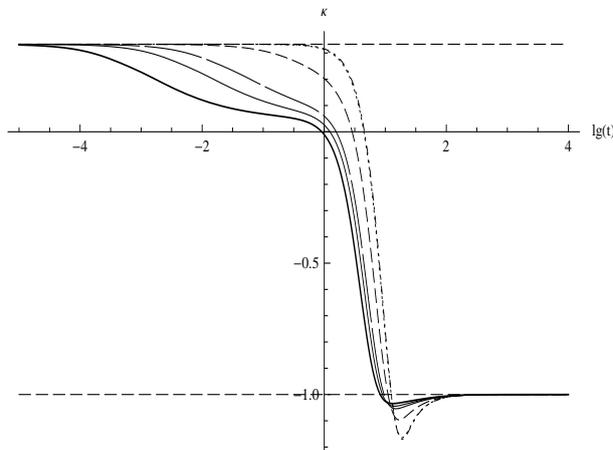
Ю.Г. Игнатьев¹, М.Л. Михайлов²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, ²Казанский
(Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань

¹E-mail: ignatjev_yu@rambler.ru, ²E-mail: meschgan@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассмотрены космологическое расширение двухкомпонентной плазмы.

В ряде работ [1-2] исследовался процесс космологического расширения однокомпонентного вырожденного газа скалярно заряженных ферми-частиц в классической модели скалярного поля с отталкиванием одноименно скалярно заряженных частиц. В такой самосогласованной космологической модели возможны переходы со стадии замедления на инфляционную стадию и наоборот. В [3-5] на основе кинетической теории была построена модель гравитирующей космологической плазмы, состоящей из разносортных по отношению к скалярному взаимодействию частиц, в частности, были рассмотрены космологические системы на основе скалярного поля с притяжением одноименно заряженных частиц и показано, что такие системы должны конструироваться на основе фантомных скалярных полей.



В данной работе строится численная модель космологической эволюции плазмы, состоящей из разноименно скалярно заряженных частиц, взаимодействующих фантомным скалярным полем. На основе численного интегрирования самосогласованной жесткой системы 4-х нелинейных дифференциальных уравнений показано, что переход на инфляционную стадию в такой системе происходит через «ныряние» в фантомную область ($p + \varepsilon < 0$).

Литература

- [1] Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov // *Gravitation & Cosmology*, Vol. 12 (2006), No. 2-3 (46-47), pp. 1-6
- [2] Yu. G. Ignatyev and R. A. Miftakhov // *Gravitation and Cosmology*, 2011, Vol. 17, No. 2, pp. 190–193.
- [3] Ю.Г. Игнатьев. // *Известия ВУЗов Физика*, 2012 Т. 55, № 2, с. 36-40.
- [4] Ю.Г. Игнатьев. // *Известия ВУЗов Физика*, 2012 Т. 55, № 5, с. 36-40.

[5] Ю.Г. Игнатъев. // Известия ВУЗов Физика, 2012 Т. 55, № 11, с. 74-79.

ТОЧНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ

Р.В. Королев¹, С.В. Сушков²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт физики, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт физики, Казань

¹E-mail: korolyovrv@gmail.com, ²E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Одним из актуальных обобщений теории относительности является теория гравитации со скалярным полем, кинетически связанным с кривизной пространства-времени. Действие этой теории содержит перекрестное слагаемое типа $\kappa G_{\mu\nu} \phi^{,\mu} \phi^{,\nu}$, где $G_{\mu\nu}$ - тензор Эйнштейна, ϕ - скалярное поле, а κ - параметр неминимальной связи. Наличие такого перекрестного члена приводит к неминимальному взаимодействию скалярного поля с геометрией пространства-времени. Численное исследование конфигураций, описывающих проходимость кротовые норы в рамках данной теории, приведено в работе [1]. Точное решение, представляющее черную дыру в теории гравитации с неминимальной кинетической связью, дается М. Ринальди в статье [2].

В настоящем докладе обобщается решение Ринальди на случай фантомного скалярного поля с отрицательным кинетическим членом. Для различных значений параметра κ построены графики полученных решений, исследуются их асимптотические свойства.

[1] S.V. Sushkov, R. Korolev. Classical and Quantum Gravity. V. 29(8), P. 085008 (2012).

[2] M. Rinaldi. Phys. Rev. D V.86, P. 084048 (2012).

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ В КИРАЛЬНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ. ТЕСТИРОВАНИЕ НЕСИНГУЛЯРНОЙ (НОВОРОЖДЕННОЙ) ВСЕЛЕННОЙ

А.С. Кубасов¹, С.В. Червон²

¹Ульяновский Педагогический Университет имени И.Н. Ульянова, Ульяновск, 432700, ²Ульяновский Педагогический Университет имени И.Н. Ульянова, Ульяновск, 432700

¹E-mail: , ²E-mail:

В докладе рассматривается киральная двухкомпонентная космологическая модель с диагональной метрикой пространства целей ($h_{11} = \pm 1$, $h_{22}(\phi, \psi)$, $h_{12} = h_{21} = 0$) в пространстве Фридмана – Робертсона – Уокера (ФРУ). Действие для этой модели в общей форме имеет вид

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi_{,\mu}^A \varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} - V(\varphi) \right), \quad (1)$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ – метрика пространства-времени, h_{AB} – метрика пространства целей (кирального пространства), $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^N)$ – киральные поля, $\varphi_{,\mu}^A = \partial_\mu \varphi^A = \frac{\partial \varphi^A}{\partial x^\mu}$. Метрика пространства целей

$$ds_{ts}^2 = h_{11} d\varphi^2 + h_{22}(\phi, \psi) d\psi^2 \quad (2)$$

Метрика пространства-времени однородной и изотропной Вселенной в представлении (ФРУ)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (3)$$

Приводятся новые методы решения системы уравнений для данной модели с различными разбиениями потенциала $V(\phi, \psi)$ и кинетической части $K(t) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2$ для двух случаев: открытая/замкнутая Вселенная ($\epsilon = \pm 1$), пространственно-плоская Вселенная ($\epsilon = 0$). Новизна методов заключается в том, что значение поля $\psi(t)$ зависит от произвольной функции $F(t)$. Особенностью методов является необходимость привлечения метода тонкой настройки потенциала, благодаря чему находятся остальные неизвестные величины.

В рамках этой модели исследуется несингулярная (Новорожденная) Вселенная с масштабным фактором вида $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$, с подбором параметров A, β, α, m . Проводится анализ динамики поведения полей $\phi(t), \psi(t)$, потенциала $V(t), V(\phi, \psi)$, кинетической части $K(t), K(\phi, \psi)$ на новых решениях, а так же решениях, которые были получены ранее [1], но для которых не были установлены численные значения параметров модели. В докладе приводятся характерные графики, примерные численные величины космологических параметров для модели $a(t) = a_i(1 + e^{\alpha t})^{\frac{1}{2}}$.

Литература

- [1] A. Beesham, S.V. Chervon, S.D. Maharaj, A.S. Kubasov *Quantum Matter*, 2013, vol.2, No.5, p. 1-8.

УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И МАКСВЕЛЛА КАК СОСТАВНЫЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЙ ЯНГА-МИЛЛСА

В.А. Лукьянов¹

Н.Новгород, НГТУ им. Алексеева

¹E-mail: oxzyt@ya.ru

Аннотация. Показана возможность объединения гравитации и электромагнетизма в рамках 4-мерного пространства конформной связности без кручения. Указан способ геометризации тензора энергии-импульса.

Пространства конформной связности произвольной размерности были введены Э. Картаном в [1] вскоре после создания Эйнштейном общей теории относительности. Мы изучаем 4-мерный случай. Картан рассматривал пространства, в слоях которых действует конформная группа $C(n, 0)$. Но полученные им результаты легко обобщить на случай любой другой сигнатуры. В частности, в рассматриваемом нами случае со структурной группой $C(3, 1)$ конформная связность имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & \omega_1 \\ \omega^2 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 & -\omega_2^4 & -\omega_2 \\ \omega^3 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 & -\omega_3^4 & -\omega_3 \\ \omega^4 & \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & 0 & -\omega_4 \\ 0 & \omega^1 & -\omega^2 & -\omega^3 & -\omega^4 & -\omega_0^0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Особенностью пространства конформной связности, отмеченной еще Картаном, является то, метрика оказывается "встроенной" в форму связности Ω . В нашем случае четыре пфаффовы формы ω^i определяют метрику

$$\psi = -(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2 = \eta_{ij}\omega^i\omega^j, \quad (2)$$

задающую квадрат расстояния в 4-мерной базе, где

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

метрический тензор Минковского. Здесь и далее все индексы пробегает значения от 1 до 4. По одноименным верхним и нижним индексам предполагается суммирование. В случае, рассмотренном Картаном, метрика имеет вид

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \dots + (\omega^n)^2. \quad (4)$$

Ясно, что для моделирования пространства-времени необходимо рассматривать именно случай $n = 4$ со структурной группой $C(3, 1)$.

Форма связности (3) содержит 15 независимых компонент, заданных в базе расслоенного пространства, т.е. 15 пфаффовых форм ω^i , ω_i , ω_i^j и ω_0^0 , которые, вообще говоря, могут быть произвольными. Вслед за Картаном мы не пишем индекс 0, если он встречается в записи только один раз, то есть вместо ω_0^i и ω_i^0 мы пишем соответственно ω^i и ω_i . Это оказывается очень удобным, так все 15 компонент связности естественно разбиваются на 4 группы, причем внутри каждой группы пфаффовы формы равноправны между собой, чего нельзя сказать в целом о всех компонентах связности (3). Четыре формы ω^i мы считаем линейно независимыми, поэтому в пространстве внешних 1-форм они образуют базис. Остальные формы через них выражаются. В частности, мы обозначаем

$$\omega_i = b_{i1}\omega^1 + b_{i2}\omega^2 + b_{i3}\omega^3 + b_{i4}\omega^4 = b_{ij}\omega^j. \quad (5)$$

Величины b_{ij} - это функции, зависящие от 4-х переменных, локальных координат $t = x^1$, $x = x^2$, $y = x^3$, $z = x^4$. Если формы ω^i выразить через дифференциалы локальных координат, то метрика (5) запишется в голономном базисе в виде

$$\psi = g_{ij}dx^i dx^j. \quad (6)$$

Кривизна связности

$$\Phi = d\Omega + \Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & 0 \\ \Phi^1 & 0 & \Phi_1^2 & \Phi_1^3 & \Phi_1^4 & \Phi_1 \\ \Phi^2 & \Phi_1^2 & 0 & -\Phi_2^3 & -\Phi_2^4 & -\Phi_2 \\ \Phi^3 & \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & 0 & -\Phi_3^4 & -\Phi_3 \\ \Phi^4 & \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & \Phi_3^4 & 0 & -\Phi_4 \\ 0 & \Phi^1 & -\Phi^2 & -\Phi^3 & -\Phi^4 & -\Phi_0^0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

имеет такую же алгебраическую структуру, как и форма связности Ω . Матрица Φ содержит 15 различных компонент, которые так же, как и в форме связности, не являются равноправными. Еще одной характерной особенностью пространства конформной связности, установленной Картаном, является то, что кручение связности оказывается "встроенным" в форму кривизны (4). Внешние 2-формы Φ^i задают кручение связности, поэтому требование $\Phi^i = 0$ определяет пространство конформной связности *без кручения*.

Оператор Ходжа $*$, действующий на множестве внешних 2-форм, матрице Φ ставит в соответствие матрицу $*\Phi$. В [2] было доказано, что единственным инвариантом конформной связности, пригодным для составления функционала действия, является 4-форма $tr(*\Phi \wedge \Phi)$. Получающееся действие $I = \int tr(*\Phi \wedge \Phi)$ называется функционалом Янга-Миллса. Равенство нулю вариации этого функционала приводит к *уравнениям Янга-Миллса*

$$d*\Phi + \Omega \wedge *\Phi - *\Phi \wedge \Omega = 0. \quad (8)$$

Это система уравнений на компоненты связности (3). Так как каждая из 15 пфаффовых форм связности имеет в голономном базисе dx^i четыре координаты, то неизвестными являются 60 функций от четырех переменных. В развернутой записи уравнения Янга-Миллса (6) представляют собой систему из 60 нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка на 60 неизвестных функций, задающих связность. Понятно, что полное решение этой системы в общем случае получить невозможно. Произвольное наложение каких-то упрощающих условий на искомые функции приводит (после утомительных вычислений) к пространству нулевой конформной кривизны, то есть к $\Phi = 0$. Однако если эти условия являются конформно инвариантными, то в некоторых случаях систему уравнений Янга-Миллса можно упростить.

В частности, Картан показал, что условия

$$\Phi^i = 0, \quad \Phi_0^0 = 0 \quad (9)$$

на компоненты (4) являются конформно инвариантными. В [3] доказано, что в этом случае уравнения Янга-Миллса сводятся к

$$R_{jm} = 2b_{jm} + \frac{1}{6}R\eta_{jm} \quad (10)$$

($R_{jm} = R_{jmk}^k$ - тензор Риччи, R_{jmn}^k - тензор Римана квадратичной формы (5), $R = \eta^{jm}R_{jm}$, а b_{jm} - это функции из (7)) и к

$$\eta^{mn} (b_{km|pn} - b_{kp|mn} + b_{im}\Phi_{kpn}^i) = 0 \quad (11)$$

(Φ_{kpn}^i - компоненты 2-формы кривизны Φ_k^i ; индексы, записанные после вертикальной черты, обозначают ковариантную производную). Вместо 60-ти получается всего 20 уравнений на 20 неизвестных функций: 10 функций g_{ij} из (9) и 10 компонент тензора b_{jm} , который в случае (8) оказывается симметричным, то есть $b_{jm} = b_{mj}$. Из 10-ти уравнений (2) независимых только 9, поэтому на самом деле уравнений Янга-Миллса становится не 20, а 19. Ни уравнения (1), ни уравнения (2) не являются новыми. Уравнения (2) представляют собой равенство нулю *тензора Баха*. В [3] установлено, что (1) равносильны равенству $\Phi_{jmk}^k = 0$, которое, в свою очередь, является требованием Картана $A_{jmk}^k = 0$ [1, с. 178]. Пространства конформной связности, где выполняются условия (8) и (1), Картан назвал *нормальными*.

Если обозначить, по определению,

$$T_{jm} = 2b_{jm} - \frac{1}{3}R\eta_{jm}, \quad (12)$$

то (1) превратятся в *уравнения Эйнштейна*

$$R_{jm} - \frac{1}{2}R\eta_{jm} = T_{jm}, \quad (13)$$

где T_{jm} - тензор энергии-импульса. Это очень существенный момент. Как известно, главным недостатком уравнений Эйнштейна (10) является негеометричность их правой части, тензора энергии-импульса. В данной ситуации этот недостаток устранен. Так как T_{jm} выражается через b_{jm} , а функции b_{jm} вычисляются из уравнений Янга-Миллса, то и тензор энергии-импульса вычисляется из уравнений Янга-Миллса,

следовательно, имеет чисто геометрическое происхождение. В [3] показано, что для метрики Фридмана-Робертсона-Уокера тензор энергии-импульса, вычисленный на основании формулы (11), совпадает с тем, что берется из физических соображений.

В [4] был рассмотрен более общий по сравнению с (8) случай, а именно,

$$\Phi^i = 0 \quad (14)$$

(пространство без кручения). Внешняя 2-форма Φ_0^0 может быть произвольной. Требование (12) так же, как и (8), является конформно инвариантным. Теперь уравнения Янга-Миллса сводятся не к двум, а к трем группам.

Уравнения Эйнштейна, аналогичные (1), принимают вид

$$R_{jm} = b_{(jm)} + \frac{1}{6}R\eta_{jm}. \quad (15)$$

Их по-прежнему 10. В случае (12) тензор b_{jm} уже не является симметричным. Мы обозначаем $b_{(jm)} = b_{jm} + b_{mj}$ и $b_{[jm]} = b_{jm} - b_{mj}$.

Уравнения, аналогичные (2), таковы:

$$\eta^{mn} \left(-b_{(ij)|mn} + b_{(pm)}R_{(ij)n}^p + 2b_{[im]}b_{[jn]} \right) - 2bb_{(ij)} + b_{|(ij)} - 2\eta^{pq}\eta^{mn}b_{pm}b_{qn}\eta_{ij} = 0, \quad (16)$$

их тоже 10. Если свернуть их с η^{ij} , получится тождественный нуль, поэтому независимых уравнений здесь только 9. Так как с помощью этих уравнений можно найти величины $b_{(ij)}$, а через них вычисляется тензор энергии-импульса $T_{jm} = b_{(jm)} - \frac{1}{3}R\eta_{jm}$, уравнения (13) мы называем *уравнениями движения вещества*.

Кроме этого, в случае (12), в силу несимметричности тензора b_{jm} , возникают еще 8 дополнительных уравнений

$$b_{i[j|k]} + b_{k[i|j]} + b_{j[k|i]} = 0, \quad \eta^{ij}b_{i[j|k]} = 0. \quad (17)$$

В свернутом виде они записываются так:

$$d\Phi_0^0 = 0, \quad d * \Phi_0^0 = 0, \quad (18)$$

следовательно, это уравнения Максвелла. Всего получается $10+9+8=27$ уравнений Янга-Миллса на 26 неизвестных функций: 10 функций g_{ij} и 16 функций b_{jm} . Система переопределенная, но так и должно быть, ибо переопределенность - это характерная черта уравнений Максвелла.

Вывод. Уравнения Янга-Миллса в 4-мерном пространстве конформной связности возникают естественным образом, в результате равенства нулю вариации единственно возможного функционала действия. В пространстве без кручения они распадаются на три группы: уравнения Эйнштейна, уравнения движения вещества и уравнения Максвелла. Тем самым достигается естественное объединение гравитации и электромагнетизма. Кроме этого, уравнения движения вещества позволяют геометризовать тензор энергии-импульса, устраняя главный недостаток уравнений Эйнштейна.

Литература

- [1] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. - Издательство Казанского университета, 1962. - 210 с.
- [2] В. А. Лукьянов, "Уравнения Янга-Миллса на 4-мерных многообразиях конформной связности", Изв. вузов. Матем., 2009, No. 3, 67-72.
- [3] Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов, "Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна", Изв. вузов. Матем., 2009, No. 9, 69-74.
- [4] Леонид Н. Кривоносов, Вячеслав А. Лукьянов, "Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла", Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 2:4 (2009), 432-448.

**К ВОПРОСУ ВАКУУМНОГО РОЖДЕНИЯ И АННИГИЛЯЦИИ ЧАСТИЦ С
СОБЛЮДЕНИЕМ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ**

В.К. Мамаев¹, М.Я. Иванов²

¹Центральный Институт Авиационного Моторостроения (ЦИАМ), Москва,

²Центральный Институт Авиационного Моторостроения (ЦИАМ), Москва

¹E-mail: , ²E-mail: ivanov@ciam.ru

Несмотря на некоторый пессимизм ряда ученых при оценке современного состояния научной теоретической мысли (см., например, [1]), активные исследования в области космологии позволяют, по нашему мнению, достаточно обосновано говорить о наметившимся в последние годы новом серьезном прорыве в области теоретической физики и астрофизики. Перечислим основополагающие астрофизические результаты и следующие из них принципиальные выводы. Начнём, прежде всего, с обнаружения Космического Микроволнового Фонового Излучения (КМФИ) и его крупномасштабной дипольной анизотропии [2-4]. Важнейшим теоретическим выводом здесь служит введение Я.Б. Зельдовичем понятия «нового эфира» [5] – «абсолютной» системы координат, относительно которой в настоящее время определяют движение Земли, Солнечной системы и нашей Галактики в пространстве Космоса. В монографии А.Д. Чернина [6] проанализированы некоторые дополнительные следствия наличия этой анизотропии КМФИ. Аккуратно зарегистрирована также температура нового эфира $\theta = 2.725$. Очевидным выводом обнаружения конечной температуры открытого Космоса является конечная масса частиц космологической материи (в силу известного соотношения $E = mc^2 \approx kT$ имеем $m \approx kT/c^2 = 4.2510^{-40} = 3.410^{-4}$). И, наконец, отметим открытие Темной Материи (ТМ), составляющей подавляющую величину (около 96%) от всего вещества Вселенной. Здесь в качестве следствия можно подчеркнуть используемое нами ниже отождествление ТМ с космологической материей (с рассчитанной выше массой частиц).

В настоящем докладе, опираясь на принципиальное значение приведенной конечной массы космологических частиц, рассматривается одна из возможных моделей рождения и аннигиляции обычной барионной материи в нашей Вселенной. Конечная масса космологических частиц позволяет достаточно естественным путем удовлетворить законам сохранения массы, импульса и энергии [7] при моделировании процессов взаимопревращения космологической и обычной материи в Метагалактике. При этом полная (субстанциональная) производная "в частице", движущейся со скоростью V , имеет известную запись

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla,$$

что обеспечивает используемым законам сохранения инвариантность относительно преобразования Галилея, а при линеаризации и переходе к уравнению Даламбера инвариантность относительно преобразования Лоренца.

Изложенная в докладе модель рождения и аннигиляции вещества удовлетворяет также закону сохранения электрического заряда. Структура космологических частиц постулируется нами в форме классического диполя – Бозона Скрытой Массы (БСМ) [8] с величиной электрического заряда $q \approx 10^{-28}$. Рождение электрон - позитронной пары [9] в физическом вакууме – среде БСМ представляется как одновременное разрушение большого количества (примерно 10^9) диполей под действием электрического поля и концентрация их частей с зарядом одного знака в отдельные образования (под действием дополнительных сил – магнитных, газодинамических и, возможно, гравитационных). В изложенной версии рождение электрон - позитронной пары удовлетворяет законам сохранения массы, импульса, энергии и заряда.

В развитой модели рождения и аннигиляции вещества удастся отказаться от виртуальных частиц физического вакуума и перейти к рассмотрению только реальных массовых ("телесных") частиц ТМ. В докладе изложены также модели электрона, протона и нейтрона на основе БСМ [10] и содержится ряд замечаний по соответствию данной модели теоретическим представлениям сегодняшнего дня по рассмотренной проблеме.

Литература

- [1] Ли Смолин. Неприятности с физикой: взлет теории струн, упадок науки и что за этим следует. Лондон, Penguin Book, 2007.
- [2] Шмаонов Т. А. Методика абсолютных измерений эффективной температуры радиоизлучения с низкой эквивалентной температурой // Приборы и техника эксперимента. 1957. №1 С.83-86. 18.
- [3] Penzias A.A., Wilson R.W.. A Measurement of Excess Antennatemperature at 4080 m/s.Astrophys. Journal 1965; 142 419-421.
- [4] Smooth G.F. Anisotropy of Background Radiation. Uspekhi Fizicheskikh Nauk 2007; 177(12) 1294-1318.
- [5] Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. – МГУ, 1988.
- [6] Чернин А.Д. Космология: Большой взрыв. «Век 2», 2006.
- [7] Иванов М.Я. Термодинамически согласованные законы сохранения в модели излучающего теплопроводного газа. ЖВММФ, 2011, т. 51, №1, с.142-151.
- [8] Ivanov M.Ja., Mamaev V.K. Hidden mass boson. Journal of Modern Physics, 2012, Vol. 3, No. 8, pp.686-693.
- [9] Burke D.L. et al. Positron production in multiphoton light-by-light scattering.Phys. Rev. Let. 1997; 79(1), 1626–1629.
- [10] Ivanov M.Ja. Space Energy. INTECH, Energy Conservation, 2012, pp. 4-56.

MULTIDIMENSIONAL GRAVITATION AND MAIN PROBLEMS OF MODERN PHYSICS

V.N. Melnikov¹

Centre for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS and Institute of Gravitation and Cosmology, PFUR, 46 Ozernaya Str., 119361, Moscow, Russia

¹E-mail: melnikov@phys.msu.ru

The necessity of studying multidimensional models of gravitation and cosmology is motivated by several reasons. First, the main trend of modern physics is the unification of all known fundamental physical interactions: electromagnetic, weak, strong and gravitational ones. During the recent decades there has been a significant progress in unifying weak and electromagnetic interactions, some more modest achievements in GUT, supersymmetric, string and superstring theories.

Now, theories with membranes, p-branes and M-theory are being created and studied. Having no definite successful theory of unification now, it is desirable to study the common features of these theories and their applications to solving basic problems of modern gravity and cosmology. Second, multidimensional gravitational models, as well as scalar-tensor theories of gravity, are theoretical frameworks for describing possible temporal and range variations of fundamental physical constants. The possible discovery of the fine structure constant variations and its anisotropy is now at a critical further investigation.

Lastly, applying multidimensional gravitational models to basic problems of modern cosmology and black hole physics, we hope to find answers to such long-standing problems as singular or nonsingular initial states, creation of the Universe, creation of matter and its entropy, cosmological constant, coincidence problem, origin of inflation and specific scalar fields which may be necessary for its realization, isotropization and graceful exit problems, stability and nature of fundamental constants, possible number of extra dimensions, their stable compactification, the Universe present acceleration, dark matter and dark energy.

Multidimensional gravitational models are certain generalizations of GR which is tested reliably for weak fields up to 0.0001 and partially in strong fields (binary pulsars), so it is quite natural to inquire about their possible observational or experimental windows. As no accepted unified model exists, in our approach we adopted models, based on multidimensional Einstein equations with or without sources of different nature as: cosmological constant, perfect and viscous fluids, scalar and electromagnetic fields and their possible interactions, dilaton and moduli fields, fields of antisymmetric forms etc. We supposed that behavior of extra spaces is the following: they are constant, or dynamically compactified, or like torus, or large, but with barriers, walls etc.

Here we give a short review of our program results for solving some of the above mentioned problems by obtaining and analysis of exact solutions within multidimensional gravity and cosmology. In many cases we tried to single out models, which do not contradict available experimental or observational data.

ПУАНКАРЕ КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ, ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И РЕГУЛЯРНАЯ УСКОРЕННО-РАСШИРЯЮЩАЯСЯ ВСЕЛЕННАЯ

А.В. Минкевич¹

Белгосуниверситет, Минск, Беларусь; Варминьско-Мазурский университет,
Ольштын, Польша

¹E-mail: minkav@bsu.by, awm@matman.uwm.edu.pl

Аннотация. Обсуждается физическая значимость Пуанкаре калибровочной теории тяготения (ПКТТ) - теории тяготения в пространстве-времени Римана-Картана - как необходимого обобщения метрической теории тяготения в рамках калибровочного подхода к гравитационному взаимодействию. Рассматривается ПКТТ, базирующаяся на использовании достаточно общего выражения гравитационного лагранжиана, включающего помимо скалярной кривизны квадратичные относительно кривизны и кручения инварианты с неопределенными параметрами. При некоторых ограничениях, накладываемых на неопределенные параметры, уравнения рассматриваемой ПКТТ в линейном приближении при выполнении ограничений на допустимые плотности энергии материи сводятся к уравнениям тяготения Эйнштейна, что обеспечивает выполнение принципа соответствия с теорией тяготения Ньютона и общей теорией относительности (ОТО) в случае обычных гравитирующих систем. Однако, в нелинейном приближении ПКТТ приводит к существенным отличиям гравитационного взаимодействия в космологических и астрофизических масштабах по сравнению с ОТО. В частности, данные различия проявляются в изотропной космологии, построенной в рамках ПКТТ. Обсуждается космологический сценарий регулярного Большого Взрыва со стадией ускоренного космологического расширения в асимптотике.

1. ПКТТ как необходимое обобщение метрической теории тяготения. Гравитационные уравнения ПКТТ

Принцип локальной калибровочной инвариантности лежит в основе современной теории фундаментальных физических взаимодействий. Данный принцип устанавливает глубокую связь между важнейшими сохраняющимися величинами, существование которых связано согласно теореме Нетер с инвариантностью теории относительно соответствующих групп преобразований, и фундаментальными (калибровочными) физическими полями, имеющими в качестве источников соответствующие сохраняющиеся величины и выступающими в качестве носителей определенных физических взаимодействий. В отличие от калибровочных полей Янга-Миллса, вводимых на основе локализации групп внутренней симметрии, гравитационное поле в рамках калибровочного подхода оказывается связанным с координатными преобразованиями, что приводит к определенным отличиям трактовки гравитационного взаимодействия как калибровочного и проявляется в изменении геометрической структуры пространства-времени в процессе локализации группы¹. Метрическая теория тяготения, в которой в качестве источника гравитационного поля выступает тензор энергии-импульса материи, может быть введена на основе локализации 4-параметрической группы трансляций. Вводимое калибровочное поле связано с метрическим тензором физического пространства-времени, имеющего структуру псевдо-риманова континуума. С точки зрения калибровочного подхода, группа Лоренца (группа тетрадных лоренцевых преобразований) не играет в рамках метрической теории тяготения динамической роли. Ситуация меняется при рассмотрении одновременной локализации группы трансляций и группы Лоренца [2, 3]. Трактовка калибровочных полей, соответствующих группе трансляций и группе Лоренца как независимых динамических полей приводит к теории тяготения, в рамках которой физическое пространство-время образует 4-мерный континуум Римана-Картана U_4 , а в качестве источников поля тяготения выступают тензор энергии-импульса и тензор спинового момента гравитирующей материи (при использовании минимальной связи гравитации с материей). Данная теория известна в литературе как ПКТТ. С точки зрения калибровочного подхода, ПКТТ является необходимым обобщением ОТО, если группа Лоренца (группа тетрадных лоренцевых преобразований) входит в состав калибровочной группы, соответствующей гравитационному взаимодействию. В связи с этим заметим, что именно ПКТТ, а не метрическая теория тяготения соответствует теории супергравитации.

В рамках ПКТТ роль гравитационных переменных играют ортонормированная тетрада $h^i{}_{\mu}$ и неголомная лоренцева связность $A^{ik}{}_{\mu} = -A^{ki}{}_{\mu}$ (греческие и латинские индексы используются для обозначения голономных и неголономных координат соответственно). Соответствующие напряженности поля тяготения

¹Соответствующие вопросы обсуждаются в [1].

- это тензор кручения $S^i{}_{\mu\nu}$ и тензор кривизны $F^{ik}{}_{\mu\nu}$, определяемые как

$$S^i{}_{\mu\nu} = \partial_{[\nu} h^i{}_{\mu]} - h_{k[\mu} A^{ik}{}_{\nu]},$$

$$F^{ik}{}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A^{ik}{}_{\nu]} + 2A^{il}{}_{[\mu} A^k{}_{l\nu]}$$

Гравитационный лагранжиан ПКТТ \mathcal{L}_g представляет собой инвариантную функцию, построенную из напряженностей поля тяготения (с использованием тетрады и метрического тензора $g_{\mu\nu} = \eta_{ik} h^i{}_{\mu} h^k{}_{\nu}$, где $\eta_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ - метрический тензор пространства-времени Минковского). Поскольку в пространстве U_4 можно построить ряд инвариантов, квадратичных по кривизне и кручению, мы будем использовать достаточно общее выражение \mathcal{L}_g , содержащее помимо скалярной кривизны всевозможные квадратичные инварианты с неопределенными параметрами, предполагающие сохранение пространственной четности

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g = & f_0 F + F^{\alpha\beta\mu\nu} (f_1 F_{\alpha\beta\mu\nu} + f_2 F_{\alpha\mu\beta\nu} + f_3 F_{\mu\nu\alpha\beta}) \\ & + F^{\mu\nu} (f_4 F_{\mu\nu} + f_5 F_{\nu\mu}) + f_6 F^2 \\ & + S^{\alpha\mu\nu} (a_1 S_{\alpha\mu\nu} + a_2 S_{\nu\mu\alpha}) + a_3 S^\alpha{}_{\mu\alpha} S^\beta{}_{\nu\beta}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $F_{\mu\nu} = F^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$, $F = F^\mu{}_{\mu}$, f_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), a_k ($k = 1, 2, 3$) - неопределенные параметры, $f_0 = (16\pi G)^{-1}$, G - ньютоновская гравитационная постоянная (скорость света в вакууме $c = 1$). Гравитационные уравнения, вводимые на основе интеграла действия $I = \int (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) h d^4x$, где $h = \det(h^i{}_{\mu})$ и \mathcal{L}_m - лагранжиан гравитирующей материи, содержат систему 16+24 уравнений, соответствующих гравитационным переменным $h^i{}_{\mu}$ и $A^{ik}{}_{\mu}$:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu U_i{}^{\mu\nu} + 2S^k{}_{i\nu} U_k{}^{\mu\nu} + 2(f_0 + 2f_6 F) F^\mu{}_i \\ + 4f_1 F_{klim} F^{kl\mu m} + 4f_2 F^{k[m\mu]l} F_{klim} \\ + 4f_3 F^{\mu klm} F_{lmik} + 2f_4 (F_{ki} F^{k\mu} + F^\mu{}_{kim} F^{km}) \\ + 2f_5 (F_{ki} F^{\mu k} + F^\mu{}_{kim} F^{mk}) - h_i{}^\mu \mathcal{L}_g = -T_i{}^\mu, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 4\nabla_\nu [(f_0 + 2f_6 F) h_{[i}{}^\nu h_{k]}{}^\mu + f_1 F_{ik}{}^{\nu\mu} \\ + f_2 F_{[i}{}^{\nu\mu]}{}_{k]} + f_3 F^{\nu\mu}{}_{ik} + f_4 F_{[k}{}^{[\mu} h_{i]}{}^{\nu]} + \\ + f_5 F^{[\mu}{}_{[k} h_{i]}{}^{\nu]}] + U_{[ik]}{}^\mu = J_{[ik]}{}^\mu, \end{aligned} \quad (3)$$

где $U_i{}^{\mu\nu} = 2(a_1 S_i{}^{\mu\nu} - a_2 S^{[\mu\nu]}{}_i - a_3 S_\alpha{}^{\alpha[\mu} h_i{}^{\nu]})$, $T_i{}^\mu = -\frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^i{}_{\mu}}$, $J_{[ik]}{}^\mu = -\frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta A^{ik}{}_{\mu}}$, ∇_ν означает ковариантный оператор, имеющий структуру ковариантной производной, определяемой в случае голономных тензорных индексов с помощью коэффициентов Кристоффеля, а в случае тетрадных тензорных индексов - с помощью неголономной лоренцевой связности $A^{ik}{}_{\nu}$. Гравитационные уравнения ПКТТ (2)-(3) представляют собой сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных с неопределенными параметрами f_i и a_k . Физические следствия, получаемые на основе решения уравнений (2)-(3), существенно зависят от ограничений, накладываемых на параметры f_i и a_k . Некоторые ограничения на эти параметры были получены на основе исследования изотропной космологии, построенной в рамках изучаемой ПКТТ (см. [1, 4] и цитируемую там литературу).

2. О выполнении принципа соответствия ПКТТ теории тяготения Эйнштейна

С целью установления выполнения принципа соответствия ПКТТ теории тяготения Эйнштейна рассмотрим гравитационные уравнения (2)-(3) в линейном приближении по полю. В соответствии с [5] уравнения (2) с учетом (3) в линейном приближении не содержат высших производных метрических функций при выполнении следующих ограничений

$$\begin{aligned} a &= 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 0, \\ 4(f_1 + \frac{f_2}{2} + f_3) + f_4 + f_5 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При наложении условий (4) уравнения для функций $h_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) принимают вид

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2f_0} T_{\mu\nu}^{sym} + \alpha(\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) T, \quad (5)$$

где $G_{\mu\nu}^{(1)}$ - тензор Эйнштейна в линейном приближении относительно $h_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ - канонический тензор энергии-импульса в пространстве Минковского, $T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}^{sym}$ - симметризованный тензор энергии-импульса, определяемый обычным образом через $T_{\mu\nu}$ и тензор спинового момента, \square - оператор Даламбера, а параметр $\alpha = \frac{f}{3f_0^2}$, где $f = f_1 + \frac{f_2}{2} + f_3 + f_4 + f_5 + 3f_6 > 0$, имеет размерность, обратную размерности плотности

энергии. В силу (5) уравнения ПКТТ в линейном приближении практически совпадают с уравнениями тяготения Эйнштейна при выполнении условия $\alpha T \ll 1$. Данное условие ограничивает допустимые значения плотности энергии, если величина α^{-1} соответствует экстремально большим плотностям энергии. Именно такая ситуация имеет место в рамках изотропной космологии, базирующейся на однородных изотропных моделях (ОИМ) с одной функцией кручения [6], где параметр α определяет шкалу предельной плотности энергии. Заметим, что первое из условий (4) было введено в рамках изотропной космологии с целью исключения высших производных метрики в космологических уравнениях [6, 7].

Соответствие ПКТТ теории тяготения Эйнштейна в линейном приближении означает, что локально эти теории приводят к идентичным результатам, за исключением систем с экстремально большими плотностями энергии (например, массивных звезд, коллапсирующих в рамках ОТО). Однако, в нелинейном режиме в космологических и астрофизических масштабах выводы ПКТТ и ОТО могут существенно различаться между собой. Данное различие продемонстрировано ниже на примере изотропной космологии, построенной в рамках ПКТТ.

3. Регулярная ускоренно-расширяющаяся Вселенная в пространстве-времени Римана-Картана

В рамках ПКТТ ОИМ описываются с помощью трех функций времени - масштабного фактора метрики Робертсона-Уолкера $R(t)$ и двух функций кручения $S_1(t)$ и $S_2(t)$, определяющих неисчезающие компоненты тензора кручения (см. [1, 4]). Наиболее общие уравнения для ОИМ, выведенные из уравнений (2)-(3), содержат 4 неопределенные параметра (с учетом условия $a = 0$): $b = a_2 - a_1$, α (или f), $q_1 = f_2 - 2f_3 + f_4 + f_5 + 6f_6$, $q_2 = 2f_1 - f_2$. В космологические уравнения и уравнения для функций кручения параметры q_1 и q_2 входят в виде безразмерных комбинаций $\varepsilon = \frac{q_2}{f}$ и $\omega = \frac{2f - q_1 - q_2}{f}$. Исследование данных уравнений приводит к условию $|\varepsilon| \ll 1$. Наиболее простой вид уравнения для ОИМ имеют, когда $\varepsilon = 0$ [7]. Обсудим важнейшие следствия изотропной космологии с $\varepsilon = 0$, ведущие к решению принципиальных космологических проблем ОТО.

Космологические уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{k}{R^2} + (H - 2S_1)^2 - S_2^2 = \frac{1}{6f_0 Z} \left[\rho - 6bS_2^2 + \frac{\alpha}{4} (\rho - 3p - 12bS_2^2)^2 \right], \quad (6)$$

$$\dot{H} + H^2 - 2HS_1 - 2\dot{S}_1 = -\frac{1}{12f_0 Z} \left[\rho + 3p - \frac{\alpha}{2} (\rho - 3p - 12bS_2^2)^2 \right], \quad (7)$$

где $H = \dot{R}/R$ - параметр Хаббла (точка означает дифференцирование по времени), $k = 0, -1, +1$ для пространственно плоских, гиперболических и сферических моделей соответственно, ρ - плотность энергии, p - давление гравитирующей материи, а $Z = 1 + \alpha (\rho - 3p - 12bS_2^2)$. Функция кручения S_1 определяется следующим образом:

$$S_1 = -\frac{\alpha}{4Z} [\dot{\rho} - 3\dot{p} + 12f_0 \omega H S_2^2 - 12(2b - \omega f_0) S_2 \dot{S}_2], \quad (8)$$

а функция кручения S_2^2 является функцией плотности энергии ρ и давления p и определяется по формуле

$$S_2^2 = \frac{\rho - 3p}{12b} + \frac{1 - (b/2f_0)(1 + \sqrt{X})}{12b\alpha(1 - \omega/4)}, \quad (9)$$

где $X = 1 + \omega(f_0^2/b^2)[1 - (b/f_0) - 2(1 - \omega/4)\alpha(\rho + 3p)]$.

Для нахождения космологических решений необходимо конкретизировать материальное содержание ОИМ, а также уравнение состояния гравитирующей материи, которые меняются по мере их эволюции. При построении инфляционных космологических моделей предполагается, что на начальных этапах космологического расширения, помимо обычной материи с плотностью энергии $\rho_m > 0$ и давлением $p_m = p_m(\rho_m) \geq 0$, ОИМ содержат также в качестве материальной компоненты скалярное поле ϕ с потенциалом $V = V(\phi)$. В случае минимальной связи с полем тяготения характеристики материальных компонент удовлетворяют таким же уравнениям, как и в ОТО:

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0, \quad (10)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (11)$$

Выражения для полной плотности энергии ρ и давления p в уравнениях (6)-(9) имеют вид:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + \rho_m \quad (\rho > 0), \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V + p_m. \quad (12)$$

Изотропная космология, базирующаяся на уравнениях (6)-(12), позволяет решить проблему космологической сингулярности (ПКС), а также проблему темной энергии.

а) Космологическое ускорение в современную эпоху как вакуумный эффект.

В асимптотике, где плотность энергии достаточно мала, функция кручения S_2^2 приближенно равна [7]

$$S_2^2 = \frac{\rho - 3p}{12b} + \frac{1 - b/f_0}{12\alpha b}, \quad (13)$$

а космологические уравнения (5)-(6) принимают вид космологических уравнений Фридмана с эффективной космологической постоянной, индуцируемой функцией кручения S_2^2 :

$$\frac{k}{R^2} + H^2 = \frac{1}{6f_0} \left[\rho(f_0/b) + \frac{1}{4}\alpha^{-1}(1 - b/f_0)^2(f_0/b) \right], \quad (14)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{12f_0} \left[(\rho + 3p)(f_0/b) - \frac{1}{2}\alpha^{-1}(1 - b/f_0)^2(f_0/b) \right]. \quad (15)$$

Полагая, что по величине эффективная космологическая постоянная в уравнениях (14)-(15) равна космологической постоянной в уравнениях стандартной Λ CDM-модели, а также принимая во внимание, что параметр α соответствует шкале экстремально высоких плотностей энергии, мы видим, что по величине параметр b чрезвычайно близок к f_0 . Уравнения (13)-(15) были получены в [7] при допущении, что неопределенный параметр ω мал. Однако, нетрудно показать, что если величина $\frac{b}{f_0}$ близка к 1, уравнения (13)-(15) справедливы также, если параметр ω порядка 1 ($0 < \omega < 4\frac{b}{f_0}$).

Появление эффективной космологической постоянной в космологических уравнениях в асимптотике позволяет объяснить ускоренное космологическое расширение в современную эпоху без использования понятия темной энергии как результат изменения гравитационного взаимодействия, вызванный кручением пространства-времени. Как было показано в [8], космологическое ускорение связано с геометрической структурой физического пространства-времени в вакууме, образующего континуум Римана-Картана с метрикой де Ситтера и ненулевым кручением (а не мир Минковского). В связи с этим можно говорить о вакуумном происхождении ускоренного космологического расширения в современную эпоху².

б) Эффект гравитационного отталкивания в экстремальных условиях и ПКС

Уравнения изотропной космологии, построенной в рамках ПКТТ, приводят к выводу о возможном существовании в природе предельной (максимально допустимой) плотности энергии [7]. Действительно, в случае положительных параметров α и $\omega < 4$ из условия неотрицательности X следует ограничение для допустимых значений плотности энергии и давления

$$X = 1 + \omega(f_0^2/b^2)[1 - (b/f_0) - 2(1 - \omega/4)\alpha(\rho + 3p)] \geq 0 \quad (16)$$

В случае ОИМ, заполненных обычной гравитирующей материей с плотностью энергии ρ_m ($p_m = p_m(\rho_m)$) без скалярных полей равенство, задаваемое посредством (16), определяет предельную плотность энергии ρ_{max} , имеющую порядок величины $(\omega\alpha)^{-1}$. Переход от стадии космологического сжатия к стадии космологического расширения (так называемый баунс) происходит при достижении ρ_{max} . Время данного перехода, зависящее от задаваемой предельной плотности энергии, чрезвычайно мало, что соответствует модели регулярного Большого Взрыва. Вблизи предельной плотности энергии гравитационное взаимодействие имеет характер отталкивания, обеспечивая регулярное поведение ОИМ относительно плотности энергии, пространственно-временной метрики и параметра Хаббла. В случае моделей, включающих на начальной стадии расширения скалярные поля, условие (16) определяет область допустимых значений материальных параметров $(\rho_m, \phi, \dot{\phi})$, ограниченную в пространстве этих параметров поверхностью L , определяемой равенством (16). Наличие данной поверхности обеспечивает регулярное поведение соответствующих ОИМ, включая инфляционные космологические модели. Баунс в данном случае происходит при достижении экстремальной поверхности $H = 0$, уравнение которой может быть получено из космологического уравнения (6). Задавая потенциал скалярного поля, фиксируя значения параметров и начальные условия для $(\rho_m, \phi, \dot{\phi})$ на экстремальной поверхности, можно найти численным путем космологические решения (см. [4]). В случае инфляционных космологических решений значение предельной плотности энергии зависит от используемых начальных условий. Рассматриваемая изотропная космология является полностью регулярной: регулярность имеет место не только по отношению к плотности энергии, метрике с ее временными производными, но также относительно функций кручения и кривизны [9]. Все важнейшие характеристики ОИМ (и прежде всего, параметр Хаббла H , функция кручения S_1 , их производные по времени) могут быть представлены в виде разложений относительно \sqrt{X} вблизи предельной плотности энергии либо поверхности L [9].

²Вакуумные эффекты, связанные со структурой физического пространства-времени, имеют нелинейный характер и существенны в космологических масштабах, а при рассмотрении обычных гравитирующих систем в линейном приближении пространство-время в вакууме может рассматриваться как мир Минковского.

4. Заключение

Изотропная космология, построенная в рамках ПКТТ, открывает возможности для решения принципиальных космологических проблем ОТО благодаря изменению характера гравитационного взаимодействия в определенных условиях по сравнению с ОТО, связанного с более общей структурой пространства-времени, а именно, с его кручением. Вывод о возможном существовании в природе предельной плотности энергии может иметь важное значение для астрофизики, в частности, объяснить наличие в центре галактик сверхмассивных гравитирующих объектов (а не сингулярных черных дыр). Поскольку гравитационные свойства таких объектов в ПКТТ существенно отличаются от того, что дает ОТО, их присутствие может привести к неожиданным следствиям, связанным с процессами, протекающими в активных ядрах галактик.

Литература

- [1] Минкевич А.В., *Калибровочный подход в теории тяготения, физическое пространство-время и гравитационное взаимодействие*, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, вып.1, 62-72 (2012).
- [2] Kibble T.W.B. *Lorentz invariance and the gravitational field*, Journal of Mathematical Physics, **2**, 212-221 (1961).
- [3] Бродский А.М., Иваненко Д., Соколик Г.А., *Новая трактовка гравитационного поля*, ЖЭТФ, **41**, 1307-1309 (1961).
- [4] Minkevich A.V., Garkun A.S., Kudin V.I., *On some physical aspects of isotropic cosmology in Riemann-Cartan spacetime*, JCAP, 03, 40 (2013) (Preprint Arxiv: 1302.2578 [gr-qc]).
- [5] Hayashi K. and Shirafuji T., *Gravity from Poincare gauge theory of the fundamental particles. III*, Progr. Theor. Phys., **64**, No. 4, 1435-1452 (1980).
- [6] Minkevich A.V. *Gauge approach to gravitation and regular Big Bang theory*, Gravitation and Cosmology, **12**, 11-21 (2006) (Preprint gr-qc/0506140).
- [7] Minkevich A.V., *Limiting energy density and a regular accelerating Universe in Riemann-Cartan spacetime*, Письма в ЖЭТФ, **94**, No 12, 913-917 (2011); JETP Letters, **94**, No. 12, 831-836 (2011).
- [8] Minkevich A.V., *De Sitter spacetime with torsion as physical spacetime in the vacuum and isotropic cosmology*, Modern Physics Letters A, **26**, No. 4, 259-266 (2011) (Preprint Arxiv:1002.0538 [gr-qc]).
- [9] Minkevich A.V., *To theory of regular accelerating Universe in Riemann-Cartan spacetime*, to be published in Modern Phys. Letters A, **28**, No. 21 (2013).

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ РЕЙССНЕРА-НОРДСТРЕМА

Ю.Г. Рудой¹, А.В. Калмыков²

¹Российский университет дружбы народов, Москва, ²Российский университет
дружбы народов, Москва

¹E-mail: rudikar@mail.ru, ²E-mail: akalmy@mail.ru

Аннотация. Установлено, что неэкстремальная черная дыра Рейсснера-Нордстрема является термодинамически локально неустойчивой системой. Следствия обсуждаются.

Решение уравнений Эйнштейна, найденное Рейсснером и Нордстремом, описывает геометрию пространства-времени, окружающего заряженную стационарную черную дыру. Для астрофизических приложений представляет интерес вопрос об устойчивости черных дыр относительно малых флуктуаций термодинамических параметров. Один из возможных критериев — максимум энтропии — с геометрической точки зрения представляет собой условие вогнутости поверхности энтропии.

Согласно известной гипотезе “отсутствия волос у черных дыр”, черная дыра Рейсснера-Нордстрема вне горизонта событий однозначно характеризуется массой M и зарядом Q . Выразить энтропию S через эти экстенсивные параметры позволяет совместно формула Бекенштейна-Хокинга [1, 2] и формула Шмарра [3], в геометризованной системе единиц:

$$S = -\pi Q^2 + 2\pi M^2 + 2\pi M^2 \sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2}}$$

Применение известной теоремы линейной алгебры позволяет по сочетанию знаков ведущих миноров матрицы Гесса установить соответствующий характер поведения функции S в малой окрестности. Необходимое (но не достаточное) условие локального максимума: $\det(\text{Hess}(S)) > 0$. Прямые вычисления приводят к задаче установления области допустимых значений выражения:

$$\det(\text{Hess}(S)) = \frac{4\pi^2}{\left(1 - \frac{Q^2}{M^2}\right)^2} \cdot \left[-\left(4 - 3\frac{Q^2}{M^2}\right) \sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2}} - \left(4 - \frac{Q^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{Q^2}{M^2}\right) \right]$$

При $Q \neq M$ это выражение принимает всюду отрицательные значения, нарушая необходимое условие. Таким образом, неэкстремальная черная дыра Рейсснера-Нордстрема является термодинамически локально неустойчивой системой. В этой связи рассматривается возможность наличия фазового перехода, а также обсуждаются условия динамической устойчивости.

Литература

- [1] J.D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Phys.Rev. D, 7, 8 (1973).
- [2] S.W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Comm.in Math.Phys., 43, 3 (1975).
- [3] L. Smarr, *Mass Formula for Kerr Black Holes*, Phys.Rev.Lett., 30, 2 (1973).

КЛАССИФИКАЦИЯ ПО ПЕТРОВУ ВБЛИЗИ ГОРИЗОНТОВ ВРАЩАЮЩИХСЯ ГРЯЗНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

И.В. Танатаров¹, О.Б. Заславский²

¹ННЦ Харьковский физико-технический институт, ²Харьковский
физико-технический институт

¹E-mail: igor.tanatarov@gmail.com, ²E-mail: zaslav@ukr.net

Мы исследуем особенности классификации по Петрову вблизи регулярных горизонтов аксиально-симметричных стационарных грязных черных дыр. Экстремальность горизонта не конкретизируется. При анализе используются системы отсчета, привязанные к наблюдателям двух различных классов: тех, что пересекают горизонт (падающие наблюдатели), и тех, что находятся на круговых орбитах (орбитальные наблюдатели).

Локальное преобразование Лоренца, связывающее системы отсчета наблюдателей из разных классов – сингулярно: гамма-фактор на горизонте расходится. Это является причиной того, что типы по Петрову, вычисленные в соответствующих двух системах отсчета, в пределе горизонта в общем случае различны, причем тип в системе отсчета падающего наблюдателя является более общим. Тип по Петрову в пределе горизонта совпадает для этих двух наблюдателей и совпадает с типом в окрестности горизонта только в пространствах-временах типа по Петрову D (или тривиально O).

Мы детально анализируем поведение главных нулевых направлений по отношению к генератору горизонта. Показано, в частности, что в нетривиальном случае пространства-времени типа по Петрову, отличного от O, два из четырех главных нулевых направлений выстраиваются вдоль генератора в обеих указанных системах отсчета, в то время как в системе отсчета орбитального наблюдателя оставшиеся два выстраиваются по направлению, которое соответствует генератору горизонта прошлого.

**ПОЛУЧЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО РЕШЕНИЯ КОНФОРМНОЙ
ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ ДЕЗЕРА–ДИРАКА
АНАЛИТИЧЕСКИМИ И КОМПЬЮТЕРНЫМИ СИМВОЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ**

Б.Н. Фролов¹, Е.В. Фебрес²

¹Московский педагогический государственный университет, ²Московский педагогический государственный университет

¹E-mail: frolovbn@orc.ru, ²E-mail: solntce_07@mail.ru

Как следствие развитой в [1] калибровочной теории гравитации Пуанкаре–Вейля, пространство-время оказывается наделенным геометрической структурой пространства Картана–Вейля с 2-формами кривизны \mathcal{R}^a_b , кручения \mathcal{T}^a , 1-формой неметричности вейлевского типа $\mathcal{Q}_{ab} = \frac{1}{4}g_{ab}\mathcal{Q}$, а также дополнительной геометрической структурой в виде скалярного поля Дезера–Дирака β . При равном нулю кручении это пространство называется пространством Римана–Вейля.

Развивая данный подход, в [2], [3] построена конформная теория гравитационного поля и в [3] выведены уравнения поля в формализме внешних форм. Как следствие данных уравнений в сферически симметричном случае, можно положить $\mathcal{T} = s d \ln \beta$, $\mathcal{Q} = q d \ln \beta$, где s и q – константы, подлежащие определению. Для центральной массы m решение для метрики и скалярного поля имеет вид (при условии $q = 4$, $s = 0$) [4]:

$$ds^2 = e^{-\frac{r_0}{r}} dt^2 - e^{\frac{r_0}{r}} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad \beta(r) = \beta_\infty e^{\frac{kr_0}{r}}. \quad (1)$$

Метрика (1) известна как метрика Илмаза–Розена [5], впервые возникшая в оригинальной теории гравитации Илмаза, в которой постулировалось, что метрика риманова пространства является функцией специального скалярного поля. Интерес, проявляемый данной метрике, вызван тем, что эта метрика не имеет сингулярности, характерной для метрики Шварцшильда, и не описывает решения типа черной дыры, но на больших расстояниях при $r_0 = r_g = 2Gm/c^2$ совпадает с ней.

Поэтому можно сделать вывод, что наличие скалярного поля Дезера–Дирака, которое всегда существует, так как имеет столь же фундаментальный статус, как и метрика [1], при определенных обстоятельствах может на малых расстояниях видоизменить метрику черных дыр. Отсюда возникает возможная существенная роль поля Дезера–Дирака на сверхмалых расстояниях, что может проявляться, например, при определении конечной стадии коллапса массивных звезд.

Ввиду сложности гравитационных теорий в геометрически обобщенных пространствах как при получении предварительных результатов, так и при проверке окончательных аналитических вычислений существенно использовались пакет программ символьных вычислений CartanWeyl [6], а также пакет В.В. Житникова GRG, которые позволяют производить символьные вычисления в геометрически обобщенных пространствах с кривизной, кручением и неметричностью.

Литература

- [1] Babourova O.V., Frolov B.N., Zhukovsky V.Ch. //Phys. Rev. D.–2006.–V. 74.–P. 064012 1-12 (gr-qc/0508088).
 [2] Бабурова О.В., Косткин Р.С., Фролов Б.Н. //Известия вузов. Физика.–2011.–С. 111–112; Babourova O.V., Frolov B.N. //ArXive: 1112.4449 [gr-qc].
 [3] Babourova O.V., Frolov B.N., Lipkin K.N. //Grav. Cosm.–2012.–V. 4.–P. 225–231.
 [4] Febres E.V., Frolov B.N. //In: Vigier VIII – BCS 2012 Symposium ABSTRACTS.–2012.
 [5] Yilmaz H. Phys. Rev.–1958.–V. 111.–P. 1417–1426; Rosen N. Ann. Phys. (N.Y.).–1974.–V. 84.–P. 455–473.
 [6] Бабурова О.В., Косткин Р.С., Фролов Б.Н. Свид-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2012615738 от 22 июня 2012 г.

SPECTRAL INDEX AND SRÖDINGER EQUATION

A.V. Yaparova¹, A.V. Yurov²¹Kaliningrad, IKBFU, ²KBFU; Kaliningrad, IKBFU¹E-mail: lisa74@yandex.ru, ²E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Аннотация. An interesting connection between the equation for a spectral index of energy density perturbations and linear Srödinger equation is considered. This connection provides an easy way to construct potentials for scalar fields by Darboux transformation.

In recent paper [1] J. Lidsey pointed that the Korteweg–de Vries equation

$$u_t + u_{3x} + \frac{3}{u_0}uu_x = 0 \quad (1)$$

(where $u = u(x, t)$, x and t are spatial and time coordinates, u_0 is arbitrary constant and subscripts x and t mean d/dx and d/dt respectively) is connected with equation for the spectral index of energy density perturbations

$$4\frac{H''}{H} - 8\frac{H'^2}{H^2} = -(1 - n_s), \quad (2)$$

where $H = H(\phi)$ is Hubble parameter, n_s is a spectral index, prime denoted $d/d\phi$ and ϕ is a single real scalar field.

We found a connection between equation (2) and one more famous equation — Srödinger equation. By a substitution $H(\phi) = \psi^{-1}(\phi)$, $n_s(\phi) = -U(\phi)$ and $\phi = 2x$ we reduct equation (2) to

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = -\psi. \quad (3)$$

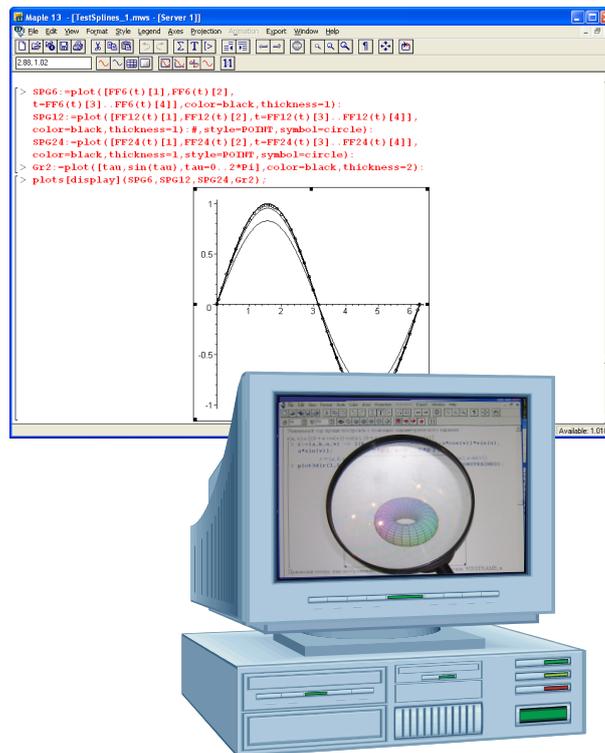
Such a reduction may be useful for constructions of new potentials for a scalar field. Using Darboux transformation we managed to get a class of potentials which allow the slow-rolling condition and the spectral index close to 1 simultaneously. For example, two of this potentials and corresponding spectral indexes are

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\phi) &= \frac{H_0^2}{4} [5 \cosh(\phi) + 7], \quad n_s^{(1)}(\phi) = \frac{2}{\cosh^2(\phi/2)}, \\ V^{(2)}(\phi) &= \frac{H_0^2}{4} \cosh^2(\phi/4) [5 \cosh(\phi/2) + 7], \quad n_s^{(2)}(\phi) = \frac{3}{2 \cosh^2(\phi/4)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Литература

- [1] J.E. Lidsey *Cosmology and the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev., **86D**, 123523 (2012).

ЧАСТЬ 2. ТРУДЫ РОССИЙСКОЙ ШКОЛЫ



КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ: ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО БИЛЬЯРДА

К.О. Агафонова¹, А.А. Агафонов², С.В. Сушков³

^{1,2,3} Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: ksenia.agathonova@gmail.com, ²E-mail: a.a.agathonov@gmail.com,

³E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрена программа-Maplet для моделирования и анализа траекторий бильярдного шара в круге, эллипсе, правильных и произвольных многоугольниках, стадионе, грибе Бунимовича при различных начальных условиях.

XXI век – это век высоких информационных технологий, проникающих во все области человеческой деятельности, включая образование. Процесс информатизации образования сопровождается рядом широкоизвестных проблем. Это и недостаточный выбор обучающих программ, и несоответствие большинства имеющихся программных продуктов требованиям, необходимым для успешной организации учебного процесса, и отсутствие электронных информационных ресурсов. В настоящее время в образовательной практике всё более востребованным становится использование электронных учебно-методических пособий, которые представляют собой ресурсы в локальных или глобальных сетях. Наиболее удобной формой для восприятия является материал, скомпонованный в единый обучающий комплекс.

Целью нашей работы является создание компьютерной математической лаборатории, которая должна включать в себя комплекс лабораторных заданий по различным разделам математики. Работа велась в двух направлениях. Во-первых, это разработка программного обеспечения, т.е. создание компьютерной оболочки для математической лаборатории. Эта задача решается с помощью технологии Maplet, разработанной в среде программирования Maple. Во-вторых, важнейшей задачей является методическое наполнение математической лаборатории.

В качестве первого шага была выбрана разработка лабораторной работы по математическому бильярду. В математическом бильярде рассматривается стол произвольной формы, но без луз. По этому столу без трения движется точечный шар, абсолютно упруго отражаясь от бортов. Математическая проблема бильярда, или проблема траекторий, состоит в том, чтобы найти ответ на вопрос: какой может быть траектория этого шарика? Описанная механическая система – точечный шар в бильярдной области, ограниченной бортом (границей области), – и называется математическим бильярдом. Траектория бильярда в области определяется начальным положением точки и начальным вектором ее скорости. Таким образом, траектория бильярда – это вписанная в кривую ломаная, которая может быть однозначно построена по своему начальному звену. Общая математическая проблема бильярда заключается в том, чтобы описать возможные типы бильярдных траекторий в данной области. Простейший принцип такого описания – разделение траекторий на периодические, или замкнутые, и остальные – непериодические. Известно, что даже простые механические системы в некоторых случаях ведут себя непредсказуемым образом. Неустойчивость систем к изменению их параметров, начальных условий, может быть продемонстрирована на примере математического бильярда с выпуклыми участками границы. Если из одной точки такого хаотического бильярда запустить два шарика, скорости которых незначительно отличаются, то через некоторое время они окажутся в далеко отстоящих друг от друга участках стола. В частности, такое поведение демонстрируют бильярды с границей в форме идеализированного «гриба», которая состоит из полукруга и прямоугольного основания (гриб Бунимовича).

На данный момент разработана программа-Maplet для моделирования и анализа траекторий бильярдного шара в круге, эллипсе, правильных и произвольных многоугольниках, стадионе, грибе Бунимовича при различных начальных условиях. Основное программное окно выглядит следующим образом (рис. 1).

Для построения траектории шара необходимо ввести четыре параметра, а именно:

1. Эксцентриситет – параметр, определяющий эксцентриситет эллипса. Принимает значения от 0 (случай круга) до величин близких к 1 (эллипс вырождается в отрезок). Большая полуось эллипса фиксирована и расположена вертикально, длина малой полуоси зависит от данного параметра.
2. Начальная точка – параметр, определяющий положение начальной точки. Искомая точка расположена на пересечении эллипса и луча, выходящего из центра эллипса и направленного под некоторым углом, определяемым данным параметром. Параметр принимает значения от 0 до 2π , причем 0 соответствует положительному направлению оси Ox .

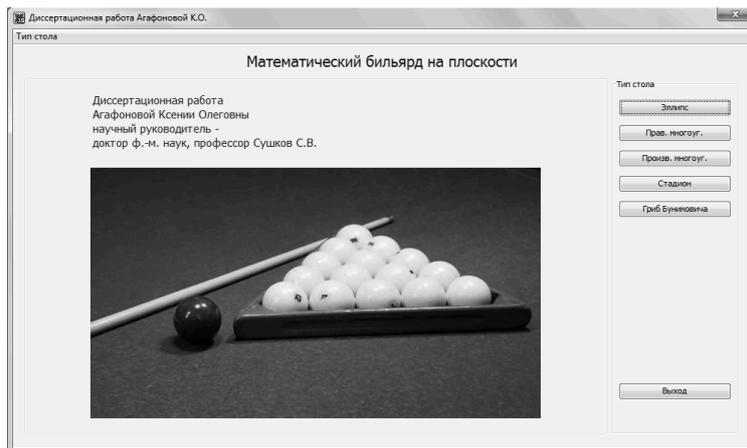


Рис. 1: Основное программное окно.

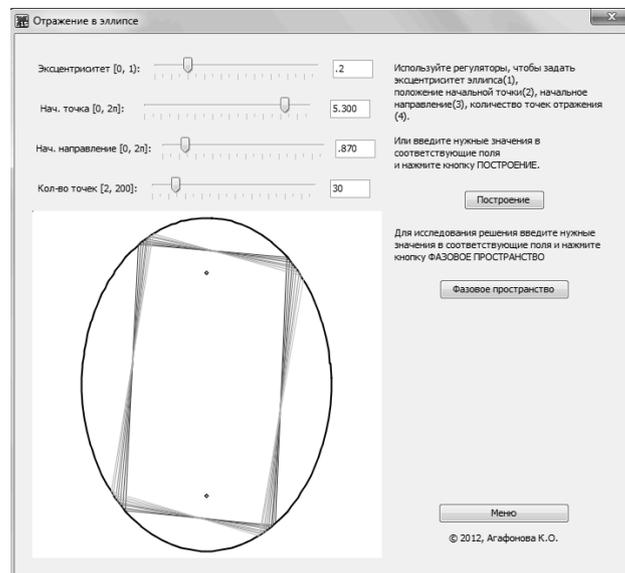


Рис. 2: Вид маплета для моделирования и визуализации бильярда на столе эллиптической формы.

3. Начальное направление – параметр, определяющий начальное направление движения шара. Направление задаётся вектором, у которого начало – это начальная точка, рассчитанная по значению предыдущего параметра, а конец – точка расположена на пересечении эллипса и луча, выходящего из центра эллипса и направленного под некоторым углом, определяемым данным параметром. Параметр принимает значения от 0 до 2π , причем 0 соответствует положительному направлению оси Ox .
4. Количество точек – параметр, задающий количество точек отражения внутри бильярдного стола, которое будет вычислено при моделировании.

Задание параметров возможно двумя способами: с помощью регулятора-ползунка либо ручного ввода точного числового значения. При задании параметров с помощью ползунков, изменения сразу же отслеживаются программой, производится расчет новых параметров стола и отражений шарика внутри него, и согласно обновленным результатам выводится новый график моделирования. Для обновления результатов моделирования после ввода точных значений параметров в соответствующие поля, необходимо нажать кнопку «Построение». Изменяя параметры системы, можно наглядно продемонстрировать основные свойства бильярдных в круге и эллипсе (рис. 3), описанные в первой главе диссертации.

Цвет линий плавно меняется в зависимости от общего количества итераций и номера текущей итерации от синего $RGB(0,0,1)$ до фиолетового $RGB(1,0,1)$, что позволяет проследить динамику процесса отражения шарика внутри заданной области.

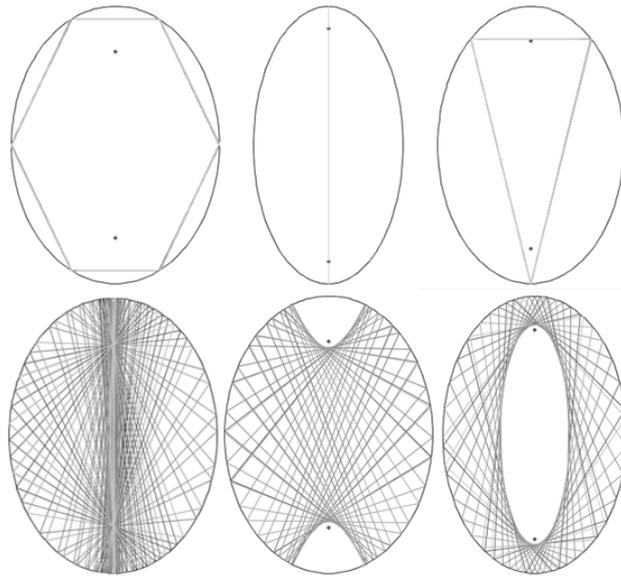


Рис. 3: Примеры бильярдных траекторий на столе эллиптической формы, построенные в программе.

Как проследить за эволюцией динамической системы при заданных начальных условиях? Для этого нужно «увидеть», что происходит с задающими динамическую систему переменными, а именно точкой столкновения шара с бортом и направлением вектора отражения в этой точке, по мере эволюции системы во времени. Введем некоторое пространство (см. рис. 4), по оси абсцисс которого отложим длину границы стола от начальной точки до точки столкновения шара с бортом, а по оси ординат - направление и величина угла отражения в момент столкновения шарика с бортом (от $-\pi/2$ до $\pi/2$). Подобное пространство принято называть фазовым. Фазовое пространство - пространство, на котором представлено множество всех состояний системы, так, что каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства. Фраза «задано начальное состояние динамической системы», теперь означает, что задана точка в фазовом пространстве. Рассмотрим изменения фазового портрета со временем. Точка изображающая состояние системы при каждом новом отражении будет совершать «прыжки» в фазовом пространстве.

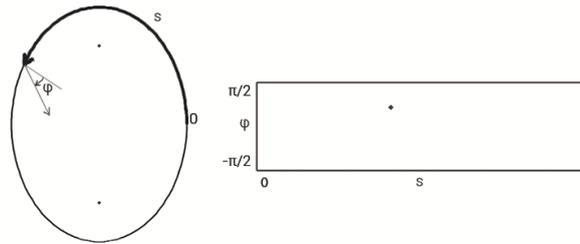


Рис. 4: К построению фазового пространства эллиптического бильярда.

Динамическая система полностью задает закон эволюции во времени, однако, чтобы получить полную информацию о характере такой эволюции надо провести исследование для различных начальных условий. Современные компьютеры делают эту задачу не умозрительной, а вполне реальной и позволяют получать наглядные геометрические образы такого процесса. Наиболее существенный результат, который вытекает из компьютерного моделирования бильярда в эллипсе, состоит в том, что все траектории, образованные множеством точек фазового пространства являются периодическими (замкнутыми), и соответственно сам бильярд - интегрируемой динамической системой.

Для построения фазового пространства системы необходимо ввести значения параметров и нажать кнопку «Фазовое пространство» на боковой панели маплета.

