Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Modelos de energia escura acoplada à matéria escura

Fabrizio Fogaça Bernardi

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requesito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Enrico Bertuzzo (IFUSP)
Profa. Dra. Bertha M. C. Melgar (USP/Lorena)
Prof. Dr. Julio César Fabris (UFES)
Prof. Dr. Farinaldo da Silva Queiroz (UFRN)

São Paulo
2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Bernardi, Fabrizio Fogaça

Modelos de energia escura acoplada à matéria escura. São Paulo, 2020.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física.

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla
Departamento: Física Matemática
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Cosmologia; 2. Física Teórica; 3. Relatividade.

USP/IF/SBI-003/2020

University of São Paulo
Physics Institute

Dark energy coupled to dark matter models

Fabrizio Fogaça Bernardi

Supervisor: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Thesis submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science.

Examining committee:
Prof. Dr. Enrico Bertuzzo (IFUSP)
Profa. Dra. Bertha M. C. Melgar (USP/Lorena)
Prof. Dr. Julio César Fabris (UFES)
Prof. Dr. Farinaldo da Silva Queiroz (UFRN)

São Paulo
2020

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e aos meus irmãos por estarem sempre próximos, me incentivando, me apoiando, me fortalecendo e me aguentando. Sinto um prazer enorme por ter todos vocês em minha vida. Vocês me ensinaram a nunca desistir e sempre ir em busca de meus sonhos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Elcio Abdalla por todo ensinamento e orientação desses últimos 11 anos. Agradeco pelas conversas, pelas oportunidades, instruções e por ter acreditado em meu potencial, servindo-me de exemplo e referência.

Ao Ricardo Landim, muito do que fiz foi graças a ele. Agradeço por ter me ajudado, sempre com paciência, facilitando o meu caminho. As palavras são limitadas para traduzir a minha gratidão.

Aos meus grandes amigos Fabio Camilo e João Braga por todos os momentos que passamos. Agradeço por me apoiarem, e por termos vivido ótimas histórias. A graduação e a vida não teria sido a mesma sem vocês.

À Luana Jacquet por ter aparecido em um momento ideal e ter me ensinado a viver a vida com mais emoção.

Ao Alan Maciel e Jeferson de Oliveira por se oferecerem a me apresentar o mundo da Física quando eu era apenas um bixo curioso. Vocês despertaram a minha curiosidade, trazendo-me confiança e admiração.

Ao Fabio Chibana pela amizade e por me mostrar que, apesar do grau de dificuldade do problema, ele sempre pode ser resolvido de uma forma incrivelmente interessante.

Ao Riis Ravia por ter sido um ótimo companheiro de trabalho. Agradeço por todas as conversas e sugestões.

Ao Alessandro Takeshi, umas das pessoas mais maravilhosas e peculiares que tive o prazer de conhecer. Você me deu motivação para fazer e querer sempre mais.

A todos que fizeram parte do grupo de pesquisa do Prof. Elcio. Aprendi muito com vocês, nas reuniões e fora delas.

À CPG por me suportar todo esse tempo, fazendo sempre o máximo para facilitar todas as etapas.

À Cristine Kores por ter sido a pessoa que soube como me ouvir, e ter tornado uma transição perturbada em algo prazeroso.

Ao Andre Fontenele que foi essencial para que eu continuasse seguindo esse caminho. Agradeço por ter me incentivado, me cobrado e apostado em meu potencial.

Aos meus amigos Egidio Turchi e Davi Takeshita que souberam como me tranquilizar, mantendo-me focado de uma forma direta ou indireta, o que foi fundamental na fase final do processo. Graças a vocês, hoje, sou uma pessoa muito mais honesta comigo mesmo.

À Isabella Demarqui por, nos momentos de maior pressão, ser a companhia de almoço que me relaxa ajudando-me a ter mais energia para prosseguir.

E a todas as pessoas incríveis que cruzaram a minha vida, saibam que, de alguma forma, vocês colaboraram para que eu chegasse até esse momento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Analisamos um modelo de quintessência acoplada para a energia escura à luz da teoria dos sistemas dinâmicos lineares, no caso de duas interações diferentes: i) proporcional à densidade de energia da energia escura e ii) proporcional à soma das densidades de energia da matéria escura e da energia escura. Os resultados aqui apresentados ampliam as análises anteriores, onde o termo de interação era dado por um termo proporcional apenas à densidade de energia da matéria escura. No primeiro caso é possível obter a sequência bem conhecida das eras cosmológicas. Para a segunda interação apenas a era da radiação e a era da energia escura podem ser descritas pelos pontos fixos. Portanto, do ponto de vista da teoria de sistemas dinâmicos, a interação proporcional à soma da densidade de energia da matéria escura e energia escura não descreve o universo onde vivemos.

Usando um modelo de energia escura metaestável em que a energia do vácuo observada é o valor do potencial escalar no vácuo falso, calculou-se o tempo de decaimento do vácuo metaestável. Este tempo de decaimento é compatível com a idade do universo. A energia escura metaestável também é incorporada a um modelo com simetria $SU(2)_R$. O dubleto de energia escura e a matéria escura interagem naturalmente entre si. Utilizando as equações de Boltzmann perturbadas é possível encontrar a evolução de cada partícula escura para essa interação.

Considerando uma combinação particular de termos na Lagrangeana de Horndeski sem uma constante cosmológica ou setor de matéria, esperamos obter um fluido cósmico unificado efetivo, com uma equação de estado efetiva. Vamos calcular se a equação de estado reproduz a seqüência das eras cosmológicas e comparar os parâmetros da teoria com o *forecast* do radio telescópio BINGO.

Palavras chaves: energia escura; matéria escura; análise dinâmica; potencial metaestável; teoria de horndeski.

ABSTRACT

We analyze the coupled quintessence in the light of the linear dynamical systems theory, with two different interactions: i) proportional to the energy density of the dark energy and ii) proportional to the sum of the energy densities of the dark matter and dark energy. The results presented here enlarge the previous analyses in the literature, wherein the interaction term was proportional to the energy density of the dark matter only. In the first case it is possible to get the well-known sequence of cosmological eras. For the second interaction only the radiation and the dark energy era can be described by the fixed points. Therefore, from the point-of-view of the dynamical system theory, the interaction proportional to the sum of the energy densities of the dark matter and dark energy does not describe the universe we live in.

Using a model of metastable dark energy in which the observed vacuum energy is the value of the scalar potential at the false vacuum, the decay time of the metastable vacuum was calculated. It is compatible with the age of the universe. The metastable dark energy is also embedded into a model with $SU(2)_R$ symmetry. The dark energy doublet and the dark matter doublet naturally interact with each other. Using the perturbated Boltzmann equation it is possible to find the evolution of each dark particle for this interaction.

Considering a particular combination of terms in the Horndeski Lagrangian in which we have not introduced a cosmological constant or a matter sector, we hope to obtain an effective unified cosmic fluid, with an effective equation of state. We'll calculate if the equation of state reproduces the sequence of cosmological eras and compare the parameters of the theory with the forecast of the BINGO radio telescope.

Keywords: dark energy; dark matter; dynamic analysis; metastable potential; Horndeski theory.

Índice

1 Estudo bibliográfico **9**
1.1 Cosmologia 9
1.1.1 Equações de evolução 9
1.1.2 Evidências observacionais da matéria escura (DM) 12
1.1.3 Evolução do universo de um fluido perfeito 16
1.2 Evidências observacionais da DE 19
1.2.1 Energia, redshift e a lei de Hubble 19
1.2.2 Distâncias 21
1.2.3 Restrições de SN Ia 26
1.2.4 Problema da coincidência 29
1.2.5 Idade do universo 30
1.2.6 Condições de CMB e LSS 33
1.3 Constante cosmológica 34
1.3.1 Problema da densidade 37
1.4 Resumo 38
1.5 Modelos de campo escalar para a DE 40
1.5.1 Quintessência 41
1.6 Interação no setor escuro do universo 44
1.7 Gravitação modificada 45

2 Modelo de quintessência **49**
2.1 Dinâmicas cosmológicas do campo escalar na presença de um fluido perfeito barotrópico 49
2.1.1 Sistema autônomo de modelos de DE representada por um campo escalar 50
2.1.2 Teoria de estabilidade linear 53
2.2 Introdução a sistemas dinâmicos na cosmologia 56
2.2.1 Caso geral 57
2.2.2 Quintessência na cosmologia 59
2.3 Quintessência acoplada e a impossibilidade de uma interação 64
2.3.1 Análise dinâmica 64
2.3.2 Dinâmica da quintessência 64
2.3.3 Sistema autônomo 66
2.3.4 Interações 67
2.3.5 Conclusão 73

3 Dark SU(2) 75
3.1 Modelo para DE . . . 75
3.1.1 Decaimento do vácuo falso . . . 75
3.1.2 Matriz de espalhamento de $\varphi^+ \to \varphi^0 + \psi + \nu_d$ . . . 82
3.2 Interacting dark energy in the dark $SU(2)_R$ model . . . 84
3.2.1 Resumo . . . 84
3.2.2 Introdução . . . 85
3.2.3 O modelo $SU(2)_R$ escuro . . . 86
3.2.4 Predições do modelo . . . 87
3.2.5 Conclusão . . . 91

4 Horndeski 93
4.1 Introdução . . . 93
4.1.1 Teoria de Galileons generalizada para a Cosmologia . . . 94
4.1.2 Evolução do background . . . 97
4.1.3 Unificação da DE e DM . . . 99
4.2 Resultados Horndeski . . . 100
4.3 Modelo desenvolvido . . . 105
4.3.1 Tensor energia-momento de Horndeski . . . 110
4.3.2 Perturbação . . . 113
4.3.3 Teoria de Horndeski após GW170817 . . . 114
4.3.4 Conclusão . . . 116

5 Conclusão 117

A Relatividade geral 119
A.1 Transporte paralelo e geodésica . . . 119
A.2 Curvatura . . . 122
A.3 Equações de Einstein . . . 124
A.4 Equações de Friedmann . . . 124
A.5 Equação da continuidade . . . 126
A.5.1 Nosso universo e o tensor energia-momento para fluidos ideais . 127

B Escalar de curvatura para a métrica de FLRW plana e curva 129
B.1 Componentes das equações de Einstein com o espaço-tempo plano . . . 129
B.2 Componentes das equações de Einstein com o espaço-tempo curvo . . . 132

C Ação de Einstein-Hilbert 137

D Campo escalar 143
D.1 Equação de movimento campo escalar real . . . 144

E Perturbações 155
E.1 Perturbações na métrica e variáveis invariantes de gauge . . . 156
E.1.1 Classificação das perturbações . . . 157
E.1.2 Transformações de gauge e variáveis invariantes de gauge . . . 158
E.1.3 Sistema de coordenadas . . . 163

E.2 Perturbação do tensor de Einstein 164
E.3 Símbolos de Christoffel 168
E.4 Tensor de Ricci 169
E.4.1 Componente tempo-tempo 169
E.4.2 Componente espaço-espaço 170
E.4.3 Componente espaço-tempo 171
E.5 Escalar de Ricci 172
E.6 Tensor de Einstein 173
E.6.1 Componente tempo-tempo 174
E.6.2 Componente espaço-espaço 175
E.6.3 Componente espaço-tempo 178
E.7 Equações de Boltzmann 179
E.7.1 Cálculos de mecânica estatística 179
E.8 Conservação do tensor energia-momento e transformação de gauge . . . 183
E.9 Perturbações hidrodinâmicas no tensor energia-momento 190

F Eq. de Boltzmann para os componentes do universo 193
F.1 A equação de Boltzmann para matéria escura 193
F.2 A equação de Boltzmann para bárions 200
F.3 A equação de Boltzmann para fótons 208
F.4 A equação de Boltzmann para neutrinos sem massa 211

G Gauges 213
G.1 Transformações de gauge 214

H Tunelamento 217

I Cálculo do tensor energia-momento para o modelo Horndeski 227

J HiClass 239
J.1 Perturbações lineares em Cosmologia 239
J.1.1 Modos tensoriais 241
J.1.2 Modos escalares 242
J.1.3 Condições de estabilidade 243
J.1.4 Perturbações lineares 245
J.1.5 Descrição do `hi-class` 246

K BAO 249

L BINGO 251

Capítulo 1

Estudo bibliográfico

Vamos fazer uma revisão bibliográfica sobre tópicos importantes para o estudo de modelos de energia escura interagindo com a matéria escura. Nesta seção utilizaremos o Apêndice A para fazer revisão sobre tópicos importantes de Cosmologia, introduziremos a necessidade do setor escuro para explicar o nosso universo e faremos um estudo aprofundado sobre perturbações no tensor de Einstein e nas equações de Boltzmann, que são de grande interesse para a Cosmologia.

Para esta seção foram utilizados [1–5].

1.1 Cosmologia

As dinâmicas do universo são descritas pelas equações de Einstein que são em geral equações não-lineares complicadas. No entanto elas exibem soluções analíticas simples na presença de simetrias genéricas. A métrica de FLRW é baseada na suposição de que o universo respeita o princípio cosmológico, que é uma boa aproximação em grandes escalas. O pequeno desvio da homogeneidade em épocas primordiais faz um papel muito importante na história dinâmica do nosso universo. Pequenas perturbações na densidade inicial cresceram através da instabiblidade gravitacional em estruturas que vemos hoje no universo. As anisotropias da temperatura observadas na radiação cósmica de fundo (em inglês *Cosmic Microwave Background*, CMB) acreditam ter sido originadas de flutuações quânticas geradas durante um estágio inflacionário no começo do universo. Veja as referências [6–12] para detalhes de perturbações na densidade previstas pela cosmologia inflacionária [5].

1.1.1 Equações de evolução

Por observações recentes da Radiação Cósmica de Fundo (*Cosmic Microwave Background* CMB), em escalas suficientemente grandes o universo é isotrópico. Supondo que a nossa galáxia não tenha uma posição especial em relação ao universo e que qualquer observador que se mova com a velocidade média das galáxias típicas em sua vizinhança deve observar o mesmo universo em todas as direções, temos que o nosso universo é homogêneo. Pelas duas propriedades apresentadas acima podemos dizer que o nosso universo respeita o **princípio cosmológico**, ou seja, é um universo isotrópico e homogêneo.

Observações experimentais nos dizem que o universo, em grande escala (maior que 150Mpc), respeita o **Princípio cosmológico**. Esse princípio diz que o universo é homogêneo e isotrópico, isso não é difícil de ser aceito, se você estiver longe de qualquer concentração de partículas o universo parece igual em qualquer lugar que você está e para qualquer lugar que você olha.

Considerando um universo esfericamente simétrico e isotrópico a um conjunto de observadores em queda livre, foi construída uma métrica única por Friedmann [1] (considerando as Equações de Einstein), e depois melhorada por Robertson e Walker, que respeita o princípio cosmológico (ver seção 13.5 de [1]). O elemento de linha da métrica de FLRW é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2)\right] \ , \tag{1.1}$$

onde a constante κ pode assumir valores iguais a -1, 0 e +1, dependendo da geometria do espaço. A função $a(t)$ é o **fator de escala** do universo.

Tendo agora um universo bem definido por uma métrica, serão apresentadas algumas aplicações. Um estudo mais aprofundado dessa métrica pode ser encontrado no Apêndice B.

As três opções de universo são representadas por onde κ representa a curvatura

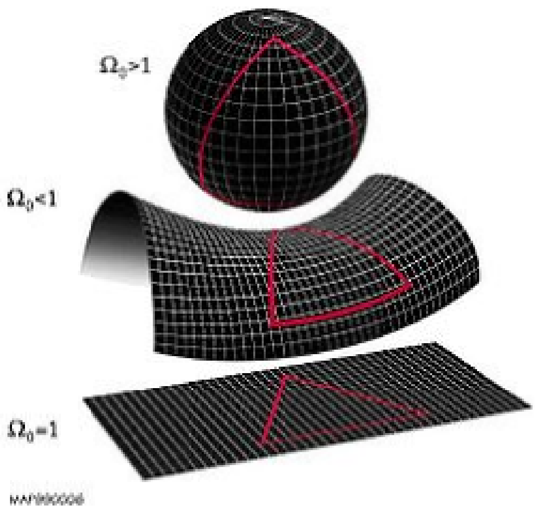

Figura 1.1: Geometrias possíveis para o universo. Figura retirada do site da Nasa.

do universo, ρ_i a densidade de energia de cada componente e $\Omega_i^{(0)} \equiv \rho_i^{(0)}/(3H^2)$. Se estivermos em um universo fechado, plano ou aberto, κ será igual à 1, 0 ou -1, respectivamente.

A componente t na métrica é o tempo cósmico, e as coordenadas que estão multiplicadas pelo fator de escala serão as coordenadas comóveis.

As equações diferenciais para o fator de escala e a densidade de matéria seguem as equações de Einstein [1], que permitem determinar o fator de escala provindo dos componentes do universo.

[1] O padre Lemaître chegou a resultados similares independentemente de Friedmann.

As equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_P^2} T_{\mu\nu}\,, \tag{1.2}$$

são as Eqs. de movimento para a Relatividade Geral. $R_{\mu\nu}$ representa o tensor de Ricci, R o escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico e $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento. O acoplamento é dado pela massa de Planck reduzida

$$M_P^2 \equiv \frac{1}{8\pi G}\,, \tag{1.3}$$

onde G é a constante gravitacional. Estamos considerando aqui que a velocidade da luz é igual à unidade $c = 1$.

Podemos, com grande concordância, descrever o universo como sendo composto por fluidos, e cada fluido representa uma componente dele. O tensor energia-momento para um fluido perfeito é dado por

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (\rho + \mathcal{P}) u^{\mu} u_{\nu} + \mathcal{P} \delta^{\mu}{}_{\nu}, \quad u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)\,. \tag{1.4}$$

onde u^{μ} é a velocidade de um observador em repouso no fluido.

Aplicando a métrica de FLRW e o tensor energia-momento de um fluido perfeito nas equações de Einstein, obtemos as equações de Friedmann para um único fluido

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3M_P^2} - \frac{\kappa}{a^2}\,, \tag{1.5}$$

$$\dot{H} = -\frac{(\mathcal{P} + \rho)}{2M_P^2} + \frac{\kappa}{a^2}\,. \tag{1.6}$$

Elas nos fornecem a equação da continuidade para esse fluido

$$\dot{\rho} + 3H(\mathcal{P} + \rho) = 0\,. \tag{1.7}$$

Entre as duas equações de Friedmann e a equação da continuidade, apenas duas são independentes.

Outra forma de se chegar na equação da continuidade é pelo fato de que o tensor energia-momento é conservado em virtude das identidades de Bianchi,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0\,, \tag{1.8}$$

como veremos mais adiante.

Dissemos aqui que as equações de Friedmann apresentadas acima são as equações de movimento para um único fluido, pois para o caso de mais de um fluido, devemos considerar as diferentes densidades de energia e pressão, teríamos então

$$\rho = \sum_i \rho_i\ , \qquad P = \sum_i P_i\ , \tag{1.9}$$

onde ρ_i e P_i representam, respectivamente, a densidade de energia e pressão para cada componente do universo.

1.1.2 Evidências observacionais da matéria escura (DM)

Na década de 40 era sabido que o universo era composto por matéria bariônica (bárions e elétrons apesar desse último ser um lépton), e radiação, componente composta por fótons e neutrinos. Veremos alguns problemas que não podiam ser explicados por um universo composto apenas por esses componentes[2], e que fizeram necessário considerar um componente novo, a matéria escura.

Clusters de Galáxias

Para que objetos astrofísicos do nosso universo possam girar e orbitar, a força gravitacional deve equilibrar a energia que o objeto em movimento possui. Como sabemos de mecânica básica, quanto maior a velocidade de rotação de um objeto, maior deve ser a força gravitacional para mantê-lo em órbita.

Em 1933, Fritz Zwicky, estudando o aglomerado de galáxias Coma, utilizou o teorema do virial, que relaciona a energia cinética média de um sistema com sua energia potencial total, observou que a massa inferida da matéria luminosa nas galáxias era várias vezes menor que a massa gravitacional calculada pelo teorema. Para que o sistema estivesse em equilíbrio deveria haver um componente com massa que não interagisse com os fótons, foi assim que Fritz Zwicky criou o termo "matéria escura" que seria responsável por manter o aglomerado de galáxias firmemente unido.

Curvas de rotação

Na década de 1970, Vera Rubin e Kent Ford estudando a velocidade de rotação de estrelas na galáxia de Andrômeda observaram que a velocidade dessas estrelas permaneceu aproximadamente constante independentemente da distância entre elas e o centro da galáxia. Segundo a dinâmica Newtoniana, esperamos que a velocidade das estrelas caia a medida que você se move do centro de massa de uma galáxia para suas bordas externas. Muitas outras observações de curvas de rotação de estrelas em galáxias espirais mostraram o mesmo.

As curvas de rotação de galáxias podem ser explicadas se assumirmos que as galáxias não são compostas apenas pela matéria visível, mas que grande parte da massa das galáxias esteja em um "halo" de matéria escura difusa que se estende bem além das bordas da matéria luminosa.

Observações de galáxias e suas curvas de rotação[3] provindas do campo gravitacional mostraram, na época, a necessidade de uma forma de matéria não bariônica no universo (Fig. (1.2)), a **matéria escura** (*dark matter* DM)[4].

Considerando a lei da gravitação de Newton sabemos que a força exercida pelas massas de uma galáxia a um ponto de teste distando $|r|$ do centro da mesma é a força gravitacional

[2]https://medium.com/starts-with-a-bang/five-reasons-we-think-dark-matter-exists-a122bd606ba8

[3]Curva de rotação: velocidade circular em função da distância de um ponto qualquer ao centro da galáxia estudada. Como veremos, ela fornece uma poderosa ferramenta para estudar a distribuição de massa de galáxias pois depende apenas do seu potencial gravitacional.

[4]Hoje sabemos que podemos assumir a existência de uma matéria bariônica neutra que permeia a galáxia e compõe a DM.

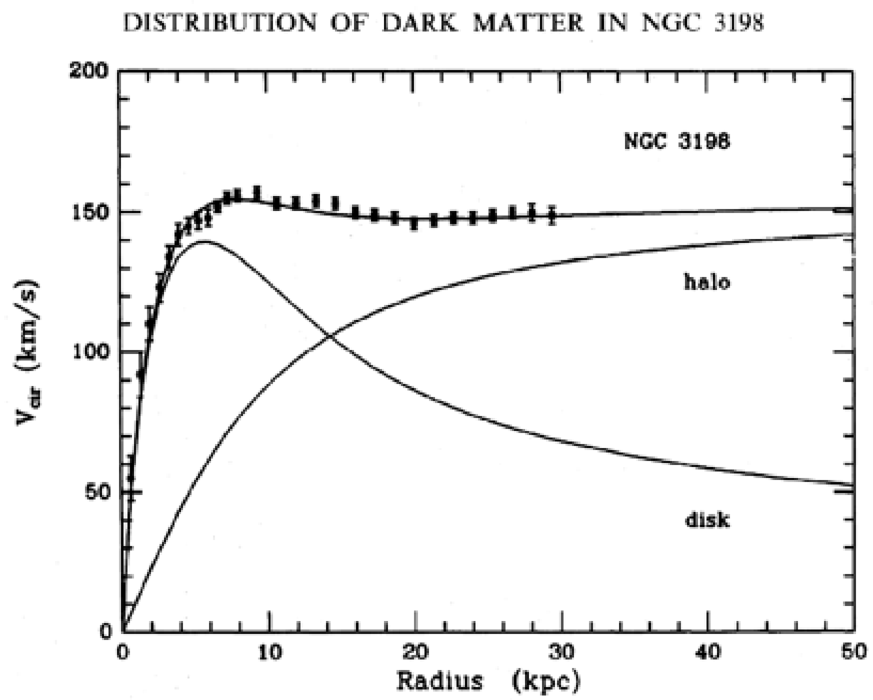

Figura 1.2: Contribuição da matéria escura na galáxia espiral NGC-3198. Figura retirada de [13]

$$\vec{F}_g = -\frac{d\phi(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{GM(r)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Vamos analisar do ponto de vista newtoniano a curva de rotação das galáxias. Para uma órbita aproximadamente circular a força gravitacional, apresentada acima, deve ser igual à força radial ($F_r = -v^2/r$), para que não haja perda de massa ou colapso. Dessa forma, a velocidade da partícula teste para que isso aconteça é

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \tag{1.10}$$

A massa que podemos observar visivelmente se concentra próximo ao centro das galáxias, é de se esperar que se tomarmos uma distância muito grande a massa dentro da circunferência formada por essa distância se aproxima de uma constante, e as velocidades devem cair com $r^{-1/2}$. Dados observacionais de galáxias mostram que isso não ocorre, a velocidade se mantém constante.

A distribuição de DM pela distância radial do centro da galáxia é dada empiricamente pelo **perfil de Navarro–Frenk–White (NFW)**

$$\rho(r) = \frac{\rho_h}{\frac{r}{r_h}\left(1 + \frac{r}{r_h}\right)^2} \ ,$$

onde ρ_h e r_h são respectivamente a densidade e o raio do halo. Nesse perfil de densidade $\rho \propto r^{-1}$ com $r << r_h$, e $\rho \propto r^{-3}$ com $r >> r_h$. A massa até um certo raio r é dada por

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\rho(r')r'^2 dr' = 4\pi\rho_h r_h \int_0^r \frac{r'}{\left(1+\frac{r'}{r_h}\right)} dr' \ ,$$

fazendo uma mudança de variável $y' = r'/r_{200}$ e definindo o parâmetro de concentração $c \equiv r_{200}/r_h$, temos:

$$M(r) = 4\pi\rho_h r_h^3 \left[ln\left(1+\frac{r}{r_h}\right) - \left(\frac{r}{r_h+r}\right)\right] \ ,$$

Para o caso em que $r = r_{200}$,

$$M(r_{200}) = \frac{800}{3}\pi\rho_h r_{200}^3 \ ,$$

$$\rho_h = \frac{200}{3}\rho_c c^3 \left[ln\,(1+c) - \left(\frac{c}{1+c}\right)\right]^{-1} \ .$$

Com essa massa é possível, utilizando a Eq.(1.10), calcular a contribuição do halo na velocidade de rotação.

CMB

No início do universo a matéria exercia uma força gravitacional com direção ao centro da distribuição de matéria enquanto que os fótons realizavam uma pressão para fora dessa distribuição. A atuação dessas duas forças fazia com que a matéria e os fótons oscilassem para dentro e para fora dessas regiões densas deixando marcas na história do universo. Uma forma de observar a história do universo é olhar para a Radiação Cósmica de Fundo (em inglês *Cosmic Microwave Background*, CMB), ela representa uma "fotografia" do nosso universo no decorrer do tempo. A existência da matéria escura deixaria padrões na CMB pois ela se aglomera em regiões densas e contribui para o colapso gravitacional da matéria, mas não é afetada pela pressão dos fótons.

O espectro de energia da CMB nos mostra essas oscilações para diferentes quantidades de fótons e matéria. A sonda *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) nos deu a primeira medida do espectro de potência da CMB através do primeiro pico de oscilações. O modelo que melhor explica esse espectro é o que assume a existência da matéria escura. Ele tem uma previsão precisa para a equação de estado da DM.

Bullet Cluster

O *Bullet Cluster* é na verdade dois clusters de galáxias que passaram por uma colisão em alta velocidade, fazendo com que o conteúdo de cada cluster se mesclasse. Em 2006, observações do *Hubble Space Telescope* (HST) e do *Chandra X-ray Observatory* permitiram medir a localização da massa do aglomerado após a colisão pelo método de observações óticas de emissão de raios X e lentes gravitacionais.

É possível saber que os dois clusters acabaram de colidir pela astronomia de raios-X, pois um gás extremamente quente de partículas permeia o espaço entre cada galáxia em um cluster.

A lente gravitacional funciona pois sabemos, da Relatividade Geral, que a curvatura do espaço-tempo altera não só a trajetória de partículas de matéria mas também a dos fótons. Observando essas imagens alteradas como se fossem por lentes, é possível ver onde está essa lente e sua massa.

Se os aglomerados fossem compostos apenas pelas partículas do Modelo Padrão, a localização da massa calculada por observações óticas seria a mesma da calculada a partir das lentes gravitacionais. Mas isso não foi observado no *Bullet Cluster*. Observações visuais nos dizem que a matéria deveria estar concentrada na região em vermelho da 1.3, enquanto que a distribuição de massa das lentes gravitacionais mostra que há muita massa concentrada nas duas regiões azuis, que são distintas da região vermelha.

Figura 1.3: Foto de um *Bullet Cluster retirada pela NASA*.

A matéria escura pode explicar esse fato. Acredita-se que a interação entre a matéria escura e o resto das partículas seja menor do que a interação entre a matéria comum e as outras partículas, por esse motivo, durante a colisão dos clusters a matéria escura passou por outras partículas, enquanto que as matérias luminosas acabaram se chocando entre si, desacelerando, se concentrando no meio da colisão, se aquecendo, e por fim, se separando da matéria escura.

Formação em Estruturas em Larga Escala (LSS)

Observações de estruturas em larga escala, como por exemplo as obtidas pelo telescópio *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS), mostram que o universo não deveria estar distribuído como está, pois, como já discutido, antes da CMB a matéria bariônica e os fótons oscilavam, então a matéria não era capaz de se aglomerar em objetos densos, e depois da CMB não teriam tempo para formar as estruturas que vemos hoje em larga escala. Diferente dos fótons e da matéria bariônica, a matéria escura não participava da oscilação, então, mesmo antes da CMB, ela poderia se aglomerar em alguns pontos criando regiões de maior densidade em que atraíram a matéria bariônica após a CMB, dando origem ao que observamos hoje.

Além dessas cinco evidências da existência da matéria escura conhecemos outras como a *Big Bang Nucleosynthesis* (BBN) que nos fornece a parcela de Hidrogênio e Hélio do universo, e diz que a matéria bariônica não explica o conteúdo total de matéria do universo, e que a matéria escura não pode ser composta por prótons e nêutrons; floresta de Lyman-alpha, nos dão informações sobre a localização de aglomerados de matéria escura, bem como quanta energia as partículas de energia escura podem ter.

Passamos então a considerar mais um componente no universo, que é matéria escura. Até esse ponto, o universo era constituído por radiação, e matéria (matéria bariônica e matéria escura).

1.1.3 Evolução do universo de um fluido perfeito

Vamos resolver as equações de Einstein com $\kappa = 0$. A primeira Eq. de Friedmann pode ser escrita como

$$H^2 = \frac{1}{3M_P^2}\rho\,, \tag{1.11}$$

onde

$$M_P^2 = \frac{1}{8\pi G}\,. \tag{1.12}$$

e a segunda Eq. de Friedmann

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_P^2}(1+w)\rho\,. \tag{1.13}$$

Dividindo a Eq. (1.13) pela Eq. (1.11) temos

$$H^{-2}\,dH = -\frac{3}{2}(1+w)dt\,, \tag{1.14}$$

integrando os dois lados

$$H = \frac{2}{3(1+w)(t-t_0)}\,. \tag{1.15}$$

Partindo da definição do parâmetro de Hubble

$$\frac{\dot{a}}{a} = H\,, \tag{1.16}$$

podemos utilizar a Eq. (1.15) para obter

$$\boxed{a \propto (t-t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}}}\,, \tag{1.17}$$

A evolução da densidade de energia pode ser obtida a partir da equação de movimento

$$\dot{\rho} + 3H(1+w)\rho = 0\,. \tag{1.18}$$

Escrevendo o parâmetro de Hubble em função do fator de escala da métrica, assim

$$\frac{1}{\rho}\,d\rho = -3(1+w)\frac{1}{a}\,da\,, \tag{1.19}$$

que implica em

$$\boxed{\rho \propto a^{-3(1+w)}}\,, \tag{1.20}$$

Notamos que a gravidade Newtoniana não consegue explicar a expansão acelerada. Vamos considerar uma esfera homogênea cujo raio e densidade de energia são a e ρ, respectivamente. A equação de Newton para o movimento de uma partícula pontual com massa m nessa esfera é dada por

$$\begin{aligned} m\ddot{a} &= -\frac{Gm}{a^2}\left(\frac{4\pi a^3 \rho}{3}\right) \Rightarrow \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\rho\,. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Então, a gravidade Newtoniana apenas explica uma expansão desacelerada do universo.

Veremos adiante que um caso importante para a cosmologia é quando ρ é constante, e isso ocorre, segundo a Eq. da continuidade, para $w = -1$, pois nesse caso $\ddot{a}/a < 0$ para $\rho > 0$, e esperamos que essa condição da densidade de energia seja sempre válida. Nesse caso, o parâmetro de Hubble também é constante pela primeira equação de Friedmann, nos fornecendo a evolução do fator de escala

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \\ Hdt &= \frac{da}{a}\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Para o caso em que H=cte,

$$Ht \propto \ln a \tag{1.23}$$

$$a \propto e^{Ht}\,. \tag{1.24}$$

Representa um universo de de-Sitter.

Para o caso em que H não é uma constante o fator de escala do universo evolui segundo

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}\,, \tag{1.25}$$

onde a equação de estado $\omega \equiv \mathcal{P}/\rho$ é constante no tempo. Essas equações não são válidas para $\omega = -1$. Veremos o que fazer nesse caso.

Utilizando as equações acima obtidas podemos ver, para cada componente, como que a densidade de energia evolui, qual o valor da equação de estado, e como o fator de escala evolui para cada era dominada para algum dos componentes do universo.

O universo em que vivemos é composto por três "grupos" de componentes: o primeiro deles é a matéria não relativística, composta por bárions[5] e matéria escura (seção 1.1.2); o segundo é o da radiação, ou matéria relativística; o terceiro e último componente foi introduzido no nosso universo para que a teoria represente bem o mesmo, esse componente é a energia escura.

[5]Apesar de serem léptons, consideramos aqui os elétrons também.

A densidade de energia dos dois primeiros grupos pode ser calculada considerando os seguintes fatos:

• Matéria não relativística: quando o fator de escala for pequeno, a densidade é necessariamente grande. Como a densidade é inversamente proporcional ao volume para a massa bariônica ela é proporcional a a^{-3}. Nesse caso $\omega = 0$.

• Radiação (matéria relativística): A densidade de energia da radiação é dada pela densidade de partículas de radiação multiplicada pela média de energia por partícula. A densidade é proporcional a a^{-4}. Nesse caso $\omega = 1/3$.

Aplicando as densidades de energia obtidas anteriormente na equação de Friedmann (A.18), é possível calcular o fator de escala para o nosso universo. Para a matéria não relativística $a(t) \propto t^{2/3}$. Para a matéria relativística $a(t) \propto t^{1/2}$. Para a energia no vácuo $a(t) \propto exp(Ht)$.

Desde que o universo esteja expandindo ele deve ser menor no passado e mais denso. De $\rho_m \propto a^{-3}$ e $\rho_r \propto a^{-4}$, vimos que a radiação decai mais rápido que a matéria para o universo em expansão. Assim sendo, em algum ponto do passado, o universo era dominado por radiação. Voltando no tempo, o universo era muito denso e portanto quente e relativamente pequeno. O início do universo é geralmente chamado de "*big bang*", dá uma imagem de uma vasta explosão quando a evolução do universo começou.

Parece muito provável que o universo também sofreu um período de expansão acelerada no seu início, similarmente ao que aconteceu, e acontece, em tempos posteriores devido ao termo cosmológico. Essa época inicial de expansão acelerada é chamada de inflação.

Grosseiramente falando, o modelo *standard* de cosmologia pode ser resumido numa sucessão das seguintes dominações de eras: radiação → matéria → termo cosmológico.

Agrupando o que foi visto até agora, temos

- Matéria relativística (radiação): fótons e neutrinos
  - $\rho_r \propto a^{-4}$
  - $\omega = 1/3$
  - $a(t) \propto t^{1/2}$
- Matéria não relativística (poeira): matéria bariônica e matéria escura
  - $\rho_m \propto a^{-3}$
  - $\omega = 0$
  - $a(t) \propto t^{2/3}$

Que pode ser visto graficamente em Fig. (1.1.3).

O modelo em que se considera a existência apenas da radiação, da matéria bariônica e da matéria escura não consegue descrever todas as observações. A partir de agora estudaremos as evidências da energia escura e serão apresentados os problemas de se representar a energia escura pela constante cosmológica.

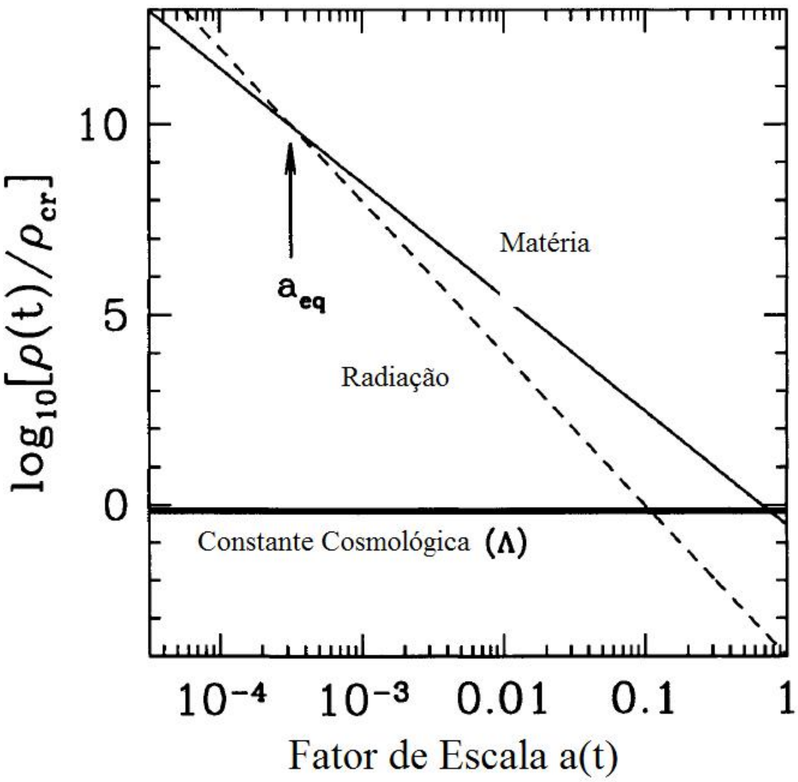

Figura 1.4: Evolução da densidade de energia pelo fator de escala [10].

1.2 Evidências observacionais da DE

1.2.1 Energia, redshift e a lei de Hubble

A expansão do universo permite derivar o quadrimomento para definir o redshift. Vamos começar tomando a geodésica de uma partícula sem massa, ou seja, um fóton

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} P^\nu P^\sigma = 0 \ ,$$

onde o quadrimomento é dado por $P^\mu = \left(E, \vec{P}\right) = dx^\mu / d\lambda$. Usando a regra da cadeia podemos reescrever a geodésica de um fóton como

$$E\frac{dP^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} P^\nu P^\sigma = 0 \ . \tag{1.26}$$

Considerando o caso em que $\mu = 0$ e calculando o símbolo de Christoffel temos

$$E\frac{dE}{dt} + \delta_{ij} \ a \ \dot{a} \ P^i P^j = 0 \ ,$$

onde os índices latinos $\imath$, $\jmath$ são espaciais.

Lembrando que a norma do momento para uma partícula é dada por $\parallel P \parallel^2 = m^2$, para esse caso em que $m = 0$ temos

$$\| P \|^2 = m^2 \Rightarrow g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0 \Rightarrow E^2 = \delta_{ij} P^i P^j \ .$$

Aplicando esse termo na equação da geodésica, temos

$$\frac{dE}{E} = -\frac{da}{a},$$

cuja solução é:

$$\boxed{E(t) \propto a^{-1}(t)} \ .$$

A energia das partículas diminui com a expansão do universo. Com esse resultado e com o conhecimento de mecânica quântica de que $E = h\nu = h/\lambda$, onde E é a energia do fóton, h é a constante de Plank, ν é a frequência de onda da radiação e λ o comprimento de onda, podemos escrever o comprimento de onda em função da expansão do fator de escala do universo,

$$\lambda(t) = ha(t) \ .$$

Em 1998 a expansão acelerada do universo foi observada por dois grupos que mediram Supernovas do tipo Ia (SN Ia) [14–16]. Geralmente usamos o redshift para descrever a evolução do universo, isso se relaciona com o fato da luz emitida por um objeto estelar se deslocar para o vermelho devido à expansão do universo. Se o universo estiver em expansão, ou seja, $\frac{da}{dt} > 0$, o comprimento de onda medido por um observador parado em um dado referencial não é o mesmo que o medido por um observador que vê a fonte de radiação se afastando. O comprimento de onda λ cresce proporcionalmente com o fator de escala a, seu efeito pode ser quantificado pela definição do **redshift**

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a} \ , \tag{1.27}$$

onde o subescrito zero denota que as quantidades são obtidas hoje, λ_o é o comprimento de luz da radiação observado, e λ o comprimento emitido. No passado o tempo emitido é menor que t_0, onde t_0 representa o tempo hoje. Como $a(t_0) = 1$, o redshift é dado por

$$1 + z = \frac{1}{a} \ , \tag{1.28}$$

onde $z_0 = 0$. O redshift é utilizado para medir o distanciamento de um objeto em relação a nós.

Hoje existem boas evidências de que o universo está em expansão acelerada, ou seja, não só distâncias entre corpos "estacionados" aumentam conforme o tempo mas a velocidade desse distanciamento também. Por causa da possibilidade da alteração da métrica de um universo é necessário introduzir o fator de escala. A relação entre a distância própria e a distância comóvel x, distância esta vista por um observador em queda livre, é dada por

$$d = a(t)x \ , \tag{1.29}$$

se o objeto só possui **velocidade de expansão**, então $\frac{dx}{dt} = 0$, e sua **velocidade total de afastamento** será de $v(t) = \frac{d}{dt}(d)$. Pela (1.29), temos a **lei de Hubble**

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{dt}(a(t)) \cdot x + d \cdot \frac{d}{dt}(x) \\ &= \frac{d}{dt}(a(t)) \cdot x \\ &\equiv H(t)d \ , \end{aligned} \tag{1.30}$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble, $H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Note que o **parâmetro de Hubble** depende do tempo, portanto **não é constante no tempo**. O que é constante é a **constante de Hubble** $H(t_0) = H_0$. Esse valor é estimado em $H_0 = 73.8 \pm 2.4 km(s \cdot Mpc)^{-1}$.

1.2.2 Distâncias

Chamamos de **coordenadas comóveis** da métrica de FLRW, as coordenadas em que as partículas seguem o movimento dos observadores típicos da métrica (1.1), ou seja, em queda livre local. Devido ao símbolo de Christoffel não ser invariante e mudar com o observador, para satisfazer a condição acima vamos fixar algum(ns) índice(s) e igualar o símbolo de Christoffel da métrica à zero. Vamos escolher um caso que facilite as contas, $\Gamma^{\mu}_{00} = 0$.

Pelo fato do **intervalo de tempo próprio** ser dado por $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}$, para um *relógio comóvel* ds não depende da variação de espaço, pois esta variação será igual a zero. Portanto, nese caso o intervalo de tempo próprio é $ds = dt$, onde o tempo é medido no referencial em repouso de um relógio comóvel. Definimos o tempo próprio onde $ds^2 = -dt^2$ por $d\tau^2 = dt^2$.

O fator de escala pode ser utilizado para calcular a **distância comóvel** percorrida por um raio de luz (fóton). Para um fóton $ds^2 = 0$, o que implica em $dl = d\tau/a = dt/a$, onde dl é a parte espacial de (1.1). A distância total entre dois instantes t_i e t_f é escrita por

$$\chi = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt'}{a(t')} \ . \tag{1.31}$$

Utilizando a distância comóvel (1.31) é possível calcular uma distância muito importante chamada de **horizonte comóvel**, ou **tempo conforme**.[6] O horizonte comóvel é calculado para um fóton, na ausência de interações, que começou a sua trajetória no início do universo, em $t_i = 0$,

[6] Em cosmologia padrão, estando o espaço em expansão, a distância é uma grandeza dinâmica que altera-se no tempo. Para definir a distância entre pontos distantes arbitrariamente, tem-se que especificar dois parâmetros: os pontos e uma curva específica que os conecte. A distância entre os pontos pode ser encontrada pelo comprimento desta curva de conexão. A distância comóvel define esta curva de conexão como uma curva de tempo cosmológico constante. Operacionalmente, as distâncias comóveis não podem ser diretamente medidas por um simples observador com as limitações da Terra, pelo fato de existirem interações que interferem nas medições.

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \ , \tag{1.32}$$

Essa é uma distância importante pois nada pode ter percorrido uma distância maior que o horizonte comóvel.