Пример программных процедур моделирования и визуализации математического бильярда в эллипсе:

```
> ellipseRefArray := proc (a, b, Point, direction, N)
```

```

local i, A, B, C, par1, norm, fall, par2, proj;
for i to N do
if direction[i, 1] = 0 and direction[i, 2] = 0 then
Point[i+1, 1] := Point[i, 1]; Point[i+1, 2] := Point[i, 2];
direction[i+1, 1] := 0; direction[i+1, 2] := 0;
next
end if;
A := evalf(direction[i, 1]^2/a^2+direction[i, 2]^2/b^2);
B := evalf(Point[i, 1]*direction[i, 1]/a^2+Point[i, 2]*direction[i, 2]/b^2);
C := evalf(Point[i, 1]^2/a^2+Point[i, 2]^2/b^2-1);
par1 := evalf(-(B-sqrt(B^2-A*C))/A);
if evalf(par1, 5) < 0.1e-3 then
par1 := evalf(-(B+sqrt(B^2-A*C))/A)
end if;
Point[i+1, 1] := evalf(Point[i, 1]+par1*direction[i, 1]);
Point[i+1, 2] := evalf(Point[i, 2]+par1*direction[i, 2]);
norm[1] := evalf(-b^2*Point[i+1, 1]);
norm[2] := evalf(-a^2*Point[i+1, 2]);
fall[1] := evalf(Point[i+1, 1]-Point[i, 1]);
fall[2] := evalf(Point[i+1, 2]-Point[i, 2]);
par2 := evalf((fall[1]*norm[1]+fall[2]*norm[2])/(norm[1]^2+norm[2]^2));
proj[1] := evalf(-norm[1]*par2); proj[2] := evalf(-norm[2]*par2);
direction[i+1, 1] := evalf(fall[1]+2*proj[1]);
direction[i+1, 2] := evalf(fall[2]+2*proj[2])
end do
end proc;

> ellipseReflection := proc (eccentricity, initPointPar, initDirPar, iterationNum)
local eps, a, b, Point, direction, plotEllipse, plotFoci, plotDots, plotLines;
eps := eccentricity^(1/4); b := 100; a := b*sqrt(1-eps^2);
Point := array(1 .. iterationNum+1, 1 .. 2,
[[evalf(a*cos(initPointPar)), evalf(b*sin(initPointPar))]]);
direction := array(1 .. iterationNum+1, 1 .. 2,
[[evalf(a*cos(initDirPar))-Point[1, 1], evalf(b*sin(initDirPar))-Point[1, 2]]]);
ellipseRefArray(a, b, Point, direction, iterationNum-1);
plotEllipse := plots[implicitplot](x^2/a^2+y^2/b^2 = 1, x = -a .. a, y = -b .. b,
color = black, thickness = 2, scaling = constrained, axes = none);
plotFoci := plots[display]([plottools[point]([0, sqrt(b^2-a^2)]),
plottools[point]([0, -sqrt(b^2-a^2)])]);
plotDots := seq(plottools[point]([Point[i, 1], Point[i, 2]]), i = 1 .. iterationNum);
plotLines := seq(plottools[line]([Point[i, 1], Point[i, 2]],
Point[i+1, 1], Point[i+1, 2]], color = ('COLOR')(RGB, i/iterationNum, 0, 1)),
i = 1 .. iterationNum-1);
plots[display]([plotEllipse, plotFoci, plotLines]) end proc;

> fnEllipsePhaseSpace := proc (eccentricity, initPointPar, initDirPar, iterationNum)
local eps, a, b, Point, direction, i, ph, phMax, arrPHPoint, tmpDist, rotatedir,
vertKoef, pltPhase, plt;
eps := eccentricity^(1/4); b := 100; a := b*sqrt(1-eps^2);
Point := array(1 .. iterationNum+1, 1 .. 2,
[[evalf(a*cos(initPointPar)), evalf(b*sin(initPointPar))]]);
direction := array(1 .. iterationNum+1, 1 .. 2,
[[evalf(a*cos(initDirPar))-Point[1, 1], evalf(b*sin(initDirPar))-Point[1, 2]]]);
ellipseRefArray(a, b, Point, direction, iterationNum-1);
vertKoef := 50;
if direction[1, 1] = 0 and direction[1, 2] = 0 then
plt[2] := textplot([10, 2, "Ошибка: \n Неверное начальное направление",
'font' = ["Verdana", 16]], color = red)
else
arrPHPoint := Array(1 .. iterationNum-2, 1 .. 2);
for i to iterationNum-2 do
if Point[i+1, 2] < 0 then
phMax := evalf(2*Pi-arccos(Point[i+1, 1]/a), 5)
else
phMax := evalf(arccos(Point[i+1, 1]/a), 5)
end if;
tmpDist := evalf(int(sqrt(a^2*sin(ph)^2+b^2*cos(ph)^2), ph = 0 .. phMax), 5);
arrPHPoint[i, 1] := tmpDist;

```

```

if 0 <= (Point[i+1, 1]-Point[i, 1])*(Point[i+2, 2]-Point[i+1, 2])-
(Point[i+2, 1]-Point[i+1, 1])*(Point[i+1, 2]-Point[i, 2]) then
rotatedir := 1
else
rotatedir := -1
end if;
arrPHPoint[i, 2] := (1/2)*rotatedir*arccos(((Point[i, 1]-Point[i+1, 1])*
(Point[i+2, 1]-Point[i+1, 1])+(Point[i, 2]-Point[i+1, 2])*(Point[i+2, 2]-
Point[i+1, 2]))/(sqrt((Point[i, 1]-Point[i+1, 1])^2+(Point[i, 2]-Point[i+1, 2])^2)*
sqrt((Point[i+2, 1]-Point[i+1, 1])^2+(Point[i+2, 2]-Point[i+1, 2])^2)))
end do;
plt[2] := seq(point([arrPHPoint[i, 1], vertKoeff*arrPHPoint[i, 2]]),
i = 1 .. iterationNum-2)
end if;
tmpDist := 0;
pltPhase[1] := line([tmpDist, -(1/2)*Pi*vertKoeff],
[tmpDist, (1/2)*Pi*vertKoeff], color = blue);
tmpDist := evalf(int(sqrt(a^2*sin(ph)^2+b^2*cos(ph)^2), ph = 0 .. 2*Pi), 5);
pltPhase[2] := line([tmpDist, -(1/2)*Pi*vertKoeff],
[tmpDist, (1/2)*Pi*vertKoeff], color = blue);
pltPhase[3] := line([0, -(1/2)*Pi*vertKoeff],
[tmpDist, -(1/2)*Pi*vertKoeff], color = blue);
pltPhase[4] := line([0, (1/2)*Pi*vertKoeff],
[tmpDist, (1/2)*Pi*vertKoeff], color = blue);
plt[1] := seq(pltPhase[i], i = 1 .. 4);
display([plt[1], plt[2]], axes = none, scaling = constrained)
end proc;

```

При рассмотрении бильярдного стола в форме правильного многоугольника (рис. 5), первый параметр задаёт количество углов. Их можно задать от 3 до 8. Остальные параметры такие же, как у стола эллиптической формы.

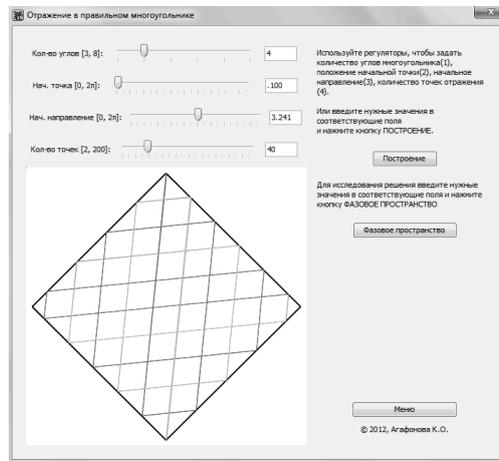


Рис. 5: Вид макета для моделирования и визуализации бильярда на столе в форме правильного многоугольника.

В случае бильярда с границей в виде произвольного многоугольника (рис. 6), необходимо задать последовательность координат углов произвольного многоугольника с несамопересекающейся границей. А также координаты начальной точки, принадлежащей внутренней области многоугольника, начальное направление движения шара и количество точек отражения.

Для моделирования бильярда в стадионе (рис. 7) необходимо ввести четыре параметра. Первые два задают форму стадиона: эксцентриситет боковых эллиптических частей и параметр, выражающий отношение правой части стадиона к левой. Остальные параметры такие же, как у стола эллиптической формы. Бильярд с границей в форме идеализированного «гриба» (рис. 8), которая состоит из полуэллипса и прямоугольного основания (гриб Бунимовича). Для моделирования бильярда в такой области необходимо задание семи параметров системы: эксцентриситет полуэллипса шляпки, длина, ширина и центр основания ножки, координаты начальной точки, начальное направление движения шара и количество точек отражения.

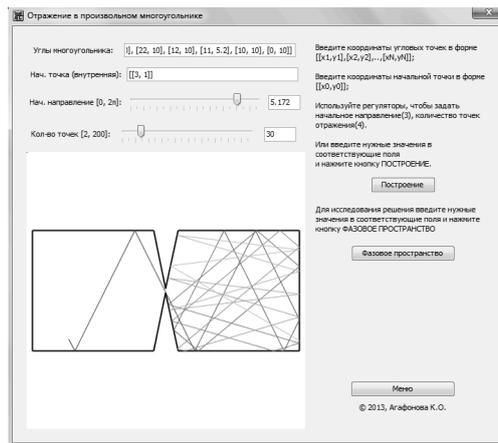


Рис. 6: Вид маплета для моделирования и визуализации бильярда на столе в форме произвольного многоугольника.

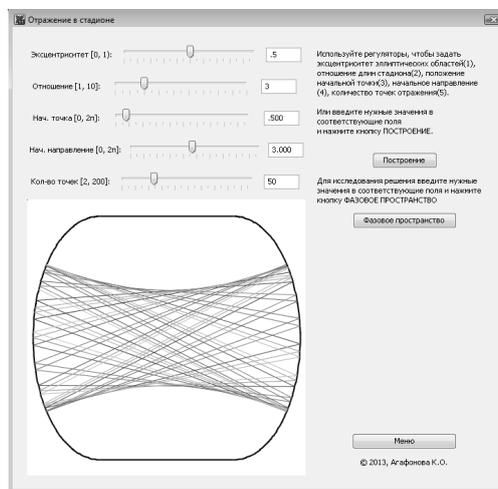


Рис. 7: Вид маплета для моделирования и визуализации бильярда на столе в форме стадиона.

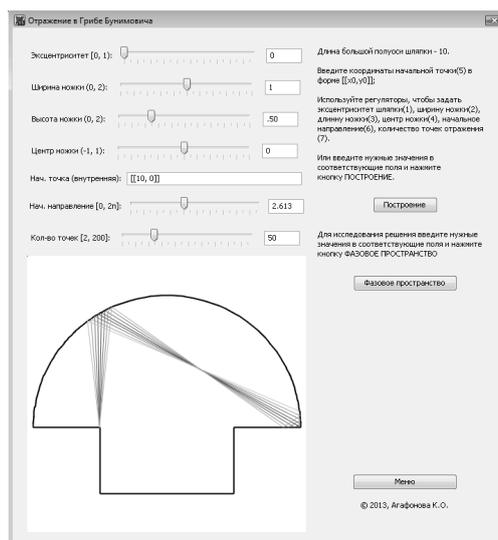


Рис. 8: Вид маплета для моделирования и визуализации бильярда на столе в форме гриба Бунимовича.

Таким образом, технология Maplelet является хорошим инструментом, позволяющим интегрировать возможности СКМ Maple с принципом интерактивности. Дальнейшая работа будет направлена на моделирование движения бильярдного шара в трехмерных фигурах, визуализацию основных свойств такого движения, а также на детальную разработку методического материала лабораторных работ.

Литература

- [1] Кирсанов М.Н. Maple 13 и Maplelet. Решения задач механики М.: Лань,- 2010.- 503 с.
- [2] Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики) - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,- 1990.- 288 с.- (Библиотечка "Квант". Вып. 77).
- [3] <http://mathworld.wolfram.com/Billiards.html>
- [4] Wolfram Demonstrations Project. Reflections in an Elliptical Region, <http://demonstrations.wolfram.com/ReflectionsInAnEllipticalRegion/>
- [5] L.A. Bunimovich. Mushrooms and other billiards with divided phase space. Chaos, 11(2001), 802-808.
- [6] M.A. Porter, S. Lansel [2006]. Mushroom Billiards, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 53, No. 3: 334-337
- [7] Billiards and Puzzles, Cornell Department of Mathematics, <http://www.math.cornell.edu/mec/Summer2009/Remus/index.html>

МОДЕЛЬ СЕРВИСОВ ЭЛЕКТРОННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЖУРНАЛА И ЕЕ ОБЛАЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ПЛАТФОРМЕ OPEN JOURNAL SYSTEM

Д.Ю. Ахметов¹, А.М. Елизаров², Е.К. Липачёв³

^{1,2,3} Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: akhmetov.dy@gmail.com, ²E-mail: amelizarov@gmail.com, ³E-mail: elipachev@gmail.com

Аннотация. *Исследованы особенности использования информационных систем в процессе издания выпусков электронного математического журнала, проведен сравнительный анализ журнальных информационных систем с точки зрения сопровождения жизненного цикла электронной публикации и автоматизации редакционных процессов. Предложены модели сервисов электронного научного журнала, организованных в соответствии с принципами Cloud Computing, и сетевого взаимодействия редколлегии журнала, а также алгоритмы автоматической стилевой валидации математических текстов на этапе регистрации автором статьи в информационной системе электронного научного журнала и автоматизации процесса научного рецензирования, включая подбор рецензентов, рассылку уведомлений и контроль сроков рецензирования. Представлена технология автоматизации ряда редакционных процессов электронного научного журнала, функционирующего на платформе Open Journal Systems.*

1 Введение

Сегодня электронные издания фактически вытеснили бумажные книги и журналы. Чаще всего книга, изданная традиционным типографским способом, имеет электронный вариант, и именно с ним знакомится большинство читателей.

Переход к электронной форме научных изданий обусловлен многими причинами, прежде всего, постоянно возрастающими объемами создаваемой информации, обработка которой уже невозможна без компьютера. Несмотря на повсеместное использование информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) на всех этапах редакторской обработки научной публикации, организация рабочих процессов редакции научного журнала по-прежнему остается традиционной – сформированной для научных издательств, ориентированных на бумажную форму как завершающую. Причины такого положения, по нашему мнению, – не в "косности" редколлегий научных журналов, а в сложившейся и детально продуманной системе рассматривания научной работы, включающей специфичный для каждого журнала набор стилевых правил, учет

научной специализации журнала, организацию независимого квалифицированного рецензирования и др. Поэтому только системный подход, поддержанный административно, позволит сформировать современную научно-издательскую инфраструктуру.

Непрерывно происходящее совершенствование ИКТ позволило сделать качественный шаг вперед в развитии многих существующих информационных систем (ИС). Для обработки постоянно растущего объема информации стали создаваться и внедряться в практическую деятельность информационные системы, многие внутренние процессы которых проходят без взаимодействия с человеком. Аналогичная ситуация сложилась и в издательском деле – к настоящему времени в мире внедрены десятки различных издательских систем, построенных на различных платформах и позволяющих совершенствовать редакционно-издательский процесс.

Пользователи интернета имеют многочисленные и разнообразные инструменты для создания и распространения информации (журналов, книг, мультимедиа), и основной задачей издательств стала способность оперативно выпускать свои издания на основе современных технологий. При этом появление новых форм публикации научных результатов стимулирует необходимость создания мультимедийных редакций, способных формировать электронные издания не только с текстом и изображениями, но и с применением звука и видео.

Развитие мобильных устройств и облачных технологий, консьюмеризация информационных технологий (см., напр., [1]) и поддержка инициативы использования личных устройств (Bring Your Own Device, BYOD) позволяют ученому работать в любом месте, где есть доступ в интернет, не ограничиваясь кабинетом и не привязываясь к библиотеке.

Согласно исследованиям [2], к 2020 году примерно 40% информации Цифровой Вселенной будет "затронуто" технологиями облачных вычислений (Cloud Computing), а её объем достигнет величины 40 зеттабайт, что значительно усложнит поиск научной информации.

Проблема оперативной доступности результатов выполненных научных исследований начала успешно разрешаться с внедрением программных продуктов (информационно-издательских систем), разрабатываемых научными сообществами (см., напр., [3]). В силу доступности различных сред программирования и подходов к построению самой информационно-издательской системы на сегодняшний момент времени сформировано несколько инновационных идей построения моделей таких ИС, к примеру, семантическая сеть систем, реализованная, например, в HurerJournal [4] (отметим, что несколько установленных экземпляров HurerJournal могут быть объединены в единое информационное пространство); модель информационно-издательской системы, построенная на платформе Open Journal Systems (OJS) по аналогии с традиционным понятием издательства, и др. Несмотря на достигнутые успехи, моделирование информационно-издательских систем и оптимизация алгоритмов, примененных в них, по-прежнему остаются актуальными.

2 Модель издательской системы

Целями настоящей работы были построение модели информационно-издательской системы, разработка эффективного алгоритма автоматического выбора рецензентов статей электронного научного журнала и внедрение этого алгоритма в издательскую систему OJS. Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. проанализированы существующие издательские системы;
2. выделены ключевые этапы жизненного цикла электронного издания и на их основе построена модель редакционно-издательского процесса;
3. проанализированы процессы рецензирования научной работы и на этой основе построена система их автоматизации;
4. разработан и практически реализован алгоритм автоматического выбора рецензентов в виде дополнительного модуля издательской системе OJS.

К основным процессам, связанным с деятельностью авторов и редколлегии электронного научного журнала на начальном этапе, традиционно относят: представление, рецензирование и редактирование публикации; поиск и навигацию. К редакционным процессам относятся классификация, аннотирование, метаописание, объединение в коллекцию, опубликование. Имеется также ряд специфических процессов, характерных для функционирования электронного научного журнала (подробнее см. [5]): конвертирование в различные форматы представления, распространение, синдикация, рассылка уведомлений, новые поступления, харвестинг, статистика использования, взаимодействие с институциональными репозиториями, контроль доступа, подписка, долгосрочное хранение.

2.1 Обзор существующих издательских систем с открытым исходным кодом

К настоящему времени разработано достаточно много ИС автоматизации деятельности издательств, которые можно условно разделить на системы с открытым и закрытым исходным кодом. В первом случае, имея навыки и знания определенного языка программирования, специалист в области информационных

технологий имеет возможность изменить функционал системы по своему усмотрению. ИС с закрытым кодом не предоставляют возможности их изменения, поведение системы можно изменить, только варьируя заранее заданные настройки.

Назовем основные информационные системы управления электронными научными журналами (см., напр., [3], [6]).

Open Journal System (OJS) (<http://pkp.sfu.ca/?q=ojs>) – программная система с открытым исходным кодом для управления электронными научными журналами, созданная в рамках проекта Public Knowledge Project (<http://pkp.sfu.ca/about>) в Канаде университетами Саймона Фрейзера (Simon Fraser University), Британской Колумбии (University of British Columbia), Советом университетских библиотек Онтарио (Ontario Council of University Libraries) и в США Школой образования в Стэнфордском университете (School of Education at Stanford University), университетом Питтсбурга (University of Pittsburgh) и Калифорнийской электронной библиотекой (California Digital Library). OJS представляет собой единую платформу для управления электронными журналами и настраивается как облачный сервис, а также может развертываться и управляться локально; все бизнес-процессы настраиваются непосредственно редакторами каждого конкретного издания.

Digital Publishing System (DPubS) (<http://dpubs.org/>) – свободно распространяемая информационная система для онлайн-публикации академических научных и образовательных журналов, трудов конференций и монографий. Создана в 2004 – 2008 гг. Корнельским университетом (Cornell University) и университетом Пенсильвании (Pennsylvania State University). Система DPubS представляет собой набор взаимосвязанных сервисов и имеет модульную архитектуру. Отметим редакционный сервис, обеспечивающий первоначальную загрузку статей и передачу их рецензентам.

Сравнение систем OJS и DPubS проведено в [7].

ePublishing Toolkit (ePubTK) (<https://dev.livingreviews.org/projects/epubtk#>) – программный комплекс издательских инструментов, разработанный Обществом Макса Планка (Max Planck Society, <https://dev.livingreviews.org/projects/epubtk/>) для управления электронными научными журналами онлайн-издательства Living Reviews (www.livingreviews.org).

GAPWorks (<http://gapworks.berlios.de/>) – издательская системы, созданная в рамках проекта немецких академических издательств (German Academic Publishers, GAP). В системе GAPWorks имеются компоненты, обеспечивающие поддержку процесса рецензирования.

Ambra Publishing System (Ambra) (<http://www.topazproject.org/trac/wiki/Ambra>) – веб-приложение для публикации материалов исследований во всех областях науки; имеет сервис-ориентированную архитектуру. Информационная модель системы Ambra основана на платформе Topaz, в качестве хранилища данных используются специально настроенные репозиторий FEDORA (www.fedora-commons.org) и СУБД Mulgara (www.mulgara.org). Разработана некоммерческой организацией Topaz (www.topazproject.org) и непосредственно связана с деятельностью Публичной научной библиотеки (Public Library of Science, PLOS, www.plos.org).

Drupal E-Journal (<http://drupal.org/project/ejournal>) – модуль управления электронным журналом, созданный для известной системы управления контентом Drupal. Поскольку система Drupal E-Journal архитектурно является отдельным модулем Drupal, то возможно совместное использование с ней других надстроек и модулей Drupal.

HyperJournal (<http://www.hjournal.org>) – ИС, созданная Европейским исследовательским объединением (Groupement de Recherche Europeen, GDREplus) при поддержке следующих организаций: Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) и Dipartimento di Scienze della Politica, University of Pisa. Она позволяет создавать и поддерживать веб-ориентированный электронный журнал, а одной из ее особенностей является поддержка полной анонимности статей, предоставляемых на экспертизу, а также анонимности рецензентов. Одним из недостатков можно считать то, что согласно алгоритму RDFGrowth[U1] система успешно функционирует только в том случае, если информация обновляется не очень часто. Также стоит отметить, что один установленный экземпляр системы способен поддерживать только один электронный журнал [4].

2.2 Модель издательской системы в нотации IDEF0

Применение нотации IDEF0 (см., напр., [10]) при построении модели информационно-издательской системы обусловлено тем, что данная нотация обеспечивает наибольшую наглядность взаимосвязи внутренних процессов системы.

Как известно [14], разработка любой ИС начинается с этапа проектирования – в первую очередь строится модель конкретной предметной области, отражающая объекты информационной системы и связи между ними. Принципы обработки информации для редакционно-издательского комплекса по ряду ключевых процессов не отличаются от принципов обработки информации любого типа. В связи с тем, что информация (в том числе научная) постоянно обновляется, ИС должна максимально быстро и качественно ее обрабатывать. Поэтому модель должна отображать всевозможные аспекты анализируемой системы.

Анализ информации, поступающей в издательство, а также пути ее поступления подробно рассмотрены в [16] – подробно описаны поставщики информации и информационные связи между читателями и издани-

ем. Такой подход лучше всего применим в случае общественных газет, выпускаемых как в электронном, так бумажном виде, причем акцент сохранен за бумажным вариантом. Для “чисто” электронного издательства традиционные подходы к издательскому делу не подходят – развитие ИКТ внесло свои поправки и в этом направлении.

Для научного журнала главными и единственными поставщиками информации являются люди, занимающиеся наукой, в связи с этим “отпадает” требование поиска источников информации.

Общий вариант модели процессов ИС приведен на рисунке.

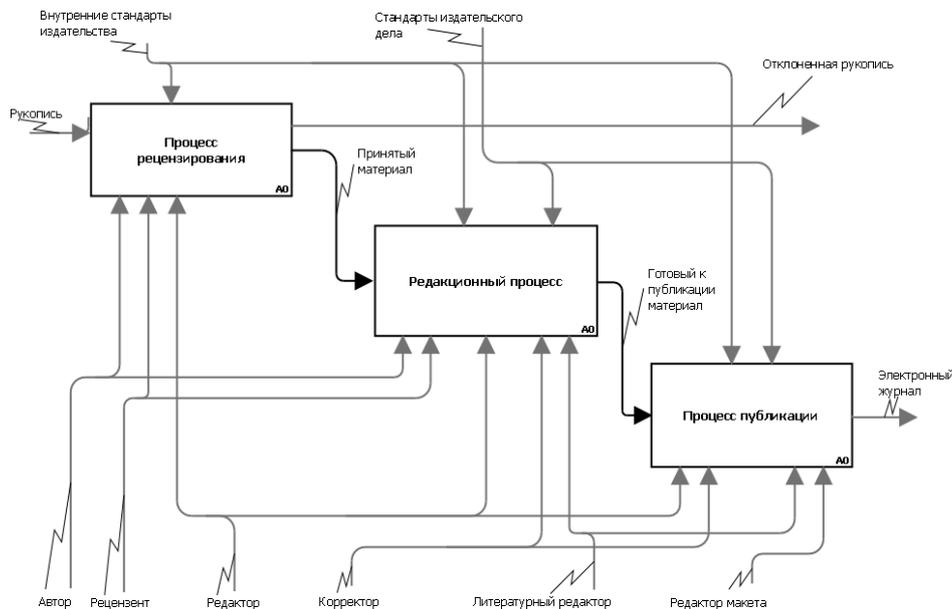


Рис. 1: Модель редакционно-издательского процесса в нотации IDEF0.

Все внутренние процессы ИС можно разделить на три группы: процессы рецензирования, редакционный процесс и процесс публикации.

Важной отличительной особенностью работы редколлегии научного журнала являются независимое рецензирование и, как следствие, наличие группы рецензентов-экспертов в предметных областях, определяемых тематикой журнала. Выбор рецензентов – достаточно сложная задача, которую, как правило решает главный редактор журнала, учитывающий при этом тематику рецензируемой работы, а также количество работ, находящихся у рецензента.

Процесс научного рецензирования – наиболее длительный этап в цепочке прохождения статьи в редакции научного журнала (от рукописи до публикации). В печатных научных журналах этот процесс мог затягиваться на 2 – 3 года, причем часто основная трудность заключалась в подборе рецензентов. Автоматизация процесса выбора рецензентов из базы экспертов с учетом не только компетенции эксперта, но и количества рецензируемых ими работ позволит существенно сократить сроки рецензирования. Отметим, что система автоматического назначения рецензента была создана и успешно использовалась в электронном журнале Lobachevskii Journal of Mathematics [17].

Вместе с тем, автоматический подбор рецензентов – только часть процесса автоматизации, необходимы дополнительные инструменты рецензирования, обеспечивающие получение наукометрических данных, поиск по статьям близкой тематики, сравнение представленных результатов с опубликованными ранее, в частности, с целью выявления заимствований и оценки полноты ссылок.

Еще одна особенность процессов рецензирования – необходимость укладываться в определенные временные рамки, чтобы научная статья “не потерялась” после ее подачи в редакцию. Структуру, обеспечивающую “контроль времени”, назовем системой контроля сроков. Эта система должна функционировать на всех этапах редакционно-издательского процесса (РИП) (подробнее см. ниже в п. 3.1).

Если научная статья прошла процесс рецензирования и получила положительные отзывы, она переходит на следующую ступень РИП – редакционный процесс. На этом этапе происходят литературное редактирование статьи и ее перевод в форматы, поддерживаемые ИС (pdf, html и др.). После этого рассматриваемая статья проходит техническое редактирование (при обнаружении ошибок вновь подвергается редакционному процессу), здесь же определяется номер выпуска электронного журнала, в котором статья будет опублико-

вана.

Процесс публикации непосредственно включает в себя компиляцию подготовленного электронного издания, устранение недочетов и технических неточностей.

3 Технология расширения функционала OJS

Система OJS имеет модульную архитектуру, что позволяет разрабатывать собственные классы и модули. Она включает Model-View-Controller (MVC)-структуру и, как следствие, хранилище данных, а пользовательские интерфейсы и управляющие функции разделены на разные уровни взаимодействия.

Система OJS платформонезависима и может быть установлена как под ОС Windows, так и на Unix-ориентированных операционных системах. В OJS используются свободно распространяемые язык программирования PHP, веб-сервер Apache, а также СУБД (MySQL, PostgreSQL).

Расширить функционал системы можно с помощью модулей, имеющих специальный формат (см., напр., [18]). Имеется галерея модулей (<http://pkp.sfu.ca/support/forum/viewforum.php?f=28>), содержащая множество полезных инструментов, расширяющих возможности OJS.

При разработке плагина для OJS необходимо вначале определить его “тип”, например, плагины, определяющие способы авторизации, относятся к типу “плагин авторизации”, и при разработке файлы такого плагина должны быть расположены в директории \plugins\auth. Плагины, не попадающие ни в один из названных типов, определяются как “общие” и должны быть расположены в директории \plugins\generic.

При разработке плагина необходимо следовать таким правилам:

1. создать папку с именем предполагаемого плагина, определив его тип; все файлы плагина должны быть расположены в этой папке;
2. создать файл version.xml, определяющий служебную информацию о плагине: дата создания, версия, тип, имя и др.;
3. создать файл myPlugin.inc.php, где myPlugin – название плагина; в этом файле содержится код плагина;
4. создать файл index.php, основное назначение которого состоит в вызове файла плагина myPlugin.inc.php.

3.1 Особенности обработки математических текстов

Большая часть электронных математических коллекций состоит из неструктурированных текстов в различных форматах. Ведущими мировыми издательствами физико-математической литературы, в том числе российскими, принята TeX-нотация. Теговая система TeX-документа позволяет придать ему структурную выразительность, недоступную другим системам нотации, TeX-нотация обладает практически всеми необходимыми компонентами для создания семантической разметки. Это особенно важно при создании процедур автоматической обработки математических документов электронной коллекции и использовании программ конвертации.

Для включения TeX-документов в систему OJS необходимо расширить функционал системы путем подключения специальных модулей, одним из которых является плагин, описанный в [18].

4 Автоматизация процесса экспертной оценки

Информационно-издательская система является информационной системой, и многие ее процессы необходимо автоматизировать, чтобы свести к минимуму вмешательство человека в тонкости редакционно-издательского процесса. Одним из таких процессов является выбор экспертов для рецензирования научной статьи, поступившей в журнал.

4.1 Алгоритм автоматизации экспертной оценки

Алгоритм основан на использовании ключевых слов, наличие которых позволяет достаточно точно обозначить область научных исследований представленной статьи и соотнести ее с компетенциями экспертов.

В каждой научной работе можно выделить отдельные ключевые слова, характеризующие ее с точки зрения научной специализации. Аналогично рецензентам как людям, занимающимся научными исследованиями в отдельных направлениях, также можно поставить в соответствие те научные специализации, в которых рецензенты являются экспертами. Чтобы автоматизировать процесс выбора экспертов, необходимо задать соответствия между множеством ключевых слов рассматриваемых научных работ и множеством специализаций рецензентов. К решению данной проблемы можно подойти различными способами.

Наиболее простым (в плане технической реализации) является выделение одного из указанных множеств в качестве основного. При таком подходе в качестве основного целесообразно взять множество специализаций рецензентов, и для каждой научной статьи определять несколько ключевых слов из множества специализаций.

Чтобы автоматизировать процесс экспертной оценки, необходимо организовать форму составления рецензий в виде системы “принять – отказать – доработать”. Форму отзыва рецензента целесообразно расширить за счет добавления комментариев для выяснения мотивации проведенной оценки.

С точки зрения системы контроля сроков целесообразной представляется организация рейтинговой системы работы рецензентов: если рецензент вовремя готовит экспертную оценку, то его рейтинг увеличивается.

Кроме вышеназванных шаблонов в системе должна присутствовать шкала загруженности рецензента. Данная мера вводится потому, что рецензентами научных статей, как правило, выступают преподаватели вузов и сотрудники НИИ, у которых, кроме работы в качестве рецензентов, имеется много других обязанностей. Учитывая этот факт, необходимо ввести отдельный параметр, характеризующий максимальное число статей, одновременно находящихся у каждого рецензента. Следует учесть также, что рецензент, зарегистрированный в системе, одновременно может оказаться и автором научных работ, т. е. следует добавить дополнительное условие, чтобы ИС не выбирала в качестве рецензента научной работы ее автора.

Одной из наиболее сложных структур системы экспертной оценки является алгоритм учета истории рецензирования. Эта история должна храниться в системе, и отбор рецензентов должен осуществляться с ее учетом, чтобы ИС не устанавливала одного и того же рецензента для оценки работ одного и того же автора. История рецензирования накладывает на алгоритм автоматизации выбора эксперта требование организации циклического процесса, чтобы учесть тот факт, что в результате работы алгоритма для экспертизы статьи может быть не выбран ни один рецензент.

Обобщая вышесказанное, получаем следующий алгоритм автоматизации выбора эксперта:

1. формирование входных параметров – как правило, в качестве входного аргумента выступает идентификатор научной работы (или первичный ключ сущности “научная работа” на языке баз данных);
2. формирование общего списка рецензентов – осуществляются выборка из базы данных всех имеющихся рецензентов либо выборка рецензентов, удовлетворяющих минимальным условиям (по специализации, загруженности и условию “рецензент не может быть автором”);
3. выборка рецензентов из общего списка по заданным правилам – отбор тех рецензентов из имеющегося списка, которые лучше всего удовлетворяют всем условиям (большее число совпадений по ключевым словам, минимальные уровни загруженности, учет рейтинга рецензента, учет истории рецензирования);
4. рассылка уведомлений рецензентам и авторам, редакторам, запись результатов на уровне баз данных.

4.2 Модуль автоматического назначения рецензентов

Система OJS предоставляет возможности изменения своего функционала путем добавления плагинов, составленных по строго определенным правилам. Так как данная ИС написана на языке PHP, имеется возможность изменять функционал системы и без специального инструментария OJS.

Чтобы применить алгоритм автоматического выбора рецензентов научной статьи, необходимо провести ряд изменений как в программном коде OJS, так и в используемой базе данных. Имея возможность включения в работу системы OJS плагина на основе использования только языка программирования PHP, нами был изменен файл `peerReview.tpl`: к пункту “Выбрать рецензента” добавлен новый пункт меню “Automatic selection of the reviewer”, отсылающий систему по внешней ссылке. Параметры работы скрипта можно передать методом GET, поэтому идентификатор статьи можно отправить через адресную строку, указав абсолютный путь к файлу скрипта:

```
<form>
  {assign var="idij" value=$submission->getId()}
  <a href='http://system2.ru/plugins/generic/autoReviewer/myPlugin.inc.php
    ?iu={$idij}'>Automatic selection of the reviewer</a>
</form>
```

После активации плагина считываем значение параметров из адресной строки и получаем список первичных ключей таблицы “roles”, значения “user_id” которых равно 4096 (т. к. данные обо всех пользователях OJS хранятся в одной таблице, каждая группа пользователей идентифицируется определенным натуральным числом, и роль рецензента определяется числом 4096).

Далее по алгоритму формируем массивы, состоящие из идентификаторов рецензентов и уровня их загруженности, осуществляем сортировку по возрастанию загруженности и отбираем ограниченное число рецензентов *m*.

Значения загруженности отобранных рецензентов увеличиваем на заданную величину и записываем это значение в базу данных. Формируем переменные “\$newdate” и “\$newdate2” для вычисления текущего времени и времени, к которому истекает срок подачи рецензии (по умолчанию, OJS для составления рецензии выделяет 4 недели):

```
$newdate=date("Y-m-d H:i:s");
$newdate2=date ('Y-m-d 00:00:00', strtotime ('+4 weeks'));
```

Теперь остается только установить связь между статьей и рецензентами, для этого в таблице “review_assignments” создаем m записей. В поля submission_id (идентификатор статьи), reviewer_id (идентификатор рецензента), date_assigned (текущее время) и date_due (конечная дата подачи рецензии) записываем значения ‘\$article’, ‘\$massiv_index[\$index]’, ‘\$newdate’, ‘\$newdate2’.

Чтобы не оставаться на странице написанного скрипта и организовать имитацию системы OJS, осуществляем возврат при помощи JavaScript после окончания всех манипуляций с данными:

```
echo("<script>location.href='http://system2.ru/index.php/first/editor/
      submissionReview/$article'</script>");
```

5 Заключение

Предложены модель редакционно-издательского процесса и алгоритм автоматизации выбора экспертов. Практическая реализация алгоритма осуществлена для системы Open Journal Systems.

Работа поддержана при финансовой РФФИ (проекты №№12-07-00667 и 12-07-97018-р_поволжье).

Литература

- [1] P. D’Arcy. *CIO strategies for consumerization: The future of enterprise mobility*. – Dell Power Solutions Special Issue, Dell Inc., 2012. – P. 22-25. URL: <http://www.dell.com/Learn/us/en/555/power-solutions-magazine-2012-special-issue>.
- [2] J. Gantz, D. Reinsel. *The Digital Universe in 2020: Big Data, Bigger Digital Shadows, and Biggest Growth in the Far East*. – IDC Digital Universe Study, December, 2012. URL: <http://www.emc.com/leadership/digital-universe/iview/index.htm>.
- [3] *Tools and Platforms*. URL: <http://www.openoasis.org/>.
- [4] M. Barbera, F. Donato, C. Morbidoni, G. Tummarello. *HyperJournal software, PHP scripting and Semantic Web technologies for the Open Access*// In ESWC: European Semantic Web Conference, Heraklion (Greece), 2005. URL: <http://eprints.rclis.org/8295/>.
- [5] А.М. Елизаров, Е.К. Липачёв, Ю.Е. Хохлов. *Технологии облачных вычислений для поддержки функционирования электронного научного журнала*// Материалы Межд. науч.-практ. конф. ИТОН-2012. – Казань: Казанский ун-т, 2012. – С. 82-85. URL: <http://vuz.exponenta.ru/PDF/NAUKA/Sbornik12ito.pdf>.
- [6] M. Cyzyk, S. Choudhury. *A survey and evaluation of Open-Source Electronic Publishing Systems*. – Baltimore: The Johns Hopkins University, 2008. – 70 p.
- [7] R.G. Samuels, H. Griffy, K. Kaliebe. *Digital Publishing Systems Comparison Report. A review of DPubS and OJS*, 2008. URL: http://library.osu.edu/sites/techservices/sri_epublishing_RecomendationReport_final.rtf.
- [8] Д.В. Соловяненко. *Модель общегосударственной платформы научной периодики на базе Open Journal Systems*// Межд. науч. конф. MegaLing’2011 “Горизонты прикладной лингвистики и лингвистических технологий”, Киев, 26 – 30 сентября 2011 г.
- [9] *Open Journal Systems. Public Knowledge Project*. URL: <http://pkp.sfu.ca/ojs/>.
- [10] *Методология функционального моделирования IDEF0. Руководящий документ*, Госстандарт России. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2000. – 75 с.
- [11] А. Данилин, А. Слюсаренко. *Архитектура и стратегия. “Инь” и “янь” информационных технологий предприятия*. – М.: Интернет-ун-т информ. технологий, 2005. – 504 с.
- [12] Д.С. Кулябов, А.В. Королькова. *Введение в формальные методы описания бизнес-процессов*. – М.: РУДН, 2008. – 173 с.
- [13] Ф.У. Скотт, Б. Мэйплс, Т. Лэндгрейв. *Принципы проектирования и разработки программного обеспечения*. – М.: “Русская редакция”, 2002. – 736 с.
- [14] Н.В. Смирнов. *Проектирование информационных систем*. – СПб: БГТУ, 2008. – 146 с.
- [15] П.А. Богомяков, А.М. Федотов, Ю.И. Шокин. *Электронные журналы по математике*. – Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН. URL: <http://www.nsc.ru/win/elbib/journals/ct/jct.htm>.
- [16] И.П. Бесценный, Е.Н. Султанкин. *Объектно-ориентированный анализ информационной системы для периодических изданий*// Математические структуры и моделирование. – 2011. – Вып. 23. – С. 49-57.
- [17] А.М. Елизаров, Е.К. Липачёв, М.А. Малахальцев. *Веб-технологии в работе электронного математического журнала Lobachevskii Journal of Mathematics*// Научный сервис в сети Интернет: многоядерный компьютерный мир. 15 лет РФФИ. Труды Всерос. науч. конф. – М.: Изд-во МГУ, 2007. – С. 355-356.
- [18] S. Chen. *ETEXGalley Plugin for Open Journal Systems*. – Simon Fraser University and Zhejiang University, 2010. – 30 p.

СОЗДАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ: ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ГОРИЗОНТАЛЬНО

Аян Месут¹

Муниципальное автономное образовательное учреждение Гимназия-интернат
№4, Казань

¹E-mail: ayanmesut@gmail.com

Знакомство с программой

Введем начальную скорость и переносим поршень.

Движение тела,
брошенного горизонтально.

сила	30
нач. скорость	30
время	
расстояние	
введите время	<input type="text"/>
скорость	
расстояние X	
расстояние Y	

Рис. 1: Изменение размера и цвета страницы

Во время падения мяча можно проследить за изменениями скорости и времени.

Движение тела,
брошенного горизонтально.

сила	0
нач. скорость	30
время	8.60
расстояние	258.05
введите время	<input type="text"/>
скорость	
расстояние X	
расстояние Y	

Рис. 2: Изменение размера и цвета страницы

Так, задав время, мы можем узнать расстояние и скорость. Нажимаем кнопку **вычислить**.

Подготовка интерфейса

Создайте следующие объекты на странице:

- Buttons: *calc_btn*.
- Input Text: *enter_time*.
- Dynamic Text: *power*, *initSpeed*, *flytime*, *dist*, *timeSpeed*, *timeistX*, *timeDistY*.
- MovieClip: *ball_mc*, *stick_mc*.

Добавление кодов

Создаем переменные.



Рис. 3: Изменение размера и цвета страницы

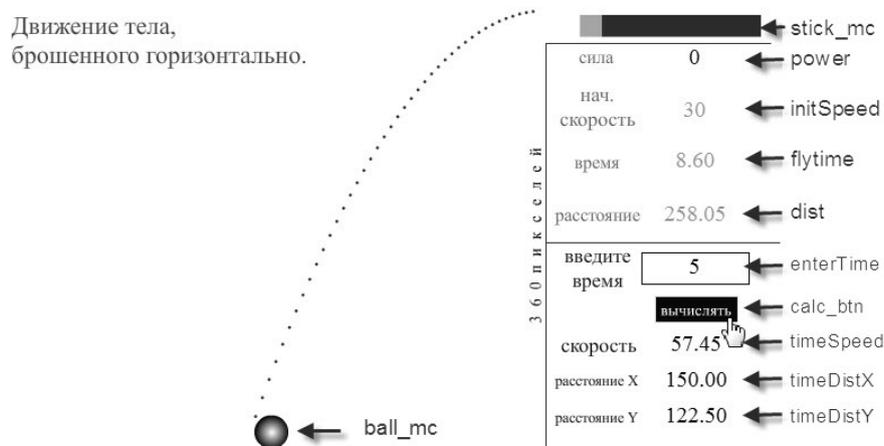


Рис. 4: Изменение размера и цвета страницы

```

var x0, P, stickX0, prevX, V0, ballX, ballY:Number;
var h:Number = 350;
var g:Number = 9.8;
var timer:Number;
var track:Boolean;

```

При нажатии на поршень, функция `resetting` начинает работать. Обратитесь к части 2 главы 1, чтобы узнать, как работает поршень.

```

stick_mc.stickbut_btn.addEventListener(MouseEvent.CLICK, resetting);
function resetting(event:MouseEvent):void {
    ball_mc.x = 490;
    ball_mc.y = 10;
    power.text = "0";
    x0 = mouseX;
    stickX0 = stick_mc.x;
    track = true;
    P = 0;
    timer = 0;
    stage.addEventListener(MouseEvent.CLICK, dragging);
    stage.addEventListener(MouseEvent.CLICK, stopdragging);
}
function dragging(event:MouseEvent):void {
    if (track)

```

```

{
P = (mouseX - x0);
initSpeed.text = String(P);
if (P>0)
{
power.text = String(P);
stick_mc.x=mouseX;
}
}
}

function stopdragging(event:MouseEvent):void {
track = false;
stick_mc.x = stickX0;
power.text = "0";
stage.addEventListener(Event.ENTER_FRAME, moveBall);
}

```

Отпустив поршень, функция `moveBall` начинает работать.

```

function moveBall(e:Event) {

    Увеличиваем таймер.

timer+=0.2;

Начальная скорость принимает значения от силы.

V0 = P;

Если начальная скорость больше 2 и положение у мяча меньше, чем 360, мяч продолжает движение.

if (! track && V0>2 && ball_mc.y<=360)
{
ballX = V0 * timer;
ballY = 1/2 * g * timer * timer;
ball_mc.x = 490 - ballX;
ball_mc.y = 10 + ballY;
dist.text = String(490 - ball_mc.x);
flytime.text = String(timer.toFixed(2));
stage.addEventListener(Event.ENTER_FRAME, putpoints);
}
}

```

Пока мяч движется, точки ставятся за мячом, чтобы показать путь. Точка `nokta` является `movieclip`. Она не размещена на странице. Она экспортируется из библиотеки под именем `noktamc` [?].

```

function putpoints(e:Event) {

Точка берется из библиотеки.

var newNokta:MovieClip = new noktamc();
stage.addChild(newNokta);

Точка помещается на месте, где мяч.

newNokta.x = ball_mc.x;
newNokta.y = ball_mc.y;
}

```

При нажатии на кнопку `calc_btn`, функция `calculating` начинает работать.

```
calc_btn.addEventListener(MouseEvent.CLICK, calculating);  
function calculating(event:MouseEvent):void {
```

Некоторые локальные переменные определены.

```
var Vx, Vy, timeSpeedCalc, timeX, timeY, enterTimer:Number;
```

Введенное время берется и присваивается переменной `enterTimer`.

```
enterTimer = Number(enterTime.text);
```

Скорость полета мяча вычисляется в X и Y направлениях.

```
Vx = P;
```

```
Vy = g * enterTimer;
```

Скорость в заданное время рассчитывается:

```
timeSpeedCalc = Math.sqrt(Vx*Vx+Vy*Vy);  
timeSpeed.text = String(timeSpeedCalc.toFixed(2));
```

Расстояние, на заданное время рассчитывается:

```
timeX = Vx * enterTimer;  
timeY = 1/2 * g * enterTimer * enterTimer;  
timeDistX.text = String(timeX.toFixed(2));  
timeDistY.text = String(timeY.toFixed(2));  
}
```

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ АНИМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТРУБОК В ЛОКАЛЬНО ЕВКЛИДОВЫХ И ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.А. Бушкова¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: vbushkova@inbox.ru

Аннотация. В статье рассмотрены принципы создания и исследования анимационных моделей релятивистских систем.

Разработан комплекс программных процедур, позволяющих получить упорядоченную систему уравнений геодезических и основанного на этой системе численного решения и графического представления решения.

Программный комплекс является приложением к математическому пакету Maple (версии 13-15) и предназначен для автоматизированного нахождения и построения геодезических линий и их трубок в трехмерных и четырехмерных римановых пространствах по заданной метрике. При этом автоматически формируется задача Коши для линии или геодезической трубки.

Визуализация геодезической в локально евклидовом пространстве может осуществляться как в статистическом 3-х мерном формате, так и в виде 3-х мерной оснащенной динамической графики. При этом геодезические линии трубки автоматически окрашиваются в разные цвета, что облегчает анализ модели. В псевдоевклидовом пространстве визуализация геодезической линии может быть представлена в одной из четырех трехмерных проекций четырехмерного пространства. Программа оптимизирует графические параметры, например, область изображения, а также согласовывает положение геодезической линии с визуализированной частью поверхности. Программный комплекс характеризуется простотой ввода программ, которые задаются одной командой с помощью задания метрики пространства и начальных условий, полной автоматизацией, а также возможностью исследования геодезических в произвольных трехмерных и четырехмерных римановых пространствах и возможностью оснащенной динамической визуализации геодезических линий и их трубок.

Исследование движения геодезической трубки позволяет извлекать дополнительную информацию о свойствах трехмерного и четырехмерного риманова пространства.

Литература

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля* М.: Наука, 1947. – 534 с.
- [2] Дж. Синг, *Общая теория относительности* М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 431 с.
- [3] Дж. Синг, *Классическая динамика* М.: Издательство физико-математической литературы, 1963. – 448 с.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р.Ш. Гайнанова¹, О.А. Широкова²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: rgajnanova@mail.ru, ²E-mail: oshirokova@mail.ru

Аннотация. Компьютерное моделирование средствами объектно-ориентированного программирования предполагает разработку визуального проекта решения задачи.

В статье рассматривается разработка визуального проекта для решения некоторых задач аналитической геометрии средствами объектно-ориентированного программирования в Delphi [1, 2, 3], которые предлагаются студентам для разработки в числе многих других задач.

Необходимо создать проект для решения следующих задач аналитической геометрии в пространстве и на плоскости:

1. вычисление расстояния между двумя точками $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ в декартовой системе координат:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}; \quad (1)$$

2. вычисление координат середины отрезка P_1P_2 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}; \quad (2)$$

3. вычисление координат центра тяжести n материальных точек. Координаты центра тяжести $P = (x, y, z)$ системы n материальных точек $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, ($i = 1..n$) с массами m_i вычисляются по формулам:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad (3)$$

4. вычисление ориентированной площади многоугольника с вершинами в точках $P_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1..n$):

$$S = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)] \quad (4)$$

Для разработки визуального проекта решения предложенных задач необходимо создать модуль `Massiv` с описанием класса `TMas`, в котором реализованы операции над координатами точек, необходимые для их решения. Особенности построения модуля `Massiv` описаны ниже. В этом модуле используется свойство `Property Elem` [4].

При инициализации массива в динамической памяти выделяется участок, в котором последовательно будут размещены его элементы. Указатель `Orig` на начало этого участка определен в секции `Protected`, поэтому он доступен потомкам класса `TMas`. Свойство `Property Elem` и методы `OutElem` и `InpElem` - для записи и чтения значений элементов определены в секции `Public`, а значит доступны в других модулях и программах.

Остановимся подробно на описании метода определения адреса динамической памяти для j -го элемента массива: метода `ElemP` [4].

Метод `ElemP` позволяет интерпретировать байты памяти, отведенные под элемент с номером j , как значение вещественного типа. Он записывается в секции `Protected`, поэтому он доступен потомкам класса `TMas`.

При описании метода `ElemP` используются:

- функция `Sizeof(x)` - дает размер аргумента x в байтах;
- функция `Ptr(x:integer)` - стандартная функция типа указатель, которая преобразует адрес памяти (адрес=сегмент+смещение) в указатель.

```
ElemP=Ptr(LongInt(Orig) +(j - jMin)*Sizeof(Real));
```

вычисляется как функция `Ptr` от базового адреса (указатель `Orig` на начало области динамической памяти + смещение на $j - jMin$, умноженное на размер каждого элемента в байтах).

В модуле `Massiv` описываются конструктор и деструктор.

- а) описание конструктора:

```
Constructor TMas.Create (jMin_, jMax_:integer);
begin inherited
Create;{вызов унаследованного конструктора от предка}
kJMin:=jMin_;
jMax:=jMax_; GetMem(Orig,(jMax -jMin+1)*Sizeof(Real)); Clearance;
end;
```

б) описание деструктора:
 Destructor TMas.Destroy;
 begin FreeMem(Orig,(jMax - jMin + 1)*Sizeof(Real));
 inherited Destroy;
 {вызов унаследованного деструктора от предка} end;

Процедуры GetMem и FreeMem выделяют и освобождают в динамической памяти область размера $(jMax - jMin + 1) * Sizeof(Real)$ и присваивают адрес этой области указателю Orig. Метод Clearance очищает массив.

Модуль Massiv описывает двухместные операции Add, Sub, Mul. Здесь действует соглашение: при выполнении двухместной операции первым операндом является сам объект, вторым операндом - тот, который является формальным параметром метода. Результат сохраняется в полях первого операнда.

Полное описание модуля Massiv, в котором описан класс TMas с операциями над координатами точек, необходимыми для решения задач аналитической геометрии, описано ниже:

```
unit Massiv;
interface
  type Real=single;
      RealP=~Real;

  type TMas=class
  protected
    Orig:pointer; {поле Orig используется
как указатель адреса динамической области} jMin, jMax:integer;
    function ElemP (j:integer):RealP; {метод определения адреса j-го
элемента массива}
  public
    function OutElem (j:integer):Real;
    procedure InpElem(j:integer;r:Real); {методы для чтения и записи
j-го элемента массива}
    constructor Create(jMin_,jMax_:integer);
    destructor Destroy; override; {деструктор перекрыт для динамического
замещения в классе потомке}
    property Elem[j:integer]:Real read
    OutElem write InpElem; default;
    procedure Clearance; {метод для
создания нулевого массива} procedure Add(x:TMas); {метод сложения
элементов массивов}
    procedure Sub(x:TMas); {метод вычитания
элементов}
    procedure Mul(x:TMas); {метод умножения элементов}
    procedure Mulx(x:real); {метод умножения элемента на число}
    procedure Divx(x:real); {метод деления элемента на число}
    Function Sum:real; {метод суммирования элементов массива}
    Function PMn(x:TMas;y:TMas):real; {метод вычисления площади
ориентированного многоугольника} end;

  implementation{исполняемая часть}
    Uses Uses_Massiv;

    function TMas.OutElem(j:integer):real; begin Result:=ElemP(j)^;
{результату присваивается содержимое j-го элемента массива} end;
    procedure TMas.InpElem(j:integer;r:real); begin ElemP(j)^:=r;
{содержимому j-го элемента массива присвоено значение r} end;
    function TMas.ElemP; begin
    ElemP:=Ptr(LongInt(Orig)+(j-jMin)*Sizeof(Real));
    end;
    constructor TMas.Create; begin inherited Create; {вызов
унаследованного конструктора} jMin:=jMin_; jMax:=jMax_;
    GetMem(Orig,(jMax - jMin + 1 )*Sizeof(Real));
```

```

Clearance;
end;
destructor TMas.Destroy; begin FreeMem(Orig, (jMax - jMin +
1)*Sizeof(Real)); inherited Destroy; {вызов унаследованного
деструктора} end;
procedure TMas.Clearance; var j:integer; begin for
j:=jMin to jMax do
ElemP(j)^:=0.0;
end;
procedure TMas.Add; var j:integer; begin for j:=jMin to jMax do
ElemP(j)^:=ElemP(j)^+x.ElemP(j)^;
end;
procedure TMas.Sub;
var j:integer;
begin for j:=jMin to jMax do
ElemP(j)^:=ElemP(j)^-x.ElemP(j)^;
end;
procedure TMas.Mul(x:TMas); var j:integer; begin for j:=jMin to
jMax do ElemP(j)^:=ElemP(j)^*x.ElemP(j)^; end;

procedure TMas.Mulx(x:real); var j:integer; begin for j:=jMin to
jMax do ElemP(j)^:=ElemP(j)^*x; end;

procedure TMas.Divx(x:real); var j:integer; begin for j:=jMin to
jMax do ElemP(j)^:=ElemP(j)^/x; end;
Function TMas.Sum:real; var s:
real; j: integer; begin s:=0; for j:=jMin to jMax do s:=s+ElemP(j)^;
Sum:=s; end;
Function TMas.PMn(x: TMas; y: TMas):real; var s: real;
j: integer; begin
s:=0;
for j:=jMin to jMax-1 do
begin
ElemP(j)^:=(x.ElemP(j)^-x.ElemP(j+1)^)*(y.ElemP(j)^+ y.ElemP(j+1)^);
s:=s+ElemP(j)^;
end;
ElemP(jMax)^:=(x.ElemP(jMax)^-x.ElemP(jMin)^)*(y.ElemP(jMax)^+
y.ElemP(jMin)^);
PMn:=(s + ElemP(jMax)^)/2;
end;

end.

```

Данный модуль может быть сохранен в библиотеке модулей и использован при решении других задач.

Интерфейс проекта создается с помощью меню, размещенного на форме. Меню диалогового окна (Рис.2) позволяет решать все четыре поставленные задачи:

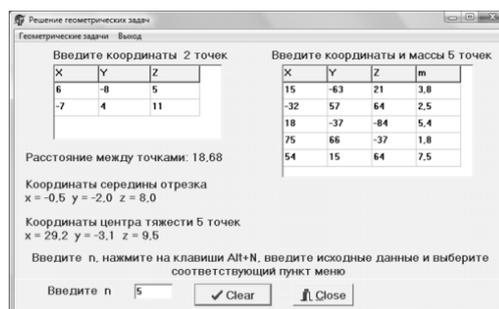


Рис. 1: Диалоговое окно с решением задач (1),(2),(3).

Для решения первых двух задач на окне формы размещена таблица StringGrid1 для ввода исходных данных: координат двух точек. Число строк и столбцов таблицы StringGrid1 устанавливается процедурой обработки события OnActivate, которое происходит при активизации формы приложения. Для решения третьей и четвертой задач на форме установлены: компонент Edit для ввода количества точек и компонент StringGrid2 для ввода исходных данных. При вычислении координат центра тяжести n материальных точек компонент StringGrid2 будет содержать n строк и четыре столбца: три координаты и массы материальных точек. А при вычислении ориентированной площади многоугольника компонент StringGrid2 будет содержать n строк и два столбца, содержащих координаты x и y . Тогда, соответственно, в процессе решения вид формы будет меняться: с вида, показанного на рисунке 2, на следующий Рис.??:

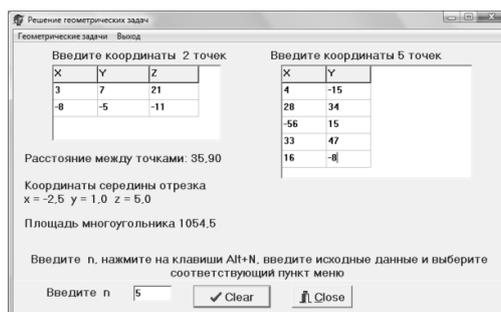


Рис. 2: Диалоговое окно с решением задач (1),(2),(4).

Таким образом, создание в Delphi проектов решения математических задач способствует формированию навыков объектно-ориентированного и визуального программирования моделей реальных объектов и структур.

Литература

- [1] Кормен Томас. Алгоритмы: построение и анализ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р.Ривест. - М. : МЦНМО, 2002. - 960с.
- [2] Дарахвелидзе П.Г., Марков Е.П. Программирование в Delphi 7. - СПб.: БХВ - Петербург, 2005- 784с.
- [3] Культин Н.Б. Основы программирования в Delphi 7. - СПб.: БХВ - Петербург, 2009.- 640с.
- [4] Плещинский Н.Б. Объектное программирование в Delphi. Учебное пособие. - Казань: Издательство КМО. - 1999. - 86с.

ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИКУМА РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ

Т.Ю. Гайнутдинова¹, О.А. Широкова²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: tgainut@mail.ru, ²E-mail: oshirokova@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются учебные базы данных геологическая, железнодорожный вокзал и абитуриент, которые используются при проведении практикума решения проблемно-ориентированных задач

При изучении студентами программного обеспечения необходимо овладение умениями и навыками по созданию баз данных. Несмотря на появление новых технологий в области управления базами данных (БД) и новых систем управления БД (СУБД), Microsoft Access 2010 остается одним из наиболее популярных продуктов в этой области. Это, прежде всего, связано с тем, что Microsoft при создании новых версий

сохраняет совместимость с предыдущими версиями. Кроме того, Microsoft Access 2010 предлагает пользователю дружелюбный интерфейс и во многих случаях обеспечивает интуитивное понимание пути решения поставленных задач и возникающих проблем.

В настоящее время термины БД и СУБД используются исключительно как относящиеся к компьютерам. В общем случае термин «БД» можно применить к любой совокупности связанной информации, объединенной вместе по определенному признаку (расписание поездов, книга регистрации покупателей и товаров). При этом в качестве БД рассматривается только набор данных, организованных определенным образом. Большинство БД для хранения данных используют таблицы. Каждая таблица состоит из строк и столбцов, которые в компьютерных БД называются записями и полями, соответственно. Основным назначением БД является быстрый поиск содержащейся в них информации.

В последнее время наибольшее распространение получили реляционные БД (РБД). В них информация хранится в одной или нескольких таблицах. Связь между таблицами осуществляется посредством значений одного или нескольких совпадающих полей. Каждая строка таблицы в РБД уникальна. Для обеспечения уникальности строк используются ключи, которые содержат одно или несколько полей таблицы. Ключи хранятся в упорядоченном виде, что обеспечивает прямой доступ к записям во время поиска.

Для взаимодействия пользователя с БД используются СУБД. Современные СУБД содержат: набор средств для поддержки таблиц и отношений между связанными таблицами; развитый пользовательский интерфейс, который позволяет вводить и модифицировать информацию. Выполнять поиск и представлять информацию в текстовом или графическом виде; средства программирования высокого уровня, с помощью которых можно создать собственные приложения.

В статье предлагаются для рассмотрения следующие учебные базы данных: «Геологическая БД», «Железнодорожный вокзал», «Абитуриент», которые используются при проведении практикума решения проблемно-ориентированных задач. При изучении геологической базы данных необходимо создать геологическую базу данных, в которой решаются следующие задачи:

- ввод, хранение и поиск информации по видам скважин, их кодам и замерам, а также типам пород;
- регистрация основных данных о скважинах;
- вычисление суммарного дебита эксплуатационных скважин;
- вычисление функции Баклея-Левретта;
- расчет гидропроводности пласта по нагнетательным скважинам;
- вычисление скорости фильтрации закачки воды;
- изготовление кнопочной формы для работы с базой данных.

При изучении базы данных «Железнодорожный вокзал» необходимо создать базу данных о железнодорожном вокзале. В этом задании необходимо ведение базы данных по поездом, расписанию движения поездов, пассажирах и билетах, а также выполнение следующих этапов:

- расчет времени прибытия и отправки поездов, определение типа поезда, пунктов отправления и прибытия;
- автоматизация процесса выдачи билета. Для этого необходимо хранить Ф.И.О. и паспортные данные пассажира, а также размер льгот. Кроме того, в билете указывается номер вагона, номер места, место отправления и место прибытия и дата получения билета;
- организация поиска в таблицах, формирование и печать отчетов;
- создание удобного и понятного интерфейса, включающего необходимые формы и отчеты.

При изучении базы данных «Абитуриент» необходимо решить следующие задачи:

- ввод, хранение и поиск информации об абитуриентах;
- регистрация основных данных о вузах, предпочитаемых абитуриентами;
- ведение учета оплаты абитуриентами подготовительных курсов;
- отслеживание результатов поступления и посещения занятий после поступления;
- организация перевода полученной базы в систему «Студент».

Учебные базы данных: «Геологическая», «Железнодорожный вокзал», «Абитуриент» помогут при проведении занятий в ходе практикума решения проблемно-ориентированных задач и овладении необходимыми навыками для дальнейшей профессиональной деятельности в области информационных технологий.

Литература

- [1] Могилев А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Информатика. - Москва. - 634 с.
- [2] Семакин И.Г., Хеннер Е.К. Информатика. Задачник- практикум в 2т. - Том 1. - М.: Лаборатория Базовых знаний, 2000. - 304 с.
- [3] Карчевский Е.М., Филиппов И.Е. Access 2010 в примерах. Учебно-методическое пособие КФУ. - 2011. - 118 с.
- [4] Угринович Н.Д., Босова Л.Л., Михайлова Н.И.. Практикум по информатике и информационным технологиям. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений. Изд. 2-е, испр. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. - 394 с.

ВНЕДРЕНИЕ ПРИНЦИПА МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ СВЯЗЕЙ В ШКОЛЬНЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС (НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ "ПОСТРОЕНИЕ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ")

А.М. Гатауллин, Ф.Ш. Зарипов¹

*Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань*

¹E-mail: farhat_zaripov@mail.ru

Введение. Внедрение методов математического моделирования в обучение школьников

Новые проекты стандартов школьного образования [3] предполагают использование компьютерных технологий и методов математического моделирования в обучении школьников.

Информационные и коммуникационные технологии, являясь одной из составляющих предмета подготовки будущего учителя математики и информатики, открывают возможности для создания эффективных методов и форм обучения, основанных на их использовании.

Осуществляя педагогическую деятельность, преподаватель (учитель) должен не только приобщить обучаемых к использованию информационных технологий в рамках учебного процесса, но и сориентировать на использование информационных технологий при решении жизненных задач. Основным подходом к внедрению новых школьных образовательных стандартов мы считаем использование в качестве методологической основы при разработке образовательных программ, концепцию деятельностного подхода. В соответствии с ней предметные (математические и информационно-компьютерные) и методические знания будущих учителей переплетаются в учебном процессе и направлены на умение решать прикладные задачи и использовать эти умения в процессе математического и компьютерного моделирования реальных процессов.

Рисунки 1 и 2 иллюстрирует различия между традиционным обучением и инновационном предлагаемом в нашем подходе подготовки учителей математики и информатики.



Рис. 1: При подготовке учителей по традиционной схеме каждая дисциплина преподается в отдельности, без учета междисциплинарных связей. студенты не обучаются использованию полученных знаний и не готовы к самостоятельной деятельности.



Рис. 2: При подготовке учителей на основе междисциплинарных связей основное внимание уделяется решению задач направленных на построение моделей, тем самым возникают обратные связи, стимулирующие изучение, как самого предмета - объекта моделирования, так и математики и информатики, играющих роль инструментов познавательного процесса.

Например, рассмотрим следующую задачу: "Составить математическую и компьютерную модель солнечной системы". Эту задачу способен решить как школьник старших классов, так и студент университета. Только решать ее они будут по-разному, в соответствии с уровнем своих знаний и представлений. Некоторые школьники, например, могут в качестве орбит взять окружности, другие прочитают в научной литературе, что орбитами планет являются эллипсы, а студенты задумаются о влиянии сил притяжения планет друг к другу... Но всех их будет объединять одно: чтобы решить эту задачу, необходимо повторить и изучить дополнительную литературу по физике, астрономии, математике, составить математическую модель, найти соответствующую компьютерную программу. Данный поиск информации приводит к возникновению процесса установления междисциплинарных связей (рис.2). Таким образом, решение такого рода задач способно создавать дополнительные стимулы к самостоятельной поисковой, познавательной и учебной деятельности, для развития мотивации, психологической самостоятельности учащихся.

Любая используемая программа для обучения должна быть естественным продолжением (обобщением) материала лекции, практического или лабораторного занятия. Поэтому преподаватель должен иметь возможность сам определять структуру и методические особенности программы. Более того, программа должна быть легко модифицируемой (изменяемой), причем желательно, чтобы эти изменения мог вводить сам педагог. **В идеале – программа должна быть создана самим преподавателем (либо группой преподавателей, объединенных общими методическими целями).**

Создание новых курсов по междисциплинарным связям и математическому моделированию - уже десятилетие находятся в центре пристального внимания авторов инноваций в области образования.

Авторы данной статьи рассмотрели возможность использования компьютера при разрешении ряда проблемных ситуаций, возникающих при обучении геометрии и ряда вопросов междисциплинарной связи геометрии и других дисциплин.

Проблемные ситуации при обучении геометрии и междисциплинарные связи

Развитие пространственных представлений учащихся является одной из важных задач школь-

ного курса геометрии. Актуально решение этой проблемы также в ряде смежных дисциплин: рисовании, черчении, географии, физики, химии и др. Однако в настоящее время многие учителя и методисты указывают на невысокий уровень пространственного воображения и пространственного мышления школьников [1]. Систематическая работа над формированием и развитием пространственных представлений приводит к улучшению ситуации только тогда, когда используется сочетание традиционных методов и компьютерных информационных технологий.

Для успешного изучения курса геометрии одним из необходимых условий является умение мысленно представлять геометрические образы в пространстве. Решение геометрических задач «в воображении» в школе практически не используется. Отсюда, при переходе от планиметрии к изучению курса стереометрии, у учащихся возникает немало трудностей при оперировании трехмерными объектами.

Решается эта задача несколькими способами. На начальной ступени образования геометрических представлений находят свое применение модели геометрических тел. После этого включаются в работу упражнения, которые направлены на оперирование мысленными представлениями геометрических фигур. В этом случае возникает ряд проблемных ситуаций (в области оперирования пространственными представлениями, соотношениями и зависимостями) связанных с тем, многие схематические изображения статического характера требуют в процессе их чтения оперирования динамическими пространственными образами. Компьютер может помочь ученику сделать первый шаг, позволив увидеть процесс создания искомого образа на экране.

При выборе того или иного программного обеспечения необходимо учитывать степень его освоенности педагогической средой. Это приводит как к более быстрому обмену опытом, так и к созданию творческих объединений учителей и преподавателей вузов, объединенных общими методическими целями.

К решению проблем обучения геометрии могут помочь компьютерные математические пакеты. Но какие математические пакеты можно внедрить при изучении геометрии в школе? Наиболее популярные математические пакеты в России являются **Maple**, **MathCAD**, **MathLAD**, **Mathematica** [2]. Но внедрить эти пакеты в школу затрудняет несколько факторов: дороговизна их лицензий; интерфейс состоит из ввода команд, которые учащиеся должны дополнительно изучать, а это драгоценное время учителя и ученика. Предпочтение дается бесплатным или уже имеющимся в вооружении учителя математическим пакетам. Речь идет о GeoGebra и программы учебно-методический комплект (УМК) «Живая Математика» (ЖМ), который сформирован на основе программы Geometry's Sketchpad (в русском переводе «Живая Математика»), разработанной фирмой Key Curriculum Press (USA), переведенной на русский язык и адаптированной Институтом новых технологий [5]. Комплект был поставлен в школы Российской Федерации в рамках ПНПО. Две программы по технической начинке очень похожи, но GeoGebra является бесплатным ПО в отличие от ЖМ. Это преимущество не так и важно, так как у программы ЖМ уже есть лицензия в школах РФ.

У GeoGebra имеется различные инструментари, такие как «многоугольники» и «каноническое сечение», которые в ЖМ отсутствуют. Но, это свое очередь можно использовать для мотивирования учащихся к построению дополнительных чертежей, которые развивают у них творческие способности. Ниже приводим принципы построения изображений стереометрических фигур, с использованием программы «Живая Математика».

Для создания имитации вращения стереометрических фигур относительно заданной оси необходимо помнить, что точки фигуры при вращении описывают окружность на плоскости перпендикулярной относительно оси вращения. При параллельном проецировании окружности на какую-нибудь плоскость получаем ее изображение в общем случае в виде эллипса. У GeoGebra это инструмент есть, а ЖМ нет. Проблему построения эллипса в программе ЖМ можно решить следующим образом:

1. Построить вертикальную прямую **k**
2. В этой прямой взять точку **O**. Эта точка будет центром двух окружностей.
3. Построить прямую проходящий через точку **O** и произвольную точку **B**, которая лежит в большой окружности. Пересечение полученной окружности с маленькой окружностью отмечаем буквой **A**.

4. Через точку **В** нужно построить параллельную прямую **m** к прямой **k**, с помощью инструмента построения
5. Через точку **А** к прямой **m** нужно построить перпендикуляр **n** с помощью инструмента построения
6. Пересечение **m** и **n** обозначаем буквой **С**.
7. Пусть точка **В** движется по окружности против часовой стрелки (для этого нужно отметить точку **В** и Правка-Кнопки-Анимация-ОК)
8. Нужно отметить точки **С** и **В** и нажать кнопку Геометрическое место (это кнопка находится в Построении)
9. После этого нужно скрыть все вспомогательные элементы (Нужно выделить все элементы и Вид- Скрыть объекты)
10. Искомый эллипс перед вами.

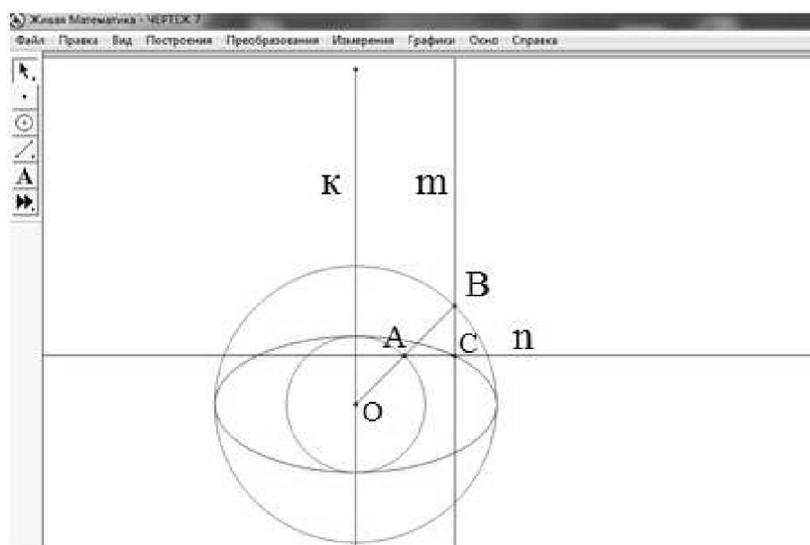


Рис. 3: Динамический чертеж, в программе "Живая Математика" геометрического место точек эллипса.

Наибольшую значимость, этот инструмент имеет при создании изображений стереометрических чертежей. Чтобы фигура вращалась, нужно вершины "поместить" в построенное геометрическое место точек "эллипс" и этим точкам вставить анимацию. Прикрепляя некоторые точки основания стереометрической фигуры (многогранника) на эллипсе и вращая точки эллипса получим эффект вращения стереометрической фигуры.

У программы ЖМ есть важное преимущество, это возможность создавать страницы и межстраничные ссылки между ними. Благодаря этому, в ЖМ можно применить как электронный журнал, а это свое очередь возможность создание учебно-методических комплексов. Работа в программе обеспечивает поддержку работы проектного типа, подразумевающего почти незаметный и плавный переход от несложных опытов и простых заданий к углубленному изучению явлений, вызвавших интерес. Кроме того, программная среда поддерживает и традиционную «задачную» форму. Особенно удачно реализуется в ней широкий спектр задач «на построение».

Используя задачу изучения и построения эллипса необходимо объяснить школьникам, в каких областях науки используется "инструмент эллипс". Например, привести в пример астрономическую модель Солнечной системы. Можно ученикам предложить построить такую модель, используя программу «Живая Математика» или «GeoGebra». При этом необходимо, чтобы они самостоятельно выяснили глобальные параметры Солнечной системы, такие как массы планет, средние скорости

вращения вокруг Солнца, расстояния от планет до Солнца. При составлении модели ученики, по возможности, должны учитывать экспериментальные значения этих параметров.

Анимационные возможности математических программ и задачи на развитие пространственного воображения

В качестве наглядного примера использования математических пакетов приведем комментарии по использованию анимационных возможностей этого пакета в ходе урока по теме «Вращение многогранников» в 11 классе по учебнику: И.Смирнова, В.Смирнов «Геометрия 10-11». – М.: Просвещение, 2008 [4]. Комментарии будут относиться как к созданию демонстрационного материала для визуализации геометрических разделов геометрии с помощью математических пакетов, так и к методической целесообразности по их применению. Рассматриваемый учебный материал так же может быть использован на обобщающем уроке по геометрии в 11 классе по теме «Тела вращения», если изучение геометрии предполагается по учебникам Л.С. Атанасяна или А.В. Погорелова.

План-конспект фрагмента урока 11го класса.

Тема: Вращение многогранников.

Тип: Изучение нового материала

Цели урока:

- образовательные:

- 1) закрепить понятия вращения в пространстве и фигуры вращения;
- 2) исследовать фигуру, получаемую при вращении прямой вокруг скрещивающейся с ней оси, ввести понятие гиперболоида вращения;
- 3) формирование умений и навыков исследования фигур, получаемых при вращении многогранников вокруг оси;

- воспитательные: воспитание познавательного интереса к предмету посредством включения в учебный процесс средств информационных технологий;

- развивающие: развитие пространственного воображения, логического мышления.

Оборудование: компьютер, мультимедийный проектор, математические программы: «Живая Математика» или «GeoGebra» или пакет символьной математики Maple.

Ход урока

Актуализация.

Необходимо напомнить ученикам определения следующих понятий: поворот или вращение в пространстве; фигура вращения.

Затем ученикам предлагается решить ряд задач на пространственное вращение плоских фигур.

1) *Изобразите фигуру вращения, полученную в результате вращения отрезка вокруг оси: а) перпендикулярной к нему и проходящей через один из его концов; б) пересекающей его в одном из его концов и не перпендикулярной к нему; в) пересекающей его во внутренней точке; г) параллельной ему.*

2) *Равносторонний треугольник вращается вокруг: а) высоты; б) стороны; в) прямой, параллельной высоте и проходящей: 1) через его вершину, 2) вне треугольника, 3) внутри треугольника. Изобразите в каждом случае получившееся тело.*

3) *Квадрат вращается вокруг: а) стороны; б) средней линии; в) прямой, параллельной стороне и проходящей вне квадрата; г) прямой, параллельной диагонали и проходящей через вершину. Изобразите в каждом случае полученное тело вращения.*

4) *Ромб вращается вокруг: а) стороны; б) прямой, перпендикулярной стороне и проходящей: 1) через его вершину, 2) вне его; в) прямой, перпендикулярной его диагонали и проходящей: 1) через его вершину, 2) вне его, 3) внутри его. Изобразите полученное тело вращения.*

Эти задачи направлены на стимулирование пространственного мышления. В ходе их решения у учеников могут возникнуть трудности с созданием динамических образов фигур. Поэтому учитель должен обладать набором подсказок, которые могут облегчить мыслительный процесс ученика. Наиболее эффективными являются подсказки-визуализации, которые воспроизводят либо вращения начальных фигур вокруг заданных осей, либо предлагают сам процесс формирования искомой фигуры при вращении исходных элементов. Такие визуализации можно достаточно быстро создавать с помощью математических программ.

В качестве примера эффективности и наглядности программ такого типа рассмотрим подсказку для задачи г) пункта 3.

```
> restart: with(plottools):with(plots):
RECTAN:=polygon([[0,0,0],[10,0,0],[10,10,0],[0,10,0]], color=green, thickness=1):
axes:=PLOT3D(CURVES([[0,-10,0],[20,10,0]], COLOR(HUE,0.7), THICKNESS(1))):
fig:=PLOT3D(RECTAN):
f:=display([axes,fig]): RTS:=seq(U[k],k=0..40):
for k from 0 to 40 do b:=k*0.25*Pi: U[k]:=rotate(f,b,[[0,-10,0],[20,10,0]]): end do:
RRT:=seq(Y[j],j=0..40): for j from 0 to 40 do
RRS:=seq(T[i],i=0..j): for i from 0 to j do b:=i*0.12*Pi:
T[i]:=rotate(f,b,[[0,-10,0],[20,10,0]]): end do:
Y[j]:=plots[display](RRS[],scaling=constrained,style=patch):end do:
display(RTS[],RRT[],insequence=true,scaling=constrained,style=patch);
Задается исходное расположение квадрата и оси вращения, а конечный результат на рис. 4.
```

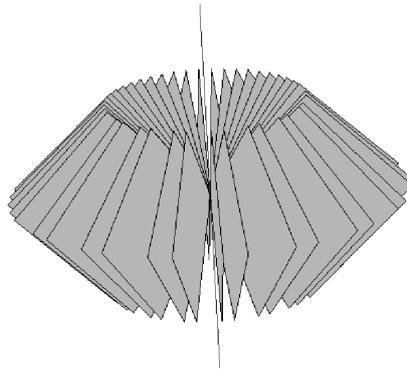


Рис. 4: Динамический чертеж в программе " Maple ".

Сам процесс перехода от квадрата к рис.4 анимирован. На первом этапе показывается только вращение квадрата. Если ученик не может описать фигуру, то учитель запускает процесс формирования фигуры. Причем программа не дает чертежа искомой фигуры, а предлагает трехмерную упрощенную модель этой фигуры, оставляя окончательный ответ все же за учеником.

Выбор задач зависит от подготовленности учеников к решению задач на пространственное во-ображение. В заключение этой части урока учитель предлагает задачу, порождающую проблемную ситуацию:

Изобразите фигуру вращения, полученную в результате вращения отрезка вокруг оси скрещивающейся с ним.

Данная фигура ученикам не знакома. Учитель просит схематично ее изобразить. Задача требует высокого уровня пространственного мышления по манипулированию динамическими образами фигур. Поэтому, скорее всего, ответ на эту задачу придется дать самому учителю в ходе изложения материала урока.

Изложение нового материала.

Разрешение проблемной ситуации предлагается провести в два этапа. На первом этапе осуществляется визуализация полученной при вращении фигуры средствами информационных технологий, используя одну из программ «Живая Математика», «GeoGebra» или «Maple».

Ученикам полученная фигура не знакома. Поэтому на втором этапе учитель исследует фигуру и вводит понятие гиперболоида вращения следующим образом.

Пусть a и b – скрещивающиеся прямые, OH – их общий перпендикуляр, обозначим эту длину через d . Она является наименьшей из длин отрезков, соединяющих точки прямых a и b . Поэтому

при вращении точек прямой b вокруг оси a окружность наименьшего радиуса будет получаться при вращении точки H (рис.5).

Рассмотрим произвольную точку B на прямой b , отличную от точки H , и опустим из нее перпендикуляр AB на прямую a . При вращении точка B описывает окружность, радиус которой равен AB . Выразим этот радиус через d . Для этого через точку H проведем прямую, параллельную a , и через точку A – прямую, параллельную OH . Точку пересечения этих прямых обозначим C . Пусть расстояние AB равно x , расстояние OA равно y и угол BHC равен α . Треугольник ABC прямоугольный, катет AC равен d , катет BC равен $y \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому $x^2 = d^2 + y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

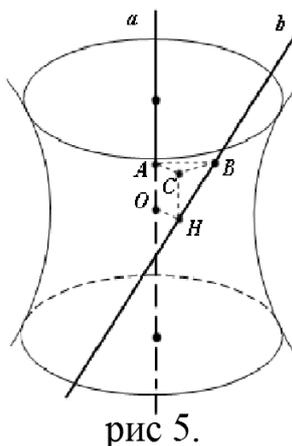


рис 5.

Рис. 5: Динамический чертеж в программе " Maple ".

Перенеся слагаемое, содержащее y , в левую часть равенства и разделив обе части полученного равенства на d^2 , получим уравнение $\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{d^2} = 1$, которое представляет собой уравнение гиперболы. В связи с этим фигура, получающаяся при вращении прямой b , скрепляющейся с осью вращения a , называется *гиперболоидом вращения*. (Решение приведено по учебнику И.Смирновой)

Завершая комментарии к фрагменту урока, хотелось бы сказать, что сочетание традиционных методов обучения математики и информационных компьютерных технологий делает возможным представить такой тип взаимообусловленной деятельности учителя и учащихся, который направлен на развитие познавательной деятельности учащихся, на разрешение многих психолого-педагогических проблем, связанных с процессом обучения геометрических разделов математики.

Литература

- [1] Методика обучения геометрии / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчицина, Н. С. Подходова, И. М. Смирнова, О. В. Холодная, И. С. Якиманская. – М., 2004. – 113 с. 11
- [2] Дьяконов В. П. Новые технологии сверхбыстрых массовых вычислений / В. П. Дьяконов // Международная научно-практическая конференция "ИТО-ПОВОЛЖЬЕ-2007": матер. конф. – СПб., 2003. – С.106.
- [3] Проект федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования / Л. П. Кезиной, А. М. Кондакова. – М., 2010. – 24 с.
- [4] Смирнова И. М. Геометрия 10-11 / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – М., 2008. – 118 с.
- [5] Живая Математика. Учебно-методический комплект: [Электронный ресурс] // Институт новых технологий. Режим доступа: <http://www.int-edu.ru/object.php?m1=1035&m2=2&id=203>. (дата обращения: 22.06.2013).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ MAPLE В СРЕДНЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ: ОПЫТ ШКОЛЫ № 57 ГОРОДА КАЗАНИ. СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ.А.И. Гибадуллина¹

Казань, МБОУ «Школа № 57», Россия

¹E-mail: alsugi@mail.ru

Аннотация. Предлагаемый электронный сборник методических материалов по математике, выполненных в среде Maple, является обобщением 10-летнего опыта работы автора с пакетом в школе 57 города Казани. Все материалы распределены по сквозным вопросам школьной математики. По всем разделам подготовлены программные Maple-шаблоны, в которых достаточно менять только параметры. Даются примеры использования с комментариями и пояснениями.

Методология математического моделирования бурно развивается, охватывая практически все сферы нашей жизни - от технических систем до явлений культуры. Компьютер сейчас является незаменимым инструментом изучения окружающего нас мира. Методология математического (компьютерного) моделирования, по словам А.А.Самарского, должна быть и становится «интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества».

Необходимость соответствовать времени, достижениям научно-технологического прогресса приводят к новому пониманию образования в целом, и среднего, в частности. Наряду с другими задачами, система образования должна воспитывать компьютерного пользователя принципиально нового типа - компетентного в разных научных дисциплинах и умении применять метод компьютерного моделирования; важным является формирование исследовательских навыков и навыков научного творчества. Основа этих умений, бесспорно, закладывается (или не закладывается) в школе. В связи с этим, по мнению автора, целесообразность внедрения систем символьной математики в информационно-образовательную среду учебного заведения уже не вызывает сомнений. На современном этапе эти системы наиболее удовлетворяют требованиям физико-математического образования. Несмотря на то, что эти пакеты были созданы для решения задач высшей математики, их возможности позволяют с успехом внедрять их и в систему школьного образования.

На сегодняшний день возможности ССМ рассмотрены в трудах многих авторов. В описании опыта использования компьютерной математики в образовательных целях, главным образом, раскрываются отдельные психолого-педагогические и методические аспекты использования символьных систем в среде ВУЗа. Небольшая часть работ, посвященных компьютерной математике в школьном образовании, носит эпизодический характер. Из них можно сделать вывод, что, в основном, СКМ рассматривается в качестве дополнительного курса в старшей школе физико-математического профиля. Инновационный подход автора состоит в том, что применение компьютерной математики эффективно на всех возрастных уровнях средней школы, включая начальную, и в работе с учащимися любого уровня математической подготовленности. Предлагаемый электронный сборник методических материалов по математике, выполненных в среде Maple, является обобщением 10-летнего опыта работы автора с пакетом в школе 57 города Казани.

Разделы сборника: демонстрационные материалы; школьное научное общество «ГЕОДРОМчик»; высшая математика - разное; Maple-пособие для школы; психологическая Maple-диагностика. Все материалы распределены по сквозным вопросам школьной математики - вычисления (и корни); преобразование выражений; уравнения и системы уравнений; неравенства, системы неравенств с одной переменной и с двумя переменными; функции; графики; дифференцирование и интегрирование; тригонометрия; координатные системы; геометрия с ее отдельными подразделами и вопросами; текстовые задачи; элементы математической статистики и вероятности. По всем разделам подготовлены или готовятся программные шаблоны в среде Maple, в которых достаточно менять только параметры. Даются примеры использования с комментариями и пояснениями. Одну и ту же демонстрацию можно показывать на разных этапах тематического модуля: при изучении нового, повторении, при анализе решения задач, контроле (коллективном и индивидуальном) или аналитическом тестировании. Именно поэтому разработки не являются конспектами определенных уроков, а демонстрируют отдельные тематические аспекты. Это позволяет использовать их по усмотрению учителя.

Опыт использования системы Maple в преподавании неизбежно привел к необходимости научить детей работать с ним. В первое время работал кружок по изучению основ пакета, который перерос в исследовательскую лабораторию по использованию компьютерных технологий. Позже на ее основе было создано

школьное научное общество «ГЕОДРОМчик». В сборник включены элементы некоторых проектов учащихся, содержащие исследования с использованием Maple. Области приложения пакета оказались очень разнообразны: от математики - до психологии и явлений культуры. Генерируется большая школьная электронная библиотека. Нужно заметить, что членами научного общества являются не столько так называемые «одаренные», сколько простые подростки с разным уровнем интеллектуального развития и математической подготовки. Наблюдения показывают, что компьютерная математическая среда очень благоприятно влияет на умственные параметры детей. Даже элементарный опыт научного анализа, моделирования, интеллектуального использования компьютера прививает навыки самостоятельного мышления, пробуждает интерес к получению новых знаний, позволяет прочувствовать их практическую ценность, дает начало развитию творческих способностей. В результате, научно-исследовательская деятельность повышает интеллектуальную культуру, самоуважение и уверенность, устойчивость к внешнему негативному влиянию.

Многолетняя работа с компьютерной математикой привела к идее использовать ее в качестве инструмента психологического тестирования. В сборник включен один из Maple-тестов, позволяющий выявлять степень сформированности функций анализа и обобщения. Интерактивная математическая среда дает широкие вариативные и творческие возможности тестирования. Более того, Maple-тест может быть использован не только как диагностический, но и обучающий, и корректирующий.

Вообще, кроме решения методических задач, Maple, предположительно, является инструментом психической коррекции и психологического воздействия. В последние годы для исследования этого влияния школьным психологом проводятся тестирования, которые подтверждают результаты наблюдений: динамика интеллектуальных параметров учащихся, работающих с Maple, выгодно отличается от сверстников.

В процессе работы с компьютерной математикой, в частности с Maple, оказываются задействованными в комплексе различные психические функции. Именно во включении всех психических функций состоит суть интеграции обучения, его развивающего характера. А это, в свою очередь, способствует решению и нравственных проблем.

Литература

- [1] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - 2-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 320 с. - ISBN 5-9221-0120-X.
- [2] Гибадуллина А.И. Компьютерная математика (Maple) как инструмент развития мышления школьников (на примере школы № 57 города Казани). Школьное научное общество как одна из форм развития научного творчества учащихся. Обобщение опыта НОУ "ГЕОДРОМчик" школы №57 Казани // Международная научно-практическая конференция ИТОН - 2012. 3-й Российский научный семинар "Методы информационных технологий, математического моделирования и компьютерной математики в фундаментальных и прикладных научных исследованиях": Материалы конференции и труды семинара. Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г.Игнатьева, Казань, 2012 г. (с. 48-51, с. 51-53)

ОБРАБОТКА СПОРТИВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ mAPLE

А.И.Гибадуллина¹, К.С. Ускова²

¹МБОУ «Школа № 57», Казань, ²МБОУ «Школа № 57», Казань

¹E-mail: alsugi@mail.ru, ²E-mail: Karolina.uskova@mail.ru

Аннотация. Методами математической статистики в среде Maple анализируются спортивные результаты учащихся школы № 57 города Казани по скоростным видам спорта.

Известно, что многие спортивные ситуации анализируются и оцениваются с математических позиций. Методами математической статистики устанавливаются перспективность спортсменов, эффективность тренировок, контроль нагрузок. Знакомство с этими методами привело к идее статистического анализа спортивных результатов учащихся школы.

Исследовательская работа проходила в несколько этапов. Теоретическая часть - знакомство с математическими численными методами, применяемыми в спорте. Практическая часть - построение математических моделей спортивных ситуаций с последующей визуализацией в Maple; экспериментальная проверка модели; обработка спортивных результатов учащихся школы с помощью полученной статистической модели в компьютерной математической среде Maple. Вычислялась абсолютная величина интервальной оценки времени ε

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}{(n-1)n}} F,$$

а затем - границы доверительного интервала времени (t1; t2) входимости прогнозируемого результата.

С помощью полученной математической модели (формулы) проводится статистическая обработка спортивных результатов следующих групп учащихся: 1) учащегося З.А., 2) учащегося А.Н, 3) учащихся 5-11 классов школы. Для каждой группы вычислялся ожидаемый доверительный интервал времени по разным скоростным видам (бег, ходьба, лыжи). В некоторых случаях после математической обработки проводились последние сезонные соревнования, результаты которых вошли в ожидаемые доверительные интервалы, что свидетельствует об адекватности математической модели.

Серия экспериментальных проверок построенной модели доказала ее практическую значимость, по крайней мере, в рамках школы. Применение численных методов позволяет прогнозировать результаты предстоящих спортивных мероприятий и наметить направления грамотной подготовки учащихся к ним. А компьютерная математика, в частности Maple, позволяет проводить математическую обработку быстро и качественно.

В ходе статистической обработки спортивных данных школы поставленная цель - анализ спортивных результатов учащихся школы численными методами с применением системы Maple - была полностью реализована. А также сформулированы рекомендации школьным тренерам по эффективной подготовке спортивных групп.

Литература

- [1] Садовский Л.Е., Садовский А.Л. С14 Математика и спорт. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.-192 с.- (Библиотека "Квант". Вып. 44).
- [2] Самаров К.Л. Учебное пособие для студентов по математике «Математическая статистика». - интернет-источник <http://www.resolventa.ru/metod/student/matstat.htm>
- [3] Ускова К. С. «Моделирование спортивных достижений с применением компьютерной математики Maple» - V Международная Интеллектуальная Ассамблея школьников: сборник научно-исследовательских работ / Отв.ред. М.В.Волкова - Чебоксары: НИИ педагогики и психологии, 2012 - 136 с. (с. 49-51).
- [4] Ускова К. С. «Моделирование спортивных достижений с применением компьютерной математики Maple» - <http://www.exponenta.ru/educat/referat/XXIVkonkurs/4/index.asp>

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В РОТОВОЙ ПОЛОСТИ

Д.П. Голоскоков¹, Д.А. Кардаков², И.А. Ивачева²

¹198035, г.Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова
²194354, г. Санкт-Петербург, Учебный пер., д. 5, Санкт-Петербургский государственный медицинский университет им. акад. И.П. Павлова

¹E-mail: guwc@mail.ru, ²E-mail: studio-id@mail.ru

Аннотация. Предложена математическая модель, описывающая тепловые процессы в ротовой полости

В период роста ребенка, одним из распространенных отклонений от физиологической нормы развития является функциональное нарушение дыхания. В частности, во время сна у ребенка при носовом дыхании может быть постоянно открыт рот, что вводит в заблуждение родителей и, соответственно, лечащего врача.

Неверные сведения о типе дыхания ребенка могут привести к ошибочному диагнозу и неправильным методам лечения.

На кафедре стоматологии детского возраста с курсом челюстно-лицевой хирургии, СПбГМУ им. акад. И.П. Павлова предложена методика диагностирования функции дыхания по тепловому состоянию в полости рта, что требует математического обоснования [1].

Хорошей математической моделью тепловых процессов, происходящих в полости рта, является задача стационарной теплопроводности [2], которая сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, при соответствующих граничных условиях. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа: на границе S поддерживается заданное распределение температуры u_0 , т. е. $u|_S = u_0$. Задачи решались в среде pde-tool пакета прикладных программ Matlab. На рис. 1 представлена расчетная область с фиксированными точками, являющимися вершинами вписанного многоугольника.

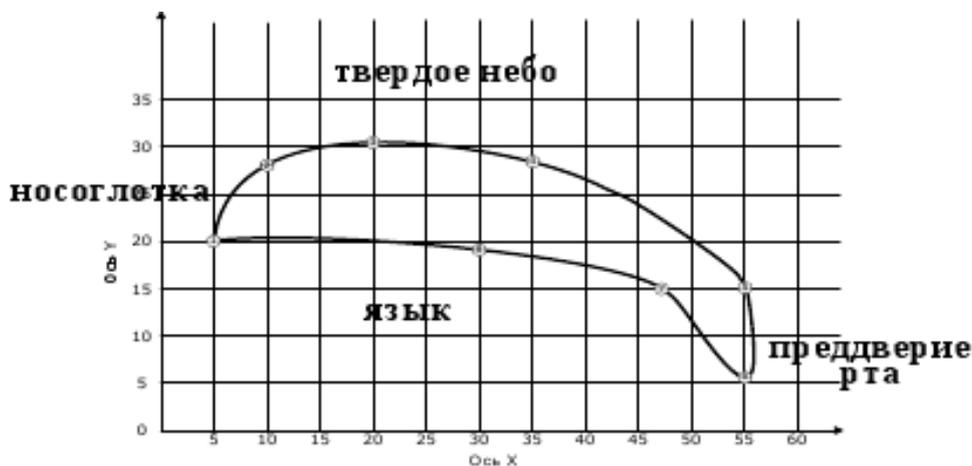


Рис.1. Расчетная область.

Конфигурация выбранной области соответствует ротовой полости человека.

Ниже приведено решение задачи по определению температуры в области ротовой полости при заданной температуре на линии раздела (по часовой стрелке) и варианте дыхания – рот открыт, дыхание носовое (табл. 1, рис. 2).

Таблица 1: Вариант расчета

Вариант	От точки 1 до точки n	Температура, t°С
Рот открыт,	1 – 5; 6 – 1	36,6
дыхание носовое	5 – 6	20,6

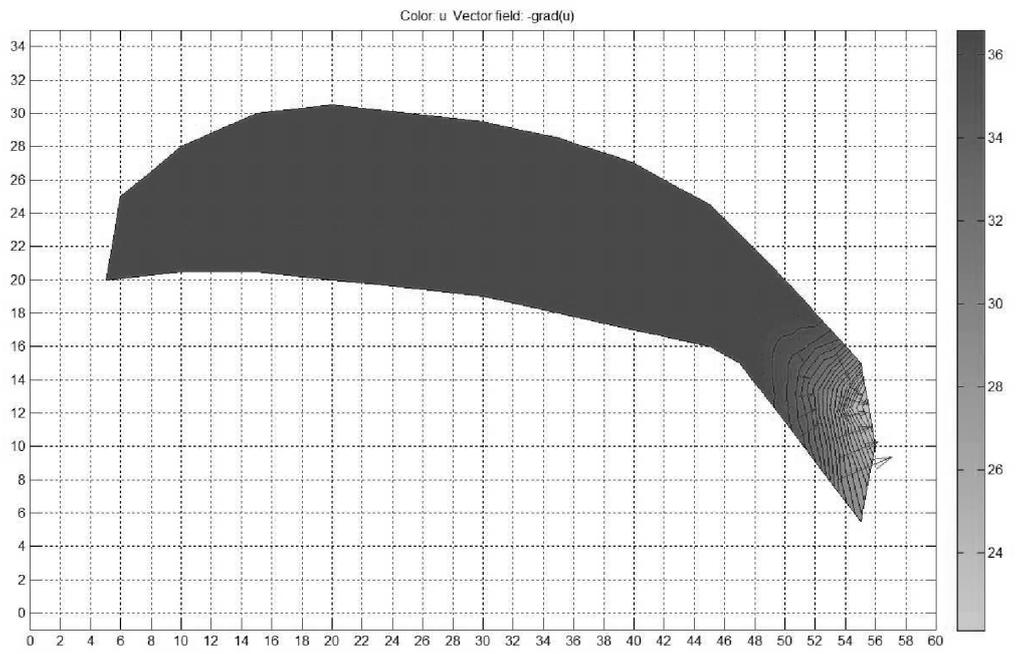


Рис.2. Распределение температуры в ротовой полости (рот открыт, дыхание носовое).

Результаты расчётов полностью соответствуют экспериментальным данным клинических исследований пациентов с указанными нарушениями дыхания.

Таким образом, контроль температурного поля в ротовой полости пациента способен идентифицировать его тип дыхания.

Литература

- [1] Р.А.Фадеев, Д.А.Кардаков. *Применение терморегистраторов для контроля ортодонтического лечения в амбулаторных условиях.*, СПб, Научно – практический журнал СПб Институт стоматологии. №1 (54), 42-44 с., (2012).
- [2] Голоскоков Д.П. *Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple.* СПб.: Изд-во Питер, 540 с., (2004).

ALGORITHMS FOR COLLECTIVE BEHAVIOR OF ROBOTS

V.A. Dedkov¹

Moscow Power Engineering Institute, Moscow

¹E-mail: DedkovVA@gmail.com

Annotation. We consider the use of artificial intelligence (ant colony optimization algorithm and simulated annealing algorithm) in the “problem of multirobot system visiting the assigned targets on the plane” using an inversion of algorithm. We also compare these algorithms.

Introduction

In this paper we examine methods of artificial intelligence (ant colony optimization algorithm and simulated annealing algorithm) in control for multirobot systems in cases, where robots and targets are distributed on a horizontal rectangular field randomly and uniformly, depending on the various initial conditions of the problem (the number of robots and the number of targets). The robot was given the task to visit all targets with minimal total path length and minimal total rotation angle. Robots are modeled by points.

1. Research methods

For research we model the behavior of a multi-robot system on the plane via the program written in the system of mathematical computations GNU Octave.

On a rectangular field, we randomly placed robots (the larger diameter of the circle) and the targets (the smaller diameter of the circle) (Fig. 1).

We introduce a number of assumptions: the trajectory of the robot is polygonal line, the robots move with the same constant speed, at the turning points (at nodes of polygonal line) robot turns quickly, robots do not collide with each other, there is no obstacles to their movement, objects and robots are geometric points.

All experiments were performed for two cases: the search for targets with the *simulated annealing* algorithm [1, 2] (SA) and the search for targets with the *ant colony optimization* algorithm [3, 4] (ACO).

The mean values of total paths length and rotation angles were plotted.

2. Description of how the program works

I. The initial conditions of the problem are recorded in a data file (field size, the number of robots, the number of targets, location of robots and targets). The following steps are performed by reading the file.

II. While the number of robots is less than or equal to the number of targets (the number of targets is reduced when the robot reaches the goal), the following steps are performed:

II.1. For all robots a target is searched for one of the algorithms (ACO or SA, algorithm is specified when the program starts).

II.2. Each robot walks to the targets in the cycle. It looks like all the robots are moving to the targets at the same time: full cycle is one step of the group. The number of targets is reduced by the number of reached targets (if there are any).

II.3. If at least one of the robots from item II.2 reaches the target (note: item II.2 is the full cycle, not just one iteration), then we go to the item II.1 or to the item III (if the number of targets has become less than the number of robots). Otherwise, item II.2 continues.

III. Now the number of robots is greater than the number of goals. For program robots become targets and goals become robots: this is the **inversion of algorithm** (in the input of the algorithms ACO or SA we send updated coordinates of robots and targets). It's all looks like the same as if the robots marching to targets.

Subparagraphs of this item III repeat subparagraphs of item II. Item III is performed while the number of targets is greater than 0.

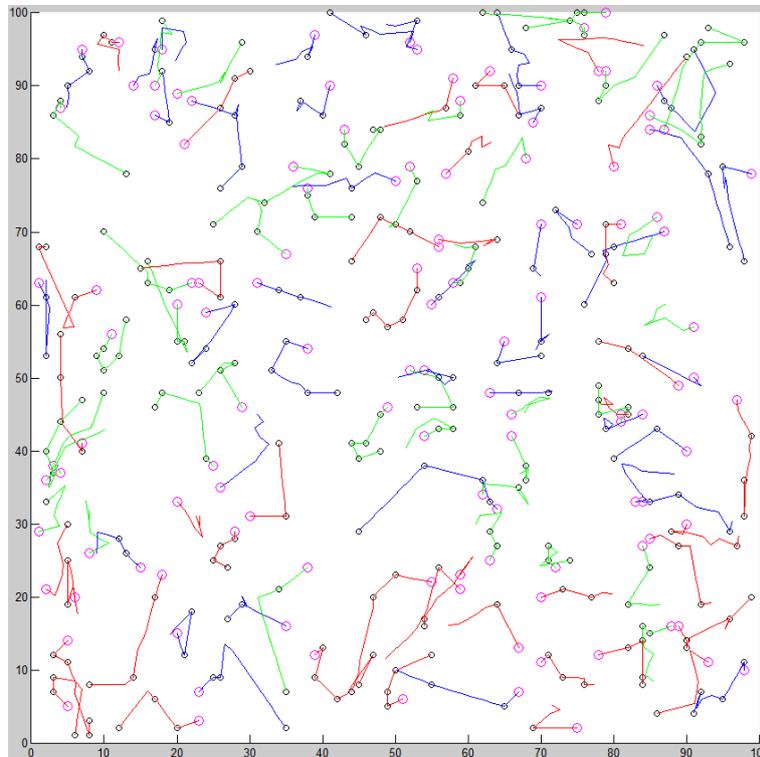


Fig.1. Screenshot of the display window of the program. Different color lines (trajectories of robots) are introduced for convenience.

2.1. Description of the implementation of the simulated annealing algorithm

In the cycle of n iterations the following steps are performed:

I. Two robots in the permutation are selected randomly.

II. Swap these two robots in the permutation.

III. Cycle through items in the permutation:

III.1. Look for the shortest path for each robot in the permutation.

III.2. Calculate the rotation angle for each robot in the permutation corresponding to the shortest path.

III.3. Calculate the total path length S and the total rotation angle for current permutation.

IV. If the total path length **and** the total rotation angle decreased:

IV.1. Set new coordinates (which are planning to return from the algorithm) for the robots in the values corresponding to the current permutation.

IV.2. Take the current permutation of robots as a new permutation.

V. Otherwise, give a chance to the current permutation to become the new permutation:

V.1. Calculate the probability of choosing the bad decision by the formula

$$P = e^{-\frac{(S-S_{min})}{T}} \quad (1)$$

(S_{min} is the minimum total path length for the current iteration).

V.2. If $P < P_0$, where P_0 is a random number, we take the current permutation of robots as a new permutation.

VI. Each $freq$ -th iteration (number $freq$ is the input parameter of the algorithm) reduce parameter T (conventional temperature) by the formula

$$T_{k+1} = \alpha T_k \quad (2)$$

($0 < \alpha < 1$ is also an input and controlled parameter of the algorithm).

2.2. Description of the implementation of the ant colony optimization algorithm

In the cycle of n iterations the following steps are performed:

I. Two robots in the permutation are selected randomly.

II. Swap these two robots in the permutation.

III. Cycle through items in the permutation:

III.1. Look for the “ACO-path” for each robot in the permutation, using the formula for the transition probability robot on the k -th iteration of the main loop, from its vertex i in the permutation to the vertex j in the list of targets.

$$P_{ij,k} = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_m \tau_{im}^\alpha \eta_{im}^\beta} \quad (3)$$

here τ_{ij} is amount of pheromone left by the robot at the interval $[i, j]$; η_{ij} is the inverse of the length of the interval $[i, j]$; α, β are empirical coefficients. Function $P_{ij,k}$ shows the robot number of vertex j to which it must go. Index m in the sum passes over all not to be passed vertices adjacent to i .

Thus, for a robot k, i we make list of probabilities, corresponding to the vertices to which the robot can go. More likely the robot will go to vertex which corresponds to a high probability $P_{ij,k}$.

III.2. Set the increment of pheromone corresponding to ACO-path for each robot

$$d\tau_{ij} := d\tau_{ij} + Q\eta_{ij} \quad (4)$$

(Parameter Q is scale constant of the order of route length; it is chosen proportionally to order of graph).

III.3. Calculate the rotation angle for each robot in the permutation corresponding to the “ACO- path”.

III.4. Calculate the total path length and the total rotation angle for a current permutation.

IV. If the total path length **and** the total rotation angle decreased:

IV.1. Set new coordinates (which are planning to return from the algorithm) for the robots in the values corresponding to the current permutation.

IV.2. Take the current permutation of robots as a new permutation.

V. Update the pheromones:

V.1. Adding new tracks

$$\tau_{ij} := \tau_{ij} + \gamma d\tau_{ij} \quad (5)$$

V.2. The evaporation of pheromone

$$\tau_{ij} := \tau_{ij}(1 - \gamma) \quad (6)$$

($0 < \gamma < 1$ is an input and controlled parameter of the algorithm).

3. Experiments

3.1. Best parameters of the algorithms

First, we find the parameters of the algorithms, which are achieved at the lowest values of S and Ang .

SA was investigated for various combinations of parameters for $freq=\{\text{from } 1 \text{ to } 34 \text{ with step } 1\}$, $\alpha=\{\text{from } 0.05 \text{ to } 0.95 \text{ with step } 0.05\}$ on number of iterations $n=140$.

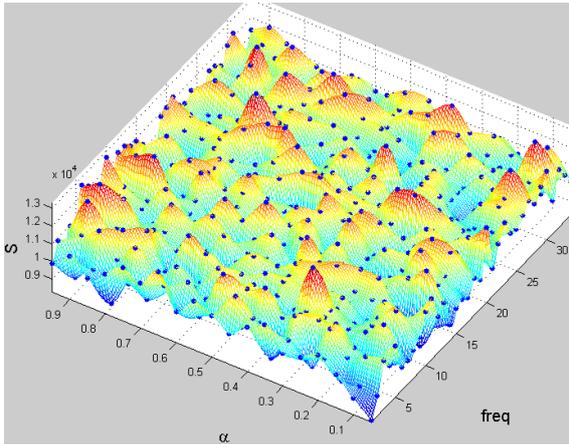


Fig.2. Dependence of total path length of the algorithm parameters: $S=S(freq, \alpha)$.

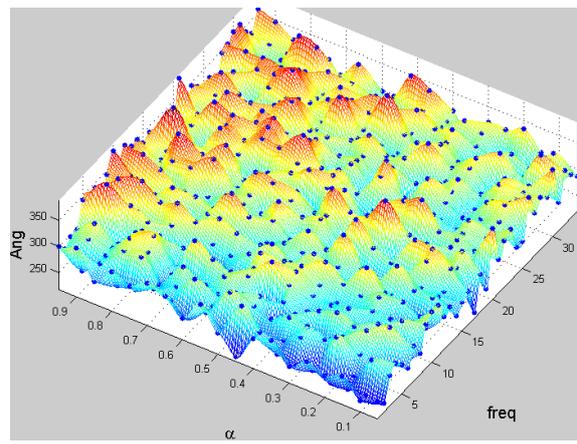


Fig.3. Dependence of total rotation angle of the algorithm parameters: $Ang=Ang(freq, \alpha)$.

The graphs show that the minimum value of S and Ang often achieved in the band at small values of $freq$ (about $1 < freq < 3$) and almost all values of α ($0.05 < \alpha < 0.95$).

ACO was investigated for various combinations of parameters for $\gamma=\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$, $\alpha=\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ and β with same parameters as for α on number of iterations $n=140$.

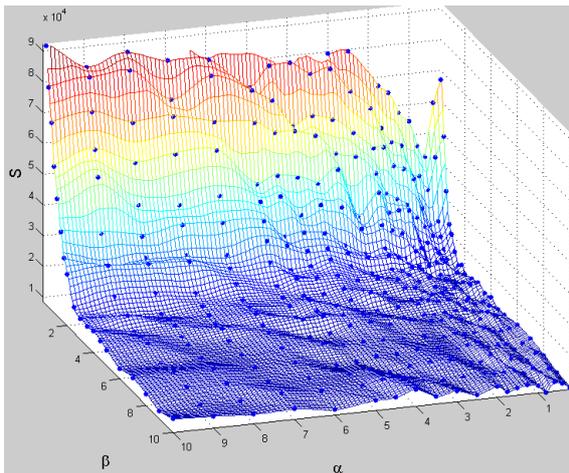


Fig.4. Dependence of total path length of the algorithm parameters: $S=S(\alpha, \beta)$.

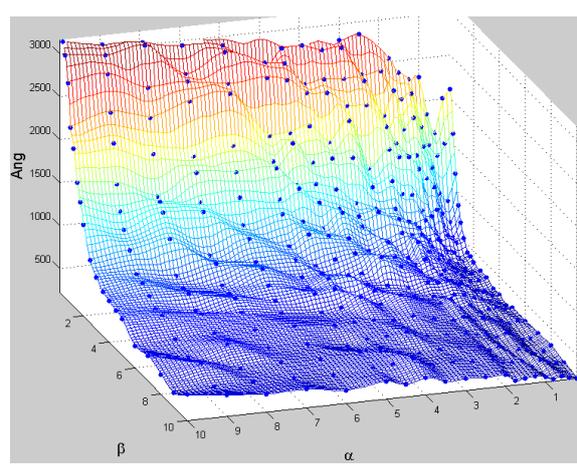


Fig.5. Dependence of total rotation angle of the algorithm parameters: $Ang=Ang(\alpha, \beta)$.

The graphs show that the minimum value of S and Ang often achieved in the band at small values of α (about $0.2 < \alpha < 1.5$) and larger values of β ($1.5 < \beta < 10$).

Here are the results:

- SA:
 $S_{min}=8274$ ($Ang=246$) for $freq=12$, $\alpha=0.1$
 $Ang_{min}=218$ ($S=8521$) for $freq=5$, $\alpha=0.4$
- ACO:
 $S_{min}=8534$ ($Ang=245$) for $\gamma=0.2$, $\alpha=0.8$, $\beta=10$.
 $Ang_{min}=204$ ($S=8646$) for $\gamma=0.6$, $\alpha=0.2$, $\beta=10$.

Further studies were performed with the parameters of the algorithms, which are achieved at the lowest total path S_{min} .

3.2. The various number of targets with a constant number of robots

Then we run the program on a constant numbers of N_r , but on various numbers of N . The studies were performed for $N_r=\{5,25,50,80,120\}$, $N=\{\text{from } 10 \text{ to } 300 \text{ with step } 10\}$ on the field with size 100×100 for robot with step 1.5.

We performed 4 experiments for every possible case, and then calculated the average value of the total path length and the total rotation angle of all robots. We entered data into the table and used it to plot. Examples of graphs are shown in fig. 4.1-4.4.

$SumS$ - the sum total of all passed paths for a given number of robots for this algorithm, $SumAng$ - the same for the angles. Charts for $SumS$ and $SumAng$ are given in fig. 5.1 and 5.2.

According to the above graph we can see that the SA shows the best results for paths and ACO - for angles.

The graph $SumS(N)$ shows one interesting feature [5]: when $N_r > 25$ we can see a steady decline of $SumS$ (S is almost the same for $N_r = 5$ and $N_r = 120$).

This interesting result can try to explain by the fact that at a sufficiently large amount of $(N_r + N)$, the density of the robots and targets in the plane becomes large enough, and each robot generates its own "domain" of goals - he did not have to go far to the targets.

We verify our hypothesis by comparing the two algorithms for various number of robots at constant goals.

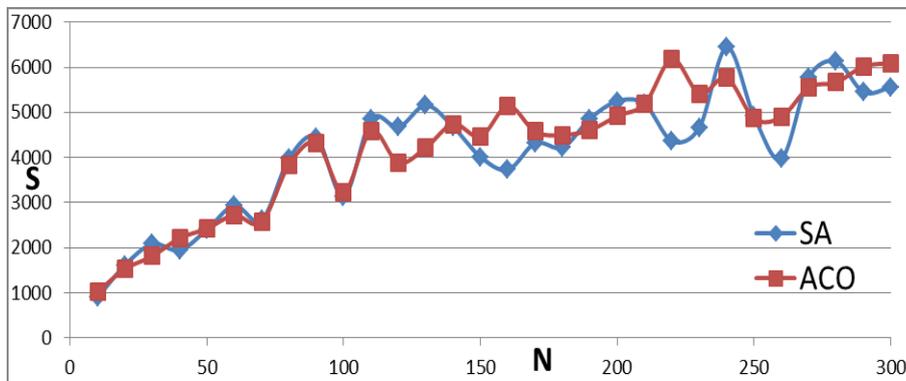


Fig.6. Dependence of total path length of the number of targets for 5 robots.

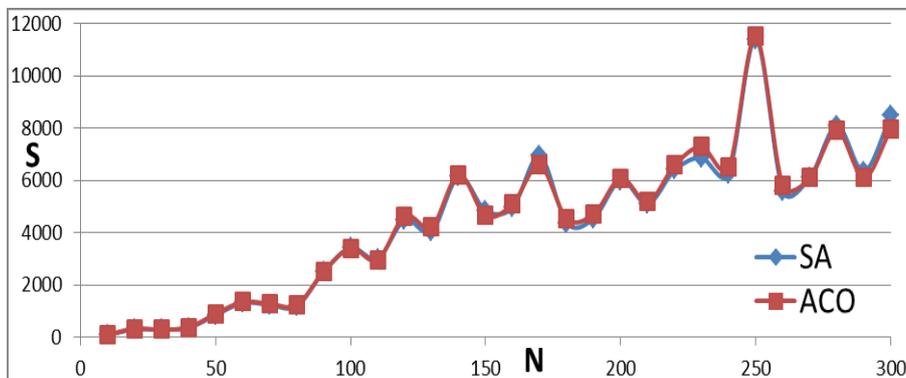


Fig.7. Dependence of total path length of the number of targets for 120 robots.

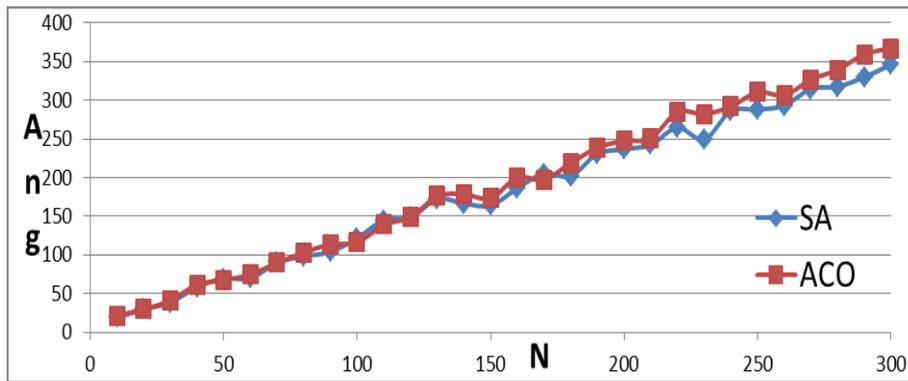


Fig.8. Dependence of total rotation angle of the number of targets for 5 robots.

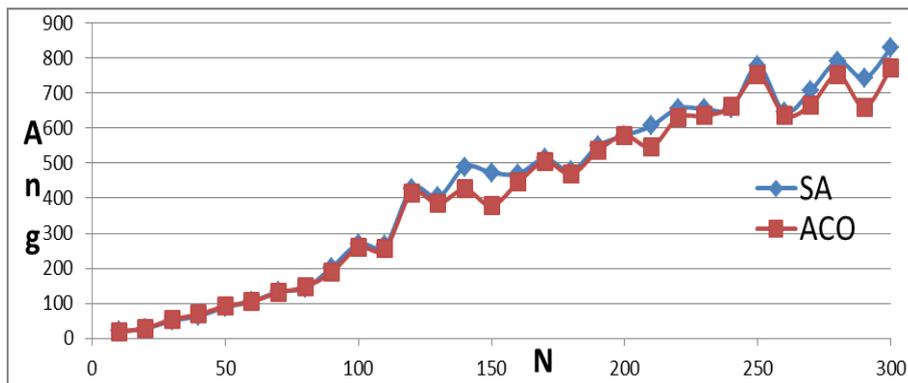


Fig.9. Dependence of total rotation angle of the number of targets for 120 robots.

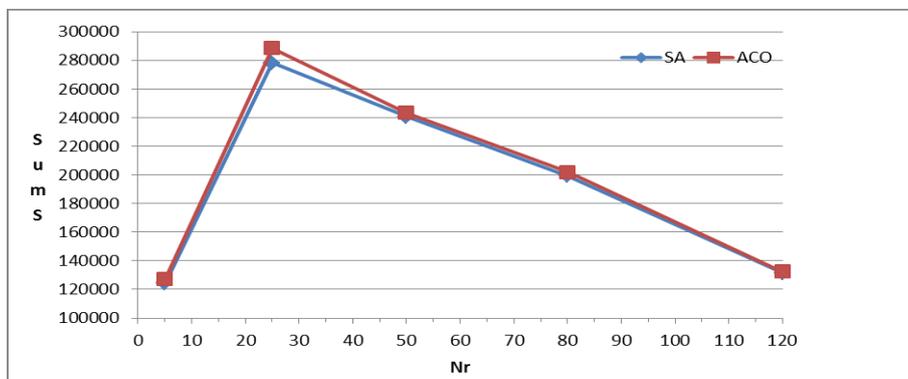


Fig.10. Dependence of total path length sum of the number of robots.

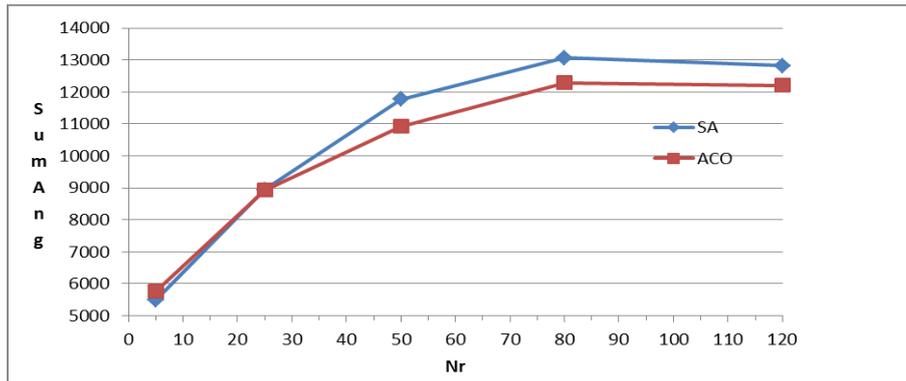


Fig.11. Dependence of total rotation angle sum of the number of robots.

3.3. The various number of robots at constant targets

We run the program on a constant numbers of N , but on a various numbers of N_r . The studies were performed for $N=\{\text{from } 50 \text{ to } 300 \text{ with step } 50\}$, $N_r=\{\text{from } 10 \text{ to } 120 \text{ with step } 10\}$ on the field with size 100×100 for robot with step 1.5.

We performed 3 experiments for every possible case, and then calculated the average value of the total path length and the total rotation angle of all robots. We entered data into the table and used it to plot.

Examples of graphs are shown in fig. 6.1-6.4. The decrease of S at small N and "permanent" S at large N produces an reducing effect of $SumS(N)$ in the preceding paragraph.

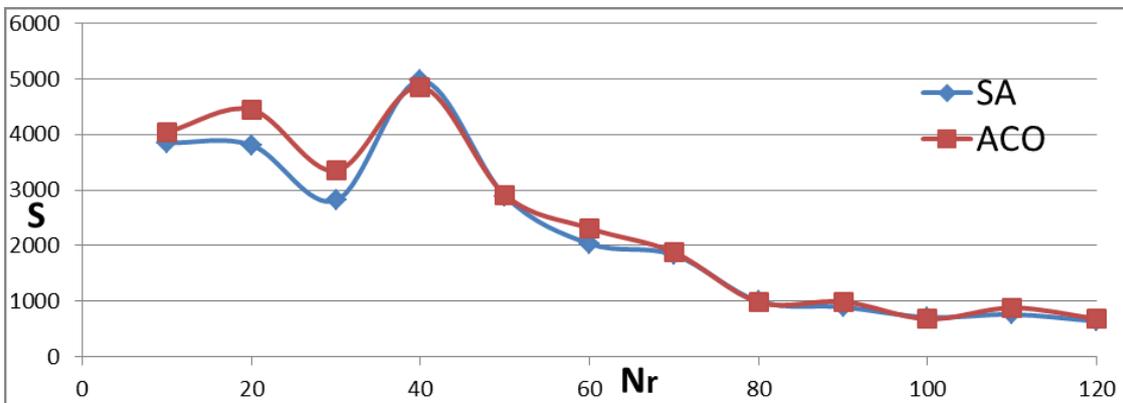


Fig. 6.1. Dependence of total path length of the number of robots for 50 targets.

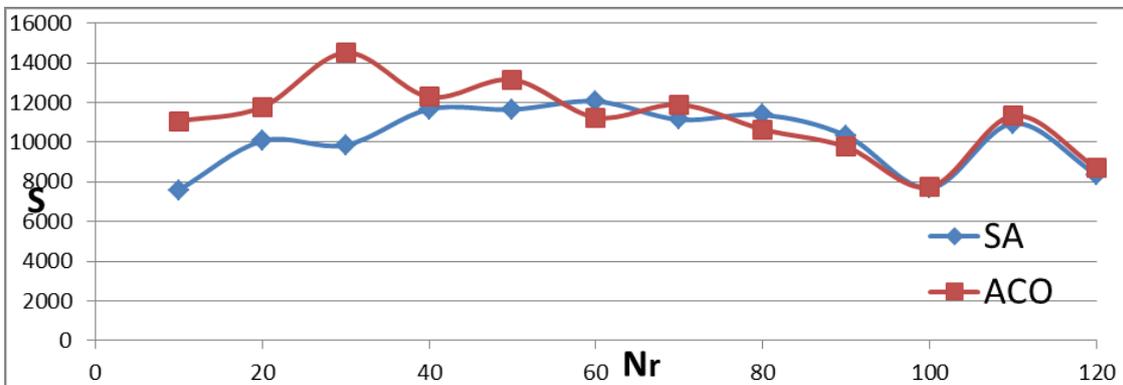


Fig. 6.2. Dependence of total path length of the number of robots for 300 targets.

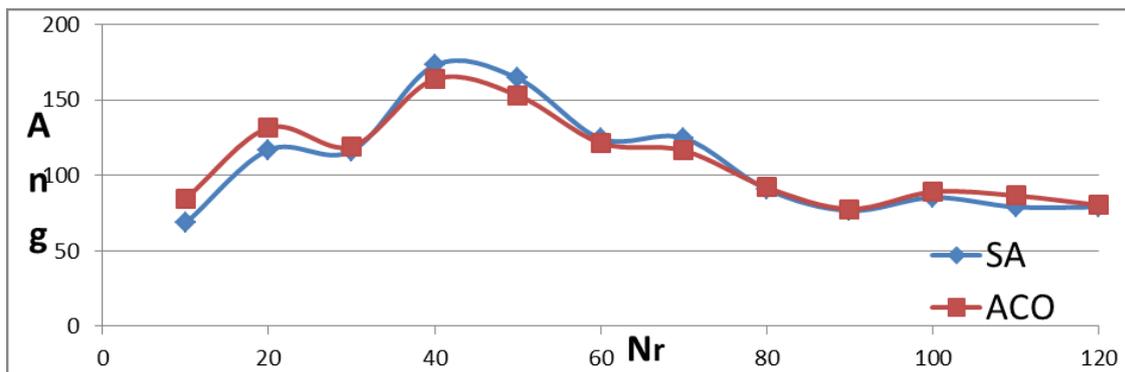


Fig. 6.3. Dependence of total rotation angle of the number of robots for 50 targets.

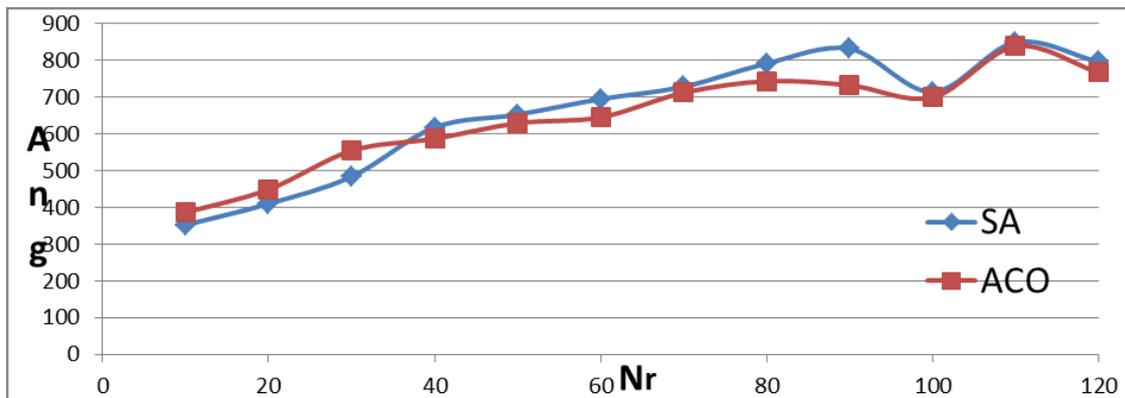


Fig. 6.4. Dependence of total rotation angle of the number of robots for 300 targets.

Conclusion

Most often, the paths S were close for the two algorithms, but at some points there are strong differences. SA consistently shows slightly better results for S than the ACO.

Angles Ang were not so close for the two algorithms, but strong differences were not observed. ACO consistently shows slightly better results for Ang than the SA.

It can be concluded that each case must be considered separately. For each case, we have to choose the best algorithm and its parameters, focusing on what's more important – to get the best results for S , or to get the best results for Ang .

References

- [1] Kirkpatrick, S.; Gelatt, C. D.; Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing. *Science* 220 (4598) (1983): 671–680.
- [2] Cerny, V. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications* Vol. 45 (1985): 41–51.
- [3] M. Dorigo, M. Birattari & T. Stutzle, Ant Colony Optimization: Artificial Ants as a Computational Intelligence Technique. *TR/IRIDIA/2006-023* (2006)
- [4] Kirsanov M. N. Graphs in Maple. *M.: Fizmatlit*, 2007. 87 – 90. (in rus).
- [5] Dedkov V.A., Kirsanov M.N. The problem of control for multirobot systems. *Innovative Information Technologies: Materials of the International scientific – practical conference. Part 2. /Ed. Uvaysov S. U., Ivanov I. A. –M.: MIEM NRU HSE, 2013: 206 – 213.*

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

Н.В. Зайцева¹

Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет

¹E-mail: queen-natalya@mail.ru

Аннотация. Описана динамическая визуализация задач математической физики на основе задачи о продольных колебаниях стержня.

Введение

Предмет математической физики включает в себя построение и исследование математических моделей физических явлений. Математическая физика развивалась еще со времен Ньютона. В конце XVII в. было открыто дифференциальное и интегральное исчисление и сформулированы основные законы классической механики. В XVIII в. методы математической физики начали формироваться при изучении колебаний струн и стержней. В XIX в. идеи математической физики получили новое развитие в связи с задачами теплопроводности, диффузии, упругости, оптики, электродинамики. В XX в. в математическую физику включаются задачи квантовой физики и теории относительности.

1. Динамическая визуализация компьютерных моделей.

В области 3d графики несомненные преимущества имеет пакет компьютерной математики "Maple". Будем подразумевать под управляемой оснащенной динамической визуализацией - визуализацию многопараметрической математической модели, изменение свойств которой можно наблюдать во временной последовательности в графической форме, сопровождаемой изменяющейся со временем числовой или графической информацией, с возможностью изменения пользователем параметров модели. Методы оснащенной динамической визуализации математических моделей разрабатываются в группе Ю.Г. Игнатьева с 2004 года [3], а технология создания оснащенной управляемой динамической модели в СКМ Maple была подробно рассмотрена в статье [4].

2. Динамическая визуализация уравнения колебаний.

В работе были рассмотрены продольные колебания стержня, конец которого $x = 0$ жестко закреплен, а свободный конец $x = l$ получает в начальный момент времени продольный ударный импульс P , если до удара стержень находился в состоянии покоя. Для решения задачи использовался пакет Maple. Задавалось само дифференциальное уравнение колебаний, начальные и граничные условия. Разделение переменных выполнялось с помощью команды `pdsolve`. Далее формулировалась соответствующая задача Штурма-Лиувилля, и были найдены собственные значения и нормированные собственные функции задачи Штурма-Лиувилля. В итоге было получено формальное решение задачи в виде ряда, а затем окончательное, введя в рассмотрение массу стержня.

Литература

- [1] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1981. – 400с.
- [2] Д.П. Голоскоков, *Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple*. – С.-Пб.: изд-во Питер, 2004. – 544с.
- [3] Ю.Г. Игнатьев, *Проблемы информационных технологий в математическом образовании, Учебное пособие*. – Казань: ТГГПУ, 2005. – 118с.
- [4] Ю.Г. Игнатьев, *Пользовательские графические процедуры для создания анимационных моделей нелинейных физических процессов, Системы компьютерной математики и их приложения*. – Смоленск: изд-во СмолГУ, 2009. – с.43-44.

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДЮАМЕЛЯ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

Л.Ф. Зарипова¹, Э.В. Чеботарева²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ²Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: landysh-zaripova@rambler.ru, ²E-mail: elvchb@mail.ru

Аннотация. В статье приводится решение задачи Коши для одного факторизованного уравнения в частных производных, являющегося обобщением волнового уравнения. В качестве метода решения применяется метод Дюамеля. В статье также приводится реализация метода Дюамеля в системе компьютерной математики Maple.

1. Постановка задачи

Ищется функция $u(x, t)$, являющаяся решением уравнения (1) и удовлетворяющая начальным условиям (2).

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\right)u = f(x, t), t > 0, x \in R \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x). \quad (2)$$

Здесь a, b, α, β - постоянные, $f(x, t), \varphi(x), \psi(x)$ - заданные функции.

Данная задача редуцируется к двум задачам.

Задача V :

$$Lv = 0, \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x), v_t|_{t=0} = \psi(x). \quad (4)$$

Задача W :

$$Lw = f(x, t), \quad (5)$$

$$w|_{t=0} = 0, w_t|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Здесь $L = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\right)$.

Решение задачи (1)-(2) есть сумма решений данных задач:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).$$

2. Решение задачи V

Найдем общее решение уравнения (3). Начнем с уравнения

$$L_1 v_1 = 0,$$

где $L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta$. Его можно решить путем введения новых независимых переменных

$$\begin{cases} \xi = x - \alpha t, \\ \eta = t. \end{cases}$$

Тогда уравнение $L_1 v_1 = 0$ примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \beta\right)v_1 = 0.$$

Очевидно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$v_1(\xi, \eta) = e^{-\beta\eta}\Phi(\xi),$$

где $\Phi(\xi)$ - произвольная функция.

Возвращаясь к старым переменным, имеем

$$v_1(x, t) = e^{-\beta t}\Phi(x - \alpha t).$$

Аналогичным образом решается уравнение

$$L_2 v_2 = 0,$$

где $L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} + b$.

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$v_2(\xi, \eta) = e^{-\beta\eta} \Psi(\xi),$$

где $\Psi(\xi)$ - произвольная функция.

Возвращаясь к старым переменным, имеем

$$v_2(x, t) = e^{-bt} \Psi(x - at).$$

В силу того, что операторы L_1 и L_2 с постоянными коэффициентами, общее решение уравнения (3) имеет вид

$$v(x, t) = e^{-\beta t} \Phi(x - \alpha t) + e^{-bt} \Psi(x - at), \quad (7)$$

где Φ, Ψ - произвольные функции.

Пусть $(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 \neq 0$.

Подставляя (7) в начальные условия (4) получим систему

$$\begin{cases} \Phi(x) + \Psi(x) = \varphi(x), \\ -\beta\Phi(x) - \alpha\Phi'(x) - b\Psi(x) - a\Psi'(x) = \psi(x). \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда

$$(\alpha - a)\Psi'(x) + (\beta - b)\Psi(x) = \beta\varphi(x) + \alpha\varphi'(x) + \psi(x),$$

Если $\alpha = a, \beta \neq b$, то

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{1}{\beta - b} (\beta\varphi(x) + \alpha\varphi'(x) + \psi(x)), \\ \Phi(x) &= \varphi(x) - \frac{1}{\beta - b} (\beta\varphi(x) + \alpha\varphi'(x) + \psi(x)). \end{aligned}$$

Если же $\alpha \neq a$, то

$$\Psi'(x) + \frac{\beta - b}{\alpha - a} \Psi(x) = \frac{1}{\alpha - a} (\beta\varphi(x) + \alpha\varphi'(x) + \psi(x)).$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая его, получим

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= e^{-\int \frac{\beta - b}{\alpha - a} dx} \int_0^x \frac{1}{\alpha - a} (\beta\varphi(x) + \alpha\varphi'(x) + \psi(x)) e^{\int \frac{\beta - b}{\alpha - a} dx} dx, \\ \Psi(x) &= \frac{1}{\alpha - a} e^{-\frac{\beta - b}{\alpha - a} x} \int_0^x (\beta\varphi(x) + \alpha\varphi'(x) + \psi(x)) e^{\frac{\beta - b}{\alpha - a} x} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{\alpha - a} e^{-\frac{\beta - b}{\alpha - a} x} \int_0^x (\beta\varphi(x) + \alpha\varphi'(x) + \psi(x)) e^{\frac{\beta - b}{\alpha - a} x} dx.$$

В случае, когда $\alpha = a, \beta = b$, решение задачи V следует искать в виде

$$v(x, t) = e^{-bt} \Phi(x - at) + t e^{-bt} \Psi(x - at).$$

Тогда, используя начальные условия задачи V , найдем

$$\Phi(x) = \varphi(x), \Psi(x) = \psi(x) - \phi(x).$$

Таким образом, найдены формулы для определения решения задачи V . Перейдем к поиску решения задачи W .

3. Решение задачи W

В задаче W требуется найти решение уравнения (5) $w(x, t)$, удовлетворяющее условиям (6).

Докажем следующую теорему.

Теорема (принцип Дюамеля). Если функция $z = z(x, t, s)$ - решение задачи (9)-(10)

$$Lz = 0, t > s, x \in R \quad (9)$$

$$z(x, s, s) = 0, z_t(x, s, s) = f(x, s), \quad (10)$$

то функция

$$w = \int_0^t z(x, t, s) ds, t > 0, x \in R \quad (11)$$

является решением задачи (5)-(6).

Доказательство. Пусть

$$w = \int_0^t z(x, t, s) ds, t > 0, x \in R,$$

Тогда, с учетом (10) будем иметь

$$\begin{aligned} Lw(x, t) &= L_1 L_2 w(x, t) = L_1 L_2 \int_0^t z(x, t, s) ds = \\ &= L_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t z(x, t, s) ds + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t z(x, t, s) ds + \beta \int_0^t z(x, t, s) ds \right) = \\ &= L_1 \left(z(x, t, t) + \int_0^t (z_t(x, t, s) + \alpha z_x(x, t, s) + \beta z(x, t, s)) ds \right) = \\ &= L_1 \int_0^t L_2 z(x, t, s) ds = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t L_2 z(x, t, s) ds + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t L_2 z(x, t, s) ds + \beta \int_0^t L_2 z(x, t, s) ds = \\ &= L_2 z(x, t, t) + \int_0^t L_1 L_2 z(x, t, s) ds = \\ &= z_t(x, t, t) + \alpha z_x(x, t, t) + \beta z(x, t, t) + \int_0^t Lz(x, t, s) ds = f(x, t). \end{aligned}$$

Следовательно, $w(x, t)$ удовлетворяет условию (9). Очевидно также, что

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \int_0^0 z(x, 0, s) ds = 0, \\ w(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

Найдем теперь решение задачи (9)-(10).

Введем новую переменную $\tau = t - s$, тогда $t = s + \tau$. Переопределим

$$Z(x, \tau, s) = z(x, s + \tau, \tau).$$

Тогда задача (9)-(10) преобразуется к виду

$$LZ = 0, t > s, x \in R \quad (12)$$

$$Z(x, 0, s) = 0, Z_t(x, 0, s) = f(x, s), \quad (13)$$

Решение задачи (12)-(13) можно найти аналогично решению задачи V.

Пусть $(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 \neq 0$. Тогда

$$Z(x, \tau, s) = e^{-\beta\tau} R(x - \alpha\tau, \tau) + e^{-b\tau} P(x - a\tau, \tau).$$

Если $\alpha = a, \beta \neq b$, то $P(x, s) = \frac{1}{\beta - b} f(x, s)$. Если же $\alpha \neq a$, то

$$P'(x, s) + \frac{\beta - b}{\alpha - a} P(x, s) = \frac{1}{\alpha - a} f(x, s). \quad (14)$$

Разрешая уравнение (14) относительно $P(x, s)$ получим

$$P(x, s) = \frac{1}{\alpha - a} e^{-\frac{\beta - b}{\alpha - a} x} \int_0^x f(x, s) e^{\frac{\beta - b}{\alpha - a} x} dx,$$

Следовательно, $R(x, s) = -\frac{1}{\alpha - a} e^{-\frac{\beta - b}{\alpha - a} x} \int_0^x f(x, s) e^{\frac{\beta - b}{\alpha - a} x} dx$.

Таким образом,

$$Z(x, \tau, s) = e^{-b\tau} P(x - a\tau, s) - e^{-\beta\tau} P(x - \alpha\tau, s).$$

Т.к. $Z(x, \tau, s) = z(x, \tau + s, s)$, $\tau = t - s$, то

$$\begin{aligned} z(x, t, s) &= Z(x, t - s, s) = \\ &= e^{-b(t-s)} P(x - at + as, s) - e^{-\beta(t-s)} P(x - \alpha t + \alpha s, s) \end{aligned}$$

В случае, когда $\alpha = a, \beta = b$

$$Z(x, \tau, s) = e^{-b\tau} R(x - a\tau, s) + \tau e^{-b\tau} P(x - a\tau, s).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(x, s) &= 0, \\ P(x, s) &= f(x, s). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Z(x, \tau, s) &= \tau e^{-b\tau} f(x - a\tau, s), \\ z(x, t, s) &= (t - s) e^{-b(t-s)} f(x - at + as, s). \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(2) сводится к следующим шагам:

1. Вычисление функции $z(x, t)$.
2. Вычисление $w(x, t)$.
3. Вычисление $v(x, t)$.
4. Вычисление $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$.

4. Вывод формулы Даламбера

В случае, когда $a = -c, \alpha = c, b = \beta = 0, f(x, t) = 0$ уравнение (1) сводится к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t).$$

Тогда, согласно формулам из пунктов 2 и 3 будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{1}{2c} \int_0^x (c\varphi'(x) + \psi(x)) dx, \\ v(x, t) &= \varphi(x - ct) - \Psi(x - ct) + \Psi(x + ct) = \\ &= \varphi(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} (c\varphi'(x - ct) + \psi(x - ct)) d(x - ct) + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} (c\varphi'(x + ct) + \psi(x + ct)) d(x + ct) = \\ &= \frac{\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy. \\ P(x, s) &= \frac{1}{2c} \int_0^x f(x, s) dx, \\ z(x, t, s) &= \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^{x+c(t-s)} f(x + ct - cs, s) d(x + ct - cs) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-c(t-s)} f(x - ct + cs, s) d(x - ct + cs) = \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy, \\ w(x, t) &= \int_0^t z(x, t, s) ds = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds. \end{aligned}$$

Откуда

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds.$$

Полученное решение полностью совпадает с известной формулой Даламбера.

5. Реализация метода Дюамеля в Maple

Далее приводится процедура, реализующая алгоритм описанный выше. Входными данными являются константы a, b, α, β , а также функции $f(x, t), \varphi(x), \psi(x)$.

```
> duhamel:= proc(a,b,alpha,beta,f1,f2,f3)
local f,phi,psi,Phi,Psi,P,z,pl:
```

```

f(x,t):=f1; phi(x):=f2; psi(x):=f3;
if (a=alpha) and (b<>beta) then
Psi(x):=1/(beta-b)*(beta*phi(x)+alpha*diff(phi(x),x)+psi(x));
P(x,s):=1/(beta-b)*subs(t=s,f(x,t)); Phi(x):=phi(x)-Psi(x);
v(x,t):=exp(-beta*t)*subs(x=x-alpha*t,Phi(x))+
exp(-b*t)*subs(x=x-a*t,Psi(x));
z(x,t,s):=exp(-beta*(t-s))*subs(x=x-alpha*t+alpha*s,P(x,s))
-exp(-b*(t-s))*subs(x=x-a*t+a*s,P(x,s));
elif (a<>alpha) then
Psi(x):=1/(alpha-a)*exp(-(beta-b)/(alpha-a)*x)*
(int((beta*phi(x)+alpha*diff(phi(x),x)+psi(x))*
exp((beta-b)/(alpha-a)*x),x=0..x));
P(x,s):=1/(alpha-a)*exp(-(beta-b)/(alpha-a)*x)
*(int(subs(t=s,f(x,t))*
exp((beta-b)/(alpha-a)*x),x=0..x));
Phi(x):=phi(x)-Psi(x);
v(x,t):=exp(-beta*t)*subs(x=x-alpha*t,Phi(x))+
exp(-b*t)*subs(x=x-a*t,Psi(x));
z(x,t,s):=-exp(-beta*(t-s))*subs(x=x-alpha*t+alpha*s,P(x,s))
+exp(-b*(t-s))*subs(x=x-a*t+a*s,P(x,s));
elif (a=alpha) and (b=beta) then
Phi(x):=phi(x);Psi(x):=phi(x)-psi(x);
v(x,t):=exp(-beta*t)*subs(x=x-alpha*t,Phi(x))+
t*exp(-b*t)*subs(x=x-a*t,Psi(x));
z(x,t,s):=t*exp(-beta*(t-s))*subs(x=x-alpha*t+alpha*s,f(x,s));
end if;
w(x,t):=int(z(x,t,s),s=0..t);
u(x,t):=simplify(v(x,t)+w(x,t));
end proc;

```

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Найти решение уравнения (15), удовлетворяющее начальным условиям (16).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma x^2, t > 0, x \in R \quad (15)$$

$$u|_{t=0} = \lambda e^{-x}, u_t|_{t=0} = \mu. \quad (16)$$

В другом виде уравнение (15) можно записать как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \gamma x^2, t > 0, x \in R.$$

Используем процедуру **duhamel** чтобы найти решение задачи.

```

> a:=-c: alpha:=c: b:=0: beta:=0:
> f(x,t):=gamma*x^2: phi(x):=lambda*exp(-x): psi(x):=mu:
> U(x,t):=duhamel(a,b,alpha,beta,f(x,t),phi(x),psi(x)); В результате получим функцию

```

$$U(x,t) := \frac{1}{2}\lambda e^{-x+ct} + \mu t + \frac{1}{2}\lambda e^{-x-ct} + \frac{1}{12}c^2\gamma t^4 + \frac{1}{2}\gamma t^2 x^2$$

Выполним проверку. Проверим, что функция $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению (15).

```

> simplify(diff(U(x,t),t$2)+(a+alpha)*diff(U(x,t),x,t)+
a*alpha*diff(U(x,t),x$2)+(b*alpha+a*beta)*diff(U(x,t),x)+
(b+beta)*diff(U(x,t),t)+b*beta)-f(x,t);

```

0

Проверим, что функция $U(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям (16).

```

> subs(t=0,U(x,t))-phi(x); subs(t=0,diff(U(x,t),t))-psi(x);

```

0

0

Рассмотрим также еще одну задачу. Требуется найти решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям (18).

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial}{\partial x} + 7\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - 4\frac{\partial}{\partial x}\right) u = xt, \quad t > 0, x \in R \quad (17)$$

$$u|_{t=0} = x^2 + 3, u_t|_{t=0} = x - 1. \quad (18)$$

Используем процедуру **duhamel** чтобы найти решение задачи.

```
> a:=2: alpha:=-4: b:=7: beta:=0:
> f(x,t):=x*t: phi(x):=x^2+3: psi(x):=x-1:
> U(x,t):=duhamel(a,b,alpha,beta,f(x,t),phi(x),psi(x));
```

$$U(x, t) := x^2 + \frac{391}{49}xt + \frac{781}{49}t^2 + \frac{8908}{2401} - \frac{342}{343}x - \frac{1364}{343}t - \\ - \frac{1705}{2401}e^{-7t} + \frac{342}{343}xe^{-7t} - \frac{684}{343}e^{-7t}t + \frac{2}{21}t^3 + \frac{1}{14}xt^2$$

Выполним проверку. Проверим, что функция $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению (17).

```
> simplify(diff(U(x,t),t$2)+(a+alpha)*diff(U(x,t),x,t)+
a*alpha*diff(U(x,t),x$2)+(b*alpha+a*beta)*diff(U(x,t),x)+
(b+beta)*diff(U(x,t),t)+b*beta)-f(x,t);
```

0

Проверим, что функция $U(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (18).

```
> subs(t=0,U(x,t))-phi(x); subs(t=0,diff(U(x,t),t))-psi(x);
```

0

0

Литература

- [1] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов *Уравнения математической физики*. - М.: Физматлит, 2003.
- [2] А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. *Дифференциальные уравнения*. - М.: Физматлит, 2005.

**ПРОГРАММНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ
ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ И ОСНАЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ИХ
РЕШЕНИЙ**

Ю.Г. Игнатьев¹, О.А. Сачкова²

¹Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ²Казань,
Казанский (Приволжский) федеральный университет

¹E-mail: ignatev_yu@rambler.ru, ²E-mail: sachkova.olga@mail.ru

Аннотация. В статье описаны основные принципы математического моделирования и программные процедуры в системе компьютерной математики Maple решения дифференциальных уравнений, а также программные процедуры оснащенной динамической визуализации этих решений.

СКМ Maple позволяет находить в квадратурах общее решение систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с помощью стандартной команды $dsolve(Eqs, Vars)$, где Eqs - система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), записанных в виде неупорядоченного множества $Eq1, Eq2, \dots, Eqn$, $Vars$ - неупорядоченное множество искомым функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ (см., например, [5]). При этом решение выдается в виде неупорядоченного множества равенств:

$$y_1(x) = F_1(x, C_1, \dots, C_n), y_2(x) = F_2(x, C_1, \dots, C_n), \dots, y_n(x) = F_n(x, C_1, \dots, C_n) \quad (1)$$

в которых $F_i(x, C_1, \dots, C_n)$ - функции переменного x и n произвольных констант C_i ; при этом функции F_i могут выражаться через элементарные или специальные функции, либо в тех случаях, когда программе не удастся найти явное значение интегралов, записываться в виде квадратур. Решение же задачи Коши достигается в пакете Maple этой же командой в формате $dsolve(Eqs, IC, Vars)$, где IC - начальные условия. В этом случае решение выдается в явном виде:

$$y_1(x) = F_1(x), y_2(x) = F_2(x), \dots, y_n(x) = F_n(x) \quad (2)$$

Формат вывода решений (1) - (2) не позволяет непосредственно использовать полученные решения для их анализа и построения графиков. Для вывода решения в удобной для использования форме необходимо представить полученные решения в списочном формате векторной функции заданного аргумента. Программные процедуры $GenDifSolve$ и $DsolveCoush$ созданной нами библиотеки программных процедур ODES позволяют решить эту проблему и тем самым предоставляют пользователю возможность обращаться с решениями ОДУ, как с обычными функциями. Программная процедура $GenDifSolve(Eq, x, y, n, G)$ находит общее решение обыкновенного дифференциального уравнения Eq произвольного порядка n относительно функции $y(x)$ с приданием n произвольным константам имен G_i . Для адекватного представления компьютерных моделей объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), необходимо создать программные процедуры управляемой, оснащенной динамической визуализации. Технология создания управляемой, оснащенной динамической визуализации моделей также описана в [4]. Для повышения наглядности компьютерных моделей ОДУ можно использовать различный графический формат вывода решений: динамическая визуализация решения в виде графика функции с временной разверткой по переменной x , динамическая визуализация в формате динамической гистограммы и динамической цветовой/бело-серой визуализации. В случае цветовой визуализации каждому цвету (или освещенности) сопоставляется значение функции $y(x)$.

Программная процедура $AnimF(f, x, a, b, i)$ позволяет решить проблему визуализации решения дифференциального уравнения и представить это решение в виде графика функции. В этой процедуре f - решение дифференциального уравнения, x - переменная, $[a, b]$ - начало-конец отрезка анимации, i - число кадров. Рассмотрим пример решения дифференциального уравнения с начальными условиями в виде анимации фазовой траектории функции.

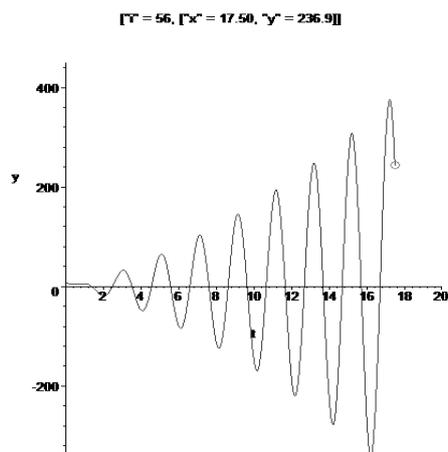


Рис.1. Вывод решения неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в виде анимации функции.

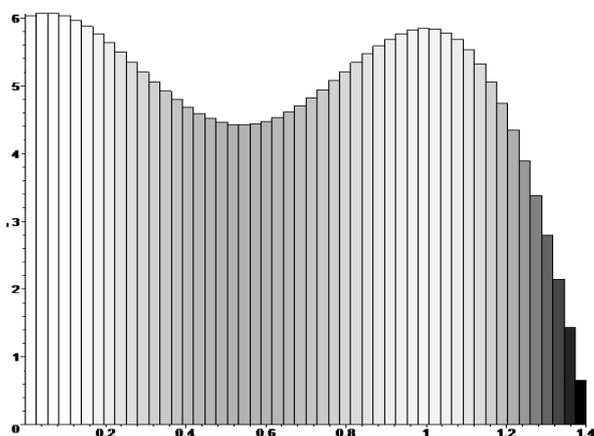


Рис.2. Вывод решения неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в виде динамической визуализации в формате динамической гистограммы и динамической цветовой/бело-серой визуализации.

Программная процедура $RectangleColor(f, x, k, a, N)$ выводит решение дифференциального уравнения в форме гистограммы. В данной процедуре f - решение дифференциального уравнения, x - переменная, a - интервал отрезка анимации, N - число кадров. Для большей наглядности динамическая визуализация $RectangleColor(f, x, k, a, N)$ решения дифференциального уравнения в форме гистограммы может быть реализовано в сочетании с анимацией цветом. При такой визуализации оттенкам серых цветов соответствуют меньшие значения функции, а темных - большие значения.

Таким образом, различные способы динамической визуализации с помощью системы компьютерной математики Maple позволяют наглядно представить решения дифференциальных уравнений, а, следовательно, эффективнее усвоить данный раздел высшей математики.

Литература

- [1] Ю.Г. Игнатъев, *Проблемы информационных технологий в математическом образовании: Учебное пособие под редакцией Ю.Г. Игнатъева.*, Казань: ТГПУ, 118 (2005).
- [2] О.А. Сачкова, *Программные процедуры оснащенной динамической визуализации автоматизированного решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Изд - во КГУ, том 44, 263 (2011).

МАПЛЕТ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

М.Н. Кирсанов¹, С.А. Ларичев²

¹НИУ МЭИ, Москва, ²НИУ МЭИ, Москва

¹E-mail: mpei2004@ya.ru, ²E-mail: s.a.larichev@gmail.com

Аннотация. Разработана программа для расчета прогиба плоской статически неопределимых балочных ферм. В программе находится прогиб в любой точке фермы от произвольной нагрузки. Есть возможность выбора формы верхнего пояса фермы, длин панелей и положения опор. Жесткости стержней принимаются одинаковыми.

В [1] описан маплет для определения усилий в произвольной (не обязательно балочной) плоской статически определимой ферме. Практика применения этого маплета показала его один недостаток — ввод данных. Для описания схемы фермы необходимо было вводить координаты всех шарниров и ориентированный граф стержней фермы с указанием номеров концов стержней. При вводе длинных списков трудно избежать ошибок. Если же ограничиться балочными фермами, то ввод можно выполнить по простой схеме, задав длины панелей и их высоты. Нижний пояс предполагается прямолинейным, верхний — криволинейным с произвольным очертанием. Более того, аналитические возможности системы Maple [2] позволяют рассчитать и статически неопределимую ферму с крестообразной решеткой, определив ее прогиб в произвольной точке.

Интерфейс программы (maplet), разработанный в системе аналитических вычислений Maple[1, 2], состоит из полей ввода размеров фермы и нагрузок (рис. 1).

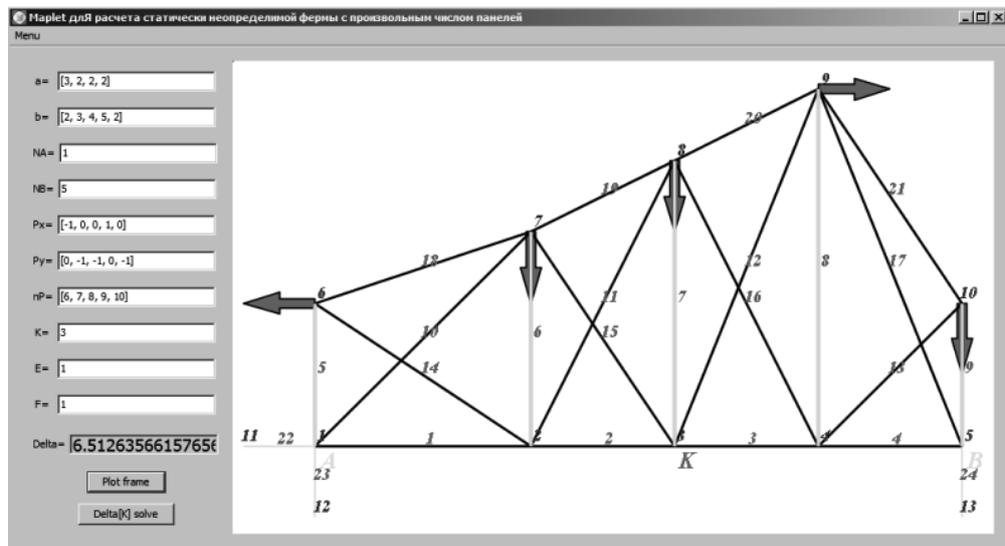


Fig 1. Маплет фермы произвольного очертания верхнего пояса

Опоры моделируем стержнями, подвижную опору — одним стержнем, неподвижную — двумя стержнями. Все стержни фермы (включая опорные) условно представляем векторами, направление которых выбираем произвольно. Эти векторы не связаны с усилиями в стержнях, и решение не зависит от выбора их направления. В программу вводятся концы стержней в виде векторов-строк N_{beg} , N_{end} . В программе используется метод вырезания узлов. Опорные стержни-векторы должны быть направлены от фермы к неподвижному узлам. Кроме того, опорные шарниры нумеруются последними. Последние условия существенные и невыполнение их часто является причиной ошибок ввода. Связано это с условным оператором, работающем в цикле по числу стержней. Усилия во всех стержнях, кроме опорных, входят в систему дважды — в уравнение равновесия узла-начала и в уравнение узла-конца стержня. Соответствующие направляющие косинусы имеют противоположные знаки. Разрешающая матрица размером $N \times N$ системы содержит направляющие косинусы стержней.

Вводится вектор свободных членов системы B . В него заносится информация о нагрузках. Горизонтальные и вертикальные нагрузки образуют отдельные списки F_x и F_y . Даже тогда, когда нагрузка единственная, как в данном случае, ее значение оформляется в виде двух списков длиной 1. Длина списка (число векторов сил) вычисляется оператором `nops`. Списки F_x и F_y должны иметь одинаковую длину.

Решение системы получается с помощью оператора `LinearSolve` пакета `LinearAlgebra`. Но этот способ решения системы линейных уравнений в Maple не единственный. Можно, например, найти обратную матрицу G^{-1} , а затем умножить ее на вектор свободных членов: $S := -G^{-1} \cdot B$. Здесь точка — знак умножения матрицы на матрицу или матрицы на вектор. При этом не требуется загружать пакет `LinearSolve`. Обратная матрица в Maple может быть также найдена с помощью простого деления: $1/G$.

Программа оформлена в виде маплета. Общая структура программы следующая:

```
FermaModule:=module()
  Frm:=proc()
    end proc;

  runFerma:=proc()
    end proc;
end module:
FermaModule:-runFerma():
```

В целом программа записана в модуль `FermaModule` с двумя процедурами `Frm` и `runFerma`. В первой производятся вычисления, во второй организован интерфейс программы. Программа запускается вызовом процедуры `runFerma` из модуля `FermaModule`.

Опишем структуру каждой процедуры. Схема процедуры вычислений `Frm` имеет вид

```
Frm:=proc() use Maplets[Tools] in
  • ввод данных оператором Get;
  • изображение фермы Ris, состоящее из стержней R[i], i=1..N, нагрузок iF, составленное из стрелок arrow, шарниров Шарнир[i], i=1..M;
  • заполнение матрицы направляющих косинусов G;
  • заполнение вектора правых частей B (нечетные строки B — горизонтальная нагрузка, четные — вертикальная);
  • получение решения S системы оператором LinearSolve;
  • занесение решения в таблицу оператором Set;

end use:
Ris:
end proc;
```

Последним в процедуре вызван рисунок `Ris`, поэтому при обращении `display(Frm())` в процедуре интерфейса на дисплее появится изображение фермы.

Структура процедуры `runFerma`, задающей интерфейс программы, следующая:

```
runFerma:=proc()
  переменные; константы;
  use Maplets:-Elements in
  обозначения элементов интерфейса;
  mplt:= Maplet(Evaluate(),Window());
  Maplets:-Display(mplt);
end use;
end proc;
```

Для раскрытия статической неопределимости использован метод сил [3]. В качестве основной системы выбирается ферма без стержней нижнего пояса. Усилия в отброшенных стержнях принимается за неизвестные метода сил. Таким образом, ферма с n панелями в полупролете имеет степень статической неопределимости $2n$.

Коэффициенты канонических уравнений по формулам Максвелла-Мора [3]

$$\sum_{j=1}^{2n} \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP}, i = 1, \dots, 2n;$$

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{s_{k,i} s_{k,j} l_k}{E_k F_k}, \quad \Delta_{iP} = \sum_{k=1}^N \frac{s_{k,i} S_{k,P} l_k}{E_k F_k},$$

где N — число стержней, $s_{k,i}$ — усилие в стержне k от действия единичной силы по направлению i -й неизвестной, $S_{k,P}$ — усилие в стержне k от действия нагрузки. Жесткости стержней приняты одинаковыми $E_k F_k = EF$, кроме жесткостей стоек, для которых $E_v F_v \rightarrow \infty$, v — номера стоек.

Для сделанного предположения о жесткости стоек система уравнений разделяется. Матрица принимает диагональную форму $\delta_{ij} = 0, i \neq j$.

Усилия в стержнях статически неопределимой фермы S_k находим по формуле

$$S_i = S_{i,P} + \sum_{k=1}^{2n} s_{k,i} X_k, i = 1, \dots, N.$$

Прогиб определяем по формуле Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^N \frac{S_k S_k^{(1)} l_k}{E_k F_k}.$$

где $S_k^{(1)}$ — усилия в статически определимой ферме от действия единичной вертикальной силы, приложенной в заданном узле (его номер K можно задать в окне маплета)

Сделанное предположение о жесткости стоек позволяет решить задачу аналитически для произвольного числа панелей n в полупролете. Получена аналитическая формула для нахождения прогиба центральной точки нижнего яруса фермы с четным количеством панелей ($2n$), одинаковыми длинами панелей (a) и высотами стоек (b), рисунок 2.

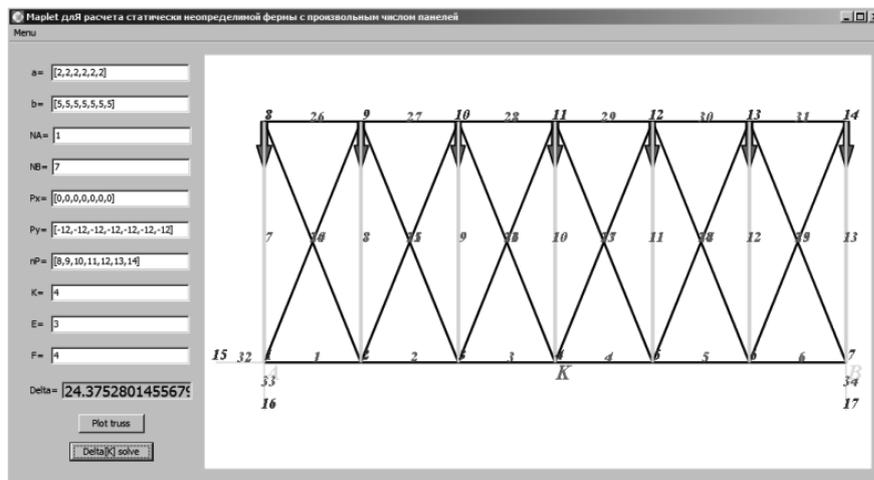


Fig 2. Маплет балочной фермы для контроля аналитической формулы

С использованием индуктивных методов, развитых в системе Maple [1], получена точная формула

$$\Delta = \frac{PL^3}{96nEFb^2} \left(5n^2 - 2 + 3 \left(1 + \left(\frac{2nb}{L} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

где вертикальная нагрузка P равномерно распределена по верхнему ярусу фермы, $L = 2na$ — пролет фермы, b — высота стоек фермы, E модуль Юнга, F площадь сечения стержней. Найдена оптимальное соотношение высоты и длины фермы. При

$$b/L = \frac{\sqrt[3]{90n^2 - 36}}{6n}$$

прогиб фермы минимальный. Точность последней формулы возрастает с числом панелей n . С разумной точностью формула справедлива при $n > 3$. С увеличением n оптимальное соотношение b/L уменьшается.

Литература

- [1] *Кирсанов М.Н.*, Maple и Maple. Решения задач механики: Учебное пособие/ СПб.: Издательство "Лань" 2012.
- [2] *Дьяконов В.П.*, Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. - М.: ДМК-Пресс, 2011
- [3] *Потапов В. Д., Александров А. В., Косицын С. Б., Долотказин Д. Б.* Строительная механика: Учебник для вузов. Кн. 1. Статика упругих систем / Под ред. В. Д. Потапова. — М.: Высш. шк., 2007.

АЛГЕБРА И ЛОГИКА В ПАКЕТЕ MAPLE

И.А. Кох¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: kokh90@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрены программные процедуры для абстрактных вычислений с множествами, а также булевы операции.

В современном мире, в эпоху всеобщей компьютеризации общества особое значение имеет логика, логические операции, поскольку именно они являются основой программирования. Пакеты символьной математики, такие как *Maple*, позволяют проводить различные вычисления, связанные с этими разделами математики, но методы и способы этих вычислений в современной литературе практически не изложены. Темой работы является алгебра и логика в пакете *Maple*. В ней приводится обзор теории, связанной с основными понятиями алгебры и логики; рассмотрены основные команды пакета *Maple*, ответственные за работу со списками и множествами. В результате создано электронное учебное пособие, которое содержит подробный разбор команд, предусмотренных для проведения различных вычислений, связанных с множествами и списками, и содержит большое количество примеров по их использованию. Работа состоит из введения, 3-х глав и заключения. В первой главе производится подробное описание основных понятий алгебра и логики, такие как множество, кортеж, соответствие, а также приводятся примеры действий над ними. Вторая глава посвящена использованию пакета символьной математики при выполнении различных действий с этими понятиями. В третьей главе представлено электронное пособие - это пособие по основным функциям, ответственных за работу с множествами и списками в пакете *Maple*, которое представлено в удобной форме, описано подробно и на доступном языке. Электронное пособие четко структурировано и состоит из трех основных разделов. Первый раздел посвящен описанию различных способов создания множеств и списков, второй - общим функциям для работы со множествами и числами, а в третьем - подробно описываются функции пакета *ListTool*, которые предназначены для работы со списками. Стоит отметить, что пособие выполнено в двух форматах, "dvi" и "pdf" и является оригинальным, оно не имеет аналогов и предназначено для обучения студентов математических факультетов.

Литература

- [1] Дьяконов В. П., *Maple 9.5/10* в математике, физике и образовании// Москва: "СОЛОН-Пресс", 2006.
- [2] *Maple 13*, 2009//Help

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЙНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВЕЙВЛЕТОВ

Е.К. Липачёв¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: elipachev@gmail.com

Аннотация. Моделирование процесса распространения электромагнитных волн, рассеянных неровной поверхностью, проведено на основе методов приближенного решения интегральных уравнений, эквивалентных краевым задачам дифракции. Предложены вычислительные схемы вейвлет-метода Галеркина с использованием вейвлетов Добеши и койфлетов. Отмечены особенности компьютерного моделирования рассеяния волн в системах *Mathematica* и *MATLAB*.

1 Задачи рассеяния волн областями с неровной границей

Периодические границы, плоскость с частично деформированным участком являются примерами неровных границ. Неровные границы рассматриваются при исследовании волновых процессов в задачах акустики океана (см., напр., [1]), задачах дифракции электромагнитных волн (см., напр., [2], [3]), задачах рассеяния света наноструктурами (см., напр., [4]). Неровность границы определяется отношением геометрических параметров границы (напр., период, разность максимального и минимального значений) и длины волны. Порядок этих отношений является основой классификации неровных поверхностей (см., напр., [5]), а также определяет различие методов исследования. В задачах дифракции электромагнитных волн длина волны соизмерима с размерами неровностей (см., напр., [2]).

Исследования задач дифракции в сложных случаях неровной границы проведены в работах [6]–[10]. Частным случаем неровной границы является полуплоскость с конечным включением на границе. Алгоритм решения и численные расчеты для задачи дифракции электромагнитных волн для полуплоскости с конечным периодическим включением предложены в работе [11]. Эта задача, причем в более широкой постановке, исследована в более ранней работе [12], в которой также проведено полное теоретическое обоснование, включающее исследование разрешимости задачи и доказательство сходимости приближенных методов. Задача дифракции волн на периодической решетке с частично деформированным участком исследована в работе [13]. Вейвлеты в задачах дифракции использовались в работах [14], [15].

2 Модель в виде краевых задач

В случае источника излучения в виде плоской монохроматической волны краевые задачи дифракции электромагнитных волн на неровной границе $\Gamma = (x, h(x))$ формулируются в виде уравнения Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (1)$$

граничного условия

$$(\gamma_0 u)(x, y) = f(x), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

в случае *TE*-поляризованной падающей волны и граничного условия

$$(\gamma_1 u)(x, y) = g(x), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (3)$$

— для *TM*-поляризованной (см., напр., [2]), а также условия излучения на бесконечности

$$u^* = e^{ikr} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u^*}{\partial r} - ik u^* = e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $u^*(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$.

Здесь $u \in H^1$, $f \in H^{1/2}$, $g \in H^{-1/2}$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\text{Im } k \geq 0$, γ_0, γ_1 — функции следа решения и производной по нормали на границе области, H^s — пространство Соболева (см., напр., [17], [18]), $\tilde{u}(x, y) = e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} - e^{-ik(x \cos \theta - y \sin \theta)}$ — решение задачи на полуплоскости, θ — угол падения электромагнитной волны. В случае периодической границы используются парциальные условия на бесконечности (см., напр., [16]). Если граница Γ из класса $C^{(1, \nu)}$, $\nu \in (0, 1]$, то $\gamma_0 u = u|_{\Gamma}$, $\gamma_1 u = \partial_n u|_{\Gamma}$, где ∂_n — правильная производная по нормали к границе.

В случае дифракции электромагнитных волн на границе раздела областей $D^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > h(x)\}$, $D^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < h(x)\}$ в качестве математической модели используется задача сопряжения

Требуется найти пару функций $u^\pm \in H^1(D^\pm)$, таких что

$$\begin{aligned} \Delta u^\pm(x, y) + k^{\pm 2} u^\pm(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in D^\pm, \\ \gamma_0^+ u^+(x, y) - \gamma_0^- u^-(x, y) &= f(x), \quad (x, y) \in \Gamma \equiv \partial D^+ = \partial D^-, \\ p^+ \gamma_1^+ u^+(x, y) - p^- \gamma_1^- u^-(x, y) &= g(x), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

кроме того, выполнены условия излучения. Здесь $f \in H^{1/2}(\Gamma)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ — заданные функции, p^\pm — заданные комплексные величины, γ_0^\pm — операторы следа, γ_1^\pm — операторы следа нормальной производной на границе областей (см., напр., [17]). Через $\tilde{u}^+(x, y)$, $\tilde{u}^-(x, y)$ обозначено решение задачи сопряжения на границе раздела полуплоскостей ([19]).

В случае диэлектрических сред числа k^\pm выражаются в виде $\omega \sqrt{\varepsilon^\pm \mu^\pm}$, где ε^\pm — электрические проницаемости, а μ^\pm — магнитные проницаемости сред D^\pm , $p^\pm = \mu_0 / \mu^\pm$ — в случае TE -поляризации и $p^\pm = \varepsilon_0 / \varepsilon^\pm$ — в случае TM -поляризации, ε_0 , μ_0 — электрическая и магнитная проницаемости вакуума.

3 Интегральные уравнения

Эффективная методика получения интегральных уравнений, эквивалентных краевым задачам дифракции, состоит в применении теории потенциала и метода интегральных уравнений (см., напр., [20]). В случае неровных границ используются обобщенные потенциалы (см., напр., [8], [21]) и операторы типа потенциала (см., напр., [22]).

Как показано в работах [8], [9], [12], краевая задача (1)–(4) имеет единственное решение при условиях $\text{Im } k \geq 0$, $\text{Re } k \neq 0$ и для решения справедливо представление

$$u(x, y) = \tilde{u}(x, y) + v(x, y), \quad (6)$$

$$v(x, y) = (W(k)\sigma)(x, y) = \int_{\Gamma^*} \partial_{n(P)} G_1(k; M, P) \sigma(\tau) ds_P \quad (7)$$

– в случае TE -поляризованной волны и

$$v(x, y) = (V(k)\sigma)(x, y) = \int_{\Gamma^*} G_2(k; M, P) \sigma(\tau) ds_P \quad (8)$$

– в случае TM -поляризации. Функция $\sigma(x)$ является решением интегрального уравнения

$$-\pi\sigma(x) + \int_0^d \partial_{n(P)} G_1(k; M, P) \sqrt{1 + h'^2(\tau)} \sigma(\tau) d\tau = -\tilde{u}(x, h(x)) \quad (9)$$

для задачи дифракции TE -поляризованной волны и

$$-\pi\sigma(x) + \int_0^d \partial_{n(M)} G_2(k; M, P) \sqrt{1 + h'^2(\tau)} \sigma(\tau) d\tau = -\partial_{n(M)} \tilde{u}(x, h(x)) \quad (10)$$

– для случая TM -поляризации. Для этих уравнений будем использовать операторную форму

$$Az \equiv (I - T)z = \chi. \quad (11)$$

В формулах (7)–(10) используются функции (аналоги функции Грина)

$$G_m(k; M, P) = \frac{\pi i}{2} \left\{ H_0^{(1)}(kr) - (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*) \right\}, \quad m = 1, 2, \quad (12)$$

$M = (x, y)$, $P = (\tau, h(\tau))$, $r = \sqrt{(x - \tau)^2 + (y - h(\tau))^2}$, $r^* = \sqrt{(x - \tau)^2 + (y + h(\tau))^2}$, Γ^* — неровный участок границы Γ , $d = \text{supp } h(x)$ — длина неровного участка границы. Через $H_0^{(1)}(z)$ обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка.

В случае периодической границы в формулах (7)–(10) используется функция

$$G(k; M, P) = -\frac{\pi i}{d} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_n} \exp[i\alpha_n(x - \tau) + i\beta_n|y - h(\tau)|], \quad (13)$$

где d — период функции $h(x)$, $\alpha_n = \sin \theta + \frac{2\pi n}{d}$, $\beta_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, причем ветвь корня выбрана так, что $\text{Im } \beta_n \geq 0$.

Задача сопряжения (5) имеет единственное решение (см. [19]) при условиях

$$k^+ \neq k^-, \quad \text{Im } k^+ \geq 0, \quad \text{Im } k^- \geq 0, \quad \text{sign}(\text{Re } k^+) = \text{sign}(\text{Re } k^-), \quad (14)$$

$$p^+ \bar{p}^- \in \mathbb{R}, \quad p^+ \bar{p}^- \geq 0. \quad (15)$$

Решение задачи сопряжения представимо в виде

$$u^\pm = \frac{1}{p^\pm} V(k^\pm) \sigma + W(k^\pm) \rho + \tilde{u}^\pm, \quad (16)$$

причем функции σ , ρ являются решением системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{A}z &\equiv (E - T)z = \chi, \\ z &= \begin{bmatrix} \sigma \\ \rho \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{bmatrix} g - (\tilde{u}^+ - \tilde{u}^-) \\ h - (p^+ \partial_{n(M)} \tilde{u}^+ - p^- \partial_{n(M)} \tilde{u}^-) \end{bmatrix}, \\ E &= \begin{pmatrix} -\pi(1/p^+ + 1/p^-)I & 0 \\ 0 & 2\pi I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Через I обозначен единичный оператор, а обозначения T_{ij} используются для интегральных операторов

$$(T_{ij}\phi)(x) = \int_0^d t_{ij}(x, \tau) \sqrt{1 + h'^2(\tau)} \phi(\tau) d\tau \quad i, j = 1, 2,$$

с ядрами t_{ij} , определяемыми соотношениями

$$\begin{aligned} t_{21}(x, \tau) &= \partial_{n(M)n(P)}^2 G_1(k^+; M, P) - \partial_{n(M)n(P)}^2 G_1(k^-; M, P), \\ t_{22}(x, \tau) &= \partial_{n(M)n(P)}^2 G_2(k^+; M, P) - \partial_{n(M)n(P)}^2 G_2(k^-; M, P), \\ q_2(x) &= h(M) - [p^+ \partial_{n(M)} \tilde{u}^+(M) - p^- \partial_{n(M)} \tilde{u}^-(M)]. \end{aligned}$$

Ядра интегральных операторов в уравнениях (9), (10), (17) имеют логарифмическую особенность при совпадении аргументов.

4 Вейвлеты как аппарат приближений

В качестве аппроксимирующих пространств при построении приближенного решения интегральных уравнений рассматривались пространства V_m кратномасштабного разложения пространства $L_2(\Gamma)$:

$$L_2(\Gamma) = \overline{\bigcup V_j}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (18)$$

ортонормированный базис пространства V_j задается функциями

$$\varphi_{jk}(x) \equiv 2^{j/2} \varphi(2^j \varphi(x) - k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

а функции

$$\psi_{jk}(x) \equiv 2^{j/2} \varphi(2^j \psi(x) - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

образуют ортонормированный базис пространства W_j , $\varphi(x)$ — масштабирующая функция, $\psi(x)$ — вейвлет-функция (см., напр., [23], [25]).

Алгоритмы приближенного решения интегральных уравнений (9), (10), (17) основаны на аппроксимации решений вейвлетами Добеши и койфлетами (см., [24], [26]).

Вейвлеты Добеши и койфлеты не имеют аналитических выражений и задаются с помощью масштабирующих уравнений

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k), \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_k (-1)^k h_{1-k} \varphi(2x - k). \quad (19)$$

По порядку N нулевых моментов

$$\int x^k \psi(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (20)$$

выделяют различные семейства вейвлетов Добеши. Для случая $N = 2$ (см., напр., [27]):

$$\varphi(x) = c_0 \varphi(2x) + c_1 \varphi(2x - 1) + c_2 \varphi(2x - 2) + c_3 \varphi(2x - 3), \quad (21)$$

$$\psi(x) = c_3 \varphi(2x + 2) - c_2 \varphi(2x + 1) + c_1 \varphi(2x) - c_0 \varphi(2x - 1), \quad (22)$$

$$c_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \quad c_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \quad c_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \quad c_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4},$$

$$\text{supp } \varphi = [0, 3], \quad \text{supp } \psi = [-1, 2].$$

Коэффициенты масштабирующего уравнения вейвлетов Добеши для более высоких значений N приведены во многих книгах по вейвлетам (см., напр., [24], [26]).

В алгоритмах приближенных вычислений вейвлеты Добеши вычислялись с помощью каскадного алгоритма (см., напр., [27]).

Койфлеты порядка N представляют ортогональную вейвлет-систему с компактным носителем, для которой выполнено условие (20), а также условия

$$\int \varphi(x) dx = 1, \quad \int x^k \varphi(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Коэффициенты масштабирующего уравнения (19) для койфлетов можно найти в [24], [26], [27].

В системе Mathematica 8 введена полная интегрированная система вейвлет-анализа, в частности, для вычисления вейвлетов Добеши и койфлетов порядка n реализованы функции DaubechiesWavelet[n], CoifletWavelet[n], (см., [28], [29]). Для работы с вейвлетами в системе MATLAB используется пакет расширений Wavelet Toolbox (см., напр., [23], [30]).

5 Вейвлетный вариант метода Галёркина

В качестве аппроксимирующих пространств в алгоритме приближенного решения интегральных уравнений (11) и (17) используются пространства

$$X_n = V_n = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_n$$

и приближенное решение $z_n(x)$ ищется в виде

$$z_n = \sum_k c_k \varphi_{0k} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_k d_{jk} \psi_{jk}. \quad (23)$$

Коэффициенты $\{c_k; d_{j,k}\}_{j,k}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений метода Галёркина:

$$\mathbf{A}_n z_n = \chi_n, \quad \mathbf{A}_n = (\mathcal{A}F_n, F_n)_2, \quad \chi_n = (\chi, F_n)_2, \quad (24)$$

где $F_n = \Phi_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} \Psi_j \right)$, $\Phi_0 = \{\varphi_{0k}\}_k$, $\Psi_j = \{\psi_{j,k}\}_k$.

Работа поддержана РФФИ (проекты №№12-07-00667 и 12-07-97018-р_поволжье).

Литература

- [1] Л. М. Бреховских, Ю. П. Лысанов, *Теоретические основы акустики океана*, Л.: Гидрометеоздат (1982).
- [2] L. Tsang, J. A. Kong, K. H. Ding, C. A. Ao, *Scattering of Electromagnetic waves*, in 3 Vols, New York: A Wiley – Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc. (2000, 2001).
- [3] E.R. Pike, P.C. Sabatier (Eds.), *Scattering – Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, Academic Press, London (2002).
- [4] A.A. Maradudin (Ed.), *Light Scattering and Nanoscale Surface Roughness*, Springer Science-Business Media (2007).
- [5] T.P. Künzler *Surface Morphology Gradients*, Doctoral Thesis ETH, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich (2007). URL: <http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:29763/eth-29763-02.pdf>
- [6] Е. К. Липачев, *О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в областях с неровной границей*, Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского, Казань: Казан. матем. общество, 17 (2002).
- [7] T. Arens, S.N. Chandler–Wilde, J.A. DeSanto, *On integral equation and least squares methods for scattering by diffraction gratings*, Comm. in computational physics, 1 (2006).
- [8] Е. К. Липачев, *Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в областях с неровной границей*, Изв. вузов. Математика, № 9 (2006).
- [9] Е. К. Липачев, *Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в неограниченных областях с кусочно-гладким участком границы*, Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.–матем. науки, 148 (2006).
- [10] J.A. Fawcett, *A simplified approach to solving finite rough surface scattering problems*, J. Acoust. Soc. Am., 125 (2009).

- [11] A. Kashihara, J. Nakayama, *Scattering of TM Plane Wave from a Finite Periodic Surface*, Electronics and Communications in Japan, 89, No. 3 (2006).
- [12] Е. К. Липачев, *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей*, Изв. вузов. Математика, № 4 (2001).
- [13] Липачев Е.К., *Приближенное решение задачи рассеяния волн периодической структурой с включением*, Труды Междун. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики”, Орёл, ОГУ (2002).
- [14] J. DeSanto, G. Erdmann, W. Hereman, M. Misra, *Application of Wavelet Transforms for Solving Integral Equations that arise in Rough Surface Scattering*, Antennas and Propagation Magazine, IEEE, V. 43, Issue 6 (2001).
- [15] Y. Tretiakov, G. Pan, *Coifman wavelets in electromagnetic wave scattering by a groove in a conducting plane*, Progress in Electromagnetics Research, 45 (2004).
- [16] А. С. Ильинский, “*Парциальные*” условия излучения и их применение в электромагнитной волновой теории, Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского, Казань: Казан. матем. общество, 6 (2000).
- [17] M. Costabel, *Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results*, SIAM J. Math. Anal, 19 (1988).
- [18] L. C. Tartar, *An Introduction to Sobolev spaces and Interpolation Spaces*, CNA Summer School Lectures Notes (2001).
- [19] Е. К. Липачев, *Интегральные уравнения в задаче рассеяния волн на неровной границе раздела областей*, Изв. вузов. Математика, № 8 (2007).
- [20] Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния*, М.: Мир (1987).
- [21] А. С. Ильинский, Ю.В. Шестопапов, *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн*, М.: Изд-во Моск. ун-та (1989).
- [22] М. С. Агранович, Р. Менникен, *Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности*, Матем. сб., 199 (1999),
- [23] Н.К. Смоленцев, *Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB*, М.: ДМК Пресс (2005).
- [24] W. Härdle, G. Kerkycharian, D. Picard, A. Tsybakov, *Wavelets, Approximation and Statistical Applications*, Seminar Paris-Berlin (1997).
- [25] K. Urban, *Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Oxford University Press, Inc. (2009).
- [26] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика” (2001).
- [27] G. Pan, *Wavelets in Electromagnetics and Device Modeling*, John Wiley & Sons, Inc. (2003).
- [28] *Wavelet Analysis. Wolfram Mathematica Documentation Center*, URL: <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Wavelets.html>.
- [29] *Основы теории вейвлетов с пакетом Mathematica. Wavelet Explorer*, URL: http://www.math.kemsu.ru/kma/archiv/wav_math_hm/kniga.htm.
- [30] *Wavelet Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc. (2006).

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО В – ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Р.М. Мавлявиев¹, И.Б. Гарипов²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ²Казанский
(Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: mavly72@mail.ru, ²E-mail: ilnur_garipov@mail.ru

Аннотация. В статье строится фундаментальное решение одного линейного В – эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами.

Пусть D — конечная область в верхней полуплоскости E_2^+ координатной плоскости Oxy , ограниченная кривой Γ с концами в точках $P_1(p_1; 0)$ и $P_2(p_2; 0)$ и отрезком $\Gamma_0 = [P_1, P_2]$ оси координат Ox , $D_e = E_2^+ \setminus \overline{D}$, $\Gamma_{0e} = Ox \setminus \Gamma_0$.

Рассмотрим линейное B -эллиптическое уравнение заданное в E_2^+

$$L(u) = 0, \tag{1}$$

где $L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-k} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^k \frac{\partial}{\partial y} \right) + 2a \frac{\partial}{\partial x} - c^2$, $B_y \equiv y^{-k} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^k \frac{\partial}{\partial y} \right)$ — оператор Бесселя, $c > a > 0$ и $k > 0$ — заданные действительные числа.

Множество четных по y бесконечно непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в E_2^+ обозначим через G_B^+ . Функции из множества G_B^+ будем называть основными.

Определение 1. Функция $\mathcal{E}(x, y; x_0, y_0)$ называется фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $M_0(x_0, y_0) \in E_2^+$, если она локально суммируема, является решением уравнения (1) во всех точках $E_2^+ \setminus M_0(x_0, y_0)$ и удовлетворяет для любой, не равной нулю в точке M_0 основной функции φ равенству

$$\iint_{E_2^+} \mathcal{E}(x, y; x_0, y_0) L(\varphi(x, y)) y^k dx dy = -\varphi(x_0, y_0) \tag{2}$$

или в терминах обобщенных функций, уравнению

$$L(\mathcal{E}(x, y; x_0, y_0)) = \delta(x - x_0, y - y_0). \tag{3}$$

С помощью замены

$$u(x, y) = e^{-ax} u_1(x, y), \tag{4}$$

уравнение (1) приводится к B -эллиптическому уравнению Гельмгольца

$$\Delta_B u_1 - l^2 u_1 = 0, \tag{5}$$

где $\Delta_B \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_y$, $l^2 = a^2 + c^2$.

Ищем решение уравнения (5) в виде

$$u_1(x, y) = \omega(r), \tag{6}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставляя функцию (6) в уравнение (5), получаем

$$\omega'' + \frac{k+1}{r} \omega' - l^2 \omega = 0 \tag{7}$$

или

$$r^2 \omega'' + (k+1)r \omega' - l^2 r^2 \omega = 0. \tag{8}$$

При помощи введения новой переменной t и новой функции z по формулам

$$\omega = \left(\frac{t}{l} \right)^{-\frac{k}{2}} z, \quad r = \frac{t}{l} \tag{9}$$

уравнение (8) приводится к модифицированному уравнению Бесселя

$$t^2 z'' + tz' - (t^2 + \nu^2) z = 0, \tag{10}$$

где $\nu = \frac{k}{2}$.

Известно [1], что частными решениями этого уравнения являются функции $I_\nu(t)$, $I_{-\nu}(t)$ и функция Макдональда

$$K_\nu(t) = \frac{\pi}{2} \frac{I_\nu(t) - I_{-\nu}(t)}{\sin \nu \pi}. \tag{11}$$

Возвращаясь к старым переменной r и функции ω , по формулам (9), получаем частное решение уравнения (8)

$$\omega(r) = Cr^{-\nu} K_\nu(lr), \tag{12}$$

где C — нормирующая постоянная.

Нетрудно проверить, имеет место следующая асимптотическая формула

$$\omega(r) = O(e^{-r}). \tag{13}$$

Разлагая функцию $K_\nu(r)$ в степенной ряд в решении (12), преобразуем его к виду

$$\omega(r) = \frac{\pi C}{2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)} r^{-2\nu} + \omega_1(r), \quad (14)$$

где функция $\omega_1(r)$ имеет меньшую особенность, чем $r^{-2\nu}$. Следовательно, решение исходного уравнения (1), с учетом замены (4) представляется в виде

$$u(x, y) = \frac{C\pi e^{-ax}}{2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)} r^{-2\nu} + u_2(x, y). \quad (15)$$

На основании разложения в степенной ряд экспоненты

$$e^{-ax} = 1 - ax + \frac{a^2 x^2}{2!} - \frac{a^3 x^3}{3!} + \dots$$

и с учетом значения $\nu = \frac{k}{2}$, получаем,

$$u(x, y) = \frac{C\pi}{2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)} r^{-k} + u_3(x, y). \quad (16)$$

Следовательно, функция (15) имеет в начале координат особенность вида r^{-k} , тем самым является фундаментальным решением уравнения (1) (с особенностью в начале координат).

Для получения фундаментального решения с особенностью в произвольной точке $M_0(x_0, y_0) \in E_2^+$ применим к функции (16) оператор обобщенного сдвига [2], который определяется формулой

$$T_{x,y}^{x_0,y_0} f(x, y) = C_k \int_0^\pi f\left(x - x_0, \sqrt{y^2 + y_0^2 - 2yy_0 \cos \alpha}\right) \sin^{k-1} \alpha d\alpha$$

где

$$C_k^{-1} = \int_0^\pi \sin^{k-1} \alpha d\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

В результате указанной операции получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, y; x_0, y_0) &= \frac{\pi C C_k}{2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)} \int_0^\pi \left((x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2 - 2yy_0 \cos \alpha\right)^{-\nu} \sin^{k-1} \alpha d\alpha + \\ &+ \omega_3(x, y; x_0, y_0), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\omega_3(x, y; x_0, y_0)$ — регулярная функция в точке M_0 .

Докажем, что интеграл в (17) имеет логарифмическую особенность в точке M_0 . Для этого запишем этот интеграл в виде

$$J = \int_0^\pi \left(r_{MM_0}^2 + 4yy_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{-\nu} \sin^{k-1} \alpha d\alpha, \quad (18)$$

где $r_{MM_0}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

Введем замену

$$r_{MM_0}^2 = 4yy_0 t^2. \quad (19)$$

Тогда этот интеграл переписывается следующим образом

$$J = (4yy_0)^{-\nu} \int_0^\pi \left(t^2 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{-\nu} \sin^{k-1} \alpha d\alpha. \quad (20)$$

Очевидно, что разница между интегралом (20) и интегралом

$$J_1 = (4yy_0)^{-\nu} \int_0^\pi \left(t^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)^{-\nu} \alpha^{k-1} d\alpha, \quad (21)$$

является регулярной функцией в E_2^+ . Отсюда следует, что интеграл (20) можно представить в виде

$$J = (4yy_0)^{-\nu} \int_0^{\pi} \left(t^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right)^{-\nu} \alpha^{k-1} d\alpha + \omega_4(x, y; x_0, y_0), \quad (22)$$

где $\omega_4(x, y; x_0, y_0)$ — регулярная функция.

Полагая в последнем интеграле $\alpha = 2t\tau$, получаем

$$J = (yy_0)^{-\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2t}} (1 + \tau^2)^{-\nu} \tau^{k-1} d\tau + \omega_4(x, y; x_0, y_0). \quad (23)$$

При небольшом расстоянии между точками M и M_0 , т.е. при малых значениях t этот интеграл представим в виде

$$J = (yy_0)^{-\nu} \int_1^{\frac{\pi}{2t}} (1 + \tau^2)^{-\nu} \tau^{k-1} d\tau + \omega_5(x, y; x_0, y_0). \quad (24)$$

Разлагая подынтегральную функцию в (23) в степенной ряд, получаем

$$\begin{aligned} (1 + \tau^2)^{-\nu} \tau^{k-1} &= (1 + \tau^2)^{-\frac{k}{2}} \tau^{k-1} = \tau^{-1} \left(1 + \frac{1}{\tau^2} \right)^{-\frac{k}{2}} = \\ &= \tau^{-1} - \frac{k}{2} \tau^{-3} + \frac{\frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right)}{2!} \tau^{-5} - \dots \end{aligned}$$

Ясно, что этот ряд сходится равномерно в промежутке $[1; \infty)$. Поэтому его можно интегрировать в этом промежутке почленно. В результате имеем

$$J = (yy_0)^{-\frac{k}{2}} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + \omega_5(x, y; x_0, y_0). \quad (25)$$

Отсюда и из представления (17) следует, что

$$\mathcal{E}(x, y; x_0, y_0) = \frac{\pi C C_k (yy_0)^{-\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}+1} \Gamma\left(1 - \frac{k}{2}\right)} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + \omega_6(x, y; x_0, y_0). \quad (26)$$

где $\omega_6(x, y; x_0, y_0)$ — регулярная в точке M_0 функция.

Литература

- [1] Г.Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций* — Ч.1.— М.: ИЛ, 1949.
- [2] J. Delsarte, *Sur une extension de la formule de Taylor* // Journ. de math. pures et appliquées. — 1938. — Т.17. — № 3. — Р. 213 — 231.

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ И МОДЕЛИ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА С УЧЕТОМ ТУРБУЛЕНТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛАЗМЫ

П.П. Миронов¹, В.М. Журавлев²

¹Ульяновский государственный университет, Ульяновск, ²Ульяновский государственный университет, Ульяновск

¹E-mail: museum86@mail.ru, ²E-mail: zhvictorm@gmail.com

Аннотация. В докладе излагается подход к анализу случайно-возмущенной нелинейной системы Паркера, описывающей изменение скорости и плотности солнечного ветра с расстоянием от Солнца на основе метода максимальной энтропии.

Теория Паркера солнечного ветра [1, 2] строится в предположении, что солнечный ветер - это гидродинамический поток плазмы, возникающий в короне Солнца из-за большой ее температуры (термический ветер) и направленный наружу. Скорость его достаточно велика, чтобы преодолеть силу тяготения. Поэтому первым уравнением теории является уравнение Эйлера радиального течения газа в поле тяготения Солнца с учетом случайного шума f с математическим ожиданием равным нулю:

$$u \frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM_{\odot}}{r^2} + f. \quad (1)$$

Вторым уравнением теории является закон сохранения массы, которое при радиальном течении плазмы будет иметь следующий вид:

$$\rho r^2 u = const. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) исследуются в предположении наличия турбулентных флуктуаций в потоке плазмы. Уравнения усредняются по методу Рейнольдса и замыкаются при помощи метода максимальной энтропии [3, 4]. Вычисляются и анализируются решения для скорости и плотности солнечного ветра, а также дисперсий и коэффициента ковариации в случаях изотермичности и адиабатичности потока частиц плазмы. Решения исследуются для случая нормального распределения вероятностей флуктуаций потока. Отдельно обсуждается случай, когда вид распределения вероятностей определяется самим решением задачи о максимуме энтропии. Использование развитого метода позволяет построить замкнутую модель солнечного ветра и сравнить ее с экспериментальными данными. Обсуждается вопрос о включении в развитую модель других важных факторов, таких, например, как магнитное поле и не стационарность потока, вызванная вспышками на Солнце.

Литература

- [1] С.И. Акасофу, С. Чапмен, *Солнечно-земная физика*, М.: Мир, **Т. 1,2**, (1974).
- [2] И.С. Веселовский, *Солнечный ветер и гелиосферное магнитное поле*, В Сб. Модель космоса. Т.1. Под ред. Ю.И. Логачева. Изд. М.: КДУ, (2007).
- [3] В.М. Журавлев, П.П. Миронов, *Динамика случайно-возмущенной системы Вольтерра-Лотки и метод максимальной энтропии*. Нелинейный мир, - **Т.9**, N 4, С. 201-212, (2011).
- [4] В.М. Журавлев, П.П. Миронов, *Случайно-возмущенные динамические модели и метод максимальной энтропии*, Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки", №1(30), С. 352-360, (2013).

ВЫБОР МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Д.А. Мусаева¹, В. Гежа^{2,3}, А.А. Синявин¹, В.К. Ильин¹

¹ Казанский государственный энергетический университет, Казань;

²Латвийский Университет, Рига, Латвия; ³Ганноверский университет им.

Лейбница, Ганновер, Германия

¹E-mail: musaeva.d.a@gmail.com

Аннотация. Импульсное воздействие на металл при его плавлении, легировании и кристаллизации может привести к интенсификации перемешивания, уменьшению зерен кристаллизации и улучшению трибологических свойств металла [1] - [5]. При этом значительное влияние оказывают условия, реализуемые при импульсном воздействии, учёт которых необходим для получения адекватных результатов. В то же время проведение физического эксперимента для определения влияния различных условий, при которых реализуется воздействие, связано с множеством сложностей: высокие температуры плавления, непрозрачность некоторых жидкостей для приборов измерения, агрессивность металлов и т.д. В свете существующих проблем применение средств математического моделирования для получения информации о влиянии определённых условий на движение и состояние жидкости является приемлемой альтернативой физического эксперимента.

В данной работе рассматривается влияние нестационарного процесса плавления металла в тигле индукционной печи, реализуемого при помощи пульсирующего электромагнитного (ЭМ) поля.

Исследование проводится с целью определения возможного повышения интенсивности перемешивания расплава. Для проверки адекватности математической модели был воспроизведен эксперимент по изучению движения металла в условиях условно стационарной силы магнитного поля, реализованный автором [6].

При воспроизведении процесса движения расплава металла в тигле индукционной печи в численном эксперименте использовалась физическая модель тигля, наполненного расплавом и индуктора. В таблицах 1 и 2 представлены основные параметры физической модели и граничные условия, задаваемые при моделировании.

Таблица 1: Параметры физической модели.

Параметр	Расплав	Индуктор
Материал	металл Вуда	Медь
Плотность ρ , kg/m^3	9400 (<i>Const</i>)	-
Динамическая вязкость ν , Ns/m^2	0.0042	-
Удельное сопротивление $1/\sigma$, (Ом/м)	10^{-6}	$1.74 \cdot 10^{-8}$
Количество витков, N	-	12

Таблица 2: Граничные условия.

Обозначение	Граничное условие
AB	своб. пов-ность ($U_x = 0; dU_y/dx = 0$)
BD, CD, AC	реальная стенка ($U_x = 0; U_y = 0$)
Температура жидкости θ (К)	Const
Частота ЭМ поля f_{ac} (Hz)	400
Частота импульсов силы ЭМ поля f_{puls} (Hz)	[0; 1]
Скважность импульсов ψ	[0; 1]

Описание моделирования течения металла под влиянием стационарного и нестационарного воздействия силы ЭМ поля представлено в [7].

Анализ моделей турбулентности проводился в два этапа. На первом рассматривалось течение металла в тигле в двухмерной осесимметричной постановке. При этом особое внимание уделялось движению жидкости в пристеночной области, что связано с наличием в тигле индукционной печи скин-слоя - толщины проникновения силы электромагнитного поля, оказывающей влияние на развитие потока:

$$\delta = \left(\frac{2}{\mu \cdot \mu_0 \cdot \lambda \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_{ac})} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где μ - магнитная проницаемость вещества проводника, μ_0 - магнитная постоянная, λ - удельная электрическая проводимость.

Данная сила, называемая также силой Лоренца определялась по следующему выражению:

$$f_{EM} = j \times B, \quad (2)$$

где j - плотность тока в индукторе, B - вектор магнитной индукции.

При проведении расчёта значительное влияние оказывал метод решения: различные комбинации параметров не давали адекватного распределения векторов скорости в пристеночной области (рис. 2).

Однако метод решения, включающий в себя параметр, основанный на расчёте давления, обозначаемом как PRESTO!, показал ожидаемое распределение векторов скорости (рис. 3). В дальнейших расчётах использовалось указанное ниже сочетание параметров метода решения.

Далее исследовалось изменение скорости в сечении, перпендикулярном оси на высоте, примерно соответствующей центру основного вихря, формирующегося при плавлении металла (рис. 4). Для LES (Large Eddy Simulation) модели скорости были получены в трехмерной сетке и рассмотрены в средней вертикальной плоскости.

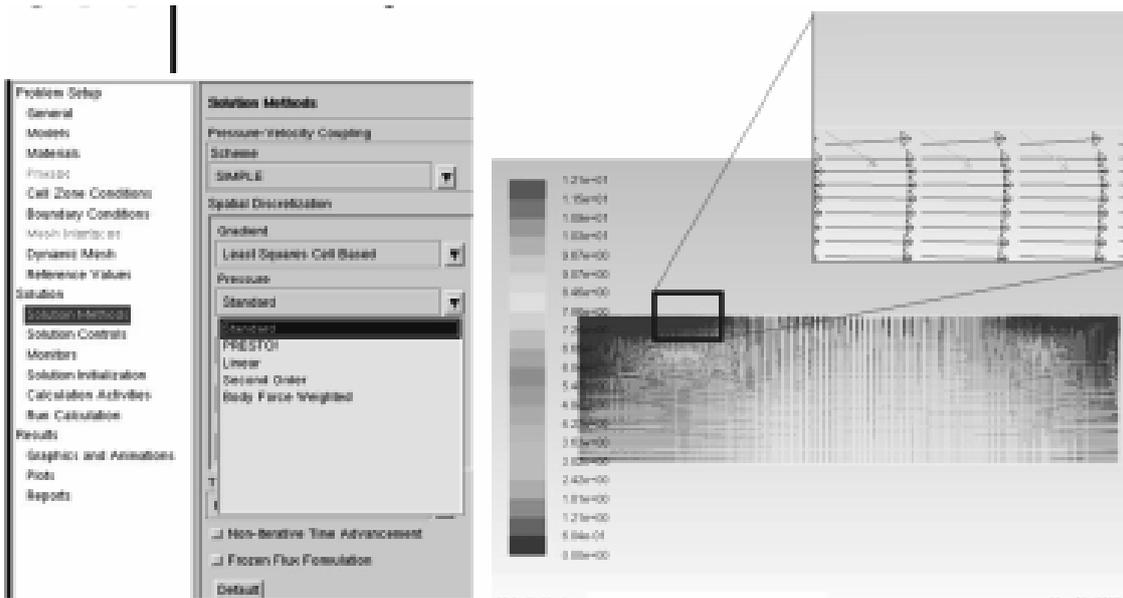


Рис. 1: Распределение векторов скорости для двухмерной стационарной задачи: присутствие дополнительного источника скорости.

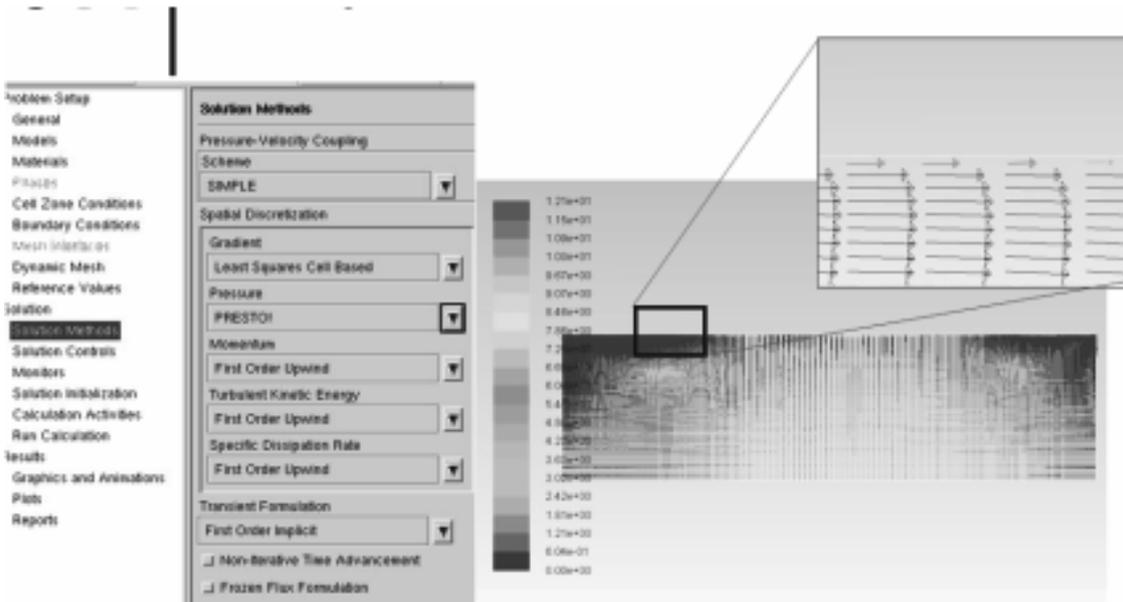


Рис. 2: Распределение векторов скорости для двухмерной стационарной задачи после отбора метода решения.

Здесь: k- ϵ st - стандартная $k - \epsilon$ модель; k- ϵ enh - $k - \epsilon$ модель с уточнённым расчётом пристеночной области; k- ϵ enh press - $k - \epsilon$ модель с уточнённым расчётом пристеночной области и учётом эффектов градиента давления; k- ω - стандартная $k - \omega$ модель; k- ω Re-low - $k - \omega$ модель с коррекцией для низкорейнольдсовых чисел; Re-stress QPS - Рейнольдс-стресс модель (Quadratic Pressure-Strain); Re-stress SO - Рейнольдс-стресс модель (Stress-omega); LES - модель [8].

Как видно из рисунка $k - \epsilon$ модифицированная модель, стандартная $k - \omega$ и LES модели дали наиболее близкие к экспериментальным значения скорости в различных точках. Следует отметить, что стандартная и модифицированная $k - \omega$ модели дали одинаковое распределение, вследствие чего для дальнейшего моделирования в трёхмерной сетке была выбрана стандартная $k - \omega$ модель.

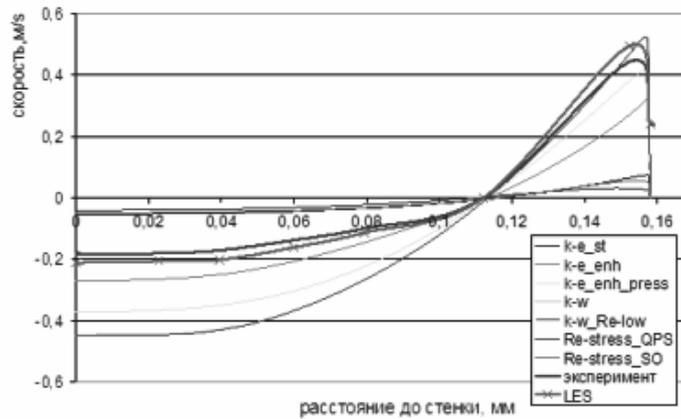


Рис. 3: Распределения скорости от оси симметрии двумерной модели до стенки, полученные при использовании различных моделей турбулентности.

Далее был произведён переход к трёхмерной расчётной сетке, содержащей 1,28 млн. элементов и имеющей сгущение в пристеночной и придонной зоне (рис. 5).

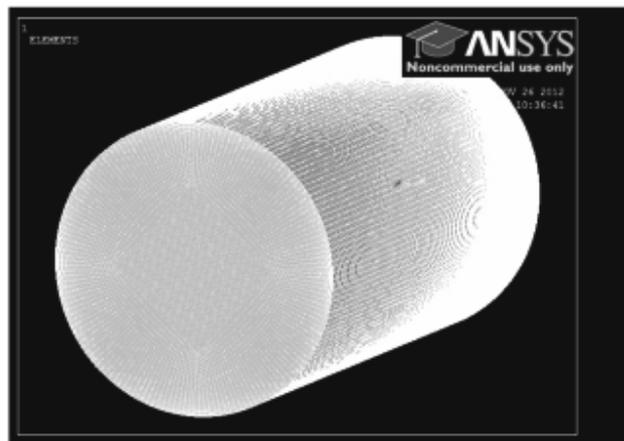


Рис. 4: Трёхмерная сетка для расчёта движения расплава в условиях нестационарной силы ЭМ поля.

Путём сравнения распределения скоростей в различных точках геометрии расплава на протяжении всего времени развития потока было выяснено, что модель турбулентности LES даёт больше информации о пульсациях скорости в сравнение с моделями $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ при моделировании течения металла под воздействием пульсирующей силы ЭМ поля с частотой $f_{puls} = 1$ и скважностью пульсаций $\psi = 1$ (рис. 6). $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ дали примерно одинаковое распределение.

На основании анализа распределений скоростей был сделан вывод о применимости моделей турбулентности для описания движения расплава в условиях нестационарного воздействия силы ЭМ поля: для трёхмерного моделирования развития потока при стационарной и пульсирующей силы ЭМ поля наиболее пригодна LES модель турбулентности, из всех рассмотренных моделей.

Способность LES модели описывать сложные течения обуславливается способом решения основных уравнений, входящих в нее. Данная модель является компромиссом между прямым численным моделированием (прямым решением трёхмерных нестационарных уравнений Навье - Стокса) (DNS – Direct Numerical Simulation модель) и моделированием осреднённых течений (модели типа RANS – Raynolds Averaged Navier - Stokes). Первая из упомянутых моделей наиболее близко к природе описывает течения, но при этом является очень ресурсозатратной, вторая является наименее требовательной по затратам ресурсов времени и вычислительной мощности, но может использоваться для получения средней картины течения.

В связи с этим, для решения комбинированных задач со сложной геометрией в мире широко распростра-

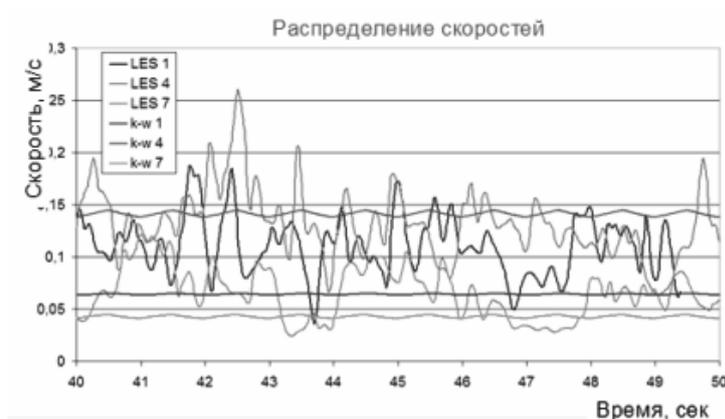


Рис. 5: Изменение скорости под воздействием пульсирующей силы ЭМ поля ($f_{puls} = 1$ Гц, $\psi=1$), полученное при помощи LES и $k - \omega$ моделей турбулентности.

няется использование LES модель – численный эксперимент относительно не продолжителен, и обладает достаточной точностью.

Литература

- [1] Балакирев В.Ф., Крымский В.В., Шабурова Н.А., *Облучение расплавов металлов мощными электромагнитными импульсами*, Труды IX-го Международного Уральского Семинара «Радиационная физика металлов и сплавов», г. Кыштым, (2011).
- [2] Ри Хосен, Евстегнеев А.И., Ри Э.Х., Дорофеев С.В., Якимов В.И., *Исследование влияния амплитуды импульсов напряжения генератора наносекундных электромагнитных импульсов на процессы кристаллизации, структурообразования и свойства силумина (АК7ч)*, Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета, №3-1, 82-88, (2010).
- [3] Глуценков В.А., Егоров Ю.А., Иголкин А.Ю., Черников Д.Г., *Способ воздействия на расплавленный металл магнитно-импульсным полем и устройство для его осуществления*, Патент № RU 2311989, В22D27/02, (2006).
- [4] J. Szajnar, M. Stawarz, T. Wrobel, W. Sebzda, *Influence of electromagnetic field on pure metals and alloys structure*, Journal of Achievements in Material and Manufacturing Engineering, vol. 34, issue 1, 95-102, (2009).
- [5] J. Szajnar, M. Stawarz, T. Wrobe, *Inoculation of pure aluminium structure with Ti+B addition in impulse magnetic field*, Journal of Achievements in Material and Manufacturing Engineering, vol. 11, issue 1-2, 64-692, (2006).
- [6] M. Kirpo, *Modeling of Turbulence Properties and Particle Transport in Recirculated Flows. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy (Physics)*, University of Latvia, Riga, 169 p., (2007).
- [7] Мусаева Д.А., Гежа В., Накке Б., Ильин В.К., Синявин А.А., Гурьянов А.И., *Исследование влияния низкочастотных несимметричных пульсаций электромагнитного поля на движение расплава металла Вуда путём математического моделирования*, Материалы XV – ой международной научно-практической конференции «Технологии упрочнения, нанесения покрытий и ремонта: теория и практика». Ч.1., С-Пб., 289-294, (2013).
- [8] А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур *Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие*, – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 88 с., (2012).

ОСНАЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЙ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

А.М. Нигмедзянова¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: aigmani@rambler.ru

Аннотация. В статье рассмотрена оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников на примере пятиугольной пирамиды и призмы методом вспомогательных сечений и методом следа.

Введение

В настоящее время современное образование невозможно без использования информационно-коммуникационных технологий. Применение компьютера и других информационно-коммуникационных технологий на занятиях в общеобразовательной школе и в ВУЗе позволяет оптимизировать управление обучением, повысить эффективность и объективность учебного процесса при значительной экономии времени преподавателя, мотивировать учащихся на получение новых знаний и закреплении выработанных умений и навыков.

Тема "Методы изображений" в курсе геометрии является достаточно проблемной, поскольку требует от студентов высокого уровня развития пространственного мышления, воображения. Поэтому, задача повышения наглядности курса Методы изображений становится чрезвычайно важной. Эта задача может быть решена графическими средствами компьютерной математики, в частности, пакета «Maple».

Информационно-коммуникационные технологии позволяют сделать процесс обучения основным методом построения сечений многогранников более эффективным, с одной стороны, за счет новизны и необычности такой формы работы для учащихся, а с другой, сделать его увлекательным и ярким, разнообразным по форме за счет использования мультимедийных возможностей современных компьютеров.

Существует три основных метода построения сечений многогранников:

1. Метод следов.
2. Метод вспомогательных сечений.
3. Комбинированный метод.

В данной работе подробно рассмотрен наиболее "избегаемый" студентами метод вспомогательных сечений и метод следа.

1. Оснащенная динамическая визуализация компьютерных моделей

Следует заметить, что пакет компьютерной математики «Maple», начиная уже с самых ранних версий имеет несомненные преимущества в области 3d графики, особенно, интерактивной и динамической, по сравнению с пакетом «Mathematica», и позволяет программными средствами решить указанные задачи. Эта статья посвящена разработке программных процедур в пакете «Maple», позволяющих осуществлять управляемую, оснащенную динамическую визуализацию основных задач математической физики. Под *управляемой, оснащенной динамической визуализацией* здесь и далее мы понимаем визуализацию многопараметрической математической модели, изменение свойств которой можно наблюдать во временной последовательности в графической форме, сопровождаемой изменяющейся со временем числовой или графической информацией, с возможностью изменения пользователем параметров модели. Методы оснащенной динамической визуализации математических моделей разрабатываются в группе Ю.Г. Игнатьева с 2004 года [1]. Отметим, что профессором М.Н. Кирсановым (Московский энергетический университет) разрабатываются методы динамической визуализации сложных, лагранжевых механических систем [4].

Технология создания оснащенной управляемой динамической модели в СКМ Maple была подробно рассмотрена в следующих статьях [2], [3].

Динамическое оснащение графических объектов, может быть трех типов:

1. графическое оснащение – оснащение с помощью дополнительных графических объектов;
2. текстовое оснащение – оснащение с помощью динамических текстовых вставок;
3. цифровое оснащение – оснащение с помощью динамических цифровых вставок.

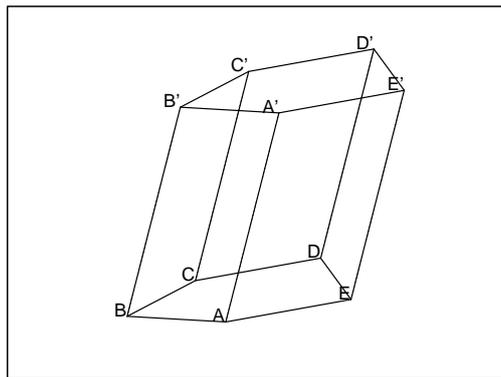
В предыдущей статье Автора [5] было получено цифровое оснащение к задачам математической физики. Данная работа посвящена графическому и текстовому оснащению построения сечений многогранников в СКМ «Maple»: показан сам процесс построения сечения, а так же параллельно дается описание построения.

2. Оснащенная динамическая визуализация построения сечения пятиугольной призмы

Опишем оснащенную динамическую визуализацию построения сечения пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки.

Сначала в программе строится пятиугольная призма.

```
> with(plots): with(geom3d): with(plottools):
> dno1 := polygonplot3d([[0, 0, 0], [1/2, -1, 0], [1, 0, 0], [1, 3/2, 0], [0, 3/2, 0]],
style = WIREFRAME, color = black,thickness=3):
> verh1 := polygonplot3d([[1, 1, 2], [3/2, 0, 2], [2, 1, 2], [2, 5/2, 2], [1, 5/2, 2]],
style = WIREFRAME, color = black,thickness=3):
> a := plots[spacecurve]([t, t, 2*t], t = 0 .. 1, color = black,thickness=3):
> b := plots[spacecurve]([1/2+t, -1+t, 2*t], t = 0 .. 1, color = black,thickness=3):
> c := plots[spacecurve]([1+t, t, 2*t], t = 0 .. 1, color = black,thickness=3):
> d := plots[spacecurve]([1+t, 3/2+t, 2*t], t = 0 .. 1, color = black,thickness=3):
> e := plots[spacecurve]([t, 3/2+t, 2*t], t = 0 .. 1, color = black,thickness=3):
> text1 := plots[textplot3d]([[0, 0, 0, "A"], [.5, -1, 0, "B"], [1, 0, 0, "C"],
[1, 1.5, 0, "D"], [0, 1.5, 0, "E"], [1, 1, 2, "A'"], [1.5, 0, 2, "B'"], [2, 1, 2, "C'"],
[2, 2.5, 2, "D'"], [1, 2.5, 2, "E'"]], align = {ABOVE, LEFT}, color = black):
>
> Prizm:=plots[display](dno1,verh1,a,b,c,d,e,text1,orientation=[20,120],
scaling=constrained):
> Prizm;
```

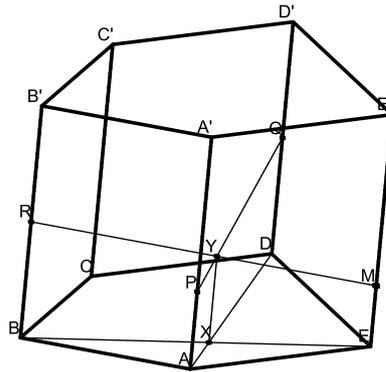


Далее отдельно строится, описывается каждый кадр анимации построения сечения. Строится заранее "просчитанная" прямая, обозначаются точки пересечения с уже построенной моделью, идет словесное описание построения. Следующий кадр строится с учетом ранее построенной "промежуточной" модели.

Фрагмент программы показан ниже.