Para um universo plano, o fluxo observado de apenas uma fonte situada a uma distância comóvel $\chi(a)$ (1.31), é dado por (ver seção 1.4 de [2])

$$F(a) = \frac{La^2}{4\pi \ \chi(a)^2} \tag{1.33}$$

onde L é a luminosidade da fonte emissora e a^2 no numerador serve para corrigir a diferença entre a luminosidade L_0 de hoje e da época da emissão. De acordo com a (1.28), $\lambda_0 = \lambda/a(t)$, e sabendo que a energia de um fóton é inversamente proporcional ao comprimento de onda, temos que $E_0 = a(t)E$. Por outro lado $ds = 0$. Pelo fato de que no passado $a(t)$ era menor do que é hoje, a partir de (1.31) podemos ver que a distância comóvel percorrida por um fóton em um intervalo de tempo fixo era maior no passado do que hoje. Isso implica que, o número de fótons passando por uma esfera de raio comóvel $\chi(a(t))$ é menor hoje do que no passado, por um fator de $a(t)$. A luminosidade para cada comprimento de onda é dada por

$$L_\lambda = n_\lambda E_\lambda \ , \tag{1.34}$$

onde n_λ é o número de fótons com o comprimento de onda igual a λ e E_λ é a energia de cada fóton com esse comprimento de onda. Integrando a equação (1.34), temos a luminosidade total

$$L = \int^\lambda L_{\lambda'} d\lambda' \ .$$

Pelas condições discutidas acima, a luminosidade é menor que a emitida por um fator $a(t)^2 \rightarrow L_0 = a(t)^2 L$.

Outro conceito importante como ferramenta observacional é a medida de distância no background em expansão. Podemos medir a distância comóvel que não se altera com a expansão do universo, e a distância física que varia com o fator de escala. Outra forma de medir distância é utilizando a luminosidade de objetos estelares, que é chamada de **distância de luminosidade**, d_L, que para um universo plano é definida como

$$d_L(a) \equiv \frac{\chi(a)}{a} \ . \tag{1.35}$$

Generalizando a equação do fluxo de energia

$$F(a) = \frac{L}{4\pi d_L(a)^2} \ , \tag{1.36}$$

no espaço-tempo de Minkowski, onde L_s é a luminosidade absoluta da fonte e d a distância entre a fonte e o observador, para um universo em expansão, a distância luminosa é definida como

$$d_L(a) = \sqrt{\frac{L}{4\pi F(a)}} \ . \tag{1.37}$$

Vamos considerar um objeto localizado a uma distância χ_s do observador com uma luminosidade absoluta igual a L_s. A energia de luz emitida do objeto em um intervalo de tempo Δt_1 é ΔE_1, e a energia medida pelo observador é ΔE_0. Essas energias são proporcionais às frequências da luz no ponto observado, então, dizemos que $\Delta E_1 \propto \nu_1$ e $\Delta E_0 \propto \nu_0$, o que implica em

$$L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1} \ , \qquad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} \ . \tag{1.38}$$

A velocidade da luz é constante em qualquer ponto, $c = \nu_1\lambda_1 = \nu_0\lambda_0$, portanto

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z \ . \tag{1.39}$$

Combinando as duas equações acima obtemos

$$L_s = L_0(1+z)^2 \ . \tag{1.40}$$

A luz viajando ao longo da direção χ satisfaz a equação da geodésica $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\chi^2 = 0$. Obtemos assim

$$\chi_s = \int_0^{\chi_s} d\chi \tag{1.41}$$
$$= \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{1.42}$$
$$= \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \ , \tag{1.43}$$

onde definimos $h(z) \equiv H(z)/H_0$, e usamos que $1 + z = \dfrac{a_0}{a}$, portanto

$$\dot{z} = -\frac{a_0}{a^2}\dot{a} \tag{1.44}$$
$$= -\frac{a_0}{a}H \tag{1.45}$$
$$= -(1+z)H \tag{1.46}$$

Utilizando a métrica geral

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\xi^2 + f_k^2(\xi)\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\theta^2\right)\right] \ ,$$

onde

$$f_k(\xi) = \begin{cases} sen(\xi), & \text{para } k = +1; \\ \xi, & \text{para } k = 0; \\ senh(\xi), & \text{para } k = -1, \end{cases}$$

a área da esfera em $t = t_0$ é dada por

$$S = 4\pi (a_0\, f_k(\chi_s))^2 \ , \tag{1.47}$$

portanto

$$\mathcal{F} = \frac{L_0}{4\pi (a_0\, f_k(\chi_s))^2} \ . \tag{1.48}$$

Substituindo as Eqs. (1.43) e (1.48) na Eq. (1.37), obtemos a distância luminosa em um universo em expansão

$$d_L = a_0\, f_k(\chi_s)(1+z) \ . \tag{1.49}$$

No *background* de FLRW com $f_k(\chi) = \chi$, utilizando a Eq. (1.43) obtemos

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \ . \tag{1.50}$$

Portanto, a taxa de Hubble pode ser obtida a partir da distância de luminosidade

$$\boxed{H(z) = \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right) \right]^{-1}} \ . \tag{1.51}$$

Dessa forma, se pudermos medir a distância de luminosidade conseguimos saber qual é a taxa de expansão do universo.

A densidade de energia ρ nas equações de Friedmann, para mais de um fluido, componente, inclui a densidade de energia de cada componente do universo

$$\rho = \sum_i \rho_i^{(0)} (a/a_0)^{-3(1+w_i)} \ , \tag{1.52}$$

em função do redshift

$$\boxed{\rho = \sum_i \rho_i^{(0)} (1+z)^{3(1+w_i)}} \ , \tag{1.53}$$

onde ρ_i e w_i correspondem a densidade de energia e equação de estado de cada componente do universo, respectivamente. Utilizamos a Eq. (1.27).

Considerando um universo formado de mais de um componente, o parâmetro de Hubble pode ser escrito como

$$\boxed{H^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_i^{(0)} (1+z)^{3(1+w_i)}} \ , \tag{1.54}$$

onde de observações do HST $H_0 = 67.37 \pm 0.54\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ [17], e o parâmetro de densidade para cada componente individual para a época presente é definido como

$$\Omega_i^{(0)} \equiv \frac{8\pi G \rho_i^{(0)}}{3H_0^2} = \frac{\rho_i^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} \ , \tag{1.55}$$

em que

$$\rho_c^{(0)} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \ . \tag{1.56}$$

Aplicando a Eq. (1.54) na Eq. (1.50), obtemos a distância de luminosidade em um universo plano

$$\boxed{d_L = \frac{1+z}{H_0}\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^{(0)}(1+z')^{3(1+w_i)}}}} \, . \tag{1.57}$$

Na Fig. (1.5) plotamos a distância luminosa Eq. (1.57) para um universo plano com apenas dois componentes, matéria ($w_m = 0$) e constante cosmológica ($w_\Lambda = -1$), temos $\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Podemos notar que para valores pequenos de z, a distância de luminosidade é aproximadamente $d_L \simeq z/H_0$. Quanto maior o valor do parâmetro de densidade da constante cosmológica maior é a distância de luminosidade.

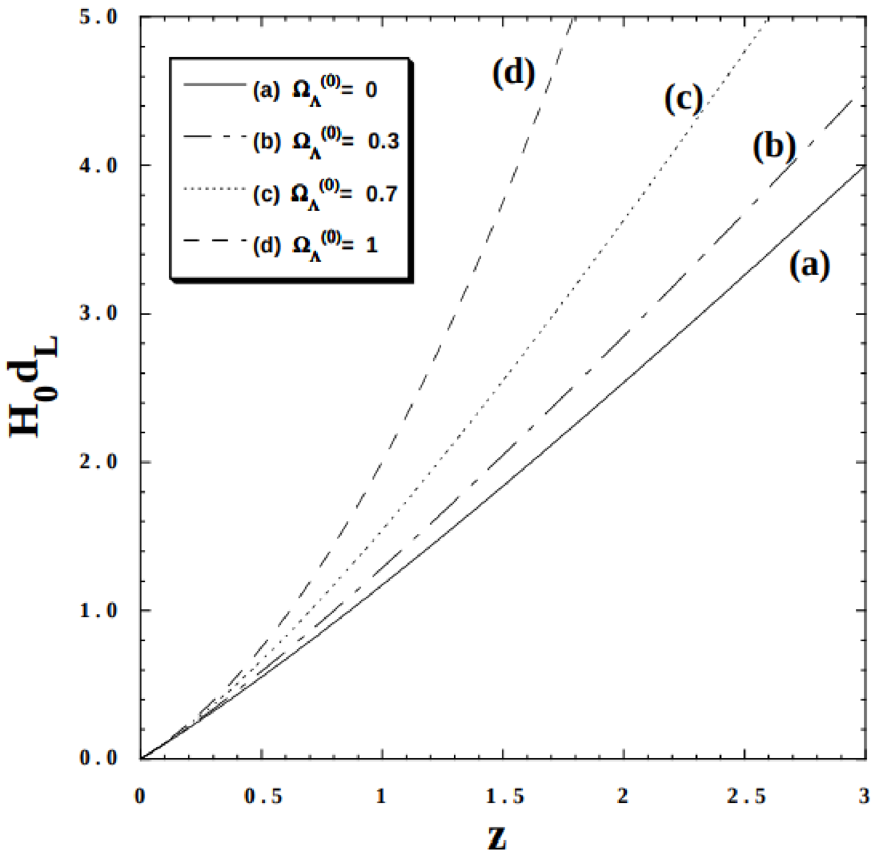

Figura 1.5: Distância luminosa d_L em unidades de H_0^{-1} para um universo plano com um fluido não relativístico ($w_m = 0$) e constante cosmológica ($w_\Lambda = -1$). Foi plotado $H_0 d_L$ para vários valores de $\Omega_\Lambda^{(0)}$ [18].

Vamos definir agora o **módulo da distância**, denotada por μ, como sendo a diferença entre a magnitude aparente m e a absoluta M de uma fonte,

$$\mu \equiv m - M = 5log_{10}\left(\frac{d_L}{1Mpc}\right) + K \ , \tag{1.58}$$

onde $K \equiv 25$ é a correção para o deslocamento do espectro para dentro ou para fora do intervalo de comprimentos de onda medido. Para escrever d_L em Mpc, devemos lembrar que $a = \dfrac{1}{1+z}$ e $\dfrac{dz}{dt} = -(1+z)H$, então $\chi(z) = c\displaystyle\int_0^z \dfrac{dz'}{H(z')}$ e $d_L(z) = c(1+z)\displaystyle\int_0^z \dfrac{dz'}{H(z')}$. Utilizando a Eq. (1.50) podemos escrever

$$\mu_z = 5log_{10}\left[c(1+z)\int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right] + 25\ . \tag{1.59}$$

Da equação acima vemos que o parâmetro de Hubble depende do conteúdo de energia do universo. Para um universo plano e composto somente por matéria e por uma constante cosmológica, energia escura, da (A.18) obtemos que

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_{m0}(1+z)^3}\ , \tag{1.60}$$

onde Ω_λ é a densidade relativa de energia associada a constante cosmológica, e Ω_{m0} a densidade relativa de energia atual da matéria. Assim podemos comparar as predições teóricas dadas pela (1.59), com as distâncias em módulo de dois objetos luminosos em diversos redshifts.

A **distância própria** s, medida a partir da origem, de um objeto na posição do raio comóvel r, pela (1.1) é de

$$s = a(t)\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-\kappa r'^2}} = a(t)\times\begin{cases}\text{arcsen(r)} & \text{se } \kappa = 1\\ \text{arcsenh(r)} & \text{se } \kappa = -1\\ \text{r} & \text{se } \kappa = 0\end{cases} \tag{1.61}$$

Note que o fator de escala $a(t)$ determina a distância medida por um observador típico entre dois objetos comóveis quaisquer cuja separação em coordenadas comóveis é r.

1.2.3 Restrições de SN Ia

Supernovas do tipo Ia (SN Ia) podem ser observadas quando estrelas binárias de anãs brancas excedem a massa limite de Chandrasekhar e explodem. Acreditam que as SN Ia são formadas da mesma forma independente de onde estejam no universo, por essa razão elas possuem a mesma magnitude absoluta M, independente do redshift z, e isso as transformam em velas padrões do universo. É possível relacionar a magnitude absoluta, M, com a magnitude aparente, m, e a distância luminosa de uma SN Ia utilizando a expressão (1.58) [19–21]. Portanto, observando a magnitude aparente m é possível calcular a distância de luminosidade d_L e assim conhecer a evolução da taxa de expansão do nosso universo.

A Fig. (1.6) e a Fig. (1.7) representam o diagrama de Hubble para distâncias de supernovas Tipo Ia, as *velas padrão* (objetos cujo brilho intrínseco é sempre o mesmo).

A ideia mais popular é que a matéria escura consiste de partículas elementares produzidas no primeiro momento do Big Bang.

Nos aglomerados de galáxias, em geral, a matéria escura e a bariônica estão misturadas. As medidas indicam que a matéria escura representa cerca de 75% da massa

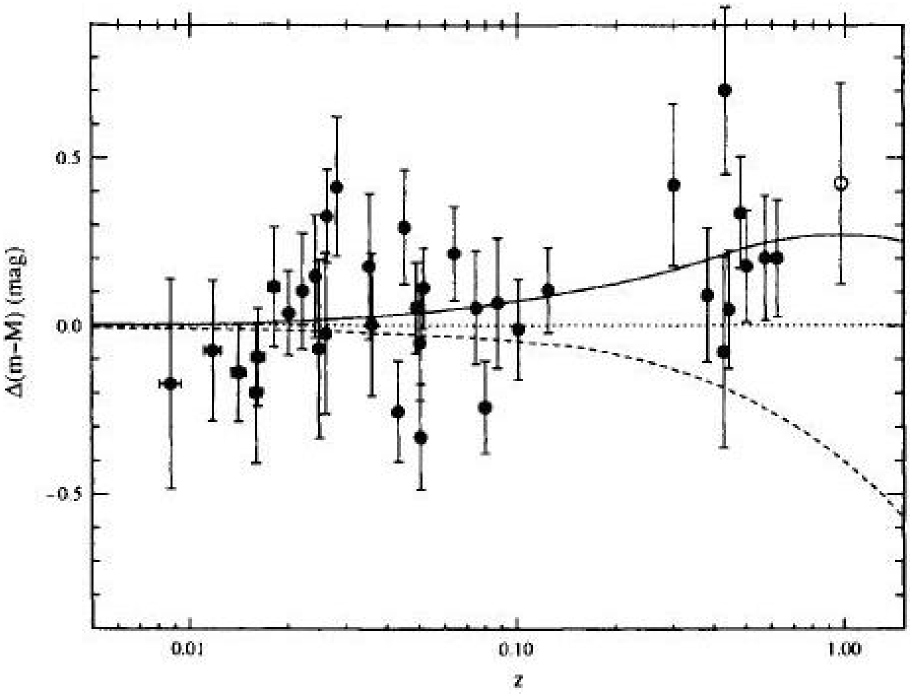

Figura 1.6: Mostra a magnitude aparente pelo redshift (um indicador de distância) do diagrama de Hubble para distâncias de supernovas Tipo Ia. As linhas mostram diferentes predições para energias dos componentes do universo. A definição de cada linha está explicada na legenda de Fig. (1.7). Figura retirada de [3]

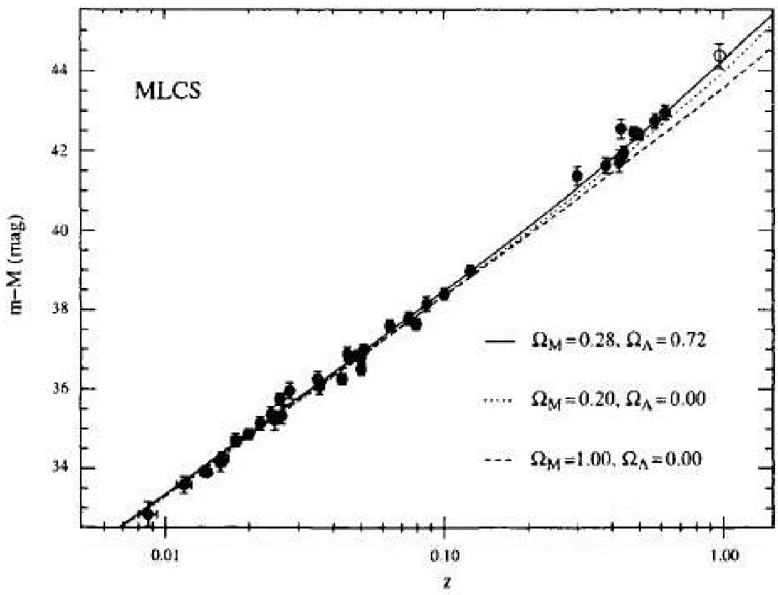

Figura 1.7: Apresenta os resíduos para o diagrama de Hubble para distâncias de supernovas Tipo Ia. É fácil ver que os dados sugerem um universo composto por matéria com apenas aprox. 27% da densidade crítica, e com a energia escura sendo representada pela constante cosmológica, com densidade de aprox. 68% da densidade crítica. Figura retirada de [3]

das galáxias, enquanto que os outros 25% são representados pela matéria bariônica. Dados observacionais nos mostram que cerca de 90% da massa bariônica esta na forma de gás quente entre as galáxias, e aproximadamente 10% está dentro das galáxias em forma de estrelas e gás.

Para entendermos como trabalhar com SN Ia, vamos pegar um exemplo de duas supernovas [14]

SN Ia	característica do *redshift*	*redshift* (z)	magnitude aparente (m)
1992P	baixo	0.026	16.08
1997ap	alto	0.83	24.32

Como a SN Ia está em baixo *redshift*, já vimos que $d_L(z) \simeq z/H_0$ para $z \ll 1$. Substituindo sua magnitude aparente e o *redshift* na Eq. (1.58), obtemos que a magnitude absoluta é $M = -19.09$, onde utilizamos $h = 0.72$. Vamos agora analisar a SN Ia 1997ap. Por serem todas SN Ia, a magnitude dessa supernova também é $M = -19.09$. Substituindo a magnitude aparente, a magnitude absoluta e o redshift na Eq. (1.58), obtemos que $H_0\, d_L \simeq 1.16$.

Da Eq. (1.57) é possível calcular, para a SN Ia 1997ap, o valor de $H_0\, d_L$ em $z = 0.83$ para dois arranjos de densidade de energia dos componentes do universo, $\Omega_m^{(0)} = 1$ e $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ com $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$. Obtemos, respectivamente, $H_0\, d_L \simeq 0.95$ e $H_0\, d_L \simeq 1.23$. Esse resultado é compatível com a Fig. (1.5) e valida o resultado de $H_0\, d_L \simeq 1.16$ obtido para a SNIa 1997ap.

Porém dois dados é pouca coisa para validar uma teoria. Em 1998 Perlmuter *et al.* [*Supernova Cosmology Project* (SCP)] descobriram 42 SN Ia com $z = 0.16 - 0.62$ [14], e fazendo a mesma análise que fizemos aqui, assumindo um universo plano ($\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$) encontraram $\Omega_m^{(0)} = 0.28^{+0.09}_{-0.08}$ (a barra de erro é 1σ), ou seja, aproximadamente 70% da densidade de energia do universo vem da energia escura.

Em 2004 Riess *et al.* [22] compartilharam dados com o *Hubble Space Telescope* (HST), e com a análise de 170 SN Ia disseram com um nível de 99% de certeza que o universo passou de uma fase de desaceleração para uma fase de aceleração com $\Omega_m^{(0)} = 0.29^{+0.05}_{-0.03}$ (a barra de erro é 1σ).

Em [23] os dados de Tonry *et al.* [24] e Riess *et al.* [23] foram tomados para montar um gráfico da distância de luminosidade em função do redshift comparados com curvas teóricas obtidas da Eq. (1.57). O valor que mais se adequa aos dados experimentais é $\Omega_m^{(0)} = 0.31 \pm 0.08$, que é compatível com o resultado apresentado anteriormente obtido por Riess *et al.* [22].

1.2.4 Problema da coincidência

Da Eq. (1.54) o parâmetro de desaceleração, definido como $q \equiv -a\ddot{a}/\dot{a}^2$, é dado por

$$q(z) = \frac{3}{2}\frac{\sum_i \Omega_i^{(0)}(1+w_i)(1+z)^{3(1+w_i)}}{\sum_i \Omega_i^{(0)}(1+z)^{3(1+w_i)}} - 1\ . \tag{1.62}$$

Para um universo plano com apenas dois componentes, matéria ($w_m = 0$) e constante cosmológica ($w_\Lambda = -1$)

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{3}{2}\frac{\Omega_m^{(0)}(1+w_m)(1+z)^{3(1+w_m)} + \Omega_\Lambda^{(0)}(1+w_\Lambda)(1+z)^{3(1+w_\Lambda)}}{\Omega_m^{(0)}(1+z)^{3(1+w_m)} + \Omega_\Lambda^{(0)}(1+z)^{3(1+w_\Lambda)}} - 1 \\ &= \frac{3}{2}\frac{\Omega_m^{(0)}(1+z)^3}{\Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)}} - 1\ . \end{aligned} \tag{1.63}$$

O valor crítico do redshift será aquele em que para qualquer valor inferior a ele o universo está acelerado, ou seja, para $z < z_c$ temos que $q < 0$. Assim, fazendo $q(z_c) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\frac{\Omega_m^{(0)}(1+z_c)^3}{\Omega_m^{(0)}(1+z_c)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)}} - 1 = 0 \\ 3\Omega_m^{(0)}(1+z_c)^3 &= 2\left[\Omega_m^{(0)}(1+z_c)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)}\right] \\ \Omega_m^{(0)}(1+z_c)^3 &= 2\Omega_\Lambda^{(0)}\ , \end{aligned} \tag{1.64}$$

que implica em

$$z_c = \left(\frac{2\Omega_\Lambda^{(0)}}{\Omega_m^{(0)}}\right)^{1/3} - 1\,. \tag{1.65}$$

Quando $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ e $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$, temos $z_c = 0.67$. O problema da expansão acelerada ocorrer aproximadamente agora ao longo de toda a história do universo, quando a matéria e a constante cosmológica evoluíam de maneiras tão diferentes, é chamado de **problema da coincidência**.

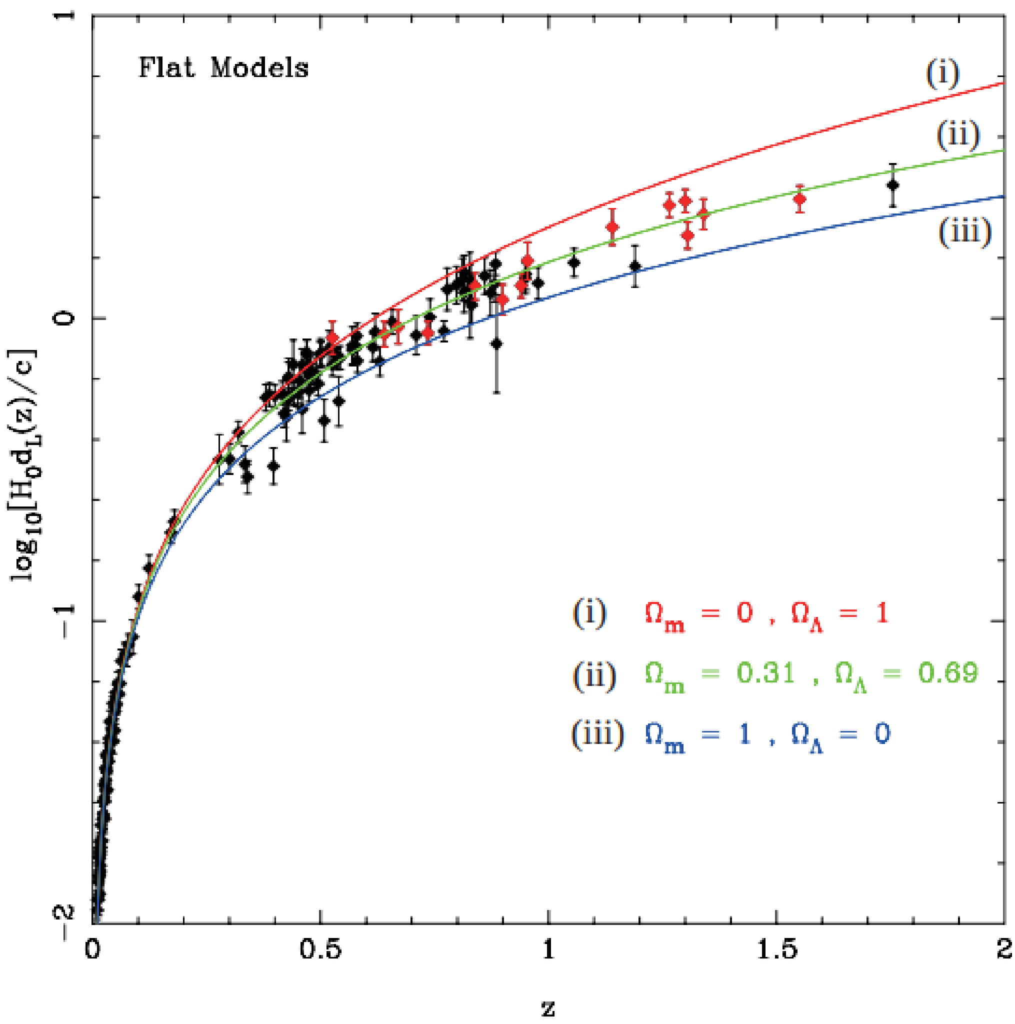

Figura 1.8: A distância luminosa $H_0 d_L$ (plot log) pelo *redshift* z para um modelo cosmológico plano. Os pontos pretos vem do conjunto de dados de [25], enquanto que os pontos vermelhos mostram os dados de [26]. As três curvas mostram valores teóricos de $H_0 d_L$ para (i) $\Omega_m^{(0)} = 0$, $\Omega_\Lambda^{(0)} = 1$, (ii) $\Omega_m^{(0)} = 0.31$, $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.69$, e (iii) $\Omega_m^{(0)} = 1$, $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$ [18, 23].

Apesar de só termos falado da utilização de SN Ia para estudar a cosmologia, existem outros candidatos a vela padrão como Radio Galáxias e Gamma Ray Busters (GRB), mas entrar em detalhes foge do escopo desse trabalho.

1.2.5 Idade do universo

A necessidade da existência da constante cosmológica aparece também quando comparamos a idade do universo (t_0) calculada teoricamente pela primeira equação de Friedmann com observações da idade de populações de estrelas mais velhas (t_s). Deveríamos ter $t_s < t_0$, porém, isso só acontece se considerarmos que o universo é hoje dominado pela constante cosmológica.

A idade de diferentes objetos estelares antigos foi medida por alguns grupos. Por exemplo, Jimenez *et al.* [27] determinou a idade de clusters Globulares da Via Láctea como $t_1 = 13.5 \pm 2$Gyr. Richer *et al.* [28] e Hansen *et al.* [29], mediram a idade do cluster globular M4 como sendo $t_1 = 12.7 \pm 0.7$Gyr. Por esses valores precisamos que a idade do universo seja $t_0 > 11 - 12$Gyr. O WMAP, assumindo o modelo ΛCDM produziu um valor de $t_0 = 13.73^{+0.13}_{-0.17}$Gyr para a idade do universo [30], enquanto que a medida mais recente foi obtida pelo Planck que obteve um valor de $t_0 = 13.801 \pm 0.024$ Gyr [17].

Aplicando a Eq. (1.53) na primeira equação de Friedmann, obtemos

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_r^{(0)}(a/a_0)^{-4} + \Omega_m^{(0)}(a/a_0)^{-3} + \Omega_\Lambda^{(0)} - \Omega_K^{(0)}(a/a_0)^{-2}\right] , \tag{1.66}$$

onde $\Omega_K^{(0)} \equiv K/(a_0^2 H_0^2)$. Utilizando a Eq. (1.27) podemos expressar H em termos de z. A idade do universo pode ser escrita como

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_0^{t_0} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dz}{H(1+z)} \\ &= \int_0^\infty \frac{dz}{H_0 x \left[\Omega_r^{(0)} x^4 + \Omega_m^{(0)} x^3 + \Omega_\Lambda^{(0)} - \Omega_K^{(0)} x^2\right]^{1/2}} , \end{aligned} \tag{1.67}$$

onde $x(z) \equiv 1 + z$. Pelo fato da radiação ter sido dominante apenas no início do universo por um período curto comparado à idade total dele, e depois disso não ter sido muito relevante, podemos ignorá-la na Eq. (1.67). Vamos então calcular a idade do universo assumindo que $\Omega_r = 0$ para os casos

- universo plano dominado por matéria: $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$, $\Omega_K^{(0)} = 0$ e $\Omega_m^{(0)} = 1$;
- universo aberto: $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$ e $\Omega_m^{(0)} < 1$;
- universo plano com constante cosmológica: $\Omega_\Lambda^{(0)} \neq 0$, $\Omega_K^{(0)} = 0$ e $\Omega_m^{(0)} < 1$.

Vamos primeiramente estudar os casos em que não consideramos a constante cosmológica, para depois vermos como ela ajuda a explicar a idade do universo. Considerando então $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$, da Eq. (1.66) temos $\Omega_K^{(0)} = \Omega_m^{(0)} - 1$, o que implica na idade do universo, a partir da Eq. (1.67), de

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^2 \left[1 + \Omega_m^{(0)} z\right]^{1/2}} . \tag{1.68}$$

- Para um universo plano ($\Omega_K^{(0)} = 0$ e $\Omega_m^{(0)} = 1$) sem constante cosmológica ($\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$), obtemos

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} . \tag{1.69}$$

De observações do projeto *Planck* [17] o valor atual do parâmetro de Hubble é

$$H_0 = 67.37 \pm 0.54\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}} \ , \tag{1.70}$$

que é consistente com observações da CMB [14] e estruturas em larga escala (do inglês *Large-scale Structure*, LSS) [31, 32]. Substituindo o parâmetro de Hubble (1.70) na expressão para idade do universo (1.69), obtemos para esse modelo $t_0 = 8 - 10$Gyr. Portanto, a idade de um universo plano sem constante cosmológica não está entre o intervalo aceito pelos dados do Planck de $t_0 = 13.801 \pm 0.024$ Gyr [17].

- No modelo de universo aberto ($\Omega_m^{(0)} < 1$), e sem constante cosmológica ($\Omega_\Lambda = 0$), a Eq. (1.68) nos mostra que a idade do universo será maior que a do caso em que $\Omega_m^{(0)} = 1$, pois com menos matéria a interação gravitacional levaria mais tempo para diminuir a taxa de expansão para seu valor atual. A Eq. (1.68) fornece para os seguintes valores assintóticos

$$\Omega_m^{(0)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad H_0 t_0 \to 1 \ , \tag{1.71}$$

e

$$\Omega_m^{(0)} \to 1 \quad \Rightarrow \quad H_0 t_0 \to \frac{2}{3} \tag{1.72}$$

Observações da CMB [30] nos dizem que o universo é aproximadamente plano $|\Omega_K^{(0)}| = |\Omega_m^{(0)} - 1| \ll 1$, mas para esse caso, com $\Omega_m^{(0)} \simeq 1$, a Eq. (1.72) não nos dá uma idade para o universo no intervalo $t_0 = 13.801 \pm 0.024$ Gyr como visto na Fig. (1.9).

- Vamos agora considerar um universo plano ($K_0 = 0$ e $\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$) com a existência da constante cosmológica ($\Omega_\Lambda^{(0)} \neq 0$). Nesse caso a Eq. (1.67) nos fornece

$$\begin{aligned} H_0 t_0 &= \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\left[\Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)}\right]^{1/2}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda^{(0)}}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda^{(0)}}}{\sqrt{\Omega_m^{(0)}}}\right) \ . \end{aligned} \tag{1.73}$$

Os valores assintóticos são

$$\Omega_m^{(0)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad H_0 t_0 \to \infty \ , \tag{1.74}$$

e

$$\Omega_m^{(0)} \to 1 \quad \Rightarrow \quad H_0 t_0 \to \frac{2}{3} \ . \tag{1.75}$$

Na Fig. (1.9) foi plotado a idade do universo t_0 pelo parâmetro de densidade $\Omega_m^{(0)}$. Quando $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ e $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$ temos $t_0 = 0.964 H_0^{-1}$, que corresponde a $t_0 = 13.1$Gyr. *O modelo de universo plano com constante cosmológica sendo*

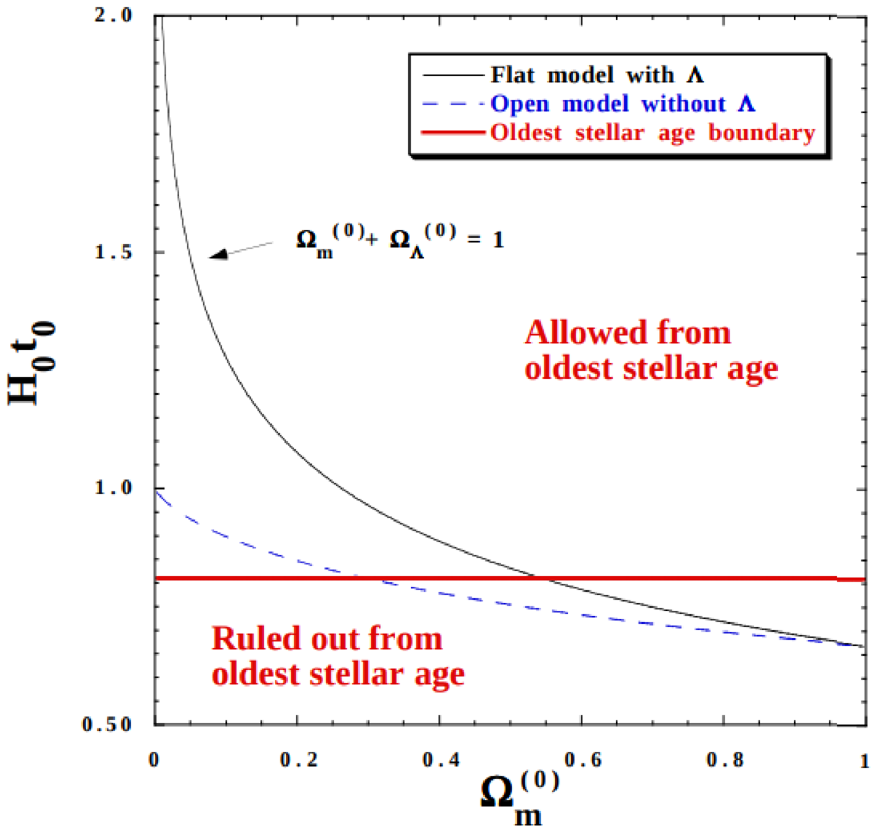

Figura 1.9: A idade do universo (em unidades de H_0^{-1}) é plotada contra $\Omega_m^{(0)}$ para (i) um modelo plano com $\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$ (curva sólida) e (ii) um modelo aberto (curva tracejada). Também foi mostrado o limite $t_0 = 11$Gyr vindo do limite de estrelas velhas. A região acima dessa borda é permitida por consistência. Esse condição suporta fortemente a evidência de energia escura [18].

responsável por uma idade do universo próxima das observações de $t_0 = 13.801 \pm 0.024$ *Gyr, faz com que o modelo seja mais fortalecido.*

Na Fig. (1.9) percebemos que tanto o modelo de universo plano com constante cosmológica quanto o modelo de universo aberto sem constante cosmológica conseguem fornecer uma idade para o universo que fica próxima o valor obtido pelo Planck de $t_0 = 13.801 \pm 0.024$ Gyr [17].

1.2.6 Condições de CMB e LSS

Observações independentes da CMB [30] e estruturas em larga escala (LSS) [31, 32] apoiam idéias de um universo dominado pela energia escura. Anisotropias da CMB observadas pelo COBE em 1992 e pelo WMAP em 2003 exibem um espectro quase invariante em escala das perturbações primordiais, que concorda com previsões da cosmologia inflacionária. Weinberg [33] construiu uma expressão analítica para a posição do primeiro pico do espectro de potências que depende da distribuição das densidades de energia no *background* entre a matéria e a constante cosmológica. O primeiro pico acústico está por volta de $l = 200$, restringindo a curvatura do universo em $|1 - \Omega_{\text{total}}| = 0.030^{+0.026}_{-0.025} \ll 1$.

Combinando dados da CMB [30], onde foi assumido que $w_{DE} = -1$, com dados do *Supernova Legacy Survey* (SLS), obtemos que $\Omega_K^{(0)} = -0.015^{+0.02}_{-0.016}$, consistente com um universo plano. Combinando esses dados com os dados de H_0 obtidos no HST, temos $\Omega_K^{(0)} = -0.010^{+0.016}_{-0.009}$ e $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.72 \pm 0.04$.

Dados de SN Ia, CMB (WMPA1) e clusters de galáxias em larga-escala, reforçam a necessidade de que o universo seja dominado por $\Omega_\Lambda^{(0)} \simeq 0.7$ e $\Omega_m^{(0)} = 0.3$. A matéria bariônica é responsável por apenas 4% de toda a matéria contida no universo. O resto da matéria (27%) é originado de um componente não luminoso sem natureza bariônica, mas com equação de estado $w = 0$, conhecida como *Cold Dark Matter* (CDM). A energia escura é distinguida da matéria escura pelas suas equações de estado, permitindo que o universo esteja em expansão acelerada.

O cenário onde a energia escura é representada pela constante cosmológica Λ e se supõe que a matéria escura seja fria, portanto, *Cold Dark Matter* (CDM), é chamado de modelo ΛCDM, tem se tornado o modelo padrão da cosmologia moderna. No entanto, pode ser que a origem da energia escura não seja a constante cosmológica. Se a energia escura for representada por um campo escalar, então sua equação de estado será dinâmica. A fim de entender a origem da energia escura, é necessário diferenciar entre a constante cosmológica e modelos de energia escura dinâmica.

Em um universo dominado pela energia escura o potencial gravitacional varia de forma diferente ao caso em que ele é dominado pela matéria, que leva à uma marca no espectro de potências da CMB [34]. Esse fenômeno, é chamado de efeito *Integrated Sachs-Wolfe* (ISW) [35], pode também ser importante para ajudar a distinguir a constante cosmológica de modelos de energia escura dinâmica, já que a evolução do potencial gravitacional depende fortemente da propriedade dinâmica da equação de estado da energia escura.

1.3 Constante cosmológica

Como mencionado anteriormente, a constante cosmológica, Λ, foi originalmente introduzida por Einstein em 1917 para alcançar um universo estático. Depois da descoberta de Hubble em 1929 de que o universo está em expansão, ela foi retirada por Einstein por não ser mais necessária. Do ponto de vista da física de partículas, no entanto, a constante cosmológica naturalmente surge como uma densidade de energia do vácuo. Além disso, se Λ se originar da densidade de energia do vácuo, sua escala de energia precisa ser muito maior do que a constante de Hubble atual. Esse é o "problema da constante cosmológica" e era bem conhecido por existir muito antes da descoberta da expansão acelerada do universo em 1998.

Se o tensor energia-momento for nulo, isso é, se estivermos considerando o vácuo, as equações de Einstein se reduzem a uma forma simples

$$R_{\mu\nu} = 0 \ .$$

Considerando a constante cosmológica Λ sendo não nula (idéia introduzida por Einstein), as equações de Einstein são escritas por

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \ ,$$

associa Λ à energia do vácuo. Esse é o motivo pelo qual representaram a energia escura pela constante cosmológica. Veremos mais sobre isso em breve.

O tensor de Einstein, $G^{\mu\nu}$, e o tensor energia-momento, $T^{\mu\nu}$, satisfazem a identidade de Bianchi, $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$, e a conservação da energia, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Desde que a métrica $g^{\mu\nu}$ seja constante com respeito a derivadas covariantes, existe uma liberdade de adicionar o termo $\Lambda g^{\mu\nu}$ nas equações de Einstein. As equações modificadas de Einstein são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \, T_{\mu\nu} \ . \tag{1.76}$$

Tomando o traço da equação acima, ou seja, multiplicando os dois lados por $g^{\mu\nu}$, é possível escrever

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \ , \tag{1.77}$$

onde T é o traço do tensor energia-momento.

Vamos tentar entender como a constante cosmológica afeta a gravidade Newtoniana. Considerando a métrica geral $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $h_{\mu\nu}$ é a perturbação em volta da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, vamos calcular a componente de índice 00 das equações de Einstein. Sabemos que $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$. Se desprezarmos a variação temporal e o efeito rotacional da métrica, R_{00} pode ser escrito como $R_{00} \simeq -(1/2)\Delta h_{00} = \Delta\Phi$, onde Φ é o potencial gravitacional. No limite relativístico com $|P| \ll \rho$, temos $T_{00} \simeq -T \simeq \rho$. Então a componente 00 da Eq. (1.77) nos dá

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda \ . \tag{1.78}$$

A equação de Poisson é reproduzida na gravidade Newtoniana se $\Lambda = 0$ ou $\Lambda \ll 4\pi G\rho$. Desde que Λ tenha dimensão de [Comprimento]$^{-2}$, a escala que corresponde à constante cosmológica precisa ser muito maior do que a escala de objetos estelares onde a gravidade Newtoniana funciona bem, em outras palavras a constante cosmológica se torna importante em largas escalas.

Considerando o *background* de FLRW dado por (1.1), as Eqs. de Einstein modificadas (1.76), considerando a existência da constante cosmológica, se resumem as Equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \ , \tag{1.79}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \ . \tag{1.80}$$

Como o aumento de Λ faz H e $\ddot{a}/a$ aumentarem, a constante cosmológica exibe um efeito repulsivo.

Para entender o motivo de Einstein ter introduzido a constante cosmológica em suas equações vamos reproduzir suas contas. Einstein acreditava que o universo era estático, ou seja, que $\dot{a} = 0$, o que implica em $H = 0$ e $\ddot{a}/a = 0$. Substituindo esses valores nas duas Eqs. de Friedmann na ausência da constante cosmológica, pois ela ainda não havia sido necessária, encontramos

$$\rho = -3P = \frac{3\kappa}{8\pi G a^2} \ . \tag{1.81}$$

A Eq. (1.81) mostra que a densidade de energia, ρ, ou a pressão, P, precisa ser negativa. Para Einstein essa solução não é física[7], pois era de se esperar que ambas fossem positivas. Por esse motivo adicionou a constante cosmológica em suas equações obtendo o que chamamos das Eqs. modificadas de Einstein (1.76).

Einstein acreditava que além de estático, o universo era dominado pela matéria bariônica (poeira), onde $P = 0$. Nesse caso, a segunda Eq. de Friedmann com constante cosmológica nos fornece

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G} \ . \tag{1.82}$$

Substituindo esse resultado na primeira equação de Friedmann com constante cosmológica obtemos

$$\Lambda = \frac{\kappa}{a^2} \ . \tag{1.83}$$

Desde que a densidade de energia seja positiva ($\rho > 0$), pela Eq. (1.82) temos que a constante cosmológica deve ser positiva também ($\Lambda > 0$). Como já vimos, a curvatura κ pode assumir três valores $\kappa = \{-1, 0, +1\}$. Pela Eq. (1.83), se $\Lambda > 0$ então $\kappa > 0$, o único valor possível é $\kappa = +1$. Então, um universo estático dominado por matéria bariônica deve ser um universo fechado com raio $a = 1/\sqrt{\Lambda}$.

Para entender essa necessidade da constante cosmológica vamos analisar o caso em que temos maior intimidade, a gravitação Newtoniana. Tratando o universo como uma esfera, a gravidade é uma força que atrai tudo para seu centro, então para que o universo seja estático é necessário introduzir uma força repulsiva para fazer com que o raio a da esfera seja constante. Isso corresponde à adicionar um termo proporcional à constante cosmológica $\Lambda/3$ no lado direito da Eq. (1.21).

Einstein abandonou a idéia da constante cosmológica pois descobertas de *redshifts* de estrelas distantes mostraram que o universo não era estático. Mas nos anos 90, com a descoberta da expansão acelerada do universo ($\frac{\ddot{a}}{a} > 0$) causada por um componente chamado de energia escura, a constante cosmológica foi reinserida nas equações para explicar essa observação. Isso não é uma contradição pois antes a constante cosmológica servia para explicar um universo estático dominado por matéria, a implicação era a de um universo fechado, agora, a constante cosmológica serve para explicar a expansão acelerada em um universo plano.

As equações de Friedmann são praticamente as mesmas incluindo a energia escura representada pela constante cosmológica Λ. Nesse caso, as equações de Einstein ganham um termo a mais,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

[7]Hoje sabemos que o campo escalar tem pressão negativa $P = (\phi^2/2 - V(\phi))$.

A componente 00 nos diz agora que

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right).$$

No entanto, se definirmos a densidade de energia escura como

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{M_P^2} \ ,$$

a primeira equação de Friedmann parece só ter recebido um termo a mais. Nós a escrevemos como

$$\boxed{H^2 = \frac{1}{3M_P^2}(\rho + \rho_\Lambda)} \ .$$

Considerando novamente o termo a mais nas equações de Einstein acrescentado pela energia escura, se fizermos as contas para a segunda equação de Friedmann temos

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{6M_P^2}(\rho + 3P) = \frac{\Lambda}{3}} \ .$$

Vamos considerar o caso onde $\rho = p = 0$ e para simplificar $M_P^2 = 1$, no entanto, assumimos que $\Lambda > 0$. Então, integrando a primeira equação de Friedmann encontramos

$$a(t) \propto exp\left(\sqrt{\Lambda/3}t\right) \ .$$

Essa solução é geralmente chamada de solução de de Sitter e corresponde a um universo que cresce com expansão acelerada.

Assumindo um universo espacialmente plano $K = 1$ e $\kappa = 0$, das equações de Friedmann temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(1 + 3\omega)\rho,$$

vemos que a expansão acelerada ocorre para $\omega < -1/3$.

1.3.1 Problema da densidade

A partir da definição do parâmetro de densidade

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{3M_P^2 H_0^2} \ , \tag{1.84}$$

temos que

$$\rho_\Lambda = 3M_P^2 H_0^2 \Omega_\Lambda^{(0)} \ . \tag{1.85}$$

Por observações sabemos que hoje $\Omega_\Lambda^{(0)} \simeq 0.7$, portanto

$$\rho_\Lambda \approx 10^{-47}\text{GeV}^4 \ . \tag{1.86}$$

Enquanto isso, segundo Teoria Quântica de Campos (QFT, do inglês *Quantum Field Theory*), a densidade de energia do vácuo é calculada pela soma das energias do ponto zero com massa m

$$\begin{aligned}\rho_{\rm vac} &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\sqrt{k^2+m^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dk\, k^2\sqrt{k^2+m^2}\ .\end{aligned} \tag{1.87}$$

Isso exibe uma divergência ultravioleta: $\rho_{\rm vac} \propto k^4$. No entanto esperamos que a QFT seja válida até alguma escala de *cut-off* $k_{\rm max}$ em que a integral (1.87) seja finita

$$\rho_{\rm vac} \approx \frac{k_{\rm max}^4}{16\pi^2}\ . \tag{1.88}$$

Para o caso da Relatividade Geral esperamos que isso seja válido abaixo da escala de Planck: $M_P = 1.22 \times 10^{19}$GeV. Desde que tomemos $k_{\rm max} = M_P$, encontramos uma energia do vácuo estimada de

$$\rho_{vac} \approx 10^{74}{\rm GeV}^4\ , \tag{1.89}$$

que é 10^{121} da ordem de magnitude maior que o valor observado pela Eq. (1.86). Mesmo se tomarmos uma escala de energia da QCD (do inglês *Quantum Chromodynamic*) para $k_{\rm max}$, obtemos $\rho_{\rm vac} \approx 10^{-3}{\rm GeV}^4$ que ainda é muito maior do que ρ_Λ.

Esse é um problema de *fine-tuning*, que fez com que muitos autores tentassem diferentes abordagens para a questão da energia escura. Ao invés de assumir que temos uma energia negativa pequena, a ignoramos, presumimos que seja nula devido à algum mecanismo ainda desconhecido, e investigamos a possibilidade de que a energia escura seja causada pela dinâmica de um campo escalar leve. Isso não resolve o problema da constante cosmológica, mas abre uma outra forma de atacar o problema.

1.4 Resumo

Faremos um breve resumo do que foi visto.

Energia escura

Evidências do distanciamento de supernovas sugerem que há uma forma de energia, a **energia escura** (*dark energy* DE), além da matéria e da radiação. Um candidato para esse novo componente do universo deve permanecer constante no tempo. A primeira possibilidade foi introduzida como sendo a constante cosmológica.

Há dois fatores que sugerem a existência da energia escura. O primeiro deles é que dados de aglomerados de galáxias mostram que o grupo de matéria não relativística (matéria bariônica e matéria escura) e o grupo de matéria relativística (fótons) e os neutrinos representam aproximadamente apenas 27% da densidade crítica do universo. Observações experimentais mostram que o universo em que vivemos é plano, ou seja, a densidade total é igual a densidade crítica. Isso implica na necessidade de mais um componente, tal componente com pressão negativa[8] e densidade aproximadamente igual a 68% da densidade crítica. O segundo fato é o teste observacional do diagrama da distância teórica pelo redshift, dada a energia de composição do universo. Desde que a energia da partícula caia com a^{-1}, enquanto que a matéria não relativística continue constante, a densidade de matéria ultrapassa a densidade de radiação. Isso também pode ser notado pela Fig. (1.1.3).

Pode-se notar que recentemente o universo não é dominado por matéria, e sim por energia escura. O resultado clássico e cosmológico pode ser entendido por um universo "*smooth*". A CMB desacopla da matéria a uma temperatura $T \sim 1/4eV$.

Energia escura é uma forma de energia que não interage eletromagneticamente, de modo que sua existência só pode ser verificada indiretamente, via interação gravitacional. O primeiro candidato para a energia escura foi a constante cosmológica, que tem uma densidade de energia constante. O modelo de um universo dominado por energia escura, associada à constante cosmológica, e por matéria escura é denotado por ΛCDM, onde Λ representa a constante cosmológica e CDM é abreviação para *cold dark matter.*

Agora que já sabemos a origem da energia escura vamos entender melhor suas implicações.

Problemas do modelo ΛCDM e novos candidatos à energia escura

O modelo de universo ΛCDM plano, é o mais simples por ter menos parâmetros, e por ser capaz de reproduzir os dados observacionais atuais, existem outros modelos porém mais complicados e nem tanto fiéis à realidade. No entanto, existem alguns problemas quando tentamos representar a energia escura pela constante cosmológica, o que faz com que apareçam outros candidatos.

1 - Tentando associar a constante cosmológica com a densidade de energia no vácuo. Supondo que teorias quânticas de campos são modelos apropriados para descrever a física de particulas até uma escala mínima de $1/\Lambda$, podemos dizer que Λ corresponde a uma escala de energia máxima, menor que a massa de Planck reduzida. Assim, no vácuo, a densidade de energia será $\rho_{vac} \sim \Lambda^4 \sim M_P^4 \sim 10^{73}(Gev)^4$. Por outro lado a densidade de energia escura $\rho_\Lambda = 3M_P^2 H_0^2 \Omega_\Lambda \sim 10^{-47}(Gev)$, ou seja, $\rho_{vac} \sim 10^{120}\rho_\Lambda$.

2 - Considerando a evolução temporal dos diferentes componentes do universo. Já vimos que as densidades de energia da radiação, e da matéria não relativística são $\rho_r \propto a(t)^{-4}$ e $\rho_m \propto a(t)^{-3}$, respectivamente. Para a energia escura ser representada pela constante cosmológica temos que $\rho_\Lambda = cte$. Hoje as densidade de energia e matéria escura têm a mesma ordem de grandeza, o que significa que no passado elas diferiam muito. Por que justamente hoje elas têm a mesma ordem de grandeza? Esse é o *problema da coincidência.*

[8]Hoje sabemos que o nosso universo está em expansão acelerada, ou seja, $\ddot{a} > 0$. A partir da ação (A.19) temos que $\rho + 3p < 0 \Rightarrow p < 0$, pois por definição $\rho > 0$. Para este caso deveríamos ter um universo dominado por uma forma de matéria com pressão negativa.

Por causa destes dois problemas procuramos modelos alternativos de energia escura. Considerando a energia escura como um campo físico, foram criados alguns modelos, porém o mais válido é a interação entre a energia escura (DE) e a matéria escura (DM). A principal motivação é que, com a interação, suas densidades de energia não evoluirão mais no tempo de modo a amenizar o problema da coincidência. Outra razão é a de que a DE e a DM têm uma origem desconhecida, portanto, é provável que exista uma interação entre elas além da gravitacional. Mais motivos serão vistos a seguir quando estudarmos as condições para que a DE seja interagente, e quando considerarmos o acoplamento entre a DE e DM.

Se a matéria escura tem uma fração significante de contribuição dos componentes do Universo, é natural, no âmbito geral da teoria de campos, considerar a interação com o renascente campo do Modelo Cosmológico Padrão. Por falta de evidências do contrário, interações entre energia e matéria escura com matéria bariônica e radiação devem ser inexistentes ou desprezíveis. Portanto, para o Modelo Cosmológico Padrão as observações permitem a interação entre a energia e a matéria escura.

Uma apropriada escolha de acoplamento[9], é motivada por argumentos holográficos que podem conduzir a passagem da barreira fantasma que separa os modelos com parâmetro de estado $\omega > -1$ dos modelos com $\omega < -1$. Além disso, outro motivo que favorece o acoplamento é que ele pode influenciar nas perturbações dinâmicas e afetar o menor número de multipolos do espectro da CMB. Recentemente, foi mostrado que a interação pode inferir na história da expansão do Universo, como mostrado pelos dados de uma supernova juntamente com a CMB, e estrutura de grande escala. Contudo, a força de tal interação permanece fraca.

Um diferente modo de ver essa interação é por observações em grande escala. Se a energia escura não é representada pela constante cosmológica ela flutua pelo espaço-tempo. Nesse caso, a energia escura afeta não só a taxa de expansão como também o processo de formação das estruturas, através da flutuação de densidade. O crescimento das perturbações na energia escura pode ser de fato reforçado devido a esse acoplamento.

1.5 Modelos de campo escalar para a DE

Observações restringem o valor da equação de estado hoje como sendo próximo ao da constante cosmológica $w_{DE}(t=0) \simeq w_\Lambda = -1$, mas elas falam pouco sobre a evolução temporal de w_{DE}, então podemos ampliar os nossos horizontes e considerar a situação em que w_{DE} muda com o tempo, tal como na cosmologia inflacionária. Até agora uma ampla variedade de modelos de campo escalar para a matéria escura foram propostos, esses incluem a quintessência, *phantoms*, *K-essência*, táquions, entre muitos. Vamos aqui fazer uma breve descrição sobre o modelo de quintessência que será utilizado nesse trabalho.

[9] Entre alguns modelos de acoplamento entre energia e matéria escura considerando que a energia escura seja um campo físico, temos os modelos de Quintessência, Phantom e K-essência, onde respectivamente associam a energia escura a um campo escalar canônico, campo escalar com energia cinética negativa, e campo escalar não canônico. É importante ressaltar que existem outros modelos.

1.5.1 Quintessência

A quintessência é descrita por um campo escalar ordinário ϕ minimamente acoplado à gravidade. Sua ação é

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right] \ , \tag{1.90}$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do campo. Em um espaço-tempo plano de FLRW a variação da ação (1.90) com respeito a ϕ nos dá

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \ . \tag{1.91}$$

O tensor energia-momento do campo é obtido por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \ , \tag{1.92}$$

que, para esse caso, nos fornece

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right] \ . \tag{1.93}$$

No *background* de Friedmann obtemos a densidade de energia e a densidade de pressão do campo escalar

$$\rho = -T^0{}_0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \ , \qquad P = T^i{}_i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \ . \tag{1.94}$$

Então, as equações de Friedmann nos fornecem

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) \ , \tag{1.95}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right) \ , \tag{1.96}$$

Da Eq. (1.96) obtemos a condição de que o universo está em expansão acelerada ($\ddot{a}/a > 0$) quando $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Isso significa que necessitamos de um potencial plano para gerar a expansão acelerada. No contexto da inflação os parâmetros de *slow-roll*

$$\epsilon = \frac{M_P^2}{16\pi}\left(\frac{1}{V}\frac{dV}{d\phi}\right) \ , \quad \eta = \frac{M_P^2}{8\pi}\frac{1}{V}\frac{d^2V}{d\phi^2} \ , \tag{1.97}$$

são geralmente usados para conferir a existência de uma solução inflacionária para o modelo (1.90) [6]. A inflação ocorre se as condições de *slow-roll*,

$$\epsilon \ll 1 \ , \quad \text{e} \quad |\eta| \ll 1 \ , \tag{1.98}$$

forem satisfeitas. No contexto da energia escura essas condições de *slow-roll* não são completamente confiáveis, desde que também exista a matéria escura. No entanto elas continuam providenciando uma boa forma de conferir a existência de uma solução com expansão acelerada. Se definirmos os parâmetros de *slow-roll* em termos das derivadas temporais de H tal como

$$\epsilon = \frac{\dot{H}}{H^2} \ , \tag{1.99}$$

temos uma boa forma de conferir a existência de uma expansão acelerada desde que implementamos as contribuições da energia escura e da matéria escura.

A equação de estado para um campo ϕ é dada por

$$w_\phi = \frac{P}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \ . \tag{1.100}$$

Nesse caso a equação da continuidade (A.26) pode ser escrita na forma

$$\rho = \rho_0 \exp\left[- \int 3(1 + w_\phi)\frac{da}{a} \right] \ , \tag{1.101}$$

onde ρ_0 é a constante de integração. Notamos que a equação de estado para o campo ϕ varia no intervalo $-1 \leq w_\phi \leq 1$. No limite *slow-roll*

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad \Rightarrow \quad w_\phi = -1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = 0 \ . \tag{1.102}$$

onde a densidade de energia foi obtida a partir da Eq. (1.101). No outro limite

$$\dot{\phi}^2 \gg V(\phi) \quad \Rightarrow \quad w_\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto a^{-6}. \tag{1.103}$$

Em outros casos a densidade de energia se comporta como

$$\rho \propto a^{-m} \ , \qquad 0 < m < 6 \ . \tag{1.104}$$

Desde que $w_\phi = -1/3$ seja o limite entre a aceleração e a desaceleração, o universo exibe uma expansão acelerada para $0 \leq m < 2$.

Vamos encontrar uma expressão para o potencial do campo escalar a partir de uma expansão em série de potências

$$a(t) \propto t^p \ . \tag{1.105}$$

A expansão acelerada ocorre para $p > 1$. Da primeira equação de Friedmann podemos escrever

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho \\ &= \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V\right) \ , \end{aligned} \tag{1.106}$$

isolando o potencial podemos escrevê-lo em função de H e $\dot{H}$ como

$$V = \frac{3H^2}{8\pi G}\left(1 + \frac{\dot{H}}{3H^2}\right) \ . \tag{1.107}$$

Da segunda equação de Friedmann obtemos a relação $\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2$, que nos permite escrever ϕ em função de H

$$\phi = \int dt \left(-\frac{\dot{H}}{4\pi G} \right)^{1/2} , \tag{1.108}$$

onde escolhemos o sinal positivo do campo. Lembrando que $\epsilon = -\dot{H}/H^2$, da Eq. (1.97) é possível escrever

$$V = V_0 \exp\left(-\sqrt{-16\pi \frac{\dot{H}}{H^2}} \frac{\phi}{M_P} \right) , \tag{1.109}$$

onde V_0 é uma constante. Escrevendo o fator de escala como (1.105), temos

$$V = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi}{M_P} \right) , \tag{1.110}$$

e, segundo a Eq. (1.108), que o campo evolui com $\phi \propto \ln t$. O resultado acima mostra que o potencial exponencial pode ser usado pra energia escura desde que $p > 1$ pois $\ddot{a} \sim p(p-1) > 0$.

Além do fato dos potenciais exponenciais poderem dar origem à expansão acelerada, eles possuem soluções cosmológicas do tipo *scaling* em que a densidade de energia do campo (ρ_ϕ) é proporcional à densidade de energia do fluido (ρ_m).

Potenciais do campo escalar que não são íngremes comparados aos potenciais exponenciais podem levar a uma expansão acelerada. De fato os modelos de quintessência originais [36, 37], são descritos por

$$V(\phi) = \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^\alpha} , \tag{1.111}$$

onde M é uma constante que representa a escala de massa. Vamos analisar os *fine tuning* desses modelos. Vamos lembrar que

$$\rho_\phi^{(0)} \approx 10^{-47} \mathrm{GeV}^4 . \tag{1.112}$$

A massa ao quadrado do campo ϕ é dada por

$$m_\phi^2 = \frac{d^2V}{d\phi^2} \approx \frac{\rho_\phi}{\phi^2} , \tag{1.113}$$

enquanto que a taxa de expansão de Hubble é

$$H^2 \approx \frac{\rho_\phi}{M_P^2} . \tag{1.114}$$

O universo entra em um regime *tracker* no qual a densidade de energia do campo ϕ alcança a do fluido do *background* quando m_ϕ^2 diminui à ordem de H^2 [36, 37]. Isso mostra que o valor do campo no presente é da ordem da massa de Planck ($\phi \sim M_P$), que é típica da maioria dos modelos de quintessência. Desde que $\rho_\phi^{(0)} \approx V(\phi_0)$, da Eq. (1.111) obtemos a escala de massa

$$M = \left(\rho_\phi^{(0)} M_P^\alpha\right)^{\frac{1}{4+\alpha}} \ . \tag{1.115}$$

Esse resultado é interessante. Essas condições permitem combinar α e M, por exemplo, para $\alpha = 2$ a restrição implica em $M = 1$GeV [38]. Essa densidade de energia pode ser compatível com uma da física de partículas, que significa que o problema de *fine tuning* da constante cosmológica é aliviado. Mesmo assim sempre vamos ter um problema geral à atacar que é encontrar quais são potenciais de quintessência na física de partículas. O campo de quintessência precisa se acoplar com a matéria bariônica, que mesmo que suprimido pela escala de Planck, levará a forças de longo alcance e dependência de tempo das constantes da natureza. Existem restrições estreitas em tais forças e variações e qualquer modelo de sucesso deve satisfazê-las.

1.6 Interação no setor escuro do universo

Pelo fato da DE e da DM não pertencerem ao MP, ambos componentes serem desconhecidos e não interagirem com os fótons, podemos supor que existe uma interação entre esses dois componentes [39–45]. Em modelos de interação entre a DE e a DM onde as duas componentes são representadas por campos escalares, supõe-se que haja uma troca de energia entre elas, ou seja, a DE e a DM não são conservadas separadamente. As novas equações de estado são

$$\rho'_{DE} = -3H(1 + w_{DE})\rho_{DE} + aQ_{DE} \ , \tag{1.116}$$

$$\rho'_{DM} = -3H(1 + w_{DM})\rho_{DM} + aQ_{DM} \ , \tag{1.117}$$

onde a linha, $'$, representa a derivada em relação ao tempo conforme e $Q_{DE} = -Q_{DM}$ é a taxa de transferência de energia.

É possível definir uma equação de estado efetiva para a energia escura por

$$w_{ef} = w - \frac{a\,Q_{DE}}{3H\,\rho_{DE}} \ . \tag{1.118}$$

No caso em que há um decaimento de energia escura em matéria escura, a taxa de transferência de energia é proporcional à densidade de energia escura e à taxa de decaimento

$$Q_{DE} = -\Gamma\,\rho_{DE} \ , \tag{1.119}$$

e então, a solução da equação (1.116) é

$$\rho_{DE} = \rho_{DE0}\, a^{-3(1+w)}\, e^{-\Gamma(t-t_0)} \ . \tag{1.120}$$

Assumindo essa interação, entre a DE e a DM, muitas observações que antes não tinham explicação agora passam a ter, como o caso da evolução de quasares muito antigos [46], de aglomerados de galáxias pelo processo de virialização [47], e do aumento do desalinhamento entre a matéria escura e a matéria bariônica nos aglomerados de galáxias previsto pelo Modelo Padrão [48–50].

A interação também é responsável por aliviar o problema da coincidência, que justifica a evolução de cada um dos componentes de forma correlacionada [51].

É possível reproduzir uma solução de escala do tipo [52].

$$\rho_{DE} \propto \rho_{DM}\, a^{\xi} \;, \tag{1.121}$$

onde

$$\xi = -3w_{DE} \;. \tag{1.122}$$

Se $\xi = 0$, então a densidade de DM é proporcional à densidade de DE, $\rho_{DM} \propto \rho_{DE}$. Essa relação representa o nosso universo, então não há problema de coincidência [53]. Quanto mais a solução ξ se afastar do zero maior será o problema. Observando a equação de estado efetiva, eq. (1.118), percebe-se que o modelo de interação alivia o problema da coincidência.

Além dos indícios apresentados aqui que favorecem a existência da interação, outros foram vistos utilizando dados de WMAP, SNIa, BAO e SDSS [46].

1.7 Gravitação modificada

Para resolver problemas dentro do contexto da Relatividade Geral, o mais usual a se fazer é utilizar as equações de Einstein onde seu lado esquerdo representa a geometria do espaço e o direito a relação com a matéria. Costuma-se alterar o tensor energia-momento, lado direito, dependendo dos componentes assumidos, para ver como a geometria se altera e como as equações evoluem. Apesar desse método fornecer bons resultados comparados aos experimentos, outra possibilidade afim de explicar o nosso universo é alterar o lado esquerdo das equações de Einstein. Tais alterações poderiam vir de efeitos quânticos, como correções à ação de Einstein-Hilbert devido a efeitos de grandes curvaturas [18].

As equações de Einstein, equações da Relatividade Geral, são obtidas, como já vimos, pelo princípio da mínima ação de uma densidade Lagrangeana dada por $f(R) = R - 2\Lambda$. Para alterar a Relatividade Geral podemos considerar uma densidade lagrangeana que seja uma função arbitrária de R, por esse motivo essa nova teoria é chamada de **teoria de gravitação** $f(R)$. Para validar a teoria é preciso que ela descreva a atual aceleração do universo, não possua instabilidades e satisfaça os vínculos observacionais, ou seja, que no limite local a teoria recupere a RG. Podemos ver algumas teorias viáveis desse tipo em [54–57].

As diferenças entre uma teoria de gravitação $f(R)$ e a RG começam a existir a longas distâncias, onde poderíamos observar modificações no espectro de aglomerados de galáxias [58, 59], marcas na CMB [55, 60] e efeitos em lentes gravitacionais [61, 62].

A ação em uma teoria $f(R)$ é dada no referencial de Jordan por

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_m \right) \;, \tag{1.123}$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G$, com G sendo a constante gravitacional de Newton, R é o escalar de Ricci, e $\mathcal{L}_m$ é a lagrangeana da matéria.

Variando essa ação com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$, obtemos

$$F\,R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f\,g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu\,F + g_{\mu\nu}\Box F = \kappa^2\,T^{(m)}_{\mu\nu}\ , \tag{1.124}$$

onde $F \equiv \dfrac{\partial f}{\partial R}$.

Lembrando do tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\,g_{\mu\nu}\ , \tag{1.125}$$

e definindo o tensor energia-momento efetivo como

$$T^{(e)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2\kappa^2}(f - R\,F)\,g_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa^2}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box\right) F\ , \tag{1.126}$$

podemos reescrever a eq. (1.124) como

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{F}\left(T^{(e)}_{\mu\nu} + T^{(m)}_{\mu\nu}\right)\ . \tag{1.127}$$

Podemos escrever a gravitação $f(R)$ no referencial de Einstein usando a transformação

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2\,g_{\mu\nu}\ , \tag{1.128}$$

onde Ω^2 é o fator conforme e o til representa as coordenadas no referencial de Einstein. O escalar de Ricci nos dois referenciais se relacionam por

$$R = \Omega^{-2}\left(\tilde{R} + 6\tilde{\Box}w - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu w\,\partial_\nu w\right) \tag{1.129}$$

onde $w \equiv ln\,\Omega$, $\partial_\mu w \equiv \dfrac{\partial w}{\partial \tilde{x}^\mu}$, e $\tilde{\Box}w \equiv \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-\tilde{g}}\,\tilde{g}^{\mu\nu}\,\partial_\nu w\right)$.

Definindo

$$U = \frac{F\,R - f}{2\kappa^2}\ , \tag{1.130}$$

é possível reescrever a ação (1.123) na forma

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[\sqrt{-\tilde{g}}\,\left[\frac{1}{2\kappa^2}F\Omega^{-2}\left(\tilde{R} + 6\tilde{\Box}w - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu w\,\partial_\nu w\right) - \Omega^{-4}\,U\right] + \mathcal{L}_m\left(\Omega^{-2}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi_M\right)\right]\ , \tag{1.131}$$

onde utilizamos que $\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}}$. Fazendo $\Omega^2 = F$ (para $F > 0$) obtemos a ação no referencial de Einstein.

Pelo teorema de Gauss, o termo de borda pode ser desprezado na integral, ou seja, o termo proporcional a $\tilde{\Box}w$ será nulo. Definindo um campo por $\phi \equiv \dfrac{\sqrt{6}\,w}{k}$, lembrando que $w = \ln \Omega$, no referencial de Einstein temos $\phi = \dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\ln F$. Portanto, no referencial de Einstein

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[\sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(\tilde{R} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - V(\phi) \right) \right] + \mathcal{L}_m \left(F^{-1}(\phi)\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi_M \right) \right] , \tag{1.132}$$

onde $\mathcal{L}_m \equiv -\dfrac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - V(\phi)$ é a lagrangeana do campo escalar, e $V(\phi) = \dfrac{U}{F^2}$.

Variando a ação total no referencial de Einstein com relação ao campo ϕ obtemos a equação de movimento

$$\tilde{\Box}\phi - V_{,\phi} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} = 0 \ , \tag{1.133}$$

onde $\tilde{\Box}\phi = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-\tilde{g}}\,\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right)$. Variando a Lagrangeana da matéria com respeito a ϕ obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial\left(F(\phi)\tilde{g}^{\mu\nu}\right)}\frac{\partial\left(F(\phi)\tilde{g}^{\mu\nu}\right)}{\partial \phi} = -\sqrt{-\tilde{g}}\frac{F_{,\phi}}{2F}\,\tilde{T}^{(m)}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} \ , \tag{1.134}$$

assim,

$$\tilde{\Box}\phi - V_{,\phi} + k\,Q\,\tilde{T} = 0 \ , \tag{1.135}$$

onde $Q = -\dfrac{F_{,\phi}}{2\,k\,F}$ e $\tilde{T} = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{T}^{\mu\nu(m)}$.

Sendo assim, o modelo de gravitação $f(R)$ equivale, sob uma transformação conforme, a um modelo de quintessência com interação. Para que a a teoria $f(R)$ não possua instabilidades no universo primordial e esteja de acordo com as observações da CMB deve haver transferência de energia partindo da DE para outros componentes do universo, o que ajuda no problema da coincidência [63].

Capítulo 2

Modelo de quintessência

Nesse capítulo será apresentado o trabalho realizado pelo próprio autor [64] sobre análise dinâmica para dois tipos de interação fenomenológicas que sugerem interação entre DE e DM. Baseado em [65, 66], veremos uma breve introdução sobre análise dinâmica. Usamos unidades de Planck ($\hbar = c = M_P = 1$) em todo o texto seguinte.

2.1 Dinâmicas cosmológicas do campo escalar na presença de um fluido perfeito barotrópico

A fim de obter modelos viáveis de energia escura, exigimos que a densidade de energia do campo escalar continue subdominante durante as eras dominadas pela radiação e matéria, emergindo apenas em tempos tardios para dar origem à atual observação do universo acelerado. Vamos estudar a dinâmica cosmológica do campo escalar ϕ na presença de um fluido barotrópico que tem como equação de estado $w_m = P_m/\rho_m$. Denotamos a pressão e a densidade de energia do campo escalar por P_ϕ e ρ_ϕ com uma equação de estado $w_\phi = P_\phi/\rho_\phi$. As equações de Friedmann fornecem

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_\phi + \rho_m) \ , \tag{2.1}$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho_\phi + P_\phi + \rho_m + P_m) \ . \tag{2.2}$$

Aqui as densidades de energia ρ_ϕ e ρ_m satisfazem

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1 + w_\phi)\rho_\phi = 0 \ , \tag{2.3}$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(1 + w_m)\rho_m = 0 \ . \tag{2.4}$$

Assumiremos que w_m é constante, o que significa que a energia do fluido é dada por $\rho_m = \rho_0\, a^{-3(1+w_m)}$. Enquanto isso a dinâmica de w_ϕ se altera em geral.

Uma particular importância na investigação de cenários cosmológicos é o grupo de soluções em que a densidade de energia do campo escalar imita a densidade de energia do fluido do *background*. Soluções cosmológicas que satisfazem essa condição são chamadas de soluções tipo *scaling* [67]. Essas soluções são caracterizadas pela relação

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_\gamma} = C \ , \tag{2.5}$$

onde $\gamma = m + r$ e C é uma constante não nula. Como já mencionamos, potenciais exponenciais dão origem a soluções do tipo *scaling* e podem fazer um importante papel em cenários da quintessência, permitindo que a densidade de energia do campo imite o *background* sendo subdominante durante as eras da radiação e da matéria. Nesse caso, contanto que a solução do tipo *scaling* seja um atrator, para quaisquer condições iniciais genéricas, o campo poderia mais cedo ou mais tarde entrar no regime *scaling*, assim abrir uma nova linha de ataque no problema de *fine tuning* da energia escura. Notamos que o sistema precisa sair do regime *scaling* caracterizado pela Eq. (2.5) a fim de originar uma expansão acelerada. Isso é realizado se o declive do potencial do campo se torna pequeno em tempos tardios comparados com aquele para solução tipo *scaling* [68, 69]. Vale a pena mencionar que as soluções do tipo *scaling* vivem na borda entre a aceleração e a desaceleração. Consequentemente a densidade de energia do campo alcança a do fluido desde que o potencial seja pequeno em relação ao potencial das soluções do tipo *scaling*.

2.1.1 Sistema autônomo de modelos de DE representada por um campo escalar

Um sistema dinâmico que desempenha um importante papel na cosmologia pertence à classe dos chamados sistemas autônomos [67, 70]. Vamos primeiramente apresentar algumas definições básicas de sistemas dinâmicos [71, 72].

Um sistema dinâmico pode ser pensado como qualquer sistema abstrato constituído por

1. um espaço (espaço de estado ou espaço de fase);

2. uma regra matemática descrevendo a evolução de qualquer ponto nesse espaço.

Estamos interessados em descrever um sistema por um conjunto de quantidades importantes para ele, e o espaço de quantidade é um conjunto de todos os possíveis valores dessas quantidades. Para sistemas como o universo como um todo, a escolha de boas quantidades não é tão óbvia, o que torna necessário a escolha de variáveis convenientes. É possível analisar o mesmo sistema dinâmico com diferentes conjuntos de variáveis.

Existem dois tipos principais de sistemas dinâmicos. O primeiro são sistemas dinâmicos contínuos onde sua evolução é definida por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e o outro são os sistemas dinâmicos com tempo discreto que são definidas por um mapa ou equações de diferença. No contexto de cosmologia as equações de campo de Einstein para um espaço homogêneo e isotrópico resultam num sistema de EDOs. Portanto, estamos interessados em estudar o primeiro caso.

Vamos denotar $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$ como sendo um elemento do espaço de estado $X \subseteq \mathbb{R}^n$. A forma usual de representar o sistema dinâmico é [73]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

onde a função

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)). \tag{2.7}$$

As EDOs (2.6) definem um campo vetorial do sistema. Em qualquer ponto $x \in X$ e qualquer tempo particular t, $\mathbf{f}(x)$ define um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$. Vamos nos restringir à sistemas que sejam dimensionalmente finitos e contínuos. De fato, vamos exigir que a função f seja ao menos diferenciável em X.

Vamos considerar as seguintes equações diferenciais para duas variáveis $x(t)$ e $y(t)$

$$\dot{x} = f(x, y, t)\ , \qquad \dot{y} = g(x, y, t)\ , \tag{2.8}$$

onde f e g são as funções em termos de x, y e t. O sistema (2.8) é dito autônomo se f e g não dependem explicitamente do tempo.

Definição 1 (Ponto crítico). O sistema autônomo (2.6) é dito ter um ponto crítico em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ se, e apenas se, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Um ponto $(x_c,\, y_c)$ é dito ser um ponto fixo ou um ponto crítico do sistema autônomo se

$$(f, g)|_{(x_c, y_c)} = 0\ . \tag{2.9}$$

Um ponto crítico $(x_c,\, y_c)$ é chamado de atrator quando satisfaz a condição

$$(x(t), y(t)) \to (x_c, y_c) \qquad \text{para} \qquad t \to \infty\ . \tag{2.10}$$

Não satisfazendo a condição, ele é apenas um ponto crítico.

Para justificar essa definição vamos utilizar um sistema mecânico unidimensional com a força F. A equação de Newton para esse sistema é

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Introduzindo uma segunda variável $p = m\dot{x}$, podemos reescrever a EDO anterior como um sistema de duas equações de primeira ordem

$$\dot{x} = p/m \tag{2.11}$$

$$\dot{p} = F(x). \tag{2.12}$$

De acordo com a Definição 1, o ponto crítico do sistema (2.12) corresponde aos pontos x onde a força é nula $F(x_0) = 0$, pois o Jacobiano $J = \partial f/\partial x = \partial p/\partial x = \ddot{x}m$, nesses pontos não há força atuando na partícula e o sistema poderia, em princípio, continuar nesse estado indefinidamente.

Estabilidade ao redor dos pontos críticos

Um ponto fixo x_0 no sistema (2.6) é chamado de estável se todas as soluções de $\mathbf{x}(t)$ que comecarem perto de $\mathbf{x}_0$ continuarem perto desse ponto.

Podemos ver se o sistema se aproxima de um ponto crítico ou não estudando a estabilidade em volta dos pontos críticos. Vamos considerar pequenas perturbações δx e δy em torno do ponto crítico (x_c, y_c), isto é,

$$x = x_c + \delta x \ , \qquad y = y_c + \delta y \ . \tag{2.13}$$

Fazendo essa perturbação nas Eqs. (2.8), obtemos equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix} = \mathcal{M}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix} \ , \tag{2.14}$$

onde $N = \ln(a)$. A matriz $\mathcal{M}$ depende de x_c e y_c, e é dada por

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix}\partial f/\partial x & \partial f/\partial y\\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y\end{pmatrix}_{(x=x_c, y=y_c)} \ . \tag{2.15}$$

Essa matriz possue dois autovalores μ_1 e μ_2. A solução geral para a evolução de perturbações lineares pode ser escrita como

$$\delta x = C_1\, e^{\mu_1 N} + C_2\, e^{\mu_2 N} \ , \tag{2.16}$$

$$\delta y = C_3\, e^{\mu_1 N} + C_4\, e^{\mu_2 N} \ , \tag{2.17}$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4, são constantes de integração. Assim a estabilidade em volta dos pontos críticos depende da natureza dos autovalores. Em geral usamos a seguinte classificação [67, 74]

- (i) Nó estável: $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 < 0$;
- (ii) Nó instável: $\mu_1 > 0$ e $\mu_2 > 0$;
- (iii) Ponto de sela: $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 > 0$ (ou $\mu_1 > 0$ e $\mu_2 < 0$);
- (iv) Espiral estável: O determinante da matriz $\mathcal{M}$ é negativo (μ_1 e μ_2 possuem partes imaginárias) e as partes reais de μ_1 e μ_2 são negativas.

Um ponto fixo é um atrator apenas nos casos (i) e (iv).
Vamos ver um pouco mais sobre a estabilidade.

Definição 2 (Ponto fixo estável). Vamos assumir que $\mathbf{x}_0$ seja um ponto fixo do sistema (2.6). Esse ponto é chamado de estável se para todo $\epsilon > 0$ pudermos encontrar um δ tal que se $\phi(t)$ for solução de (2.6) satisfazendo $||\psi(t_0) - \mathbf{x}_0|| < \delta$, então a solução $\phi(t)$ existe para todo $t \geq t_0$ e vai satisfazer $||\psi(t) - \mathbf{x}_0|| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

O ponto é chamado de assintóticamente estável se ele for estável e as soluções abordarem o ponto crítico para todas equações iniciais próximas.

Definição 3 (Ponto fixo assintóticamente estável). Vamos assumir que $\mathbf{x}_0$ seja um ponto fixo do sistema (2.6). Esse ponto é chamado de assintóticamente estável se existir um número δ tal que se $\psi(t)$ é qualquer solução de (2.6) satisfazendo

$||\psi(t_0) - \mathbf{x}_0|| < \delta$, então $lim_{t\to\infty}\psi(t) = \mathbf{x}_0$.

A principal diferença é simplesmente que todas as trajetórias próximas de um ponto fixo assintóticamente estável vão eventualmente alcançar o ponto enquanto que trajetórias perto de um ponto estável podem por exemplo circundar o ponto. Se o ponto é instável então as soluções irão se afastar dele.

Encontraremos pontos fixos estáveis e não-assintóticamente estáveis quando estudarmos sistemas dinâmicos cosmológicos. Discutiremos um método usado para analisar propriedades de pontos fixos.

2.1.2 Teoria de estabilidade linear

A ideia básica de teoria de estabilidade linear pode ser explicada usando um sistema mecânico em uma dimensão $m\ddot{x} = F(x)$. Vamos assumir que exista um ponto x_0 onde a força se anula $F(x_0) = 0$. Assumimos também que $x(t)$ é uma variação muito pequena de x_0, assim $x(t) = x_0 + \delta x(t)$ com $\delta x(t)$ pequeno. Então $\ddot{x} = \ddot{\delta x}(t)$ e

$$F(x) = F(x_0 + \delta x) \approx F(x_0) + F'(x_0)\delta x + \cdots$$

como $F(x_0) = 0$, podemos escrever até a primeira ordem de δx que a equação de Newton para um ponto perto do ponto crítico é dada por

$$m\ddot{\delta x} = F'(x_0)\delta x \Rightarrow \ddot{\delta x} \propto e^{\mu t},$$

onde $F'(x_0)$ é uma constante. Esse é um coeficiente constante da EDO linear de segunda ordem, a equação auxiliar é $\mu^2 = F'(x_0)/m$. Além do mais, o sinal de $F'(x_0)$ determina as propriedades de estabilidade do ponto x_0. Se $F'(x_0) < 0$ a solução envolve funções trigonométricas e podemos dizer que x_0 é um ponto estável, para $F'(x_0) > 0$ a solução envolve exponenciais e podemos nos referir a esse ponto como instável.

Exatamente a mesma ideia pode ser utilizada quando estudamos um sistema dinâmico arbitrário. Seja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ um dado sistema dinâmico com ponto fixo em $\mathbf{x}_0$. Vamos linearizar o sistema em torno do ponto crítico. Escrevendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x}))$, podemos expandir em Taylor cada $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ perto de $\mathbf{x}_0$

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) y_i + \frac{1}{2!}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) y_j y_k + \cdots$$

onde o vetor $\mathbf{y}$ é definido por $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Note que, no nosso caso, estamos interessados nas derivadas parciais de primeira ordem. Para isso, damos uma importância particular para o objeto $\partial f_i/\partial x_j$ que pode ser interpretado como a matriz Jacobiana

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Os autovalores da matriz Jacobiana calculada nos pontos críticos $\mathbf{x}_0$ contém a informação sobre estabilidade. Como J é uma matriz $n \times n$, ela tem no total n autovalores, podendo ser complexos. Lembrando do exemplo do sistema mecânico unidimensional dado anteriormente, é claro que essa abordagem dá problema se pelo menos um autovalor for nulo, se $\mu = 0$ entao $F(x) = cte \Rightarrow \ddot{x} = cte \Rightarrow$ então x evolui com a variável temporal ao quadrado, x não oscilará. Isso motiva a próxima definição [73].

Definição 4 (Ponto hiperbólico). Vamos supor que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo (ponto crítico) do sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x)$. O ponto x_0 é dito ser hiperbólico se nenhum dos autovalores da matriz Jacobiana $J(\mathbf{x}_0)$ tiver a parte real nula. Caso contrário o ponto é chamado de não-hiperbólico.

A teoria de estabilidade linear falha para pontos não hiperbólicos e outros métodos devem ser usados para estudar as propriedades da estabilidade.

Falando grosseiramente estamos distinguindo três casos amplos: Se todos os autovalores tiverem parte real negativa, então podemos considerar que o ponto é um **nó estável**. Se pelo menos um autovalor tiver uma parte real positiva (negativa) e os outros a tiverem a parte real negativa (positiva), então o ponto crítico será instável e corresponderá à um **ponto de sela** que atrai trajetórias em algumas direções mas repele as mesmas em outras. Por último, todos os autovalores podem ter a parte real positiva, no caso em que todas as trajetórias vão ser repelidas. Esse é um **nó instável**.

Em mais de 3 dimensões se torna muito difícil classificar todos os possíveis pontos críticos baseado em seus autovalores. Agora vamos apresentar todos os possíveis casos para um sistema autônomo de duas dimensões.

Vamos considerar o sistema autônomo bidimensional dado por

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

onde f e g são funções de x e y. Assumimos que existe um ponto crítico hiperbólico em (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e $g(x_0, y_0) = 0$. A matriz Jacobiana desse sistema é dada por

$$J = \begin{pmatrix} f_{,x} & f_{,y} \\ g_{,x} & g_{,y} \end{pmatrix}$$

onde o $f_{,x}$ significa diferenciação de g com respeito a x. Os dois autovalores $\mu_{1,2}$ são dados por

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(f_{,x} + g_{,y}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(f_{,x} - g_{,y})^2 + 4 f_{,y} g_{,x}} \tag{2.18}$$

e é calculado em qualquer ponto fixo (x_0, y_0).

A Tab. (2.1) contém todos os possíveis casos para entender as propriedades de estabilidade ou instabilidade do ponto crítico (x_0, y_0) baseado em dois autovalores $\mu_{1,2}$.

Como já foi mencionado existem outros métodos para estudar a estabilidade de pontos críticos de sistemas autônomos. Um deles é o método de Lyapunov, que é completamente diferente da estabilidade linear e pode ser aplicado diretamente ao

Autovalores	Descrição
$\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$	o ponto fixo é assintóticamente estável e as trajetórias começam próximo ao ponto e vão se aproximando dele $lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$
$\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$	o ponto fixo é um nó instável e as trajetórias vão sendo repelidas do ponto $lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ Podemos dizer que (x_0, y_0) é o atrator no tempo passado
$\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$	o ponto fixo é um ponto de sela, ele é instável. Algumas trajetórias vão ser repelidas outras atraídas
$\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$	ponto não hiperbólico. A teoria de estabilidade linear falha para determinar a estabilidade. O ponto é não hiperbólico e outros métodos são necessários para estudar o comportamento das trajetórias perto do ponto crítico
$\mu_1 = 0$, $\mu_2 < 0$	ponto não hiperbólico. A teoria de estabilidade linear falha para determinar a estabilidade. O ponto é não hiperbólico e outros métodos são necessários para estudar o comportamento das trajetórias perto do ponto crítico
$\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = \alpha - i\beta$	com $\alpha > 0$ e $\beta \neq 0$ o ponto fixo é uma espiral instável
$\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = \alpha - i\beta$	com $\alpha < 0$ e $\beta \neq 0$ o ponto fixo é uma espiral estável
$\mu_1 = i\beta$, $\mu_2 = i\beta$	soluções oscilam e o ponto é chamado de centro. Note que o ponto crítico se tornar um centro não tem relação com o centro da variedade

Tabela 2.1: Propriedades de estabilidade ou instabilidade do ponto crítico (x_0, y_0) baseadas em dois autovalores $\mu_{1,2}$.

sistema em questão. O problema principal com essa abordagem é que precisamos ser capazes de sugerir uma função de Lyapunov boa para o problema, e não há um jeito sistemático de fazer isso, se não conseguirmos encontrar uma solução inteligente o suficiente, precisamos buscar outro método. Uma alternativa para esse caso é o método "*centre manifold*" em que nos permite simplificar os sistemas dinâmicos reduzindo sua dimensionalidade perto dos pontos fixos com autovalores nulos da matriz Jacobiana.

A teoria de estabilidade linear não pode determinar a estabilidade de dois pontos com a mesma coordenada, onde reduzimos o número de pontos críticos. Poderíamos aplicar o "*centre manifold theory*", mas há um problema pois essa teoria vai utilizar todo o espaço de fase enquanto que nesse caso os pontos são limitados pela semi-circunferência positiva de raio igual a 1. Se quiséssemos utilizar apenas essa região teríamos problema no "*centre manifold theory*".

Poderíamos então utilizar o método de Lyapunov próximo à esse ponto "duplo", precisaríamos apenas escolher uma boa função de Lyapunov. Diferentes escolhas podem resultar em diferentes partes da região da estabilidade assintótica sendo coberta e não existe garantia de que uma região inteira possa ser considerada apenas por esse método.

Para mais detalhes sobre esses métodos procurar por [73, 75].

2.2 Introdução a sistemas dinâmicos na cosmologia

Sessenta e oito por cento do nosso universo [76] consiste de uma ainda misteriosa componente chamada "energia escura" (DE), que acreditamos ser responsável pela presente aceleração do universo [25, 77]. Além da matéria ordinária, o restante 27% do conteúdo de energia do universo é uma forma de matéria que interage em princípio apenas gravitacionalmente, conhecida como "matéria escura" (DM). Entre uma ampla gama de alternativas para a energia escura, que inclui a constante cosmológica, campos escalares ou vetoriais [78–90], energia escura holográfica [51, 91–102], energia escura metaestável [103–107], modificações da gravidade e diferentes tipos de fluidos cosmológicos [65, 108–113], o uso de um campo escalar canônico , chamado "quintessência", é um candidato viável [37, 114–117].

Além disso, os dois componentes do setor escuro podem interagir um com o outro [51, 74, 95–97, 111, 118–130] e a interação pode eventualmente aliviar o problema da coincidência [131, 132].