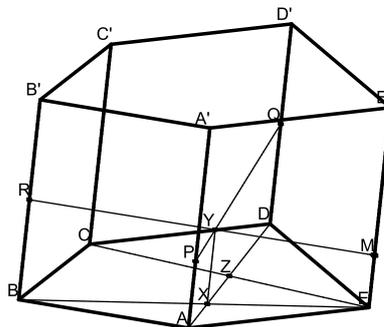
```
RY:=plots[spacecurve]([1+31/78*t, -1/2-95/78*t, 1+10/39*t],
t =-13/7..0, color = green,linestyle=2,thickness=2):
> M := pointplot3d([11/42, 37/21, 11/21], symbol = box, thickness = 2,
symbolsize = 4, color = red):
> text5:=plots[textplot3d]([11/42, 37/21, 11/21, "M"], align = {ABOVE, LEFT},
color = black):
> leg5:=plots[textplot3d]([-1, -4, -3.5, '5. Точка M - точка пересечения
прямых RY и EE' ],
align = {ABOVE, RIGHT}, color = blue):
>Prizm5 := plots[display](Prizm4, RY, M, text5,leg5): Prizm5;
```

```
CE:=plots[spacecurve]([1-1*t, 3/2*t, 0*t], t = 0..1, color =
black,linestyle=2,thickness=2):
> Z := pointplot3d([1/2, 3/4, 0], symbol = box, thickness = 2,
symbolsize = 3, color = black):
```



1. Построим сечение, проходящее через точки P, Q, R
2. Проведем отрезок PQ, лежащий в плоскости сечения, а так же отрезок AD, являющийся проекцией отрезка PQ на нижнее основание призмы
3. Точка X - точка пересечения прямых AD и BE
4. Точка Y - точка пересечения прямой PQ и прямой, проходящей через точку X, параллельно боковым ребрам AA', BB', CC',...
5. Точка M - точка пересечения прямых RY и EE'

```
> text6 := plots[textplot3d]([1/2, 3/4, 0, "Z"], align = {ABOVE, LEFT},
color = black):
> leg6:=plots[textplot3d]([-1, -4, -4, '6. Точка Z - точка пересечения
прямых AD и CE '], align = {ABOVE, RIGHT}, color = black):
>Prizm6:= plots[display](Prizm5, CE, Z, text6,leg6): Prizm6;
```



1. Построим сечение, проходящее через точки P, Q, R
2. Проведем отрезок PQ, лежащий в плоскости сечения, а так же отрезок AD, являющийся проекцией отрезка PQ на нижнее основание призмы
3. Точка X - точка пересечения прямых AD и BE
4. Точка Y - точка пересечения прямой PQ и прямой, проходящей через точку X, параллельно боковым ребрам AA', BB', CC',...
5. Точка M - точка пересечения прямых RY и EE'
6. Точка Z - точка пересечения прямых AD и CE

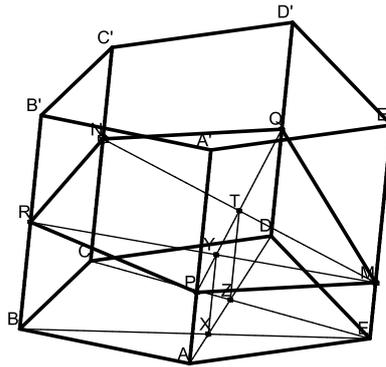
В конце поэтапно собраны все кадры.

```
> A1 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P):
> A2 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q):
> A3 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R):
> A4 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2):
> A5 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2, leg1):
>
> S := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2, leg1):
> S1:= plots[display](prizm, S, A1, A2, A3, A4, A5, insequence = true):
.....
```

```

>H1 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2, leg1,
QP, AD, leg2, BE, X, text3, leg3, XY, Y, text4,leg4,
RY, M, text5, leg5, CE, Z, text6, leg6, ZT, T, text7,leg7, MT):
> H2 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2, leg1,
QP, AD, leg2, BE, X, text3, leg3, XY, Y, text4,leg4,
RY, M, text5, leg5, CE, Z, text6, leg6, ZT, T, text7, leg7, MT, N):
> H3 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2, leg1,
QP, AD, leg2, BE, X, text3, leg3, XY, Y, text4,leg4, RY, M, text5,
leg5, CE, Z, text6, leg6, ZT, T, text7, leg7, MT, N, text8):
> H4 := plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2, leg1,
QP, AD, leg2, BE, X, text3, leg3, XY, Y, text4,leg4, RY, M, text5,
leg5, CE, Z, text6, leg6, ZT, T, text7,leg7, MT, N, text8, leg8):
>S8 := plots[display](prizm, S7, H1, H2, H3, H4, insequence = true):
> I1:= plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2, leg1,
QP, AD, leg2, BE, X, text3, leg3, XY, Y, text4,leg4, RY, M, text5,
leg5, CE, Z, text6, leg6, ZT, T, text7,leg7, MT, N, text8, leg8,
sechenie):
> I2:= plots[display](dno1, verh1, a, b, c, d, e, text1, P, Q, R, text2, leg1,
QP, AD, leg2, BE, X, text3, leg3, XY, Y, text4,leg4, RY, M, text5,
leg5, CE, Z, text6, leg6, ZT, T, text7,leg7, MT, N, text8, leg8,
sechenie,leg9):
> S9 := plots[display](prizm, S8, I1, I2, insequence = true):
> plots[display](prizm, S9, insequence = true,orientation=[20,120]);

```



1. Построим сечение, проходящее через точки P, Q, R
2. Проведем отрезок PQ, лежащий в плоскости сечения, а также отрезок AD, являющийся проекцией отрезка PQ на нижнее основание призмы
3. Точка X - точка пересечения прямых AD и BE
4. Точка Y - точка пересечения прямой PQ и прямой, проходящей через точку X, параллельно боковым ребрам AA', BB', CC',...
5. Точка M - точка пересечения прямых RY и EE'
6. Точка Z - точка пересечения прямых AD и CE
7. Точка T - точка пересечения прямой PQ и прямой, проходящей через точку Z, параллельно боковым ребрам AA', BB', CC',...
8. Точка N - точка пересечения прямых MT и CC'
9. MPRNQ - искомое сечение

Фрагмент программы оснащенной динамической визуализации построения сечения пятиугольной пирамиды методом следа приведен ниже.

```

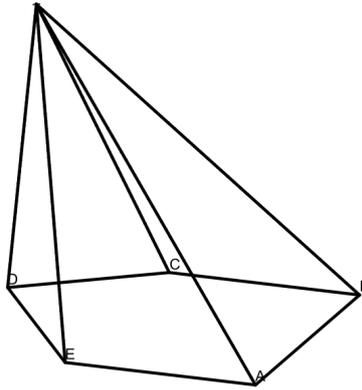
restart;
> with(plots): with(geom3d):
> dno1 := polygonplot3d([[0, 0, 0], [2, -3, 0], [3, 0, 0], [3, 3, 0], [1, 3, 0]],
style = WIREFRAME, color = black):
> text1 := plots[textplot3d]([[0, 0, 0, "A"], [2, -3, 0, "B"], [3, 0, 0, "C"],
[3, 3, 0, "D"], [1, 3, 0, "E"]], align = {ABOVE, RIGHT}, color = black):
> S := pointplot3d([2, 3, 4], symbol = cross, thickness = 1, symbolsize = 10,
color = black):

```

```

> text2 := plots[textplot3d]([[2, 3, 4, "S"]], align = {ABOVE, LEFT}, color = black):
> a := plots[spacecurve]([2*t, 3*t, 4*t], t = 0 .. 1, color = black):
> b := plots[spacecurve]([2, -3+6*t, 4*t], t = 0 .. 1, color = black):
> c := plots[spacecurve]([3-t, 3*t, 4*t], t = 0 .. 1, color = black):
> d := plots[spacecurve]([3-t, 3, 4*t], t = 0 .. 1, color = black):
> e := plots[spacecurve]([1+t, 3, 4*t], t = 0 .. 1, color = black):
> Piram := plots[display](dno1, text1, S, text2, a, b, c, d, e, orientation = [170, 60],
thickness = 2, scaling = UNCONSTRAINED): Piram;
>

```



Далее строим последовательно каждый кадр анимации.

```

>P := pointplot3d([1/2, 1/2, 0], symbol = cross, thickness = 7,
symbolsize = 10, color = red):
> Q := pointplot3d([5/8, 3/2, 1/2], symbol = cross, thickness = 7,
symbolsize = 10, color = blue):
> R := pointplot3d([1, -9/8, 1/4], symbol = cross, thickness = 7,
symbolsize = 10, color = magenta):
> text3 := plots[textplot3d]([[1/2, 1/2, 0, "P"], [5/8, 3/2, 1/2, "Q"],
[1, -9/8, 1/4, "R"]], align = {ABOVE, RIGHT}, color = black):
> leg1:=plots[textplot3d]([0, 7, -0.5, '1. Построим сечение,
проходящее через точки P, Q, R'], align = {ABOVE, RIGHT}, color =black):
> Piram1 := plots[display](Piram, P, Q, R, text3, leg1, orientation = [165, 70],
thickness = 2):
.....
> Piram4 := plots[display](Piram3, QR, TM, X, text6, leg4, orientation = [165, 70],
thickness = 2):
Piram4;
XP := plots[spacecurve]([1/2+(7/8)*t, 1/2-(17/4)*t, 0], t = -1 ..
3/2, linestyle = dash, thickness = 2, color = red):
> leg5:=plots[textplot3d]([0, 7, -2.5, '5. XP - след сечения плоскости
на основание пирамиды'], align = {ABOVE, RIGHT}, color = black):
> Piram5 := plots[display](Piram4, XP, leg5, orientation = [165, 70], thickness = 2):
Piram5;

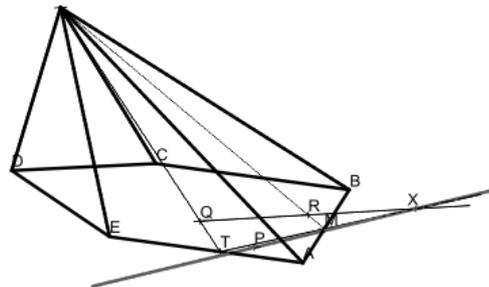
```

В итоге получаем следующее...

```

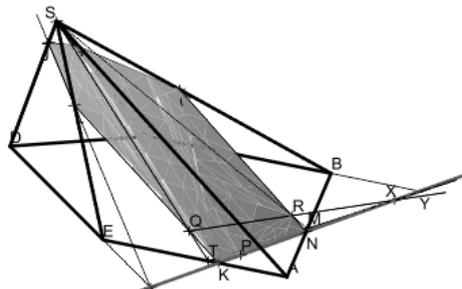
piram := plots[display](dno1, S, a, b, c, d, e, text1, text2, P, Q,
R, text3, orientation = [145, 65]): piram;
>
> S1 := plots[display](dno1, S, a, b, c, d, e, text1, text2, P, Q, R, text3):
> S2 := plots[display](piram, S1, insequence = true):
> B1 := plots[display](dno1, S, a, b, c, d, e, text1, text2, P, Q, R, text3, SQ):
> B2 := plots[display](dno1, S, a, b, c, d, e, text1, text2, P, Q, R, text3, SQ, T):
.....

```



1. Построим сечение, проходящее через точки P, Q, R
2. Точка T - точка пересечения прямых SQ и AE
3. Точка M - точка пересечения прямых SR и AB
4. Точка X - точка пересечения прямых RQ и MT
5. XP - след сечения плоскости на основание пирамиды

```
F5 := plots[display](dno1, S, a, b, c, d, e, text1, text2, P, Q, R,
text3, SQ, T, text4, SR, M, text5, QR, TM, X, text6, XP, K, text7,
KQ, L, text8, N, text9, NR, G, text10, DE, F, text11, FL, J, text12,
BC, Y, text13, YG, Z, text14, JZ, Sech):
>
> S7 := plots[display](piram, S6, F1, F1, F1, F2, F3, F4, F4, F4, F5, F5, F5,
insequence = true):
> plots[display](piram, S7, insequence = true, orientation = [145, 65]);
```



1. Построим сечение, проходящее через точки P, Q, R
2. Точка T - точка пересечения прямых SQ и AE
3. Точка M - точка пересечения прямых SR и AB
4. Точка X - точка пересечения прямых RQ и MT
5. XP - след сечения плоскости на основание пирамиды
6. Точка K - точка пересечения следа XP и ребра AE
7. Точка L - точка пересечения прямых KQ и SE
8. Точка N - точка пересечения ребра AB и следа XP
9. Точка G - точка пересечения прямой NR и ребра SB
10. Точка F - точка пересечения ребра DE и следа XP
11. Точка J - точка пересечения прямых SD и FL
12. Точка Y - точка пересечения ребра BC и следа XP
13. Точка Z - точка пересечения прямых SC и YG

Литература

- [1] Ю.Г. Игнатъев, *Проблемы информационных технологий в математическом образовании*, Учебное пособие. – Казань: ТГГПУ, 2005. – 118с.
- [2] Ю.Г. Игнатъев, *Пользовательские графические процедуры для создания анимационных моделей нелинейных физических процессов*, Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: изд-во СмолГУ, 2009. – с.43-44.
- [3] Ю.Г. Игнатъев, Э.Г. Исрафилова, *Математическое моделирование объектов дифференциальной геометрии кривых в системе компьютерной математики Maple*, Вестник ТГГПУ, 4(26) 2011. – с.11-16.
- [4] М.Н. Кирсанов, *Практика программирования в системе Maple*. – М: Издательский дом МЭИ, 2011. – 208с.

- [5] А.М. Нигмедзянова, *Оснащенная динамическая визуализация задач математической физики.* // Материалы международной научно-практической конференции "Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН 2012" и трудов третьего Российского научного семинара "Методы информационных технологий, математического моделирования и компьютерной математики в фундаментальных и прикладных научных исследованиях". 8-12 октября 2012г. – Казань, 2012. – с.127-131.

CALCULATION OF THE AUTOMATIC CONTROL SYSTEM (AN ITERATIVE AND NUMERICAL METHODS)

O.S Ryzhkov¹, N.I. Smirnov²

¹NRU MPEI, Moscow, ²NRU MPEI, Moscow

¹E-mail: 31ryzhkov@mail.ru, ²E-mail: SmirnovNI@mpei.ru

Abstract This report focuses on the issue of regulation of automation the unbound regulation.

The calculations of the system settings with the help of simulation and numerical method (using an evolutionary algorithm OPTIM MGA) are examined. The report also calculated possible variants system, such as system regulation the unbound (considered crosslinks in the object) and a system of independent circuits (two simple single circuit system). Calculated using the inverse Fourier transform for the considered systems integrated quality criteria: linear, quadratic, and modular (calculations were carried out in an evolutionary algorithm OPTIM MGA). In this case, automatic control system is the regulation of fuel and feed water in once-through boiler such as TGMP 314. All the above calculations were carried out in the computer software Mathcad 14.

Block diagram of the proposed automatic control system with a description

This system is a two-dimensional system of an unrelated regulation:

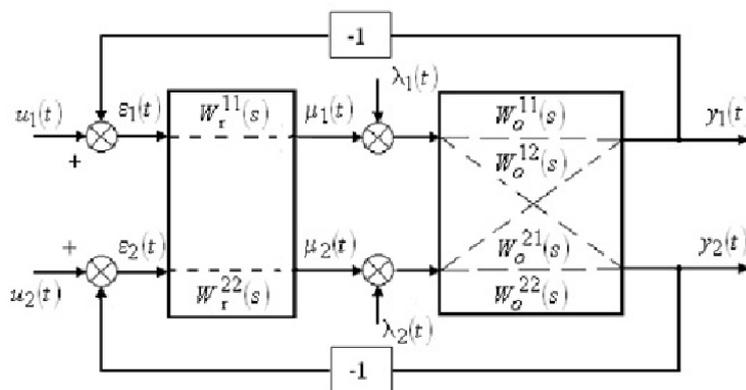


Рис. 1: Block diagram of the automatic control system.

$y_1(t)$ – the pressure after the boiler (P)

$y_2(t)$ – the temperature after the high radiation part of water-steam tract (t)

$W_{o11}(j\omega)$ – complex frequency characteristic the channel to the fuel consumption – the pressure after the boiler

$W_{o22}(j\omega)$ – complex frequency characteristic the channel to the feedwater consumption – the temperature after high radiation part of water-steam tract

$W_{o12}(j\omega)$ – complex frequency characteristic the channel to the fuel consumption – the temperature after high radiation part of water-steam tract

$W_{o21}(j\omega)$ – complex frequency characteristic the channel to the feedwater consumption – the pressure after the boiler

The dynamic characteristics of the technological object through the channel the regulatory influence

The transfer functions of communication channels of the object:

$$W_{11}(s) = \frac{2.5}{(36s + 1)^3}, \quad W_{22}(s) = \frac{-3}{(99s + 1)^2},$$

$$W_{12}(s) = \frac{2.9(46s + 1)}{(38s + 1)^3(74s + 1)}, \quad W_{21}(s) = \frac{730s}{(240s + 1)^2},$$

s — operator of Laplace

With the help of Mathcad 14 build transient processes for each channel:

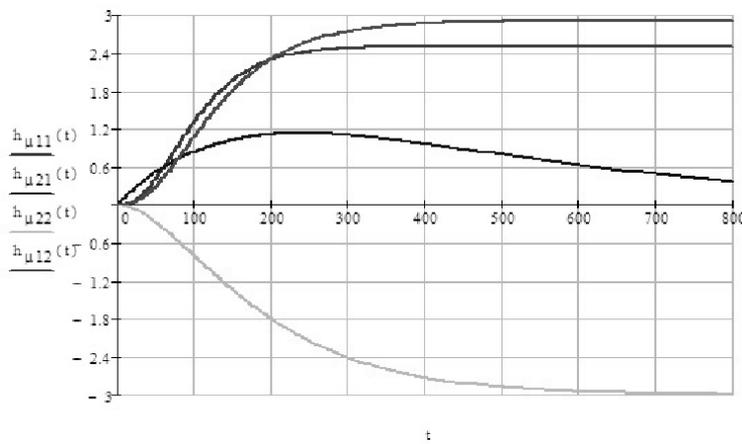
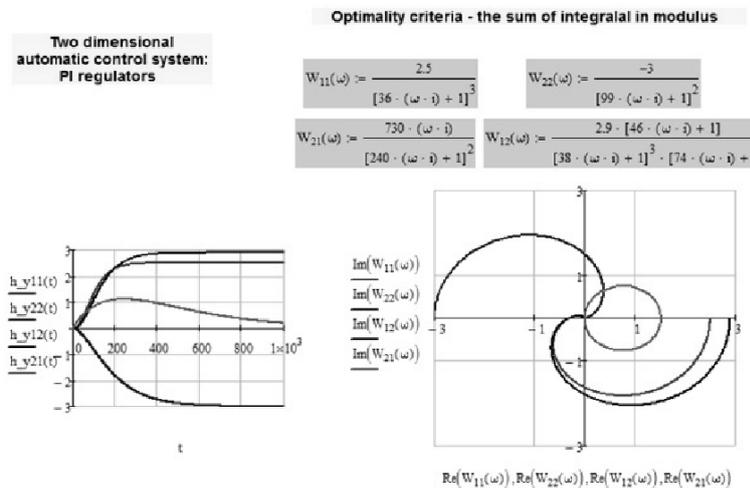


Fig 2. The transient processes part of the subject through the channel the regulatory influence

$$h_{\mu ij}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Re(W_{ij}(\omega))}{\omega} \sin(\omega t) d\omega, \quad i, j = 1, 2.$$

The calculation of the automatic regulatory system for the numerical method using an evolutionary algorithm «Optim-MGA»



**complex frequency
characteristic of the PI
controller**

$$W_{p1}(K, \omega) := K_0 + \frac{K_1}{j \cdot \omega} \quad W_{p2}(K, \omega) := K_2 + \frac{K_3}{(j \cdot \omega)}$$

Input data for the calculations

$$W_{m1}(K, \omega) := \frac{\left[W_{11}(\omega) - \frac{W_{12}(\omega) \cdot (W_{p2}(K, \omega)) - W_{21}(\omega)}{1 + W_{22}(\omega) \cdot (W_{p2}(K, \omega))} \right] \cdot W_{p1}(K, \omega)}{1 + \left[W_{11}(\omega) - \frac{W_{12}(\omega) \cdot (W_{p2}(K, \omega)) - W_{21}(\omega)}{1 + W_{22}(\omega) \cdot (W_{p2}(K, \omega))} \right] \cdot (W_{p1}(K, \omega))}$$

$$W_{m2}(K, \omega) := \frac{\left[W_{22}(\omega) - \frac{W_{12}(\omega) \cdot (W_{p1}(K, \omega)) - W_{21}(\omega)}{1 + W_{11}(\omega) \cdot (W_{p1}(K, \omega))} \right] \cdot W_{p2}(K, \omega)}{1 + \left[W_{22}(\omega) - \frac{W_{12}(\omega) \cdot (W_{p1}(K, \omega)) - W_{21}(\omega)}{1 + W_{11}(\omega) \cdot (W_{p1}(K, \omega))} \right] \cdot (W_{p2}(K, \omega))}$$

$$W_{p1}(K, \omega) := K_0 + \frac{K_1}{j \cdot \omega} \quad W_{p2}(K, \omega) := K_2 + \frac{K_3}{j \cdot \omega}$$

$$W_{m1}(K, \omega) := \frac{W_{11}(\omega) \cdot W_{p1}(K, \omega)}{1 + W_{11}(\omega) \cdot W_{p1}(K, \omega)} \quad W_{m2}(K, \omega) := \frac{W_{22}(\omega) \cdot W_{p2}(K, \omega)}{1 + W_{22}(\omega) \cdot W_{p2}(K, \omega)}$$

Parameters of the simulation model automatic control systems in the frequency domain

$$N\omega := 1000 \quad j := 0..N\omega \quad \omega_j := (j + 1) \cdot 0.0001 \quad \gamma := 10000 \quad My1 := 1.55 \quad My2 := 1.55$$

Parameters of the simulation model automatic control systems in the time domain

$$N := 50 \quad i := 0..N \quad \text{time} := 1000 \quad dt := \frac{\text{time}}{N} \quad t_i := i \cdot dt \quad \omega_k := 1$$

**The program of numerical parametric
optimization of a two-dimensional automatic
control system.**

```
SV2_L(K) := for k ∈ 0..Nω
  Ayl ← |Wm1(K, ωk)|
  Ay2 ← |Wm2(K, ωk)|
  if Ay1 > MaxMy1
    return 1010 if Im(Wm1(K, ωk)) > 0
    MaxMy1 ← Ay1
  if Ay2 > MaxMy2
    return 1010 if Im(Wm2(K, ωk)) > 0
    MaxMy2 ← Ay2
  l ← 1/K1 + 1/K3 · (-1)
  l ← l + γ · |My1 - MaxMy1| if MaxMy1 > My1
  l ← l + γ · |My2 - MaxMy2| if MaxMy2 > My2
```

Input the parameters of optimization and
call the algorithm Optim-MGA

$$n = 4 \quad \mu = 40 \quad \epsilon = 0.01$$

$$x_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.005 \\ -1 \\ -0.005 \end{pmatrix}$$

$$PI2 := \text{MGA}(n, \epsilon, x_n, \epsilon, \text{SV2}_L)^*$$

$$PI2 := \begin{pmatrix} 0.587 \\ 3.972 \times 10^{-3} \\ -0.482 \\ -3.878 \times 10^{-3} \\ 100 \end{pmatrix}^*$$

	Ryzhkov_Iter	Num_Meth_Indep_Set	Num_Meth_Dep_Set
PI2 :=	$\begin{pmatrix} 0.587 \\ 3.972 \times 10^{-3} \\ -0.482 \\ -3.878 \times 10^{-3} \\ 100 \end{pmatrix}$	$\text{Pnz} := \begin{pmatrix} 0.389 \\ 7.705 \times 10^{-3} \\ -1.372 \\ -9.02 \times 10^{-3} \\ 100 \end{pmatrix}$	$\text{Pzv} := \begin{pmatrix} 0.685 \\ 4.667 \times 10^{-3} \\ -0.406 \\ -3.923 \times 10^{-3} \\ 469.183 \end{pmatrix}$

By this parameters build it transients process through the main control channel and compare them with the process of obtaining, by calculation using an analytical parameters (iteration method), as well as processes obtained by independent parameters regulators. Similarly consistent frequency response on both channels of regulation.

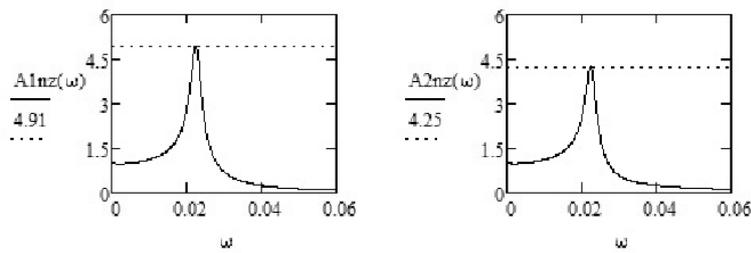


Fig 3. The amplitude frequency response for parameters up an independent of regulators

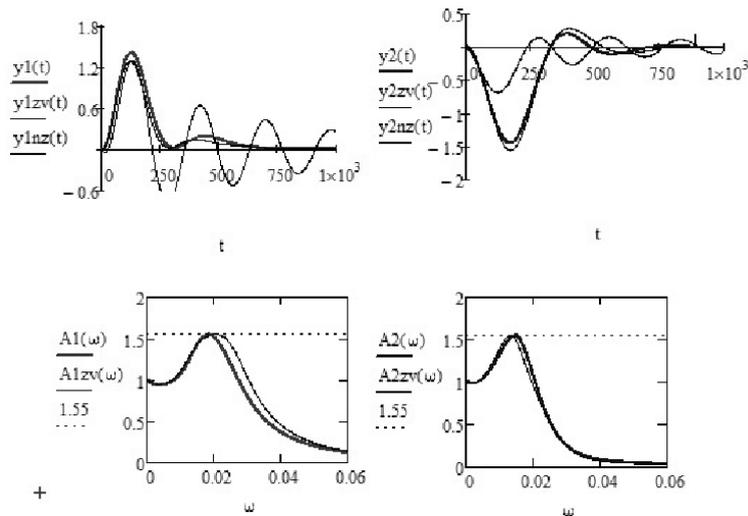


Fig 4. The transient processes.

zv — dependent control settings (including connections to the object), nz — independent setting of regulators (excluding connections to the object)

Results

In this report, calculations were carried out automatic system of unbound regulation using numerical methods. Parameters obtained by the numerical method are accurate and the residence time of these parameters is small enough.

Литература

- [1] *Rotach VJ* The calculation of the unbound systems and autonomous management of multidimensional objects // Thermal. 1996. number 10
- [2] *Panko MA* Calculation and simulation of automatic control systems in the environment of Mathcad. textbook. - Moscow: Publishing House of Moscow Power Engineering Institute, 2004. 112.
- [3] *Andryushin AV, Sabanin VR, Smirnov NI* Management and Innovations in power: the manual. Publishing House MEI, 2011. 392 p.

КОМПАКТ-ДИСК С ОБУЧАЮЩИМИ МАТЕРИАЛАМИ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ СКМ MAPLE

А.Р. Самигуллина¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань

¹E-mail: Alsu_Sam@rambler.ru

Аннотация. Компакт-диск содержит краткое изложение вопросов линейной алгебры и аналитической геометрии, входящих в курсы алгебры и аналитической геометрии для студентов физических и информационных специальностей, а также курса высшей математики для студентов естественнонаучных специальностей. Курс снабжен примерами решения задач в системе компьютерной математики Maple 5 и инструкциями по применению этой системы для студентов и преподавателей

Введение

Компакт-диск содержит электронное учебное пособие по разделам высшей математики (линейная алгебра и аналитическая геометрия), снабженное системой внутренних и внешних гиперссылок, позволяющих проводить решение задач высшей математики и давать их графическую интерпретацию в математическом пакете Maple. Пакет программ, локализованный на диске, является приложением к математическому пакету Maple (версии 5-15) и предназначен для автоматизированного решения стандартных задач линейной алгебры и аналитической геометрии. Кроме того диск содержит демонстрационный графический материал по всем изучаемым разделам линейной алгебры и аналитической геометрии, позволяющий быстро и качественно готовить презентации по соответствующим разделам высшей математики.

Структура компакт-диска

Компакт-диск создан с помощью программы «AutoPlau Menu», графических редакторов, типа «CorelDraw», «Corel PHOTO-PAINT», языка HTML, пакетов программ Maple 5.5, «Хага». При запуске компакт-диска появляется основная страница Меню (Рис.1), на которой с левой стороны имеются переходы на другие страницы, а именно на Maple-страницу (Рис.2), текстовую страницу (Рис.3), на страницу для преподавателей и список литературы.

Из основной страницы, можно перейти на Maple - страницу см. Рис.2, где появляется вставленная в Меню Web - страница, а также в верхнем правом угле – кнопка в форме листа клена, осуществляющая запуск обучающего пакета Maple-программ по всем разделам курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Web- страница предназначена, во-первых, для предварительного ознакомления пользователя с работой пакета Maple 5.5, а, во-вторых, для организации удобной системы поиска нужной информации. Здесь имеются переходы к следующим пунктам: «Интерфейс системы Maple», «Среды отображения в Maple», «Кнопки панели в Maple», «Назначение кнопок панели в Maple», «Планшетки в Maple», «Ввод команд и запуск их исполнения», «Видео: Ввод команд и запуск их исполнения», «Основная литература».

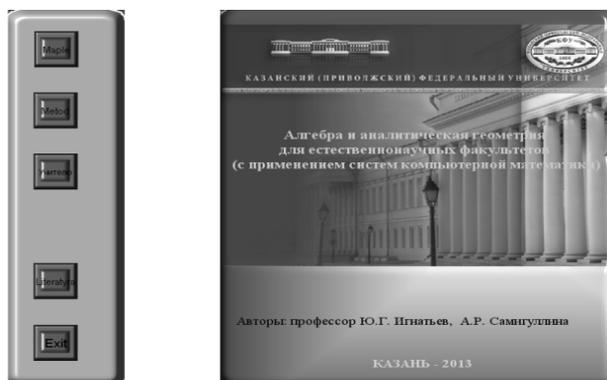


Рис.1. Основная страница



Рис.2. Maple-страница



Рис.3. Текстовая-страница

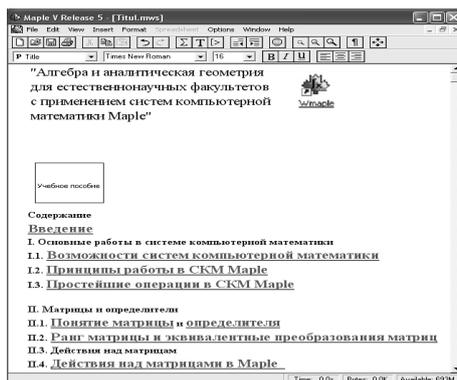


Рис.4. Окно Maple 5.5 с интерактивным меню обучающего пакета программ

Текстовая страница служит для осуществления переходов на учебное пособие. Учебное пособие создано в формате doc и содержит как перекрестные гиперссылки, так и гиперссылки на командные файлы в формате bat, которые запускают необходимые рабочие листы mws с помощью демонстрационной версии Maple 5, локализованной на компакт-диске. На Рис.5 показано открытие ссылки на Maple-файл из текста учебного пособия. Эта операция осуществляется командным файлом, содержащемся на компакт-диске.

Пример исследования кривых второго порядка в пакете компьютерной математики MAPLE

Исследование кривой осуществляется с помощью трехпараметрической процедуры AnalGeo[CanonF](Eq, X,X1,s), где Eq - общее уравнение кривой второго порядка, X - список координат в первоначальной системе координат в формате [x,y], X1 - список координат в новой системе координат в формате [x1,y1], s - имя переменной угла поворота системы координат. При выполнении команды выводится название типа кривой; матрица ее параметров (список собственных значений квадратичной формы, каноническое уравнение кривой, преобразование движения, приводящее к каноническому уравнению, список параметров [c,ε,d] - [расстояние от центра до фокусов, эксцентриситет, расстояние от центра до директрис], [a,b,p] - [значения полуосей и параметра в каноническом уравнении параболы] см.[2], [3], [6]. На Рис. 6, 7 показано исполнение этой команды.

Заключение

Все основные программы защищены авторскими свидетельствами [5], [6]. Компакт-диск предназначен для студентов физических, информационных специализаций, а также нематематических факультетов и преподавателей математики.

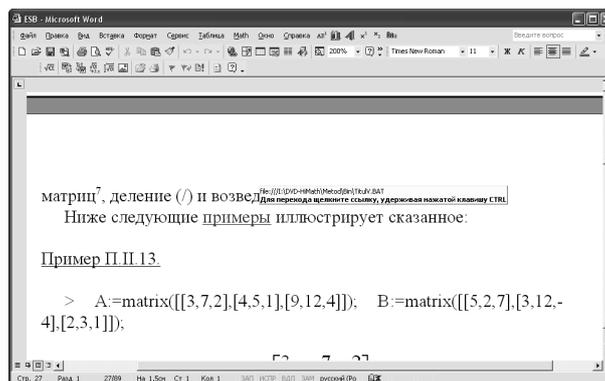


Рис.5. Вызов Maple-примера из окна Microsoft Word учебного пособия

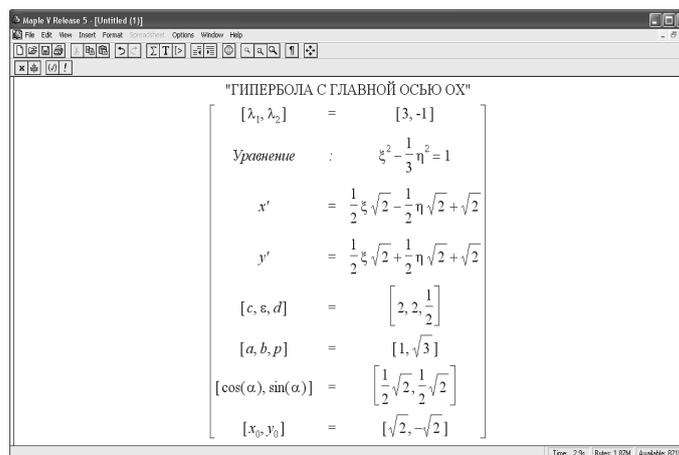


Рис.6. . Вывод результатов исследования уравнения второго порядка $x^2 + y^2 + 4 * x * y - 8 * x - 4 * y + 1 = 0$ в форме матрицы

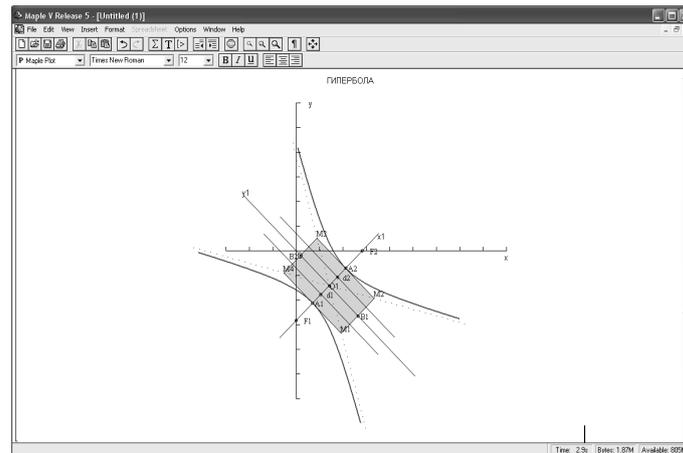


Рис.7. . Вывод результатов исследования уравнения второго порядка $x^2 + y^2 + 4 * x * y - 8 * x - 4 * y + 1 = 0$ в форме рисунка

Литература

- [1] Самигуллина А.Р. Математическое моделирование объектов линейной алгебры и аналитической геометрии в системе компьютерной математики Maple. / А.Р. Самигуллина // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. - 2010. - Вып. 3(21). - С. 69-74.
- [2] Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Библиотека программных процедур для методического обеспечения курса высшей алгебры в системе компьютерной математики "Maple". Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. - 2011. - Вып. 1(23). - С. 20 - 24.
- [3] Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программное обеспечение теории кривых второго порядка в пакете компьютерной математики. Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. - 2011. - Вып. 4(26). - С. 24 - 29.
- [4] Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Информационные технологии изучения физико-математических курсов на основе математического моделирования в системе компьютерной математики. Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Известия Смоленского государственного университета. - 2012. - Вып. 4(20). - С. 471 - 481.
- [5] Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программа точного вычисления фундаментальных решений системы линейных алгебраических уравнений произвольного порядка и представления их в стандартном, списочном виде в математическом пакете Maple: св. о гос. рег. прог. для ЭВМ Росс. Фед. №2011614976 от 24.06.11; заявл. 01.04.11; опубл. 20.09.2011. В бюлл.: RU ОБПБТ, № 3(76). С. 547.
- [6] Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А. Р. Программа автоматизированного полного исследования общего уравнения второго порядка на плоскости с выводом результатов исследования в табличном и графическом форматах всех элементов кривых, описываемых общим уравнением, включая формулы их преобразования к каноническому виду, изображения директрис, асимптот, фокусов, исходной и преобразованной систем координат, в математическом пакете Maple: св. о гос. рег. прог. для ЭВМ Росс. Фед. №2012611664 от 14.02.12.
- [7] Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Электронный учебник по линейной алгебре и аналитической геометрии с использованием СКМ Maple 5.5. - 2013. Вып. 14. - С. 30 - 32.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ НА M КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ПОЛУОКРУЖНОСТЯХЭ.Д. Хусаинова¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: ence_khusainova@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрена задача об отыскании решений задачи дифракции с условиями сопряжения на m концентрических полуокружностях, проведено обоснование полученного решения.

Пусть полуплоскость $y > 0$ плоскости E_2 разбита на $m+1$ частей концентрическими полуокружностями $C_{R_j}^+$, $j = \overline{1, m}$ с общим центром в начале координат и радиусами R_j такими, что $R_1 < R_2 < \dots < R_{m-1} < R_m$. Обозначим через $T^{(1)} = \{(x, y) \in E_2 : x^2 + y^2 < R_1^2, y > 0\}$, $T^{(j+1)} = \{(x, y) \in E_2 : R_j^2 < x^2 + y^2 < R_{j+1}^2, y > 0\}$, $j = \overline{1, m-1}$, $T^{(m+1)} = \{(x, y) \in E_2 : x^2 + y^2 > R_m^2, y > 0\}$.

Рассмотрим задачу об отыскании решений уравнений

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial u_j}{\partial y} + \lambda_j^2 u_j = 0 \quad (j = \overline{1, m+1}, 0 < k < 1), \quad (1)$$

в областях соответственно $T^{(j)}$, $j = \overline{1, m+1}$, удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u_j^+ - u_{j+1}^- = F_j(y), \quad \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial u_j^+}{\partial r} - \frac{1}{\alpha_{j+1}} \frac{\partial u_{j+1}^-}{\partial r} = \Psi_j(y) \quad (j = \overline{1, m}), \quad (2)$$

при $R \rightarrow \infty$ условиям излучения

$$\int_{C_R} |u_{m+1}|^2 y^k dC_R = O(1), \quad \int_{C_R} \left| \frac{\partial u_{m+1}}{\partial r} - i \lambda_{m+1} u_{m+1} \right|^2 y^k dC_R = o(1) \quad (3)$$

и граничным условиям

$$u_j|_{y=0} = 0 \quad (j = \overline{1, m+1}). \quad (4)$$

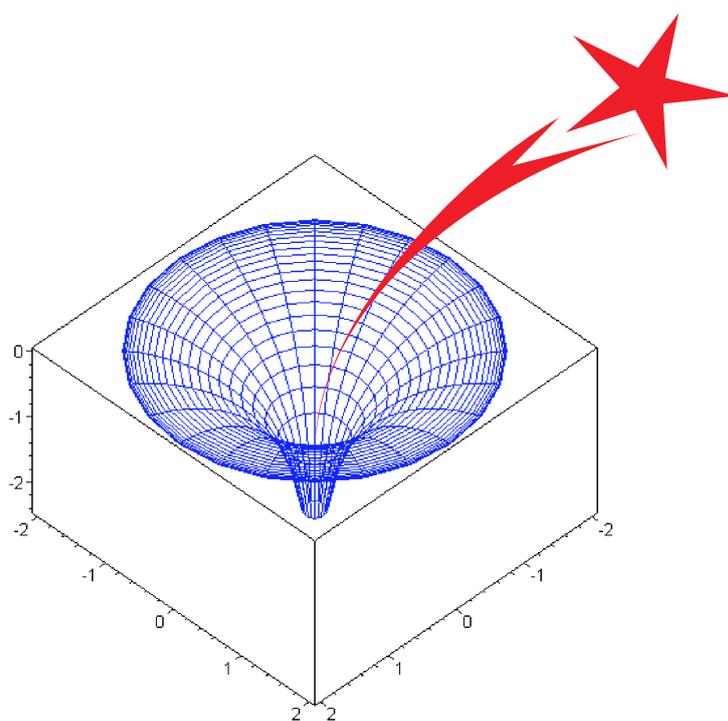
Решение задачи (1)–(4) представляется в виде:

$$u_1(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-\frac{k}{2}} J_{\nu_n}(\lambda_1 r) \left(\sum_{i=1}^{2m} \chi_{in}^1 \gamma_{in} \right) (\sin \varphi)^{1-k} P_n^{\left(\frac{2-k}{2}\right)}(\cos \varphi),$$

$$u_{j+1}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-\frac{k}{2}} \left(J_{\nu_n}(\lambda_{j+1} r) \sum_{i=1}^{2m} \chi_{in}^{2j-2} \gamma_{in} + \right. \\ \left. + Y_{\nu_n}(\lambda_{j+1} r) \right) \sum_{i=1}^{2m} \chi_{in}^{2j-1} \gamma_{in} \left(\sin \varphi \right)^{1-k} P_n^{\left(\frac{2-k}{2}\right)}(\cos \varphi) \quad (j = \overline{2, m}),$$

$$u_{m+1}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-\frac{k}{2}} i Y_{\nu_n}(\lambda_{m+1} r) \left(\sum_{i=1}^{2m} \chi_{in}^{2m} \gamma_{in} \right) \times \\ \times (\sin \varphi)^{1-k} P_n^{\left(\frac{2-k}{2}\right)}(\cos \varphi).$$

**ЧАСТЬ 3. ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА:
ЛЕКЦИИ И ОБЗОРЫ**



СВОБОДНЫЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РАСЧЕТАХ И МОДЕЛИРОВАНИИ

В. Дьяконов¹

Смоленская военная академия ПВО РФ, Смоленск

¹E-mail: vpdyak@yandex.ru

Свободная матричная система компьютерной математики FreeMat

При расчетах и проектировании радиоэлектронных компонентов и устройств необходимы матричные системы компьютерной математики с полной поддержкой аппарата комплексных вычислений. Лидером мирового рынка стала коммерческая система MATLAB. Однако ее применение сдерживается ее большим объемом (более 5 Гбайт) и высокой стоимостью. В статье описана свободно распространяемая и бесплатная система FreeMat, способная выполнять такие вычисления и имеющая подобный MATLAB графический интерфейс пользователя при высокой степени графической визуализации вычислений.

FreeMat - свободная матричная система для инженерных и научных расчетов, а также обработки данных. Система использует инструментарий Qt, обеспечивающий кроссплатформенность этого продукта. Система использует средства объектно-ориентированного программирования и имеет интерфейс к программным модулям, написанным на языках программирования C, C++ и Fortran.

Размер установочных файлов системы на два порядка меньше, чем у системы MATLAB. Поэтому о полной замене куда более мощной системы MATLAB речь не идет. Система FreeMat может заменить MATLAB как средство для проведения основных матричных вычислений с комплексными данными, при разработке методов и моделей компонентов математического моделирования электронных цепей и устройств, моделировании и визуализации электрических сигналов, проведении аппроксимации нелинейных зависимостей, например вольтамперных характеристик активных приборов, выполнении быстрого преобразования Фурье и т.д.

FreeMat имеет интерпретирующий язык программирования и диалога, подобный применяемому в коммерческой матричной системе MATLAB фирмы The Math works и IDL Research System. FreeMat создана по лицензии GPL, предусматривающей свободное развитие и распространение системы. В системе есть полноценная IDE с возможностью создания и отладки кода, сохранения и выполнения истории команд, управления файлами. FreeMat чисто численная система. Тем, кому необходимы символьные (аналитические) вычисления могут обратить свой взор к открытой системе компьютерной алгебры wxMaxima.

Последняя версия FreeMat 4.2 была выпущена осенью 2012 года [1] и доступна практически для всех известных платформ. Среди ее основных возможностей:

- Предельно простой графический интерфейс пользователя.
- Поддержка объектно-ориентированного программирования и перегрузки операторов.
- Поддержка автодополнения в консоли.
- Поддержка параллельных вычислений на базе технологии MPI.
- Использование OpenGL для построения графиков и поверхностей.
- Предоставление большинства известных методов численных вычислений, включая прямое и обратное быстрые преобразования Фурье (FFT), преобразование Гильберта; SVD-, LU- и QR-разложения матриц, работу с многомерными матрицами, интерполяцию и аппроксимацию функций и многое другое.

Система имеет обширное справочное руководство в 2526 страниц (файл формата PDF) подготовленное главным разработчиком системы – Самитом Басу [2]. Целью FreeMat было создание современного инструментария для реализации матричных численных методов и их визуализации при простом интерфейсе для внешних программ на C/C++/Fortran.

Интерфейс системы FreeMat

Интерфейс пользователя системы FreeMat для компьютеров Apple (рис. 1) с первого взгляда напоминает упрощенный интерфейс матричной системы MATLAB (до последней реализации MATLAB R2012b, имеющей совершенно новый интерфейс [3]). На рис. 1 представлено окно командного режима (слева) и окно справочной системы – справки (справа). Все окна плавающие. В окне командного режима представлено окно с начальными данными о системе FreeMat. Окна имеют титульную строку с тремя цветными кружками в начале. Они закрывают окно, переводят его в полноэкранный и в масштабируемый режимы работы.

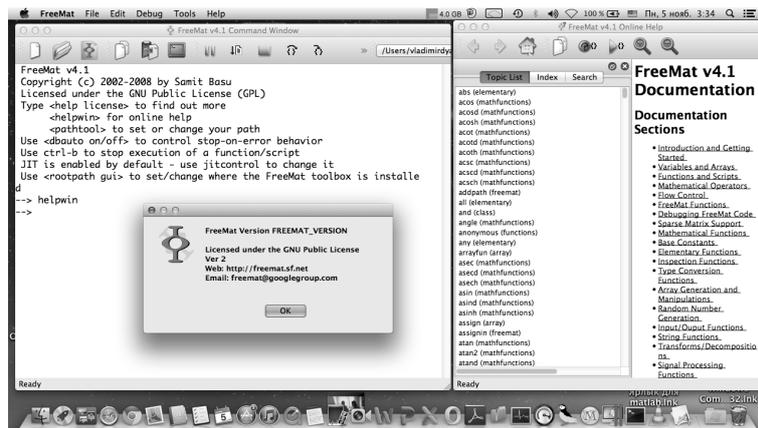


Рис. 1: Интерфейс системы FreeMat: окно командного режима (слева) окно справки (справа).

Примеры простейших вычислений в командном окне даны на рис. 2. Внутри этого окна показано окно выбора шрифтов, позволяющее выбрать тип и размер шрифта, который используется в окне командного режима. Оно вызывается командой Preferences – Font в позиции Edit меню.

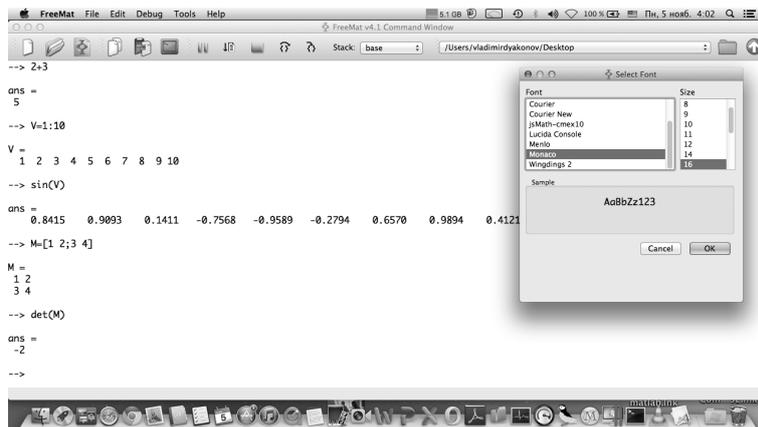


Рис. 2: Примеры простейших вычислений в командном окне и окно выбора шрифтов (внутри).

Язык программирования и диалога в системе FreeMat является объектно-ориентированным интерпретатором. Он детально описан в [2, 3] причем большая часть [2] посвящена описанию средств визуализации объектов языка. Он позволяет в командном окне набрать любое выражение или набор законченных инструкций и тут же их исполнить. Такой набор можно представить в виде script-файла, для создания которого используется встроенный редактор FreeMat. На рис. 3 показано окно редактора с простой программой, запущенной на выполнение активизацией кнопки с зеленым треугольником на панели инструментов редактора. Тут же показан результат исполнения программы - графическое окно с графиками функций синуса и косинуса.

Вообще интерфейс FreeMat предельно прост. Он проще интерфейса ранних версий MATLAB [3-7]. Меню содержит всего 6 позиций, в каждой из которых число команд минимизировано:

- FreeMat – вывод данных о системе и средствах Qt, доступные сервисы, управление показом окон и выход из программы.
- File – открытие нового файла, ввод файлов и запись script-файлов.
- Edit – копирование и вставка выделенного в командном окне текста и команда Preferences с двумя позициями – выбора шрифтов и максимального числа линий в командном окне.
- Debug – пауза, возобновление работы, остановка и управление шагом исполнения программы.
- Tools – открытие окна инструментальных средств (редактора, установки рабочей директории, браузера файловой системы, истории, рабочего пространства и отладчика программ).

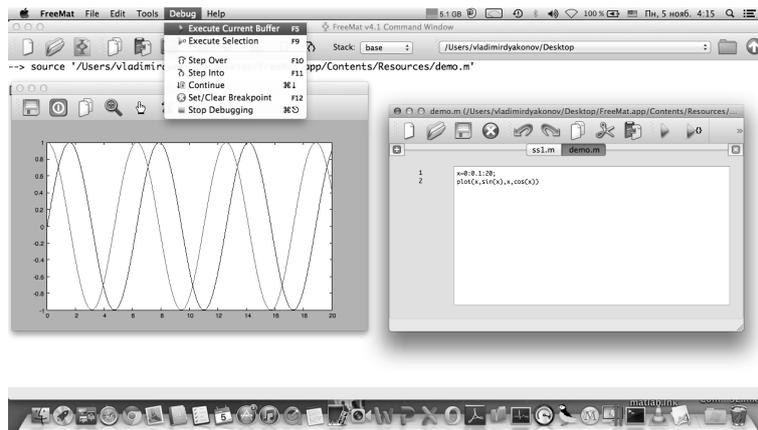


Рис. 3: Простая script-программа в редакторе FreeMat и графическое окно с результатом ее исполнения.

- Help – вызов окна справки.

Выделение надо делать левой нажатой клавишей мыши и затем использовать команду Copy в позиции меню Edit для переноса скопированного в буфер. Меню правой клавиши мышки в системе FreeMat нет.

Для компьютеров класса PC с операционной системой Windows последней версией является FreeMat 4.2. Окно этой системы еще более напоминает окно системы MATLAB (до R2012b) – рис. 4. Окна менеджера файлов, истории команд, переменных и отладчика располагаются внутри окна командного режима. Пункта меню FreeMat нет, а его позиции перешли в позицию Help. Иной вид имеет титульная строка – управляющие окном кнопки переместились в конец титульной строки и имеют привычный для пользователей Windows (до Windows 8) вид прямоугольников.

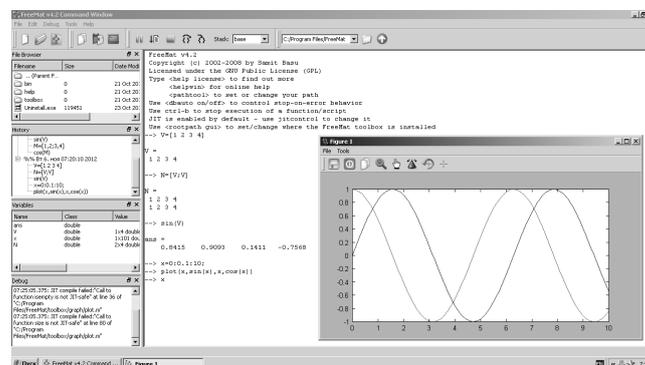


Рис. 4: Интерфейс системы FreeMat 4.2 для компьютеров класса PC с операционной системой Windows.

Файловая система FreeMat более открытая, чем у версии для MAC. Окно выбора загружаемого файла открывает сразу доступ к директории FreeMat с папками bin (системные файлы), help (файлы справки) и toolbox (папки с файлами функций объектов). На рис. 5 показано командное окно, в котором видно окно редактора с листингом одной из функций. Он демонстрирует второй тип программ – функции, имеющие список входных параметров и специальный формат задания.

Из этих примеров, видно, что работа в системе FreeMat для PC ничем не отличается от таковой для компьютеров Apple. Аналогична и справочная система. Поэтому последующий материал статьи относится к обоим описываемым версиям системы FreeMat.

Матричные вычисления

Работу в системе FreeMat надо начинать с уточнения рабочей директории системы. Следующая команда в командном окне

```
-> pathtool
```

выводит окно установки директории, которая должна содержать исполняемые операторы и функции. Рекомендуется сразу установить рабочую директорию.

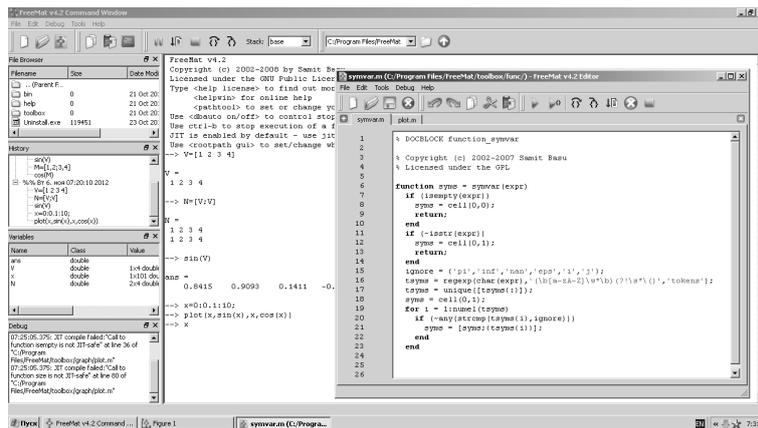


Рис. 5: Окно редактора с листингом функции.

FreeMat имеет ряд констант: $\pi = 3.1416$, i и j – мнимая единица, $\text{eps} = 2.2204e-16$ – погрешность численных методов, $e = 2.7183$ – основание натурального логарифма, inf – бесконечность, placeNaN – не цифровой результат (например $0/0$), ans – последний результат выражения и др. Набор констант не принципиально отличается от принятого в системе MATLAB.

Переменная в системе FreeMat это область памяти, имеющая имя (идентификатор) и хранящая присвоенные ей численные значения. Как в MATLAB даже переменная для хранения одного числа рассматриваются как матрица, имеющая размер 1×1 . Для присваивания переменным значения используется знак равенства. FreeMat различает регистр, поэтому x и X это разные переменные. Набор типов переменных тот же, что и в MATLAB.

Векторы задаются в квадратных скобках и для разделения их элементов используется пробел или запятая. Точка с запятой используется как разделитель элементов столбцов. Векторы могут быть двух типов – вектор-строка и вектор-столбец. Примеры задания простых векторов и матриц приводились выше на рисунках. Точка с запятой в конце строки блокирует выдачу результата вычислений.

Матрицы могут быть двухмерными и многомерными. С матрицами возможны различные арифметические операции с применением операторов $+$, $-$, $*$ и $/$. Если нужно обеспечить почленную операцию, перед ее обозначением ставится точка. Одинарная кавычка справа матрицы означает ее транспонирование:

```
-> M=[1 2; 3 4]
```

```
M = 1 2
```

```
3 4
```

```
-> M'
```

```
ans = 1 3
```

```
2 4
```

Обращение матрицы задается ее возведением в степень (-1) , как $M^{(-1)}$, или применением функции inv :

```
-> inv(M)
```

```
ans = -2.0000 1.0000
```

```
1.5000 -0.5000
```

Функцию можно использовать для решения систем линейных уравнений (в том числе с комплексными коэффициентами, например уравнений Кирхгофа для электрических цепей). Для вычисления детерминанта квадратной матрицы используется функция det :

```
-> det(M)
```

```
ans = -2
```

Имеются и множество других матричных функций и функций линейной алгебры. При математическом моделировании важное место занимают разреженные массивы и матрицы. У них большая часть элементов имеет нулевое значение. Это позволяет уменьшить время выполнения матричных операций. FreeMat имеет восемь операций с разреженными матрицами.

Операторы и функции FreeMat

FreeMat имеет полный набор арифметических операций и математических функций, присущий современным системам компьютерной математики. Ввиду общеизвестности его [6,7] и громоздкости описания он в деталях описываться не будет. Впрочем, небольшие тонкости тут есть, например отсутствие функции натурального логарифма \ln - она обозначена как \log :

```
-> log(2)
ans = 0.6931
```

Зато есть функция логарифма по основанию 10 – \log_{10} и по основанию 2 – \log_2 . Последний символ H указывает на отношение функции к классу гиперболических функций, D означает, что угол измеряется в градусах (degrees). А буква A (от arc) указывает на обратную функцию. Это говорит лишь о необходимости знакомиться с соответствующим разделом справочной системы FreeMat.

Визуализация элементарных функций осуществляется довольно просто простейшей графической функцией `plot`. А вот похвастать обширным набором специальных математических функций FreeMat не может – их заметно меньше, чем в системах компьютерной алгебры Maple и Mathematica. И они размещены в общем разделе `Mathematical Functions`. Имеются гамма-функция, логарифмическая гамма-функция, полиномы Лежандра функция ошибок. Все эти функции широко применяются в практике расчетов радиоэлектронных устройств.

Элементарными называется большая группа совершенно иных функций. В их числе, например, функция аппроксимации производной конечными разностями:

```
y=diff(x,k,dim)
```

где X – массив исходных данных, k – порядок производной. Эта функций позволяет строить графики производной функции – например затухающей синусоиды (рис. 6):

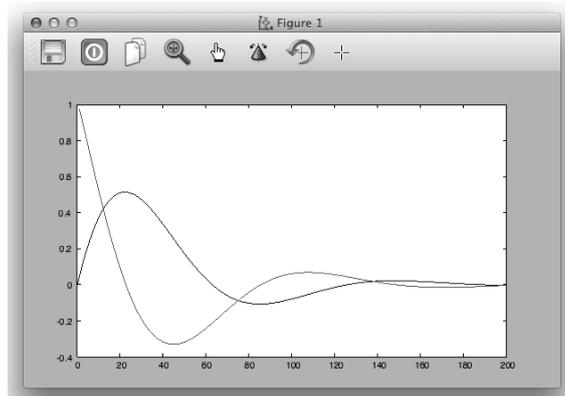


Рис. 6: Графики затухающей синусоиды и её производной.

```
x=0:0.05:10; S=e.^(-x/2).*sin(x);
D=diff(S); plot(x/0.05,S,D/0.05)
```

Обратите внимание на то, что по горизонтальной оси отложено не реальное время, а номера отсчетов функции. Задавать свои функции можно рядом способов, например как объект, с помощью функции `inline`:

```
-> a=inline('x*sin(x)')
```

```
a =
```

```
inline function object
```

```
f(x) = x*sin(x)
```

```
-> a(1)
```

```
ans = 0.8415
```

```
-> sin(1)
```

```
ans = 0.8415
```

Численные методы во FreeMat

FreeMat ориентирована на разработку, а не на применение уже готовых численных методов. Поэтому число последних резко сокращено, чтобы минимизировать размер кодов системы. В разделе численных методов справки FreeMat есть только две функции численного интегрирования методом трапеций и одна

функция `ode45` – решатель для решения дифференциального уравнения первой степени методом Рунге-Кутты с заданными граничными условиями. Например, для уравнения разряда конденсатора C через резистор R при нормированном $RC=1$ дифференциальное уравнение будет $y' = -y$ (y' – производная). Тогда, при $y(0) = 1$ (начальное напряжение на конденсаторе) решение задается как:

```
-> [t,y]=ode45(@(t,y) -y,[0 3],1);
```

Если убрать точку с запятой в конце этого программного выражения, то будут выведены вектора t и y решения в заданном интервале изменения t от 0 до 3. Можно построить и график решения – это будет экспонента разряда:

```
-> plot(t,y,'o-')
```

Пример интегрирования методом трапеций дан ниже:

```
-> x=[1 2 3 4];
```

```
-> trapz(x)
ans = 7.5000
```

Эти примеры элементарны. Однако, функций для реализации основных численных методов линейной алгебры, работы с полиномами, интерполяции, аппроксимации, оптимизации и др. *представлено* довольно много и это именно те функции, которые широко применяются в практике электро-радиотехнических расчетов [5, 6]. Все расчеты ведутся с использованием комплексных чисел и данных, широко применяемых в практике таких расчетов. Приведем лишь несколько примеров.

Например, по вектору коэффициентов полинома

$$A(x) = 1 * x^3 - 2 * x^2 - 3 * x - 4$$

можно найти его корни с помощью функции `roots(A)`:

```
-> roots([1 -2 -3 -4])
```

```
ans = 3.2843 + 0.0000i
```

```
-0.6421 + 0.8975i
```

```
-0.6421 - 0.8975i
```

Следующая программа, созданная в редакторе, дает полиномиальную аппроксимацию заданной во второй строке зависимости, используя полином 6-степени (рис. 7):

```
x = linspace(0,5,50);
```

```
y = x.*e.^(-x)
```

```
a= polyfit(x,y,6)
```

```
f = polyval(a,x);
```

```
plot(x,y,'r-',x,f,'g*:')
```

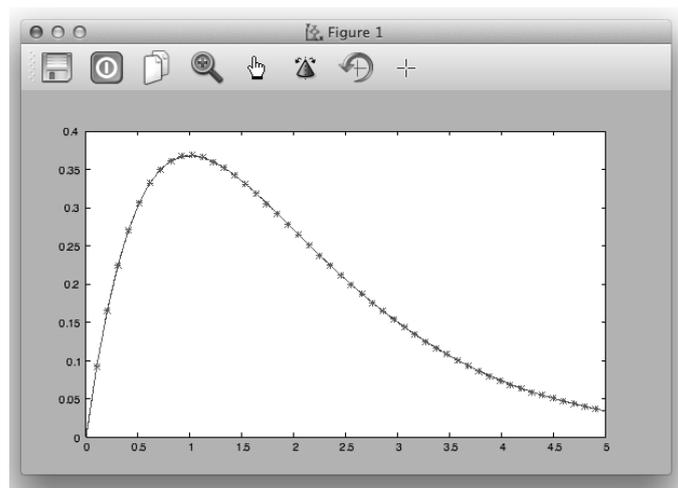


Рис. 7: Пример приближения полиномом 6-степени функции с падающим участком.

Используемая здесь функция имеет падающий участок, как вольтамперная характеристика туннельного диода или лямбда-диода и лямбда-транзистора. С помощью приведенной программы можно легко выяснить,

какого порядка надо использовать полином для полиномиальной аппроксимации этих приборов и какую точность обеспечивает такое приближение.

В числе функций преобразования имеются функции прямого `fft` и обратного `ifft` преобразований Фурье. Эти преобразования находят очень широкое применение в обработке сигналов в радиотехнике и технике связи. После вначале прямого, а затем обратного преобразования вектора он восстанавливается с указанием мнимых частей элементов выходного вектора (даже если они нулевые):

```
-> x=[1 2 3 4];
-> X=fft(x)
X = Columns 1 to 2
10.0000 + 0.0000i -2.0000 + 2.0000i
Columns 3 to 4 -2.0000 + 0.0000i -2.0000 - 2.0000i
-> x=ifft(X)
x = Columns 1 to 2
1.0000 + 0.0000i 2.0000 + 0.0000i
Columns 3 to 4 3.0000 + 0.0000i 4.0000 + 0.0000i
```

Прямое преобразование Фурье обычно используется для представления сигналов, описанных функцией времени, в частотной области. Ниже дан фрагмент программы имитирующей создание 256 точек сигнала $y(t)$:

```
t=0:0.01:2.56;
y = sin(2*2*pi*t)+0.5*sin(5*2*pi*t);
```

Установим генератор случайных чисел с нормальным распределением и смоделируем зашумленный сигнал, добавив в вектор `y` случайную компоненту:

```
randn('state',0);
yn=y+2*randn(size(t));
```

Теперь зададим функцией `figure(1)` первое графическое окно и зададим в нем построение функций `plot` и зашумленного сигналов:

```
figure(1); plot(t,y,t,yn)
```

Эти зависимости соответствуют временному представлению сигналов. Переведем сигнал в частотную область, используя функцию быстрого преобразования Фурье – `fft`:

```
s = fft(y);
```

Теперь можно построить график спектра сигнала и представить его в частотной области:

```
figure(2);plot(t,abs(s));
```

Соберем эти программные предложения воедино в редактор программного кода FreeMat и запишем как файл `demofft.m` (рис. 8). На этом рисунке показано и командное окно FreeMat с результатом выполнения команды `demofft`.

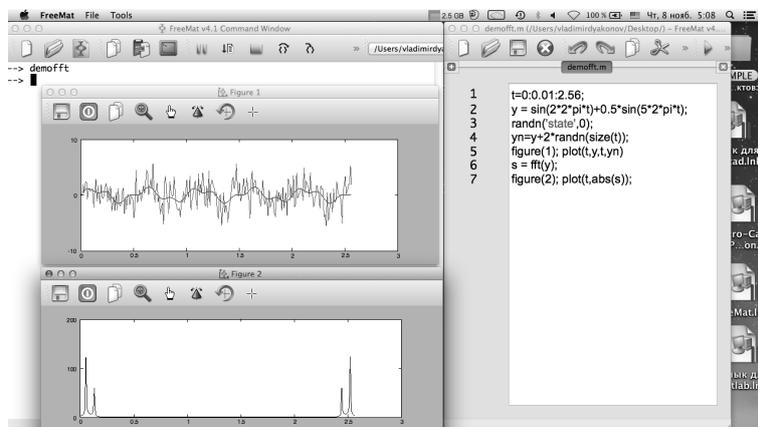


Рис. 8: Пример создания файла `demofft.m` и исполнения команды `demofft`.

Результат представлен двумя графическими окнами. На первом показаны графики исходного и зашумленного сигнала. Нетрудно заметить, что форма зашумленного сигнала не имеет почти ничего общего с исходным сигналом, поскольку шум практически его забивает. Определить полезные составляющие невозможно. А вот представление спектра сигнала в частотной области четко выделяет обе синусоидальные составляющие сигнала и позволяет оценить их частоту и амплитуду.

А теперь проверим, будет ли исполняться созданный в среде FreeMat файл в среде системы MATLAB, к применению которой привыкли специалисты по электротехнике и радиотехнике. Запустим эту систему и загрузим файл `demofft.m` в ее редактор. На рис. 9 показано окно MATLAB с окном редактора и результатом выполнения команды `demofft`.

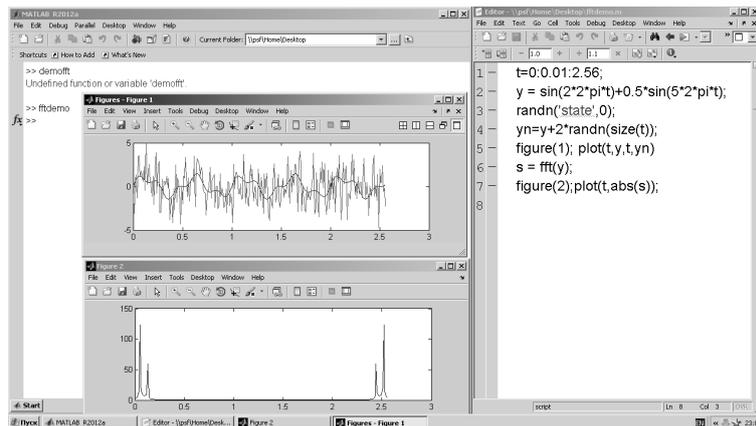


Рис. 9: Окно MATLAB R2012a, редактора системы и результат выполнения команды `demofft`.

Как видно, в первый раз система MATLAB отказалась выполнять команду, поскольку не нашла файла с ее именем в своей рабочей директории. После установки нужной директории команда была и получен результат, полностью повторяющий полученный ранее (сравните рис. 12 и рис. 13). Заодно сравните интерфейс пользователя FreeMat и MATLAB – он практически одинаков. Поэтому пользователь, освоивший работу в системе FreeMat при необходимости легко перейдет к работе в более мощной и дорогой системе MATLAB.

Графическая визуализация в системе FreeMat

Визуализация с помощью 2D графики широко используется в технике представления различных сигналов. Некоторые идеализированные периодические сигналы можно представить как комбинацию из тригонометрических и обратных тригонометрических функций - рис. 10. Здесь показано построение четырех графиков в одном окне.

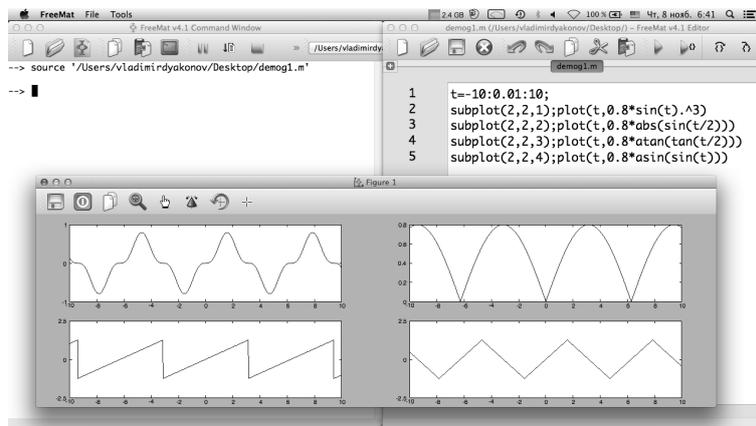


Рис. 10: Примеры моделирования 4 сигналов и построение их временных зависимостей.

Важным достоинством такого представления сигналов является однозначность и хорошее представление периодичности в пределах изменения времени от $-?$ до $+$?. Это очень важно при имитационном моде-

лировании сигналов. Подобная техника применяется и при графической визуализации сложных сигналов, например с частотной (FM) и амплитудной (AM) модуляцией - рис. 11.

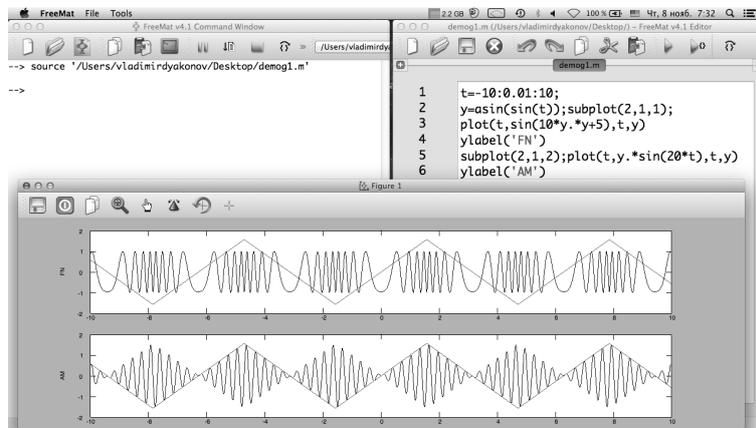


Рис. 11: Графики сигналов с частотной и амплитудной модуляцией.

Графики функций комплексного переменного Z и случайных чисел (функция `rand`) на плоскости (рис. 12) строятся следующим скрипт-файлом, представляющим четыре окна от `figure1` до `figure4`:

```

figure(1)
x = linspace(-1,1,512)'; y = x';
Z = exp(-(x.^2+y.^2)/0.3); image(Z);
colormap(copper);
figure(2)
x = rand(512);
x((-64:63)+256,(-128:127)+256) = 1.0;
image(x); colormap(gray)
figure(3)
x = linspace(-1,1,512)'; y = x'; Z = exp(-(x.^2+y.^2)/0.3);
image(Z);
figure(4)
x = linspace(-1,1,512)'; y = x'; Z = exp(-(x.^2+y.^2)/0.3);
image(Z); colormap(gray);

```

Такой способ позволяет строить разные графики с индивидуальной установкой цветов в каждом из них. В прямых апострофах можно в строковом виде задавать различные опции, меняя стиль и цвет линий, вводя титульные и иные надписи и т. д.