Quando um campo escalar está na presença de um fluido barotrópico (com equação de estado $w_m = P_m/\rho_m$, onde P_m é a pressão e ρ_m é a densidade de energia do fluido) as equações de evolução relevantes podem ser convertidas em um sistema autônomo. Tal abordagem é uma boa ferramenta para analisar estados assintóticos de modelos cosmológicos e tem sido feita para a energia escura desacoplada (quintessência, campo de táquion, campo "phantom" e energia escura vetorial, por exemplo [67, 133–139]) e energia escura acoplada [74, 119, 140–145]. O acoplamento suposto para o campo de quintessência tem sido proporcional à densidade energética da matéria escura ρ_m. No entanto, existem outras possibilidades como, por exemplo, o acoplamento proporcional à densidade de energia da energia escura ρ_ϕ ou a soma das duas densidades de energia $\rho_m + \rho_\phi$. Grupos similares têm sido amplamente estudados na literatura [39, 40, 43, 45, 47, 146–148]. Em particular, a evolução da energia escura em altos redshifts medidos pela Colaboração BOSS-SDSS [149] mostra um desvio da constante cosmológica que pode ser explicado assumindo modelos de energia escura interagente [150].

É necessário realizar a análise dinâmica para estes dois grupos de interação. Neste trabalho, utilizamos a teoria dos sistemas dinâmicos lineares para investigar os pontos críticos que vêm das equações de evolução para a quintessência, assumindo a interação entre DE e DM proporcional a i) ρ_ϕ e ii) $\rho_\phi + \rho_m$. Descobrimos que no caso i) existem pontos fixos que podem descrever a seqüência de três eras cosmológicas. No segundo caso, tanto a era da radiação quanto a era da energia escura podem ser descritas por pontos fixos, mas o universo dominado pela matéria está ausente.

Com o intuito de obter modelos de DE viáveis, necessitamos que a densidade de energia de um campo escalar permaneça subdominante durante a era dominada pela radiação e a era dominada pela matéria, e emirja somente em tempos posteriores para dar origem à atual observada aceleração do universo.

Vamos construir um modelo cosmológico genérico para tentar representar a evolução das eras cosmológicas radiação $\rightarrow$ matéria $\rightarrow$ termo cosmológico. Esse modelo deve começar em um período dominado pela radiação. Deve ter dois pontos de sela que correspondem ao universo dominado pela radiação e pela matéria, respectivamente. Essas épocas sendo pontos de sela garantem que algumas trajetórias serão atraídas por esses pontos, no entanto, elas serão eventualmente repelidas. Por último, queremos que o sistema tenha um atrator para tempos futuros onde o universo está crescendo com uma expansão acelerada que corresponde à solução de de Sitter. Dizemos que o universo é assintóticamente de Sitter. Por simplicidade desprezamos a possibilidade de autovalores nulos.

Vamos considerar um sistema dinâmico cosmológico de um campo escalar ϕ na presença de um fluido barotrópico [1] que tem como equação de estado $\omega_m = P_m/\rho_m$.

2.2.1 Caso geral

Para introduzir o uso de técnicas de sistemas dinâmicos em cosmologia [151, 152], vamos considerar um universo espacialmente plano $\kappa = 0$ contendo radiação ρ_r com $\omega = 1/3$, e um fluido perfeito representando a matéria ρ_m com $\omega = 0$. As equações que determinam completamente a dinâmica do sistema são as equações de Friedmann

$$3H^2 - \Lambda = \kappa(\rho_m + \rho_r), \tag{2.19}$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 + \Lambda = \kappa\frac{1}{3}\rho_r, \tag{2.20}$$

e a equação da continuidade para a radiação e a matéria respectivamente

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \tag{2.21}$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0. \tag{2.22}$$

[1] A densidade do fluido só depende da pressão, já que a temperatura é aproximadamente constante.

Usando os parâmetros de densidade adimensionais Ω_m, Ω_r e Ω_Λ, encontramos que as equações acima satisfazem

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda, \tag{2.23}$$

que nos permite relacionar os três parâmetros de densidade, resultando em apenas duas variáveis independentes, utilizaremos Ω_m e Ω_r como estas variáveis. Como desejamos densidades de energia positivas, temos $0 \leq \Omega_m \leq 1$ e $0 \leq \Omega_r \leq 1$, para que satisfaçam a Eq. (2.23) devemos ter $\Omega_\Lambda \leq 1$.

A solução para o sistema (2.19-2.22) em qualquer tempo dado por t corresponde à um ponto no plano (Ω_m, Ω_r). A condição (2.23) reduz o plano (Ω_m, Ω_r) permitido para $\triangle = \{(\Omega_m, \Omega_r) | 0 \leq \Omega_m \leq 1 \cap 0 \leq \Omega_r \leq 1 \cap \Omega_\Lambda \leq 1\}$.

Vamos calcular as equações dinâmicas para as variáveis adimensionais Ω_m e Ω_r. Partimos de

$$\frac{d}{dt}\Omega_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa\rho_m}{3H^2}\right) = \frac{\kappa}{3}\left(\frac{\dot{\rho}_m}{H^2} - \frac{\rho_m 2\dot{H}}{H^3}\right) . \tag{2.24}$$

De (2.22) temos uma expressão para $\dot{\rho}_m/H$, enquanto que de (2.20) temos outra para $\dot{H}/H^2$. Disso

$$\frac{1}{H}\frac{d}{dt}\Omega_m = -3\Omega_m + 3\Omega_m\left(1 - \Omega_\Lambda + \Omega_r\right) . \tag{2.25}$$

Podemos substituir o Ω_Λ por (2.23), assim

$$\frac{1}{H}\frac{d}{dt}\Omega_m = \Omega_m\left(3\Omega_m + 4\Omega_r - 3\right) . \tag{2.26}$$

Podemos notar que se introduzirmos uma variável independente $N = log(a)$, onde

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}log(a) = \frac{\dot{a}}{a}\mathrm{d}t = H\mathrm{d}t ,$$

é possível reescrever $(1/H)(d/dt)\Omega_m$ como

$$\boxed{\Omega_m' = \Omega_m\left(3\Omega_m + 4\Omega_r - 3\right)}, \tag{2.27}$$

onde a linha denota uma derivada com respeito à N. De forma similar ao que foi feito aqui, podemos calcular $(1/H)(d/dt)\Omega_r$ e obter

$$\boxed{\Omega_r' = \Omega_r\left(3\Omega_m + 4\Omega_r - 4\right)}. \tag{2.28}$$

Para qualquer conjunto de condições iniciais $(\Omega_m(N_i), \Omega_r(N_i))$ com "tempo" inicial N no triângulo $\triangle$, as equações (2.27) e (2.28) vão determinar a trajetória que descreve o comportamento dinâmico do modelo cosmológico que estamos estudando. Esse sistema de equações é chamado de autônomo, ou dinâmico, pois ele não depende explicitamente do parâmetro de "tempo" N. Equações desse tipo podem ser estudadas por métodos particulares como veremos aqui.

2.2.2 Quintessência na cosmologia

Iremos reproduzir um estudo feito em [65] para depois apresentar o trabalho feito pelo autor [64].

Vamos considerar um campo escalar ϕ acoplado minimamente com a gravidade com um campo $V(\phi)$ em que a densidade Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \ , \tag{2.29}$$

Para a densidade Lagrangeana acima (2.29), as Eqs. (2.1), (2.2) e (2.3) se transformam em

$$H^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_m\right] \ , \tag{2.30}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2 + (1+w_m)\rho_m\right] \ , \tag{2.31}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{2.32}$$

Vamos dividir os dois lados da Eq. (2.30) pelo parâmetro de Hubble ao quadrado, para obtermos uma equação de restrição adimensional

$$\frac{\dot{\phi}^2}{6H^2} + \frac{V(\phi)}{3H^2} + \frac{\rho_m}{3H^2} = 1 \ . \tag{2.33}$$

Definindo duas quantidades adimensionais

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \ , \qquad y \equiv \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \ , \tag{2.34}$$

a Eq. (2.33) se torna

$$x^2 + y^2 + \frac{\rho_m}{3H^2} = 1 \ . \tag{2.35}$$

Para escrever as variáveis adimensionais (2.34) na forma autônoma vamos definir mais duas variáveis adimensionais

$$\lambda \equiv -\frac{V_{,\phi}}{V} \ , \qquad \Gamma \equiv \frac{VV_{,\phi\phi}}{V_{,\phi}^2} \ , \tag{2.36}$$

assim, temos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} =& -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \\ &+ \frac{3}{2}x\left[(1-w_m)x^2 + (1+w_m)(1-y^2)\right] \ , \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dN} =& -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \\ &+ \frac{3}{2}y\left[(1-w_m)x^2 + (1+w_m)(1-y^2)\right] \ , \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}\lambda^2(\Gamma - 1)x \ . \tag{2.39}$$

Nome	x	y	Existência	Estabilidade	Ω_ϕ	γ_ϕ
(a)	0	0	Todos λ e γ	Ponto de sela para $0 < \gamma < 2$	0	-
(b1)	1	0	Todos λ e γ	Nó instável para $\lambda < \sqrt{6}$	1	2
(b2)	-1	0	Todos λ e γ	Nó instável para $\lambda > -\sqrt{6}$	1	2
(c)	$\lambda/6$	$\left[1 - \lambda^2/6\right]^{1/2}$	$\lambda^2 < 6$	Nó instável para $\lambda^2 < 3\gamma$	1	$\lambda^2/3$
(d)	$(3/2)^{1/2}\gamma/\lambda$	$\left[3(2-\gamma)\gamma/2\lambda^2\right]^{1/2}$	$\lambda^2 > 3\gamma$	Nó instável para $3\gamma < \lambda^2 < 24\lambda^2/(9\gamma - 2)$	$3\gamma/\lambda^2$	γ

Tabela 2.2: Estabilidade de pontos críticos de um modelo de quintessência para um sistema com matéria e campo escalar.

A equação $d\Gamma/dN$ não foi escrita pois, como veremos, será desconsiderada.

A equação de estado w_ϕ e o parâmetro de densidade de energia Ω_ϕ para o campo ϕ é

$$w_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ , \tag{2.40}$$

$$\Omega_\phi \equiv \frac{\rho_\phi}{3H^2} = x^2 + y^2 \ . \tag{2.41}$$

Também definimos

$$\begin{aligned} w_{eff} \equiv& \frac{P_\phi + P_m}{\rho_\phi + \rho_m} \\ =& w_m + (1 - w_m)x^2 - (1 + w_m)y^2 \ . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Um universo com expansão acelerada ocorre se $w_{eff} < -1/3$. Vamos definir as novas variáveis $\gamma_\phi \equiv 1 + w_\phi$ e $\gamma \equiv 1 + w_m$.

λ constante

Como podemos ver em [64], se $\lambda \neq$ cte então teremos $\mu_1 = 0$ e/ou $\mu_2 = 0$. Nesse caso não podemos utilizar a expansão linear para calcular os pontos críticos.

A partir das Eqs. (2.34) e (2.36) encontramos que o caso de λ constante corresponde a um potencial exponencial [67, 153]

$$V(\phi) = V_0 \, e^{-\lambda\phi} \ . \tag{2.43}$$

Nesse caso a Eq. (2.39) é sempre nula, portanto $\Gamma = 1$ para qualquer valor de x, não só para o x_c. Para se obter os pontos críticos vamos fazer $dx/dN = 0$ e $dy/dN = 0$ nas Eqs. (2.37) e (2.38). Podemos resumir os pontos críticos e suas estabilidades na Tab. (2.1).

Os autovalores da matriz $\mathcal{M}$ dados na Eq. (2.18) são como segue

- Ponto (a):

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}(2-\gamma) \ , \qquad \mu_2 = \frac{3}{2}\gamma \ . \tag{2.44}$$

- Ponto (b1):

$$\mu_1 = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda \ , \qquad \mu_2 = 3(2-\gamma) \ . \tag{2.45}$$

- Ponto (b2):

$$\mu_1 = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda \ , \qquad \mu_2 = 3(2-\gamma) \ . \tag{2.46}$$

- Ponto (c):

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 6) \ , \qquad \mu_2 = \lambda^2 - 3\gamma \ . \tag{2.47}$$

- Ponto (d):

$$\mu_{1,2} = -\frac{3(2-\gamma)}{4}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)}}\right] \ . \tag{2.48}$$

No que segue esclarecemos as propriedades dos cinco pontos críticos apresentados na Tab. (2.2). Basicamente estamos interessados em um fluido com $0 < \gamma < 2$, pois nesse intervalo $-1 < w_m < 1$.

- O ponto (a) corresponde a uma solução dominada por um fluido. É um ponto de sela desde que $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 > 0$.

- Os pontos (b1) e (b2) são nós instáveis ou pontos de sela dependendo do valor λ.

- O ponto (c) é um nó estável para $\lambda^2 < 3\gamma$, e um ponto de sela para $3\gamma < \lambda^2 < 6$. Desde que a equação de estado efetiva seja $w_{eff} = w_\phi = -1 + \lambda^2/3$, a partir das Eqs. (2.40) e (2.42), o universo acelera para $\lambda^2 < 2$ nesse caso.

- O ponto (d) corresponde a uma solução tipo *scaling* em que a densidade de energia do campo ϕ diminui proporcionalmente à do fluido barotrópico ($\gamma_\phi = \gamma$). Desde que ambos μ_1 e μ_2 sejam negativos para $\lambda^2 > 3\gamma$ da Eq. (2.48), o ponto (d) é estável para a condição de existência apresentada na Tab. (2.2). Enquanto isso esse é um ponto de sela para $\lambda^2 < 3\gamma$, mas esse caso não é realístico pois a condição $\Omega_\phi \leq 1$ não é satisfeita. Notamos que o ponto (d) se torna uma espiral estável para $\lambda^2 > 24\gamma^2/(9\gamma - 2)$.

Na Fig. (2.1) mostramos o plano de fase onde $\lambda = 2$ e $\gamma = 1$. Notamos que as trajetórias estão confinadas dentro do círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$ com $y \geq 0$. Nesse caso o ponto (c) é um ponto de sela, enquanto que o ponto (d) é uma espiral estável. Consequentemente o atrator em tempos tardios é uma solução do tipo *scaling* (d) com $x = y = \sqrt{3/8}$.

A análise acima dos pontos críticos mostra que pode-se obter uma expansão acelerada desde que as soluções se aproximem do ponto fixo (c) com λ^2, nesse caso o

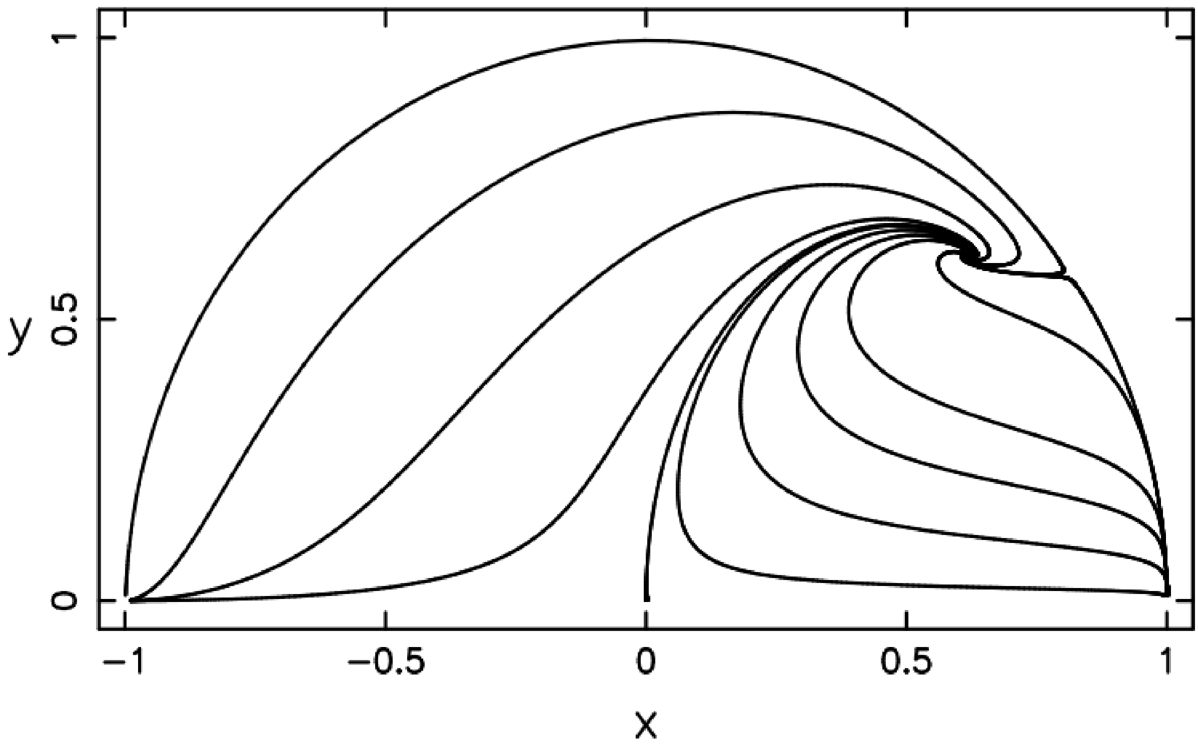

Figura 2.1: O plano de fase para $\lambda = 2$ e $\gamma = 1$. A solução dominada por um campo escalar (c) é um ponto de sela em $x = (2/3)^{1/2}$ e $y = (1/3)^{1/2}$. Desde que o ponto (d) seja uma espiral estável nesse caso, o atrator para tempos tardios é uma solução tipo *scaling* com $x = y = (3/8)^{1/2}$ [18, 67].

estado final do universo é aquele dominado pelo campo escalar ($\Omega_\phi = 1$). A solução tipo *scaling* (d) não é viável para explicar a aceleração tardia. No entanto, isso pode ser usado para providenciar a evolução cosmológica em que a densidade de energia do campo escalar diminui proporcionalmente a do fluido do *background* na era dominada pela radiação ou matéria. Se o declive do potencial exponencial se tornar pequeno o suficiente para satisfazer $\lambda^2 < 2$ perto do presente, o universo existe para uma regime tipo *scaling* e se aproxima do ponto fixo (c) dando origem a uma expansão acelerada [68, 69]. Isso, é claro, exige um λ efetivo que muda com o tempo, vamos falar sobre esse caso a seguir. No entanto, antes de fazer isso, mencionamos que em [154], os autores discutem a possibilidade de que o campo não tenha ainda alcançado o ponto fixo, e argumentam que (i) mesmo para $2 < \lambda^2 < 3$, existe uma região não trivial do espaço dos parâmetros que pode explicar os valores observados dos parâmetros cosmológicos, tal como a equação de estado, e (ii) o *fine tuning* para esses modelos não é pior do que em outros cenários de quintessência.

Mudança dinâmica de λ

Potenciais exponenciais correspondem à λ constante e $\Gamma = 1$. Vamos considerar um potencial $V(\phi)$ ao longo do qual o campo decresce em direção a mais infinito com

$\dot{\phi} > 0$. Isso significa que $x > 0$ na Eq. (2.39). Então, se a condição

$$\Gamma > 1 \ , \tag{2.49}$$

for satisfeita, λ diminui para zero. Assim a inclinação do potencial definido pelas Eqs. (2.34) e (2.36) se torna plano, dando origem a uma expansão acelerada em tempos tardios. A condição (2.49) é considerada como a condição do tipo *tracking* na qual a densidade de energia de ϕ eventualmente alcança a do fluido [37]. A fim de construir modelos viáveis de quintessência, necessitamos que o potencial satisfaça a condição (2.49).

Quando $\Gamma < 1$ a quantidade λ cresce para o infinito. Desde que o potencial seja mais íngreme do que as soluções tipo *scaling* correspondentes, a densidade de energia do campo escalar torna-se insignificante comparado com a do fluido. Então não temos uma expansão acelerada em tempos tardios.

A fim de obter a evolução dinâmica do sistema precisamos resolver a Eq. (2.39) junto com as Eqs. (2.37) e (2.38). Embora λ seja uma quantidade dinamicamente variável, pode-se aplicar a discussão de λ constante a esse caso bem como considerar pontos críticos "instantâneos" [153, 155]. Por exemplo, o ponto (c) na Tab 2.2 muda dinamicamente com o tempo, isso é, $x(N) = \lambda(N)/\sqrt{6}$ e $y(N) = [1 - \lambda^2(N)/6]^{1/2}$. Quando $\Gamma > 1$ esse ponto eventualmente se aproxima de $x(N) \to 0$ e $y(N) \to 1$ com uma equação de estado de uma constante cosmológica ($\gamma_\phi \to 0$) como $\lambda(N) \to 0$. Veja as referências [153, 155] para mais detalhes.

2.3 Quintessência acoplada e a impossibilidade de uma interação

Apresentaremos o estudo realizado em [64] em que o autor participa. Analisamos a quintessência acoplada à teoria dos sistemas dinâmicos lineares, com duas interações diferentes: i) proporcional à densidade de energia da energia escura e ii) proporcional à soma das densidades de energia da matéria escura e da energia escura. Os resultados aqui apresentados ampliam as análises anteriores na literatura, onde a interação foi apenas proporcional à densidade de energia da matéria escura. No primeiro caso é possível obter a sequência bem conhecida das eras cosmológicas. Para a segunda interação, apenas a era da radiação e a era da energia escura podem ser descritas pelos pontos fixos. Portanto, do ponto de vista da teoria de sistema dinâmico, a interação proporcional à soma da densidade de energia da matéria escura e energia escura não descreve o universo onde vivemos.

2.3.1 Análise dinâmica

Consideramos que a energia escura é descrita por um campo escalar com densidade de energia ρ_ϕ e pressão P_ϕ, e com uma equação de estado dada por $w_\phi = P_\phi/\rho_\phi$.

Para lidar com a dinâmica do sistema, vamos definir variáveis adimensionais. As novas variáveis vão caracterizar um sistema de equações diferenciais na forma

$$X' = f[X], \tag{2.50}$$

onde X é um vetor coluna de variáveis sem dimensão e a linha é a derivada com respeito a $\log a$, onde definimos o fator de escala atual a_0 para ser um. Os pontos críticos X_c são aqueles que satisfazem $X' = 0$. Para estudar a estabilidade dos pontos fixos consideramos perturbações lineares U à sua volta, portanto $X = X_c + U$. No ponto crítico, as perturbações U satisfazem a seguinte equação

$$U' = \mathcal{J}U, \tag{2.51}$$

onde $\mathcal{J}$ é a matriz Jacobiana. A estabilidade em torno dos pontos fixos depende da natureza dos autovalores (μ) de $\mathcal{J}$, de tal forma que eles são pontos estáveis se todos tiverem valores negativos, pontos instáveis se todos tiverem valores positivos e pontos de sela se pelo menos um autovalor tiver valor positivo (ou negativo), enquanto os outros têm sinal oposto. Além disso, se qualquer autovalor for um número complexo, o ponto fixo pode ser espiral estável (Re $\mu < 0$) ou espiral instável (Re $\mu > 0$), devido ao comportamento oscilatório de sua parte imaginária.

2.3.2 Dinâmica da quintessência

O campo escalar ϕ é descrito pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + V(\phi)\right), \tag{2.52}$$

onde $V(\phi)$ é o potencial escalar dado por $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi}$ e V_0 e λ são constantes positivas. Essa escolha é motivada pelo sistema autônomo, como veremos em breve. Para um campo homogêneo $\phi \equiv \phi(t)$ em um universo em expansão com métrica de FLRW com fator de escala $a \equiv a(t)$, em presença do acoplamento, a equação de movimento é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = \frac{\mathcal{Q}}{\dot{\phi}}, \tag{2.53}$$

onde o ponto denota uma derivada com respeito a coordenada temporal t, a linha denota uma derivada com respeito à ϕ e $\mathcal{Q}$ é o acoplamento.

Como já vimos, as equações de Einstein para uma métrica de FLRW e um fluido perfeito nos fornecem as equações de Friedmann

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{K}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2},$$

$$\dot{H} = -\frac{K}{2}(P + \rho) + \frac{\kappa}{a^2}$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ é o parâmetro de Hubble, $\rho = \sum_i \rho_i$ e $P = \sum_i P_i$ denotam a densidade de energia total[2] e a pressão, respectivamente, para todos os componentes do universo em uma dada época, $K \equiv 8\pi G/c^4$ e κ é a curvatura espacial. Vamos usar que $K = 1$.

Para o nosso caso, onde $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi$, $P = P_r + P_m + P_\phi$, $M_P^2 = 1$ e $\kappa = 0$, teremos

$$H^2 = \frac{K}{3}(\rho_\phi + \rho_m + \rho_r),$$

e

$$\dot{H} = -\frac{K}{2}(\rho_\phi + P_\phi + \rho_m + P_m + \rho_r + P_r)$$

Substituindo a densidade de energia e pressão, respectivamente, para um campo escalar

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi),$$

e

$$P_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi),$$

nas equações de Friedmann, temos

$$H^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho_m + \rho_r\right), \tag{2.54}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 + \rho_m + \frac{4}{3}\rho_r\right), \tag{2.55}$$

[2] Da equação da continuidade $\rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}$

e a equação de estado se torna

$$w_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \tag{2.56}$$

Sem considerar o acoplamento, as densidades de energia ρ_ϕ, ρ_m e ρ_r satisfazem

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1+\omega_\phi)\rho_\phi = 0,$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(1+\omega_m)\rho_m = 0,$$

$$\dot{\rho}_r + 3H(1+\omega_r)\rho_r = 0,$$

Assumimos que o campo escalar é acoplado à matéria escura, de tal forma que o tensor energia-momento total ainda é conservado. Utilizando a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) com um fator de escala a, as equações de continuidade para ambos os componentes e para a radiação são

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = -\mathcal{Q}\ , \tag{2.57}$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \mathcal{Q}\ , \tag{2.58}$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0\ , \tag{2.59}$$

respectivamente. Os índices m e r significam matéria e radiação, respectivamente.[3] Em princípio, o acoplamento pode depender de muitas variáveis $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\rho_m, \rho_\phi, \dot{\phi}, H, t, \dots)$, então assumimos que, para a quintessência, o acoplamento é i) $\mathcal{Q} = Q\rho_\phi\dot{\phi}$ e ii) $\mathcal{Q} = Q(\rho_\phi + \rho_m)\dot{\phi}$, onde Q é uma constante positiva.

Estamos agora prontos para proceder com a análise dinâmica do sistema.

2.3.3 Sistema autônomo

As variáveis adimensionais são obtidas a partir das Eqs. de Friedmann (A.18) e (A.19). Dividindo os dois lados da primeira equação por H^2, obtemos uma equação adimensional, e podemos definir as variáveis adimensionais por[4]

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y \equiv \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}H}, \quad z \equiv \frac{\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3}H},$$
$$\lambda \equiv -\frac{V'}{V}, \quad \Gamma \equiv \frac{VV''}{V'^2}. \tag{2.60}$$

[3] Poderíamos ter sido mais econômicos se tivéssemos escrito as equações para a matéria e radiação juntas, como um fluido barotrópico geral com a equação de estado w_b. Os resultados, é claro, não mudariam. Ao invés de escrevermos a equação de estado para a matéria como $P = \omega\rho$ poderíamos usar uma parametrização um pouco diferente dada por $P_\gamma = \omega_\gamma\rho_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma$ onde $\gamma = 1 + \omega_\gamma$ é uma constante e $0 \leq \gamma \leq 2$. Esse valor é 4/3 quando existe radiação, e 1 para matéria bariônica e matéria escura.

[4] Não é necesário escrever uma variável para P_r pois podemos escreve-lá em função de ρ_r dado que $w_r = \dfrac{1}{3} = \dfrac{P_r}{\rho_r}$.

Utilizando a segunda Eq. de Friedmann (A.19) temos mais uma relação entre os parâmetros, pelo universo ser plano a soma dos parâmetros de energia deve ser igual a 1, e com isso não é necessário uma variável que dependesse explicitamente de ρ_m. Escolhemos os novos parâmetros para que o sistema seja fechado, e possamos escrever todas as equações em função deles.

O parâmetro de densidade da energia escura é escrito em termos dessas novas variáveis como

$$\Omega_\phi \equiv \frac{\rho_\phi}{3H^2} = x^2 + y^2, \tag{2.61}$$

então, a primeira Eq. de Friedmann, Eq.(2.54) pode ser escrita como

$$\Omega_\phi + \Omega_m + \Omega_r = 1, \tag{2.62}$$

onde o parâmetro de densidade de matéria e de radiação são definidos por $\Omega_i = \rho_i/(3H^2)$, com $i = m, r$. Das Eqs. (2.61) e (2.62) temos que x e y são restritos ao plano de fase pela relação

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \tag{2.63}$$

devido à $0 \leq \Omega_\phi \leq 1$. A equação de estado w_ϕ se torna

$$w_\phi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \tag{2.64}$$

e a equação de estado efetiva total é

$$w_{eff} = \frac{P_\phi + P_r}{\rho_\phi + \rho_m + \rho_r} = x^2 - y^2 + \frac{z^2}{3}, \tag{2.65}$$

com uma expansão acelerada $w_{eff} < -1/3$ em tempos tardios. Lembrando aqui que $P_m = 0$.

2.3.4 Interações

Os pontos fixos dos sistemas dinâmicos são obtidos definindo $dx/dN = 0$, $dy/dN = 0$, $dz/dN = 0$ e $d\lambda/dN = 0$. Quando $\Gamma = 1$, λ é constante, e o potencial é $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi}$ [67, 133][5]. Note que y não pode ser negativo e lembre-se que $\Omega_r = z^2$.

As propriedades do sistema dinâmico dependem dos valores das constantes λ e Q. Entre outras, elas vão afetar a existência e estabilidade dos pontos fixos do sistema, veja ([67]).

Para analisarmos a estabilidade dos pontos fixos do sistema dinâmico precisamos montar a matriz Jacobiana. Note que por termos fixado Γ a matriz Jacobiana só depende das variáveis x, y e z

[5] A equação para λ também é igual a zero quando $x = 0$ ou $\lambda = 0$, de modo que λ não deve ser necessariamente constante, para os pontos fixos com este valor de x. No entanto, para o caso de λ dinâmico, o autovalor correspondente é igual a zero, indicando que os pontos fixos não são hiperbólicos, e como já vimos não é uma solução de perturbação, a variável não oscila, só translada, então a análise linear não funciona. Para λ ser constante da expressão $d\lambda/dN$ devemos ter $\Gamma = 1$, por esse motivo não temos uma equação de movimento de Γ.

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(dx/dN)}{\partial x} & \frac{\partial(dx/dN)}{\partial y} & \frac{\partial(dx/dN)}{\partial z} \\ \frac{\partial(dy/dN)}{\partial x} & \frac{\partial(dy/dN)}{\partial y} & \frac{\partial(dy/dN)}{\partial z} \\ \frac{\partial(dz/dN)}{\partial x} & \frac{\partial(dz/dN)}{\partial y} & \frac{\partial(dz/dN)}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x=x_c, y=y_c, z=z_c)} ,$$

e calcular seus autovalores. Essa Jacobiana possui três autovalores μ_1, μ_2 e μ_3. A solução geral para a evolução das perturbações lineares pode ser escrita como

$$\delta x = C_1 e^{\mu_1 N} + C_2 e^{\mu_2 N} + C_3 e^{\mu_3 N} ,$$

$$\delta y = C_4 e^{\mu_1 N} + C_5 e^{\mu_2 N} + C_6 e^{\mu_3 N} ,$$

$$\delta z = C_7 e^{\mu_1 N} + C_8 e^{\mu_2 N} + C_9 e^{\mu_3 N} ,$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9 são constantes de integração.

Interação $Q\rho_\phi$

O sistema dinâmico para as variáveis x, y, z e λ com a interação proporcional à ρ_ϕ é

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2} y^2 \lambda - \frac{\sqrt{6}}{2} Q(x^2 + y^2) - xH^{-1}\frac{dH}{dN}, \tag{2.66}$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2} xy\lambda - yH^{-1}\frac{dH}{dN}, \tag{2.67}$$

$$\frac{dz}{dN} = -2z - zH^{-1}\frac{dH}{dN}, \tag{2.68}$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}\lambda^2 x\,(\Gamma - 1)\,, \tag{2.69}$$

onde

$$H^{-1}\frac{dH}{dN} = -\frac{3}{2}\left(1 + x^2 - y^2 + \frac{z^2}{3}\right).$$

Como visto anteriormente, os pontos fixos dos sistemas dinâmicos são obtidos definindo $dx/dN = 0$, $dy/dN = 0$, $dz/dN = 0$ e $d\lambda/dN = 0$. Os pontos críticos para a interação $Q\rho_\phi$ são mostrados na Tab. (2.3).

O ponto x_f é

$$x_f = \frac{-3 + Q\lambda - \lambda^2 + \sqrt{Q^2(\lambda^2 - 12) - 2Q\lambda(\lambda^2 - 9) + (\lambda^2 - 3)^2}}{2\sqrt{6}(Q - \lambda)}. \tag{2.70}$$

Os autovalores da matriz Jacobiana foram encontrados para cada ponto fixo da Tab. 2.3. Os resultados estão mostrados na Tab. 2.4, onde os autovalores $\mu_{f\pm}$ são

Ponto	x	y	z	w_ϕ	Ω_ϕ	w_{eff}
(a)	$\frac{2\sqrt{6}}{3\lambda}$	$\frac{2\sqrt{2Q+\lambda}}{\sqrt{3\lambda^2(\lambda-Q)}}$	$\sqrt{1-\frac{4(\lambda-4Q)}{\lambda^2(\lambda-Q)}}$	$\frac{1}{3}\left(1-\frac{4Q}{\lambda}\right)$	$\frac{4}{\lambda(\lambda-Q)}$	$\frac{1}{3}$
(b)	0	0	1	–	0	$\frac{1}{3}$
(c)	$-\frac{\sqrt{6}}{3Q}$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{Q^2}}$	1	$\frac{2}{3Q^2}$	$\frac{1}{3}$
(d)	0	0	0	–	0	0
(e)	$\frac{Q\pm\sqrt{Q^2+6}}{\sqrt{6}}$	0	0	1	x_e^2	x_e^2
(f)	x_f	$\sqrt{1+x_f^2-\sqrt{2}x_f\lambda}$	0	$\frac{-3+\sqrt{6}x_f\lambda}{3+6x_f^2-\sqrt{6}x_f\lambda}$	$1+2x_f^2-\sqrt{\frac{2}{3}}x_f\lambda$	$-1+\sqrt{\frac{2}{3}}x_f\lambda$

Tabela 2.3: Pontos críticos (x, y e z) das equações dinâmicas (2.66)-(2.69) para o campo de quintessência com interação $Q\rho_\phi$. A tabela mostra a correspondente equação de estado para a energia escura (2.64), a equação efetiva de estado (2.65) e o parâmetro de densidade para energia escura (2.61).

Ponto	μ_1	μ_2	μ_3	Estabilidade
(a)		veja o texto principal		sela
(b)	1	$3-\sqrt{6}Q$	$3-\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda$	sela ou instável
(c)	$1-\frac{\sqrt{2}}{Q}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{Q}$	$2-\frac{\lambda}{Q}$	sela ou instável
(d)	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	sela
(e)	$\frac{1}{2}(2+Q\cdot Q_{e\pm})$	$\frac{1}{2}(6+Q\cdot Q_{e\pm})$	$\frac{1}{2}(6+(Q-\lambda)Q_{e\pm})$	sela ou instável
(f)	$-2+\sqrt{\frac{3}{2}}x_f\lambda$	μ_{f+}	μ_{f-}	sela

Tabela 2.4: Autovalores e estabilidade dos pontos fixos para o campo de quintessência com $Q\rho_\phi$. Definimos $Q_{e\pm} \equiv \left(Q \pm \sqrt{6+Q^2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\mu_{f\pm} &= \frac{1}{4}\{-12+\sqrt{6}x_f(-2Q+3\lambda) \\
&\pm [48(Q-\lambda)\lambda + 96\sqrt{6}x_f^3(-Q+\lambda) \\
&+ 6x_f^2(-24+4Q^2+28Q\lambda-31\lambda^2) \\
&+ 8\sqrt{6}x_f(9\lambda+2\lambda^3-2Q(3+\lambda^2))]^{1/2}\}
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

• O ponto fixo (a) descreve um universo dominado pela radiação. Para o ponto fixo ser real e Ω_ϕ satisfazer o limite da nucleossíntese $\Omega_\phi^{BBN} < 0.045$ [156] deveríamos ter $\lambda > \frac{20\sqrt{2}}{3}$ e $Q \leq \frac{9\lambda^2-800}{9\lambda}$. Os autovalores foram encontrados numericamente. Para $\lambda = 10$ e o limite superior da interação ($Q = 10/9$) temos os autovalores $\mu_1 = -0.7+2.1i$, $\mu_2 = -0.7-2.1i$ e $\mu_3 = 1$, então esse ponto crítico é um ponto de sela.

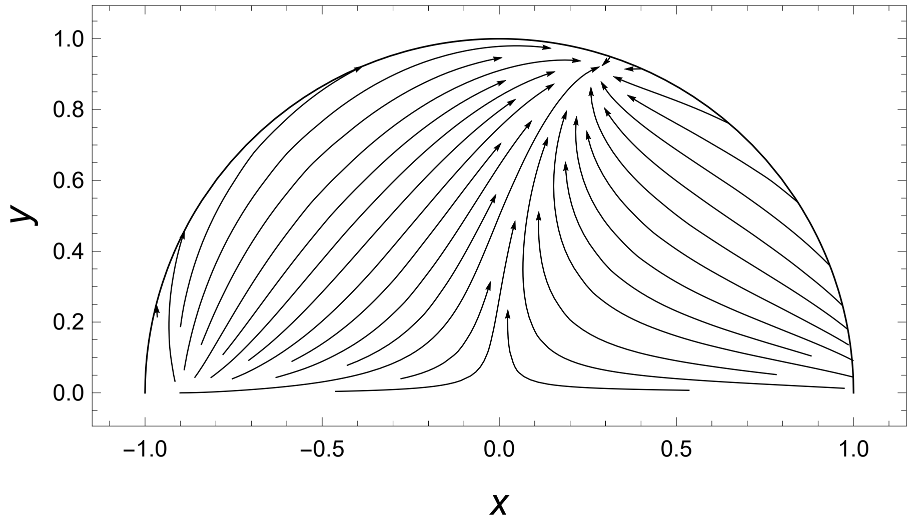

Figura 2.2: Plano de fase para o ponto fixo (f) com $\lambda = 1$ e $Q = 1/4$.

Resultados similares são encontrados para toda a escolha de λ e Q nessa regiao.

• Ambos os pontos (b) e (c) também descrevem a era da radiação e são instáveis ou pontos de sela. Os autovalores μ_2 e μ_3 do ponto (b) podem ser tanto positivos quanto negativos, dependem dos valores de λ e Q. Por outro lado, o primeiro autovalor μ_1 é sempre positivo. O mesmo acontece com os autovalores do ponto (c) e nesse caso a interação precisa ser $Q > \sqrt{2}$ para que os pontos fixos sejam reais e $Q > 20/(3\sqrt{3})$ para que $\Omega_\phi^{BBN} < 0.045$.

• O universo dominado pela matéria é descrito pelo ponto de sela (d) e também pelo ponto (e), desde que Q seja suficientemente grande para o último caso. Para qualquer valor da interação os autovalores do ponto (e) não podem ser todos simultaneamente negativos.

• O último ponto (f) é um atrator e descreve o universo dominado pela energia escura se ambos $\lambda \leq \sqrt{2}$ e $Q < \lambda$ ou $\lambda > \sqrt{2}$ e $\dfrac{-2\lambda + \lambda^3}{4 + \lambda^2} \leq Q < \lambda$. A parte real dos autovalores é negativa para esse intervalo de valores, portanto o ponto fixo é estável ou estável com espiral. Esse comportamento é ilustrado na Fig. (2.2), onde plotamos o plano de fase com $\lambda = 1$ e $Q = 1/4$.

Notamos que o espaço de fase do sistema é contido em um círculo unitário. Análises mostram que o sistema é invariante sob a transformação $y \mapsto -y$ e simétrico sobre a troca do tempo $t \mapsto -t$. Isso implica que podemos restringir a nossa análise à metade superior do disco com $y > 0$. A metade inferior do disco do espaço de fase corresponde a um universo contraindo pois $H < 0$ nessa região.

Os valores permitidos de λ e Q, para os pontos fixos (a), (c) e (f), são mostrados na Fig. (2.3). A partir da figura vimos que os pontos fixos (a) e (f) não têm regiões em comum.

Assim sendo, a sequência das eras cosmológicas (radiação $\to$ matéria $\to$ energia escura) é alcançada considerando a transição: (b) ou (c) $\to$ (d) ou (e) $\to$ (f).

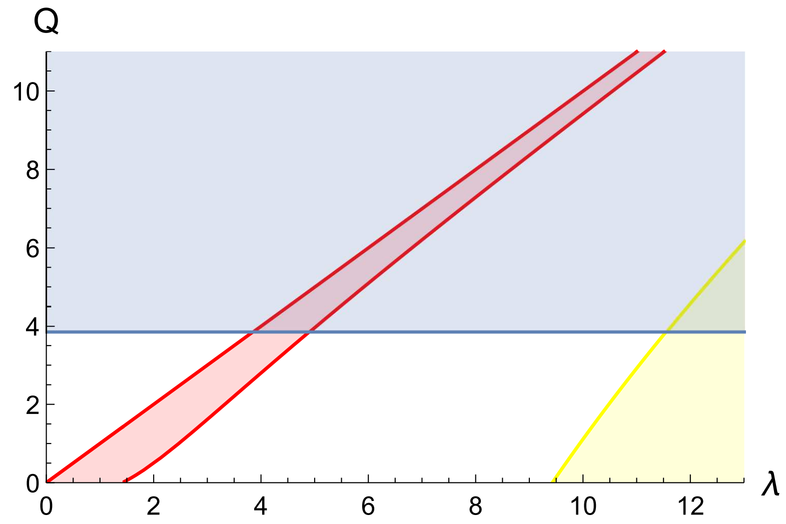

Figura 2.3: Regiões permitidas de Q, para os pontos fixos (a) (amarelo), (c) (azul) e (f) (vermelho).

Interação $Q(\rho_\phi + \rho_m)$

O sistema dinâmico para as variáveis x, y, z e λ com a interação proporcional à $\rho_\phi + \rho_m$ é

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}y^2\lambda - \frac{\sqrt{6}}{2}Q(1-z^2) - xH^{-1}\frac{dH}{dN}, \tag{2.72}$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}xy\lambda - yH^{-1}\frac{dH}{dN}, \tag{2.73}$$

$$\frac{dz}{dN} = -2z - zH^{-1}\frac{dH}{dN}, \tag{2.74}$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}\lambda^2 x\left(\Gamma - 1\right), \tag{2.75}$$

onde

$$H^{-1}\frac{dH}{dN} = -\frac{3}{2}\left(1 + x^2 - y^2 + \frac{z^2}{3}\right).$$

Todas as outras equações acima a menos da primeira são iguais às equações do caso anterior.
Como visto anteriormente, os pontos fixos dos sistemas dinâmicos são obtidos definindo $dx/dN = 0$, $dy/dN = 0$, $dz/dN = 0$ e $d\lambda/dN = 0$. Os pontos críticos para a interação $Q(\rho_\phi + \rho_m)$ são mostrados na Tab. (2.5), onde

$$w_{\phi e} = \frac{\lambda^2\left(\lambda^2 - 3 - \sqrt{12Q\lambda + (\lambda^2-3)^2}\right)}{3\left(\lambda(\lambda+2Q) + 3 - \sqrt{12Q\lambda + (\lambda^2-3)^2}\right)}.$$

Ponto	x	y	z	w_ϕ	Ω_ϕ	w_{eff}
(a)	$\frac{2\sqrt{6}}{3\lambda}$	$\frac{2\sqrt{6Q+\lambda}}{\sqrt{3\lambda^2(\lambda+3Q)}}$	$\sqrt{\frac{\lambda(\lambda+3Q)-4}{\lambda(\lambda+3Q)}}$	$\frac{\lambda}{3\lambda+12Q}$	$\frac{4((\lambda+4Q)}{\lambda^2(\lambda+3Q)}$	$\frac{1}{3}$
(b)	0	0	1	–	0	$\frac{1}{3}$
(c)	$-\frac{\sqrt{6}}{9Q}$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{9Q^2}}$	1	$\frac{2}{27Q^2}$	$\frac{1}{3}$
(d)	$3x_d^3-3x_d-\sqrt{6}Q=0$	0	0	1	x_d^2	x_d^2
(e)	$\frac{3+\lambda^2\pm S_e}{2\sqrt{6}\lambda}$	$\sqrt{x_e^2-(\sqrt{6}/3)x_e\lambda+1}$	0	$w_{\phi e}$	$\frac{\lambda^2+2Q\lambda+3-S_e}{2\lambda^2}$	$\frac{\lambda^2-3-S_e}{6}$

Tabela 2.5: Pontos críticos (x, y e z) das equações dinâmicas (2.72)-(2.75) para o campo de quintessência com interação $Q(\rho_\phi+\rho_m)$. A tabela mostra a correspondente equação de estado para a energia escura (2.64), a equação efetiva de estado (2.65) e o parâmetro de densidade para energia escura (2.61). Definimos $S_e \equiv \sqrt{12Q\lambda+(\lambda^2-3)^2}$.