Построение еще четырех 3D графиков (рис. 13)

обеспечивает следующая скрипт-программа:

```

figure(1); t=0:(2*pi/100):(2*pi);
x=cos(t*2).*(2+sin(t*3)*.3); y=sin(t*2).*(2+sin(t*3)*.3);
z=cos(t*3)*.3; tubeplot(x,y,z,0.14*sin(t*5)+.29,t,10);
figure(2); x = repmat(linspace(-1,1),[100,1]);
y = x'; r = x.^2+y.^2; z = exp(-r*3).*cos(5*r);
c = r; surf(x,y,z,c); axis equal; view(3)
figure(3); [x,y] = meshgrid(linspace(-1,1,50));
z = x.*exp(-(x.^2+y.^2)); h = contour(z);

```

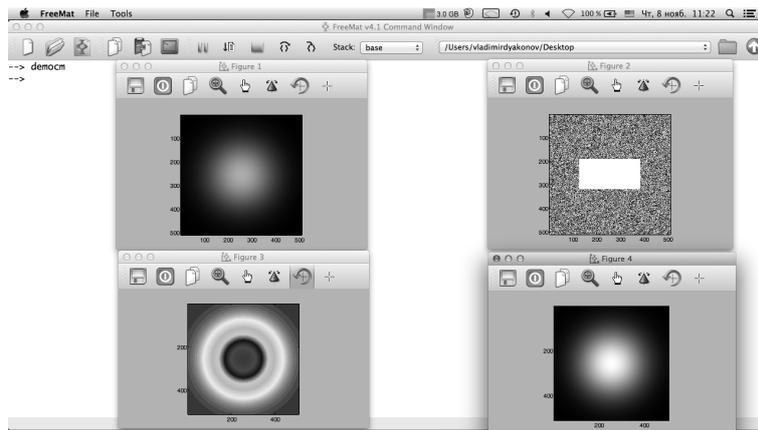


Рис. 12: Различные графики на плоскости.

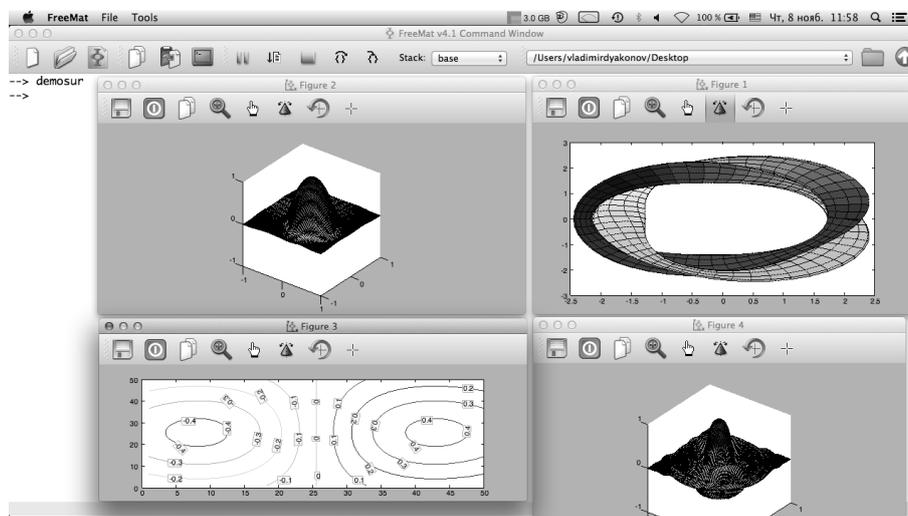


Рис. 13: Примеры построения 3D- графиков поверхностей и объемных фигур.

```

clabel(h,'backgroundcolor',[1,1,.6],'edgecolor',[.7,.7,.7]);
figure(4); x = repmat(linspace(-1,1),[100,1]);
y = x'; r = x.^2+y.^2; z = exp(-r*3).*cos(5*pi*r);
surf(x,y,z); axis equal; view(3)

```

Из этих примеров видны обширные возможности 2D и 3D графики системы FreeMat. Они вполне эквивалентны реализациям основных графических функций в системе MATLAB.

Матричная системы SciLab

Scilab прошла долгий путь развития. С 1994 года она распространяется вместе с исходным кодом через Интернет. В 2003 году для поддержки Scilab был создан консорциум Scilab Consortium. В него вошло свыше 25 участников, в том числе Mandriva, INRIA и ENPC (Франция). Новейшие версии Scilab 5.4.0/5.4.1 (<http://www.scilab.org/>), предназначены для работы с операционными системами LINUX (184,73 Мбайта), Windows XP/Vista и (110,86 Мбайта) MAC OS X (163,22 Мбайта) и имеет пакет блочного имитационного моделирования Xcos с обширной библиотекой компонентов (блоков).

Scilab содержит более 1000 встроенных функций и у нее есть возможность добавления новых функций, написанных на различных языках (C, C++, Fortran и т. д.). Система имеет различные структуры данных (списки, полиномы, рациональные функции, линейные системы), интерпретатор и язык программирования высокого уровня. Пользователи Scilab могут добавлять в систему свои типы данных и операции. Система имеет очень удобный графический интерфейс пользователя и в ней устранена масса ошибок, присущих более ранним версиям.

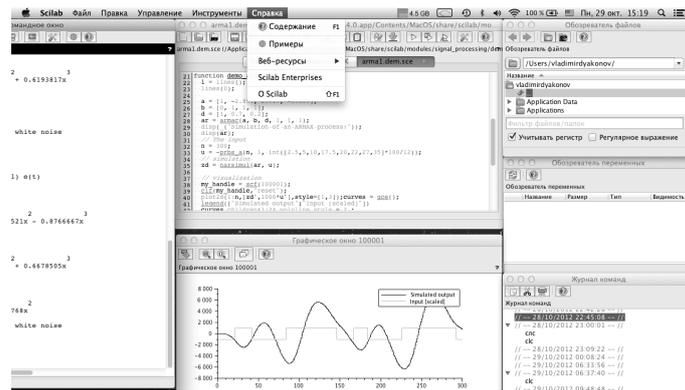


Рис. 15: Окно Scilab с окнами основных объектов пользовательского интерфейса.

справочной системе. Отметим лишь, что этот язык относится к интерпретирующему типу и ориентирован на быстрое выполнение и простую запись векторных и матричных операторов и функций. Большие и малые буквы различаются, так что X и x – разные объекты.

Как интерпретатор язык после указателя ввода \rightarrow позволяет задать системе вопрос и тут же получить ответ. В одной строке ввода можно использовать только одну законченную инструкцию (в MATLAB можно использовать несколько инструкций, разделяемых знаком «;»). Простые примеры диалога с системой даны в командном окне на рис. 14 и 15.

Основой матричных систем являются векторы и матрицы. Они задаются в квадратных скобках построчно. Разделителем элементов в строке является пробел или запятая. Строки в квадратных скобках матриц разделяются знаком «;». Этот же знак в конце строки ввода запрещает вывод результата вычислений (это не относится к командам графики, выводящим графическое окно).

Матрицы имеет m строк и n столбцов. Например, матрица из двух строк по три элемента в каждой строке задается как $M = [1\ 2\ 3; 4\ 5\ 6]$ или $M = [1,2,3;4,5,6]$. Векторы и матрицы обычно создаются и обрабатываются с помощью циклов. Их конструкции сохранены в языке Scilab, но повсеместно заменяются средствами векторизации. Например, конструкция $s:d:e$ создает вектор чисел от начального числа s до конечного e с шагом d .

Графика системы Scilab

Scilab обладает прекрасными возможностями графической визуализации вычислений. На рис. 16 даны примеры построения 2D графика функцией `plot` и контурного графика на плоскости функций `contour2d`. Эти операции задаются в командном режиме. Графики строятся в графических окнах, которые определяются функцией `Figure`. Если последняя не используется, то графики накладываются друг на друга в последнем графическом окне.

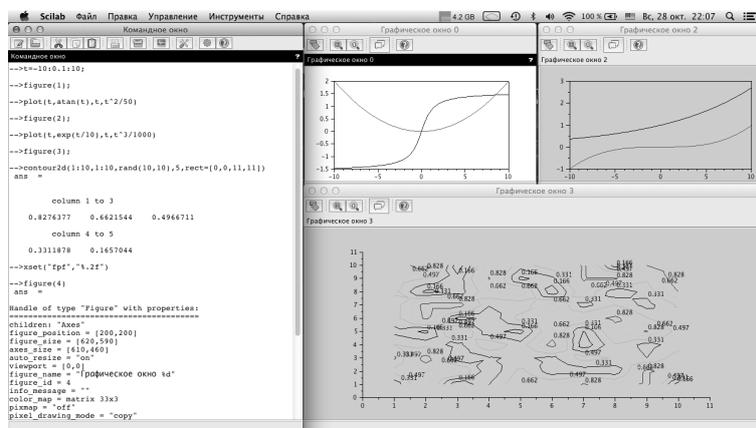


Рис. 16: 2D графика и контурные линии на плоскости.

Трехмерные графики могут задаваться по их математическому выражению вида $Z(x,y)$ – рис. 17.

Обратите внимание на задание тут функции пользователя $Z=f(x,y)$. Функция `fplot3d` строит 3D графики, заданные функцией от переменных, значения которых задаются числами с плавающей точкой.

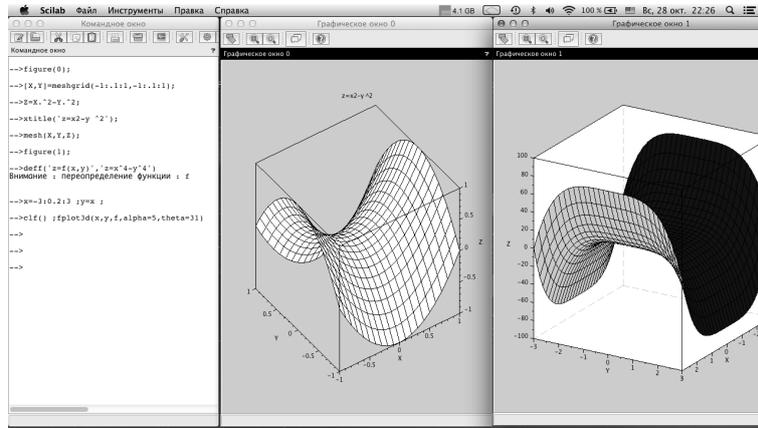


Рис. 17: Построение 3D графиков по их математическим выражениям.

Для построения сложных 3D графиков может использоваться и функция `plot3d`. Как и функция `plot` она подобна такой функции у системы MATLAB. В справке есть описание десятков функций 2D и 3D графики. Иногда необходимо построить несколько графиков различного типа в одном окне. Для этого оно разбивается на подокна функцией `subplot` – рис. 18.

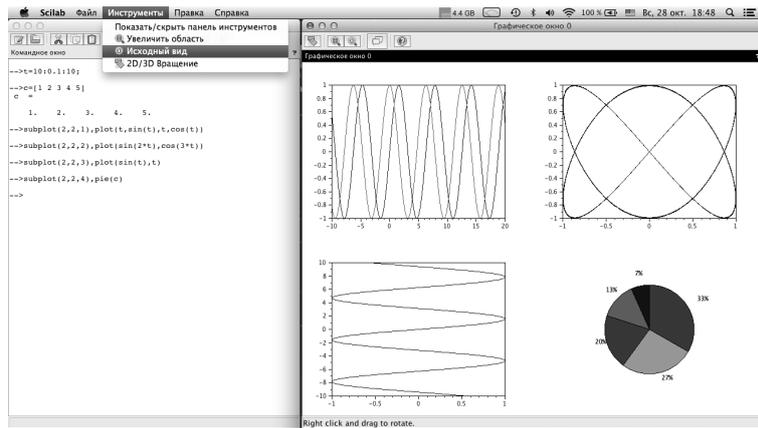


Рис. 18: Четыре графика в одном окне.

Ввод, редактирование и исполнение программ в Scilab

Приведенные выше примеры применения системы Scilab были реализованы в виде сессий в командном окне системы. Работа с системой происходит в режиме диалога – пользователь задает вопрос на языке системы и получает ответ в виде числовых данных или текстовых сообщений. Часто вопрос содержит ошибки и система прерывает вычисления и выдает сообщения об ошибках, которые надо исправить. Лишь самые простые, как правило, однократные, вычисления можно выполнять таким способом.

Тут стоит отметить, что Scilab сохраняет такие инструкции во внутреннем программном стеке и их можно вывести, а текущую строку ввода с помощью клавиш перемещения курсора вверх или вниз. После этого строку ввода можно отредактировать и исполнить.

Более удобно оформить последовательность вычислений в виде программного модуля с помощью имеющегося в системе текстового редактора – рис. 19. Загруженная в редактор программа может редактироваться, отлаживаться и запоминаться на жестком диске или ином запоминающем устройстве. На рис. 19 показана загрузка одного из примеров на поиск минимума овражной тестовой функции Розенброка и его графическая иллюстрация. Минимум функции обнаружен в точке $[1,1]$, что указано в командном окне. В окне редактора видна часть листинга программы. Он позволяет вникнуть в суть вычислений на уровне каждого символа (кода) программы.

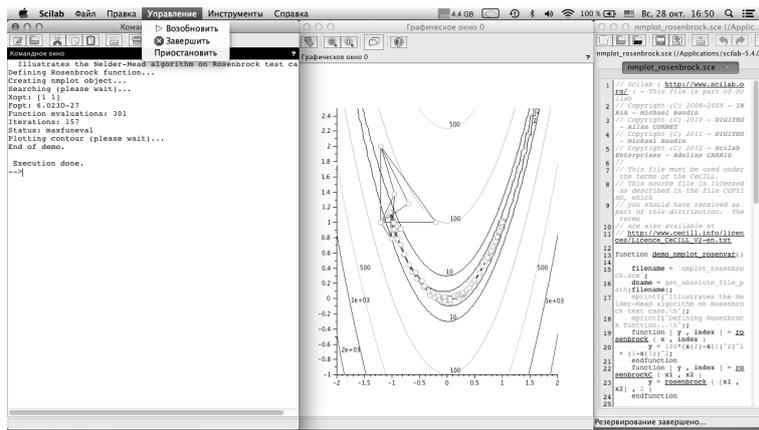


Рис. 19: Загрузка программы в редактор (справа), просмотр ее листинга и исполнение.

В редакторе можно задать или загрузить файлы двух типов. Первый просто последовательность инструкций – script файлы. Второй – функции со списками параметров – полноценные программные модули.

Scilab 5.4.0 поставляется с обширным набором уже готовых демонстрационных примеров. Имеется меню демонстрационных примеров и возможность их выполнения - рис. 20.

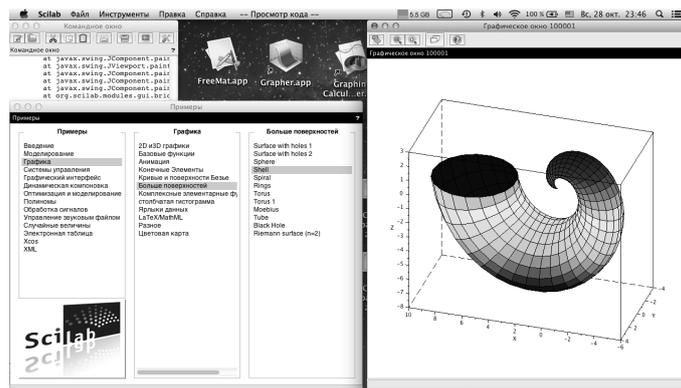


Рис. 20: Меню демонстрационных примеров и результат выполнения одного из них.

Математическое моделирование в Scilab

Вычислительные и графические возможности Scilab позволяют выполнять математическое моделирование и визуализацию сложных фундаментальных физических и математических процессов и явлений. В справке есть довольно обширный раздел по решению дифференциальных уравнений, кстати, на русском языке в русифицированной версии. Такое решение лежит в основе математического моделирования динамических объектов и систем. Есть и множество примеров моделирования.

Ограничимся примерами на поведение потоков частиц. На рис. 21 дан пример на моделирование потока внутри черной дыры. Поток отображается линией красного цвета.

Другой пример на рис. 22 иллюстрирует поведение потока во впадине сферической области. Видна довольно сложная траектория частиц. Она может быть стационарной.

Блочное имитационное моделирование с помощью Xcos

В состав системы MATLAB входит пакет расширения Simulink для проведения блочного визуально-ориентированного моделирования различных процессов, устройств и систем. В Scilab роль пакета Simulink выполняет аналогичный по назначению пакет Xcos. При его применении (команда «Визуальное моделирование Xcos» в меню «Инструменты») появляется окно библиотеки его блоков и окно для задания графических диаграмм модели – рис. 23. Вначале оно пустое.

Окно модели в правой части представляет набор блоков для моделирования. С помощью мыши можно

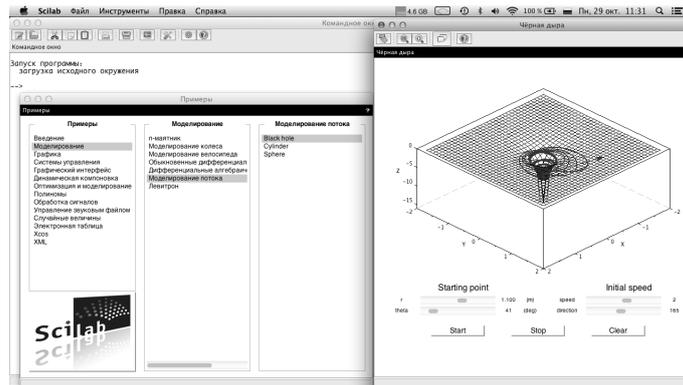


Рис. 21: Моделирование потока в черной дыре.

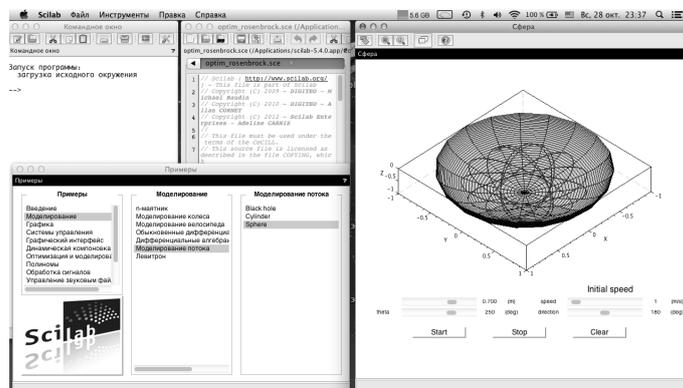


Рис. 22: Моделирование потока и сферической впадине.

перенести любой блок в окно диаграммы. Выбранные блоки имеют порты, которые соединяются должным образом также с помощью мыши. Таким образом, создается графическая диаграмма модели. Она может редактироваться и видоизменяться заменой блоков и соединений, изменением местоположения блоков и т. д.. На рис.23 дан пример задания простейшей блочной модели сумматора с двумя константами 1, подключенными к входам блока суммы. К выходу подключен виртуальный осциллограф с одним сигнальным входом. Другой управляющий порт подключен к системным часам. В окне их параметров устанавливаются время инициализации и период.

Диаграмма модели является основой для матрично-топологического описания модели. При этом широко используется аппарат разреженных матриц с большим числом нулевых элементов. Имеются алгоритмы ускоренных вычислений математических выражений с разреженными матрицами.

Каждый блок диаграммы модели имеет ряд параметров, которые устанавливаются в окне параметров блока. Для вызова этого окна надо указать блок мышью и дважды щелкнуть левой ее клавишей. В демонстрационных примерах обычно установка параметров уже сделана и вызывать окно параметров не нужно. Но при отладке новых диаграмм моделей или при изменении готовых моделей нужно эти параметры установить (или согласиться с установленными по умолчанию),

При пуске диаграммы на исполнение (кнопкой с треугольником в окне диаграммы или из меню) Xcos автоматически составляет систему алгебраических и дифференциальных уравнений, решает ее выбранным способом и выводит результаты моделирования. На рис. 23 они представлены как показания виртуального осциллографа в виде горизонтальной линии с высотой равной 2 – это сумма констант на входах сумматора и его выходной сигнал.

Для получения корректных результатов моделирования важен выбор решателя дифференциальных уравнений, шага решения, погрешности и времени решения. Необходимые установки есть в окне «Preferences» позиции «Scilab» меню. В этом окне есть и многочисленные другие настройки. Каждый пример имеет свои настройки и они обычно достаточны при исполнении конкретного примера.

На рис. 24 показано выполнение демонстрационного примера на контроль пересечения нулевой линии синусоидальным сигналом. Можно сформировать и любой другой сигнал, добавив соответствующие бло-

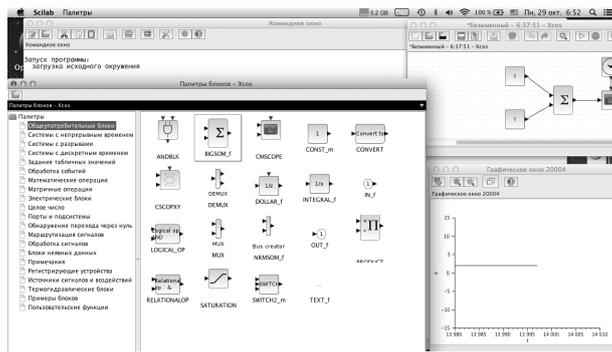


Рис. 23: Блоки Xcos и модель сумматора.

ки. Пересечение нуля фиксируется вертикальными отрезками красного и синего цветов в зависимости от направления изменения сигнала в точке пересечения. На рис.24 слева внизу представлено окно параметров блока виртуального осциллографа.

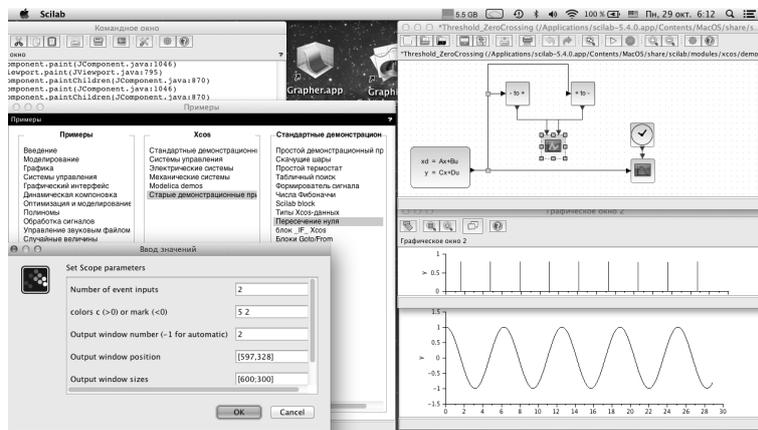


Рис. 24: Контроль за пересечением нулевой линии.

В состав блоков входит блок контроля заданного условия. На рис. 25 показано применение модели этого блока.

Блоки обычно соединяются друг с другом соединительными линиями. Линии для обычных сигналов черные, а для управляющих - красные. Есть и блоки для создания “беспроводных” соединений. Применение таких соединений позволяет упростить диаграмму сделать ее более понятной.

Система Xcos имеет обширную библиотеку блоков, из которых пользователь может составлять свои диаграммы моделей. На рис. 13 был показан список наборов блоков разного назначения и окно общеупотребительных блоков системы Xcos. Почти любая модель имеет источники сигналов. Окно с блоками таких источников показано на рис. 26.

Для контроля результатов моделирования в диаграмму модели помещают виртуальные регистрирующие устройства – графопостроители, осциллографы и т. д. Окно с блоками таких устройств показано на рис. 27. С окнами других разделов библиотеки блоков читатель может ознакомиться самостоятельно.

Стоит дать оценку библиотеки блоков Xcos. Она содержит заметно меньше блоков, чем библиотека Simulink [4-6], ориентирована на подготовку моделей общего характера и, прежде всего, систем управления. Некоторые блоки требуют для работы присутствия средств Java и компиляторов языков программирования C и Fortran. Если этих средств нет, модели с такими блоками будут не выполняться. По функциональным возможностям системы SciLab под разные операционные системы равнозначны. Они отличаются лишь мелкими деталями интерфейса.

Примеры математического моделирования в SciLab

В SciLab есть ряд примеров на современные генетические алгоритмы минимизации. На рис. 28 дана иллюстрация одного из этих примеров.

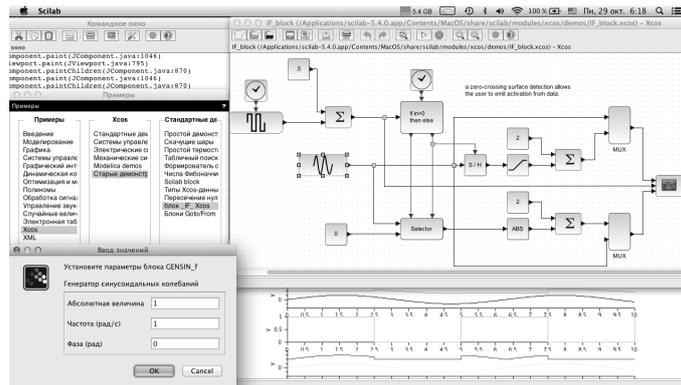


Рис. 25: Применение блока IF.

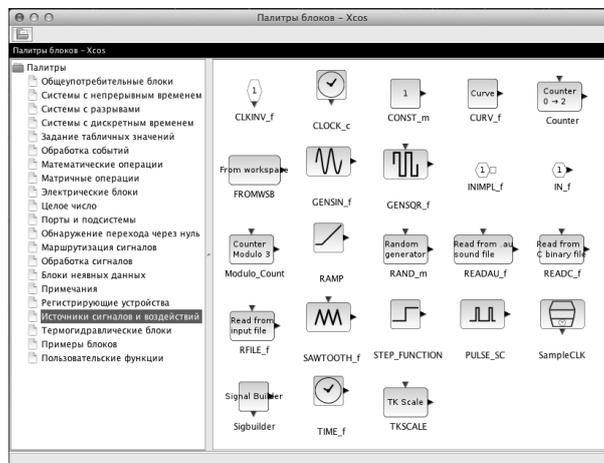


Рис. 26: Блоки источников сигналов.

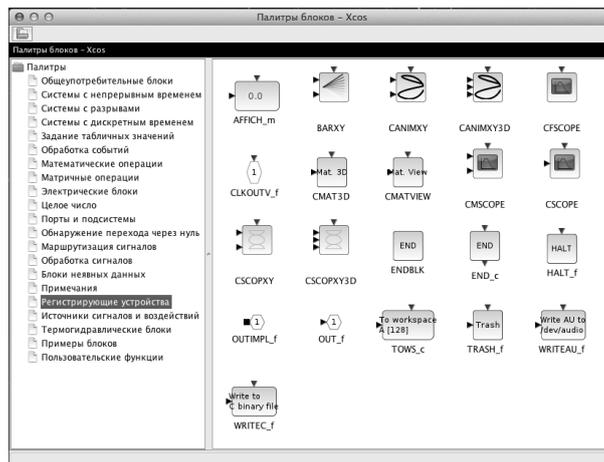


Рис. 27: Блоки регистрирующих устройств.

Основой моделирования динамических систем является их описание дифференциальными уравнениями или системами уравнений с последующим их решением подходящим численным методом. Классическим примером моделирования колебаний является решение дифференциального уравнения Ван-дер-Поля. Оно описывает возникновение и развитие колебаний, например в LC-генераторах на электронных лампах и транзисторах. В Scilab пример на решение этого уравнения (рис.29) приукрашен построением графиков

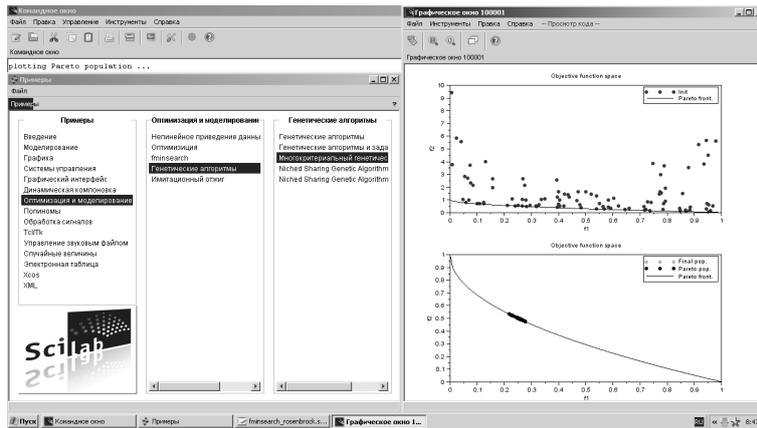


Рис. 28: Иллюстрация многокритериального генетического алгоритма.

фазовых портретов колебаний на фоне векторного поля решения. Оно построено стрелками. Начальная точка решения указывается курсором мыши и пример строит жирной красной линией исходящий из нее фазовый портрет.

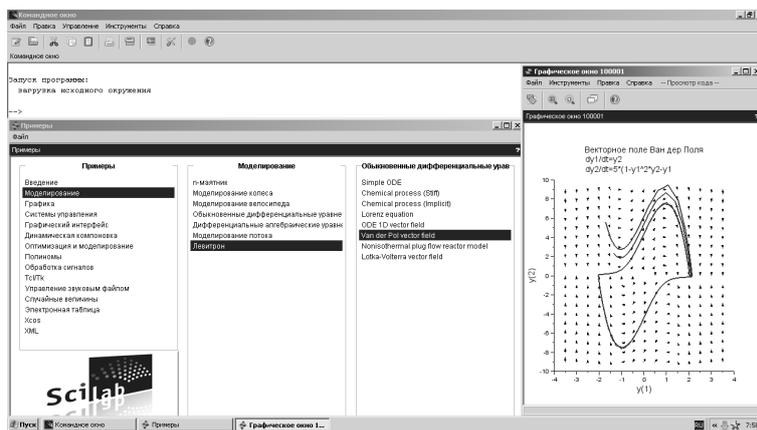


Рис. 29: Решение нелинейного дифференциального уравнения Ван-дер-Поля.

Аналогичный прием реализован в другом классическом примере – решении дифференциального уравнения Лотки-Вольтеры (описывает поведение системы «хищники-жертвы») - рис. 30. В системах с диффе-

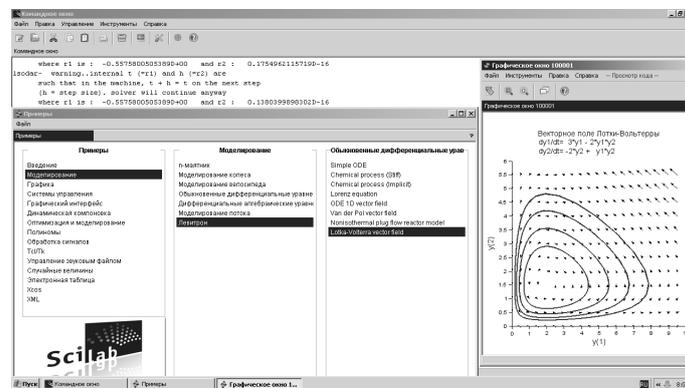


Рис. 30: Решение нелинейного дифференциального уравнения Лотки-Вольтеры.

ренциальными уравнениями третьего порядка были обнаружены необычные сложные колебания. Наиболее

известной из таких систем является аттрактор Лоренца. Пример, иллюстрирующий работу аттрактора Лоренца, приведен на рис. 31. Фазовый портрет в этом примере является трехмерным и хорошо иллюстрирует сложный характер колебаний.

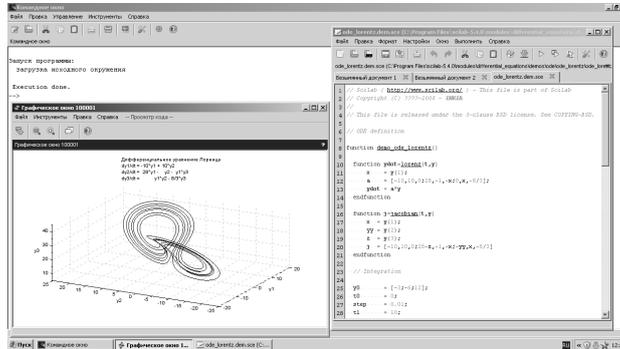


Рис. 31: Решение системы дифференциальных уравнений аттрактора Лоренца.

Большие возможности представляет расширение Xcos системы Scilab в проектировании различных фильтров. Ограничимся примерами моделирования поведения аналогового фильтров Калмана - рис.32, широко применяемых в системах управления и обработки сигналов. Сравнение показывает, что дискретный фильтр имеет меньшее время установления.

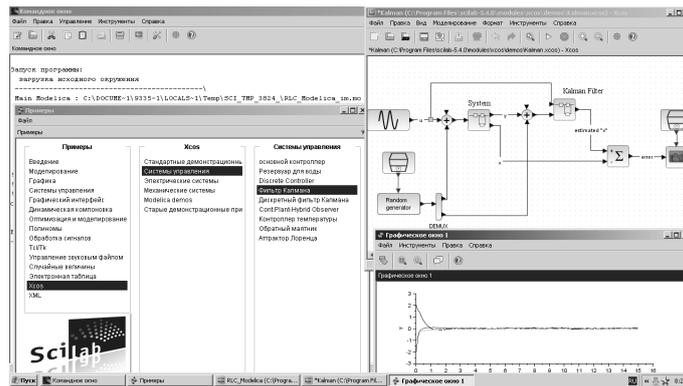


Рис. 32: Моделирование аналогового фильтра Калмана.

Тему моделирования в Scilab завершим рассмотрением трех примера моделирования механических систем. На рис. 33 показан пример на моделирование движения брошенного колеса. Этот пример хорошо иллюстрирует технику анимации сложной траектории точки касания брошенного колеса с землей. Окно редактора позволяет детально рассмотреть листинг программы, осуществляющей это моделирование.

Scilab может работать с другими программами путем использования модулей, написанных на их языках программирования. Рис. 34 показывает картину части фрактала Мандельброта, полученную с применением системы компьютерной алгебры Maple[9].

Приведенные примеры вполне характеризуют довольно высокий уровень задач, на решение которых рассчитана система Scilab. Он далеко выходит за уровень вычислений в средней школе и во многих вузах и характеризует вполне профессиональное назначение программы Scilab.

Система компьютерной алгебры wsMaxima

Предшественником Maxima была одна из первых систем компьютерной алгебры Macsyma, появившейся еще в 60-х годах на больших ЭВМ. Работу над ней, по заданию министерства Энергетики США (DOE), вел Массачусетский Технологический Институт (MIT). Система создавалась на языке искусственного интеллекта Lisp. Университетская разработка, несмотря на ее фундаментальное значение, не смогла выдержать конкуренции с коммерческими системами компьютерной алгебры для персональных компьютеров Maple и Mathematica, занявшими первые места на рынке таких систем развиваемыми крупными коллективами ученых, математиков и программистов.

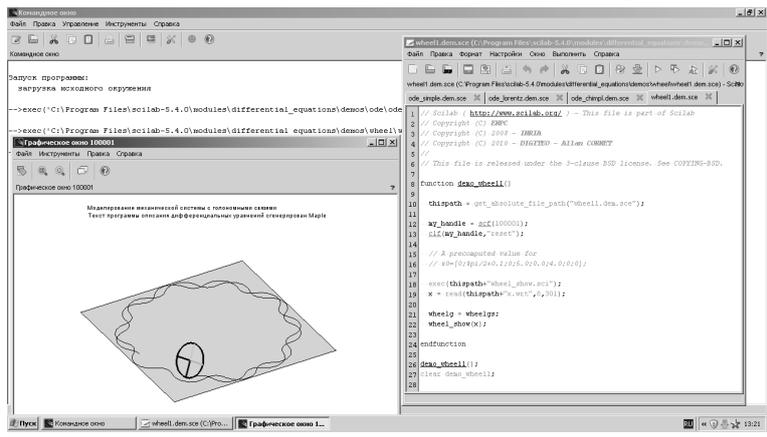


Рис. 33: Моделирования движения брошенного колеса.

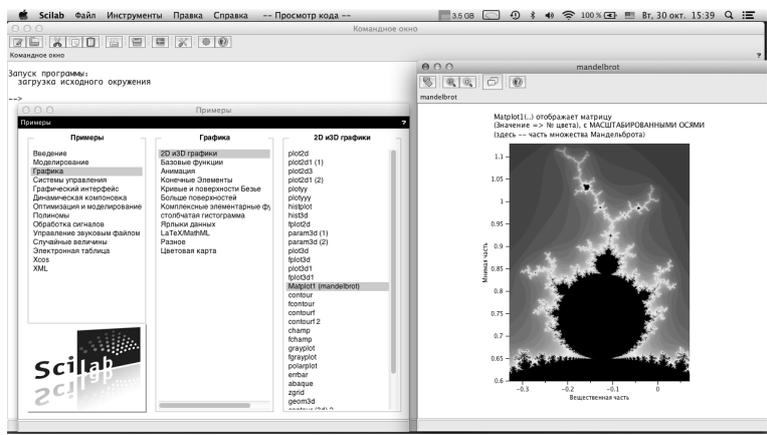


Рис. 34: Пример построения фрактала Мандельброта с использованием системы Maple.

И тогда один из главных разработчиков, профессор Техасского Университета Уильям Шелтер (William Schelter), получил от DOE разрешение на открытую публикации кода программы с лицензией GPL под именем Maxima. Он же долгое время разрабатывал как саму Maxima, так и один из диалектов языка Lisp – GCL (GNU Common Lisp), на котором и разрабатывалась Maxima. После смерти Уильяма Шелтера в 2001 году развитие системы было продолжено большим числом его последователей во главе с Джеймсом Эмундсоном (James Amundson).

Как система компьютерной алгебры Maxima обладает следующими возможностями:

- Операции с полиномами (манипуляция рациональными и степенными выражениями, вычисление корней и т.п.).
- Вычисления с элементарными функциями.
- Вычисления со специальными функциями, включая эллиптические функции и интегралы.
- Вычисление пределов и производных.
- Аналитическое вычисление определённых и неопределённых интегралов.
- Решение интегральных уравнений.
- Решение алгебраических уравнений и их систем.
- Операции со степенными рядами и рядами Фурье.
- Операции с матрицами и списками.
- Решение большого числа задач линейной алгебры.
- Решение задач интерполяции и приближения различных зависимостей.
- Статистические вычисления и реализация метода наименьших квадратов.

- Операции с тензорами.
- Функции теории чисел, теории групп и абстрактной алгебры
- 2D и 3D графическая визуализация

Ныне Maxima с графическим интерфейсом пользователя wx открыто распространяется под лицензией GPL и доступна пользователям компьютеров с различными операционными системами (ОС): Linux, MAC и Windows. Новейшие реализации системы Maxima 5.28 появились 26 августа metricconverterProductID2012 г2012 г. [10] и сразу привлекли внимание, как своим усовершенствованием, так и вполне современным графическим интерфейсом пользователя GUI – в том числе русскоязычным.

Предшествующие версии системы описаны в учебных пособиях [11, 12]. Причем вопреки названию [3] содержит довольно глубокое описание систем, полезное разработчиками компонентов и систем различного назначения. Системы вполне могут соперничать с нынешними лидерами среди программ компьютерной алгебры – коммерческими и довольно дорогими системами Maple и Mathematica [4]. Для каждой ОС существуют две реализации системы – консольная Maxima и система с GUI - wxMaxima.

У каждой из этих двух программ есть свои сильные и слабые стороны. Удобный графический интерфейс GUI wxMaxima является несомненным достоинством ее, но в части функциональных возможностей обе программы идентичны. GUI wx является надстройкой над программой Maxima 5.28 и имеет свой номер реализации 12.08.0.

На рис. 35 показан экран компьютера MacBook Pro при работе с wxMaxima. Окно wxMaxima дано в полноэкранном виде и с открытыми панелями General Math и Statistics (слева) и истории History (справа). Они открываются командой Pannels в позиции Maxima меню. Число панелей минимизировано, но они обеспечивают ввод большинства нужных команд и функций. Ввод командной строки завершается нажатием только клавиши Enter. В командном окне представлено несколько примеров применения wxMaxima, наглядно демонстрирующих возможности GUI – в части представление выражений в общепринятой математической форме установкой в начале строки апострофа.

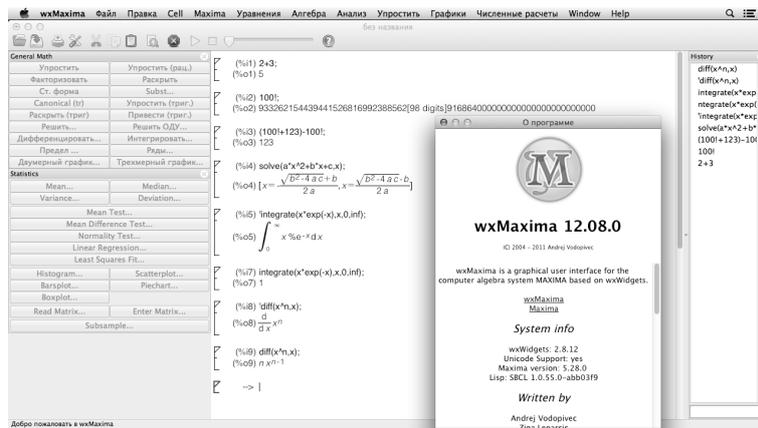


Рис. 35: Начало работы с wxMaxima для компьютеров MAC.

Результат вычисления арифметических выражений Maxima выдает в дробно рациональном виде, сохраняя константы и функции целочисленного и дробно рационального аргумента. К предшествующим выражениям можно обращаться используя символ % или обращения к номерам ячеек ввода и вывода. Опция `pusher` или функция `float` позволяют получить результат в виде числа двойной точности с плавающей точкой.

Справка достаточно полная и простая, но англоязычная. Она построена на применении гипертекстовых ссылок. Примеры в справке даны в формате для консольной версии Maxima. На рис. 36 показано окно wxMaxima под Windows во всей его «красе», т. е. с выведенными панелями и примерами вычислений в командном окне. Интересно, что у Windows-версии wxMaxima для исполнения строки надо вместе с Enter нажимать клавишу `ctrl`.

С первого взгляда GUI у версий для компьютеров MAC и PC совершенно одинаков. Более внимательное сравнение окон GUI показывает, что некоторые различия все же есть. Так номер реализации GUI у версии под Windows немного более ранний, а в меню нет позиции wxMaxima – соответствующие команды переключались в позицию Help меню. Эти отличия не принципиальны и в дальнейшем все примеры будут относиться в равной мере к обоим описываемым вариантам wxMaxima.

Первые 4 позиции меню вводят команды общего характера:

Файл – стандартные операции работы с файлами.

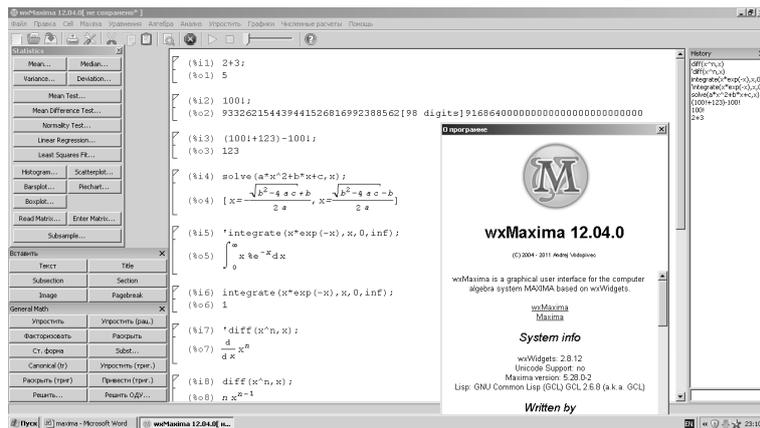


Рис. 36: Окно с примерами работы и панелями wxMaxima для компьютеров с операционной системой Windows.

Правка – стандартные операции правки в командной строке.

Cell – работа с ячейками ввода и вывода (их ввод, исполнение, удаление, вставка и др.).

Maxima – некоторые операции работы с окном командного режима и изменение его формата.

Работа со средствами, имеющимися в этих позициях меню, достаточно проста и далее описываться не будет. Отметим лишь несколько широко применяемых средств:

Кавычки – обозначают строковое выражение.

Двоеочие - присваивание переменным значений, например x:1,23; y:x+1 и т. д.

Точка с запятой – в конце строки означает вывод результата ее исполнения.

kill(a,b) – стирание переменных списка и обновление нумерации ячеек.

Kill(all) – стирание всех переменных и обновление нумерации ячеек.

(- вводит пару круглых скобок, применяемых при линейной записи и математических выражений.

[- вводит пару квадратных скобок для введения в них листов

f(x,y):=выражение с локальными переменными X и Y – задание функции пользователя, f(X,Y) – вызов функции.

** или ^ - возведение в степень.

Математические возможности wxMaxima

Математические возможности wxMaxima весьма обширны и в данной обзорной статье мы рассмотрим только некоторые из них. Начать надо с типов данных. Это числа разного формата, строковые данные, константы, переменные, листы, массивы, векторы и матрицы и т. д.

Перед цифровыми константами ставится знак %, например %e, %pi, %i и %phi (константа золотого сечения), тот же знак означает подстановку последнего выражения. Примеры:

(%i1) [%e,%pi,%phi],numer;

(%o1) [%e,3.141592653589793,1.618033988749895]

(%i2) %e,numer;

(%o2) 2.718281828459045

Есть и другие константы. Система wxMaxima имеет функционально полный набор встроенных элементарных и специальных математических функций. Кроме того, есть множество системных функций и функций из пакетов расширения системы, Последние веред использованием требуют загрузки пакетов функцией: load("Имя_пакета_расширения");

В справке системы имена пакетов начинаются с малой буквы.

Следующие, после описанных, четыре позиции меню открывают перед пользователем простые и наглядные средства задания вычислений. Например, позиция Уравнения задает выдачу простых панелей для решений уравнений и поиска корней выражений – рис. 37. Уравнения и выражения задаются списком в квадратных скобках. Если число уравнений (выражений) совпадает с числом переменных, то список последних можно не задавать.

Приведем также примеры по поиск корней полиномов и выражений и на решение системы алгебраических уравнения:

(%i3) allroots(3*x^2+2*x-1);

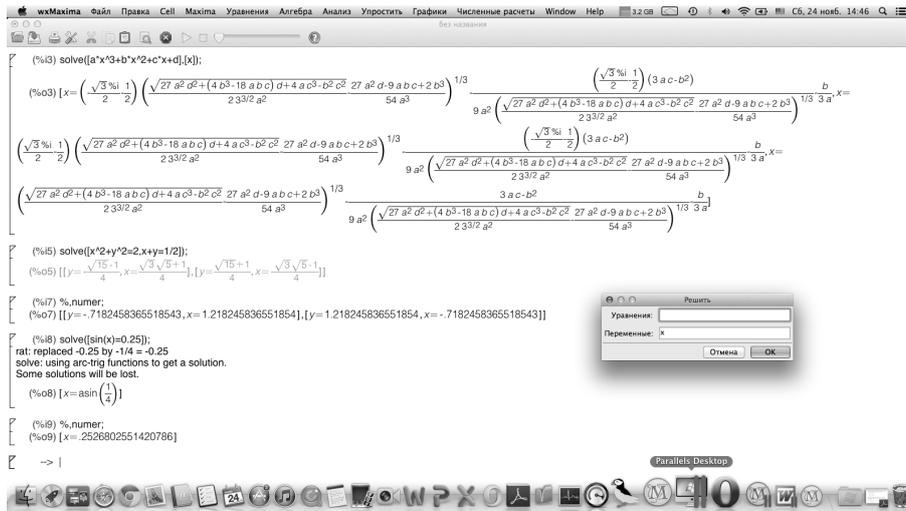


Рис. 37: Примеры на решение уравнений и панель для их ввода.

```
(%o3) [x=0.3333333333333333,x=-1.0]
(%i4) allroots(x^3+3*x^2+x+1);
(%o4) [x=.5897428050222056*%i-.1153538228806843,
x=-.5897428050222056*%i-.1153538228806843, x=-2.769292354238631]
(%i5) bfallroots(x^2-x-1);
(%o5) [x=1/2,y=-(c-a)/(2*c-2*b),z=(b-a)/(2*c-2*b)]
(%i6) realroots(%);
(%o6) [[x=0.3333333333333333,x=-1.0]=0]
(%i8) f1:x^2-y^2
(%i9) f2:-1-y+2*y^2-x+x^2
(%i10) algsys([f1,f2],[x,y])
(%o10) [[x=-1/sqrt(3),y=1/sqrt(3)],[x=1/sqrt(3),y=-1/sqrt(3)],
[x=-1/3,y=-1/3],[x=1,y=1]]
```

Как уже отмечалось, Maxima по умолчанию использует вычисления с целыми и рациональными числами. Но, в позиции Численные расчеты меню можно задать вычисления в формате чисел (в том числе больших) с плавающей точкой.

Важное значение, особенно при математическом моделировании динамических объектов и систем, играет решение дифференциальных уравнений. На рис. 38 показано аналитическое решение в wxMaxima дифференциальных уравнений второго порядка с помощью функции `ode2`. Еще ряд примеров можно найти в примере `desolve`. Пример численного решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка дан в конце статьи.

В позиции Алгебра меню сосредоточены средства для решения типовых задач алгебры. Операция `Create Matrix` выводит панель создания матрицы. Задаются лист элементов, число элементов в строке и в столбце и имя матрицы. Матрица может быть задана и просто функцией `matrix` со списком листов строчных элементов разного типа:

```
M:matrix([a,b,c],[1,2,3],[1+2,3*4,5/6])
```

Для вызова элемента матрицы используется команда $M(m,n)$, где m – номер строки и n – номер столбца.

Примеры на простейшие операции с числовыми матрицами даны на рис. 39. Здесь показаны операция задания квадратной матрицы размера 3×3 , ее транспонирования, вычисления детерминанта, обратной матрицы и характеристического полинома. Корни характеристического полинома являются собственными числами матрицы. Обширный набор матричных операторов и функций позволяет решать практически любые задачи линейной алгебры – как в аналитическом, так и численном виде.

Есть и много других матричных функций и средств линейной алгебры. Пример решения в аналитическом виде системы из трех линейных уравнений показан ниже:

```

(%i11) example(ode2);
(%i12) 3*x*y+x^2*diff(y,x) = sin(x)/x
(%o12)  $x^2 \left( \frac{d}{dx} y \right) + 3xy = \frac{\sin(x)}{x}$ 
(%i13) soln1:ode2(%o,y,x)
(%o13)  $y = \frac{\%c - \cos(x)}{x^3}$ 
(%i14) ic1(soln1,x = %pi,y = 0)
(%o14)  $y = \frac{\cos(x) + 1}{x^3}$ 
(%i15) y*(diff(y,x))^3+diff(y,x,2) = 0
(%o15)  $\frac{d^2}{dx^2} y + y \left( \frac{d}{dx} y \right)^3 = 0$ 
(%i16) soln2:ode2(%o,y,x)
(%o16)  $\frac{y^3 + 6\%k1 y}{6} = x + \%k2$ 
(%i17) ratsimp(ic2(soln2,x = 0,y = 0,'diff(y,x) = 2))
(%o17)  $\frac{y^3 + 3y}{6} = x$ 
(%i18) bc2(soln2,x = 0,y = 1,x = 1,y = 3)
(%o18)  $\frac{y^3 - 10y}{6} = x - \frac{3}{2}$ 
(%o18) done

```

Рис. 38: Демонстрационные примеры решения дифференциальных уравнений.

```

(%i73) M:matrix(
      [1,2,3],
      [4,5,6],
      [7,8,1]
      );
(%o73)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ 

(%i74) transpose(%);
(%o74)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ 

(%i78) determinant(M);
(%o78) 24

(%i79) invert(M);
(%o79)  $\begin{bmatrix} \frac{43}{24} & \frac{11}{12} & \frac{1}{8} \\ \frac{19}{12} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$ 

(%i80) charpoly(M, x), expand;
(%o80)  $-x^3 + 7x^2 + 66x + 24$ 

(%i82) adjoint(M);
(%o82)  $\begin{bmatrix} -43 & 22 & -3 \\ 38 & -20 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ 

```

Рис. 39: Задание числовой матрицы и вычисление ее параметров.

```

(%i29) z+x = y
(%i30) 2*a*x-y = 2*a^2
(%i31) y-2*z = 2
(%i32) ev(linsolve([%th(3),%th(2),%], [x,y,z]),globalsolve)
(%o32) [x=a+1,y=2*a,z=a-1]
(%o32) done

```

Завершают позицию Алгебра команды создания списка и приложения к элементам списка и матрицы заданных операций:

```
(%i1) makelist(k^2, k, 1, 5);
(%o1) [1,4,9,16,25]
(%i2) apply("+ [a,b,c,d]);
(%o2) d+c+b+a
(%i3) map(sin, [1,2,3]);
(%o3) [sin(1),sin(2),sin(3)]
(%i4) matrixmap(log, [[1,2.0],[3,4]]);
(%o4) [[0,0.69314718055995],[log(3),log(4)]]
```

В позиции Анализ меню сосредоточены средства математического анализа. Они начинаются с наиболее применяемых операций интегрирования, дифференцирования и разложения в ряд Тейлора. Дополнительные примеры вычисления интегралов даны на рис. 40.

```
[ (%i8) integrate(x^n, x);
  |s n+1 zero or nonzero? nonzero;
  | (%o8) x^n + 1
  | n+1

[ (%i9) integrate(x*exp(-x),x,0,inf);
  | (%o9) 1

[ (%i11) integrate(sin(x)/x,x);
  | (%o11) -%i gamma_incomplete(0, %i x) - %i gamma_incomplete(0, - %i x)
  | 2

[ (%i16) integrate(1/(x^2+6*x-12),x,-inf,inf);
  | (%o16) ∫-∞∞ 1 / (x^2 + 6x - 12) dx

[ (%i18) integrate(1/(x^2+6*x-12),x,-inf,inf);
  | Principal Value
  | (%o18) 0

[ (%i19) integrate(x^20*exp(-x),x,0,1);
  | (%o19) ∫01 x^20 e^-x dx

[ (%i20) integrate(x^20*exp(-x),x,0,1);
  | (%o20) 2432902008176640000 - 6613313319248080001 %e-1
```

Рис. 40: Дополнительные примеры вычисления интегралов.

Примеры на вычисление пределов представлены на рис. 41. Из них можно сделать вывод, что wxMaxima «знает» о существовании пяти замечательных пределов и правильно их вычисляет.

Еще ряд широко распространенных операций математического анализа представлен на рис. 42. Все они вводятся с соответствующих позиций меню Анализ. Вообще работа с панелями делает ненужной знание порою сложного синтаксиса задания функций.

Напомним, что для отображения математических выражений в естественной математической форме надо перед ними ставить знак апострофа. Легко реализуются и прямое и обратное преобразования Лапласа, имеющие важное значение в расчете линейных электро- и радиотехнических цепей и систем:

```
Прямое и обратное преобразования Лапласа:
(%o8) placelaplace(exp(-t)*sin(t), t, s);
(%o8) 1/(s^2+2*s+2)
(%o9) ilt(1/(s^2+2*s+2), s, t);
(%o9) %e^(-t)*sin(t)
```

В позиции Упростить меню сосредоточены функции упрощения различных алгебраических и тригонометрических выражений, их расширения, разложения на простые множители и др. Например:

```
(%i1) trigsimp(sin(x)^2+cos(x)^2);
(%o1) 1
(%i2) expand((a+b)*(a-b)*(a+c));
```

```

[ (%i1) limit(sin(x)/x, x, 0);
[ (%o1) 1

[ (%i2) 'limit((1+1/x)^x, x, inf);
[ (%o2) lim  $\left(\frac{1}{x}+1\right)^x$ 
x->oo

[ (%i3) limit((1+1/x)^x, x, inf);
[ (%o3) %e

[ (%i4) 'limit(log(1+x)/x, x, 0);
[ (%o4) lim  $\frac{\log(x+1)}{x}$ 
x->0

[ (%i5) limit(log(1+x)/x, x, 0);
[ (%o5) 1

[ (%i7) 'limit(((1+x)^a-1)/x, x, 0);
[ (%o7) lim  $\frac{(x+1)^a-1}{x}$ 
x->0

[ (%i8) limit(((1+x)^a-1)/x, x, 0);
[ (%o8) a

```

Рис. 41: Примеры на вычисление пределов.

```

[ (%i1) lbfgs(sin(x), [x], [1.0], 1e-4, [-1,0]);
[ (%o1) [x=-1.570795681372817]

[ (%i2) taylor(sin(x)/x, x, 0, 8);
[ (%o2) /T/ 1 -  $\frac{x^2}{6}$  +  $\frac{x^4}{120}$  -  $\frac{x^6}{5040}$  +  $\frac{x^8}{362880}$  + ...

[ (%i3) pade(% , 4, 4);
[ (%o3) [ $\frac{551 x^4 - 22260 x^2 + 166320}{75 x^4 + 5460 x^2 + 166320}$ ]

[ (%i4) 'sum(k^2, k, 1, 5);
[ (%o4)  $\sum_{k=1}^5 k^2$ 

[ (%i5) sum(k^2, k, 1, 5), numer;
[ (%o5) 55

[ (%i6) product(k, k, 1, n);
[ (%o6)  $\prod_{k=1}^n k$ 

[ (%i7) product(k, k, 1, 5);
[ (%o7) 120

```

Рис. 42: Поиск минимума, разложения в ряд Тейлора и вычисление суммы и произведений рядов.

```
(%o2) -b^2*c+a^2*c-a*b^2+a^3
```

```
(%i3) factor(123456);
```

```
(%o3) 2^6*3^643
```

Функции этого класса (а в меню указаны лишь избранные из них) подробно описаны в литературе по компьютерной алгебре [2-6]. Поэтому в рамках ограниченного объема данной статьи эти функции более детально не описываются, как и функции не вводимые с помощью позиций меню.

Графические средства wsMaxima

В позиции Графики меню предусмотрен вывод панелей задания 2D и 3D и их опций. Высокое качество графики иллюстрирует рис. 43, на котором показана амплитудно-модулированная синусоида. Дискретность графики практически не заметна. Двумерная графика в сочетании с большим числом встроенных элементарных и специальных функций открывает большие возможности в визуализации сигналов и процессов. А

большое число опций позволяет разнообразить графики изменением цвета и стиля линий, выбором типа координатных осей. Нанесением на график различных надписей и т. д.

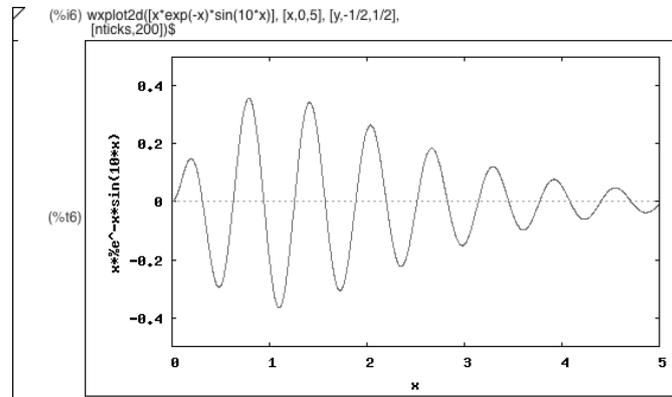


Рис. 43: Построение графика амплитудно-модулированной синусоиды.

В ранних версиях Maxima большие хлопоты приносило построение графиков функций с особенностями – вплоть до полного зависания системы. В новых реализациях такой проблемы нет, что подтверждает рис. 44, на котором построены графики двух таких функций.

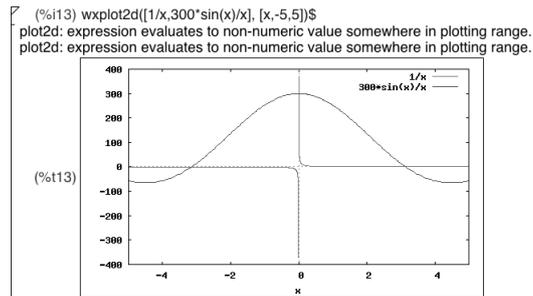


Рис. 44: Построение двух графиков функций с особенностями.

Трехмерная графика является основой для представления сложных сигналов и визуализации построения пространственных фигур. На рис. 45 дано построение поверхности, представленной синусом произведения x на y . Как нетрудно заметить, wxMaxima при построении графика по умолчанию окрашивает построенную поверхность. Характер и стиль графиков можно менять, применяя опции – см. примеры описанные далее. Действие опций подробно описано в справке.

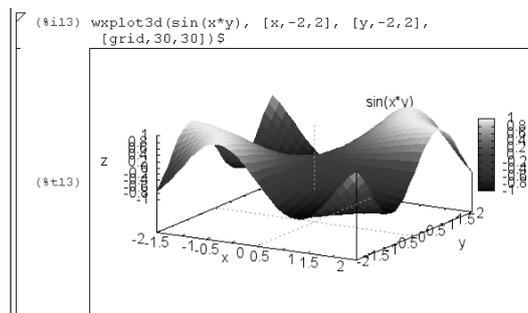


Рис. 45: Построение графика функции $\sin(x*y)$.

Для расширения возможностей графики используется предварительно загружаемый пакет расширения draw. Его функции имеют множество опций, существенно повышающих возможности 3D графики.

Сеточная модель объемной параболы, построенная с применением функции draw3d, показана на рис. 46. Замечательным свойством графики, построенной этой функцией, является возможность масштабирования и поворота графика мышкой.

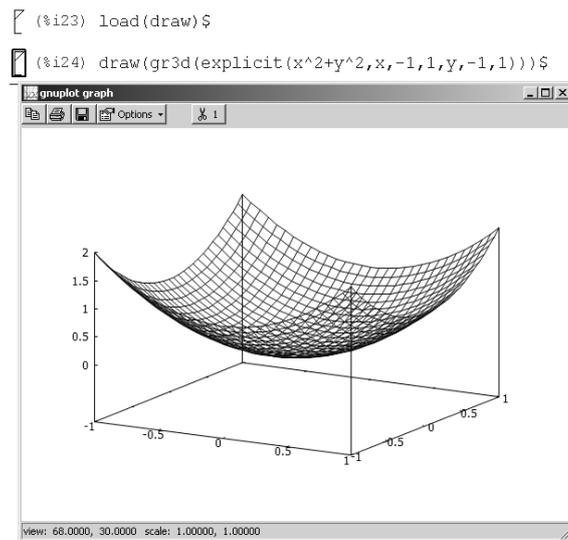


Рис. 46: Построение сеточной модели параболы функцией draw3d.

Часто теоретические кривые строят линиями, а экспериментальные или узловые точки отображают кружками, ромбиками, знаками * или + и т. д. На рис. 47 дан пример построения такого двумерного графика.

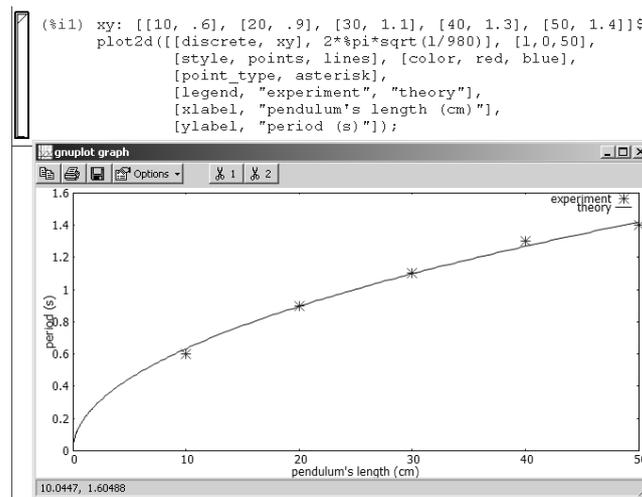


Рис. 47: Одновременное представление кривой графика и экспериментальных точек.

Функция plot3d также благодаря опциям обеспечивает построение очень большого числа различных графиков. На рис. 48 показан график смещенной объемной параболы.

График сложной поверхности с тремя пиками и фрагмент программы для ее представления показаны на рис. 49. Большие возможности открывает задание трехмерных фигур в параметрическом виде. Пример этого представления дан на рис. 50. При отображении поверхностей широко используются контурные графики – например в картографии. При этом высота точек поверхности задается их цветом. Пример такого построения дан на рис. 51.

Решение уравнения Ван-дер-Поля в wsMaxima

В заключении рассмотрим фундаментальную задачу о возникновении колебаний в LCR-контуре, подключенном к активному устройству, способному вносить в контур энергию. Таким устройством может быть электронная лампа, транзистор или микросхема. Ван-дер-Поль показал, что процессы в таком устройстве описываются нелинейным нормированным дифференциальным уравнением второго порядка

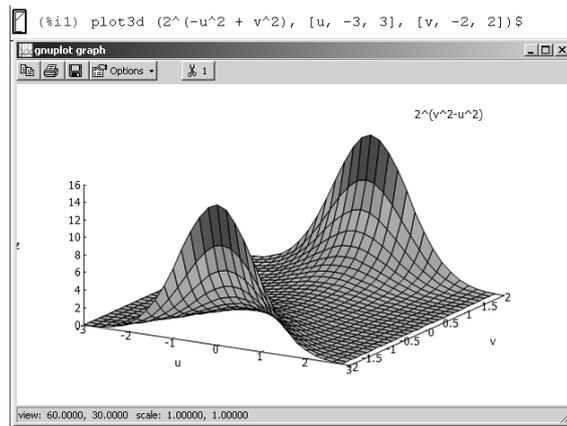


Рис. 48: График смещенной цветной объемной параболы.

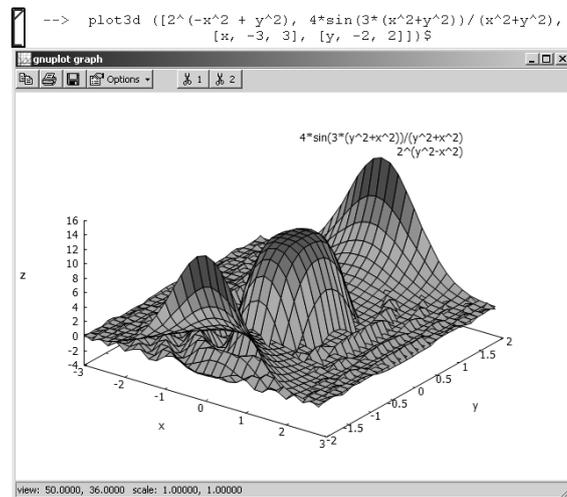


Рис. 49: График сложной поверхности с тремя пиками.

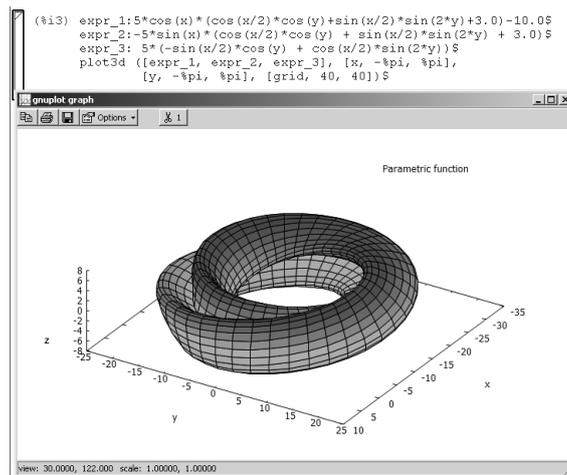


Рис. 50: График сложной 3D фигуры, заданный параметрически тремя уравнениями.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \mu(1 - y(t)^2) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0.$$

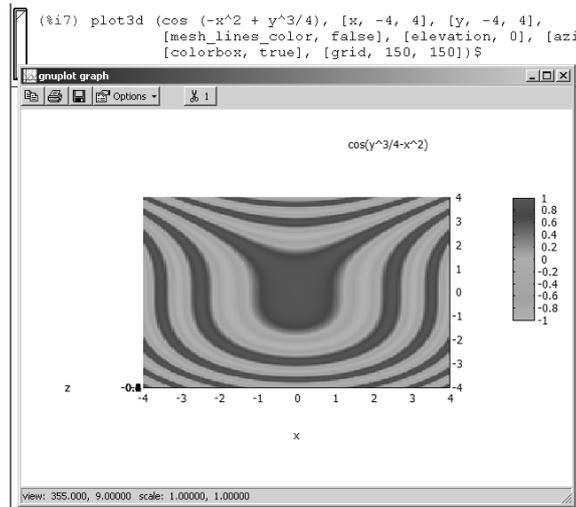


Рис. 51: Контурный график поверхности с высотой, представляемой цветом.

В wxMaxima есть специальный пакет для анализа нелинейных динамических систем Dynamics. После его загрузки становится доступной функция `rk` решения дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты. Программа для такого решения и решение в виде фазового портрета колебаний при $\mu=0.2$ представлено на рис. 52. Фазовый портрет строится в виде параметрически заданного графика.

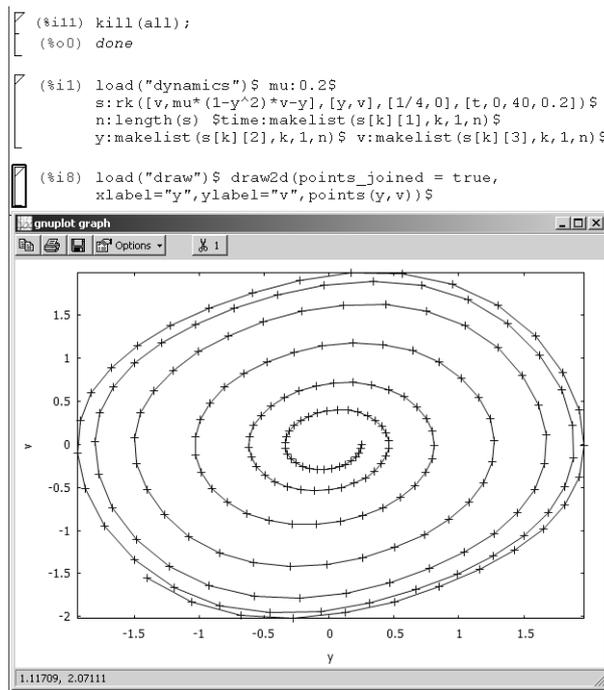
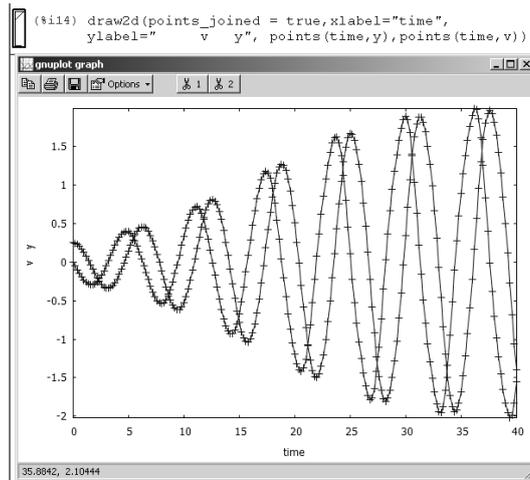


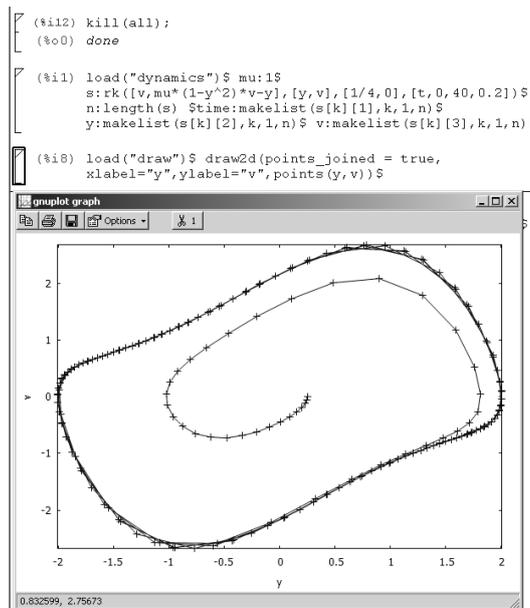
Рис. 52: Программа построения фазового портрета колебаний при $\mu=0.2$ и сам фазовый портрет под ней.

Расчетная зависимость формы колебаний показана на рис. 53. Используется загружаемый пакет расширения `draw`. Видно, что в начале фазовый портрет представляет собой раскручивающуюся спираль, а временные зависимости колебаний близки к синусоидальным с нарастающей амплитудой. Но в дальнейшем сказывается нелинейность активной части схемы, амплитуда колебаний перестает увеличиваться, а фазовый портрет стремится к предельной кривой, так и именуемой предельным циклом. При синусоидальных колебаниях предельный цикл является эллипсом.

При увеличении μ нелинейность сказывается сильнее, форма колебаний заметно отличается от синусоидальной; а предельный цикл от эллипса – рис. 54. При больших μ колебания приобретают характер

Рис. 53: Форма колебаний при $\mu = 0.2$.

релаксационных колебаний и имеют быстро изменяющиеся участки.