Ponto	μ_1	μ_2	μ_3	Estabilidade
(a)		veja o texto principal		sela
(b)	2	-1	1	sela
(c)	$-\sqrt{\frac{2}{9Q^2}-3}$	$\sqrt{\frac{2}{9Q^2}-3}$	$2+\frac{\lambda}{3Q}$	sela
(d)		veja o texto principal		sela ou instável
(e)	μ_{e1}	μ_{e2}	μ_{e3}	sela

Tabela 2.6: Autovalores e estabilidade dos pontos ficos para o campo de quintessência com $Q(\rho_\phi+\rho_m)$.

Os autovalores da matriz Jacobiana foram encontrados para cada ponto fixo da Tab. 2.5, os resultados estão apresentados na Tab. 2.6 onde

$$\mu_{e1} = \frac{1}{4}(\lambda^2-5-\sqrt{\mu}),$$

$$\begin{aligned}\mu_{e2,e3} \quad &= \frac{1}{8\lambda^2}(3\lambda^4+3\lambda^2(5-\sqrt{\mu})\\ &\pm\sqrt{2}(\lambda^2(-72(-3+\sqrt{\mu}))\\ &-6Q\lambda(7\lambda^2-48+8\sqrt{\mu})\\ &+\lambda^2(\lambda^4-63-(3+\lambda^2)\sqrt{\mu}))^{1/2})\end{aligned} \tag{2.76}$$

e

$$\mu = 12Q\lambda+(\lambda^2-3)^2. \tag{2.77}$$

• O ponto (a) descreve o universo dominado pela radiação e pelo ponto fixo ser real e Ω_ϕ satisfaz o limite da nucleossíntese $\Omega_\phi^{BBN} < 0.045$ [156] deveríamos ter $\frac{20\sqrt{2}}{3} < \lambda < \frac{40\sqrt{6}}{9}$ e $Q \le \frac{9\lambda^3-800\lambda}{27\lambda^2-3200}$ ou $\lambda \ge \frac{40\sqrt{6}}{9}$ para qualquer valor positivo de Q.

Os autovalores foram encontrados numericamente similarmente ao caso da interação considerada anteriormente, o ponto fixo é um ponto de sela para os valores permitidos de λ.

• A era da radiação é também descrita pelos pontos (b) e (c). Eles são pontos de sela e para (c) a interação precisa ser $Q \geq \dfrac{20\sqrt{3}}{27}$ para que não haja conflito com o limite da nucleossíntese.

• O universo dominado pela matéria pode ser descrito pelo ponto (d) mas apenas se $x_d = 0$ que implica em uma interação nula. Esse caso já é conhecido na literatura [67].

• O ponto fixo (e) pode descrever o estágio atual de expansão acelerada do universo para alguns valores de Q e λ. Os pontos críticos são reais com $0 \leq \Omega_\phi \leq 1$ e $w_{eff} < -1/3$ para $0 < \lambda \leq \sqrt{2}$ e $0 < Q \leq \lambda$ ou para $\lambda > \sqrt{2}$ e $\dfrac{\lambda^2 - 2}{3\lambda} < Q \leq \lambda$. Para esses intervalos de λ e Q a parte real dos autovalores é negativa, então o ponto é estável ou estável com espiral. O ponto atrator tem $\Omega_\phi = 1$ e $w_\phi = w_{eff} = -1$ para $Q = \lambda$.

Assim sendo, tanto o universo dominado pela radiação quanto o universo dominado pela energia escura podem ser descritos pelos pontos fixos, no entanto, nenhum ponto fixo representa a era da matéria.

2.3.5 Conclusão

À luz da teoria dos sistemas dinâmicos lineares, estudamos a quintessência acoplada à matéria escura com duas interações diferentes: i) proporcional à densidade de energia da energia escura ρ_ϕ e, ii) proporcional à soma das duas densidades de energia $\rho_m + \rho_\phi$. Os resultados aqui apresentados ampliam a análise anterior na literatura, onde a interação tem sido apenas proporcional à densidade de energia da matéria escura. No caso i) a transição das eras cosmológicas é totalmente alcançada com uma seqüência adequada de pontos fixos. No segundo caso, ii), tanto a era da radiação quanto a era da energia escura podem ser descritas pelos pontos fixos, mas a era da matéria não pode. Portanto, a segunda interação não fornece a seqüência cosmológica: radiação $\rightarrow$ matéria $\rightarrow$ energia escura. Esta não é a primeira vez que uma interação proporcional à soma das densidades de energia leva a desastres cosmológicos. Um modelo fenomenológico com esse acoplamento sofre instabilidade no começo do universo para $w > -1$, como mostrado em [39, 40]. Análises adicionais para altos redshifts e diferentes acoplamentos são resumidas em [130].

Capítulo 3

Dark SU(2)

Nesse capítulo será apresentado um trabalho feito pelo autor [157] onde é estudada a possibilidade de um decaimento de uma partícula de DE em outra partícula de DE mais uma partícula de DM e outra de neutrino escuro.

3.1 Modelo para DE

Queremos encontrar um modelo baseado na teoria de campos que descreva um mecanismo de decaimento de DE em DM, e que ao mesmo tempo se aproxime do comportamento de uma constante cosmológica. Vamos supor que a DE seja um campo escalar em um potencial com um mínimo metaestável.

Consideraremos que o potencial do campo escalar tem um vácuo falso (metaestável) e um vácuo verdadeiro, com uma diferença de energia entre os dois de $\epsilon \equiv 10^{-47} GeV^4 = \rho_\Lambda$.

Como o valor de ϵ é muito pequeno é de se esperar que o tempo de decaimento seja muito grande, maior que a idade do universo. No entanto, à medida que o parâmetro massa decresce, a altura e a largura da barreira do seu potencial diminuem, diminuindo assim o tempo de decaimento.

Até hoje nenhuma partícula do setor escuro foi observada em detectores de partículas, acredita-se que ou elas tenham a massa muito grande ou a interação com as partículas do Modelo Padrão seja muito fraca. Um exemplo desse caso são os áxions [158–160], candidatos à DM, que, caso existam, devem possuir massa na faixa de 10^{-2} a 10^{-5}eV [161]. Além de resolver o problema de CP forte, deu uma boa ideia da massa necessária para partículas ultraleves candidatas a DM.

Iremos aqui estudar um decaimento do vácuo metaestável para o vácuo verdadeiro. A diferença de energia entre esses dois mínimos é ajustada para que seja igual a densidade de energia da constante cosmológica. Após esse estudo, será analisado o decaimento de uma partícula de DE em outra partícula de DE mais um dubleto de DM, e analisada a validade desse modelo.

3.1.1 Decaimento do vácuo falso

Como visto em [162], um estado de vácuo é estável se os valores esperados do campo escalar estiverem em um mínimo verdadeiro do potencial efetivo. Mas se os valores esperados do campo escalar estiverem em um mínimo local que é mais alto que o mínimo verdadeiro então esse vácuo será metaestável. Um estado de vácuo metaestável “falso” corresponde à um mínimo local que irá decair em um estado “verdadeiro” de vácuo correspondente ao mínimo verdadeiro por um processo de penetração de barreira (tunelamento), análogo ao decaimento do núcleo alpha ou fissão espontânea. Processos desse tipo não podem ser observados em laboratório mas como várias simetrias têm sido quebradas espontaneamente, acreditamos que eles tenham ocorrido várias vezes na história do universo, por isso é tão importante saber calcular a taxa de decaimento do vácuo falso.

Um exemplo simples de um estado metaestável é a ebulição de um líquido muito quente citado em [163], o vácuo falso corresponde à fase superquente e o vácuo verdadeiro à fase de vapor, nessa transição há criação de bolhas, elas não podem ser muito pequenas pois o ganho em energia volumétrica não será suficiente para compensar a perda de energia superficial, assim, as bolhas físicas podem ter o tamanho crítico ou um tamanho maior, isso será melhor explicado no decorrer do texto.

Estamos interessados aqui em calcular a taxa de decaimento de um estado metaestável de energia escura. Supondo que o universo com expansão acelerada possa ser descrito por um campo escalar canônico ϕ, vamos assumir que esse campo escalar é positivo definido. Por definição, tomamos a densidade lagrangeana na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \tag{3.1}$$

Assumimos que potencial efetivo $V(\phi)$ de menor ordem tem um mínimo verdadeiro em $\phi = \langle\phi\rangle$ e um mínimo local em $\phi = \phi_0 = 0$, e queremos ajustar uma constante aditiva na densidade lagrangeana de tal forma que $V(\langle\phi\rangle) = 0$, nesse caso $V(\phi_0) > 0$. Escolheremos o acoplamento de ϕ^6 de tal forma com que seja uma soma de dois termos, o primeiro deles responsável por gerar o potencial quadrático e o segundo por criar o vácuo metaestável.

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{g'}{M_P^2}\phi^6 + K \ , \tag{3.2}$$

onde m e λ são parâmetros livres positivos da teoria e K é uma constante. Vamos então patir do potencial quadrático definido por [104]

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\lambda^2}{32m^2}\phi^6 + \frac{g}{M_P^2}\phi^6 + K \ , \tag{3.3}$$

onde acoplamento de ϕ^6 foi escolhido para que o potencial (3.3) seja um quadrado perfeito,

$$V(\phi) = \left(\frac{m}{\sqrt{2}}\phi - \frac{\lambda\phi^3}{4\sqrt{2}m}\right)^2 + \frac{g}{M_P^2}\phi^6 + K.$$

O potencial (3.3) tem extremos em $\phi_0 = 0$ $(V(\phi_0) = 0)$, $\phi_\pm = \pm\dfrac{2m}{\sqrt{\lambda}}$ $(V(\phi_\pm) = 0)$ e $\phi_1 = \dfrac{\phi_\pm}{\sqrt{3}}$ $(V(\phi_1) = \dfrac{8m^4}{27\lambda})$. Para obter a constante cosmológica, o potencial deve desviar levemente do quadrado perfeito. Uma vez que o acoplamento presente na

Relatividade Geral é a massa de Planck M_P, é natural esperar que o desvio do vácuo de Minkowski seja devido ao termo proporcional à M_P^{-2}, que será o segundo termo que multiplica ϕ^6. Assim assumimos que o potencial (3.3) tem um pequeno desvio dado por $\frac{\phi^6}{M_P^2}$, vamos subtrair essa função do potencial (3.3) fazendo $g \to -g$.

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\lambda^2}{32m^2}\phi^6 - \frac{g}{M_P^2}\phi^6 + K \ , \tag{3.4}$$

Apesar do valor do campo escalar no ponto mínimo $\phi_\pm$ também mudar, a mudança é muito pequena e podemos considerar que o campo escalar no vácuo falso ainda é $\pm\frac{2m}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\phi_\pm^6}{M_P^2}$. Vamos fixar as variáveis para que ϵ seja a diferença entre o vácuo falso e o verdadeiro

$$\epsilon \equiv V(\phi_0) - V(\phi_\pm) \approx \frac{64m^6}{\lambda^3 M_P^2} \ . \tag{3.5}$$

Como usual na teoria quântica de campos é esperado que o parâmetro λ seja menor que um, se assumirmos que $\lambda \sim 10^{-1}$, a equação (3.5) é $\epsilon \sim 10^{-47}$ GeV^4 para $m \sim \mathcal{O}$(MeV). Valores maiores para λ implicam em valores menores de m. Portanto, a constante cosmológica é determinada pelo parâmetro de massa e o acoplamento da interação de ordem quatro.

Definindo $K \equiv \epsilon$ para fazer com que o potencial desvie para cima e o vácuo verdadeiro esteja no eixo, temos o potencial final dado por

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\lambda^2}{32m^2}\phi^6 - \frac{g}{M_P^2}\phi^6 + \epsilon \ , \tag{3.6}$$

mostrado na Fig (3.1)

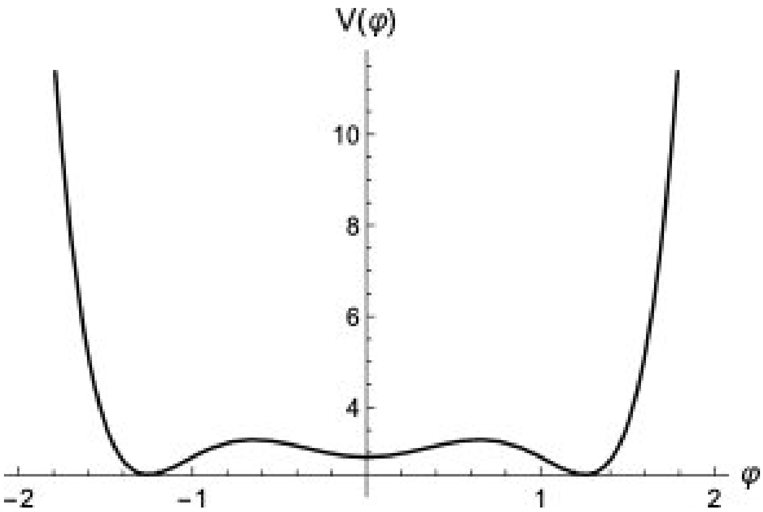

Figura 3.1: Potencial escalar (3.6) com parâmetros e valores arbitrários. A diferença entre o vácuo verdadeiro em $\phi_\pm \approx 1.2$ e o vácuo falso em $\phi_0 = 0$ é $\epsilon \equiv V(\phi_0) - V(\phi_\pm) \approx 10^{-47} GeV^4$.

O processo de tunelamento em que o estado metaestável do vácuo falso decai para o vácuo verdadeiro é similar ao antigo cenário inflacionário, e ocorre pela formação de bolhas do vácuo verdadeiro no background do vácuo falso. Depois de penetrar na barreira as bolhas crescem na velocidade da luz e acabam colidindo com outras bolhas até que todo o espaço esteja no estado de menor energia. A energia liberada nesse processo pode produzir novas partículas e uma interação de Yukawa $g\phi\bar{\psi}\psi$ pode ser considerada para a produção de um campo fermiônico, tal campo pode ser a matéria escura fermiônica com pressão nula. No entanto, como veremos, o tempo de decaimento é da ordem da idade do universo, então é necessário considerar outro processo dominante para recapturar a cosmologia *standard*.

Se o nosso sistema reside originalmente no vácuo falso e ϵ é pequeno, eventualmente o vácuo falso irá decair no vácuo verdadeiro onde a energia é nula. Esse valor é ajustado pela massa do campo escalar e o coeficiente da interação. A taxa em que o vácuo falso decai no vácuo verdadeiro será calculada.

Taxa de decaimento

Vamos seguir os mesmos passos feitos em [163] e partir do ponto de que o sistema está no vácuo falso, a qualquer ordem finita da teoria de perturbação a instabilidade não será notada pois essa teoria descreve pequenas oscilações perto do ponto de equilíbrio. Contudo, pode ocorrer grande flutuação do campo ϕ, então ele é derramado do vácuo falso. É natural esperar que a ação correspondente a grandes flutuações do campo seja grande, então o problema será tratado quase-classicamente.

Vamos realizar as contas por uma perspectiva de tunelamento Euclideano, poderíamos considerar a dinâmica de "bolhas de vácuo verdadeiro" no espaço-tempo de Minkowski, obteríamos o mesmo resultado mas por outra análise, como pode ser visto em [162]. Basicamente, a diferença entre esses dois casos é como olhamos para o tempo. No espaço-tempo de Minkowski, se considerarmos um problema em quatro dimensões a bolha estará em três dimensões enquanto que a sua superfície será S_2, já por outro lado, uma bolha Euclideana em quatro dimensões terá uma superfície S_3.

Estamos tratando de um processo de tunelamento. Pequenas bolhas são classicamente proibidas como já foi discutido acima. A partir de (3.1), a ação Euclideana é

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right]. \tag{3.7}$$

Para resolver problemas de tunelamento procuramos campos que

(i) representam o vácuo falso ϕ_0 para tempos muito grandes, tanto no passado quanto no futuro, e representam o vácuo verdadeiro em tempos intermediários;

(ii) fazem com que a ação seja extrema.

A segunda condição implica em achar uma solução da equação de movimento Euclideana clássica,

$$\partial^2\phi - V'(\phi) = 0. \tag{3.8}$$

Isso corresponde ao movimento do sistema no potencial $-V$, começando de ϕ_0 e se movendo para $\phi_\pm$, chegando no seu máximo e voltando para ϕ_0. Essa solução é chamada de *bounce* e é invariante por transformação de um gerador do grupo O(4), ou seja, é O(4) simétrica.

Colocando a origem no centro da solução de *bounce* e utilizando o Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(r) \quad com \quad r \equiv \sqrt{(\vec{x} - \vec{x_0})^2 + (t - t_0)^2}, \tag{3.9}$$

a ação Euclideana (3.7) para uma solução invariante por rotação, simetria O(4), se torna

$$S = \int_0^\infty dr 2\pi^2 r^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + V(\phi)\right], \tag{3.10}$$

onde, em 4 dimensões, $d^4x = r^3 dr d\Omega_3$, e $d\Omega_3$ é o elemento de superfície em 3 dimensões. Podemos utilizar a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dr} \cdot \frac{\partial S}{(\partial\phi/\partial r)} - \frac{\partial S}{\partial \phi} = 0 \tag{3.11}$$

para calcular a equação de movimento da ação (3.7). Obtemos que

$$\frac{d}{dr} \cdot \frac{\partial S}{(\partial\phi/\partial r)} = \frac{d}{dr}\left[2\pi^2 r^3 \frac{\partial\phi}{\partial r}\right] = 2\pi^2\left[3r^2\frac{d\phi}{dr} + r^3\frac{d^2\phi}{dr^2}\right] ,$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial\phi} = 2\pi^2 r^3 \frac{V(\phi)}{d\phi} \equiv 2\pi^2 r^3 V'(\phi) .$$

Assim, substituindo os resultados acima na equação (3.11), temos a seguinte equação de movimento do *bounce*

$$\frac{d^2}{dr^2}\phi(r) + \frac{3}{r}\frac{d}{dr}\phi(r) = V'(\phi) , \tag{3.12}$$

onde as condições de contorno são

$$\phi(r \to \pm\infty) = \phi_0 , \tag{3.13}$$

$$\phi(r = 0) \approx \phi_\pm , \tag{3.14}$$

$$\left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{r=0} = 0 . \tag{3.15}$$

A equação (3.12) é análoga à uma partícula na posição ϕ se movendo em um "tempo" r, sob a influência de um potêncial $-V(\phi)$ e força de viscosidade $-\frac{3}{r}\frac{d\phi}{dr}$.

É importante enfatizar que a Eq. (3.13) nos diz que ϕ tende a ϕ_0 quando o raio da bolha tende ao infinito, para ir para o vacuo verdadeiro o raio R tem q ser menor que um R_{critico}. Fisicamente isso expressa o fato de que o ponto final da trajetória de tunelamento é o vácuo verdadeiro.

A partícula que é liberada do repouso de algum lugar perto de $\phi_\pm$ em um tempo nulo, deve alcançar ϕ_0 em um tempo infinito, ou seja, se uma partícula viaja de um valor inicial ϕ_i e $r = 0$ deve ser encontrada em ϕ_0 para $r \to \infty$.

Resumindo, $r \sim 0$ é o vácuo verdadeiro e $r \to \pm\infty$ é o vácuo falso. A partícula começa no vácuo falso, caminha para o vácuo verdadeiro e depois volta para o vácuo falso. Ela não encontra o vácuo verdadeiro, chega muito perto. Se $\epsilon \to 0$ ela o consegue alcançar.

Como a variável r tem seu centro no vácuo verdadeiro, a bolha é definida por r e representa uma bolha de vácuo verdadeiro dentro de um mar de vácuo falso. O tunelamento é a chance de existir uma bolha com $r > 0$.

Tendo estabelecido a existência de uma configuração do campo, relevante ao tunelamento do vácuo falso ao vácuo verdadeiro que extremiza a ação, é possível verificar que essa solução maximiza a ação e não a minimiza. Isso implica na existência de um modo negativo no background de *bounce*. O decaimento do vácuo falso se manifesta na ocorrência de uma parte imaginária da energia do vácuo falso, assim, a contribuição do *bounce* à densidade de energia do vácuo deve ser puramente imaginária. O fator i surge de $\mathrm{Det}^{-1/2}$ calculado para pequenas flutuações perto da solução de bounce clássica, e ele providencia apenas um modo negativo.

Chamaremos de $\phi_b(x)$ a solução do *bounce* das equações clássicas (3.12). Considerando uma família de funções $\phi(x;\nu) \equiv \phi_b(x/\nu)$, onde ν é um parâmetro positivo. A ação para essa família é

$$S[\phi(x;\nu)] = \frac{1}{2}\nu^2 \int d^4x(\partial_\mu\phi_b)^2 + \nu^4 \int d^4x V(\phi_b). \tag{3.16}$$

Desde que $\phi_b(x)$ extremiza a ação, temos

$$\frac{\partial S[\phi(x;\nu)]}{\partial \nu}\Big|_{\nu=1} = 0,$$

isso implica em

$$\int d^4x(\partial_\mu\phi_b)^2 = -4\int d^4x V(\phi_b). \tag{3.17}$$

Substituindo a equação (3.17) na ação (3.16), teremos

$$S[\phi(x;\nu)] = \left(\frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{4}\nu^4\right)\int d^4x(\partial_\mu\phi_b)^2, \tag{3.18}$$

e podemos então notar que

$$\frac{\partial^2 S[\phi(x;\nu)]}{\partial \nu^2}\Big|_{\nu=1} = -2\int d^4x(\partial_\mu\phi_b)^2 < 0. \tag{3.19}$$

Isso mostra que inflando ou desinflando o *bounce*, a ação diminuirá.

O decaimento do vácuo metaestável no vácuo verdadeiro é visto como a formação de bolhas do vácuo verdadeiro cercado pelo vácuo falso. O termo de fricção $d\phi/dr$ é diferente de zero apenas na parede da bolha, desde que o campo esteja em repouso dentro e fora. Na abordagem semiclássica, a taxa de decaimento por unidade de volume do vácuo falso é proporcional à energia do estado de vácuo falso [162, 164]

$$\frac{\Gamma}{Volume} \approx M^{-4} exp(-S), \tag{3.20}$$

onde M é alguma escala de massa. Quando S é grande, a barreira é suprimida, ou seja, ela é transpassada, podemos então estimar o valor do decaimento apenas por $\frac{\Gamma}{Volume} \approx exp^{-S}$ ignorando a escala de massa. Esse é o caso de quando a energia do vácuo verdadeiro é levemente abaixo da energia do vácuo falso, estamos considerando aqui um valor baixo para a diferença dessas energias $\epsilon \sim 10^{-47} GeV^4$. Por outro lado, o potencial $V(\phi)$ não é pequeno entre ϕ_0 e $\phi_\pm$.

A solução analítica de (3.12) não é conhecida. Entretanto, temos uma ideia bastante completa de suas propriedades, e isso permitirá que calculemos a taxa de decaimento para ϵ pequeno. De fato, a espessura do domínio de transição onde o campo ϕ vai de ϕ_0 para $\phi_\pm$ é determinado pela massa da excitação elementar, $V''(\phi_+)|_{\phi=0}$ ou $V''(\phi_-)|_{\phi=0}$. No mesmo tempo o raio R da bolha depende de ϵ, quanto menor o ϵ maior é o raio R. O raio da bolha é inversamente proporcional a ϵ, se $\epsilon \to 0$ então $R \to \infty$ e tudo é vácuo falso. Para ϵ suficientemente pequeno o raio R se torna maior que a espessura da parede da bolha, essa é a chamada *aproximação de parede fina*, em inglês *thin wall approximation* (TWA). Para uma parede fina podemos considerar $r \approx R$ nessa região e desde que R seja grande podemos desprezar o termo de viscosidade, que é proporcional a $3/R$ na parede. Se $R >> m^{-1}$ então podemos

(i) considerar a parede da bolha como um domínio plano desprezando sua curvatura;

(ii) aproximar o campo fora da bolha por $\phi = \phi_0$ e dentro da bolha por $\phi = \phi_\pm$.

Então a integral (3.7) pode ser decomposta em três partes: uma integral fora da bolha, uma integral no domínio de transição (parede), e uma integral dentro da bolha. A integral fora da bolha é nula; a segunda integral, na parede, resulta na área da superfície da bolha multiplicada pela tensão T dessa superfície plana; a terceira integral produz o volume da bolha multiplicado por $-\epsilon$. Dessa forma

$$S = T \times 2\pi^2 R^3 - \epsilon \times \frac{1}{2}\pi^2 R^4, \tag{3.21}$$

onde a tensão superficial é calculada por [163]

$$T = \int_{\phi_0}^{\phi_+} d\phi \sqrt{2V(\phi)}. \tag{3.22}$$

Para encontrar a ação do *bounce* precisamos do raio crítico R_* que extremiza (3.21)

$$\left.\frac{dS}{dR}\right|_{R=R_*} = 0 \Rightarrow \left[6\pi^2 T R^2 - 2\pi^2 \epsilon R^3\right]_{R=R_*} = 0 \Rightarrow$$

$$R_* = \frac{3T}{\epsilon}. \tag{3.23}$$

Podemos ver que o extremo da ação é de fato um máximo, e que R_* se torna arbitrariamente grande para ϵ pequeno, o que justifica o TWA. No extremo a ação tem o valor de

$$S_* = S|_{R=R_*} = \frac{27}{2}\pi^2 T^4/\epsilon^3. \tag{3.24}$$

Tempo de decaimento

Usando o potencial (3.6) na integral (3.22) obtemos

$$T = \frac{m^3}{\lambda}, \tag{3.25}$$

aplicando esse resultado na ação Euclideana no ponto estacionário considerando a TWA,

$$S_{DE} \simeq \frac{27\pi^2 m^{12}}{2\lambda^4\epsilon^3}. \tag{3.26}$$

Substituindo a ação (3.26) na taxa de decaimento (3.20) com $\epsilon \sim 10^{-47}$ GeV^4 e a escala de massa sendo 1 GeV por simplicidade, temos [104]

$$\frac{\Gamma}{V} \approx exp\left[-10^{143}\left(\frac{m}{GeV}\right)^{12}\lambda^{-4}\right] GeV^4 \tag{3.27}$$

.

O tempo de decaimento é obtido invertendo a expressão acima,

$$t_{decaimento} \approx 10^{-25}\left\{exp\left[10^{143}\left(\frac{m}{GeV}\right)^{12}\lambda^{-4}\right]\right\}^{1/4} s. \tag{3.28}$$

A expressão para o tempo de decaimento nos fornece o valor de energia mais baixo para o parâmetro de massa m no qual (3.28) tem pelo menos a idade do universo ($10^{17}s$). Portanto o parâmetro de massa deveria ser

$$m \gtrsim 10^{-12} GeV, \tag{3.29}$$

para $\lambda \sim 10^{-1}$. Assim, ele está de acordo com o valor para m no qual o potencial escalar descreve a energia do vácuo observada, como discutido aqui. A massa do campo escalar pode ser menor se o acoplamento λ também for menor que 10^{-1}. A taxa de decaimento (3.27) é fortemente suprimida por grandes valores de m. O raio da bolha dado na equação (3.23) para o parâmetro de massa m (3.29) é $R \gtrsim 0.03cm$.

3.1.2 Matriz de espalhamento de $\varphi^+ \to \varphi^0 + \psi + \nu_d$

O modelo $SU(2)_R$ escuro contém um candidato ψ à DM, um neutrino escuro ν_d (que pode ser mais leve que ψ), e um dubleto de energia escura φ, que contém φ^0 e φ^+, a última partícula é mais pesada que a primeira.

O decaimento de três corpos leva a uma partícula de DM cuja massa pode ser acomodada para dar uma abundância de relíquia correta; a um neutrino que é uma partícula quente/morna de DM; e a um campo escalar φ^0 [104].

No nosso modelo assumimos que ambos DE e DM são dubletos sob transformações do grupo $SU(2)_R$ e singletos sob qualquer outra simetria. Após a quebra espontânea de simetria pelo campo de Higgs escuro ϕ, os bósons de gauge W_d^+, W_d^- e Z_d adquirem a mesma massa dada por $m_W = m_Z = gv/2$, onde v é o VEV do Higgs escuro. Após a quebra de simetria φ^0 e φ^+ têm massas diferentes e ambas têm um potencial dado pelo (3.6) mais o desvio $\left(\varphi^\dagger \varphi\right)^3 / M_P^2$. As partículas consideradas aqui são neutras de carga. A interação entre os campos é dada pela lagrangeana [104]

$$\mathcal{L}_{int} = g\left(W_{d\mu}^+ J_{dW}^{+\mu} + W_{d\mu}^- J_{dW}^{-\mu} + Z_{d\mu}^0 J_{dZ}^{0\mu}\right) \ , \tag{3.30}$$

onde as corrente são

$$J_{dW}^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{\nu}_{dR}\gamma^\mu\psi_R + i\left(\varphi^0\partial^\mu\bar{\varphi}^+ - \bar{\varphi}^+\partial^\mu\varphi^0\right)\right] \ , \tag{3.31}$$

$$J_{dW}^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}_R\gamma^\mu\nu_{dR} + i\left(\varphi^+\partial^\mu\bar{\varphi}^0 - \bar{\varphi}^0\partial^\mu\varphi^+\right)\right] \ , \tag{3.32}$$

$$J_{dZ}^{0\mu} = \frac{1}{2}\left[\bar{\nu}_{dR}\gamma^\mu\nu_{dR} - \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R + i\left(\varphi^+\partial^\mu\bar{\varphi}^+ - \bar{\varphi}^+\partial^\mu\varphi^+\right) - i\left(\varphi^0\partial^\mu\bar{\varphi}^0 - \bar{\varphi}^0\partial^\mu\varphi^0\right)\right] \ . \tag{3.33}$$

As correntes acima são parecidas com as correntes da teoria eletrofraca. A principal diferença é que não há hipercarga devido à $U(1)_\gamma$ e existe um novo dubleto, dado por φ^+ e φ^0.

A lagrangeana (3.30) admite algumas interações que ocorrem em alguns decaimentos. Estamos interessados em calcular a taxa de decaimento devido ao processo $\varphi^+ \to \varphi^0 + \psi + \nu_d$. Da mesma forma que é feito para interações fracas, assumimos que a energia envolvida no decaimento é muito menor do que a massa dos campos de gauge, então o propagador de W é proporcional à g^2/m_W^2 e as correntes interagem em um ponto. Podemos definir

$$\frac{g^2}{8m_W^2} \equiv \frac{G_d}{\sqrt{2}}, \tag{3.34}$$

onde G_d é o acoplamento escuro.

O diagrama de Feynman é mostrado na Fig (3.2) e a amplitude para o decaimento é

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{4m_W^2}(P + p_1)_\mu \bar{v}(p_3)\gamma^\mu(1+\gamma^5)u(p_2) \ , \tag{3.35}$$

onde os índices 1, 2 e 3 indicam as partículas φ^0, ψ e ν_d respectivamente, e P e M indicam o quadrimomento e a massa, respectivamente, de φ^+. A conservação do quadri-momento implica que $P = p_1 + p_2 + p_3$.

A média do módulo ao quadrado da amplitude de decaimento é

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 16\, G_d^2 \left\{2\left[(P+p_1)\cdot p_2\right]\left[(P+p_1)\cdot p_3\right] - (P+p_1)^2(p_2\cdot p_3 + m_2\, m_3)\right\} \ . \tag{3.36}$$

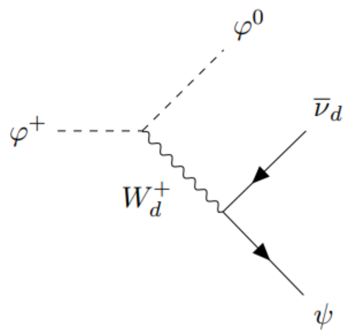

Figura 3.2: Diagrama de Feymann para o decaimento $\varphi^+ \to \varphi^0 + \psi + \nu_d$ [104].

Usando a conservação da energia-momento e definindo as invariantes s_{ij}, é possível escrever [104]

$$
\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 =& 16\, G_d^2 \Big[-2s_{12}^2 - 2s_{12}s_{23} + 2(M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)s_{12} \\
&+ \frac{(m_2+m_3)^2}{2} s_{23} - 2m_2\, m_3 \left(M^2 + m_1^2\right) - 2m_1^2\, M^2 \\
&-2m_2^2 \left(m_1^2 + m_2^2\right) - \frac{(m_2+m_3)^2}{2}\Big] ,
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

onde utilizou-se também que as invariantes não são independentes pela conservação do quadri-momento e obedecem $s_{12} + s_{23} + s_{13} = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$. Dessa forma foi possível eliminar s_{13}.

3.2 Interacting dark energy in the dark $SU(2)_R$ model

Vamos apresentar o trabalho feito em [157] em que o autor participou.

3.2.1 Resumo

Exploramos as implicações cosmológicas das interações entre as partículas escuras no modelo escuro $SU(2)_R$. Acontece que a relevante interação entre a energia escura e matéria escura, se dá através de um processo de decaimento. Com respeito apenas ao modelo padrão ΛCDM, a única mudança ocorre nas equações do *background*. Observamos que os aspectos observacionais do modelo são dominados por degenerescências entre os parâmetros que descrevem o processo. Assim, apenas os parâmetros usuais do ΛCDM, como a taxa de expansão de Hubble e o parâmetro de densidade da energia escura (interpretado como a combinação das densidades do dubleto de energia escura) poderia ser restringido por observações neste momento.

3.2.2 Introdução

Compreender a natureza da energia escura e da matéria escura é um desafio intrigante que tem motivado os físicos a desenvolver enormes programas observacionais. Isto é uma das maiores preocupações da cosmologia moderna. O candidato mais simples à energia escura é uma constante cosmológica, de acordo com os resultados do satélite Planck [165]. Tal tentativa, no entanto, sofre de enorme discrepância de 120 ordens de magnitude entre uma previsão teórica e os dados observados [166]. A origem de tal constante ainda é uma questão em aberto que motiva os físicos a olhar para modelos mais sofisticados. A abundância de candidatos à energia escura inclui campos escalares [37, 78–83, 114–117, 125], campos de vetoriais [85–90, 138], energia escura holográfica [51, 91, 92, 94–101, 167–173], modelos de decaimento de vácuo falso [103, 105–107, 174, 175], modificações da gravidade e diferentes tipos de fluidos cosmológicos [65, 110, 111]. Além disso, os dois componentes do setor escuro podem interagir uns com os outros [51,64,74,95–97,106,111,118–126,148,150,176–183], desde que suas densidades sejam comparáveis e a interação possa eventualmente aliviar o problema da coincidência [131, 132].

Muito mais perto do Modelo Padrão (em inglês *Standard Model*, SM) da física de partículas são os modelos baseados em grupos de gauge que visam levar a matéria escura em consideração. Aqueles com simetria $SU(2)_R$, por exemplo, são conhecidos na literatura como extensões do SM, são chamados de modelos simétricos esquerda-direita [184–190], onde, recentemente, a matéria escura foi considerada [191–201], mas sem nenhuma tentativa de inserir energia escura nela.

O modelo escuro $SU(2)_R$ foi construído para ter os dois elementos do setor escuro [104] e é semelhante ao modelo bem conhecido de fracas interações. Em princípio, o setor oculto interage com as partículas do SM somente através da gravidade. A energia escura é interpretada como um campo escalar cujo potencial é uma soma de auto-interações até a sexta ordem. O campo escalar está no mínimo local do potencial, e tal falso vácuo pode decair no verdadeiro através da penetração da barreira, tunelamento. No entanto, a fim de explicar a aceleração cósmica atual, o vácuo falso deve ser de longa duração (com um tempo de vida da ordem da idade do universo, como mostrado em [104] e, portanto, o campo escalar se comporta como uma constante cosmológica. Por outro lado, difere deste último devido à presença de interações entre as partículas escuras.

Neste trabalho, exploramos as interações entre as partículas escuras do ponto de vista cosmológico. A interação relevante está entre a energia escura e a matéria escura, através do processo de decaimento calculado em [104]. Acontece que o acoplamento muda apenas as equações do background, uma vez que a perturbação da energia escura diminui mais rapidamente que a da radiação. Esse trabalho é organizado da seguinte maneira. Seção 3.2.3 apresenta o modelo escuro $SU(2)_R$, introduzido em [104]. Na seção 3.2.4 nós derivamos suas equações cosmológicas e discutimos o resultado quando comparado com dados observacionais das sondas cósmicas padrões. A seção 3.2.5 é reservada para conclusões.

3.2.3 O modelo $SU(2)_R$ escuro

No modelo $SU(2)_R$ escuro [104], a energia escura e matéria escura são dubletos sob $SU(2)_R$ e singletos sob qualquer outra simetria. O modelo contém um candidato à matéria escura ψ, um candidato ao neutrino escuro ν_d (que pode ser muito mais leve do que ψ), e um dubleto de energia escura φ, com φ^0 e φ^+, o último é a partícula mais pesada por definição. O potencial escalar para o dubleto de energia escura é

$$V(\Phi) = \frac{m^2}{2}\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2 + \frac{g'}{\Lambda^2}(\Phi^\dagger\Phi)^3 \quad , \tag{3.38}$$

onde λ e g' são constantes positivas e Λ é a escala de cutoff. Existem alguns termos que envolvem acoplamento com o Higgs escuro de tal forma que depois da quebra espontânea de simetria a massa física do dubleto de energia escura não é mais o mesmo, mas m_{φ^0} e m_{φ^+}.

O termo da interação de dimensão seis pode ser dividido em

$$\frac{g'}{\Lambda^2}(\Phi^\dagger\Phi)^3 = \left[\frac{\lambda}{32m_i^2} + \frac{g}{\Lambda^2}\right](\Phi^\dagger\Phi)^3 \quad , \tag{3.39}$$

onde $g' = \dfrac{\lambda^2}{32m_i^2}\Lambda^2 - g$ e i representa φ^0 ou φ^+.

O termo de massa, a interação quártica e o primeiro termo de dimensão seis do operador podem ser agrupados como um quadrado perfeito, $[\frac{m_i\varphi^i}{\sqrt{2}} - \frac{\lambda(\varphi^i)^3}{\sqrt{32}\,m_i}]^2$, que tem um mínimo absoluto em $V(\varphi^i) = 0$. O termo extra $g\Lambda^{-2}(\varphi^i)^6$ leva o mínimo $V(\pm 2m/\sqrt{\lambda})$ para baixo, então a diferença entre o vácuo verdadeiro e o vácuo falso é dada por $V(0) - V(\pm 2\,m_i/\sqrt{\lambda}) = 64\,m_i^6\lambda^{-3}g\Lambda^{-2}$, é a energia do vácuo observada. A gravidade induz o termo $(gM_{pl}^{-2}(\varphi^i)^6)$, que pode parametrizar uma contribuição de loop gravitacional [202], é uma opção natural desde que estejamos lidando com efeitos gravitacionais, assim sendo, a massa da Planck reduzida é a escala do cutoff.[1] A massa do campo escalar deveria ser, por exemplo, $\sim \mathcal{O}(\text{GeV})$ para $\lambda \sim g \sim 1$ em ordem de explicar o valor observado de 10^{-47} GeV^4. O valor da energia observada do vácuo restringe um dos três parâmetros m_i, λ, ou g.

A interação entre os campos é dada pela Lagrangeana (3.30)

O comportamento desse sistema é duplo. Se colocarmos o campo bosônico no vácuo (metaestável) em $\varphi^i = 0$, ele pode decair ou permanecer lá, caso a altura e a largura da barreira sejam grandes o suficiente. Supomos que seja o caso aqui [104]. Nesse caso, fazendo uma divisão entre o background e a perturbação dos campos, eles são expandidos em torno do vácuo e as perturbações atuam como campos quânticos nas interações. O campo bosônico φ^+, se preso por uma barreira grande o suficiente, só pode decair pelo significado da Lagrangeana (3.30). Observe que, como o vácuo falso está em $\varphi^+ = 0$, a expansão da Lagrangeana coincide com o original. Portanto, no decaimento do campo bosônico φ^+ em férmions $(\psi + \nu_d)$ mais φ^0 não há barreiras potenciais, assim a energia escura decai em matéria escura e outras partículas. Este

[1] É possível obter o potencial escalar (3.38) da supergravidade mínima, por exemplo. No entanto, como usual nas teorias de supergravidade, acabamos com uma constante cosmológica negativa.

mecanismo é o responsável pelo decaimento da energia escura em matéria escura fria (ou mesmo quente) e é o que vamos buscar agora.

Do ponto de vista cosmológico, as *interações relevantes*[2] entre as partículas escuras são o decaimento $\varphi^+ \to \varphi^0 + \psi + \nu_d$ [104] e a aniquilação de dois escalares em dois férmions. O último processo, no entanto, dá uma seção de choque nula após expandi-lo em potências pares de p/m para uma matéria escura fria fermiônica, enquanto o processo anterior (decaimento) já possui contribuições não relativísticas; de um modo geral, tem contribuições mais importantes. Os outros processos de aniquilação pertencem ao setor escuro e não desempenham um papel importante nas observações atuais.

3.2.4 Predições do modelo

Equações do background

A equação de Boltzmann para o processo $\alpha \to a + b + c$ é dada por [203]

$$\begin{aligned}\frac{\partial(a^3 n_\alpha)}{\partial t} &= -a^3 \int d\Pi_\alpha \, d\Pi_a \, d\Pi_b \, d\Pi_c \, (2\pi^4) \times \\ &\times \delta^4(p_\alpha - p_a - p_b - p_c)|\mathcal{M}|^2_{\alpha\to a+b+c} f_\alpha \quad , \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde $d\Pi_i \equiv \dfrac{1}{(2\pi)^3}\dfrac{d^3p_i}{2E_i}$ e $f_i = e^{-E_i/k_B T}$ e o $a = a(t)$ é o fator de escala. Desprezamos os fatores devido à degenerescência do condensado de Bose ou Fermi. O lado direito da Eq. (3.40) se torna

$$\begin{aligned}\int \quad & d\Pi_{\varphi^+} \, d\Pi_{\varphi^0} \, d\Pi_\psi \, d\Pi_\nu \, (2\pi^4)\delta^4(p_{\varphi^+} - p_{\varphi^0} - p_\psi - p_\nu) \times \\ & \times |\mathcal{M}|^2 e^{-E_{\varphi^+}/k_B T} = -\Gamma n_{\varphi^+} \quad , \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde Γ é a integral da amplitude de espalhamento, que por sua vez não depende de p [104]. A densidade de número é $n_{\varphi^+} = \displaystyle\int e^{-E_{\varphi^+}/k_B T} \frac{d^3 p_{\varphi^+}}{(2\pi)^3}$. Eqs. (3.40) e (3.41) leva às seguintes equações para partículas no processo de decaimento

$$\frac{\partial(a^3 n_\alpha)}{\partial t} = -\Gamma a^3 n_\alpha \quad , \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial(a^3 n_{a,b,c})}{\partial t} = \Gamma a^3 n_\alpha \quad . \tag{3.43}$$

Uma vez que o campo está em repouso no mínimo do potencial, da Eq. (3.42) vemos que o termo $a^3 n$ deveria ser constante (na ausência do decaimento) para descrever a constante cosmológica, assim sendo a densidade de energia para um fluido com equação de estado $w = -1$ deveria ser $\rho = a^3 mn$, que é, um fluido não relativístico que não se dilui quando o universo se expande.

[2] Existem outras.

A equação da continuidade para um fluido cosmológico é obtida da definição $\rho_i \equiv \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} E_i f_i \approx m_i n_i$, onde a última igualdade é válida para fluidos não relativísticos[3]. Consequentemente, a equação da continuidade para o fluido φ^+ é

$$\dot{\rho}_{\varphi^+} = -\Gamma \rho_{\varphi^+} \quad , \tag{3.44}$$

que tem a solução usual de decaimento exponencial $\rho_{\varphi^+} \propto e^{-\Gamma t}$. A taxa de decaimento pode ser vista como parte de uma equação efetiva de estado para φ^+, desde que

$$\dot{\rho}_{\varphi^+} + 3H(1 + w_{\text{eff}})\rho_{\varphi^+} = 0 \quad , \tag{3.45}$$

onde $w_{\text{eff}} = -1 + \Gamma/3H$. O segundo termo dá a contribuição cinética da energia escura.