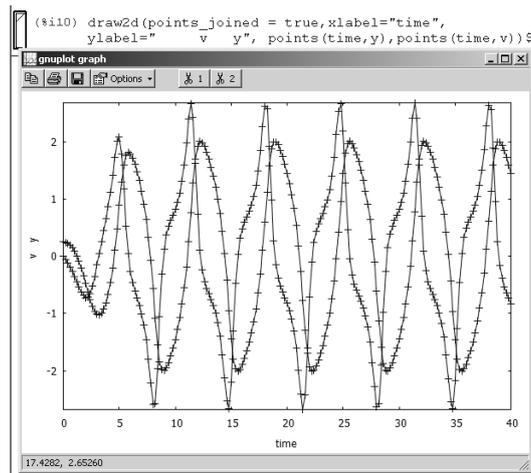
Рис. 54: Фазовый портрет колебаний при $\mu=1$.

Характер и параметры колебаний (рис.55) у предельного цикла не зависят от начальных условий решения и целиком определяются параметрами анализируемого устройства или системы. Это специфика устройств и систем, описываемых данным уравнением.

При больших μ система дифференциальных уравнений становится жесткой и возникают большие вычислительные трудности в решении. Время решения даже на современных компьютерах (например, MacBook Pro с 4-ядерным процессором Intel i7 с частотой 2.3 ГГц) может достигать десятка минут.

Из приведенных примеров видно, что в целом wxMaxima справляется с подобными задачами, относящимися к классическим задачам динамики устройств и систем. В [3] можно найти примеры анализа поведения химических и биологических систем, аттрактора Лоренца и брусселятора. Для систем компьютерной алгебры все эти задачи, решаемые численными методами, относятся к числу довольно трудоемких. Рекомендуется перед пуском таких задач отчистить память компьютера и провести перезапуск wxMaxima.

Вызов Maxima из программы Sage (Мудрец)

Рис. 55: Форма колебаний при $\mu=1$.

Одной из самых мощных бесплатных и свободно распространяемых систем компьютерной математики является система Sage (Мудрец). Эта программа задумана как оболочка, имеющая свой мощный MATLAB-подобный интерпретирующий язык программирования и мощную графику, так и включающая в себя целый ряд ранее созданных программных систем компьютерной математики. Но Sage, в основном, ориентирована на численные расчеты. Поэтому видное место в ней занимает подсистема консольной версии системы компьютерной алгебры Maxima, вызываемая из консольной реализации Sage – рис. 56.



Рис. 56: Вызов программы Maxima из меню программы Sage.

Sage имеет свой GUI, реализуемый на основе текущего Интернет-браузера. Из него также можно вызывать консольную версию Maxima и использовать ее, как систему компьютерной алгебры для проведения символьных (и других) вычислений. Они были описаны выше.

Итак, новейшая реализация свободно распространяемой системы компьютерной алгебры wxMaxima способна «почти на равных» соперничать с возможностями лидеров рынка - системами Maple и Mathematica, число команд и функций в которых достигло 5500 в каждой системе. В математическом смысле Maxima часто работает более строго, но заметно проигрывает в скорости решения трудоемких задач численного математического моделирования. Система имеет современный графический интерфейс пользователя и превосходные функциональные и особенно графические возможности. Систему wxMaxima можно рекомендовать школам и университетам, а также научным работникам, проектировщикам и инженерам для выполнения массовых и повседневных научно-технических расчетов. Система может применяться для решения фундаментальных задач математического моделирования в самых различных областях науки и техники.

Список литературы

1. <http://freemat.sourceforge.net> - Интернет сайт системы FreeMat.

2. Samit Busu. FreeMat v.4.1 Documentation. 10 июля metricconverterProductID2011 г2011 г.
3. <http://mathworks.com> - Интернет сайт системы МАТЛАВ.
4. Дьяконов В. П. МАТЛАВ. Полное руководство. М.: ДМК-Пресс, 2012.
5. Дьяконов В. П. МАТЛАВ и SIMULINK для радиоинженеров. М.: ДМК-Пресс, 2011.
6. Дьяконов В. П., Пеньков А. А. МАТЛАВ и SIMULINK в электроэнергетике. Справочник. М.: Горячая линия – Телеком, 2009.
7. Дьяконов В. П. Энциклопедия компьютерной алгебры. М.: ДМК-Пресс, 2009.
8. Scilab_Release Notes – 27. Scilab enterprises, 2012.
9. Е. Р. Алексеев, Е. А. Чеснокова, Е. А. Рудченко_ Scilab: Решение инженерных и математических задач. М.: ALT Linux, 2008.
10. maxima.sourceforge.net – Интернет-сайт системы Maxima.
11. Стахин Н. А.. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений MAXIMA (ПО для решения задач аналитических (символьных) вычислений). М.: Федеральное агентство по образованию, 2008.
12. Чичкарев Е.А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов. М.: ALT Linux, 2012.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В УСКОРЕННОЙ ВСЕЛЕННОЙ НЕДОСТИЖИМО?

Ю.Г. Игнатьев¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань

¹E-mail: Ignatev_Yu@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены неравновесные космологические сценарии в предположении восстановления скейлинга взаимодействий частиц в области сверхвысоких энергий. На основе точных решений уравнения энергодобавки получен строгий вывод о принципиальной недостижимости локального термодинамического равновесия в ускоряющейся Вселенной.

Keywords: early Universe, local thermodynamic equilibrium, relativistic kinetics, scaling, cosmological acceleration.

I. Условия локального термодинамического равновесия космологической плазмы

Одним из главных положений стандартного космологического сценария (SCS)¹ является предположение о локальном термодинамическом равновесии (LTE) космологической плазмы на раннем этапе расширения Вселенной. Как известно, для установления LTE в статистической системе необходима малость эффективного времени между столкновениями частиц, τ_{eff} , по сравнению с характерным временным масштабом эволюции системы. В космологической ситуации таким масштабом является возраст Вселенной, а более точно, – обратная величина логарифмической производной масштабного фактора, $a(t)$. Это приводит к следующему известному условию LTE в расширяющейся ультррелятивистской космологической плазме²:

$$\frac{\dot{a}}{a} \tau_{eff} \ll 1, \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{n(t) \sigma_{tot}} \ll 1, \quad (1)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор, $\dot{a} \equiv da/dt$, $n(t)$ – плотность числа частиц, σ_{tot} – полное сечение рассеяния частиц в парных столкновениях.

Кинематика четырехчастичных столкновений

Четырехчастичные реакции типа

$$a + b \rightleftharpoons c + d. \quad (2)$$

полностью описываются двумя кинематическими инвариантами, s и t (см, например, [2] (1979)):

$$s = (p_a + p_b)^2 \equiv (p_a + p_b, p_a + p_b), \quad (3)$$

квадратом энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс, и

$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_b - p_d)^2. \quad (4)$$

релятивистским квадратом переданного импульса.³ Далее $(p, q) \equiv g_{ik} p^i q^k$ – скалярное произведение векторов p, q относительно метрики g , a, b – индексы частиц, $i, k = \overline{1, 4}$; \sqrt{s} – энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ).

При этом инвариантные амплитуды рассеяния $F(s, t)$, определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц, c и d , оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов:

$$|\overline{M_{FJ}}|^2 = |F(s, t)|^2, \quad (5)$$

¹см., например, [1] (2008)

²Мы выбираем планковскую систему единиц $G = \hbar = c = 1$.

³Автор надеется, что читателя не смутит совпадение обозначений: t - время в метрике Фридмана, s - ее интервал, одновременно t, s - кинематические инварианты. Эти обозначения являются стандартными и мы не сочли необходимым их менять.

где S_i - спины частиц. С помощью инвариантной амплитуды $F(s, t)$ определяется полное сечение реакции (2):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt |F(s, t)|^2, \quad (6)$$

где m_i - массы покоя частиц, λ - функция треугольника:

$$\lambda^2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc,$$

и

$$t_{min}^{max} = \frac{4}{s} [(m_c^2 - m_a^2 + m_b^2 - m_d^2)^2 - (\sqrt{\lambda} \mp \sqrt{\lambda'})^2],$$

где для сокращения приняты обозначения:

$$\lambda = \lambda(s, m_a^2, m_b^2); \quad \lambda' = \lambda(s, m_c^2, m_d^2).$$

В ультрарелятивистском пределе

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \quad (7)$$

имеем:

$$s \rightarrow 2(p_a, p_b); \quad t \rightarrow -2(p_a, p_b); \quad \lambda \rightarrow s^2;$$

$$t_{min} \rightarrow -s; \quad t_{max} \rightarrow 0; \quad \frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty,$$

и формула (6) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s}; \quad (8)$$

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (9)$$

Таким образом, полное сечение рассеяния зависит лишь от кинематического инварианта s - квадрата энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s). \quad (10)$$

Именно эта зависимость и будет управлять установлением локального термодинамического равновесия в ранней Вселенной.

Влияние зависимости $\sigma(s)$ на процесс восстановления LTE

В пространственно-плоской метрике Фрийдмана⁴, которая будет рассматриваться в статье,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (11)$$

интегралом движения является *конформный импульс* (см., например, [3] (1982))

$$\tilde{p} = a(t)p = \text{const}, \quad (12)$$

где $p = \sqrt{-g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta}$ - физический трехмерный импульс ($\alpha, \beta = \overline{1,3}$), a - масштабный фактор. Таким образом, для ультрарелятивистских частиц

$$s \sim p^2 \sim a^{-2}. \quad (13)$$

Предполагая степенную зависимость полного сечения рассеяния частиц от s

$$\sigma_{tot} \sim s^\nu \quad (14)$$

и *баротропическое* суммарное уравнение состояния материи $p = \varkappa\varepsilon$, где p - суммарное давление⁵, ε - суммарная плотность энергии, \varkappa - коэффициент баротропии, при условии сохранения полного числа частиц $n(t)a^3(t) = \text{const}$ придем к следующему выводу [4] (1986).

⁴как, впрочем, и для любой другой метрики Фрийдмана

⁵в отличие от импульса, p , давление выделено прямым римским шрифтом, p .

Statement 1 При выполнении условия

$$4\nu + 3(1 - \varkappa) > 0; \quad (\varkappa \neq -1), \quad (15)$$

LTE поддерживается на ранних стадиях расширения, а на поздних нарушается, т.е., при:

$$\nu > -\frac{3}{4}(1 - \varkappa) \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (16)$$

а при выполнении обратного к (16) условия LTE нарушается на ранних стадиях и восстанавливается на поздних $t > t_0$.

В частности,

1⁰. в случае ультрарелятивистского уравнения состояния $\varkappa = 1/3$ получим из (16) условие существования LTE на ранних стадиях расширения [4] —

$$\nu > -\frac{1}{2} \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad p = \frac{1}{3}\varepsilon; \quad (17)$$

2⁰. в случае предельно жесткого уравнения состояния $\varkappa = 1$ условие поддержания ЛТР на ранних стадиях и нарушения на поздних эквивалентно условию —

$$\nu > 0 \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \varepsilon) \quad (18)$$

(отсюда следует, что при постоянном сечении рассеяния $\nu = 0$ в случае предельно жесткого уравнения состояния время вообще выпадает из условия LTE [4], - на этой стадии расширения во Вселенной LTE существует либо во все времена, либо всегда отсутствует);

3⁰. в случае инфляции $\varkappa = -1$ при выполнении условия

$$\nu > -\frac{3}{2} \quad (19)$$

LTE поддерживается на ранних стадиях ($t < t_0$) и нарушается на поздних ($t > t_0$). Последнее, разумеется, верно при сохранении полного числа частиц на инфляционной стадии расширения.

Унифицированное асимптотическое сечение рассеяния

Унитарность и унитарный предел

Для исследования кинетики процессов в ранней Вселенной необходимо знать асимптотическое поведение инвариантных амплитуд $F(s, t)$ в пределе (7). Современные экспериментальные возможности ограничены значениями \sqrt{s} порядка нескольких Тев. Было бы неосторожным опираться на ту или иную полевую модель взаимодействия для прогнозирования асимптотического поведения сечения рассеяния в области сверхвысоких энергий порядка $10^{11} \div 10^{16}$ Тев. Более разумно в современных условиях опираться на выводы аксиоматической теории S -матрицы, полученные на основе фундаментальных законов унитарности, причинности, масштабной инвариантности и т.п. Унитарность S -матрицы приводит к известному асимптотическому соотношению (см., например, [5]):

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{s \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{s^2} \quad (20)$$

при значениях s выше унитарного предела, т.е., при условии (7), если под m_i понимать массы всех промежуточных частиц. Но тогда из (9) следует:

$$F(s, 1)|_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Const.} \quad (21)$$

Понятие *унитарного предела* впервые было введено L.D. Landau в 1940 г. применительно к векторным мезонам [6]. Следуя этой работе, под энергией унитарного предела в дальнейшем будем понимать такую критическую энергию, выше которой прекращается рост эффективного сечения взаимодействия и поведение сечения взаимодействия подчиняется условию унитарности. Например, для стандартного νe - рассеяния энергия унитарного предела $E_u = \sqrt{s_u}$ составляет (см., например, [5]) $\sqrt{\sqrt{2}\pi/G} \approx 600$ Gev, где G - константа электрослабого взаимодействия.

Асимптотическое поведение сечений рассеяния частиц в области сверхвысоких энергий

На основе аксиоматической теории S -матрицы в 60-е годы XX-го столетия были получены строгие ограничения на асимптотическое поведение полных сечений и инвариантных амплитуд рассеяния:

$$\frac{C_1}{s^2 \ln s} < \sigma_{tot}(s) < C_2 \ln^2 s, \quad (22)$$

где C_1, C_2 - неизвестные константы. Верхний предел (22) был установлен в работах [7] (1961), [8] (1963), [9] (1966), нижний - в [10] (1964), [11] (1965) см. также обзор в книге [12] (1967). Отметим также ограничения на инвариантные амплитуды рассеяния [12]:

$$|F(s, t)| \leq |F(s, 0)|; \quad (23)$$

$$C'_1 < |F(s, 0)| < C'_2 s \ln^2 s. \quad (24)$$

Поэтому инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (7) должны быть функциями лишь переменной $x = -t/s$, т.е.:

$$|F(s, t)| = |F(x)|, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (25)$$

Но тогда вследствие (9)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(x)|^2 = \frac{\text{Const}}{s} \quad (26)$$

— полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, т.е., при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг.

Скейлинговая асимптотика сечения (26) лежит строго посредине между возможными крайними асимптотиками полного сечения рассеяния (22). Кроме того при выполнении (26) автоматически выполняются и соотношения, полученные на основе аксиоматической теории S -матрицы (20) и (21).

Для лептон-адронного взаимодействия предположение о существовании скейлинга было выдвинуто в работах [13] (1969), [14] (1969), [15] (1970). В частности, для полного сечения реакции

$$e + e^+ \rightarrow \text{адроны}$$

было получено выражение:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum e_i^2,$$

где α - постоянная тонкой структуры, e_i - заряды фундаментальных фермионных полей. Данные, полученные на Стэнфордском накопителе, подтвердили наличие скейлинга для этих взаимодействий. Для гравитационных взаимодействий скейлинг, по-видимому, также должен восстанавливаться при сверхвысоких энергиях вследствие масштабной инвариантности гравитационных взаимодействий в ВКБ-приближении [16] (1974). Можно привести большое количество аналогичных примеров, являющихся надежно установленными фактами.

Универсальное асимптотическое сечение рассеяния

Будем в дальнейшем предполагать наличие скейлинга при энергиях выше унитарного предела $s \rightarrow \infty$. Возникает вопрос о значении константы в формуле (26) а также о логарифмическом уточнении этой константы. Это значение можно оценить из следующих простых соображений. Во-первых, пусть m - масса покоя сталкивающихся частиц. Поскольку \sqrt{s} - энергия взаимодействующих частиц в системе центра масс, то минимальное значение \sqrt{s} для четырехчастичных реакций с частицами массы m равно:

$$\sqrt{s_{\min}} = 2m \Rightarrow s_{\min} = 4m^2. \quad (27)$$

Далее, если верна идея объединения всех взаимодействий на планковских масштабах энергии $E_{pl} = m_{pl} = 1$, то при $s \sim 1$ все четырехчастичные взаимодействия должны описываться единым сечением рассеяния, образованным из трех фундаментальных констант G, \hbar, c , т.е., в выбранной нами системе единиц должно быть:

$$\sigma|_{s \sim 1} = 2\pi l_{pl}^2 \Rightarrow \sigma(4) = \frac{8\pi}{s_{pl}} \quad (= 2\pi), \quad (28)$$

где:

$$s_{pl} = 4m_{pl}^2 = 4 \quad (29)$$

- планковское значение кинематического инварианта s , соответствующее двум сталкивающимся планкеонам массой m_{pl} и комптоновского масштаба l_{pl} :

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} (= 1), \quad l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} (= 1). \quad (30)$$

Однако, для того, чтобы на планковских масштабах энергии сечение рассеяния падало до такой величины, стартуя со значений порядка $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/3m_e^2$ (m_e - масса электрона, σ_T - томпсоновское сечение рассеяния) для электромагнитных взаимодействий, т.е., при $s \sim 4m_e^2$, оно должно падать обратно пропорционально s , т.е., опять-таки по закону скейлинга. Заметим, что этот факт является еще одним независимым доводом в пользу существования скейлинга в области высоких энергий. Логарифмически уточняя эту зависимость, введем *универсальное асимптотическое сечение рассеяния* (ACS), впервые предложенное в работах [17], [4], (см. также [18]):

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi\beta}{sL(s)}, \quad (31)$$

где $\beta \sim 1$, $L(s)$ - логарифмический фактор:

$$L(s) = 1 + \ln^2\left(1 + \frac{s_0}{s}\right) > 1, \quad (32)$$

являющийся монотонно убывающей функцией кинематического инварианта s -

$$\frac{dL}{ds} < 0,$$

а $s_0 = 4$ - квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс, так что на планковских масштабах энергии:

$$L(s_0) \simeq 1, \quad (33)$$

- при этом на комптоновских масштабах энергии, т.е., при $s = m_e^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{L(m_e^2)}} \approx \frac{1}{102} \simeq \alpha \approx \frac{1}{137}, \quad (34)$$

где $\alpha = 1/137$ - постоянная тонкой структуры.

Соотношение (34) позволяет рассматривать величину $1/\sqrt{L(s)}$ как логарифмически медленно меняющуюся эффективную константу взаимодействия, что, в свою очередь, реализует идеологию бегущих констант взаимодействия стандартных теорий фундаментальных взаимодействий типа $SU(5)$.

Введенное формулой (31), сечение рассеяния σ_0 , ACS, обладает рядом замечательных свойств (см. также Figure 1):

- 1°. ACS образовано лишь из фундаментальных констант G, \hbar, c ;
- 2°. ACS ведет себя так, что его значения лежат строго посередине между возможными крайними пределами асимптотического поведения сечения (22), установленных с помощью асимптотической теории S -матрицы;
- 3°. ACS с логарифмической точностью является скейлинговым сечением рассеяния;
- 4°. ACS с удивительной точностью совпадает на соответствующих масштабах энергии с сечениями всех известных фундаментальных процессов, начиная от электромагнитных и кончая гравитационными, на огромном диапазоне значений энергии (от m_e до $10^{22}m_e$) - при этом значения первого кинематического инварианта изменяется на 44 порядка! (см. Figure 1).

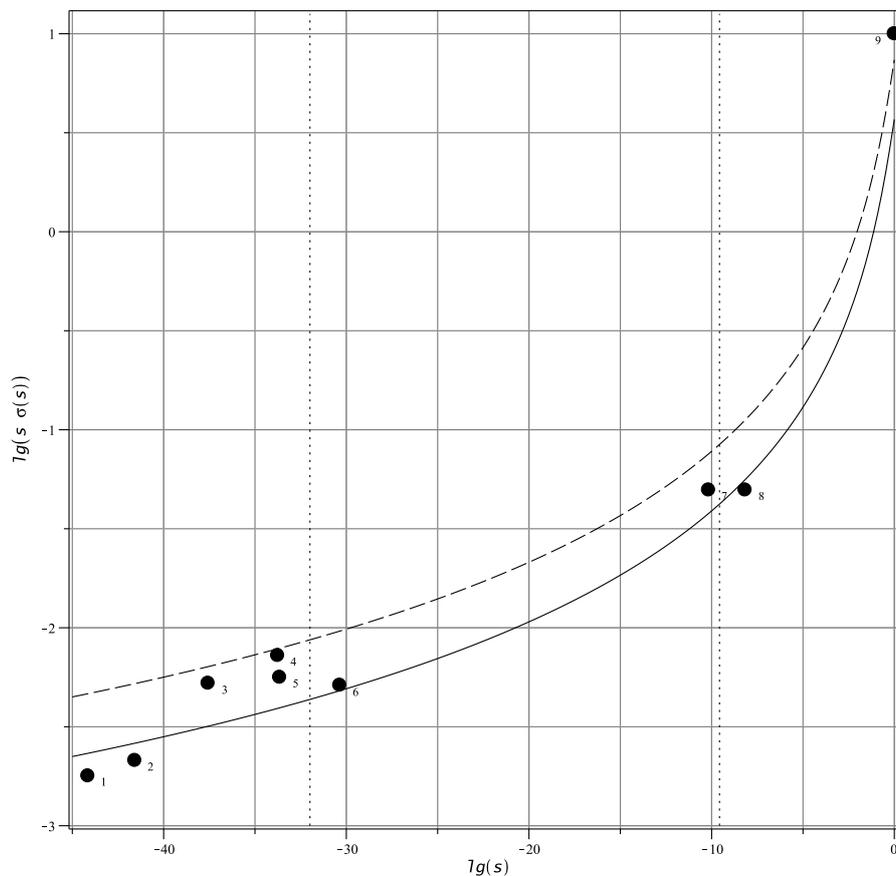


Figure 1. Сравнение универсального сечения рассеяния (31) при факторе $\beta = 1$ с известными сечениями фундаментальных процессов — жирная линия. Пунктирная линия соответствует графику универсального сечения рассеяния при факторе $\beta = 2$. На оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма первого кинематического инварианта, $\lg s$, в планковских единицах; по оси ординат отложены значения десятичного логарифма безразмерного инварианта, $\lg s\sigma(s)$. 1 — томпсоновское рассеяние, 2 — комптоновское рассеяние на электронах при $E_{SCM} = 10$ Mev, 3 — комптоновское рассеяние электронов при $E_{SCM} = 1$ Gev, 4 — электрослабое взаимодействие с участием: W - бозонов, 5 — с участием Z - бозонов, 6 — H -бозонов при энергии порядка 7 Tev ($\sigma \sim 10$ fb); 7 — $SU(5)$ - взаимодействие при массе сверхтяжелых X -бозонов 10^{15} Gev, 8 — 10^{14} Gev; 9 — гравитационное взаимодействие на планковских масштабах. Вертикальные пунктирные линии соответствуют значениям энергии унитарного предела для $SU(2) \times SU(1)$ - взаимодействий, $E_u = 617$ Gev, и $SU(5)$ - взаимодействий, $E_u \sim 10^{14}$ Gev.

Эти замечательные качества ACS, вряд-ли, могут быть случайными и позволяют нам в дальнейшем применять ACS в качестве надежной формулы для асимптотического значения сечений рассеяния для всех взаимодействий.

Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

Упрощение релятивистского интеграла столкновений

Процесс установления термодинамического равновесия описывается релятивистскими кинетическими уравнениями. В работе [3] (1982) показано, что релятивистские кинетические уравнения конформно инвариантны в ультрарелятивистском пределе при наличии скейлинга взаимодействий. Этот факт является основой для утверждения о том, что, по крайней мере, в ультрарелятивистской Вселенной, LTE могло нарушаться. Итак, будем рассматривать однородные изотропные распределения частиц в метрике Фридмана (11). Такие распределения описываются функция-

ми:

$$f_a(x^i, p^k) = f_a(t, p). \quad (35)$$

Релятивистские кинетические уравнения относительно однородных изотропных распределений (35) принимают вид (подробности см. в [19], [20], [21], [22], [23]):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab}(t, p), \quad (36)$$

где $J_{ab}(t, p)$ - интеграл четырехчастичных реакций [23], [21]:

$$\begin{aligned} J_{ab}(t, p) &= (2\pi)^4 \times \\ &\int d\pi_b d\pi_c d\pi_d \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_c - p_d) \\ &\times [(1 \pm f_a)(1 \pm f_b) |f_c f_d \overline{M_{cd \rightarrow ab}}|^2 - \\ &(1 \pm f_c)(1 \pm f_d) f_a f_b \overline{M_{ab \rightarrow cd}}|^2], \end{aligned} \quad (37)$$

знаки \pm соответствуют бозонам (+) и фермионам (-), $M_{i \rightarrow f}$ - инвариантные амплитуды рассеяния (черта означает усреднение по состояниям поляризации частиц), $d\pi_a$ - нормированный элемент объема импульсного пространства a -той частицы:

$$d\pi_a = \sqrt{-g} \frac{\rho_a dp^1 dp^2 dp^3}{(2\pi)^3 p_4}, \quad (38)$$

ρ_a - фактор вырождения.

Упростим интеграл четырехчастичных взаимодействий (38), используя свойства изотропии распределений $f_a(t, p)$. Для выполнения двух внутренних интегрирований по импульсным переменным перейдем в локальную систему центра масс, в которой интегрирование проводится элементарно. После обратного преобразования Лоренца и перехода к сферической системе координат в импульсном пространстве в ультрарелятивистском пределе (7) найдем ([4], [24]):

$$\begin{aligned} J_{ab}(p) &= -\frac{2S_b + 1}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx |F(x, s)|^2 \times \\ &\int_0^{2\pi} d\varphi \{ f_a(p) f_b(q) [1 \pm f_c(p - \Delta)] [1 \pm f_d(q + \Delta)] \\ &- f_c(p - \Delta) f_d(q + \Delta) [1 \pm f_a(p)] [1 \pm f_b(q)] \}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $x = -t/s$ безразмерная переменная (8), и

$$\Delta = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1-x)(4pq - s)}. \quad (40)$$

Релятивистские кинетические уравнения в терминах конформно соответствующего пространства

Учитывая тот факт, что переменная \tilde{p} (12) является интегралом движения в метрике Фридмана и при этом для любой функции $\Psi(t, p)$ имеет место соотношение [19]:

$$\frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial p} = \frac{\partial \Psi(t, \tilde{p})}{\partial t}, \quad (41)$$

преобразуем кинетические уравнения для однородных изотропных распределений к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} = \frac{a}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab}(\eta, p), \quad (42)$$

куда необходимо подставить $p = \tilde{p}/a$.

Заметим, что с другой стороны переход к переменной (12), \tilde{p} , фактически является конформным преобразованием к однородному статическому пространству

$$ds^2 = a^2 ds_0^2 = a^2 (d\eta^2 - dt^2),$$

при котором физическая компонента импульса, p , преобразуется по закону:

$$p = \frac{\tilde{p}}{a}. \quad (43)$$

Таким образом, импульсная переменная (12), \tilde{p} , есть абсолютная величина физического импульса в конформно соответствующем статическом пространстве постоянной кривизны⁶, а η - временная переменная в этом пространстве.

Плотности числа частиц, $n(\eta)$, и плотности их энергии, $\varepsilon(\eta)$, относительно изотропного распределения частиц, $f(\eta, p)$ определяются формулами:

$$n(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 f(\eta, p) dp = \frac{\rho}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}; \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{m^2 + p^2} p^2 f(\eta, p) dp = \\ &= \frac{\rho}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{p}^2 \sqrt{m^2 + \tilde{p}^2/a^2} f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}. \end{aligned} \quad (45)$$

В связи с этим удобно ввести конформные плотности числа частиц, $\tilde{n}(\eta)$, а для ультрарелятивистских частиц - и плотности их энергии, $\tilde{\varepsilon}(\eta)$:

$$\tilde{n}(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{m^2 + p^2} p^2 f(\eta, p) dp \\ &\approx \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \tilde{p}^3 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}. \end{aligned} \quad (47)$$

Тогда имеют место два соотношения:

$$\tilde{n}(\eta) = n(\eta) a^3(\eta); \quad (48)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\eta) \approx \varepsilon(\eta) a^4(\eta); \quad (p/m \rightarrow \infty), \quad (49)$$

из которых первое выполняется строго, а второе, - асимптотически, в ультрарелятивистском пределе.

Интеграл столкновений для слабого отклонения распределений от равновесия

Исследуем сначала слабое нарушение термодинамического равновесия в горячей модели, когда основная часть частиц, $n_e(t)$, находится в состоянии теплового равновесия, и лишь для небольшой доли частиц, $n_{ne}(t)$,

$$n_{ne}(t) \ll n_e(t) \quad (50)$$

тепловое равновесие нарушено (см. Figure 2). Причем в дальнейшем в этой статье мы будем полагать, что функции распределения мало отличаются от равновесных в области малых значений энергии, меньших некоторого унитарного предела, $p = p_0$ (или $T = T_0$), ниже которого отсутствует скейлинг, и может сильно нарушаться при энергиях, выше унитарного предела:

$$f_a(p) \approx \begin{cases} f_a^0 = [\exp(\frac{-\mu_a + E_a(p)}{T}) \pm 1]^{-1}, & p < p_0; \\ \Delta f_a(p); f_a^0(p) \ll \Delta f_a(p) \ll 1, & p > p_0, \end{cases} \quad (51)$$

где $\mu_a(t)$ - химические потенциалы, $T(t)$ - температура равновесной компоненты плазмы. Таким образом, в области $p > p_0$ может наблюдаться аномально большое по сравнению с равновесным число частиц, но при этом малое (см. (50)) по сравнению с полным числом равновесных частиц.

⁶В рассматриваемом случае - в пространстве Минковского

Исследуем процесс релаксации распределения $f_a(p)$ к равновесному $f_a^0(p)$. Задача в такой постановке для частного случая первоначального распределения $f(t=0, p)$ решалась ранее в [17], [4], [24]. Здесь мы дадим общее решение этой задачи. При этом, как будет видно из дальнейшего, космологическую плазму формально можно рассматривать как двухкомпонентную систему - равновесную с распределением $f_a^0(t, p)$, и неравновесную, *сверхтепловую*, с распределением $\delta f_a(t, p) = \Psi(t, p)$, причем число частиц в неравновесной компоненте мало, но плотность ее энергии, вообще говоря, произвольна. Исследуем интеграл столкновений (39) в области

$$p \geq p_0 \gg T. \quad (52)$$

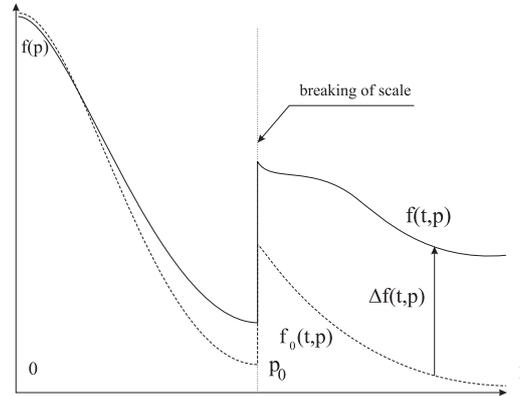


Figure 2. Схематическое изображение отклонения функции распределения от равновесия.

Вследствие неравенства (51) в этой области можно пренебречь столкновениями сверхтепловых частиц между собой, ограничиваясь учетом рассеяния сверхтепловых частиц на равновесных. Поэтому в интеграле столкновений значение одного из импульсов, $p' = p - \Delta$, либо $q' = q + \Delta$ должно лежать в тепловой области, второго - в сверхтепловой, за унитарным пределом. Вне этой области подинтегральное значение интеграла столкновений чрезвычайно мало. Вследствие этого обстоятельства вторым членом в фигурных скобках (39) можно пренебречь, так как он может конкурировать с первым лишь в асимптотически малых областях изменения переменных x и φ : $x(1-x) \lesssim T/p \rightarrow 0$. Статистические факторы вида $[1 \pm f_a(p')]$ в первом члене интеграла (39) могут заметно отличаться от единицы, опять-таки, лишь в области тепловых значений импульсов. В результате в исследуемой нами области значений импульсов интеграл столкновений (39) можно записать в виде [24]:

$$J_{ab \leftrightarrow cd}(p)|_{p \geq p_0} = \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \times \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx |F(x, s)|^2. \quad (53)$$

Используя здесь определение полного сечения рассеяния (39), получим из (53):

$$J_{ab \leftrightarrow cd}(p)|_{p \geq p_0} = \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \times \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \sigma_{tot} s(s) ds. \quad (54)$$

Подставляя, наконец, во внутренний интеграл выражение для σ_{tot} в форме ACS, (31), проводя интегрирование с логарифмической точностью и суммируя полученное выражение по всем каналам реакций, найдем окончательно:

$$J_a(p)|_{p \geq p_0} = -\Delta f_a(p) \sum_b \frac{4(2S_b + 1)\nu_{ab}}{\pi} \times \int_0^\infty \frac{q^2 f_b^0(q)}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \frac{dq}{L(\bar{s})}, \quad (55)$$

где

$$\bar{s} = \frac{1}{2}pq^4,$$

ν_{ab} - число каналов реакций, в которых может участвовать частица сорта a .

Вычислим значения интеграла (55) в предельных случаях.

Выражения для равновесных плотностей

Выпишем выражения для макроскопических плотностей относительно равновесных распределений $f_a^0(p)$ (44), (45), \bar{n}_a^0 и энергии, $\bar{\varepsilon}_a^0$. В случае газа безмассовых частиц ($\mu = 0$) получим (см., например, [25]):

$$\bar{n}_a^0 = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3); \quad (56)$$

$$\bar{\varepsilon}_a^0 = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho \pi^2 T^4}{30} g_e, \quad (57)$$

где ρ - число независимых поляризаций (спина) частицы ($\rho = 2$ - для фотонов и безмассовых нейтрино), g_a - статистический фактор:

$$\begin{aligned} g_n &= g_e = 1 \quad \text{for Bose particles;} \\ g_n &= 3/4, \quad g_e = 7/8 \quad \text{for Fermi particles.} \end{aligned} \quad (58)$$

знак “+” соответствует фермионам, “-” - бозонам, $\zeta(x)$ - ζ есть функция Римана.

Суммарная плотность энергии безмассовых частиц равна:

$$\varepsilon = \sum_a \bar{\varepsilon}_a^0 = N \frac{\pi^2 T^4}{15}, \quad (59)$$

где

$$N = \frac{1}{2} \left[\sum_B (2S + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S + 1) \right] \quad (60)$$

- эффективное число типов частиц (S - спин частицы)⁷; суммирование идет по бозонам (B) и фермионам (F), соответственно. Введем числа типов бозонов и фермионов, N_B и N_F :

$$N_B = \frac{1}{2} \sum_B (2S + 1); \quad N_F = \frac{1}{2} \sum_F (2S + 1). \quad (61)$$

Тогда:

$$N = N_B + \frac{7}{8} N_F. \quad (62)$$

Для газа нерелятивистских частиц:

$$\bar{n}_a^0 \approx \delta \bar{n}_\gamma^0 = \delta \frac{2T^3}{\pi^2} \zeta(3), \quad \varepsilon_a \approx m_a n_a, \quad (63)$$

где \bar{n}_γ^0 - плотность числа реликтовых фотонов,

$$\delta \sim 10^{-10}. \quad (64)$$

Следует отметить, что возможная относительная средняя концентрация частиц небарионной природы темной материи, δ_{nb} , при ее плотности порядка 25% от критической плотности, $\rho_c \approx 0.9 \cdot 10^{-29} \text{ g/cm}^3$, и ожидаемой минимальной массе частиц порядка 50 Gev еще меньше $1/\delta$ и составляет порядка $0.5 \cdot 10^{-11}$.

3.0.1 Рассеяние на нерелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта b нерелятивистские, т.е., $q \ll m_b$, то интеграл (55) сводится к выражению:

$$\begin{aligned} J_a(p)|_{p \geq p_0} &= -32\pi^2 \Delta f_a(p) \times \\ &\sum_b \frac{n_b^0(t)}{m_b} \frac{\nu_{ab}}{1 + \ln^2 pm_b/2}, \quad (m_b > T). \end{aligned} \quad (65)$$

⁷В полевых моделях взаимодействий типа SU(5) $\mathcal{N} \sim 100 \div 200$.

Рассеяние на ультрарелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта b являются ультрарелятивистскими, т.е., $m_b \ll T$, причем их химический потенциал мал, $\mu_b \ll T$, то вычисляя интеграл (55) относительно равновесного распределения (51), найдем:

$$J_a(p)|_{p \geq p_0} = -\frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{N}T^2(t)}{1 + \ln^2 Tp/2} \Delta f_a(p), \quad (66)$$

$(m_b \ll T, \mu_b \ll T),$

где

$$\tilde{N} = \frac{1}{2} \left[\sum_B (2S + 1) + \frac{1}{2} \sum_F (2S + 1) \right] = N_B + \frac{1}{2} N_F;$$

N_B - число сортов равновесных бозонов, F - фермионов.

Вычисляя отношение вкладов в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских равновесных частиц, получим:

$$\frac{J_{non}}{J_{ultra}} \sim \frac{24\pi n_b^0}{m_b T^2} = \zeta(3) \delta \frac{64T(t)}{\pi m_b} \sim 10^{-9} \frac{T}{m_b}, \quad (67)$$

- отношение вкладов мало при $T \ll 10^9 m_b$ и уменьшается со временем. Поэтому в дальнейшем вкладе нерелятивистских частиц в интеграл столкновений будем пренебрегать.

Построение и решение уравнения энергобаланса

Построим строгую самосогласованную математическую модель восстановления теплового равновесия в расширяющейся Вселенной в условиях слабого нарушения равновесия в смысле малости числа неравновесных частиц по сравнению с числом равновесных частиц (50). Заметим, что при этом энергия, заключенная в неравновесном высокоэнергетическом "хвосте" распределения,

$\Delta f_a(t, p)$, может быть большой и даже значительно превышать энергию равновесной компоненты космологической плазмы. Выпишем сначала основные соотношения, определяющие динамику космологической плазмы.

Модель материи

Как известно (см., например, [26]), уравнения Эйнштейна в случае изотропной однородной космологической модели с нулевой трехмерной кривизной сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} \varepsilon; \quad (68)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p(\varepsilon)) = 0. \quad (69)$$

Далее:

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_s; \quad p = p_p + p_s, \quad (70)$$

где ε_p, p_p - плотность энергии и давление космологической плазмы, ε_s, p_s - плотность энергии и давление всевозможных фундаментальных полей, возможно, скалярных, приводящих к ускорению Вселенной.

Инвариантное ускорение Вселенной

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (71)$$

связано с *эффективным коэффициентом баротропии* материи, $\varkappa \equiv p/\varepsilon$, соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa). \quad (72)$$

Таким образом, на стадии ускорения ($t > t_1$):

$$0 < \Omega < 1, \Rightarrow -1 < \varkappa < -\frac{1}{3}. \quad (73)$$

До этого момента $\varkappa \in [1/3, -1/3]$. Согласно (68) - (69) масштабный фактор и суммарная плотность энергии при заданном постоянном коэффициенте баротропии меняются по закону:

$$a = a_1 t^{2/3(\varkappa+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varkappa+1)^2 t^2}, \quad \varkappa + 1 \neq 0 \quad (74)$$

Используя связь (72), перепишем соотношения (74) в более удобном для нас виде:

$$a = a_1 t^{1/(1-\Omega)}; \quad \varepsilon = \frac{3}{8\pi(1-\Omega)^2 t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (75)$$

Заметим, что при любых значениях инвариантного ускорения $\Omega = \text{Const} \in [-1, 1)$ плотность энергии пропорциональна t^{-2} .

Основные предположения модели

Примем следующие предположения в нашей модели:

1°. Скейлинговый характер взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий и унификация всех межчастичных взаимодействий на основе фундаментальных постоянных G, \hbar, c при энергиях выше унитарного предела, что приводит к формуле универсального асимптотического сечения рассеяния (31);

2°. Минимальность связи фундаментальных макроскопических полей с космологической плазмой. Это автоматически означает, что закон сохранения энергии (75) выполняется по отдельности для фундаментальных полей и плазмы:

$$\dot{\varepsilon}_s + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_s + p_s(\varepsilon_s)) = 0, \quad (76)$$

$$\dot{\varepsilon}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_p + p_p(\varepsilon_p)) = 0. \quad (77)$$

3°. Ультрарелятивистское уравнение состояния космологической плазмы на рассматриваемой стадии расширения:

$$p_p = \frac{1}{3}\varepsilon_p, \quad (77) \Rightarrow \varepsilon_p a^4 = \text{Const}. \quad (78)$$

4°. Ультрарелятивистское начало Вселенной:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varkappa = \frac{1}{3}. \quad (79)$$

Баланс энергии космологической плазмы

Основой развиваемой здесь теории является уравнение энергобаланса космологической плазмы, являющееся, фактически, законом сохранения ее энергии. Для случая суммарного ультрарелятивистского состояния материи эта теория была построена автором в работах [4], [24]. Здесь мы обобщим и детализируем результаты этой теории на случай произвольного суммарного уравнения состояния материи. Из (77) с учетом (78) сразу следует:

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const}, \quad (80)$$

где $\tilde{\varepsilon}_p$ — конформная плотность энергии космологической плазмы. Определим эту константу, полагая согласно (75) на начальной ультрарелятивистской стадии расширения:

$$a(t)|_{t \rightarrow 0} = \sqrt{t}. \quad (81)$$

Тогда для конформной плотности энергии плазмы получим, предполагая, что космологическая плазма является единственной ультрарелятивистской компонентной материи, —

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{3}{32\pi}. \quad (82)$$

Введем далее температуру $T_0(t)$ космологической плазмы в идеальной Вселенной, в которой на данный момент космологического времени t вся плазма является локально равновесной. Таким образом, плотность энергии этой плазмы описывается формулой (59) с $N = N_0$ — эффективным числом типов равновесных частиц в плазме с температурой T_0 . Отсюда с учетом (82) получим закон эволюции температуры плазмы в равновесной Вселенной:

$$T_0(t) = \frac{1}{a(t)} \left(\frac{45}{32\pi^3 N_0} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (83)$$

Относительно величины N_0 — эффективного числа типов частиц, находящихся в термодинамическом равновесии, мы будем полагать, что $N_0(t)$ — медленно меняющаяся функция космологического времени:

$$\dot{N}_0 t \ll 1. \quad (84)$$

Пусть теперь $T(t)$ – истинная температура равновесной компоненты космологической плазмы, а $\Delta f_a(p, t)$ – функция распределения « a »-го сорта неравновесных частиц плазмы. Найдем плотности энергии равновесной, ε_e , и неравновесной, ε_{ne} , компонент:

$$\varepsilon_e = \frac{N\pi^2}{15} T^4(t); \quad (85)$$

$$\varepsilon_{ne} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty p^3 \Delta f_a(p, t) dp, \quad (86)$$

где S – спин частиц; $N(t)$ – эффективное число типов равновесных частиц в плазме с температурой $T(t)$. Выражая далее с помощью (83) масштабный фактор через температуру $T_0(t)$ и вводя новую *безразмерную* конформную импульсную переменную \tilde{p} :⁸

$$p = \left(\frac{45}{32\pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\tilde{p}}{a(t)} = T_0(t) N_0^{\frac{1}{4}} \tilde{p}, \quad (87)$$

получим для (86):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p}. \quad (88)$$

Далее, из (83) и (85) получим для конформной плотности энергии равновесной компоненты плазмы:

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{3}{32\pi} y^4, \quad (89)$$

где введена безразмерная функция, $y(t)$ – *относительная температура* [24]:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \leq 1. \quad (90)$$

Из (89) можно получить соотношение:

$$\sigma(t) \equiv y^4(t) \equiv \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_p} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\tilde{\varepsilon}_e + \tilde{\varepsilon}_{ne}}. \quad (91)$$

Таким образом, закон сохранения энергии космологической плазмы (82) с помощью соотношений (86) и (89) можно переписать в виде:

$$y^4 + \frac{15}{2\pi^4} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p} = 1. \quad (92)$$

Соотношение (92) и называется *уравнением энергобаланса плазмы*. Оно получено нами при использовании трех предположений модели – 2°, 3°, 4°. Заметим, что в предыдущих статьях автора это основное соотношение математической модели восстановления термодинамического равновесия выводилось при более частных предположениях. При заданной зависимости функции распределения неравновесных частиц от температуры равновесной компоненты плазмы и космологического времени уравнение энергобаланса становится нелинейным интегральным уравнением относительно температуры равновесной компоненты. Следовательно, для получения этого уравнения в явной форме необходимо решить кинетическое уравнение для неравновесных частиц.

Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

Решение кинетического уравнения

Уравнение энергобаланса (92), в свою очередь, определяется решением кинетического уравнения относительного неравновесного распределения

⁸В отличие от импульсной переменной, p , давление обозначается римским шрифтом, – p .

$\Delta f(t, p)$. Используя здесь соотношение (87), приведем кинетическое уравнение для сверхтепловых частиц (42) с интегралом столкновений (66) к виду:

$$\frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = -\frac{8\pi N}{3\tilde{p}L(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4})} \times \left(\frac{2\pi^3}{45}\right)^{1/4} T^2(t)a(t)\Delta f_a. \quad (93)$$

Решая (93), получим:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \times \exp \left[-\frac{8\pi}{3\tilde{p}} \left(\frac{2\pi^3}{45}\right)^{1/4} \int_0^t \frac{NaT^2 dt}{L(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4})} \right], \quad (94)$$

где

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) \equiv \Delta f_a(0, \tilde{p}). \quad (95)$$

Переход к безразмерным нормированным переменным

Введем среднюю конформную энергию неравновесной компоненты ультрарелятивистских частиц в начальный момент времени, $\langle \tilde{p} \rangle_0$, –

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\tilde{n}(0)} \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^3 d\tilde{p}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^2 d\tilde{p}} \quad (96)$$

и безразмерную нормированную импульсную переменную, ρ , –

$$\rho \equiv \frac{\tilde{p}}{\langle \tilde{p} \rangle_0}, \quad (97)$$

так что

$$\langle \rho \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\langle \tilde{p} \rangle_0 \tilde{n}(0)} \equiv 1 \Rightarrow \langle \rho \rangle_0 = \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^3 d\rho}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^2 d\rho} = 1. \quad (98)$$

Согласно математической модели неравновесной плазмы средняя энергия частиц в первоначальном неравновесном распределении должна быть больше и даже значительно больше тепловой энергии частиц, таким образом согласно (87), (96) в рассматриваемой нашей модели:

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 \gg 1. \quad (99)$$

Фактически величина $\langle \tilde{p} \rangle_0$ является *независимым параметром* рассматриваемой здесь модели, – физический смысл этого безразмерного параметра – отношение средней энергии частиц первоначального неравновесного распределения к температуре плазмы в равновесной Вселенной в начальный момент времени⁹. В отличие от конформной импульсной переменной \tilde{p} среднее значение безразмерной конформной импульсной переменной ρ в начальном распределении тождественно равно 1.

Преобразуем выражение в экспоненте (94), переходя к безразмерным переменным y, ρ . Учитывая слабую зависимость логарифмического фактора L от своих аргументов, а также убывающий характер подинтегральной функции в (94), примем следующую оценку логарифмического фактора:

$$L\left(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4}\right) \simeq L(\langle \tilde{p} \rangle_0 T_0^2) \equiv L_0(t). \quad (100)$$

⁹Сами эти величины могут быть бесконечными, но их отношение конечно.

Таким образом, с логарифмической точностью представим решение (94) в компактной форме:

$$\Delta f_a(t, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \exp \left(-\frac{2}{\rho} \int_0^t \xi \frac{y^2}{a} dt \right), \quad (101)$$

где введено обозначение:

$$\begin{aligned} \xi \equiv \xi(t) &= \left(\frac{5\pi}{18} \right)^{1/4} \frac{N}{\langle \bar{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)} \approx \\ &0.967 \frac{N}{\langle \bar{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)} \approx \frac{N}{\langle \bar{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)}. \end{aligned} \quad (102)$$

Вводя теперь новую *безразмерную временную переменную*, τ , –

$$\tau = 2 \int_0^t \frac{\xi}{a} dt, \quad (103)$$

такую, что:

$$\frac{d\tau}{dt} \equiv 2 \frac{\xi}{a} > 0, \quad (104)$$

и новую *безразмерную функцию*, $Z(\tau)$, –

$$Z(\tau) = \int_0^\tau y^2(\tau) d\tau, \quad (105)$$

приведем решение кинетического уравнения (101) к виду:

$$\Delta f_a(\tau, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (106)$$

Иследуем *уравнение связи* (103) безразмерной временной переменной τ и космологическим временем t . Полагая в (103) степенную зависимость масштабного фактора $a(t)$ от космологического времени и принимая во внимание слабую зависимость от времени фактора ξ , получим:

$$a \sim t^\alpha \rightarrow \begin{cases} t^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, 0; \\ \tau \sim \ln t, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (107)$$

Отсюда следует, что при $\alpha \leq 1 \rightarrow \tau(\infty) = \infty$, а при $\alpha < 1 \rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < \infty$. Сравнивая соотношение (107) с соотношениями (72) – (75), приходим к следующему важному выводу:

$$\begin{aligned} \kappa \geq -\frac{1}{3} \quad (\Omega \leq 0) &\Rightarrow \tau(\infty) = +\infty; \\ \kappa < -\frac{1}{3} \quad (\Omega > 0) &\Rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < +\infty. \end{aligned} \quad (108)$$

Поскольку функция распределения неравновесной компоненты космологической плазмы (106) зависит от времени лишь посредством *монотонно возрастающей функции* безразмерной временной переменной $Z(\tau)$, то соотношения (108) означают, что в ультррелятивистской космологической плазме во Вселенной с отрицательным ускорением асимптотически достигается полное термодинамическое равновесие, тогда как в *ускоряющейся Вселенной термодинамическое равновесие никогда строго не достигается*.

Конформная плотность энергии неравновесной компоненты

Подставляя решение кинетического уравнения в форме (106) в выражение для конформной плотности энергии неравновесных частиц, получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \bar{p}^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (109)$$

Произведем тождественное преобразование с этим выражением, учитывая что согласно определению (91) и уравнению энергоданса (92):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \frac{3}{32\pi} : \quad (110)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}}{\varepsilon_{ne}^0} \varepsilon_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \Phi(Z) \frac{3}{32\pi}, \quad (111)$$

где мы с учетом преобразования к безразмерной импульсной переменной ρ (97) ввели новую *безразмерную функцию* $\Phi(Z)$:

$$\Phi(Z) \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}. \quad (112)$$

Решение и исследование уравнения энергобаланса

Вследствие определения (105) функция $Z(\tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$Z'(\tau) = y^2(\tau) \Rightarrow Z'^2 = \sigma(\tau); \quad (113)$$

$$Z(0) = 0; \quad Z'(0) = y^2(0) = \sqrt{\sigma_0}, \quad (114)$$

где

$$Z' \equiv \frac{dZ}{d\tau} > 0. \quad (115)$$

Таким образом, с учетом (111) – (113) уравнение энергобаланса (92) можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно функции $Z(\tau)$:

$$\begin{aligned} y^2 + (1 - \sigma_0) \Phi(Z) &= 1 \Rightarrow \\ Z'^2 + (1 - \sigma_0) \Phi(Z) &= 1, \end{aligned} \quad (116)$$

решая которое с учетом соотношений (114) – (115), найдем формальное решение в неявном виде:

$$\int_0^Z \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0) \Phi(u)}} = \tau. \quad (117)$$

Согласно определению (112) функция $\Phi(Z)$ неотрицательна:

$$\Phi(Z) > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (118)$$

причем

$$\Phi(0) = 1; \quad \lim_{Z \rightarrow +\infty} \Phi(Z) = 0. \quad (119)$$

Вычисляя первую и вторую производную по Z от функции $\Phi(Z)$, дифференцируя соотношение (112) по Z , получим:

$$\Phi(Z)'_Z < 0, \quad (Z \in [0, +\infty)); \quad (120)$$

$$\Phi(Z)'' > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)). \quad (121)$$

Вследствие (120) функция $\Phi(Z)$ является строго монотонно убывающей, но тогда вследствие соотношений (119) эта функция ограничена на интервале:

$$\Phi(Z) \in [0, 1]; \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (122)$$

причем график функции $\Phi(Z)$ вогнутый. Вследствие этих свойств функции $\Phi(Z)$ уравнение $\Phi(Z) = \Phi_0$ на рассматриваемом интервале значений всегда имеет одно и только одно решение $Z = Z_0$, т.е., *отображение* $Y = \Phi(Z)$ *на множестве неотрицательных чисел является биективным*.

Далее, из соотношения (113) следует, что функция $Z(\tau)$ является монотонно возрастающей на интервале $\tau \in [0, \tau_\infty]$. Дифференцируя соотношение (116) по τ как сложную функцию, получим:

$$Z'[2Z'' + (1 - \sigma_0)\Phi'_Z] = 0. \quad (123)$$

Отсюда вследствие положительности Z' (116) найдем вторую производную:

$$Z'' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi'_Z. \quad (124)$$

Поэтому вследствие (120) и (90) – (91) получим из (124):

$$Z'' > 0, \quad (125)$$

т.е., график функции $Z(\tau)$ также является вогнутым. Далее, дифференцируя (IV.53), получим с учетом (125):

$$y' > 0, \quad (126)$$

— т.е. функция $y(\tau)$ (а вместе с ней и функция $\sigma(\tau)$) является монотонно возрастающей. С другой стороны, она ограничена снизу начальным значением y_0 (σ_0), а сверху — значением 1:

$$y' > 0, y \in [y_0, 1); \quad \sigma' > 0, \sigma \in [\sigma_0, 1). \quad (127)$$

Перечисленные свойства функций $y(\tau)$, $Z(\tau)$ и $\Phi(Z)$ обеспечивают биективность цепочки отображений $\tau \leftrightarrow y$, $y \leftrightarrow Z$, $Z \leftrightarrow \Phi$. В итоге, каждому значению Φ соответствует одно и только одно значение Z и одно и только одно значение τ : $\tau \leftrightarrow \Phi$. Для замыкания этой цепочки достаточно определить связь функций $y(\tau)$ и $Z(\tau)$ с помощью уравнения энергобаланса (117):

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \quad (128)$$

Уравнения (117) и (128) являются параметрическим решением уравнения энергобаланса (116), а вышеперечисленные свойства функций $\Phi(Z)$ и $Z(\tau)$ обеспечивают единственность его решения. Согласно (112) функция $\Phi(Z)$ полностью определяется начальным распределением неравновесных частиц $\Delta f_a^0(\rho)$. Поэтому с математической точки зрения задача о восстановлении термодинамического равновесия во Вселенной с произвольным ускорением полностью решена. Конкретные модели определяются моделью темной материи и моделью первоначального неравновесного распределения частиц.

Продифференцируем теперь соотношение (124) по τ и учтем связь (113) между функциями $y(\tau)$ и $Z(\tau)$:

$$\begin{aligned} Z''' &= -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}Z' \\ \Rightarrow y''y &= -y'^2 - \frac{1}{4}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}y^2. \end{aligned}$$

Таким образом, вследствие (121):

$$y'' < 0, \quad (129)$$

— т.е., график функции $y(\tau)$, а вместе с ним и $\sigma(\tau)$, является выпуклым. Далее, поскольку $\Phi_Z(Z \rightarrow \infty) = 0$, из (124) следует:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y'(\tau) = 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma'(\tau) = 0, \quad (130)$$

— т.е., значение $\sigma = 1$ достигается асимптотически при $\tau \rightarrow \infty$. Это позволяет нарисовать качественный график функции $y(\tau)$ (Figure 3). Конечность безразмерного времени τ_∞ приводит к установлению предельного значения функции $y(\tau)$:

$$y(\tau_\infty) = y_\infty < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty < 1. \quad (131)$$

Вследствие этого часть энергии космологической плазмы навсегда консервируется в неравновесной сверхтепловой компоненте:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{ne}(t)}{\varepsilon_p(t)} = 1 - \sigma_\infty = \begin{cases} = 0, & \tau_\infty = \infty \\ > 0, & \tau_\infty < \infty \end{cases}. \quad (132)$$

Согласно (108) это возможно лишь для ускоренно расширяющейся Вселенной.

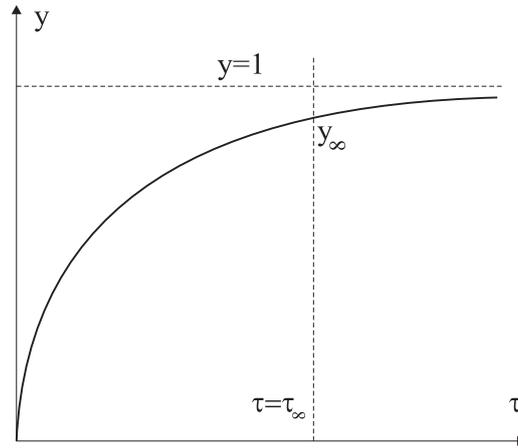
Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

Рассмотрим следующую простую модель материи, состоящей из двух компонент — минимально связанного массивного скалярного поля (космологический член) с уравнением состояния:

$$p_s = -\varepsilon_s, \quad (133)$$

и ультрарелятивистской плазмы с уравнением состояния (78). Тогда суммарный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение можно записать в виде:

$$\varkappa(t) = \frac{1}{3} \frac{1 - 3\delta}{1 + \delta}; \quad \Omega(t) = -\frac{1 - \delta}{1 + \delta}, \quad (134)$$

Рис. 3: Качественный вид графика функции $y(\tau)$.

где

$$\delta = \delta(t) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}. \quad (135)$$

Таким образом, при $\delta = \text{Const}$ формулы (74) можно записать в следующем удобном виде [27]:

$$a = a_1 t^{(1+\delta)/2}; \quad \varepsilon = \frac{3}{32\pi} \frac{(1+\delta)^2}{t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (136)$$

Законы сохранения энергии (76) – (77) принимают вид:

$$\varepsilon_s = \text{Const} = \frac{3\Lambda^2}{8\pi}; \quad (137)$$

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const} \simeq \frac{3}{32\pi}. \quad (138)$$

Подставляя (137)-(138) в уравнение (68) и интегрируя его, получим:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2} \right) e^{(t-t_0)/2\Lambda} - \frac{b^2}{t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2}} e^{-(t-t_0)/2\Lambda} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (139)$$

где:

$$b^2 = \frac{3}{32\pi\Lambda^2}. \quad (140)$$

В частности, при $t_0 = 0$ для масштабного фактора имеем отсюда:

$$a(t) = \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{3}{32\pi} \text{sh} \frac{t}{2\Lambda}} \quad (141)$$

Вычисляя согласно (135), (137), (138) и (141) отношение δ , найдем:

$$\delta(t) = \left(\frac{3}{16\pi\Lambda} \text{sh} \frac{t}{2\Lambda} \right)^2. \quad (142)$$

Далее, согласно (135) можно вычислить эффективный коэффициент баротропии и инвариантное ускорение (см. Рис. 4).

Следующий рисунок показывает, что с помощью параметра Λ можно легко управлять временем перехода на инфляционный режим ускорения $\kappa \rightarrow -1$. Напомним, что космологическое время t измеряется в планковских единицах.

Таким образом, согласно (103) определим новую безразмерную временную переменную, τ :

$$\tau = \frac{2\Lambda \langle \xi \rangle}{\langle \bar{p} \rangle_0} F(\varphi, 1/\sqrt{2}), \quad (143)$$

где:

$$\varphi = \arccos \frac{1 - \operatorname{sh} t/2\Lambda}{1 + \operatorname{sh} t/2\Lambda}; \quad (144)$$

$F(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл первого рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}; \quad (k^2 < 1). \quad (145)$$

Таким образом:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2\Lambda} \frac{1}{\operatorname{sh} \varphi} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{1 + \operatorname{sh} \varphi} > 0; \quad \tau \in [0, \tau_\infty), \quad (146)$$

где¹⁰

$$\tau_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = \frac{2\Lambda \langle \xi \rangle}{\langle \bar{p} \rangle_0} F(1, 1/\sqrt{2}). \quad (147)$$

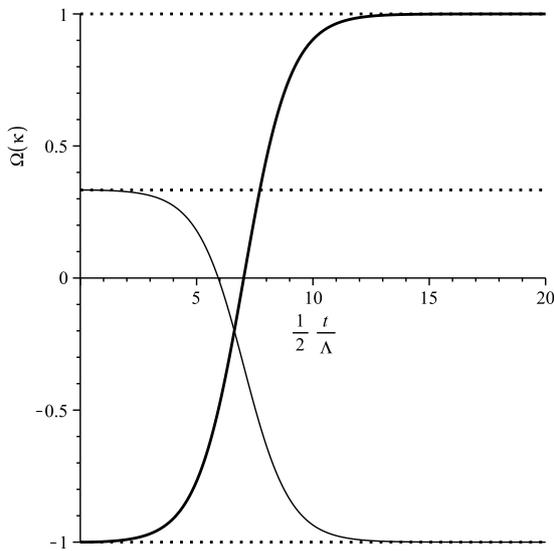


Рис.4. Эволюция эффективного коэффициента баротропы $\kappa(t)$ (тонкая линия) и инвариантного ускорения $\Omega(t)$ (жирная линия) относительно точного решения (141) при $\Lambda = 1$. Пунктирными линиями показаны асимптоты -1 ; $1/3$; 1 .

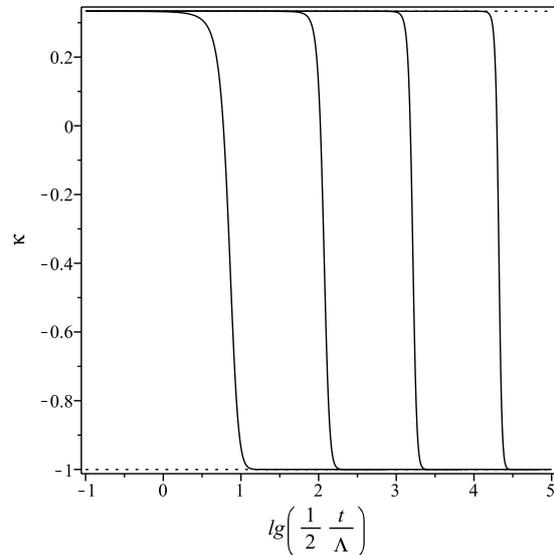


Рис.5. Эволюция эффективного коэффициента баротропы $\kappa(t)$ относительно точного решения (141) в зависимости от космологической постоянной Λ слева – направо: $\Lambda = 1$, $\Lambda = 10$, $\Lambda = 100$, $\Lambda = 1000$.

Численная модель восстановления LTE в ускоренной Вселенной

Модель первоначального неравновесного распределения

Таким образом, как мы отмечали выше, математическая модель процесса восстановления LTE в космологической плазме сводится к двум параметрическим уравнениям (117) и (128), определяющим *при заданной функции* $\Phi(Z)$ связи вида:

$$\tau = \tau(Z) \quad (117); \quad (148)$$

$$y = y(Z) \quad (128), \quad (149)$$

¹⁰ $F(1, 1/\sqrt{2}) \approx 1.083216773$.

разрешая которые, мы можем определить функцию $y(\tau)$ и, тем самым, формально полностью решить поставленную задачу. Таким образом, окончательное решение задачи находится в квадратурах заданием начального распределения неравновесных частиц $\Delta f_0(p)$ и последующим определением интегральной функции $\Phi(Z)$ (112). Заметим, что формально параметрические уравнения (117) и (128), как и определение функции $\Phi(Z)$, не отличаются от аналогичных, полученных ранее автором в работах [4], [24]. Принципиально новый момент, вносимый ускорением Вселенной, заключается в связи $\tau(t)$ (103).

Для построения численной модели рассмотрим первоначальное распределение типа белого шума:

$$\Delta f_0(\rho) = \frac{A}{\rho^3} \xi(\rho_0 - \rho), \quad (150)$$

где A - нормировочная постоянная, $\rho_0 > 1$ - безразмерный параметр, $\xi(x)$ - ступенчатая функция Heaviside, так что конформная плотность энергии относительно этого распределения равна:

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = \frac{\langle \tilde{p} \rangle_0^4 A \rho_0}{32\pi^5}. \quad (151)$$

Вычисляя функцию $\Phi(Z)$ относительно распределения (150), найдем:

$$\Phi(Z) = e^{-x} - x \text{Ei}(x); \quad x \equiv \frac{Z}{\rho_0}, \quad (152)$$

где $\text{Ei}(x)$ есть интегральная показательная функция

$$\text{Ei}(x) = \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-tx}}{t} dt.$$

Результаты численного интегрирования

Задача, таким образом, сводится к численному интегрированию системы уравнений (103), (117), (128). Ниже представлены некоторые результаты интегрирования. В дальнейшем в соответствии с (137) и (141) удобно ввести *временную космологическую постоянную*

$$t_c \equiv 4\Lambda. \quad (153)$$

На Fig. 154 представлены результаты численного интегрирования для определения параметра τ_∞ . В частности, интегрирование соотношения (103) подтвердило нечувствительность величины τ_∞ от ряда параметров и, фактически, подтвердило оценочную формулу (147), которая не учитывала деталей логарифмической зависимости параметра $\langle \xi \rangle$ от времени. На Fig. 7 показаны результаты численного интегрирования этой величины. Эти результаты хорошо описываются формулой

$$\tau_\infty \approx \frac{2.57 t_c}{\langle \tilde{p} \rangle_0}. \quad (154)$$

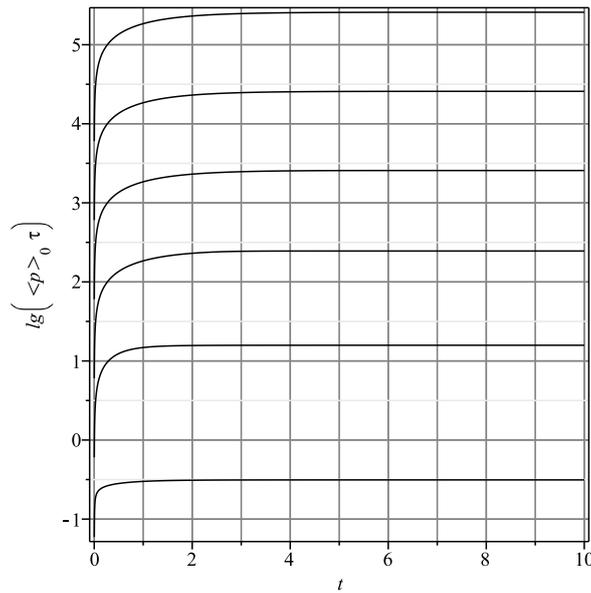


Рис. 6: Зависимость десятичного логарифма безразмерной временной переменной $\langle \tilde{p} \rangle_0 \tau$ от космологического времени t . Снизу – вверх: $t_c = 1; 10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5$. Всюду принято $N_0 = 100; N = 10$.

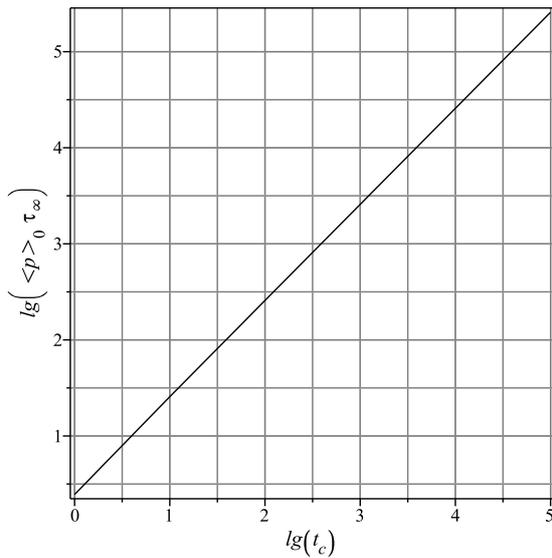


Рис.7. Зависимость безразмерного временного параметра $\tau_\infty(\tilde{p})_0$ от временной космологической постоянной; всюду $N_0 = 100; N = 10, p_0 = 10; \sigma_0$ – снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.

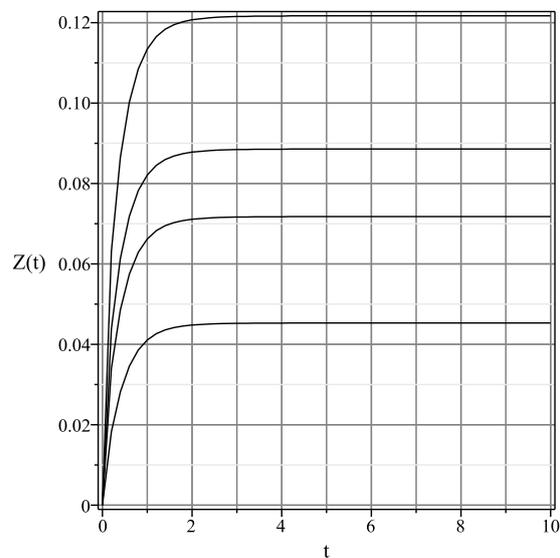


Рис.8. Зависимость безразмерной функции $Z(t)$ от времени; всюду $t_c = 1; N_0 = 100; N = 10, p_0 = 10; \sigma_0$ – снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.

На Fig. 8 показана зависимость переменной $Z(t)$ при различных значениях временной космологической постоянной.

Как следует из результатов, представленных на этом рисунке, значение функции $Z(t)$ также имеет предельное значение при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = Z_\infty < \infty. \tag{155}$$

Согласно (106) это означает, что при $t \rightarrow \infty$ “замораживается” распределение сверхтепловых частиц:

$$\Delta f_a(\tau_\infty, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z_\infty}{\rho}}. \quad (156)$$

Таким образом, в современной Вселенной может остаться “хвост” неравновесных частиц сверхвысоких энергий:

$$E > E_\infty = Z_\infty \langle \tilde{p} \rangle_0. \quad (157)$$

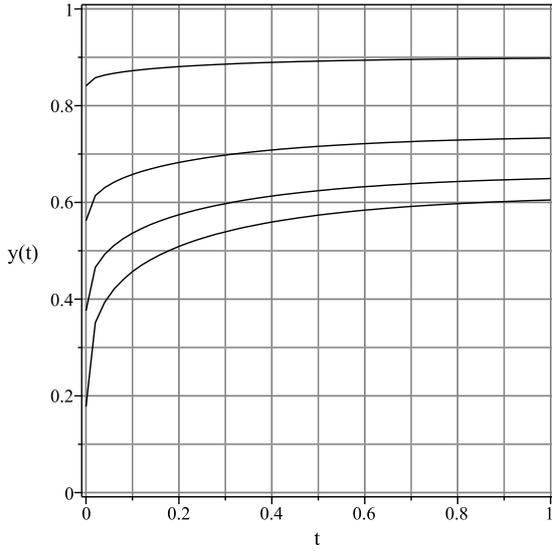


Рис.9. Зависимость относительной температуры $y(t)$ от времени; всюду $t_c = 1$; $N_0 = 100$; $N = 10$, $p_0 = 10$; σ_0 — снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.

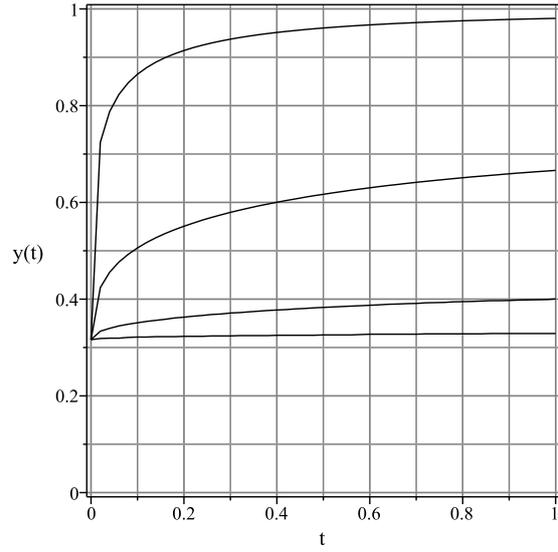


Рис.10. Зависимость относительной температуры $y(t)$ от времени; всюду $\sigma_0 = 0.01$; $N_0 = 100$; $N = 10$, $p_0 = 1000$; Λ — снизу вверх: 1; 0.1; 0.01; 0.001.

На Fig. 9–10 представлены результаты численного интегрирования для относительной температуры $y(t) = T(t)/T_0(t) \leq 1$. Согласно смыслу этой величины безразмерный параметр:

$$e_\infty = 1 - \sigma_\infty = 1 - y_\infty^4 > 0 \quad (158)$$

есть относительная доля энергии космологической плазмы, заключенная в этом неравновесном “хвосте” распределения.

Заключение

Таким образом, построена замкнутая теоретическая модель восстановления LTE в ультрарелятивистской плазме в предположении восстановления скейлинга взаимодействий частиц в области выше унитарного предела для произвольного ускорения Вселенной. Найдено решение в квадратурах уравнения энергобаланса, решение которого полностью определяет процесс восстановления LTE. Показано, что в случае ускорения Вселенной LTE в космологической плазме не восстанавливается строго. Построены численные модели, описывающие процесс восстановления LTE в ускоренной Вселенной. Следует заметить, что решение задачи о восстановлении LTE в космологической плазме позволяет с помощью решения кинетического уравнения (106) исследовать спектр высокоэнергетических частиц, имеющих космологическое происхождение, и на этой основе делать выводы о специфике взаимодействий элементарных частиц при сверхвысоких энергиях в реакциях, которые происходили в ранней Вселенной.

В заключение Автор выражает благодарность профессору Виталию Мельникову, инициировавшего интерес Автора к данной проблеме. Также Автор благодарен академику Алексею Старобинскому за полезное обсуждение проблем космологических моделей с ускорением.

Литература

- [1] Steven Weinberg. *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [2] H.M. Pilkuhn. *Relativistic Particle Physics*, Springer-Verlag, New York Inc, 1979.
- [3] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **25** No 4, 92 (1982)
- [4] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **29**, No 2, 19 (1986).
- [5] L.B. Okun, *Leptons and quarks*, North-Holland, Amsterdamm · Oxford · New-York · Tokyo, 1981.
- [6] L.D. Landau, *J.Sov.Phys. (JETP)*, **10**, 718 (1940).
- [7] M. Froissart, *Phys. Rev.*, 123, 1053 (1961)
- [8] A. Martin, *Phys. Rev.*, 129, 1432 (1963)
- [9] A. Martin, *Nuovo. Cim.*, 142, 930 (1966)
- [10] Y.S. Jin, A. Martin, *Phys. Rev.* **B** 135, 1369 (1964)
- [11] M. Sugawara, *Phys. Rev. Lett.*, 14, 336 (1965)
- [12] R.I. Eden, *High Energy Collisions of Elementary Particles*, Cambridge At the University Press, 1967
- [13] J.D. Bjorken, E.A. Paschos, *Phys. Rev.*, 185, 1975 (1969)
- [14] R.P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.*, 23, 1415 (1969)
- [15] N. Cabibo, G. Parivisi, M. Tesla, *Lett. Nuovo. Cimento*, 35, 4. (1970)
- [16] L.P. Gritchuk, J. Sov. Phys. (JETP), 67, 825 (1974).
- [17] Yu.G. Ignat'ev, in: "Actual theoretical and experimental problems of relativity theory and gravitation", *Report of Soviet conference*, Moscow, 1984 (in Russian).
- [18] Yu.G. Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 1 (49), pp. 1-14.
- [19] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **23** No 8, 42 (1980).
- [20] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **23** No 9, 27 (1980).
- [21] Yu.G. Ignatyev, in: *Problems of Gravitation Theory and Elementary Particles*, Moskow, Atomizdat, No 11, 113 (1980).
- [22] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **26**, No 8, 19 (1983).
- [23] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **26** No 12 9 (1983)
- [24] Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 2 (50), pp. 101-113
- [25] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford · New York · Toronto · Sydney · Paris · Frankfurt, 1980.
- [26] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press. Oxford · New York · Toronto · Sydney · Paris · Frankfurt, 1971
- [27] Yurii Ignatyev, arXiv:1306.3633v1 [gr-qc] 13 June 2013; Yu.G. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, to be publish in vol. 19, No 4, 2013.

МЕТОДЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ КИРАЛЬНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

А.С. Кубасов¹, С.В. Червон²

¹Ульяновск, Ульяновский государственный университет, ²Ульяновск, Ульяновский государственный университет

¹E-mail: , ²E-mail:

Двухкомпонентная киральная космологическая модель

Среди физических полей, рассматриваемых в рамках ОТО, скалярные поля занимают особое место [11]. Во-первых, они отвечают за сильное взаимодействие (короткодействующее поле), таким образом имея наглядную физическую интерпретацию. Во-вторых, могут рассматриваться как эффективное поле, описывающее результат действия других физических полей (дальнодействующее скалярное поле). Так большое распространение получило самодействующее скалярное поле, как источник гравитации, приводящее к экспоненциально быстрому расширению Вселенной (инфляционная стадия). Модель скалярного поля позволяет обрабатывать методы решения самосогласованной системы уравнений гравитационного и физических полей.

Исследование моделей со скалярными полями в ОТО имеет более полувековую историю. В 1947 году А. Папопетру [14] исследовал случай взаимодействия скалярного, гравитационного и электромагнитного полей. В том же году И. З. Фишер [15] исследовал самосогласованную систему уравнений Эйнштейна – Клейна – Гордона (ЭКГ) в отсутствие электромагнитного поля. В пятидесятые годы исследовалась система ЭКГ в случае сферически-симметричной и аксиально-симметричной метрики пространства-времени [16], [17], [18], [19], [20], [21]. В работах 60-х годов в центре внимания поиск несингулярных решений для сферически-симметричного и аксиально-симметричного гравитационных полей, взаимодействующих с безмассовым скалярным полем космологического характера. Ключевые работы этого периода Яниса – Ньюмана – Виникура [22], Р. Пеннея [23]. Следует отметить несколько направлений исследований в этот период: работы по геометризации скалярного поля [24], [25], [26], [27], более активное исследование систем уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона-Максвелла (ЭКГМ) [24], [28], [29], [27], исследование комплексного скалярного поля в рамках ОТО [31], [32], [33]. В работах 70-ых – 80-ых годов много внимания уделяется анализу системы уравнений ЭКГМ и поискам устойчивых решений для этой системы. В эти же годы впервые появляется интерес к плоско-симметричным и конформно-плоским решениям. Таким образом скалярные поля в космологии широко представлены.

Отправной точкой для нелинейной сигма модели является работа Ю. Швингера [34] 1957 года "Теория фундаментальных взаимодействий" в которой впервые введены понятия σ -частицы и σ -поля. Эта работа посвящена развитию теории фундаментальных взаимодействий, и содержит попытку описать известный в то время набор элементарных частиц в рамках теории квантованных полей. Работа Т. Скирме [35] "Нелинейная теория сильных взаимодействий" в своей основе содержит идею введения дополнительного мезонного σ -поля. Статья Гелл-Манна и Леви [36] "Аксиальный векторный ток в бета распаде" часто цитируется как работа, в которой впервые введен термин линейная и нелинейная σ -модель.

Действие для самогравитирующей нелинейной сигма модели (НСМ) с потенциалом взаимодействия $V(\varphi)$ имеет вид [8]:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi_{,\mu}^A \varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} - V(\varphi) \right), \quad (1)$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ – метрика пространства-времени, h_{AB} – метрика пространства целей (кирального пространства), $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^N)$ – киральные поля, $\varphi_{,\mu}^A = \partial_\mu \varphi^A = \frac{\partial \varphi^A}{\partial x^\mu}$.

Тензор энергии-импульса для модели (1) записывается в следующей форме

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{A,\mu} \varphi_{,\nu}^A - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \varphi_{,\alpha}^A \varphi_{,\beta}^B g^{\alpha\beta} h_{AB} - V(\varphi) \right). \quad (2)$$

Уравнения Эйнштейна представим в виде

$$R_{\mu\nu} = \kappa (h_{AB} \varphi_{,\mu}^A \varphi_{,\nu}^B - g_{\mu\nu} V(\varphi)) \quad (3)$$

Варьируя действие (1) по φ^C , получаем уравнение киральных полей

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \varphi_{,\mu}^C) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \varphi_{,\mu}^C \varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} + V_{,A} = 0, \quad (4)$$

где $V_{,A} = \frac{\partial V}{\partial \varphi^A}$

Равнаценная форма записи уравнения (4), где явно не расписаны символы кристофеля

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} h_{AB} \varphi_\nu^B) - (h_{CD} \Gamma_{AB}^D \varphi_\mu^B \varphi_\nu^C g^{\mu\nu}) + V_{,A} = 0 \quad (5)$$

Рассматривая действие (1) в рамках космологических пространств, мы приходим к киральной космологической модели [9, 10]. В качестве источника гравитационного поля рассматривается двухкомпонентная нелинейная сигма модель с метрикой пространства целей

$$ds_{ts}^2 = d\varphi^2 + h_{22}(\varphi, \psi) d\psi^2 \quad (6)$$

Тензор энергии-импульса (2) для киральной метрики (6) имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + h_{22} \psi_{,\mu} \psi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \varphi_{,\rho} \varphi^{,\rho} + \frac{1}{2} h_{22} \psi_{,\rho} \psi^{,\rho} - V(\varphi, \psi) \right]. \quad (7)$$

Метрику пространства-времени однородной и изотропной Вселенной запишем в представлении Фридмана – Робертсона – Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (8)$$

Решения 2-компонентной НСМ с метрикой пространства целей (6) для случая предельно жёсткого состояния материи $V(\varphi, \psi) = 0$ исследованы в [8, 11] (в этих работах компонента метрики $h_{22}(\varphi, \psi)$ имеет обозначение $2P(\varphi)$). В [4] введена в рассмотрение массивная нелинейная сигма модель — киральная космологическая модель. В данной главе предложен новый подход, который позволяет находить решения не только для пространственно-плоской Вселенной, но и в случае открытой и замкнутой модели Фридмана.

Метод построения решений

В метрике (8) полевые уравнения двухкомпонентной киральной космологической модели (4) и уравнения Эйнштейна (3) принимают вид:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (9)$$

$$3H(h_{22}\dot{\psi}) + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0, \quad (10)$$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} h_{22} \dot{\psi}^2 + V \right] - \frac{\epsilon}{a^2}, \quad (11)$$

$$\dot{H} = -\kappa \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} h_{22} \dot{\psi}^2 \right] + \frac{\epsilon}{a^2}. \quad (12)$$

Записанная система уравнений представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с четырьмя неизвестными: киральными полями ϕ и ψ , а также с потенциалом V и компонентой метрики кирального пространства h_{22} . Следуя методу точной настройки потенциала [11], считаем, что закон эволюции Вселенной $a = a(t)$ задан. Метрику кирального пространства мы не будем фиксировать однозначно, как это традиционно принято, оставляя некоторую свободу её адаптации к решаемой задаче. Простыми алгебраическими преобразованиями уравнений Эйнштейна (11)–(12) находим их следствия в виде удобном для дальнейшего решения

$$K(t) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) + \frac{1}{2} h_{22}(t) \dot{\psi}^2(t) = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\epsilon}{a^2} - \dot{H} \right], \quad (13)$$

$$V(t) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} + \frac{2}{3} \frac{\epsilon}{a^2} \right). \quad (14)$$

Рассмотрим три случая:

(II) $\epsilon = 0$ — случай пространственно плоской Вселенной;

(O) $\epsilon = -1$ — открытой Вселенной;

(3) $\epsilon = 1$ — замкнутой Вселенной.

Потребуем, чтобы отображения $\psi(t)$, $\phi(t)$ и $t(\psi)$, $t(\phi)$ были однозначными и простыми.

Для (II) будем искать решение системы (9)–(10), (13)–(14) в следующих двух формах:

$$\text{П1)} \quad h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi). \quad (15)$$

$$\text{П2)} \quad h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi). \quad (16)$$

$$\text{П3)} \quad h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + e^{f(\phi)} V_2(\psi). \quad (17)$$

Для (О) и (З) будем рассматривать три случая:

$$\text{О31)} \quad h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + e^{f(\phi)} V_2(\psi). \quad (18)$$

$$\text{О32)} \quad h_{22}(\phi, \psi) = h_{22}^{(a)}(\phi) + h_{22}^{(b)}(\psi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\phi) + V_3(\psi). \quad (19)$$

$$\text{О33)} \quad h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi). \quad (20)$$

Прежде чем преступить к исследованию методов решения, рассмотрим небольшое отступление.

3.0.2 Специфика вычислений

Допустим у нас есть следующее выражение

$$V(\phi(t), \psi(t)) = V_1(\phi(t)) + V_2(\psi(t)) = N(t) + M(t)$$

причем $V_1(\phi(t)) = N(t)$, $V_2(\psi(t)) = M(t)$. Возьмем производную по времени от этого выражения, тогда:

$$\frac{dV(\phi(t), \psi(t))}{dt} = \frac{\partial V_1(\phi(t))}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial V_2(\psi(t))}{\partial \psi} \dot{\psi} = \frac{dN(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt}$$

разумеется в этом случае $\frac{\partial V_1(\phi(t))}{\partial \phi} \dot{\phi} = \frac{dN(t)}{dt}$, $\frac{\partial V_2(\psi(t))}{\partial \psi} \dot{\psi} = \frac{dM(t)}{dt}$. Очевидно следующее:

$$\frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \phi} = \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \psi} = \frac{\partial V_2(\psi)}{\partial \psi}$$

Рассмотрим некую произвольную систему из двух уравнений с функцией $V(\phi, \psi)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I(t, \phi, \psi) + \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0, \Rightarrow \mathcal{F}_I(t, \phi, \psi) + \frac{\partial V_1}{\partial \phi} = 0 \\ \mathcal{F}_{II}(t, \phi, \psi) + \frac{\partial V}{\partial \psi} &= 0, \Rightarrow \mathcal{F}_{II}(t, \phi, \psi) + \frac{\partial V_2}{\partial \psi} = 0 \end{aligned}$$

Проеделав дальнейшую подстановку мы можем получить:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I(t) + \frac{dN(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} &= 0 \\ \mathcal{F}_{II}(t) + \frac{dM(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} &= 0 \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно показать, что для

$$V(\phi(t), \psi(t)) = V_1(\phi(t)) + V_2(\phi(t)) + V_3(\psi(t)) = N(t) + M(t) + X(t)$$

и

$$V(\phi(t), \psi(t)) = V_1(\phi(t)) + A(\phi(t))B(\psi(t)) = N(t) + X(t)M(t)$$

можно записать соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I(t) + \frac{dN(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} + \frac{dM(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} &= 0 \\ \mathcal{F}_{II}(t) + \frac{dX(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{F}_I(t) + \frac{dN(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} + M(t) \frac{dX(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} = 0$$

$$\mathcal{F}_{II}(t) + X(t) \frac{dM(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} = 0$$

3.0.3 Открытая или замкнутая Вселенная ($\epsilon = \pm 1$)

Метод $[\pm 1a]$

Потенциал (14) с помощью разбиения (18) можно представить в следующей форме:

$$V_1(\phi(t)) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right) \quad (21)$$

$$e^{f(\phi(t))} V_2(\psi(t)) = \frac{2}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} \quad (22)$$

Аналогично предполагаем связи на темп эволюции полей и метрику кирального пространства:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{-2}{\kappa} \dot{H} \quad (23)$$

$$h_{22} \dot{\psi}^2 = \frac{2}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} \quad (24)$$

Тогда уравнение (9) расщепляется на две части

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (25)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + V_2(\psi) e^{f(\phi)} \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (26)$$

Из уравнения (23) киральное поле ϕ определяется в квадратурах

$$\phi(t) = \pm \int \sqrt{\frac{-2}{\kappa} \dot{H}} dt \quad (27)$$

Из уравнения (21), используя переход $t \rightarrow \phi$, легко найти зависимость $V_1(\phi)$.

Покажем, что при подстановки (21) и (23) в уравнение (25) получается тождество ($0 \equiv 0$). В уравнении (26), используя результаты предыдущего раздела, перейдем только ко временной зависимости, тогда

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{3}{\kappa} \frac{d}{dt} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right) \frac{1}{\dot{\phi}} = 0 \quad (28)$$

Домножим это уравнение на $\dot{\phi}$ и осуществим подстановку значений из (23), учитывая $\ddot{\phi}\dot{\phi} = -\frac{1}{\kappa} \ddot{H}$. После дифференцирования получим

$$-\ddot{H} - 6H\dot{H} + \ddot{H} + 6H\dot{H} \equiv 0 \quad (29)$$

Остановимся подробнее на уравнении (26). Выразим из (24) $\dot{\psi}^2$ и подставим вместе с (22) в уравнение (26), при этом не будем переходить от производных по полю к производным по времени. Таким образом получается следующее выражение

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \frac{2\epsilon}{\kappa a^2} \frac{1}{h_{22}} + \frac{2\epsilon}{\kappa a^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0. \quad (30)$$

Сократив одинаковые множители и сделав некоторые преобразования, получим:

$$\frac{\partial \ln(\sqrt{h_{22}(\phi)})}{\partial \phi} = \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} \quad (31)$$

Таким образом $\sqrt{h_{22}(\phi)} = e^{f(\phi)}$

Рассмотрим уравнение (10) в разбиении (18)

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) + e^f \frac{\partial V_2}{\partial \psi} = 0 \quad (32)$$

Перейдем только ко временной зависимости, воспользовавшись результатами раздела "Специфика вычислений" где роль $X(t)$ и $M(t)$ будут выполнять e^f и V_2 , тогда

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} + e^f \frac{dV_2}{dt} = 0. \quad (33)$$

Осуществим промежуточные преобразования $\partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} = \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi}$, $\partial_t(h_{22}\dot{\psi}^2) = \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + 2h_{22}\dot{\psi}\ddot{\psi} = -\frac{4}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} H$, $\partial_t(e^f V_2) = \partial_t(\sqrt{h_{22}})V_2 + \sqrt{h_{22}}\dot{V}_2 = -\frac{4}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} H$. Таким образом учитывая, что $\partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} = -h_{22}\dot{\psi}\ddot{\psi} - \frac{4}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} H$, $\sqrt{h_{22}}\dot{V}_2 = -\frac{\partial_t(\sqrt{h_{22}})}{\sqrt{h_{22}}} \frac{2\epsilon}{\kappa a^2} - \frac{4}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} H$ и $\frac{\partial_t(\sqrt{h_{22}})}{\sqrt{h_{22}}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}}$, уравнение (33) может быть представлено следующим образом

$$2\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = 0. \quad (34)$$

Сделаем следующее предположение

$$\sqrt{h_{22}} = \frac{1}{a}, \quad V_2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a} \quad (35)$$

Осуществив подстановку в уравнение (34), мы получим простое соотношение:

$$2\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} = 0$$

Откуда с учетом константы получаем значение поля ψ

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} t + \psi_0 \quad (36)$$

Из (35), зная масштабный фактор и воспользовавшись переходом $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$ можно найти оставшиеся неизвестные функции $h_{22}(\phi)$ и $V_2(\psi)$.

Таким образом метод $[\pm 1a]$ с разбиением потенциала V (18) и предположением (35), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Метод $[\pm 1b]$

Метод $[\pm 1b]$ практически повторяет процедуру отыскания решения метода $[\pm 1a]$, но отличается тем, что в формуле (35) делается иное предположение, а именно

$$\sqrt{h_{22}} = \frac{1}{a^{m+2}}, \quad V_2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa} a^m \quad (37)$$

Тогда уравнение (34) сведется к простой зависимости

$$(1+m)\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}$$

Откуда получаем зависимость $\psi(t)$

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \int a^{1+m} dt \quad (38)$$

Вид зависимостей $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяется как и в методе $[\pm 1a]$ (для заданной эволюции $a(t)$), функции $h_{22}(\phi)$ и $V_2(\psi)$ определяются из формулы (37) при переходе $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$. В частности для модели Новорожденной Вселенной с масштабным фактором $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$ метод $[\pm 1b]$ не позволяет вычислить интеграл (38) в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 от ψ напрямую, а только посредством зависимости этой величины от t .

Таким образом метод $[\pm 1b]$ с разбиением потенциала V (18) и предположением (37), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Метод $[\pm 1c]$

Метод $[\pm 1c]$ практически повторяет процедуру отыскания решения метода $[\pm 1a]$ но отличается тем, что в формуле (35) делается иное предположение, а именно

$$\sqrt{h_{22}} = a^m, \quad V_2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa} a^{-(m+2)} \quad (39)$$

Тогда уравнение (34) сведется к простой зависимости

$$-(1+m)\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}$$

Откуда получаем зависимость $\psi(t)$

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \int a^{-(1+m)} dt \tag{40}$$

Вид зависимостей $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяется как и в методе $[\pm 1a]$ (для заданной эволюции $a(t)$), функции $h_{22}(\phi)$ и $V_2(\psi)$ определяются из формулы (39) при переходе $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$. В частности для модели Новорожденной Вселенной с масштабным фактором $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$ метод $[\pm 1c]$ не позволяет вычислить интеграл (40) в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 от ψ напрямую, а только посредством зависимости этой величины от t .

Таким образом метод $[\pm 1c]$ с разбиением потенциала V (18) и предположением (39), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Метод $[\pm 1d]$

В методе $[\pm 1d]$ существуют более общие связи между h_{22} , ψ и V_2 чем в методах $[\pm 1a]$ - $[\pm 1c]$. Будем полагать следующее:

$$h_{22}(\phi(t)) = \frac{1}{a^2 * F^2}, \quad \dot{\psi}^2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} F^2, \quad V_2(\psi(t)) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \frac{1}{a} F \tag{41}$$

где F – произвольная функция времени.

Осуществим данные подстановки в (33). Произведя математические преобразования, аналогичные тем, которые были проделаны в методе $[\pm 1a]$ для получения формулы (34) приходим к практически аналогичному выражению:

$$2\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{F}}{F} + \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = 0 \tag{42}$$

здесь $\frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}} = \frac{\dot{F}}{F}$.

Как легко показать непосредственным вычислением из сделанных нами предположений следует

$$\frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = -2\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{F}}{F}\right) \tag{43}$$

При подстановке этого результата в предыдущее выражение, мы приходим к тождеству $0 \equiv 0$. Таким образом в методе $[\pm 1d]$ можно задавать произвольную функцию ψ благодаря тому, что $F(t)$ – можно выбирать в любой удобной форме.

$$\psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \int F dt \tag{44}$$

Вид зависимостей $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяется как и в методе $[\pm 1a]$ (для заданной эволюции $a(t)$), функции $h_{22}(\phi)$ и $V_2(\psi)$ определяются из формулы (41) при переходе $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$.

Таким образом метод $[\pm 1d]$ с разбиением потенциала V (18) и предположением (41), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Метод $[\pm 2]$

В методе $[\pm 2]$ для потенциала (14) используется разбиение (19), которое позволяет сделать следующие предположения:

$$V_1(\phi(t)) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right) \tag{45}$$

$$V_2(\phi(t)) + V_3(\psi(t)) = \frac{2}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} \tag{46}$$

Решение для $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ находятся аналогично процедуре метода $[\pm 1a]$, так как для этих величин разбиение (19) соответствует разбиению (18). Таким образом (9) расщепляется на два уравнения. Первое зависит только от $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ и имеет точно такую же структуру, как и в методе $[\pm 1a]$. Второе, которое является специфическим признаком метода $[\pm 2]$, имеет вид:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}^{(a)}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_2}{\partial \phi} = 0 \tag{47}$$

индексы (a) и (b) при h_{22} , означают следующее $h_{22}(\phi, \psi) = h_{22}^{(a)}(\phi) + h_{22}^{(b)}(\psi)$.

Рассмотрим уравнение (10) с учетом разбиения (19)

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}^{(b)}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_3}{\partial \psi} = 0 \quad (48)$$

Перейдем только ко временной зависимости, учитывая результаты раздела "Специфика вычислений" и сделаем подстановки

$$h_{22}\dot{\psi}^2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa}a^{-2} \quad \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -h_{22}\dot{\psi}\ddot{\psi} - 4\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3} \quad h_{22} = 2\frac{\epsilon}{\kappa}a^{-2} \frac{1}{\dot{\psi}^2}$$

тогда уравнение запишется в виде:

$$2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3} - 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2} \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} - \frac{1}{2} \frac{dh_{22}^{(b)}}{dt} \dot{\psi}^2 + \frac{dV_3}{dt} = 0 \quad (49)$$

здесь роль функции $X(t)$ выполняет V_3 . Сделаем предположение

$$\dot{\psi} = a\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \quad (50)$$

Перейдем в уравнении (47) ко временной зависимости, учитывая, что роль функции $M(t)$ выполняет V_2 , и запишем его рядом с ненулевой частью уравнения (49)

$$-\frac{1}{2} \frac{dh_{22}^{(a)}}{dt} \dot{\psi}^2 + \frac{dV_2}{dt} = 0 \quad (51)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dh_{22}^{(b)}}{dt} \dot{\psi}^2 + \frac{dV_3}{dt} = 0 \quad (52)$$

Для разрешения данной системы сделаем следующее предположение

$$V_2(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{F}{a^2}, \quad V_3(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1-F}{a^2} \quad (53)$$

$$h_{22}^{(a)}(t)\dot{\psi}^2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{C}{a^2}, \quad h_{22}^{(b)}(t)\dot{\psi}^2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1-C}{a^2} \quad (54)$$

здесь F и C некоторые постоянные.

После подстановки этих значений в (51) и (52), а так же значения $\dot{\psi}$ мы приходим к равенству $F = C$. В результате мы можем записать

$$V_2(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{F}{a^2}, \quad V_3(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1-F}{a^2}, \quad h_{22}^{(a)}(t) = \frac{F}{a^4}, \quad h_{22}^{(b)}(t) = \frac{1-F}{a^4}, \quad \dot{\psi} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}a \quad (55)$$

Таким образом получая зависимость $\psi(t)$ из формулы

$$\psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \int a dt \quad (56)$$

возможно найти зависимость $h_{22}^{(b)}(\psi)$, $V_3(\psi)$, осуществляя переход $t \rightarrow \psi$. Вид зависимостей $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяется как и в методе $[\pm 1a]$ (для заданной эволюции $a(t)$). После определения $\phi(t)$ из (55) находим $h_{22}^{(a)}(\phi)$ и $V_2(\phi)$ при переходе $t \rightarrow \phi$.

Таким образом метод $[\pm 2]$ с разбиением потенциала V (19) и специфическим поведением функций (55), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Метод $[\pm 3a]$

Для метода $[\pm 3a]$ характерно разбиение (20), где V_1 имеет вид

$$V_1(\phi(t)) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right). \quad (57)$$

В этом случае уравнение (9) примет вид

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V_1}{\partial \phi} = 0. \quad (58)$$

Таким образом значения ϕ и $V_1(\phi)$ определяются аналогично процедуре метода $[\pm 1a]$. Для нахождения остальных неизвестных, а именно ψ , $h_{22}(\psi)$ и $V_2(\psi)$ остается уравнение (10). При использовании разбиения (20) выявляются следующие особенности

$$V_2(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}. \quad (59)$$

Уравнение (10) для разбиения (20) сохраняет свою структуру

$$3H(h_{22}\dot{\psi}) + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_2}{\partial \psi} = 0. \quad (60)$$

Перейдем в (60) только ко временной зависимости

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - \frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + \dot{V}_2 = 0. \quad (61)$$

Запишем некоторые вспомогательные формулы $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -2h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - 4\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $\dot{V}_2 = -4\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $h_{22}\dot{\psi} = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$. Осуществив подстановку этих выражений в (61) и произведя некоторые манипуляции, можно прийти к следующему уравнению

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{1}{2} \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = 0. \quad (62)$$

Делаем следующее предположение, что $\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} t + \psi_0$, тогда из соотношения $h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$ получаем $h_{22} = \frac{1}{a^2}$. Теперь если подставить все в уравнение (62) получим тождественный ноль. В результате, зная зависимости $h_{22}(t)$ и $V_2(t)$, при известном поведении $a(t)$, можно найти $h_{22}(\psi)$ и $V_2(\psi)$, воспользовавшись переходом $t \rightarrow \psi$.

Таким образом, метод $[\pm 3a]$ с разбиением потенциала V (20) и характерными зависимостями $\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} t + \psi_0$, $h_{22} = \frac{1}{a^2}$, $V_2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$, $\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{\kappa} \dot{H}$, $V_1 = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right)$, при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

Метод $[\pm 3b]$

Метод $[\pm 3b]$ практически повторяет процедуру отыскания решения метода $[\pm 3a]$, но отличается тем, что делается иное предположение на зависимости $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} a^m dt$ и $h_{22} = \frac{1}{a^{2m+2}}$. Поведение $V_2(t)$ имеет тот же характер, что и в методе $[\pm 3a]$. Уравнение (62) справедливо и для метода $[\pm 3b]$. Если подставить в него значения для ψ и h_{22} , то получается выражение

$$\frac{\dot{a}}{a} + m \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} (2m+2) \frac{\dot{a}}{a} \equiv 0. \quad (63)$$

Таким образом, величины $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяются как и в методе $[\pm 1a]$, а $V_2(\psi)$ и $h_{22}(\psi)$ при переходе $t \rightarrow \psi$.

Таким образом, метод $[\pm 3b]$ с разбиением потенциала V (20) и характерными зависимостями $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} a^m dt$, $h_{22} = \frac{1}{a^{2m+2}}$, $V_2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$, $\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{\kappa} \dot{H}$, $V_1 = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right)$, при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

Для модели Новорожденной Вселенной с масштабным фактором $a(t) = A (\beta + e^{\alpha t})^m$ метод $[\pm 3b]$ не позволяет вычислить интеграл $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} a^m dt$ в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 и h_{22} от ψ напрямую, а только посредством зависимости этих величин от t .

Метод $[\pm 3c]$

Метод $[\pm 3c]$ практически повторяет процедуру отыскания решения метода $[\pm 3a]$, но отличается тем, что делается иное предположение на зависимости

$\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \frac{1}{a^m} dt$ и $h_{22} = a^{2m-2}$. Поведение $V_2(t)$ имеет тот же характер, что и в методе $[\pm 3a]$. Уравнение (62) справедливо и для метода $[\pm 3c]$. Если подставить в него значения для ψ и h_{22} , то получается выражение

$$\frac{\dot{a}}{a} - m \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} (2m-2) \frac{\dot{a}}{a} \equiv 0. \quad (64)$$

Таким образом, величины $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяются как и в методе $[\pm 1a]$, а $V_2(\psi)$ и $h_{22}(\psi)$ при переходе $t \rightarrow \psi$.

Таким образом, метод $[\pm 3c]$ с разбиением потенциала V (20) и характерными зависимостями $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \frac{1}{a^m} dt$, $h_{22} = a^{2m-2}$, $V_2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$, $\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{\kappa} \dot{H}$, $V_1 = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right)$, при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

Для модели Новорожденной Вселенной с масштабным фактором $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$ метод $[\pm 3c]$ не позволяет вычислить интеграл $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \frac{1}{a^m} dt$ в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 и h_{22} от ψ напрямую, а только посредством зависимости этих величин от t .

Метод $[\pm 3d]$

Метод $[\pm 3d]$ является обобщением для методов $[\pm 3a]$ – $[\pm 3c]$, так же как и метод $[\pm 1d]$ является обобщением для методов $[\pm 1a]$ – $[\pm 1c]$. Отличие $[\pm 3d]$ от $[\pm 3a]$ кроется в предположениях, накладываемых на h_{22} и ψ , а именно $h_{22}(t) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{F^2}$, $\dot{\psi} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} F$, где F – произвольная функция времени. Вид зависимости $V_2(t)$ идентичен зависимости из метода $[\pm 3a]$. Как следует из непосредственной проверки вид уравнения (62), не зависит от разбиения $h_{22}(\psi(t))$ и $\psi(t)$, если только они образуют комбинацию $h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$. Если подставить предположения метода $[\pm 3d]$ для этих параметров, в уравнение (62), получим тождество

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} - \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} \right) \equiv 0. \quad (65)$$

Таким образом следует еще раз подчеркнуть, что для этого метода вид функции $\psi(t)$ может быть выбран любым, так как F – произвольная функция времени. Нахождение неизвестных величин $h_{22}(\psi)$, $V_2(\psi)$ аналогично сценарию предыдущих методов.

Рассмотрим два момента.

Во-первых при получении уравнения (62) из (61) мы воспользовались небольшой хитростью: в формуле (61) не было произведено прямое вычитание $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 - \frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2$. Вместо этого было записано следующее $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -2h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - 4\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $\frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$. Подставляя оба этих выражения в (61), приводя подобные и осуществляя остальные подстановки, мы и приходим к уравнению (62). Но если сначала произвести это вычитание, а после осуществить подстановки $\frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $\dot{V}_2 = -\frac{4\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $3Hh_{22}\dot{\psi}^2 = 6\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, то получается тождество $0 \equiv 0$.

Во-вторых, мы можем показать, что уравнение (62) сводится к зависимости $h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$

$$2\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = 0 \quad (66)$$

Однократно проинтегрировав данное уравнение по времени, можно записать

$$\ln(a^2) + \ln(\dot{\psi}^2) + \ln(h_{22}) + \ln(D) = \ln(Da^2h_{22}\dot{\psi}^2) = 0 \quad (67)$$

Таким образом $Da^2h_{22}\dot{\psi}^2 = 1$, где D – константа интегрирования, которую очень легко определить. Т.к. $h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2}$, то $D = \frac{\kappa}{2\epsilon}$.

Таким образом, метод $[\pm 3d]$, являющийся обобщением методов $[\pm 3a]$ – $[\pm 3c]$, с разбиением потенциала V (20) и характерными зависимостями $\dot{\psi} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} F$, $h_{22}(t) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{F^2}$, $V_2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$, $\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{\kappa} \dot{H}$, $V_1 = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right)$, при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

3.0.4 Пространственно-плоская Вселенная ($\epsilon = 0$)

Метод [01]

Уравнение (13) разобьем на два ($\epsilon = 0$)

$$\dot{\phi}^2 = \frac{-2\lambda}{\kappa} \dot{H} \quad (68)$$

$$h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{-2(1-\lambda)}{\kappa} \dot{H} \quad (69)$$

где $0 < \lambda < 1$.

Потенциал взаимодействия киральных полей $V(\phi(t), \psi(t))$ представим следующим образом

$$V(\phi(t), \psi(t)) = V_1(\phi(t)) + V_2(\psi(t)). \quad (70)$$

Для этого метода характерно $h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi)$. Запишем полевые уравнения для данного случая

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V_1}{\partial \phi} = 0 \quad (71)$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_2}{\partial \psi} = 0 \quad (72)$$

Сделаем в обоих уравнениях переход ко временной зависимости, домножив первое на $\dot{\phi}$, а второе на $\dot{\psi}$, тогда

$$\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 + \frac{dV_1}{dt} = 0 \quad (73)$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} - \frac{1}{2}\frac{dh_{22}}{dt}\dot{\psi}^2 + \frac{dV_2}{dt} = 0 \quad (74)$$

Произведем промежуточные вычисления. Возьмем производную по времени от уравнений (68), (69), в результате получим $\dot{\phi}\ddot{\phi} = -\frac{\lambda}{\kappa}\ddot{H}$, $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -2h_{22}\dot{\psi}\ddot{\psi} - \frac{2(1-\lambda)}{\kappa}\dot{H}$. Осуществим подстановку значений $\dot{\phi}$ и $\dot{\phi}\dot{\phi}$ в уравнение (73), тогда оно примет вид

$$-\frac{\lambda}{\kappa}(\ddot{H} + 6\dot{H}H) + \frac{dV_1}{dt} = 0 \quad (75)$$

Произведем преобразование уравнения (74)

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} + \frac{dV_2}{dt} = 0 \quad (76)$$

Осуществим подстановки в (76) $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2$ и $h_{22}\dot{\psi}^2$, тогда

$$-\frac{1-\lambda}{\kappa}(\ddot{H} + 6\dot{H}H) + \frac{dV_2}{dt} = 0 \quad (77)$$

Таким образом уравнения (75) и (77) имеют одинаковую структуру с точностью до коэффициента при скобке и потенциала. Полный потенциал в зависимости от времени имеет вид ($\epsilon = 0$)

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \frac{1}{\kappa}(\dot{H} + 3H^2) \quad (78)$$

Продифференцировав (78) по времени мы получим

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) = \frac{1}{\kappa}(\ddot{H} + 6\dot{H}H).$$

Таким образом, чтобы уравнения (75) и (77) при подстановке значений потенциалов V_1 и V_2 тождественно равнялись нулю, необходимо, чтобы потенциалы имели следующий вид

$$V_1(t) = \frac{\lambda}{\kappa}(\dot{H} + 3H^2), \quad V_2(t) = \frac{1-\lambda}{\kappa}(\dot{H} + 3H^2). \quad (79)$$

Следовательно мы определили зависимость потенциалов V_1 и V_2 от времени. Перейдем к вопросу о зависимости $\psi(t)$ и $h_{22}(t)$. Как можно видеть из методов $[\pm 1d]$ и $[\pm 3d]$ уравнения поля имеют решения при произвольном задании вида зависимости $\psi(t)$ и $h_{22}(t)$, если только эти величины составляют структуру $h_{22}\dot{\psi}^2$ с первоначально выбранным значением (для методов $[\pm 1d]$ и $[\pm 3d]$ $\frac{2\epsilon}{\kappa a^2}$ ($\epsilon = \pm 1$)). При рассуждениях в методе [01] до этого момента мы не предполагали вида зависимости для $\psi(t)$ и $h_{22}(t)$ и тем не менее получили для полевых уравнений тождества, задавая лишь величину $h_{22}\dot{\psi}^2$. Следовательно мы можем записать общий вид зависимости $\psi(t)$ и $h_{22}(t)$

$$\dot{\psi}(t) = \pm \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}} F(t), \quad h_{22}(t) = -\dot{H} \frac{1}{F(t)^2} \quad (80)$$

где $F(t)$ – произвольная функция времени. Например $F(t) = 1$, тогда

$$\dot{\psi} = \pm \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}, \quad h_{22} = -\dot{H} \quad (81)$$

Таким образом, определив $\phi(t)$ из (68) и $\psi(t)$ из (80), и используя переходы $t \rightarrow \phi$, $t \rightarrow \psi$, найдем и $V_1(\phi)$, $V_2(\psi)$ из (79), $h_{22}(\psi)$ из (80).

Метод [01] с разбиением потенциала V (15) и характерными зависимостями $\dot{\psi}(t) = \pm \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}} F(t)$, $h_{22} = -\dot{H} \frac{1}{F(t)^2}$, $V_2 = \frac{3\lambda}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} \right)$, $\dot{\phi}^2 = -\frac{2\lambda}{\kappa}\dot{H}$, $V_1 = \frac{3(1-\lambda)}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} \right)$, при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

Метод [02]

Для метода [02] характерна зависимость П2 (16), т.е.

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi).$$

Уравнение (13) разобьем следующим образом ($\epsilon = 0, h_{22}(\phi)$)

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2 \dot{a}^2}{\kappa a^2} \quad (82)$$

$$h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{-2 \ddot{a}}{\kappa a} \quad (83)$$

Одновременно сделаем предположение и для разбиения потенциала (14)

$$V_1(\phi(t)) = \frac{2 \dot{a}^2}{\kappa a^2} \quad (84)$$

$$V_2(\psi(t)) = \frac{1 \ddot{a}}{\kappa a} \quad (85)$$

Тогда уравнения (9)-(10) запишутся следующим образом:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}(\phi)}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (86)$$

$$3Hh_{22}(\phi)\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}(\phi)\dot{\psi}) + \frac{\partial V_2(\psi)}{\partial \psi} = 0 \quad (87)$$

Перейдем только ко временной зависимости в этих уравнениях. Таким образом:

$$\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + \dot{V}_1 = 0 \quad (88)$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} + \dot{V}_2 = 0 \quad (89)$$

Произведем промежуточные математические преобразования. Возьмем производные от выражений (82)-(85), тогда $\ddot{\phi}\dot{\phi} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} \right)$, $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + 2h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} = -\frac{2}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right)$, $\dot{V}_1 = \frac{2}{\kappa} \left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} \right)$, $\dot{V}_2 = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right)$. Далее в уравнение (89) распишем производную от произведения, т.е. $\partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} = \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi}$. С учетом всех произведенных выше преобразований запишем уравнения (88)-(89) в следующей форме

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} \right) + \frac{6 \dot{a}^3}{\kappa a^3} + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right) + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} \right) = 0 \quad (90)$$

$$-\frac{6 \dot{a}\dot{a}}{\kappa a^2} - h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right) + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right) = 0 \quad (91)$$

произведем группировку слагаемых

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{5\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} = 0 \quad (92)$$

$$-\frac{1}{\kappa} \left(\frac{5\dot{a}\dot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} = 0 \quad (93)$$

Таким образом, оба уравнения принимают одинаковый вид. Произведем замену h_{22} из (83), и осуществим подстановку, после чего получим

$$5 \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} = 0 \quad (94)$$

Перепишем уравнение следующим образом

$$2 \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} = 5 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} \quad (95)$$

Если проинтегрировать получившееся выражение, можно записать

$$\ln \dot{\psi}^2 = \ln a^5 + \ln \dot{a} + \ln D^2 \quad (96)$$

Окончательно формула имеет вид

$$\dot{\psi}^2 = D^2 a^5 \dot{a} \quad (97)$$

где $D = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$. Следует заметить одно обстоятельство $D^2 a^5 \dot{a} > 0$.

Из формулы (83) тогда можно найти

$$h_{22} = -\frac{1}{a^6} \quad (98)$$

Из уравнения (82) можно получить

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \ln(a) + \phi_0 \quad (99)$$

Таким образом найдя функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$, благодаря переходу $t \rightarrow \phi$, $t \rightarrow \psi$ можно установить зависимости $h_{22}(\phi)$, $V_1(\phi)$, $V_2(\psi)$.

Метод [02] с разбиением потенциала V (14) и характерными зависимостями $\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \ln(a) + \phi_0$, $\psi^2 = \frac{2}{\kappa} a^5 \ddot{a}$, $h_{22} = -\frac{1}{a^6}$, $V_1(\phi(t)) = \frac{2}{\kappa} \frac{\dot{a}^2}{a^2}$, $V_2(\psi(t)) = \frac{1}{\kappa} \frac{\ddot{a}}{a}$, при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\phi)$, $V(\phi, \psi)$.

Для модели Новорожденной Вселенной с масштабным фактором $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$ метод [02] не позволяет вычислить интеграл $\psi(t) = \pm \int \sqrt{\frac{2}{\kappa} a^5 \ddot{a}} dt$ в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 от ψ напрямую, а только посредством зависимости этой величины от t .

Метод [03]

Для метода [03] характерна зависимость ПЗ (17), т.е.

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + e^{f(\phi)} V_2(\psi).$$

В методе [03] такое же разбиение как и в методе [02] за исключением формулы (85)

$$e^{f(\phi(t))} V_2(\psi(t)) = \frac{1}{\kappa} \frac{\ddot{a}}{a} \quad (100)$$

Тогда полевые уравнения (9)–(10) запишутся следующим образом:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}(\phi)}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi} + V_2(\psi) e^{f(\phi)} \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (101)$$

$$3Hh_{22}(\phi)\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}(\phi)\dot{\psi}) + e^{f(\phi)} \frac{\partial V_2(\psi)}{\partial \psi} = 0 \quad (102)$$

Перейдем только ко временной зависимости в обоих уравнениях

$$\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + \dot{V}_1 + V_2 e^f \dot{f} = 0 \quad (103)$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} + e^f \dot{V}_2 = 0 \quad (104)$$

Возьмем производную от выражения (100), тогда $e^f V_2 \dot{f} + e^f \dot{V}_2 = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}}{a^2} \right)$. В предыдущем методе были получены производные от остальных разбиений, т.е. $\partial_t(\dot{\phi}^2)$, $\partial_t(h_{22}\dot{\psi}^2)$, \dot{V}_1 . Эти выражения справедливы и для метода [03]. Осуществим подстановку в (103) и (104) всех известных зависимостей

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} \right) + \frac{6}{\kappa} \frac{\dot{a}^3}{a^3} - \frac{2}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a} \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right) + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{\ddot{a}}{a} \dot{f} = 0 \quad (105)$$

$$-\frac{6}{\kappa} \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{2}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a} \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} - \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right) + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\ddot{a}}{a} \dot{f} = 0 \quad (106)$$

В последней формуле мы воспользовались тем, что $e^f \dot{V}_2 = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}}{a^2} \right) - e^f V_2 \dot{f}$. После приведения подобных и группировки слагаемых приходим к слегка модифицированной формуле (95) из метода [02]

$$2 \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} - \dot{f} = 5 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} \quad (107)$$

Однократно проинтегрировав это выражение, получим следующее соотношение

$$\ln \dot{\psi}^2 - \ln F = \ln a^5 + \ln \dot{a} + \ln D \quad (108)$$

где $\ln F = f$.

Произведя аналогичные манипуляции как и в методе [02] получим следующее соотношение:

$$\dot{\psi}^2 = D^2 a^5 \dot{a} e^f = D^2 a^5 \dot{a} F \quad (109)$$

здесь как и в предыдущем методе $D^2 a^5 \dot{a} F > 0$.

Тогда

$$h_{22} = -\frac{1}{a^6 F} \quad (110)$$

Осталось выразить зависимость $V_2(t)$

$$V_2 = \frac{1}{\kappa} \frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{F} \quad (111)$$

Значение функции $f = \ln F$ нами не было определено, для решения уравнений, таким образом она является произвольной. Зависимость $\varphi(t)$ определяется из метода [02] (99). Определившись с $\phi(t)$ и $\psi(t)$, используя переходы $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$ можно найти все остальные величины $h_{22}(\phi)$, $V_1(\phi)$, $V_2(\psi)$.

Метод [03] с разбиением потенциала V (17) и характерными зависимостями $\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \ln(a) + \phi_0$, $\dot{\psi}^2 = \frac{2}{\kappa} a^5 \ddot{a} F$, $h_{22} = -\frac{1}{a^6 F}$, $V_1(\phi(t)) = \frac{2}{\kappa} \frac{\dot{a}^2}{a^2}$, $V_2(\psi(t)) = \frac{1}{\kappa} \frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{F}$, при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\phi)$, $V(\phi, \psi)$.

Выводы

Киральная двухкомпонентная космологическая модель с диагональной метрикой пространства целей с ненулевым членом $h_{22}(\varphi, \psi)$ – простой пример космологической модели во Вселенной ФРУ с двумя скалярными полями с заданным законом взаимодействия между ними. В статье рассматривались методы решения подобной системы. Было установлено два случая: пространственно-плоская Вселенная ($\epsilon = 0$) и открытая/замкнутая Вселенная ($\epsilon = \pm 1$). Для каждого из этих случаев были получены свои методы решения системы уравнений с характерными разбиениями. Данные методы могут быть применимы при следующих условиях:

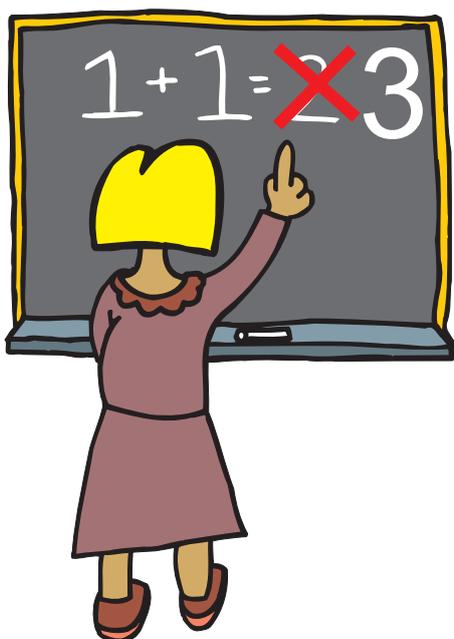
1. если изначально задается вид зависимости $a(t)$;
2. если возможна запись в явном виде прямой зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и обратной $t(\varphi)$, $t(\psi)$ (в случае, когда последнее записать не удастся, остальные величины V , h_{22} в явном виде будут зависеть только от времени).

Литература

- [1] А.С. Кубасов, С.В. Червон
- [2] А.Д. Линде, Физика элементарных частиц и инфляционная космология. Москва, "Наука" 1990.
- [3] A.R. Liddle and D.H. Lyth, Phys. Rep. 231, **1**, 1993.
- [4] S.V. Chervon *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Fiz.* **5** 114, 1995.
- [5] S. Tsujikawa, Dark Energy: investigations and modelling, ArXiv:1004.1493, 2010.
- [6] G.F.R. Ellis and R. Maartens 2004 *Class. Quant Grav.* **21** 223, 2004.
- [7] A. Beesham, S.V. Chervon, S.D. Maharaj, **26** 075017, 2009.
- [8] S.V. Chervon,
- [9] S.V. Chervon, 2002.
- [10] S.V. Chervon, *Exact solutions in standard and chiral inflationary models*//Proceedings of 9th Marcell Grossman Conference, Roma, 2000. World Scientific, p.1909, Pt.C. 2001.
- [11] С.В. Червон, Киральные нелинейные сигма модели/ С.В. Червон// Нелинейные поля в теории гравитации и космологии: монография //Ульяновск, 1997г.-191 С., с. 53-70.
- [12] А.С. Кубасов, Взаимодействие полей темного сектора в модели степенной инфляции/А.С. Кубасов, С.В. Червон//Труды 2-ой международной конференции GRACOS-2009, ТГГПУ, Казань-Яльчик, с.
- [13] S. Mukherjee, B.S. Paul, N.K. Dadhich, S.D. Maharaj and A. Beesham *Emergent universe with exotic matter* 2006. *Class. Quantum Grav.* **23** 6927, 2006.
- [14] Papapetrou A. *Proc. Roy. Irish. Acad.*, 1947, A51, p.191.
- [15] Фишер И.З. *ЖЭТФ.*, 1948, том 18, №7, с.636.
- [16] Дуань И-ши *ЖЭТ.*, 1954, 27, с.756.
- [17] Bergmann O. and Leipnik R., *Phys. Rev.*, 1957, 107, p.1157.
- [18] Buchdahl H. A., *Quart. J. Math (Oxford)*, 1954, 5, p.116.

- [19] Buchdahl H. A., *Australian J. Phys.*, 1956, 9, p.13.
- [20] Buchdahl H. A., *Nuovo Cimento*, 1958, 5, p.1083.
- [21] Buchdahl H. A., *Phys. Rev.*, 1959, 115, p.1325.
- [22] Janis A. J., Newman E.T. and Winicour J. *Phys. Rev. Lett.*, 1968, 20, p.878.
- [23] Penney R. *Phys. Rev.*, 1968, 174, p.1578.
- [24] Ehlers J. Z. *Phys.*, 1955, 143, p.239.
- [25] Peres. A. *Bull. Council. Israel*, 1960, 9F, p.129.
- [26] Kuchař K. *Czechoslovak J. Phys.*, 1963, B13, p.511.
- [27] Penney R. *J. Math. Phys.*, 1965, 6, p.1029.
- [28] Bonnor W.B. *Z. Phys.*, 1961, 161, p.439.
- [29] De N. *Acta Phys. Polonica*, 1969, 35, p.363.
- [30] Das A. *J. Math. Phys.*, 1963, 4, p.45.
- [31] Das A. *J. Math. Phys.*, 1963, 4, p.45.
- [32] Penney R. *J. Math. Phys.*, 1966, 7, p.479.
- [33] Penney R. *J. Math. Phys.*, 1967, 8, p.2279.
- [34] Schwinger J. *Ann. Phys.*, 1957, 2, p.407.
- [35] Skyrme T.H.R. *Proc. Roy. Soc.*, 1958, v.A247, No.1249 p.260.
- [36] Gell-Mann M., Levy M. *Nuovo Cim.*, 1960, v.26, No.4, p.750.

ЧАСТЬ 4. РАЗНОЕ / В ПОРЯДКЕ
ОБСУЖДЕНИЯ



**ВРЕМЯ → ГРАВИТАЦИЯ → МАССА В МОДЕЛИ ИНВЕРСНО–СОПРЯЖЕННЫХ
ПРОСТРАНСТВ**

В.Д. Андреев¹

Киев, НАН Украины

¹E-mail: andreyev@green.net.ua

Постулирование в модели инверсно-сопряженных пространств (ИСП) [1, 2] вращения $\vec{\omega}_t = (c/R_c)\mathbf{e}_\omega \perp \mathbb{X}^3 \subset \mathbb{X}^4$, приводит к обоснованию введения ортогональной к пространственным координатам $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{X}^3$ квазипространственной координаты ict синхронного собственного времени, что переводит *евклидову* геометрию 4-мерного пространства \mathbb{X}^4 в *пространственно-временную* \mathbb{X}^{3+1} "квазигеометрию Минковского".

В этом случае пройденный путь Δs_r и радиус вращающейся точки $r \in \mathbb{X}^3$ будут связаны между собой единой величиной — углом поворота $\varphi = 2nN + \Delta\varphi = \Delta s_r/r = 2\pi\omega t$, где $t = \varphi/2\pi\omega = \{-\infty, \dots, \infty\}$ — угол поворота φ , выраженный в размерности времени $\dim[t]$, который для любой точки $r \in \mathbb{X}^3$ не зависит от положения начала координат, т. е. оси вращения $\mathbf{e}_\omega \perp \mathbb{X}^3 \subset \mathbb{X}^4$. Это задает *временной* масштаб мировой линии любой точки величиной периода $\Delta\tau = 1/\omega_t$ *собственного* времени как $t = n\Delta\tau$, $n = \{-\infty, \dots, \infty\}$ и направление «стрелы времени» направлением вращения "винтовой" оси $\pm\omega_t\mathbf{e}_\omega$.

Вращение $\vec{\omega}_t = (c/R_c)\mathbf{e}_\omega \perp \mathbb{X}^3 \subset \mathbb{X}^4$, создающее относительно центра $O^{(3)} \in \mathbb{X}^3$ поле окружных (тангенциальных) скоростей $v_\tau = \omega_t r = (c/R_c) \cdot r \leq c$ точек $r \in \mathbb{X}^3$, приводит к разделению пространства \mathbb{X}^3 на *внутреннюю* $X^* = (0, r_o]$ и *внешнюю* $X = [r_o, \infty)$ области, т. е. к образованию объекта $S(R_c)$ с естественной границей $X \cap X^*$ на радиусе $r_o = R_c \perp \vec{\omega}_t$, где окружная скорость $v_\tau(R_c)$ равна скорости света c .

Поле скоростей во *внешней* области объекта $S(R_c)$ порождает поле *инерционных* центростремительных ускорений

$$\mathbf{a}_r = -c\omega_t \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{c^2 R}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad R \leq r \leq \infty.$$

которое можно отождествить с полем, создаваемым центральной *тяготеющей* массой M объекта $S(R_c)$ как

$$\mathbf{G}_g = \gamma \mathbf{a}_r = -\gamma c\omega_t \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{\eta M}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad R \leq r \leq \infty.$$

т. е. *гравитирующая* в области $X (R \leq r \leq \infty)$ масса M равна

$$M = (\gamma/\eta) c\omega_t R^2 = (\gamma/\eta) c^2 R = (\gamma/\eta) c^3/\omega_t = (\gamma/\eta) c^3 \Delta\tau,$$

где $\eta = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2$ — гравитационная постоянная, $\gamma = \eta m_e/c^2 R_K \cong 0,175 \cdot 10^{-44}$ — безразмерная константа взаимодействия *гравитационных* зарядов, $\Delta\tau = 1/\omega_t$ — период собственного времени объекта $S(R_c)$.

Литература

- [1] В.Д. Андреев. Инверсно-сопряженные пространства, как модель структуры элементарного заряда. // Новейшие проблемы теории поля (под ред. А.В. Аминовой), Казань: Изд. КГУ, 2006, т.5, с. 33-44.
- [2] В.Д. Андреев. Свойства модели инверсно-сопряженных пространств в космологическом масштабе. // Новейшие проблемы теории поля, 2007-2008, (под ред. А.В. Аминовой), Изд. КГУ, Казань, 2009, с. 47-54.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ЭДМОНДСА И РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ КУКА

Б.С. Кочкарев¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹E-mail: bkochkarev@rambler.ru

Аннотация. Мы показываем, что утверждение « $P \subseteq NP$ » (in computer science) ошибочно, доказываем справедливость гипотезы Ж. Эдмондса « $P \neq NP$ » и даем положительное решение проблемы С.А.Кука.

В 1964 году Алан Кобэм [1] и, независимо, в 1965 году Жак Эдмондс [2] ввели понятие сложностного класса P .

Определение 1. [1,2] Проблема (язык) R принадлежит P , если существует алгоритм A такой, что для любого допустимого входа длины n алгоритм выдает ответ за время не более $O(n^k)$ для некоторой константы k . Класс проблем P называется полиномиальным, а соответствующие алгоритмы называются практическими.

Согласно [3] Ж. Эдмондс ввел также сложностной класс NP - это класс проблем (языков) которые могут быть проверены полиномиальными алгоритмами.

Определение 2. [3] Язык L принадлежит NP , если существует полиномиальный алгоритм A с двумя входами и такой полином $p(x)$ с целыми коэффициентами, что

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* : \text{существует сертификат } y \text{ с } |y| \leq p(|x|) \text{ и } A(x, y) = 1\}.$$

В этом случае мы говорим, что алгоритм A проверяет язык L за полиномиальное время.

Согласно определению 2 проверяющий алгоритм $A(x, y)$ для любого допустимого входа $x \in L$ формирует сертификат y и определяет его соответствие входу $x : A(x, y) = 1$. Очевидно, если $L \in P$ и $|y| \leq p(|x|)$, то, согласно определению 2, $L \in NP$. Но, если $L \in P$ и длина сертификата неполиномиальна от длины x , то $L \notin NP$.

Ж. Эдмондс также высказал гипотезу, что $P \neq NP$. В [4, 5, 6] мы построили классы полиномиальных проблем с неполиномиальными сертификатами и тем самым показали конструктивно существование полиномиальных проблем не принадлежащих классу NP , т.е., согласно приведенным выше соображениям, доказали справедливость гипотезы Ж. Эдмондса. Отметим вместе с тем, что в [3,7,8] авторы ошибочно утверждают, что $P \subseteq NP$.

В 1971 году С.А. Кук поставил вопрос: « может ли проверка правильности решения некоторой проблемы быть более длительной, чем само решение, независимо от алгоритма проверки? » Поставленный С.А. Куком вопрос имеет отношение к криптографии. В другой формулировке эта проблема выглядит так: «можно ли построить шифр такой, что его расшифровка алгоритмически сложнее, чем отыскание самого шифра?» Криптосистема RSA основана на драматической разнице между легкостью отыскания больших простых чисел и трудностью факторизации произведения двух больших простых чисел. В связи с этим и возник вопрос в проблеме Кука.

В 2008 году в работе [9] мы предложили модель решения проблемы С.А. Кука: пусть M и M' два множества такие, что M распознаваемо за полиномиальное время, пусть далее существует инъективное отображение φ из M в M' такое, что для любого $m \in M$ $\varphi(m)$ находится не за полиномиальное время. В [4, 5, 6] мы привели также некоторые реализации этой модели.

Пусть $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - конечное множество, состоящее из $n \in N$ элементов.

Будем рассматривать шпернеровы семейства (ш.с.) типа $(k, k + 1)$ [6]. Если F - ш.с. типа $(k, k + 1)$, то через $F^{(k)}, F^{(k+1)}$ обозначим соответственно семейство подмножеств $A \in F, |A| = k, B \in F, |B| = k + 1$. Если $F^{(k+1)}$ есть семейство такое, что для любого $A \in F^{(k+1)}$ $a_i \in A$, то мы обозначим через $F^{(k+1)} \setminus \{a_i\}$ ш.с. множества $S \setminus \{a_i\}$, полученное исключением из каждого подмножества $A \in F^{(k+1)}$ элемента a_i .

Определение 3. [10]. Шпернерово семейство F называется максимальным, если для любого $A \subset S, A \notin F$ существует $A' \in F$ такой, что $A \subset A'$ либо $A' \subset A$.

Пусть F максимальное шпернерово семейство (м.ш.с.) типа $(k, k + 1)$, $k \neq 0, n - 1$. Пусть p_i обозначает число элементов $A \in F, |A| = k$, которые не содержат элемент $a_i \in S$; пусть q_i обозначает число элементов $A \in F, |A| = k + 1$, которые содержат элемент a_i . Пусть $r_i = p_i + q_i, r = \max r_i, i = \overline{1, n}$.

Очевидно, для любого $n \geq 3$ справедливо следующее неравенство $r_i \leq \binom{n-1}{k}$.

Определение 4. Ш.с. $F^{(k+1)}$ назовем допустимым фрагментом максимального ш.с. $F' \supset F^{(k+1)}$, если найдется i такое, что для всякого $B \in F^{(k+1)}$ $a_i \in B$.

Теорема 1. [10] Если F м.ш.с., то $\binom{n-1}{k} \leq |F| \leq \binom{n}{k+1}$.

Теорема 2. [4] Существует инъективное отображение множества допустимых фрагментов $\{F^{(k+1)}\}$ в множество м.ш.с. $\{F'\}$ с $r(F') = \binom{n-1}{k}$.

Доказательство. Пусть $F^{(k+1)}$ допустимый фрагмент такой, что для любого $A \in F^{(k+1)}$ $a_i \in A$. Тогда мы обозначим через F ш.с. $F^{(k+1)} \setminus \{a_i\}$. Пусть теперь F_1 есть $\{A, |A| = k, a_i \notin A\} \setminus F$. Очевидно, семейство $F' = F^{(k+1)} \cup F_1 \cup G \cup G'$, где G' есть семейство подмножеств $A, |A| = k, a_i \in A$, несравнимых по включению с элементами из $F^{(k+1)}$ и G есть семейство подмножеств $A', |A'| = k+1, a_i \notin A'$, несравнимых по включению с элементами из F_1 есть семейство соответствующее допустимому фрагменту $F^{(k+1)}$. Очевидно, $r(F') = \binom{n-1}{k}$. Полученное отображение является инъективным по построению.

Пусть n достаточно большое нечетное число (чтобы можно было пользоваться формулой Стирлинга) Мы рассматриваем ш.с. $F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ подмножеств множества S такое, что для любого $A \in F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, $a_i \in A$, если $i \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - l\}$, где l есть константа. Очевидно, $|F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}|$ есть полином от n .

Теорема 3. Семейство $F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ распознаваемо за полиномиальное время.

Доказательство. Действительно, так как $|F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}|$ есть полином от n , то существует полиномиальный алгоритм T , который за полиномиальное число шагов определяет для любого подмножества $A \subset S$ принадлежит оно $F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ или нет.

Мы рассматриваем две проблемы: прямая (найти $A \in F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$) и обратная (по найденному A построить м.ш.с. F' соответствующее A). В этой связи мы предполагаем $\{A\}$ как множество шифров и $\{F'\}$ как соответствующие расшифровки. Так как $|F'| > \binom{n-1}{(n-1)/2}$ есть экспонента [11], то расшифровка алгоритмически сложнее, чем отыскание шифра. Таким образом, при проверке правильности решения прямой проблемы длина сертификата неполиномиальна. Отсюда наша прямая проблема из P не принадлежит NP , т.е. $P \neq NP$. Отметим, наконец, в дополнение к [12] еще раз, что утверждение $P \subseteq NP$ является ошибочным.

Литература

- [1] A. Cobham, The intrinsic computational difficulty of functions// In Proceedings of the 1964 Congress for Logic, Methodology, and the Philosophy of Science.-North-Holland, 1964.-p.24-30.
- [2] J. Edmonds, Paths, trees and flowers// Canadian Journal of Mathematics,-1965-Vol.17.-p. 449-467.
- [3] Т.Н. Cormen, Ч.Е. Leiserson, Р.Л. Rivest, Introduction to Algorithms, MIT Press, 1990.
- [4] В.С. Kochkarev, К проблеме Кукa, Matematicheskoe obrazovanie v shkole I v Vuze v usloviyakh perekhoda na novye obrazovatelnye standarty. Materialy Vserossiyskoy nauchno-practicheskoy konferentsii s megdunarodnym uchastiem, CityplaceKazan, 2010, p. 133-136.
- [5] В.С. Kochkarev, Prilogenie monotonnykh funktsiy algebrы logiki k probleme Kuka, Nauka v Vuzakh: matematika, fizika, informatika, Tezisy dokladov Megdunarodnoy nauchno-obrazovatelnoy konferentsii, 2009, p. 274-275.
- [6] В.С. Kochkarev, arXiv: 1210.7591 v1 [math. CO] 29 Oct.2012.
- [7] S.A. Cook, The P versus NP Problem, Manuscript prepared for the Clay Mathematics Institute for the Millenium, April, 2000, www. Cs. Toronto. edu sacook.
- [8] А.А. Razborov, Theoretical Computer Science: vzglyad mathematica, http: //old. computerra. ru/ offline/2001/379/6782/.
- [9] В.С. Kochkarev, On Cook's problem, http://www.math. nsc.ru/conference/malmeet/08/Abs
- [10] В.С. Kochkarev, Structural properties of a class of maximal Sperner families of subsets, Izv. Vysch. Uchebn. Zaved. Mat, 2005, 7, p. 37-42.
- [11] S.V. Yablonskiy, Vvedenie v diskretnuyu matematiku, 384, 1986.
- [12] В.С. Kochkarev, Gipoteza J.Edmondsa i problema S.A. Kuka, Vestnik TGGPU, (24),2, 2011, p. 23-24.

ТРУДЫ СЕМИНАРА

ЧАСТЬ 5. МЕМОРИАЛ



КАЗАНЬ—КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ 2013

СЕРГЕЙ ВИКТОРОВИЧ ЧЕРВОН

Ю.Г. Игнатьев¹

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

¹E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Рис.1. *Рожденный в 1953 году, ученый - гравитационист - киралист, кругосветный научный турист, неумолимый теннисист*

17 июня этого года известному физику - теоретику из Ульяновска, Червону Сергею Викторовичу, исполнилось 60 лет. Рожден он был 17 июня 1953 года.

Сергей Червон окончил кафедру теории относительности и гравитации Казанского университета в 1979 году, дипломную работу выполнял под руководством блестящего теоретика - гравитациониста Георгия Георгиевича Иванова. Со старших курсов вплоть до закрытия был активным участником семинара ВС. Основное научное направление Сергея Червона — «Нелинейные скалярные поля в общей теории относительности и космологии» сложилось под деятельным влиянием Г.Г. Иванова, в 1979 — 1985 годах начавшего пионерские исследования в области киральных полей и σ - моделей и получившего ряд фундаментальных, приоритетных результатов в области космологии. Жизнь этого талантливого ученого оборвалась несправедливо рано.

Надо сказать, что С.В. Червону очень повезло с научным руководителем, определившему, фактически, направление не только его кандидатской, но и докторской диссертации. Отмечая безусловный вклад Сергея Червона в развитие теории киральных полей и σ - моделей, необходимо несколько слов сказать о его научном руководителе.

Одной из первых независимых работ, в которой найдено точное экспоненциальное космологическое решение уравнений Эйнштейна с нелинейным скалярным полем, была работа Г.Г. Иванова 1980 года [1], опубликованная годом раньше широко цитируемой работы А. Гуса. В 1981 году Г.Г. Ивановым была опубликована работа по изометрическим симметриям взаимодействующих скалярных полей [2], в которой, фактически, рассматривались нелинейные σ - модели с евклидовой метрикой изотопического пространства и были получены групповые ограничения на точные решения с 2-х, 3-х и n-мерными киральными моделями. В этом же сборнике Г.Г. Ивановым были опубликованы и точные космологические решения с нелинейными скалярными источниками различного типа [3]. В 1983 г. была опубликована работа Г.Г. Иванова, посвященная точным решениям уравнения Эйнштейна, в том числе и космологическим, с нелинейным скалярным полем различного типа нелинейностью [4]. Наконец, в 1984 г. была опубликована программная работа Г.Г. Иванова по нелинейным σ - моделям и киральным полям в теории гравитации [5]. В этой же работе был предложен инвариантно-групповой метод исследования киральных полей, найдены достаточные, а для ряда случаев, - и необходимые, условия, налагаемые симметрией гравитационного поля на киральные поля. В этой же работе найдены классы точных решений уравнений Эйнштейна для самогравитирующей $SO(3)$ -инвариантной σ - модели скалярного поля.

Справка-объективка о Червоне Сергее Викторовиче

В 1986 С.В. Червон защитил кандидатскую диссертацию в Казанском государственном университете по физико-математическим наукам; специальность: 01.04.02-теоретическая и математическая физика. В 1990 году присвоено ученое звание доцента по кафедре прикладной математики филиала МГУ. В 1998 защитил докторскую диссертацию в Томском государственном университете по физико-математическим наукам; специальность: 01.04.02-теоретическая физика. В 1999 году присвоено ученое звание профессора по кафедре теоретической и математической физики. 18 лет С.В. Червон проработал в филиале МГУ и УлГУ: с апреля

1989 года в должности доцента, а затем – профессора. В 1993-1994 году находится в творческом отпуске в Международном университетском центре Астрономии и Астрофизики (г. Пуна, Индия) для подготовки докторской диссертации. После защиты докторской диссертации с 1998 года работает в должности профессора кафедры теоретической и математической физики УлГУ. В 1995-1997 участвует в выполнении совместного проекта по астрофизике с космологической группой Потсдамского астрофизического института (Потсдам, Германия) при поддержке немецких научных фондов. В 1998-2000 году работает в рамках образовательной программы совместно с Университетом г. Дуйсбург (Германия). С 1998 по 2000 год Червон С.В. является деканом физико-технического факультета, а с 1999 по 2000 год является директором российско-германского института. В 2003-2004 учебном году был приглашен для научно-педагогической работы в Федеральный университет штата Параиба, Бразилия. Там он проводил научные семинары для космологической группы и читал лекции для аспирантов.

Червон С.В. является членом редакционной коллегии международного квартального журнала «Gravitation and Cosmology» с 1998 года. Входит в Организационный комитет Российских (международных) гравитационных конференций GR-10, GR-11 и GR-12, проводимых Российским гравитационным обществом в 1999, 2002 и 2005 году соответственно. Является инициатором и организатором проводимых в Ульяновске международных школ-семинаров по теоретической космологии с 1997 года. Заместитель председателя Организационного комитета Первой и председатель Второй и Третьей Ульяновской Международной школы-семинара по теоретической космологии в 1997, 2000 и 2003 году. Редактор тезисов (1997, 2000 и 2003) и со-редактор трудов (2004г.), опубликованных в международном журнале "General Relativity and Gravitation v. 36, N 7, July 2004. С 2007 года - со-редактор нового американского журнала Advanced Science Letters.

Созданные новые научные направления

- А. Гравитационное поле ранней Вселенной, заполненной скалярными, киральными и калибровочными полями.
- В. Эффективные нелинейные сигма модели в космологии ранней Вселенной.
- С. Космологические модели глобальной эволюции Вселенной и компьютерное моделирование сопутствующей эволюции материи и структуры вещества.
- Д. Космология мира на бране с квинтэссенцией, фантомными полями, темной материей и темной энергией, которые эффективно описываются нелинейной сигма моделью.

Литература

- [1] Иванов Г.Г. О самогравитирующем скалярном поле с кубической нелинейностью /Г.Г. Иванов // Известия Вузов, Физика, №12, 1980. - С. 18-22.
- [2] Иванов Г.Г. Изометрические симметрии взаимодействующих скалярных гравитирующих полей /Г.Г. Иванов. // Гравитация и теория относительности: сб. статей. Казань: Изд-во КГУ, 1981. - Вып. 18. - С. 48-53.
- [3] Иванов Г.Г. Космологические модели Фридмана с нелинейным скалярным полем. Г.Г.Иванов. // Гравитация и теория относительности: сб. статей. Казань: Изд-во КГУ, 1981. - Вып. 18. - С. 54-60.
- [4] Иванов Г.Г. Точные решения уравнений Эйнштейна для нелинейных скалярных полей типа Син-Гордона, Лиувилля и Хиггса. /Г.Г. Иванов. // Гравитация и теория относительности: сб. статей. Казань: Изд-во КГУ, 1983. - Вып. 20. - С. 37-47.
- [5] Иванов Г.Г. Симметрии и классические решения в гравитационной $SO(3)$ - инвариантной σ - модели /Г.Г. Иванов. // Гравитация и теория относительности: сб. статей. Казань: Изд-во КГУ, 1984. - Вып. 21. - С. 97-105.

Труды Российской летней школы
«Математическое моделирование фундаментальных объектов
и явлений в системах компьютерной математики»
и Международного семинара
«Нелинейные поля в теории гравитации и космологии»

Набор сборника осуществлен в издательском пакете LaTeX2 ϵ в
научно-исследовательской лаборатории «Информационных технологий в
физико-математическом образовании» Института математики и механики им.
Н.И. Лобачевского Казанского университета.

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - Ю.Г. Игнатьев

Техническая редакция, набор и верстка: Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина.

Оформление обложки - А.А. Агафонов

В сборнике трудов опубликованы **63** статьи, посвященные современным
проблемам теории гравитации и космологии, а также математическому и
компьютерному моделированию.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Казанского университета

Подписано в печать 15.08.13. Формат 60×84/8
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 22. Тираж 125 экз.

Казанский университет
420008, г. Казань, ул. Профессора Нухина, 1/37