Os outros fluidos (φ^0, ψ, e ν_d) têm equações de continuidade similares, com equações de estado $w_{\varphi^0} = -1$, $w_\psi = 0$ e também $w_\nu = 0$ ou $w_\nu = 1/3$. As duas partículas candidatas ao dubleto de energia escura e matéria escura são não relativísticas, que implica que as equações de continuidade para os fluidos remanescentes são

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\varphi^0} &= \mu_{\varphi^0} \Gamma \rho_{\varphi^+} \quad , & (3.46)\\ \dot{\rho}_\psi + 3H\rho_\psi &= \mu_\psi \Gamma \rho_{\varphi^+} \quad , & (3.47)\\ \dot{\rho}_\nu + 3H(1 + w_\nu)\rho_\nu &= \big(1 - \mu_{\varphi^0} - \mu_\psi\big)\Gamma \rho_{\varphi^+} \quad , & (3.48) \end{aligned}$$

onde na última equação usamos a conservação de energia $E_\nu = m_{\varphi^+} - m_{\varphi^0} - m_\psi$, que também é evidente pela conservação do tensor energia-momento, e μ_{φ^0}, μ_ψ são as proporções de massa $m_{\varphi^0}/m_{\varphi^+}$, m_ψ/m_{φ^+}, respectivamente. O lado esquerdo das equações da continuidade acima são aproximações de primeira ordem desde que consideramos fluidos não relativísticos para φ^+, φ^0 e ψ.

Perturbações cosmológicas

Uma vez que os parâmetros da equação de estado w_i são constantes para todos os fluidos, suas velocidades do som são $c^2_{s,i} = \delta\mathcal{P}_i/\delta\rho_i$, onde $\mathcal{P}_i$ é a pressão do fluido 'i'. A velocidade do som para um campo escalar, por sua vez é $c^2_{s,\varphi} = 1$ [204]. Seguindo as definições de [205], no gauge síncrono a conservação de energia implica nas seguintes equações para os fluidos escuros (E.83a), (E.83b)

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{\varphi^+} + 6H\delta_{\varphi^+} &= -\Gamma \delta_{\varphi^+} \quad , & (3.49)\\ \dot{\delta}_{\varphi^0} + 6H\delta_{\varphi^0} &= \mu_{\varphi^0}\Gamma \delta_{\varphi^+} \quad , & (3.50)\\ \dot{\delta}_\psi + \theta_\psi + \frac{\dot{h}}{2} &= \mu_\psi \Gamma \delta_{\varphi^+} \quad , & (3.51)\\ \dot{\delta}_\nu + (1 + w_\nu)\left(\theta_\nu + \frac{\dot{h}}{2}\right) &= \big(1 - \mu_{\varphi^0} - \mu_\psi\big)\Gamma \delta_{\varphi^+} \quad , & (3.52) \end{aligned}$$

onde $\delta_i \equiv \delta\rho_i/\bar{\rho}_i$[4]. O lado direito das equações acima seguem das Eqs. (3.45) e (3.48). A Eq. (3.49) tem a solução $\delta_{\varphi^+} \propto a^{-6}e^{-\Gamma t}$, de acordo com o fato de que a energia

[3] DE e CDM são não relativísticos.

[4] Usamos aqui a notação do [205]

escura não se torna um aglomerado para escalas abaixo do horizonte [206]. Uma vez que fluido φ^+ é diluído no universo mais rápido que a radiação, os acoplamentos no lado direito das Eqs. (3.50) e (3.52) são negligenciados. Como um resultado, $\delta\varphi^0 \propto a^{-6}$ e a perturbação da equação da continuidade para a matéria escura é a mesma no caso não acoplado.

A fim de obter o termo de interação nas equações de conservação do momento, multiplicamos o lado direito da Eq. (3.41) por $p_{\varphi^+}/E_{\varphi^+} = p_{\varphi^+}/m_{\varphi^+}$ antes de integrá-la. O campo de velocidade é definido como $v^i \equiv \frac{1}{n}\int d^3p \frac{p\hat{p}^i}{E} e^{-E/T}$, portanto a equação de Navier-Stokes no espaço do momento para φ^+ é

$$k^2\delta_{\varphi^+} = \theta_{\varphi^+}\Gamma \quad , \tag{3.53}$$

onde $\theta \equiv ik_jv^j$[5]. O campo velocidade para φ^+ é também desprezado porque o lado esquerdo da Eq. (3.53) vai para zero. Portanto a transferência do momento é irrelevante e a equação de Navier-Stokes para a matéria escura é a usual do modelo ΛCDM. Assim sendo, o processo de decaimento muda apenas as equações do *background*.

Comparação com observações

Do ponto de vista observacional, os dois campos escalares φ^+ e φ^0 têm $w_i = -1$ e efetivamente se comportam como um fluido de "energia escura". O mesmo acontece com as duas partículas do dubleto de matéria escura no caso em que o neutrino escuro é não relativístico ($w_\nu = 0$). Para esse dubleto, as equações do *background* (3.47) e (3.48) podem ser combinadas em

$$\dot{\rho}_{\rm dm} + 3H\rho_{\rm dm} = \big(1 - \mu_{\varphi^0}\big)\Gamma\rho_{\varphi^+} \quad , \tag{3.54}$$

onde $\rho_{dm} = \rho_\psi + \rho_\nu$. É então simples resolver numericamente a cosmologia do *background* em termos do fator de escala,

$$\frac{d\rho_{\varphi^+}}{da} = -\frac{\Gamma}{aH}\rho_{\varphi^+} \quad , \tag{3.55}$$

$$\frac{d\rho_{\varphi^0}}{da} = \mu_{\varphi^0}\frac{\Gamma}{aH}\rho_{\varphi^+} \quad , \tag{3.56}$$

$$\frac{d\rho_{\rm dm}}{da} = -\frac{3}{a}\rho_{\rm dm} + \big(1 - \mu_{\varphi^0}\big)\frac{\Gamma}{aH}\rho_{\varphi^+} \quad , \tag{3.57}$$

para trás no tempo com as densidades de corrente como condições "iniciais", junto com as equações usuais para um modelo de fluido *standard.* Reescrevemos as equações em termos do fator de escala para facilitar os valores numéricos. Notamos, no entanto, que falhamos ao obter restrições dos parâmetros relevantes do decaimento (Γ, Ω_{φ^+}, $\Omega_{\rm dm}$, μ_{φ^0}, com Ω_{φ^0} determinado pela condição de planitude na soma dos parâmetros de densidade) quando comparamos a evolução prevista com as sondas cósmicas padrão usando as simulaçãoes *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Isto é principalmente devido à forte degenerescência entre a taxa de decaimento e a densidade de φ^+—note

[5] Usamos aqui a notação do [205]

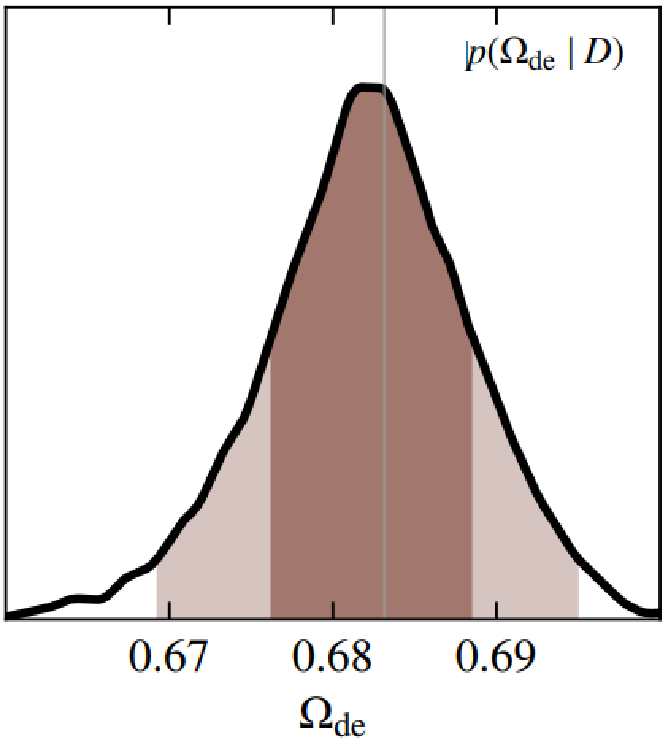

Figura 3.3: Probabilidade posterior marginalizada p do parâmetro derivado $\Omega_{\rm de} \equiv \Omega_{\varphi^+} + \Omega_{\varphi^0}$ considerando o conjunto de dados D de sondas cósmicas padrão. As áreas sombreadas sob a curva marcam os níveis 1σ e 2σ de confiança; a linha fina cinza marca o valor do parâmetro no ponto de melhor ajuste (bf), $\Omega_{\rm de}^{(\rm bf)} = 0.68313$.

como o parâmetro Γ sempre aparece multiplicado por ρ_{φ^+}.[6] Apesar disso, o parâmetro derivado $\Omega_{\rm de} \equiv \Omega_{\varphi^+} + \Omega_{\varphi^0}$ é verificado imitar a energia escura do modelo padrão com $\Omega_{\rm de} = 0.67782 \pm 0.00658$ a nível 1σ de confiança (veja Fig.(3.3))

Para essa análise, nós empregamos dados observacionais dos *priors* de distância do *Planck Cosmic Microwave Background* (CMB) [207], o *Joint Light-curve Analysis* (JLA) de supernovas do tipo-Ia [208], *Baryon Acoustic Oscillation* (BAO) de várias fontes [209–212] $H(z)$ de relógios cósmicos [213], e o valor local da constante de Hubble [214].

Esta degenerescência desencoraja qualquer nova tentativa de restringir os parâmetros deste modelo no caso $w_\nu = 1/3$, que adiciona dois novos parâmetros, Ω_ν e μ_ψ (o dubleto de energia escura não pode mais ser descrito como um único fluido), potencialmente fazendo a degenerescência ter consequências mais sérias.

[6]Uma redefinição $\rho_\Gamma \equiv \Gamma\rho_{\varphi^+}$ também foi investigada, de tal forma que a Eq. (3.55) se tornou $\frac{d\rho_\Gamma}{da} = -\frac{\Gamma}{aH}\rho_\Gamma$. O resultado, no entanto, continuou o mesmo, sem restrições sobre os parâmetros acima mencionados.

3.2.5 Conclusão

Neste trabalho, investigamos as interações entre as partículas escuras no modelo $SU(2)_R$ escuro de um ponto de vista cosmológico. A interação mais relevante é o decaimento de uma partícula em um dubleto de energia escura para outras três partículas, uma de energia escura e as outras duas de dubleto de matéria escura. Este processo consiste em uma nova forma de interação de energia escura e muda apenas as equações do *background*. Embora a comparação com dados tenha restringido muito bem o parâmetro de densidade de energia escura hoje, definido como a soma dos parâmetros de densidade de φ^+ e φ^0, os outros parâmetros livres no processo (taxa de decaimento e massas das partículas) não são limitados devido à forte degenerescência entre a taxa de decaimento e a densidade do progenitor (φ^+).

Utilizamos aqui o ν_d frio. Se o resultado para a parte perturbativa fosse diferente estudaríamos o caso em que ν_d fosse quente.

Capítulo 4

Horndeski

Nesse estudo criaremos um modelo teórico onde a DE interage com a DM pela teoria de Horndeski. Após o estudo teórico será montado um *forecast* para analisar se o telescópio BINGO, que está sendo construído pelo grupo de pesquisa do Prof. Dr. Elcio Abdalla, grupo do qual faço parte, valida a teoria. Propomos utilizar fundamentos matemáticos a fim de reconstruir a teoria de Horndeski a partir de uma Lagrangeana mais geral considerando o acoplamento do setor escuro.

Para esse capítulo utilizamos como base [162–164, 215–217].

4.1 Introdução

Como feito em [215], temos como objetivo descrever um acoplamento entre a matéria escura e a energia escura no quadro de teorias de Galileons generalizadas simétricas por translação. Vamos considerar uma combinação particular de termos na Lagrangeana de Horndeski sem introduzir a constante cosmológica ou o setor de matéria, e calcular a equação de estado para um fluido cósmico unificado efetivo ω_U. Essa equação de estado deve representar as observações e satisfazer o modelo de evolução do universo.

Observações recentes revelam que o universo tem entrado num período de expansão acelerada [25,77]. Dentro do quadro de Relatividade Geral (RG), a expansão acelerada pode ser justificada por uma componente de pressão negativa chamada de energia escura (DE) [65], sua natureza é desconhecida apesar da melhor candidata para ela ser a constante cosmológica Λ. Por outro lado, a perda de massa em galáxias individuais, bem como suas distribuições de estrutura em larga escala em todo o universo, é atribuída a uma nova forma de matéria, chamada de matéria escura fria (CDM), se supõe não ter pressão. O modelo ΛCDM considera esses dois componentes do universo junto às partículas do modelo padrão e representa, relativamente bem, dados cosmológicos.

Para um modelo mais preciso podemos modificar o ΛCDM de duas formas, uma delas é modificando o lado esquerdo das equações de Einstein, a parte geométrica, e outra é modificando o lado direito, a parte da fonte da deformação do espaço-tempo. A primeira delas é chamada de gravitação modificada [218], é introduzido um termo extra da geometria na ação, ou campos escalares extras que são não minimamente acoplados com a gravidade. A segunda modificação considera o lado direito das equações de Einstein criadas pela DE e DM, e essa DE é dinâmica, com uma nova possível interação com a DM. Essa nova interação do setor escuro (ver [130]) afeta toda a expansão do universo, o crescimento da DM e perturbações da densidade de bárions, a criação das anisotropias da temperatura na radiação da CMB e a evolução do potencial gravitacional em tempos tardios. Essa abordagem pode melhorar ou até resolver o problema da coincidência.

Para descrever a história térmica do universo de uma maneira unificada pode-se considerar que a densidade de energia é regulada pela mudança na equação de estado de um fluido exótico no *background*, o gás de Chaplygin. O objetivo de utilizar o gás de Chaplygin [219] é introduzir uma equação de estado que reproduza a equação de estado efetiva em todas as eras do universo, o parâmetro da equação de estado imita um fluido sem pressão no começo do universo, no próximo período um setor tipo quintessência tendendo assintóticamente para a constante cosmológica. Embora o gás de Chaplygin seja bom para descrever a evolução do universo no nível de *background* ele não é estável apresentando oscilações amortecidas ou crescimento exponencial no espectro de potência da matéria.

Teorias de Horndeski [220] partem da Lagrangeana de Horndeski e resultam em uma teoria gravitacional. Uma subclasse dessas teorias de gravidade modificada compartilham uma simetria galileana clássica descoberta independentemente por [221–224]. Quando a teoria de Galileon generalizada abandona a simetria de translação, a teoria de Horndeski é reobtida. A principal característica desta teoria é que as equações de movimento são de segunda ordem no máximo.

Vamos ver uma descrição unificada de DE e DM na estrutura da teoria de Galileon generalizada com simetria de translação[1], que é diferente de uma abordagem *standard* onde o campo galileano faz apenas o papel da DE [225–228], ou a abordagem em que ele faz apenas o papel da DM [229]. Considerando uma subclasse da teoria de Horndeski, sem considerar um setor explícito de matéria e outro da constante cosmológica, vamos calcular a equação de estado efetiva do fluido cósmico e ver se representa a evolução das eras do universo, se comporta como matéria sem pressão no começo do universo e como DE para tempos futuros. Vamos examinar o modelo no nível perturbativo para verificar a existência de patologias e criar um *forecast* para o BINGO.

4.1.1 Teoria de Galileons generalizada para a Cosmologia

A teoria que tem o campo escalar como seu único grau de liberdade, cuja ação obedece a simetria translação

$$\partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi + c_\mu \ , \qquad c_\mu = \text{const.} \ , \tag{4.1}$$

que pode ser vista como uma generalização da invariância de Galileu, é chamada de *Teoria de Galileons.* O caso de Minkowski foi estudado em [230]. A Lagrangeana mais geral que obedece a simetria (4.1) e que resulta em equações de movimento de segunda

[1] As equações de movimento só têm derivadas de primeira e segunda ordem, e não o próprio campo.

ordem é a soma das Lagrangeanas

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2^{gal} &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 \ , \\
\mathcal{L}_3^{gal} &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2\Box\phi \ , \\
\mathcal{L}_4^{gal} &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2[(\Box\phi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\phi)^2] \ , \\
\mathcal{L}_5^{gal} &= -\frac{1}{4}(\partial\phi)^2[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\partial_\mu\partial_\nu\phi)^2 + 2(\partial_\mu\partial_\nu\phi)^3] \ .
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

A Teoria de Horndeski corresponde a teoria escalar-tensorial mais geral possível para a qual as equações de movimento são de segunda ordem. Ela é chamada de *Teoria de Galileon Generalizada*, pois generaliza a Teoria de Galileon a transformando em uma teoria covariante, para isso devemos substituir as derivadas parciais por derivadas covariantes, assumimos que ela não tenha derivadas da métrica de ordem 2, por isso adicionamos “contratermos gravitacionais", e por fim, substituimos os coeficientes $(\partial\phi)^2$ por funções de ϕ e X, assim obteremos a Lagrangeana de Horndenski [231].

Vamos ver a teoria de Galileons generalizada aplicada à um quadro cosmológico. As teorias escalares tensoriais mais gerais em quatro dimensões que têm equações de campo de segunda ordem (para evitar a instabilidade de Ostrogradsky[2] [232]) são descritas pela ação

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}, \tag{4.3}$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$, e a Lagrangeana [220]

$$\mathcal{L} = \sum_{i=2}^{5}\mathcal{L}_i \ , \tag{4.4}$$

com

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X) \ , \tag{4.5}$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\Box\phi \ , \tag{4.6}$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)\right] \ , \tag{4.7}$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) - \frac{1}{6}G_{5,X}[(\Box\phi)^3 - 3(\Box\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu)(\nabla^\mu\nabla^\nu) + 2(\nabla^\mu\nabla_\alpha\phi)(\nabla^\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\beta\nabla_\mu\phi)] \ , \tag{4.8}$$

onde assumimos que a constante gravitacional é igual a um, K e G_i $(i = 3, 4, 5)$ são funções do campo escalar ϕ e da energia cinética $X = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi$, com derivadas parciais $G_{i,X} \equiv \partial G_i/\partial X$, R o escalar de Ricci e $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein. A ideia por trás da Lagrangeana (4.4) é encontrar uma estrutura antissimétrica para os coeficientes de forma que os termos com derivadas de ordem maior que 2 se cancelem na equação de movimento [233], para que não haja instabilidade de Ostrogradsky.

[2] Teorias de segunda ordem ou ordens superiores na ação possuem instabilidades do tipo *fantasma*, elas não possuem um estado de mínima energia, podendo decair até estados infinitamente negativos.

A ação (4.3) foi primeiramente encontrada por Horndeski em [220], mas foi independentemente rederivada da estrutura da teoria de Galileons. Mencionamos aqui que na versão original da teoria de Galileons, a simetria de translação faz um papel crucial, e consequentemente as duas teorias não coincidem. Mesmo assim, extendendo a teoria de Galileons para a teoria de Galileons generalizada, ou seja, abandonando a simetria de translação, leva à construção completa de Horndeski[3].

Podemos expressar as Lagrangeanas (4.5) e (4.8) em função de variáveis ADM

$$\mathcal{L}_2 = F_2(\phi, X)\,, \tag{4.9}$$
$$\mathcal{L}_3 = F_3(\phi, X)K\,, \tag{4.10}$$
$$\mathcal{L}_4 = F_4(\phi, X)R + (2XF_{4,X} - F_4)(K^2 - K^{\mu\nu}K_{\mu\nu})\,, \tag{4.11}$$
$$\mathcal{L}_5 = F_5(\phi, X)G_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - \frac{1}{3}XF_{5,X}(K^3 - 3KK_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + 2K_{\mu\nu}K^{\mu\alpha}K^{\nu}_{\alpha})\,. \tag{4.12}$$

As funções F_i são relacionadas às funções K e G_i por

$$\begin{aligned}
F_2 &= K - \sqrt{-X}\int \frac{G_{3,\phi}}{\sqrt{-X}}dX\,,\\
F_3 &= -\int G_{3,X}\sqrt{-X}dX - 2\sqrt{-X}G_{4,\phi}\,,\\
F_4 &= G_4 + \sqrt{-X}\int \frac{G_{5,\phi}}{4\sqrt{-X}}dX\,,\\
F_5 &= -\int G_{5,X}\sqrt{-X}dX\,.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por fim, temos a relação entre M_*^2, as funções α's, K e G's obtidas por [234]

$$M_*^2 \equiv 2(G_4 - 2XG_{4,X} + XG_{5,\phi} - \dot{\phi}HXG_{5,X})\,, \tag{4.14}$$
$$HM_*^2\alpha_M \equiv \frac{d}{dt}M_*^2\,, \tag{4.15}$$
$$\begin{aligned}
H^2M_*^2\alpha_K \equiv{}& 2X(K_{,X} + 2XK_{,XX} - 2G_{3,\phi} - 2XG_{3,\phi X}) +\\
&+ 12\dot{\phi}XH(G_{3,X} + XG_{3,XX} - 3G_{4,\phi X} - 2XG_{4,\phi XX}) +\\
&+ 12XH^2(G_{4,X} + 8XG_{4,XX} + 4X^2G_{4,XXX}) +\\
&- 12XH^2(G_{5,\phi} + 5XG_{5,\phi X} + 2X^2G_{5,\phi XX}) +\\
&+ 4\dot{\phi}XH^3(3G_{5,X} + 7XG_{5,XX} + 2X^2G_{5,XXX})\,,
\end{aligned} \tag{4.16}$$
$$\begin{aligned}
HM_*^2\alpha_B \equiv{}& 2\dot{\phi}(XG_{3,X} - G_{4,\phi} - 2XG_{4,\phi X}) +\\
&+ 8XH(G_{4,X} + 2XG_{4,XX} - G_{5,\phi} - XG_{5,\phi X}) +\\
&+ 2\dot{\phi}XH^2(3G_{5,X} + 2XG_{5,XX})\,,
\end{aligned} \tag{4.17}$$
$$M_*^2\alpha_T \equiv 2X(2G_{4,X} - 2G_{5,\phi} - (\ddot{\phi} - H\dot{\phi})G_{5,X})\,. \tag{4.18}$$

[3]Resumindo. A teoria de Horndeski é a teoria mais geral possível para a qual as equações de movimento são de segunda ordem e está livre da instabilidade de Ostrogradsky. Obedecendo a simetria de translação, que é uma generalização da invariância de Galileon, podemos chamar a teoria de teoria de Galileons. Para generalizar esta teoria, além de passar para equações covariantes $\partial_m u \to \nabla_\mu$, precisamos adicionar contratermos gravitacionais em $\mathcal{L}_4$ e $\mathcal{L}_5$ com o intuito de cancelar as derivadas da métrica com ordem maior que dois. Assim obtemos a teoria de Galileons Generalizada.

A variação da massa de Planck pode ser vista por (4.14).

Vamos aplicar à cosmologia impondo a métrica de FLRW para o background

$$ds^2 = a(t)^2(-d\eta^2 + d\mathbf{x}^2),$$

onde η é o tempo conforme, x^i são as coordenadas espaciais comóveis, e $a(t)$ o fator de escala.

4.1.2 Evolução do background

As equações de Friedmann para a teoria de Horndenski podem ser obtidas no formalismo ADM utilizando (J.7) e (J.8). Na presença de matéria (escura e/ou bariônica), as equações de Friedmann ficam dadas por [235, 236]

$$\mathcal{E} \equiv \sum_{i=2}^{5} \mathcal{E}_i = -\rho_m \ , \tag{4.19}$$

$$\mathcal{P} \equiv \sum_{i=2}^{5} \mathcal{P}_i = -P_m \ , \tag{4.20}$$

em que

$$\mathcal{E}_2 \equiv 2XK_{,X} - K \, , \tag{4.21}$$

$$\mathcal{E}_3 \equiv 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} \, , \tag{4.22}$$

$$\mathcal{E}_4 \equiv -6H^2G_4 + 24H^2X(G_{4,X} + XG_{4,XX}) - 12HX\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 6H\dot{\phi}G_{4,\phi} \, , \tag{4.23}$$

$$\mathcal{E}_5 \equiv 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}) \, , \tag{4.24}$$

e

$$\mathcal{P}_2 \equiv K \, , \tag{4.25}$$

$$\mathcal{P}_3 \equiv -2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) \, , \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_4 \equiv\ & 2(2\dot{H} + 3H^2)G_4 - 12H^2XG_{4,X} - 4(H\dot{X} + 2\dot{H}X)G_{4,X} - 8HX\dot{X}G_{4,XX} \\ & + 2(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi})G_{4,\phi} + 4XG_{4,\phi\phi} + 4X(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi})G_{4,\phi X} \, ,\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_5 \equiv\ & -2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4GX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} \\ & + 2[2(\dot{H}X + H\dot{X}) + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} \, .\end{aligned} \tag{4.28}$$

A variação da ação com respeito a ϕ nos dá a equação de movimento para o campo escalar

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(a^3J) = P_\phi \ , \tag{4.29}$$

em que

$$\begin{aligned}J \equiv\ & \dot{\phi}K_{,X} + 6HXG_{3,X} - 2\dot{\phi}G_{3,\phi} + 6H^2\dot{\phi}(G_{4,X} + 2XG_{4,XX}) - 12HXG_{4,\phi X} \\ & + 2H^3X(3G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) - 6H^2\dot{\phi}(G_{5,\phi} + XG_{5,\phi X}) \ ,\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}P_\phi \equiv\ & K_{,\phi} - 2X(G_{3,\phi\phi} + \ddot{\phi}G_{3,\phi X}) + 6(\dot{H} + 2H^2)G_{4,\phi} + 6H(\dot{H} + 2HX)G_{4,\phi X} \\ & - 6H^2XG_{5,\phi\phi} + 2H^3X\dot{\phi}G_{5,\phi X} \ .\end{aligned} \tag{4.31}$$

Para que o modelo seja livre de *instabilidades Laplacianas* e *fantasmas*, e seja cosmologicamente viável, duas condições precisam ser satisfeitas [237–239]

$$c_S^2 \equiv \frac{3(2_1^2 w_2 H - w_2^2 w_4 + 4w_1 w_2 \dot{w}_1 - 2w_1^2 \dot{w}_2)}{w_1(4w_1 w_3 + 9w_2^2)} \geq 0 \ , \tag{4.32}$$

para nao ter *instabilidades Laplacianas* associadas à velocidade da propagação do campo escalar, e

$$Q_S \equiv \frac{w_1(4w_1 w_3 + 9w_2^2)}{3w_2^2} > 0 \tag{4.33}$$

para nao ter *fantasmas*, onde

$$w_1 \equiv 2(G_4 - 2XG_{4,X}) - 2X(G_{5,X}\dot{\phi}H - G_{5,\phi}), \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} w_2 \equiv & -2G_{3,X}X\dot{\phi} + 4G_4 H - 16X^2 G_{4,XX}H + 4(\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 4HG_{4,X})X + 2G_{4,\phi}\dot{\phi} \\ & + 8X^2 HG_{5,\phi X} + 2HX(6G_{5,\phi} - 5G_{5,X}\dot{\phi}H) - 4G_{5,XX}\dot{\phi}X^2H^2 \ , \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} w_3 \equiv\ & 3X(K_{,K} + 2XK_{,XX}) + 6X(3X\dot{\phi}HG_{3,XX} - G_{3,\phi X}X - G_{3,\phi} + 6H\dot{\phi}G_{3,X}) \\ & + 18H(4HX^3G_{4,XXX} - HG_4 - 5X\dot{\phi}G_{4,\phi X} - G_{4,\phi}\dot{\phi} + 7HG_{4,X}X + 16HX^2G_{4,XX} - 2X^2\dot{\phi}G_{4,\phi XX}) \\ & + 6H^2X(2H\dot{\phi}G_{5,XXX}X^2 - 6X^2G_{5,\phi XX} + 13XH\dot{\phi}G_{5,XX} - 27G_{5,\phi X}X + 15H\dot{\phi}G_{5,X} - 18G_{5,\phi}) \ , \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$w_4 \equiv 2G_4 - 2XG_{5,\phi} - 2XG_{5,X}\ddot{\phi} \ . \tag{4.37}$$

Como feito em [234], é possível escrever as duas equações de Friedmann como

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \tilde{\rho}_m + \tilde{\mathcal{E}} \ , \\ 2\dot{H} + 3H^2 &= -\tilde{p}_m - \tilde{\mathcal{P}} \ , \end{aligned} \tag{4.38}$$

em que o til indica a grandeza dividida por M_*^2.

Como resultado de uma absorção de uma potencial massa de Planck na densidade de matéria e na pressão, apenas a equação da continuidade total será conservada, a equação da continuidade de cada componente não se conservará se a massa de Planck variar, nesse caso haverá uma troca de energia entre o campo escalar e a matéria

$$\dot{\tilde{\rho}}_m + 3H(\tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m) = -\alpha_M H\tilde{\rho}_m \ , \tag{4.39}$$

$$\dot{\tilde{\mathcal{E}}} + 3H(\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{P}}) = \alpha_M H\tilde{\rho}_m \ , \tag{4.40}$$

4.1.3 Unificação da DE e DM

Estamos usando os graus de liberdade do campo escalar para a teoria de Galileons generalizada não só para descrever o setor da DE mas para descrever a unificação dos setores da DE e DM. Não vamos considerar explicitamente o setor de matéria. Pode-se expressar o fluido unificado efetivo que se comporta como matéria escura no início dos tempos e em tempos intermediários, e como energia escura em tempos tardios.

Para obter uma descrição na estrutura de Einstein, precisamos considerar $G_4(\phi, X) = 1/2$ na ação (4.3), que faz aparecer o tempo *standard* da RG. As lagrangeanas que sobraram são interpretadas como partes de uma lagrangeana do fluido de unificação $\mathcal{L}_U = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_5$.

Dessa forma, as equações de Friedmann são escritas por

$$3H^2 = \rho_U \ , \tag{4.41}$$

$$-\left(2\dot{H} + 3H^2\right) = P_U \, , \tag{4.42}$$

em que

$$\begin{aligned} \rho_U = & 2XK_X - K + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} \\ & + 2H^3X\dot{\phi}\left(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}\right) - 6H^2X\left(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}\right) \ , \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} P_U = & K - 2X\left(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}\right) - 2X\left(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi}\right)G_{5,X} \\ & - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4HX\left(\dot{X} - HX\right)G_{5,\phi X} \\ & + 2\left[2\left(\dot{H}X + H\dot{X}\right) + 3H^2X\right]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} \ . \end{aligned} \tag{4.44}$$

É possível escrever a equação de estado para o fluido unificado como

$$w_U \equiv \frac{P_U}{\rho_U} \ . \tag{4.45}$$

Queremos obter valores para $K(\phi, X)$, $G_3(\phi, X)$ e $G_5(\phi, X)$ que façam com que o comportamento de ω_U concorde com o observado. Como sabemos, ω_U deve ser próximo de zero durante a era da matéria, do redshift $z \sim 3000$ até $z \sim 2 - 3$ [240]. Para redshifts menores o ω_U deve diminuir ficando inferior a $\omega_U = -1/3$, representando a expansão acelerada em $z \sim 0.4 - 0.6$. Para tempos atuais ($z \simeq 0$), a equação de estado é dada por $w_h = \Omega_{DM} w_{DM} + \Omega_\Lambda w_\Lambda \simeq -0.7$, já que o parâmetro de densidade de energia é $\Omega_h = 1$ [240]. A equação de estado deve representar um universo de-Sitter em um futuro distante. Na comologia padrão, por exemplo no paradigma ΛCDM, o comportamento acima é obtido pela consideração usual de que o fluido de DM tem pressão nula com equação de estado $\omega_m \approx 0$ e a constante cosmológica com equação de estado $\omega_\Lambda = -1$, com os correspondentes parâmetros de densidade Ω_m e Ω_Λ respectivamente. Consequentemente, a equação de estado total é dada por

$\omega_t = \Omega_m\omega_m + \Omega_\Lambda\omega_\Lambda \approx \Omega_\Lambda\omega_\Lambda$, e então, desde que Ω_m quase suma na era da matéria, enquanto ele começa dominando apenas após $z \sim 2 - 3$, adquire o comportamento acima para a equação de estado total do universo. Portanto, as outras funções da Lagrangeana de Horndeski foram escolhidas de tal forma que a equação de estado satisfaça

w_U	*redshift* (z)	comportamento
$\simeq 0$	altos redshifts	matéria escura
$< -1/3$	$\sim 0.4 - 0.6$	energia escura
$\simeq -0.7$	0	energia escura hoje

Uma consideração crucial para nossa construção é a suposição da simetria de translação. Sobre simetria de translação, a equação de movimento só irá depender de $\dot{\phi} \propto X$ e $\ddot{\phi} \propto X, \dot{X}$, e não mais do campo escalar. Isso permite eliminar completamente as derivadas do campo escalar entre ρ_U e P_U (calculados pela equação de Einstein), resultando em uma expressão $P_U(\rho_U)$.

Levando em conta que as equações de movimento são obtidas a partir da minimização da ação que, essa, por sua vez, é escrita como uma integral da Lagrangeana, é possível que a Lagrangeana que possui um campo escalar respeite a simetria de translação se esse campo desaparecer após uma integração por partes. Nesse caso a ação depende do campo mas a equação de movimento não. Um exemplo disso é o termo $\phi\Box\phi$.

Tem sido mostrado que fluidos com esse tipo de equação de estado, por exemplo gás de Chaplygin e suas extensões [219], são capazes a induzir uma descrição unificada dos setores da DE e DM. No entanto, nesses modelos a relação $P_U(\rho_U)$ é arbitrariamente construída à mão enquanto que no nosso modelo vamos mostrar que essa relação é obtida da teoria, e todas as funções que aparecem nessa relação são funções acopladas da Lagrangeana de Horndeski.

4.2 Resultados Horndeski

O modelo de Gás de Chaplygin Generalizado (GCG) não é estável nas perturbações lineares, apresentando oscilações amortecidas ou crescimento exponencial no espectro de potência da matéria.

No modelo de Horndeski aqui estudado, o campo escalar se comporta como um fluido que evolui como matéria em altos redshifts e energia escura em baixos redshifts. Isso ocorre devido à simetria de translação, onde a equação de movimento não depende do campo, mas apenas da primeira e segunda derivada dele (se fosse derivada de ordem maior teria problema pela instabilidade de Ostrogradski), permitindo assim escrever uma equação de movimento do tipo "Gás de Chaplygin" em que a pressão do fluido de unificação é $P_U = P_U(\rho_U)$.

O estudo [215] escolhe um modelo especifico de Galileons para obter um fluido unificado que representa adequadamente o nosso universo.

As funções da Lagrangeana escolhidas por [215] que satisfizessem a simetria de translação foram $K(\phi, X) = K(X)$, que não depende do campo, e $G_3(\phi, X) = G_3(X)$ e $G_5(\phi, X) = G_5(X)$, os dois dependem do campo mas, após uma integração por partes, o termo na Lagrangeana será dependente apenas de X. O termo de acoplamento não mínimo entre o campo escalar e o tensor de Einstein pode ser interpretado como uma fricção atuando em largas escalas durante a evolução cosmológica. Veremos agora que a escolha da Lagrangeana faz com que o fluido se comporte como desejado,

$$K(\phi, X) \equiv \frac{1}{2}\left(X - \eta X^{1/2}\right) \ , \tag{4.46}$$

$$G_3(\phi, X) \equiv -\frac{\lambda_3}{2} X^{-1/2} \ , \tag{4.47}$$

$$G_4(\phi, X) \equiv \frac{1}{2} \ , \tag{4.48}$$

$$G_5(\phi, X) \equiv -\frac{\lambda_5}{2}\phi \ . \tag{4.49}$$

Para essa escolha, a ação de Horndeski fica escrita como

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(X - \eta X^{1/2}\right) - \frac{\lambda_3}{2}\Box\phi\, X^{-1/2} + \frac{R}{2} + \frac{\lambda_5}{2}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\right] \tag{4.50}$$

Escolhendo $\eta = 1$, as equações de movimento (4.41) e (4.42) são escritas como

$$3H^2 = \left(\frac{1}{2} + \lambda_5 9H^2\right)X - \lambda_3\frac{3}{\sqrt{2}}H \equiv \rho_U \ , \tag{4.51}$$

$$-\left(2\dot{H} + 3H^2\right) = \left[\frac{1}{2} - \lambda_5\left(3H^2 + 2\dot{H}\right)\right]X - \sqrt{X} + \lambda_3\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\dot{X}}{X} - 2\lambda_5 H\dot{X} \ . \tag{4.52}$$

Portanto, a equação de estado do fluido (4.45) é

$$\omega_U \equiv \frac{P_U}{\rho_U} = \frac{\left[\frac{1}{2} - \lambda_5\left(3H^2 + 2\dot{H}\right)\right]X - \sqrt{X} + \lambda_3\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\dot{X}}{X} - 2\lambda_5 H\dot{X}}{\left(\frac{1}{2} + \lambda_5 9H^2\right)X - \lambda_3\frac{3}{\sqrt{2}}H} \ . \tag{4.53}$$

Das equações de Friedmann (4.51) e (4.52), é possível escrever X e $\dot{X}$ em termos de H e $\dot{H}$ conforme

$$X = \frac{3H\left(2H + \sqrt{2}\lambda_3\right)}{1 + 18\lambda_5 H^2} \ , \tag{4.54}$$

$$\dot{X} = \frac{2X\left[X\left(4\lambda_5\dot{H} - 1\right) - 4\dot{H} + 6H^2\left(\lambda_5 X - 1\right) + 2\sqrt{X}\right]}{\sqrt{2}\lambda_3 - 8\lambda_5 HX} \ . \tag{4.55}$$

A equação de Klein-Gordon é obtida a partir da ação (4.50), e nesse caso, nos fornece

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{2}X + \lambda_3 H + 6\sqrt{2}\lambda_5 H^2 X\right)\dot{X} + 6\sqrt{2}H\left[1 + 2\lambda_5\left(2\dot{H} + 3H^2\right)\right]X^2 \\
&- 6\sqrt{2}HX^{3/2} - 6\lambda_3\left(\dot{H} + 3H^2\right)X = 0 \ , \qquad (4.56)
\end{aligned}
$$

que pode ser reescrita na forma

$$
\dot{\rho}_U + 3H\left(\rho_U + P_U\right) = 0 \ , \qquad (4.57)
$$

onde foram utilizadas as equações de Friedmann (4.51). Como havíamos discutido, podemos notar que pelo fato da ação (4.50) ter uma simetria de translação, as equações de movimento não dependem do campo ϕ, mas apenas das suas derivadas em primeira e segunda ordem, X e $\dot{X}$, respectivamente. Podemos ver também que não estamos tratando de uma interação, mas sim de um fluido que representa hora a matéria escura e hora a energia escura.

Substituindo as Eqs. (4.54), (4.55) na Eq. acima (4.56), é possível escrever uma equação diferencial para $H(t)$

$$
\begin{aligned}
\dot{H} = &\left\{\sqrt{6}H^{3/2}\left(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2\right)\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2\right)^{1/2}\right.\right. \\
&\left.\left. - \sqrt{6H}\left[\lambda_3^2\left(\frac{1}{2} - 3\lambda_5 H^2\right) + 3\sqrt{2}\lambda_3 H\left(\frac{1}{2} + \lambda_5 H^2\right) + 4H^2\left(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 H^2\right)\right]\right\}\right\} \\
&\left\{\lambda_3^2\left(\frac{1}{2} - 27\lambda_5 H^2\right)\left(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 H^2\right) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\lambda_5 H^2 + 36\lambda_5^2 H^4\right)\right. \\
&\left. + 8H^2\left[\frac{1}{4} + 9\lambda_5 H^2\left(\frac{1}{2} + 6\lambda_5 H^2\right)\right]\right\}^{-1} . \qquad (4.58)
\end{aligned}
$$

Utilizando as equações de Friedmann (4.51), (4.52), e a equação de movimento (4.56), é possível eliminar X e $\dot{X}$ para escrever a pressão do fluido como função da densidade de energia do fluido, algo similar à equação de estado do Gás de Chaplygin Generalizado (GCG),

$$
\begin{aligned}
P_U(\rho_U) = & \Big\{ [3\lambda_5 f(\rho_U) - 2] \Big\{ -3\lambda_3^2 \left\{ 4 + \lambda_5 f(\rho_U) \left[9\lambda_5 f(\rho_U) - 28 \right] \right\} \left[\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U) \right] + \\
& + f(\rho_U) \left[3\lambda_5 f(\rho_U) - 2 \right] \Big\{ \sqrt{3}\lambda_3 \lambda_5 f(\rho_U) \left[3\lambda_5 f(\rho_U) - 14 \right] + \\
& -2 \left\{ 2 + 3\lambda_5 f(\rho_U) \left[\lambda_5 f(\rho_U) - 1 \right] \right\} g(\rho_U) \Big\} \Big\} \Big\}^{-1} \times \\
& \times \Big\{ -36\sqrt{3}\lambda_3^5 - 18\lambda_3^4 \Big\{ 2g(\rho_U) + \lambda_5 f(\rho_U) \left[\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U) \right] \Big\} + \\
& - \frac{1}{2} f^{3/2}(\rho_U) \left[2 - 3\lambda_5 f(\rho_U) \right]^2 \times \\
& \times \Big\{ -6\sqrt{6}\lambda_3 \lambda_5 f(\rho_U) - 2\sqrt{2}m \left[\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U) \right] + 2\sqrt{f(\rho_U)} \left[2\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U) \right] + \\
& + \lambda_5 f^{3/2}(\rho_U) \left[11\sqrt{3}\lambda_3 + 2g(\rho_U) \right] \Big\} + \frac{3}{2}\lambda_3^2 f(\rho_U) \left[3\lambda_5 f(\rho_U) - 2 \right] \times \\
& \times \Big\{ 10\sqrt{3}\lambda_3 + 6g(\rho_U) - 12\sqrt{2}\lambda_5 \sqrt{f(\rho_U)} \left[\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U) \right] + \\
& + \lambda_5 f(\rho_U) \left[21\sqrt{3}\lambda_3 + 19 g(\rho_U) \right] \Big\} \Big\}
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

onde

$$
f(\rho_U) \equiv \frac{\rho_U + 6\lambda_5 \rho_U^2 + \left[6\lambda_3^2 \rho_U \left(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 \rho_U \right)^2 \right]^{1/2}}{\left(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 \rho_U \right)^2} \,, \tag{4.60}
$$

$$
g(\rho_U) \equiv \left[3\lambda_3^2 + 2f(\rho_U) - 3f^2(\rho_U) \right] \,. \tag{4.61}
$$

Observando a forma de $P_U(\rho_U)$ na Eq. (4.59), podemos ver que existem regiões de parâmetros onde é possível obter a pressão para a matéria escura $P_U = 0$, enquanto que partindo desse valor para tempos tardios é possível que o fluido represente a energia escura $P_U = -\rho_U$. Podemos então considerar esse fluido como uma generalização do Gás de Chaplygin (GCG) [219, 241], no entanto esse resultado foi obtido de uma subclasse da teoria de Horndeski.

Finalmente podemos obter a equação de estado, dependente apenas do parâmetro de Hubble, para o fluido substituindo as Eqs. (4.54), (4.55) e (4.58) na Eq. (4.53)

$$
\begin{aligned}
w_U = & \Big\{ 3H \Big\{ \lambda_3^2 \left(\frac{1}{2} - 27\lambda_5 H^2 \right) \left(\frac{1}{2} + 3\lambda_5 H^2 \right) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\lambda_5 H^2 + 36\lambda_5^2 H^4 \right) + \\
& + 8H^2 \left[\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2 \left(\frac{1}{2} + 6\lambda_5 H^2 \right) \right] \Big\} \Big\}^{-1} \times \\
& \times \Big\{ -\sqrt{6} \left(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H \right)^{3/2} \left(\frac{1}{2} + 9\lambda_5 H^2 \right)^{3/2} + 3H \Big\{ 4H^2 \left(\frac{1}{2} + 15\lambda_5 H^2 \right) + \\
& + 3\lambda_3^2 \left(\frac{1}{4} + 8\lambda_5 H^2 - 9\lambda_5^2 H^4 \right) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H \left[\frac{1}{4} + 3\lambda_5 H^2 \left(\frac{5}{2} - 6\lambda_5 H^2 \right) \right] \Big\} \Big\} \,.
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

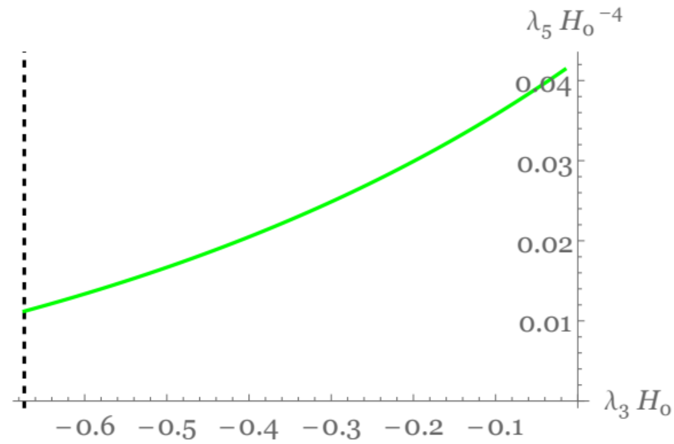

Figura 4.1: O parâmetro unidimensional no subespaço do plano ($\lambda_3 - \lambda_5$) que satisfaz os dois requisitos fenomenológicos, que são $H(z=0) \equiv H_0 \approx 6 \times 10^{-61}$ (em unidades onde $8\pi G = c = \hbar = 1$) e $w_u(z=0) \approx -0.7$. A linha vertical tracejada no lado esquerdo marca a região em que duas condições de falta de patologia (4.32) e (4.33) não são satisfeitas [215].

Para fixar os melhores valores de λ_3 e λ_5, supõe-se que a Eq. (4.62) deva satisfazer $w_U(z=0) = -0.7$ com $H(z=0) = H_0$ e encontra-se a dependência entre λ_3 e λ_5, conforme ilustrado na Fig. (4.1). Após isso, resolve a equação diferencial (4.58) para valores de $\lambda_3 - \lambda_5$ que satisfazem a curva da Fig. (4.1) e a condição inicial $H(z=0)$.

O estudo feito em [215] trabalha com as unidades de Planck, $c = \hbar = 8\pi G = 1$, dessa forma H_0 é expresso adimensionalmente. Nestas unidades, podemos escrever $H_0 = \dfrac{h}{3000}\text{Mpc}^{-1}L_P$, onde L_P é o comprimento de Planck reduzido, $L_P = \sqrt{\dfrac{8\pi G\hbar}{c^3}} = 8.10766 \times 10^{-35}\text{m}$, $h = 0.67$, $1\text{Mpc} \approx 3 \times 10^{22}\text{m}$. Portanto

$$H_o \approx 6.04 \times 10^{-61}\ . \tag{4.63}$$

O lado esquerdo da Fig. (4.2) apresentada a evolução da taxa de expansão do universo em função do redshift para três valores distintos de λ_3 em comparação com o modelo ΛCDM. Ela foi calculada numericamente a partir da Eq. (4.58), lembrando que $\dot{H} = -(1+z)H(z)H'(z)$, onde $'$ representa uma derivada com respeito ao redshift. Já o lado direito da Fig. (4.2) apresentada a evolução da equação de estado do fluido para os mesmos três valores de λ_3, calculada a partir da Eq. (4.62), junto com a evolução da equação de estado do modelo ΛCDM.

É possível observar que a equação de estado para o fluido representa com boa concordância as observações. É zero durante toda a era da matéria que começa em $z \sim 3000$ e vai até $z \sim 2-3$, quando começa a decrescer. Em $z \sim 0.5$ passa por $w_U = -1/3$, onde começa a expansão acelerada do universo. Nos dias atuais, $z = 0$, a equação de estado para o fluido é de $w_U = -0.7$ e a curva tende para $w \to -1$ quando $z \to -1$ (representa $t \to \infty$), indicando que no futuro o universo será do tipo de Sitter.

Apesar do comportamento desse modelo no background ser consistente, é possível

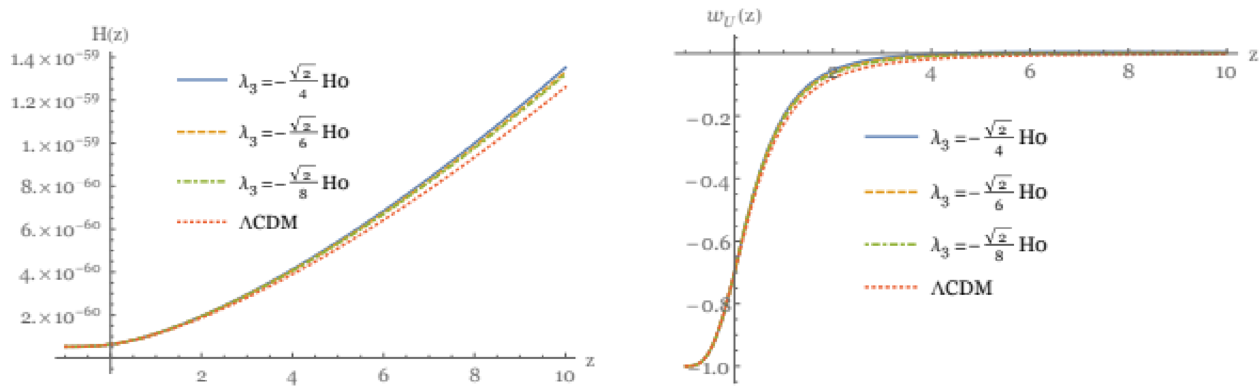

Figura 4.2: Lado esquerdo: A evolução do parâmetro de Hubble como uma função do redshift z, para o modelo (4.50), para vários valores de λ_3 em unidades onde $8\pi G = c = \hbar = 1$. Temos um grupo de valores da equação de estado do universo para $w_U(z=0) \sim -0.7$ e o valor atual de H para $H_0 \approx 6 \times 10^{-61}$ que está de acordo com o valor de λ_5 (4.50). Lado direito: A correspondente evolução de $w_U(z)$. Em ambos os gráficos adicionamos as curvas correspondentes a ΛCDM [215].

que ele tenha patologias no nível perturbativo, tais como fantasmas e instabilidades Laplacianas. Na teoria de Horndeski existem duas condições que devem ser satisfeitas para que não haja patologias, são elas as Eqs. (4.32) e (4.33), que para o nosso modelo onde a ação é escrita por (4.50), se tornam

$$Q_s = -\frac{2\left(\lambda_5 X - 1\right)\left\{3\lambda_3^2 + 6\sqrt{2}\lambda_3 H\left(1 - 5\lambda_5 X\right) + 8X\left[\frac{1}{2}\left(1-\lambda_5 X\right) + 3\lambda_5 H^2\left(1+3\lambda_5 X\right)\right]\right\}}{\left[\sqrt{2}\lambda_3 + H\left(4 - 12\lambda_5 X\right)\right]^2} > 0\,, \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} c_s^2 = &\left\{\left(\lambda_5 X - 1\right)\left\{3\lambda_3^2 + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(1-5\lambda_5 X) + 8X\left[\frac{1}{2}\left(1-\lambda_5 X\right) + 3\lambda_5 H^2\left(1+3\lambda_5 X\right)\right]\right\}\right\}^{-1} \times \\ &\times \left\{8\left(3\lambda_5 X - 1\right)\left[4\lambda_5^2 H^2 X^2 - \left(1-\lambda_5 X\right)^2 \dot{H}\right] + \lambda_3\left[\lambda_3\left(1+\lambda_5 X\right) + 4\sqrt{2}\lambda_5\left(1-\lambda_5 X\right)\dot{X}\right] + \right. \\ &\left. -2H\left\{\sqrt{2}\lambda_3\left[\lambda_5 X\left(2+7\lambda_5 X\right) - 1\right] - 4\lambda_5\left(\lambda_5 X - 1\right)\left(1+3\lambda_5 X\right)\dot{X}\right\}\right\} \geq 0\;, \end{aligned} \tag{4.65}$$

com a condição de que $c_s^2 \leq 1$.

A Fig. (4.3) apresenta a evolução de Q_s e c_s^2 para a evolução do background com a escolha de parâmetros da Fig. (4.2). Observamos que as condições para a ausência de fantasmas e instabilidades Laplacianas são sempre satisfeitas e o modelo esta livre de patologias tanto no background quanto no nível perturbativo. A escolha de $X^{1/2}$ em $K(\phi, X)$ e $G_3(\phi, X)$ foi feita para que c_s^2 fosse positivo para qualquer tempo.

4.3 Modelo desenvolvido

No trabaho realizado foi utilizada a seguinte Lagrangeana de Horndeski (4.50)

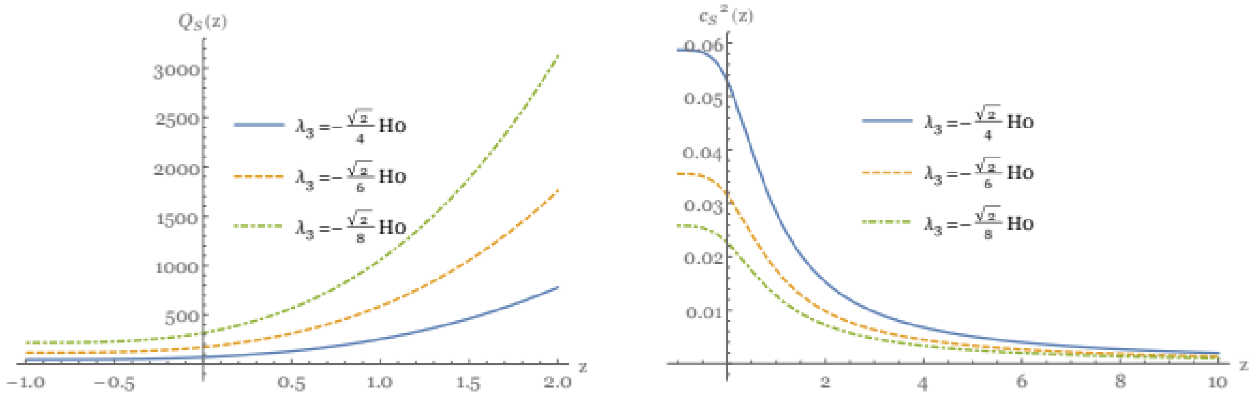

Figura 4.3: Lado esquerdo: A evolução de Q_S (4.64), que caracteriza a ausência das instabilidades Laplacianas, como uma função do redshift z, para o modelo (4.50), para vários valores de λ_3 em unidades onde $8\pi G = c = \hbar = 1$. Temos um conjunto de valores presentes para a equação de estado do universo para $w_U(z-0) \sim -0.7$ e o presente valor de H para $H_0 \approx 6 \times 10^{-61}$. Lado direito: A evolução correspondente a velocidade do som ao quadrado de perturbações escalares c_S^2 de (4.65) [215].

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(X - \eta X^{1/2}\right) - \frac{\lambda_3}{2}\Box\phi\, X^{-1/2} + \frac{R}{2} + \frac{\lambda_5}{2}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\right] \tag{4.66}$$

onde definimos

$$\mathcal{L}_2 \equiv \frac{1}{2}\left(X - \eta X^{1/2}\right) \ , \tag{4.67}$$

$$\mathcal{L}_3 \equiv -\frac{\lambda_3}{2}\Box\phi\, X^{-1/2} \ , \tag{4.68}$$

$$\mathcal{L}_4 \equiv \frac{R}{2} \ , \tag{4.69}$$

$$\mathcal{L}_5 \equiv \frac{\lambda_5}{2}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi \ . \tag{4.70}$$

Quando variarmos $\sqrt{-g}\mathcal{L}_4$ com respeito à métrica, obteremos o lado esquerdo das equações de Einstein.

Definindo a variação de uma função `f` qualquer por

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}'\mathrm{f} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}\mathrm{f}\right) - \partial_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma g^{\mu\nu})}\mathrm{f}\right) \ ,} \tag{4.71}$$

podemos escrever que

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}'\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_4\right) = T^{\mu\nu}_{(u)} \ , \tag{4.72}$$

onde $T^{\mu\nu}_{(u)}$ representa o tensor energia-momento do fluido unificado

$$T^{\mu\nu}_{(u)} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\ '}{\delta g_{\mu\nu}} \left[\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_5\right)\right] \tag{4.73}$$

Sendo assim, vamos calcular a variação de cada lagrangeana $\mathcal{L}_i$, com $i = 2, \ldots, 5$, para depois obtermos o tensor energia-momento para o fluido.

Para validar as componentes do tensor energia-momento calculadas utilizando o método variacional, utilizou-se um comando do programa computacional `Mathematica`. Este comando recebe uma função "`f`" que depende de outra função "`g`", que por fim, essa última, depende de uma coordenada x^α, conforme VariationalD[f [g [x^α]], g [x^α], x^α]. O comando vai calcular a parte esquerda das equações de Euler-Lagrange derivando "`f`" com respeito à "`g`" e às derivadas de "`g`" em função das coordenadas x^α. Para simplificar

$$\text{VariationalD}[\,\mathrm{f}\,[\,\mathrm{g}\,[\,x^\alpha\,]],\,\mathrm{g}\,[x^\alpha], x^\alpha] = \frac{\delta\ '}{\delta \mathrm{g}}\,\mathrm{f} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}\mathrm{f} - \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \mathrm{g}\right)}\mathrm{f}\ . \tag{4.74}$$

Uma condição necessária para que esse comando funcione é que a função "`g`" seja escrita exatamente dessa forma, g = g(x^α), se não escrever explicitamente a dependência de x^α o comando não funciona adequadamente.

A expressão para o tensor energia-momento perturbado é igual à expressão para o caso não perturbado, por isso vamos utilizar a métrica do background e calcular as componentes para o caso não perturbado.

Quando tentamos calcular o tensor energia-momento utilizando o programa `Mathematica` encontramos dois problemas. Estamos tratando de um caso onde $g^{\mu\nu}$ e $\mathcal{L}$ só dependem do tempo, ou seja, a única componente válida de x^α é $x^\alpha = x^0 = t$, então, quando formos calcular a variação de $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$, temos f= $\sqrt{-g}\mathcal{L}$, g= $g_{\mu\nu}$ e $x^\alpha = t$.

1. O primeiro problema aparece pois o comando VariationalD não funciona para essa definição de funções que escolhemos. Como foi dito acima, a função "`g`" precisa ser uma função de primeira ordem em x^α, que não é o caso de $g_{\mu\nu}$. Esse problema é resolvido considerando que g= $g(t)$ e não que g= $g_{\mu\nu}$, então, precisamos transformar

$$\frac{\delta\ '}{\delta g_{\mu\nu}}\mathrm{f} = \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}\mathrm{f} - \partial_0 \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 g_{\mu\nu}\right)}\mathrm{f}\ , \tag{4.75}$$

que é o que queremos, em

$$\frac{\delta\ '}{\delta \mathrm{g}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}\mathrm{f} - \partial_0 \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \mathrm{g}\right)}\mathrm{f}\ , \tag{4.76}$$

que é o que sabemos calcular. Para isso fazemos

$$\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} = \left(\frac{d\,g_{\mu\nu}}{d\,\mathrm{g}}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}\ , \tag{4.77}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 g_{\mu\nu}\right)} = \left[\frac{d\left(\partial_0 g_{\mu\nu}\right)}{d\left(\partial_0 \mathrm{g}\right)}\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \mathrm{g})}\ . \tag{4.78}$$

Como

$$\frac{d\,(\partial_0 g_{\mu\nu})}{d\,(\partial_0 \mathrm{g})} = \frac{d\,g_{\mu\nu}}{d\,\mathrm{g}}\ , \tag{4.79}$$

então

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}\mathrm{f} - \partial_0 \frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 g_{\mu\nu})}\mathrm{f}\right] &= \left(\frac{d\,g_{\mu\nu}}{d\,\mathrm{g}}\right)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}\mathrm{f} - \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial\,(\partial_\alpha \mathrm{g})}\mathrm{f}\right] \\ &= \left(\frac{d\,g_{\mu\nu}}{d\,\mathrm{g}}\right)^{-1} \mathrm{VariationalD[f[g[}x^\alpha\mathrm{]], g[}x^\alpha\mathrm{]}, x^\alpha] \ .\end{aligned} \tag{4.80}$$

2. O outro problema que existe é que escrevendo a variação de $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ como o lado esquerdo da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta'}{\delta g}\mathrm{f} = \frac{\partial}{\partial g}\mathrm{f} - \partial_0 \frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 g)}\mathrm{f}\ , \tag{4.81}$$

ele não respeita a regra de Leibniz, mas se fizermos a variação da função "`f`" pelo método variacional esta regra é válida. Por exemplo se $\mathrm{f}=\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{f}_2$, então

$$\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}\mathrm{f} = \frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}(\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{f}_2) \neq \frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}(\mathrm{f}_1) \cdot \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_1 \cdot \frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}(\mathrm{f}_2)\ , \tag{4.82}$$

pois

$$\begin{aligned}\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}(\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{f}_2) =& \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}(\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{f}_2) - \partial_0 \frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 \mathrm{g})}(\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{f}_2) \\ =& \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}(\mathrm{f}_1) \cdot \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}(\mathrm{f}_2) + \\ & - \partial_0 \left[\frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 \mathrm{g})}(\mathrm{f}_1) \cdot \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 \mathrm{g})}(\mathrm{f}_2)\right] \\ =& \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}(\mathrm{f}_1) \cdot \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}(\mathrm{f}_2) + \\ & - \partial_0 \left[\frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 \mathrm{g})}(\mathrm{f}_1)\right] \cdot \mathrm{f}_2 - \left[\frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 \mathrm{g})}(\mathrm{f}_1)\right] \cdot (\partial_0\, \mathrm{f}_2) + \\ & - (\partial_0 \mathrm{f}_1) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 \mathrm{g})}(\mathrm{f}_2)\right] - \mathrm{f}_1 \cdot \partial_0 \left[\frac{\partial}{\partial\,(\partial_0 \mathrm{g})}(\mathrm{f}_2)\right]\ .\end{aligned} \tag{4.83}$$

Reorganizando os termos temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}(\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{f}_2) = & \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}(\mathrm{f}_1) \cdot \mathrm{f}_2 - \partial_0 \left[\frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \mathrm{g}\right)}(\mathrm{f}_1)\right] \cdot \mathrm{f}_2}_{\left(\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}\mathrm{f}_1\right)\cdot \mathrm{f}_2} + \\
& \underbrace{+ \mathrm{f}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{g}}(\mathrm{f}_2) - \mathrm{f}_1 \cdot \partial_0 \left[\frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \mathrm{g}\right)}(\mathrm{f}_2)\right]}_{\mathrm{f}_1 \cdot \left(\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}\mathrm{f}_2\right)} + \\
& - (\partial_0 \mathrm{f}_1) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \mathrm{g}\right)}(\mathrm{f}_2)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \mathrm{g}\right)}(\mathrm{f}_1)\right] \cdot (\partial_0\, \mathrm{f}_2) \\
= & \left(\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}\mathrm{f}_1\right) \cdot \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_1 \cdot \left(\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}\mathrm{f}_2\right) + \\
& \underbrace{- (\partial_0 \mathrm{f}_1) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \mathrm{g}\right)}(\mathrm{f}_2)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \mathrm{g}\right)}(\mathrm{f}_1)\right] \cdot (\partial_0\, \mathrm{f}_2)}_{\text{Diferença}} \ . \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

Definimos aqui a "Diferença" como sendo a diferença entre a variação do produto das funções e o que seria a regra de Leibniz aplicada a essa variação. Podemos escrever de uma forma simplificada

$$
\frac{\delta}{\delta \mathrm{g}}' \mathrm{f} = \left[\sum_{i,j,i\neq j} \left(\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}\mathrm{f}_i\right) \cdot \mathrm{f}_j \underbrace{- \sum_i \left(\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_0\, \mathrm{g})}(\mathrm{f}_i)\right] \cdot \partial_0 \prod_{j\neq i} \mathrm{f}_j \right)}_{\text{Diferença}} \right] , \qquad (4.85)
$$

onde f$= \prod_i \mathrm{f}_i$. Assumimos que os f_i não são produtos de funções e que eles comutam entre si.

Então, levando em conta esses dois problemas, queremos calcular

$$
\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}' \mathrm{f} = \left(\frac{d\, g_{\mu\nu}}{d\, \mathrm{g}}\right)^{-1} \left[\sum_{i,j,i\neq j} \left(\frac{\delta'}{\delta \mathrm{g}}\mathrm{f}_i\right) \cdot \mathrm{f}_j \underbrace{- \sum_i \left(\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_0\, \mathrm{g})}(\mathrm{f}_i)\right] \cdot \partial_0 \prod_{j\neq i} \mathrm{f}_j \right)}_{\text{Diferença}} \right] . \qquad (4.86)
$$

Como pudemos ver, a "Diferença" apenas será não nula se a função "`f`" depender da derivada temporal de "`g`" e da coordenada x^0. Temos como exemplo o caso de $\Box\phi$ em $\mathcal{L}_3$, que depende de $\dot{g}_{\mu\nu}$. Vale enfatizar que a "Diferença" só existe quando aplicamos $\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}'$ a um produto de funções.

Calculamos o tensor energia momento a partir da variação da ação obtida analiticamente, e utilizamos o programa `Mathematica` para validar o resultado para o caso do background. Isso porque queremos obter o tensor-energia perturbado, e o `Mathematica` só nos fornece as componentes do tensor no *background*. Então vamos calcular o tensor energia-momento analítico e comparar cada componente com as componentes do mesmo tensor calculado pelo `Mathematica`, validando o resultado analítco para o tensor, o perturbaremos.

4.3.1 Tensor energia-momento de Horndeski

Com o intuito de validar as equações obtidas analiticamente em (I.10), (I.34a) e (I.53a), que nos fornecem o $T_{\mu\nu(u)} = T^{(\mathcal{L}_2)}_{\mu\nu} + T^{(\mathcal{L}_3)}_{\mu\nu} + T^{(\mathcal{L}_5)}_{\mu\nu}$, vamos agora apresentar as contas feitas no `Mathematica` para o tensor energia-momento do background, que será usada como comparação.

Estamos supondo um universo que respeite a métrica de FLRW sem perturbação

$$g_{\mu\nu} = -N^2(t)\, dt^2 + a^2(t)\, \delta_{ij}\, dx^i dx^j \ , \tag{4.87}$$

onde a função lapso $N(t)$ é uma variável, que serve para podermos calcular derivadas com respeito à g_{00}. No final das contas fazemos $N(t) \to 1$ e $N'(t) \to 0$. Para essa matriz $\sqrt{-g} = N(t)\, a^3(t)$.

Como $g_{00} = -N^2(t)$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = a^2(t)$ e as outras compontes são nulas, no background só teremos quatro componentes do tensor energia-momento não nulas, são elas T^{00} e $T^{11} = T^{22} = T^{33}$.

A variação da Lagrangeana com respeito à métrica é dada por

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g}\right)^{-1} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g} \,. \tag{4.88}$$

Como

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\nu} =& g_{\lambda\nu} T^{\mu\lambda} \\ =& g_{\lambda\nu}\left(-\frac{2}{\sqrt{-g}}\right)\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\lambda}} \\ =& -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g}\right)^{-1} g_{\lambda\nu}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g} \end{aligned} \tag{4.89}$$

Segundo a Eq. (4.89), precisamos calcular o termo

$$\left(\frac{d\, g_{\mu\nu}}{d\, g}\right)^{-1} \ , \tag{4.90}$$

para os dois casos possíveis. No primeiro caso em que $g_{00} = -N^2(t)$, temos

$$\left(\frac{d\, g_{00}}{d\, N(t)}\right)^{-1} = -\frac{1}{2N(t)} \ , \qquad \text{onde definimos g} = N(t) \ . \tag{4.91}$$

No segundo caso em que $g_{11} = g_{22} = g_{33} = a^2(t)$, temos

$$\left(\frac{d\, g_{11}}{d\, a(t)}\right)^{-1} = \frac{1}{2a(t)} \ , \qquad \text{onde definimos g} = a(t) \ . \tag{4.92}$$

Como a métrica é diagonal,

$$T^0_{\ 0} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial N(t)}\right)^{-1} g_{00}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta N(t)} \tag{4.93}$$

$$T^1_{\ 1} = T^2_{\ 2} = T^3_{\ 3} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial a(t)}\right)^{-1} g_{11}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta a(t)}\ , \tag{4.94}$$

portanto

$$T^0_{\ 0} = -\frac{1}{a^3(t)}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta N(t)} \tag{4.95}$$

$$T^1_{\ 1} = T^2_{\ 2} = T^3_{\ 3} = -\frac{1}{N(t)a^2(t)}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta a(t)} \tag{4.96}$$

Vamos calcular então $\delta\mathcal{L}/\delta N(t)$, e $\delta\mathcal{L}/\delta a(t)$, pelo `Mathematica` para assim obter T^{00} e $T^{ii} = T^{11} = T^{22} = T^{33}$, e verificar as contas do tensor energia-momento feitas a mão.

Segundo o `Mathematica`

$$\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta N} = -\, a^3\frac{1}{4}\dot{\phi}^2\ , \tag{4.97}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta N} = \lambda_3\, a^3\frac{3}{\sqrt{2}}H\ , \tag{4.98}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta N} = a^3\, 3H^2\ , \tag{4.99}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta N} = -\,\lambda_5\, a^3\frac{9}{2}H^2\dot{\phi}^2\ , \tag{4.100}$$

e

$$\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta a} = a^2\frac{3}{4}\left(\dot{\phi}^2 - 2\sqrt{2}\eta\dot{\phi}\right)\ , \tag{4.101}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta a} = \lambda_3 a^2\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\ , \tag{4.102}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta a} = a^2 3\left(3H^2 + 2\dot{H}\right)\ , \tag{4.103}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta a} = -\,\lambda_5 a^2\frac{3}{2}\left[\left(3H^2 + 2\dot{H}\right)\dot{\phi}^2 + 4H\dot{\phi}\ddot{\phi}\right]\ , \tag{4.104}$$

onde já consideramos que $N(t) \to 1$ e $N'(t) \to 0$. Dessa forma

$$T^0_{\ 0(\mathcal{L}_2)} = \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 \tag{4.105}$$

$$T^0_{\ 0(\mathcal{L}_3)} = -\,\lambda_3\frac{3}{\sqrt{2}}H \tag{4.106}$$

$$T^0_{\ 0(\mathcal{L}_4)} = -\,3H^2 \tag{4.107}$$

$$T^0_{\ 0(\mathcal{L}_5)} = \lambda_5\frac{9}{2}H^2\dot{\phi}^2\ . \tag{4.108}$$

Assim

$$\boxed{T^0_{\ 0(u)} = \left(\frac{1}{2} + \lambda_5 9H^2\right) X - \lambda_3 \frac{3}{\sqrt{2}} H} \ , \tag{4.109}$$

onde $T^0_{\ 0(u)} = T^0_{\ 0(\mathcal{L}_2)} + T^0_{\ 0(\mathcal{L}_3)} + T^0_{\ 0(\mathcal{L}_5)}$, e $X = \dot{\phi}^2/2$. Para as componentes espaciais

$$T^i_{\ i(\mathcal{L}_2)} = -\frac{3}{4}\left(\dot{\phi}^2 - 2\sqrt{2}\eta\dot{\phi}\right) \tag{4.110}$$

$$T^i_{\ i(\mathcal{L}_3)} = -\lambda_3 \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \tag{4.111}$$

$$T^i_{\ i(\mathcal{L}_4)} = -3\left(3H^2 + 2\dot{H}\right) \tag{4.112}$$

$$T^i_{\ i(\mathcal{L}_5)} = \lambda_5 \frac{3}{2}\left[\left(3H^2 + 2\dot{H}\right)\dot{\phi}^2 + 4H\dot{\phi}\ddot{\phi}\right] . \tag{4.113}$$

Assim

$$\boxed{T^i_{\ i(u)} = 3\left[\left[-\frac{1}{2} + \lambda_5\left(3H^2 + 2\dot{H}\right)\right] X + \eta\sqrt{X} - \lambda_3 \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\dot{X}}{X} + 2\lambda_5 H\dot{X}\right]} , \tag{4.114}$$

onde $T^i_{\ i(u)} = T^i_{\ i(\mathcal{L}_2)} + T^i_{\ i(\mathcal{L}_3)} + T^i_{\ i(\mathcal{L}_5)}$, e $X = \dot{\phi}^2/2$.

As Eqs. (4.109) e (4.114) concordam com o resultado de $T^\mu_{\ \nu(u)}$ analítico. Vamos a expressão de $T^\mu_{\ \nu(u)}$ para obter $\delta T^\mu_{\ \nu(u)}$.

Variando a ação com respeito à $N(t)$ e $a(t)$ respectivamente, e fazendo $N(t) \to 1$, obtemos

$$\begin{aligned} &2XK_X - K + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} - GH^2G_4 + 24H^2X\left(G_{4,X} + XG_{4,XX}\right) \\ &- 12HX\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 6H\dot{\phi}G_{4,\phi} + 2H^3X\dot{\phi}\left(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}\right) \\ &- 6H^2X\left(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned} &K - 2X\left(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}\right) + 2\left(3H^2 + 2\dot{H}\right)G_4 - 12H^2XG_{4,X} - 4H\dot{X}G_{4,X} - 8\dot{H}XG_{4,X} \\ &- 8HX\dot{H}G_{4,XX} + 2\left(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi}\right)G_{4,\phi} + 4XG_{4,\phi\phi} + 4X\left(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi}\right)G_{4,\phi X} \\ &- 2X\left(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi}\right)G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4HX\left(\dot{X} - HX\right)G_{5,\phi X} \\ &+ 2\left[2\left(\dot{H}X + H\dot{X}\right) + 3H^2X\right]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} = 0 \end{aligned} \tag{4.116}$$

Na geometria de FLRW, as equações de Einstein (4.119) e (4.120) se reduzem à

$$3H^2 = \rho_U \ , \tag{4.117}$$

$$-\left(3H^2 + 2\dot{H}\right) = P_U \ , \tag{4.118}$$

onde

$$\begin{aligned}\rho_U =& 2XK_X - K + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} + \\ &+ 2H^3X\dot{\phi}\left(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}\right) - 6H^2X\left(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}\right) \ ,\end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned}P_U =& K - 2X\left(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}\right) - 2X\left(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi}\right)G_{5,X} + \\ &- 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4HX\left(\dot{X} - HX\right)G_{5,\phi X} \\ &+ 2\left[2\left(\dot{H}X + H\dot{X}\right) + 3H^2X\right]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} \ .\end{aligned} \tag{4.120}$$

As quantidades acima são utlizadas para definir a equação de estado total do universo ω_U, que é o fluido que incorpora o setor de DE e DM em uma forma unificada,

$$\omega_U \equiv \frac{P_U}{\rho_U} \ . \tag{4.121}$$

4.3.2 Perturbação

Na teoria perturbativa o elemento de linha no gauge síncrono pode ser escrito em primeira ordem como [26]

$$ds^2 = a^2\left[-d\tau^2 + \left(\delta_{ij} + \tilde{h}_{ij}\right)dx^i\,dx^j\right] \ , \tag{4.122}$$

onde no espaço de Fourier

$$\tilde{h}_{ij}\left(\tau, \vec{k}\right) = \hat{k}_i\hat{k}_j\,h + 6\left(\hat{k}_i\hat{k}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\eta \ . \tag{4.123}$$

Dessa forma, perturbando além da métrica o campo

$$\phi(\eta) \to \phi(\eta) + \delta\phi(\eta, \vec{x}) \ , \tag{4.124}$$

temos para o tensor energia-momento

$$\delta T^0{}_{0(u)} = -\frac{\lambda_3}{\sqrt{2}a}\frac{1}{a\dot{\phi}}\left(-2\nabla^2\delta\phi + \dot{h}\dot{\phi}\right) \ , \tag{4.125}$$

$$\delta T^0{}_{j(u)} = \frac{\lambda_3}{\sqrt{2}a}\frac{1}{\dot{\phi}}\,\partial_j\left(\delta\dot{\phi} - 3\mathcal{H}\delta\phi\right) \ , \tag{4.126}$$

$$\delta T^i{}_{j(u)} = \frac{\lambda_3}{\sqrt{2}a}\frac{1}{\dot{\phi}^2}\left(\delta\dot{\phi}\ \ddot{\phi} - \dot{\phi}\ \delta\ddot{\phi}\right)\delta^i_j \ . \tag{4.127}$$

4.3.3 Teoria de Horndeski após GW170817

[4]Em 17 de agosto de 2017, o detector de ondas gravitacionais LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Observatory*) junto com o interferômetro VIRGO detectou ondas gravitacionais (do inglês *gravitational waves*, GWs) advindas da fusão de um par de estrelas de nêutrons (BNS, do inglês *binary neutron star*) próximo da galáxia NGC 4993 [243], evento esse chamado de GW170817 [244]. A contraparte eletromagnética (EM) do evento foi detectada pelo telescópio *Fermi* na forma de um Gamma-Ray Burst curto (GRB170817A) (sGRB, do inglês *short gamma ray burst*) com duração de $1.74 \pm 0.05s$ depois pelo telescópio *Fermi* e pelo *International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory* [245]. Observações subsequentes em todo o espectro eletromagnético confirmaram a descoberta [243].

Cada um desses eventos forneceu informações complementares sobre a fusão BNS. O sinal da onda gravitacional serve para obter a massa da estrela de nêutrons (NS) $0.86 - 2.26 M_\odot$, e sua distância luminosa $d_L = 40^{+8}_{-14}$Mpc. As contrapartes do EM identificam a galáxia onde a fusão aconteceu, NGC4993. Tomando o limite inferior da distância luminosa $d_L = 26$Mpc e um delay conservativo de 10s entre esses eventos, a GW e o sGRB, os limites para a velocidade das GWs são [245]

$$-3 \cdot 10^{-15} \leq c_g/c - 1 \leq 7 \cdot 10^{-16} \ , \tag{4.128}$$

onde c_g indica a velocidade da onda gravitacional e c a velocidade da luz. Vamos supor que $c = 1$.

Isso possibilitou estabelecer vínculos muito fortes na teoria de Horndenski [246–248] limitando bastante o leque de possíveis alternativas à relatividade geral. Como havíamos visto, o desvio da velocidade das ondas gravitacionais em relação à velocidade da luz é dada pela equação (J.23), sendo que a função α_T representa esse desvio. À princípio, α_T pode adotar valores positivos ou negativos. No entanto, valores negativos de α_T foram vinculados em $\alpha_T > -10^{-15}$ devido a ausência de radiação Cherenkov gravitacional em raios cósmicos [249, 250]. Já os limites positivos disponíveis foram obtidos pelo tempo de viagem da onda gravitacional entre os dois detectores do LIGO [251, 252], o que dava $\alpha_T < 0.42$ [251, 252].

Efeitos na propagação das GWs são uma marca das teorias escalar-tensor da gravidade. A evolução das perturbações lineares, transversas e de traço nulo sobre o *background* cosmológico são representadas por

$$\ddot{h}_{ij} + (3 + \alpha_M) H \dot{h}_{ij} + (1 + \alpha_T) k^2 h_{ij} = 0 \ , \tag{4.129}$$

onde são totalmente caracterizadas pelas duas funções do tempo: o excesso da **velocidade tensorial**, α_T, que modifica a velocidade de propagação das GWs $c_g^2 = 1 + \alpha_T$; e a variação da **massa de Planck efetiva**, $\alpha_M \equiv d \log \left(M_*^2\right) / d \log(a)$, que modula o termo de fricção causado pela expansão do universo.

A generalização covariante da teoria Galileana [253, 254] pode vir da teoria de

[4]Para a análise feita aqui foi utilizado [242]

Horndeski [255] considerando

$$
\begin{aligned}
G_2(X) =& c_2 X \ , \\
G_3(X) =& 2\frac{c_3}{M^3} X \ , \\
G_4(X) =& \frac{M_P^2}{2} + \frac{c_4}{M^6} X^2 \ , \\
G_5(X) =& \frac{c_5}{M^9} X^2 \ ,
\end{aligned} \tag{4.130}
$$

onde a escala de massa $M^3 \equiv M_P H_0^2$ garante que os coeficientes c_i sejam adimensionais. Existem três modelos que dependem da ordem mais alta do campo ϕ na ação: cúbico ($c_4 = c_5 = 0$), quártico ($c_5 = 0$) e ordem cinco (todos os termos).

A teoria covariante de Galileon é mais interessante como um modelo cosmológico onde o campo causa ao universo a aceleração, sem precisar de uma constante cosmológica no modelo. Como consequência da simetria de translação $\phi \to \phi + C$, existe uma solução tipo *tracker* onde a evolução temporal do campo e o parâmetro de Hubble obedecem a relação $\xi \equiv H(t)\dot{\phi}(t)/H_0^2 =$ constante [247]. Sobre essa solução, a Eq. (4.129) nos fornece

$$
\alpha_T = \frac{1}{M_*^2} E^4 \left[2c_4 \xi^4 + c_5 \xi^5 \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \right] \ , \tag{4.131}
$$

$$
\alpha_M = -4 \frac{\dot{H}}{H^2} \frac{M_*^2 - 1}{M_*^2} \ , \tag{4.132}
$$

$$
M_*^2 = 1 - \frac{\xi^4}{E^4} \left(\frac{3}{2} c_4 + c_5 \xi \right) \ , \tag{4.133}
$$

onde $E = H(t)/H_0$. Modelos de Galileon de auto-expansão são consistentes com medidas de BAO e CMB.

Como demonstrou [246], quando temos ambos os sinais, gravitacional e eletromagnético, das GWs e do sGRB, os vínculos são muito mais fortes. Seja t_s o tempo de emissão das ondas gravitacionais e eletromagnéticas na fonte, t_T o tempo de detecção da onda gravitacional e t_c o tempo mensurado do pico de brilho do sinal eletromagnético. O tempo de trânsito do sinal gravitacional e eletromagnético são respectivamente, $c_T(t_T - t_s) = d_s$ e $(t_c - t_s) = d_s$, sendo $d_s \simeq 40$ Mpc a distância da fonte. A partir da condição (4.128), após uma expansão de Taylor é possível obter que $\alpha_T \simeq 2\,\Delta t/d_s$, onde $\Delta t \simeq 1.7$s é a diferença do tempo de chegada entre os dois sinais. Dessa forma

$$
|\alpha_T| < 10^{-15} \text{Mpc} \ , \tag{4.134}
$$

ou seja, para todos os efeitos, $\alpha_T \approx 0$. Temos uma relação muito forte entre c_4 e c_5. Utilizando as Eqs. (4.131)-(4.132), [256] obteve a relação

$$
|\alpha_M| < 1.9 \cdot 10^{-15} \ . \tag{4.135}
$$

O modelo de Galileons mais viável nesse caso é aquele com um pequeno desvio da forma cúbica de Galileon, que é incompatível com medidas do ISW com mais de 7σ.

Modelos de Galileons de ordem cinco compatíveis com GW170817 existem em uma região muito limitada do espaço de parâmetros onde

$$\Delta t \simeq \frac{1}{2}\int_{t_E}^{t_O} \alpha_T(t')dt' \leq 1.7s \ . \tag{4.136}$$

Para descartar essa possilidade seria necessário outra medida.

A limitação dos possíveis valores da velocidade da onda gravitacional serviu para excluir algumas teorias alternativas à relatividade geral.

Como vimos, na teoria de Horndenski, a massa de Planck efetiva é dada por (4.14) e α_T é dada por (4.18). Escrevendo as duas funções explicitamente

$$\begin{aligned} M_2^*\alpha_T &= 2X[2G_{4,X} - 2G_{5,\phi} - (\ddot{\phi} - H\dot{\phi})G_{5,X}] \ , \\ M_2^* &= 2(G_4 - 2XG_{4,X} + XG_{5,X} - H\dot{\phi}XG_{5,X}] \ , \end{aligned}$$

Podemos ver que não é possível um cancelamento trivial a menos que $G_{5,X} \neq 0$. Para um cancelamento total, é necessário que

$$G_{4,X} \approx 0 \ , \qquad G_5 \approx \text{const.} \ , \tag{4.137}$$

visto que são os termos de $\mathcal{L}_4$ e $\mathcal{L}_5$ que influenciam no desvio da velocidade de propagação das ondas gravitacionais. Somente alguns casos finamente ajustados preveem $\alpha_T(z = 0) = 0$. Como escrito em [248], a Lagrangeana de Horndenski compatível com o novo vínculo se reduz a

$$\mathcal{L}_H = \frac{f(\phi)}{2}R + K(\phi, X) - G(\phi, X)\Box\phi \ . \tag{4.138}$$

4.3.4 Conclusão

A detecção de ondas gravitacionais advindas da fusão de um par de estrelas de nêutrons [243], evento esse chamado de GW170817 [244], impôs vínculos na velocidade da onda gravitacional que limitou a existência de alguns modelos de Horndeski inviabilizando o nosso modelo. Utilizando o estudo feito aqui é possível estudar outros casos que ainda não foram descartados, como por exemplo o modelo de Horndeski para uma métrica de buraco negro perturbada.

Capítulo 5

Conclusão

Apresentamos nesse estudo três trabalhos realizados pelo autor em que propõe modelos de interação entre a energia escura e a matéria escura como alternativas ao modelo ΛCDM.

Análise dinâmica

Utilizando a teoria de estabilidade linear para sistemas dinâmicos, estudamos a quintessência acoplada à matéria escura com duas interações diferentes: i) proporcional à densidade de energia da energia escura ρ_ϕ e, ii) proporcional à soma das duas densidades de energia $\rho_m + \rho_\phi$. No caso i) a transição das eras cosmológicas é totalmente alcançada com uma seqüência adequada de pontos fixos. No segundo caso, ii), tanto a era da radiação quanto a era da energia escura podem ser descritas pelos pontos fixos, mas a era da matéria não pode. Portanto, a segunda interação não fornece a seqüência cosmológica: radiação $\rightarrow$ matéria $\rightarrow$ energia escura.

DSU(2)$_R$

Neste trabalho, investigamos as interações entre as partículas escuras no modelo $SU(2)_R$ escuro de um ponto de vista cosmológico. A interação mais relevante é o decaimento de uma partícula em um dubleto de energia escura para outras três partículas, uma de energia escura e as outras duas de dubleto de matéria escura. Este processo consiste em uma nova forma de interação de energia escura e muda apenas as equações do *background*. Embora a comparação com dados tenha restringido muito bem o parâmetro de densidade de energia escura hoje, definido como a soma dos parâmetros de densidade de φ^+ e φ^0, os outros parâmetros livres no processo (taxa de decaimento e massas das partículas) não são limitados devido à forte degenerescência entre a taxa de decaimento e a densidade do progenitor (φ^+).

Teoria de Horndeski

A detecção de ondas gravitacionais advindas da fusão de um par de estrelas de nêutrons [243], evento esse chamado de GW170817 [244], impôs vínculos na velocidade da onda gravitacional que limitou a existência de alguns modelos de Horndeski inviabilizando o nosso modelo. Utilizando o estudo feito aqui é possível estudar outros casos que ainda não foram descartados, como por exemplo o modelo de Horndeski para uma métrica de buraco negro perturbada.

Apêndice A

Relatividade geral

A teoria da Relatividade Geral, criada por Einstein em 1915, mostra como a geometria se relaciona com o conteúdo de matéria e energia para um determinado universo. Como disse John Wheeler: "A matéria diz para o espaço-tempo como se curvar, e o espaço curvo diz à matéria como se mover".

Será assumido um conhecimento de álgebra tensorial, o conhecimento necessário sobre cálculo tensorial será dado. Foram utilizados para essa seção os livros [1,257,258].

Revisaremos o conteúdo de Relatividade Geral necessário para introduzir a pesquisa realizada nesse trabalho.

A.1 Transporte paralelo e geodésica

Uma geodésica pode ser definida de várias formas. Serão apresentadas duas formas para a mesma definição, a primeira fará isso de uma forma mais matemática (ver [257]) enquanto que a segunda seguirá uma forma mais física.

Primeira análise

Uma curva privilegiada em que o vetor tangente em todos os pontos é paralelo a ele mesmo respeita

$$\frac{D}{D\lambda}\left[\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right] = k(\lambda)\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \ , \tag{A.1}$$

onde λ é um parâmetro de parametrização.

Vamos agora definir a derivada covariante de um tensor $T^{\sigma\dots}_{\mu\dots}$ contraída com X,

$$\nabla_X T^{\sigma\dots}_{\mu\dots} \equiv X^\nu \nabla_\nu T^{\sigma\dots}_{\mu\dots} \ ,$$

onde ∇_ν é a derivada covariante. Um campo vetorial contravariante dado por $x^\sigma = x^\sigma(\lambda)$ determina uma congruência local de uma curva qualquer em um dado ponto. O campo vetorial tangente à congruência é dado por $X^\sigma = dx^\sigma/d\lambda$. Vamos definir a derivada absoluta do tensor $T^{\sigma\dots}_{\mu\dots}$ ao longo da curva de congruência C,

$$\frac{D}{D\lambda}\left[T^{\sigma\dots}_{\mu\dots}\right] = \nabla_X T^{\sigma\dots}_{\mu\dots} \equiv X^\nu \nabla_\nu T^{\sigma\dots}_{\mu\dots}.$$

Transporte paralelo ou *propagação paralela* ao longo da curva C ocorre quando

$$D/D\lambda \left[T^{\sigma\cdots}_{\mu\cdots}\right] = 0,$$

ou seja, se a derivada absoluta do tensor $\left[T^{\sigma\cdots}_{\mu\cdots}\right]$ for nula. Aplicando a condição necessária para uma propagação paralela em (A.1) e sabendo que $X^\sigma = dx^\sigma/d\lambda$, temos que:

$$\nabla_X X^\sigma = kX^\sigma \ .$$

Utilizando novamente o fato de que $X^\sigma = dx^\sigma/d\lambda$,

$$\begin{aligned}
\nabla_X X^\sigma &= X^\nu \nabla_\nu X^\sigma \\
&= X^\nu \partial_\nu X^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} X^\nu X^\mu \\
&= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} \ ,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\nabla_\nu X^\sigma = \frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = k\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = \frac{D}{D\lambda}X^\sigma = \frac{D}{D\lambda}\left[\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right].$$

Tomando dois pontos P e Q na curva C, podemos restringir que eles sejam tão próximos a ponto de serem representados por $x^\sigma(\lambda)$ e $x^\sigma(\lambda + \delta\lambda)$ respectivamente. Após uma expansão, o ponto Q pode ser representado por $x^\sigma(\lambda) + \dfrac{dx^\sigma}{d\lambda}\delta\lambda$. Vamos definir,

$$\delta x^\sigma \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\delta\lambda.$$

O vetor $X^\sigma(\lambda)$ no ponto P é agora o vetor tangente $dx^\sigma(\lambda)/d\lambda$, portanto, um vetor qualquer no ponto Q que seja paralelo a $dx^\sigma(\lambda)/d\lambda$ é dado por $X^\sigma + \bar{\delta}X^\sigma$.

Introduzindo a conexão onde $\bar{\delta}X^\sigma = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu}(x)X^\mu(x)\delta x^\nu$, podemos substituir X^μ e δx^ν, já que sabemos que $X^\mu = dx^\mu/d\lambda$ e $\delta x^\nu = X^\nu\delta\lambda = (dx^\nu/d\lambda)\delta\lambda$,

$$\bar{\delta}X^\sigma(x) = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\delta\lambda,$$

portanto, o vetor no ponto Q paralelo à X^σ é:

$$X^\sigma + \bar{\delta}X^\sigma = X^\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\delta\lambda.$$

Nós sabemos que todo vetor em Q é dado por:

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda}(\lambda + \delta\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left[x^\sigma(\lambda) + \frac{dx^\sigma(\lambda)}{d\lambda}\delta\lambda\right] \ ,$$

portanto, pelo vetor no ponto Q paralelo à X^σ ser um vetor em Q, temos a igualdade

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda}(\lambda) + \frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2}\delta\lambda = k\left(\frac{dx^\sigma}{d\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) \ .$$

Sem perda de generalidade podemos fazer $k = [1 + k(\lambda)\delta\lambda]$, pois $\delta\lambda \to 0 \Rightarrow Q \to P$. Divindo a equação por $\delta\lambda$ e cancelando o termo $dx^\sigma/d\lambda$ de cada lado, quando fazemos o limite de $\delta\lambda \to 0$ obtemos a **equação da geodésica**:

$$\boxed{\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = k\frac{dx^\sigma}{d\lambda}} \ . \tag{A.2}$$

Se a curva for parametrizada de um jeito que k desapareça e se existir uma parametrização privilegiada, chamamos o parâmetro utilizado de **parâmetro afim**, geralmente convencionado por s. A equação da geodésica afim se reduz a $\nabla_X X^\sigma = 0$.

Um parâmetro afim s é sempre definido por uma **transformação afim**, $s \to \alpha s + \beta$, onde α e β são constantes. Podemos utilizar esse parâmetro afim para definir o **comprimento afim** da geodésica entre dois pontos P_1 e P_2 por $\int_{P_1}^{P_2} d\tau$. Não é possível comparar o comprimento em diferentes geodésicas sem uma métrica pela arbitrariedade do parâmetro s. Geralmente no lugar de s é utilizado o tempo medido por um observador parado em um sistema de referência, o **tempo próprio** τ.

Para a existência e unicidade do teorema para a equação diferencial ordinária, é dito que cada direção corresponde a um ponto onde existe uma única geodésica passando por ele. Do mesmo modo, qualquer ponto pode ser ligado a qualquer outro ponto, independente da distância existente entre eles, e serem suficientemente "fechados" pela unicidade da geodésica.

Segunda análise

A lagrangeana de uma partícula livre é expressa por:

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} \ ,$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e o ponto denota uma derivada com respeito a λ. Vamos supor que a velocidade seja independente da posição e vice-versa, e que o tensor métrico só dependa explicitamente da posição. A equação de Euler-Lagrange nos diz:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x^\sigma}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = 0 \ .$$

Vamos calcular cada termo da equação acima para obter a equação do movimento. **Primeiro termo**:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x^\sigma}} &= g_{\mu\nu}\delta^\mu_\sigma\dot{x^\nu} + g_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\delta^\nu_\sigma \\ &= 2g_{\mu\sigma}\dot{x^\mu} \ ,\end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x^\sigma}} = 2\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\dot{x^\nu}\dot{x^\mu} + 2g_{\mu\sigma}\ddot{x^\mu} \ .$$

Podemos reescrever o primeiro termo do lado direito da equação acima como:

$$2\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\dot{x^\nu}\dot{x^\mu} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\dot{x^\nu}\dot{x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{dx^\mu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} \ ,$$

disso segue que:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x^\sigma}} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\dot{x^\nu}\dot{x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} + 2g_{\mu\sigma}\ddot{x^\mu} \ .$$

O **segundo termo** da equação de Euler-Lagrange é mais simples,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} \ .$$

Substituindo os dois termos na equação de Euler-Lagrange temos

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\dot{x^\nu}\dot{x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} + 2g_{\mu\sigma}\ddot{x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} = 0 \ .$$

Trocando-se a posição de dois termos e dividindo tudo por 2,

$$g_{\mu\sigma}\ddot{x^\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} = 0,$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$\ddot{x^\sigma} + \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} = 0.$$

Considerando que o símbolo de Christoffel é definido por

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) \ . \tag{A.3}$$

Notamos um símbolo de Christoffel no segundo termo, portanto, temos novamente a equação de geodésica (A.2).

A.2 Curvatura

Riemann introduziu uma maneira de descrever completamente a curvatura em qualquer número de dimensões mediante o **tensor de Riemann**, um tensor que seja a generalização da curvatura de Gauss em quatro dimensões, ele expressa o quanto uma variedade é não plana, ou seja, o quanto uma variedade se curva. O tensor de Riemann é definido por derivadas covariantes,

$$\boxed{R^\rho_{\sigma\mu\nu}V^\sigma \equiv [\nabla_\mu, \nabla_\nu V^\rho]} \ .$$

Substituindo-se a definição de derivada covariante na equação acima podemos escrever o tensor curvatura de Riemann como

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \tag{A.4}$$

O tensor de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:

- anti-simetria entre o primeiro par de índices,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \ . \tag{A.5}$$

- anti-simetria entre o último par de índices

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \ . \tag{A.6}$$

- invariância se trocar o primeiro par de índices com o último

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \ . \tag{A.7}$$

- identidade envolvendo a soma de permutações cíclicas nos três últimos índices

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \ . \tag{A.8}$$

A última propriedade pode ser vista lembrando-se que

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0, \tag{A.9}$$

o que implica em:

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0. \tag{A.10}$$

Os colchetes representam um tensor anti-simétrico.

Expandindo o lado esquerdo de (A.10) temos (A.8),

$$\begin{aligned} R_{\rho[\sigma\mu\nu]} &= \frac{1}{3!}\left[R_{\rho\sigma\mu\nu} - R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\mu\nu\sigma} - R_{\rho\nu\mu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} - R_{\rho\sigma\nu\mu}\right] \\ &\overset{A.6}{=} \frac{1}{6}\left(2R_{\rho\sigma\mu\nu} + 2R_{\rho\mu\nu\sigma} + 2R_{\rho\nu\sigma\mu}\right) \\ &\overset{A.8}{=} 0 \ . \end{aligned} \tag{A.11}$$

Utilizando as quatro propriedade citadas acima, é possível diminuir o tensor de Riemann com 256 componentes para apenas 20 componentes. Estamos considerando o espaço-tempo quadridimensional.

- O tensor de Riemann possui uma propriedade de simetria diferencial, ela é chamada de **identidade de Bianchi**

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0. \tag{A.12}$$

O **tensor de Ricci** é definido por

$$\boxed{R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}} \ , \tag{A.13}$$

uma contração tensorial do tensor de Riemann. É fácil notar por (A.7) que o tensor de Ricci é um tensor simétrico.

Podemos definir o **escalar de Ricci** como o traço do tensor de Ricci, isso é

$$\mathcal{R} = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \ . \tag{A.14}$$

Por último definimos o **tensor de Einstein**

$$\boxed{G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu}} \ , \tag{A.15}$$

que satisfaz

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \ ,$$

pois tanto o tensor de Ricci quanto o tensor métrico são simétricos.

A.3 Equações de Einstein

As equações de campo de Einstein, mais conhecidas simplesmente por **equações de Einstein**, são escritas como

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}} \ , \tag{A.16}$$

onde G é a **constante gravitacional de Newton** e $T_{\mu\nu}$ o **tensor energia-momento**. Elevando o índice μ e contraindo em ν as equações de Einstein (A.16), temos

$$\begin{array}{rcl} g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} & = & 8\pi G g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \Rightarrow \\ G^{\mu}{}_{\mu} & = & 8\pi G T^{\mu}{}_{\mu} \ . \end{array}$$

Abrindo o tensor de Einstein (A.15),

$$\mathcal{R} - \frac{1}{2}\mathcal{R} g^{\mu}{}_{\mu} = 8\pi G \mathcal{T} \ ,$$

onde $T^{\mu}{}_{\mu} \equiv \mathcal{T}$. Para o espaço-tempo sabemos que $g^{\mu}{}_{\mu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$, portanto o escalar de Ricci é dado por

$$\mathcal{R} = -8\pi G \mathcal{T} \ .$$

Substituindo nas equações de Einstein (A.16) o escalar de Ricci, temos que o tensor de Ricci é escrito por

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{T} g_{\mu\nu} \right)} \ . \tag{A.17}$$

Essa equação relaciona a geometria do espaço-tempo com a distribuição de energia e massa.

A.4 Equações de Friedmann

Considerando as equações obtidas no Apêndice B, podemos substituir os valores de $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$, e o tensor de energia-momento de um fluido ideal nas equações de Einstein (A.16) e obter as equações de Friedmann para um universo curvo. Tomando a evolução da energia nas equações de Einstein, índices 00, temos a **primeira equação de Friedmann**

$$\boxed{H^2 = \frac{1}{3M_P^2}\rho - \frac{\kappa}{a^2}} \ , \tag{A.18}$$

onde $Ht \equiv \dfrac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ é o parâmetro de Hubble e $a(t)$ é o fator de escala da métrica.

Considerando agora apenas os elementos espaço-espaço das equações de Einstein,

$$G_{ii} = R_{ii} - \frac{1}{2}Rg_{ii} = 8\pi G T_{ii} \ .$$

Como $g_{ii} = a^2$, $R_{ii} = 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}$ e $T_{ii} = Pa^2$, em um universo em expansão, temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi GP \ .$$

Aplicando a primeira equação de Friedmann (A.18) na equação acima obtemos a **equação de aceleração de Friedmann** ou **segunda equação de Friedmann**

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_P^2}(\rho + 3P)} \ , \tag{A.19}$$

onde $M_P \equiv \dfrac{1}{\sqrt{8\pi G}}$, $\rho = \sum_i \rho_i$ é a massa de Planck reduzida, soma da densidade de cada componente do universo e $P = \sum_i P_i$, soma da pressão de cada componente do universo.

Podemos reescrever as equações (A.18) e (A.19) como

$$\boxed{H(t)^2 = \frac{1}{3M_P^2}\rho - \frac{\kappa}{a^2}} \ , \tag{A.20}$$

e

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{6M_P^2}\left(\rho + 3P\right) = 0} \ . \tag{A.21}$$

Definindo a fração energética ou **densidade relativa de energia** do i-ésimo componente como $\Omega_i \equiv \dfrac{\rho_i}{3M_P^2 H^2}$, podemos reescrever a (A.18) como

$$\Omega_\kappa = 1 - \Omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_{cr}} \ , \tag{A.22}$$

onde $\Omega \equiv \sum_i \Omega_i$, e Ω_κ representa a **densidade de curvatura**,

$$\Omega_\kappa \equiv -\frac{\kappa}{H^2 a^2} \ ,$$

e ρ_{cr} a **densidade crítica**,

$$\rho_{cr} \equiv 3M_P^2 H_0^2 \ .$$

Considerando a primeira equação de Friedmann escrita em função das densidades de energia e da curvatura (A.22), vamos ver os três tipos de universos possíveis

• Universo fechado: retas paralelas convergem a um ponto. O espaço pode ser interpretado como uma hipersuperfície esférica, de raio $a(t)$, num espaço euclidiano de quatro dimensões. $\kappa = 1$, $\Omega_\kappa < 0$ e $\rho > \rho_{cr}$.

• Universo aberto: retas paralelas divergem. O espaço pode ser interpretado como uma hipersuperfície esférica, num espaço pseudo-euclidiano de quatro dimensões. $\kappa = -1$, $\Omega_\kappa > 0$ e $\rho < \rho_{cr}$.

• Universo plano: retas paralelas continuam sendo paralelas. O espaço é simplesmente o euclidiano. $\kappa = 0$, $\Omega_\kappa = 0$ e $\rho = \rho_{cr}$.

A distribuição de matéria claramente determina a geometria espacial do nosso universo, agrupando,

$$\Omega > 1 \quad \text{ou} \quad \rho > \rho_c \to \kappa = +1 \ , \tag{A.23}$$
$$\Omega = 1 \quad \text{ou} \quad \rho = \rho_c \to \kappa = 0 \ , \tag{A.24}$$
$$\Omega < 1 \quad \text{ou} \quad \rho < \rho_c \to \kappa = -1 \ , \tag{A.25}$$

onde Ω é um parâmetro de densidade adimensional. Observações têm mostrado que atualmente o universo é muito próximo de uma simetria geometricamente plana ($\Omega \simeq 1$) [30]. Isso é atualmente um resultado natural da inflação do começo do universo [6].

A.5 Equação da continuidade

A conservação das equações para um fluido perfeito e homogêneo na relatividade especial é a equação da continuidade $\partial\rho/\partial t = 0$ e a equação de Euler $\partial P/\partial x^i = 0$. Podemos juntar essas duas equações utilizando o tensor energia-momento

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \ .$$

Podemos generalizar esse resultado para a relatividade geral, a diferença será que no lugar da derivada parcial existirá uma derivada covariante $\partial_\mu \to \nabla_\mu$. Em virtude das identidades de Bianchi o tensor energia-momento é conservado. Calculando essa conservação com a derivada covariante, utilizando a métrica de FLRW temos a **equação da continuidade** ou **equação de estado**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H(t)\cdot(\rho + P) = 0 \ . \tag{A.26}$$

Essa equação relaciona a pressão com a densidade de algum componente do universo. Vamos definir por w o **parâmetro da equação da continuidade**,

$$\boxed{w = \frac{P}{\rho}} \ .$$

Substituindo o parâmetro w na equação de estado (A.26), podemos reescrever essa equação como

$$\boxed{\dot{\rho}_i + 3H(t) \cdot (1 + w_i)\rho_i = 0} \ . \tag{A.27}$$

Estas equações só são válidas se supusermos que os componentes do Universo *não interagem.*

É possível integrar a equação (A.27) para obter ρ em função de a e ω,

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}.$$

Outra forma de obter a equação de estado (A.27) é derivar em relação ao tempo as equações de Friedmann.

Em cosmologia assume-se que cada componente da matéria satisfaz sua própria equação de conservação, o que não segue diretamente das equações do campo, então deve ser assumido ou derivado separadamente.

A.5.1 Nosso universo e o tensor energia-momento para fluidos ideais

Evidências observacionais nos mostram que o nosso universo está em expansão acelerada, da mesma forma que nos mostram que ele respeita o princípio cosmológico, portanto, podemos representá-lo pela métrica (1.1)[1]. Iremos agora deixar de lado as aplicações da RG e estudar os componentes que formam o nosso universo.

Pelo fato do universo respeitar o princípio cosmológico, podemos assumir que em grandes escalas o tensor energia-momento toma a mesma forma que a de um fluido ideal. Um *fluido ideal* é definido como tendo cada ponto se movendo com uma velocidade $\vec{v}$, e um observador que se encontra entre o fluido viaja com a mesma velocidade. Tal observador vê o fluido como sendo isotrópico. Isso ocorre pois pequenas colisões entre as partículas do fluido são imperceptíveis para o observador. Vamos supor que estamos em um quadro de referência no qual o fluido está em repouso para algum tempo e posição particular. Em um ponto do espaço-tempo, a hipótese de um fluido ideal nos fornece um tensor energia-momento com as seguintes características esfericamente simétricas

$$T'^{ij} = P\delta^{ij} \ ,$$

$$T'^{i0} = T^{0i} = 0 \ ,$$

$$T'^{00} = \rho \ .$$

[1]Edwin Hubble demonstrou que todas as galáxias e objetos astronômicos distantes estão se afastando do nós (lei de Hubble) como previa uma expansão universal. Utilizando o desvio para o vermelho de seu espectro eletromagnético para estimar a distância e a velocidade de objetos remotos no espaço, demostrou que além de todos os objetos estarem se afastando de nós, sua velocidade é diretamente proporcional a sua distância, uma característica da métrica de expansão. Estudos posteriores vieram a demonstrar que a expansão era extremamente isotrópica e homogênea, ou seja, não parece ter um ponto especial como "centro", mas parece universal e independente de qualquer ponto central fixo.

Os coeficientes P e ρ são chamados respectivamente de *pressão* e *densidade de energia própria*. Agora vamos utilizar como referência o laboratório, e supor que o fluido nesse quadro parece se mover com a velocidade $\vec{v}$. O tensor energia-momento se transforma segundo a transformação de coordenadas entre coordenadas comóveis x'^{β} e as coordenadas do laboratório x^{α}, conforme

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}(\vec{v})\Lambda^{\beta}{}_{\sigma}(\vec{v})T'^{\gamma\sigma} \ ,$$

onde Λ contém os parâmetros de transformação, portanto,

$$T^{ij} = P\sigma^{ij} + (P+\rho)\frac{v^i v^j}{1-\vec{v}^2} \ , \tag{A.28}$$

$$T^{i0} = (P+\rho)\frac{v^i}{1-\vec{v}^2} \ , \tag{A.29}$$

$$T^{00} = \frac{(P+\rho\vec{v}^2)}{1-\vec{v}^2} \ . \tag{A.30}$$

Juntando as equações (A.28) - (A.30), temos a seguinte equação para o tensor energia-momento para fluidos ideais

$$T^{\alpha\beta} = P\eta^{\alpha\beta} + (P+\rho)u^{\alpha}u^{\beta} \ ,$$

onde u^{α} é a quadrivelocidade de um fluido, $u^0 = (1-\vec{v}^2)^{-1/2}$, $\vec{u} = \vec{v}u^0$. É comum definir um escalar $\gamma \equiv u^0$.

O tensor contravariante acima levando em conta a gravitação é representado por

$$\boxed{T^{\mu\nu} = Pg^{\mu\nu} + (P+\rho)u^{\mu}u^{\nu}} \ , \tag{A.31}$$

onde u^{μ} é um valor local para $dx^{\mu}/d\tau$ de um elemento de um fluido comóvel, fluido em repouso no referencial. Note que a pressão e a densidade são sempre medidas por um observador num local inercial em relação ao movimento do fluido, e são sempre escalares. O tensor energia-momento é conservado covariantemente ($\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$).

Apêndice B

Escalar de curvatura para a métrica de FLRW plana e curva

B.1 Componentes das equações de Einstein com o espaço-tempo plano

Vamos utilizar a seguinte métrica para um espaço plano:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right] \ , \tag{B.1}$$

onde $a(t)$ é o fator de escala.

Símbolos de Christoffel

Vamos fixar o índice superior nos símbolos de Christoffel como sendo igual a zero. Pelo fato do tensor métrico de (B.1) ser diagonal, apenas as componentes $g^{0\sigma}$ com $\sigma = 0$ serão não nulas. Considerando apenas as componente não nulas dos símbolos de Christoffel (A.3), nos restam:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right).$$

Os coeficientes $g_{0\mu} = g_{\mu 0}$ são constantes, portanto apenas as derivadas parciais nos termos espaciais, g_{ij}, serão diferentes de zero,

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0},$$

onde é fácil perceber que $\partial g_{ij}/\partial t = -2\delta_{ij} a\dot{a}$. Obtemos assim:

$$\Gamma^0_{ij} = \delta_{ij} a\dot{a}. \tag{B.2}$$

Agora deixaremos o índice superior de Γ variar apenas na parte espacial, ou seja, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^i_{\mu\nu}$. Utilizando o fato de que o tensor métrico é diagonal, temos $g^{ii} = -a^2$. Sendo assim,

$$\Gamma^i_{\mu\nu} = \frac{-1}{2a^2}\left(\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}\right).$$

Nenhum coeficiente do tensor métrico depende da parte espacial, portanto o último termo, derivada espacial, é nulo. Os símbolos de Christoffel são agora simétricos, para que ele não seja nulo precisamos ter apenas derivadas temporais, ou seja, $\mu = i$ ou $\nu = i$. Vamos supor que $\nu = 0$,

$$\Gamma^i_{\mu 0} = \frac{-1}{2a^2}\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^0}. \tag{B.3}$$

Novamente utilizando o fato do tensor métrico ser simétrico, temos:

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \delta^i_j \frac{\dot{a}}{a}.$$

Tendo todos os símbolos de Christoffel podemos obter a equação de Einstein, para isso devemos calcular agora o tensor de Ricci (A.13) e após isso o escalar de Ricci (A.14).

Tensor de Ricci

Vamos tomar inicialmente a componente tempo-tempo do tensor de Ricci,

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{00}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\lambda 0}}{\partial x^0} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 0}.$$

Como os símbolos de Christoffel com índices inferiores iguais a zero são nulos, o primeiro e o terceiro termo da equação acima são nulos. O segundo termo pode ser calculado a partir de (B.3):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\lambda 0}}{\partial x^0} &= -\delta_{ii}\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\\ &= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right),\end{aligned}$$

lembrando que pela convenção de Einstein os índices repetidos indicam uma soma, ou seja, $\delta_{ii} = 3$. Da mesma forma utilizada para calcular o primeiro termo faremos para calcular o quarto,

$$\begin{aligned}-\Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 0} &= -\Gamma^i_{0j}\Gamma^j_{i0}\\ &= -\delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}\delta_{ji}\frac{\dot{a}}{a}\\ &= -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Juntando todos os termos calculados na componente tempo-tempo do tensor de Ricci, obtemos que:

$$\boxed{R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}}. \tag{B.5}$$

Pelo fato de só existir dependência temporal nas componentes do tensor métrico, os síbolos de Christoffel com os dois índices inferiores iguais a zero é nulo. Outras componentes nulas são as que possuem termos mistos de tempo e espaço nos índices inferiores, isso por (B.2) e (B.3). Vamos calcular agora as componentes espaço-espaço.

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{ij}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{i\lambda}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{ij} - \Gamma^{\lambda}_{j\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda i}.$$

Vamos calcular os quatro termos calculando cada um separadamente. A somatória do **primeiro termo** pode ser aberta em parte espacial e temporal,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^{0}_{ij}}{\partial x^{0}} + \underbrace{\frac{\partial \Gamma^{k}_{ij}}{\partial x^{k}}}_{=0} &= \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x^{0}}(a\dot{a}) \\
&= \delta_{ij}(\dot{a}^2 + a\ddot{a}),
\end{aligned}$$

onde o índice k é espacial. O **segundo termo** do tensor de Ricci é igual a zero, pois

$$\Gamma^{\lambda}_{i\lambda} = \underbrace{\Gamma^{0}_{i0}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^{j}_{ij}}_{=0} = 0,$$

mesmo se $\Gamma^{\lambda}_{i\lambda} \neq 0$, deveríamos ter $\partial\Gamma^{\lambda}_{i\lambda}/\partial x^{j} = 0$ pois os termos só dependem do tempo. Para calcular o **terceiro termo**, vamos lembrar que (B.2) nos diz que as componentes com $\sigma = 0$ são não-nulas, portanto

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{ij} &= \Gamma^{k}_{k0}\Gamma^{0}_{ij} \\
&= \delta_{kk}\frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}a\dot{a} \\
&= 3\delta_{ij}\dot{a}^2.
\end{aligned}$$

O mesmo procedimento será utilizado para calcular o **quarto termo**. Vamos primeiro abrir a somatória dos símbolos de Christoffel em parte espacial e temporal,

$$-\Gamma^{\lambda}_{j\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda i} = -\Gamma^{\lambda}_{j0}\Gamma^{0}_{\lambda i} - \Gamma^{\lambda}_{jk}\Gamma^{k}_{\lambda i},$$

agora, utilizando (B.3), temos que no primeiro termo do lado direito da equação acima devemos trocar λ por k, enquanto que no segundo termo, do mesmo lado, devemos substituir i por 0. Fazendo essas trocas e utilizando (B.2) e (B.3),

$$\begin{aligned}
-\Gamma^{\lambda}_{j\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda i} &= -\left(\Gamma^{k}_{j0}\Gamma^{0}_{ki} + \Gamma^{0}_{jk}\Gamma^{k}_{0i}\right) \\
&= -\left(\delta_{jk}\frac{\dot{a}}{a}\delta_{ik}\dot{a}a + \delta_{jk}\dot{a}a\delta_{ik}\frac{\dot{a}}{a}\right) \\
&= -2\delta_{ij}\dot{a}^2.
\end{aligned}$$

Juntando os quatro termos do tensor de Ricci espaço-espaço, temos:

$$\boxed{R_{ij} = \delta_{ij}\left(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)}. \tag{B.6}$$

Portanto, o tensor de Ricci é descrito por (B.5) e (B.6).

Escalar de Ricci

Para calcular o escalar de Ricci devemos contrair o tensor de Ricci, calculado acima, da seguinte forma:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\ .$$

Fazendo esse cálculo matricialmente obtemos para o escalar de Ricci,

$$\boxed{\mathcal{R} = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]}. \tag{B.7}$$

B.2 Componentes das equações de Einstein com o espaço-tempo curvo

Iremos nessa seção realizar os mesmos passos realizados na seção anterior para um espaço-tempo plano, porém agora, para um espaço-tempo curvo. Foi adicionado o tempo de curvatura κ no elemento de linha e as coordenadas esféricas, resultando em um elemento de linha representado por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2)\right],$$

Símbolos de Christoffel

Vamos primeiramente fixar o índice superior dos símbolos de Christoffel como sendo iguais a 0. Nesse caso, devemos ter μ, $\nu = i$, j, pois $\mu = \nu = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu}$ independente do tempo. Devemos nos lembrar novamente que o tensor métrico é simétrico, portanto

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{-1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}.$$

Para facilitar os cálculos vamos definir $\alpha_{ij} \equiv -g_{ij}/a^2$, sendo assim,

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij} &= \frac{-1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}(-\alpha_{ij}a^2)\\ &= g_{ij}\frac{\dot{a}}{a},\end{aligned} \tag{B.8}$$

Fixando agora o índice superior dos símbolos em $\imath$, e fixando $\mu = 0$, de (A.3), os símbolos de Christoffel são escritos como:

$$\Gamma^i_{0\nu} = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left(\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^i} \right).$$

É fácil de notar que se $\nu = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{00} = 0$, vamos então fixar $\nu = j$. Temos agora

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} &= \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \\ &= -\frac{\dot{a}}{a} g^{ii} g_{ij} \\ &= \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j. \end{aligned} \tag{B.9}$$

O último caso que devemos calcular é o caso em que o índice superior continua sendo fixado como $\imath$ mas μ agora é fixado como $\jmath$. Novamente devemos ter ν como um índice espacial. Temos então:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right).$$

Após algumas contas temos o resto dos símbolos de Christoffel não nulos:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2}, \quad \Gamma^1_{22} = -r(1 - \kappa r^2), \quad \Gamma^1_{33} = -r sen^2(\theta)(1 - \kappa r^2), \tag{B.10}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^2_{33} = -sen(\theta) cos(\theta), \tag{B.11}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = cot(\theta). \tag{B.12}$$

Tensor de Ricci

Vamos começar utilizando $\mu = \nu = 0$ em $R_{\mu\nu}$. Conhecendo (A.13), temos:

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{\lambda 0} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\lambda_{0\sigma} \Gamma^\sigma_{\lambda 0},$$

onde $\partial_\lambda \equiv \partial / \partial x^\lambda$. Para facilitar a visualização, essa notação será utilizada a partir de agora.

Assim como no universo plano, os símbolos de Christoffel $\Gamma^\sigma_{00} = 0$, portanto o **primeiro** e o **terceiro termo** de R_{00} são nulos. Para calcular o **terceiro termo** vamos utilizar a seguinte relação:

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu \sqrt{|g|}, \tag{B.13}$$

onde $g \equiv det(g_{\mu\nu})$. Calculando o determinante de $g_{\mu\nu}$, temos

$$g = -\frac{a^6 r^4 sen^2(\theta)}{1 - \kappa r^2},$$

portanto o **segundo termo** de R_{00} é escrito por:

$$\begin{aligned}
-\partial_0\left(\frac{\sqrt{-g}}{\partial\ _0}\sqrt{-g}\right) &= -\partial_0\left[\frac{\sqrt{1-\kappa r^2}}{a^3r^2sem(\theta)}\partial_0\left(\frac{a^3r^2sen(\theta)}{\sqrt{1-\kappa r^2}}\right)\right] \\
&= -\partial_0\left(a^{-3}\partial_0 a^3\right) \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a}+3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2.
\end{aligned}$$

O **quarto termo** de R_{00} é calculado por (B.9),

$$\begin{aligned}
-\Gamma^{\lambda}_{0\sigma}\lambda^{\sigma}_{\lambda 0} &= -\Gamma^{i}_{0j}\Gamma^{j}_{0i} \\
&= -\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\delta^i_j\delta^j_i \\
&= -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2.
\end{aligned}$$

Juntando os termos calculados,

$$\boxed{R_{00}=-3\frac{\ddot{a}}{a}}. \tag{B.14}$$

Esse é o mesmo resultado que obtivemos para o espaço-tempo plano. Vamos ver os termos mistos entre espaço e tempo, isto é, R_{0i}. Vamos escrever o tensor de Ricci para esse caso em função dos símbolos de Christoffel,

$$R_{0i}=\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{0i}-\partial_i\Gamma^{\lambda}_{\lambda 0}+\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{0i}-\Gamma^{\lambda}_{i\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda 0}.$$

O **primeiro termo** pode ser aberto (abrir a somatória) em

$$\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{0i}=\partial_0\Gamma^{0}_{0i}+\partial_j\Gamma^{j}_{0i},$$

como $\Gamma^0_{0i}=0$ e o tensor métrico não tem dependência espacial, esse é nulo, $\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{0i}=0$. Utilizando (B.13) podemos escrever o segundo termo como:

$$-\partial_i\Gamma^{\lambda}_{\lambda 0}=-\partial_i\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0\sqrt{-g}\right).$$

Do mesmo argumento utilizado no primeiro termo, temos que o **segundo termo** é nulo. Vamos calcular agora o **terceiro termo**. Abrindo a somatória, podemos reescrever esse termo como:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{0i} &= \Gamma^{k}_{kl}\Gamma^{l}_{0i} \\
&= \Gamma^{k}_{kl}\delta^l_i\frac{\dot{a}}{a} \\
&= \Gamma^{k}_{ki}\frac{\dot{a}}{a}.
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para o **quarto termo**,

$$\begin{aligned}
-\Gamma^{\lambda}_{i\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda i} &= -\underbrace{\Gamma^{0}_{i0}\Gamma^{0}_{00}}_{=0}-\Gamma^{k}_{ij}\Gamma^{j}_{k0} \\
&= -\Gamma^{k}_{ij}\delta^{j}_{k}\frac{\dot{a}}{a} \\
&= -\Gamma^{k}_{ki}\frac{\dot{a}}{a}.
\end{aligned}$$

Juntando os quatro termos calculados aqui vemos que

$$\boxed{R_{i0} = 0},$$

ou seja, não há componte misto espaço-tempo. Para finalizar precisamos calcular as componentes tipo espaço-espaço do tensor de Ricci, R_{ij}. Essa parte é a mais trabalhosa pois depende de todos os índices espacias, cada componente deve ser separada e posteriormente calculada, incluindo os símbolos de Christoffel, pelas (B.8)-(B.12), notamos que vários deles não são nulos. Por este motivo, será apresentado apenas o que deve ser feito, os resultados serão dados.

Devemos separar os quatro termos do tensor de Ricci (A.13) e abrir as somatórias em partes espaciais e temporal, utilizando (B.8) e (B.9) é possível calcular todas as componentes do tensor. Vamos utilizar como exemplo o primeiro termo de tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
\partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{ij} &= \partial_{0}\Gamma^{0}_{ij} + \partial_{k}\Gamma^{k}_{ij} \\
&= \partial_{0}\left(\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}\right) + \partial_{k}\Gamma^{k}_{ij} \\
&= \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right] g_{ij} + \partial_{k}\Gamma^{k}_{ij}.
\end{aligned}$$

Utilizando o mesmo processo nos outros três termos, podemos escrever as componentes espaciais do tensor de Ricci por:

$$R_{ij} = \left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right] + \partial_{k}\Gamma^{k}_{ij} - \partial_{j}\Gamma^{k}_{ki} + \Gamma^{k}_{kl}\Gamma^{l}_{ij} - \Gamma^{k}_{jl}\Gamma^{l}_{jk}. \tag{B.15}$$

Por $g_{\mu\nu}$ ser um tensor diagonal, as únicas componentes de $R_{ij} \neq 0$ são as que possuem índices $i = j = 1, 2, 3$. Vamos calcular o caso em que $i = j = 1$. Abrindo (B.15),

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g_{11}\left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right] + \partial_{1}\Gamma^{1}_{11} - \partial_{1}\left(\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{3}_{31}\right) + \\
&+ \Gamma^{1}_{11}\left(\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{3}_{31}\right) - \left[\left(\Gamma^{1}_{11}\right)^{2} + \left(\Gamma^{2}_{21}\right)^{2} + \left(\Gamma^{3}_{31}\right)^{2}\right]^{2}.
\end{aligned}$$

Sabendo que g_{ij} depende apenas do tempo, podemos utilizar (B.8) e (B.9) para simplificar a equação acima e obter:

$$R_{11} = g_{11}\left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\kappa}{a^2}\right]. \tag{B.16}$$

Fazendo o mesmo para os casos em que $i = j = 2, 3$, temos respectivamente,

$$R_{22} = g_{22}\left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\kappa}{a^2}\right], \tag{B.17}$$

e,

$$R_{33} = g_{33}\left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\kappa}{a^2}\right]. \tag{B.18}$$

Temos então todas as componentes do tensor de Ricci para um espaço-tempo curvo.

Escalar de Ricci

Quando calculamos $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, a parte espacial do tensor métrico incluso em $R_{\mu\nu}$ se cancela com $g^{\mu\nu}$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\ &= g^{00}R_{00} + \left(g^{11}g_{11} + g^{22}g_{22} + g^{33}g_{33}\right)\left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\kappa}{a^2}\right], \end{aligned}$$

portanto,

$$\boxed{\mathcal{R} = 6\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\kappa}{a^2}\right]}. \tag{B.19}$$

Utilizando o escalar de Ricci é possível obter as equações de Friedmann para um espaço-tempo curvo (A.20) e (A.21).

Apêndice C

Ação de Einstein-Hilbert

Existe um grande interesse na utilização da Lagrangeana dentro da Física, a partir dela, é possível obter as equações de movimento de um dado sistema. A ação de Einstein-Hilbert é uma forma de obtermos as Eqs. de Einstein a partir do princípio de mínima ação. Essa ação pode ser escrita como

$$S_{EH} = \frac{1}{2\,\kappa}\int \sqrt{-g}R\,\mathrm{d}^4x\,, \tag{C.1}$$

onde g é o determinante do tensor métrico, R é o escalar de curvatura de Ricci, e $\kappa = 8\pi G$, onde G é a constante gravitacional de Newton.

Se quisermos adicionar o eletromagnetismo na Relatividade Geral, só precisamos somar a Lagrangeana do eletromagnetismo a Lagrangeana de Einstein-Hilbert.

Assumindo a existência da constante cosmológica e de uma componente de matéria (matéria bariônica e/ou matéria escura), vamos obter as equações de movimento e o tensor energia momento do sistema. Nesse caso, a Lagrangeana pode ser escrita da forma

$$S = \int \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m\right]\,\mathrm{d}^4x\,, \tag{C.2}$$

onde assumimos que $\kappa = 1$ e que a densidade Lagrangeana da matéria depende da métrica e suas derivadas, e do campo escalar e suas derivadas, ou seja

$$\mathcal{L}_m \equiv \mathcal{L} = \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \partial_\sigma g^{\mu\nu}, \phi, \partial_\sigma \phi)\,,$$

a derivada covariante da métrica se anula, por isso a Lagrangeana depende explicitamente só das derivadas parciais.

Vamos, primeiramente, variar a acão com respeito ao campo para obtermos a Eq. de Euler-Lagrange, e depois com respeito à métrica para definirmos o tensor energia-momento.

1. Variação com respeito ao campo

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left\{ \delta \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \right] + \delta \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \right\} \mathrm{d}^4x \\ &= \int \left\{ \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi} \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \right] + \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \right\} \delta\phi \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)} \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \right] + \frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \right\} (\partial_\sigma\phi) \right\} \mathrm{d}^4x \\ &= \int \left[\frac{\delta}{\delta\phi} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \delta\phi + \frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \delta(\partial_\sigma\phi) \right] \mathrm{d}^4x \,. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Para o caso em que a métrica não depende do campo escalar e nem da sua derivada

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta\phi} = 0 \,, \quad \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta(\partial_\sigma\phi)} = 0 \,,$$

fazendo $\delta(\partial_\sigma\phi) = \partial_\sigma(\delta\phi)$, podemos escrever

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\delta}{\delta\phi}\mathcal{L}_m \right) \delta\phi + \left(\frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)}\mathcal{L}_m \right) \partial_\sigma(\delta\phi) \right] \mathrm{d}^4x \,, \tag{C.4}$$

lembrando que

$$\left(\frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)}\mathcal{L}_m \right) \partial_\sigma(\delta\phi) = \partial_\sigma \left[\left(\frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)}\mathcal{L}_m \right) \delta\phi \right] - \partial_\sigma \left(\frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)}\mathcal{L}_m \right) \delta\phi \,, \tag{C.5}$$

podemos fazer uma integração por partes e obter

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left\{ \left(\frac{\delta}{\delta\phi}\mathcal{L}_m \right) \delta\phi + \partial_\sigma \left[\left(\frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)}\mathcal{L}_m \right) \delta\phi \right] - \partial_\sigma \left(\frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)}\mathcal{L}_m \right) \delta\phi \right\} \mathrm{d}^4x \,, \tag{C.6}$$

o que implica em

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\delta}{\delta\phi}\mathcal{L}_m \right) - \partial_\sigma \left(\frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)}\mathcal{L}_m \right) \right] \delta\phi \, \mathrm{d}^4x \,. \tag{C.7}$$

Se quisermos minimizar a variação da ação obtemos as equações de Euler-Lagrange

$$\delta S = 0 \Rightarrow \tag{C.8}$$

$$\boxed{\left(\frac{\delta}{\delta\phi}\mathcal{L}_m \right) - \partial_\sigma \left(\frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma\phi)}\mathcal{L}_m \right) = 0 \,.} \tag{C.9}$$

2. Variando agora com respeito ao tensor métrico e suas derivadas

$$\delta S = \int \left\{ \left\{ \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \right] + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \right\} \delta g^{\mu\nu} \right.$$
$$\left. + \left\{ \frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma g^{\mu\nu})} \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \right] + \frac{\delta}{\delta(\partial_\sigma g^{\mu\nu})} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \right\} (\partial_\sigma g^{\mu\nu}) \right\} \mathrm{d}^4 x \,. \quad \text{(C.10)}$$

Vamos utilizar a Eq. (4.71) para escrever

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' \mathcal{L}_m = \left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m \right) - \partial_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma g^{\mu\nu})} \mathcal{L}_m \right) \,,}$$

e dessa forma

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \right] + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \right\} \delta g^{\mu\nu} \, \mathrm{d}^4 x$$
$$= \int \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' R + \frac{(R-2\Lambda)}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' \sqrt{-g} \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \right\} \delta g^{\mu\nu} \, \mathrm{d}^4 x \,, \quad \text{(C.11)}$$

Minimizando a ação, $\delta S = 0$, obtemos

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' R + \frac{(R-2\Lambda)}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' \sqrt{-g} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right)} \,. \quad \text{(C.12)}$$

Baseado nas contas que fizemos para o caso da variação do campo escalar, vamos encobrir a variação com respeito às derivadas do tensor métrico, $\delta\partial_\sigma g^{\mu\nu}$, dentro da variação do tensor métrico, $\delta g^{\mu\nu}$. O que temos agora é o termo do lado esquerdo das equações de Euler-Lagrange. Por simplicidade não utilizaremos mais a linha, $'$.

A partir da equação (C.12) definimos o tensor energia momento,

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}' \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right)$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) - \partial_\sigma \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\sigma g^{\mu\nu}\right)} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \right) \right] \,. \quad \text{(C.13)}$$

É importante deixar claro que a variação $\delta/\delta g^{\mu\nu}$ continua seguindo o método variacional, o que fizemos foi escrever esta variação explicitamente com derivadas de funções e não variação de funções, isso para facilitar as contas. Por simplicidade não utilizaremos mais a linha $'$.

Vamos calcular o lado esquerdo da Eq. (C.12), para isso precisamos da variação do escalar de Ricci e da raiz da diagonal da métrica.

- Lembrando que

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \,, \quad \text{(C.14)}$$

variando a equação acima temos

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu(\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \partial_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma}) + (\delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda})\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}) - (\delta\Gamma^\rho_{\nu\lambda})\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}) \,, \quad \text{(C.15)}$$

Como

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) = \partial_\lambda(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda}(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}(\delta\Gamma^\rho_{\sigma\mu}) - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}(\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma})\,, \tag{C.16}$$

podemos notar que

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu(\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma})\,. \tag{C.17}$$

O tensor de Ricci é escrito em função do tensor de Riemann por

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}\,, \tag{C.18}$$

assim

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu})\,. \tag{C.19}$$

Para finalizar, o escalar de Ricci é escrito como

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,, \tag{C.20}$$

dessa forma, sua variação pode ser obtida por

$$\begin{aligned}\delta R &= (\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\\ &= (\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\left[\nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu})\right]\,,\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$g^{\mu\nu}\left[\nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu})\right] = \nabla_\sigma\left[g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}) - (\nabla_\sigma g^{\mu\nu})\left[\nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu})\right]\right]\,, \tag{C.22}$$

como

$$\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0,$$

temos

$$\delta R = (\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \nabla_\sigma\left[g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu})\right]\,. \tag{C.23}$$

Quando formos integrar δR o segundo termo do lado direito da equação acima representa um termo de borda que no infinito é nulo. Assim,

$$\boxed{\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}}\,. \tag{C.24}$$

- Para calcularmos a Eq. (C.11), só precisamos de $\delta\sqrt{-g}/\delta g^{\mu\nu}$, para isso vamos escrever o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ como uma matriz M. Sabemos que

$$\mathrm{Tr}(\ln\, M) = ln(\det M), \tag{C.25}$$

portanto,

$$\delta(\mathrm{Tr}(\ln\, M)) = \frac{\delta M}{\det M}\,. \tag{C.26}$$

O lado esquerdo da equação acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \delta(\mathrm{Tr}(\ln\, M)) &= \mathrm{Tr}(\delta(\ln\, M)) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\frac{\delta M}{M}\right) . \end{aligned} \tag{C.27}$$

Assim, a Eq. (C.26) nos fornece a fórmula de Jacobi

$$\delta g = g\, g^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} \, . \tag{C.28}$$

Utilizando a fórmula de Jacobi deduzida acima, temos

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{-1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} \, , \end{aligned} \tag{C.29}$$

o que implica em

$$\boxed{\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}} . \tag{C.30}$$

Após uma pequena variação na métrica da forma

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \qquad \text{e} \qquad g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \; , \tag{C.31}$$

a relação

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho} \tag{C.32}$$

deve continuar válida. Então

$$(g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu})(g_{\nu\rho} + \delta g_{\nu\rho}) = \delta^{\mu}{}_{\rho} \; , \tag{C.33}$$

$$\delta^{\mu}{}_{\rho} + g^{\mu\nu}\, \delta g_{\nu\rho} + \delta g^{\mu\nu}\, g_{\nu\rho} + \mathcal{O}(\delta^2) = \delta^{\mu}{}_{\rho} \; , \tag{C.34}$$

o que implica em

$$g^{\mu\sigma}\, \delta g_{\sigma\rho} = -\delta g^{\mu\nu}\, g_{\nu\rho} \; , \tag{C.35}$$

Multiplicando os dois lados por $g^{\gamma\nu}$ e lembrando que $g^{\gamma\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\gamma}{}_{\rho}$, temos

$$\boxed{\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\rho}} \; . \tag{C.36}$$

Assim

$$g^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} \, . \tag{C.37}$$

Juntando os resultados da Eq.(C.13), Eq.(C.24) e Eq.(C.30) na variação da ação (C.12), obtemos as conhecidas equações de Einstein para um universo que aceita a constante cosmológica

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, R + \Lambda\, g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}} . \tag{C.38}$$

Apêndice D

Campo escalar

Como exemplo do cálculo da variação de uma Lagrangeana, vamos utilizar a Lagrangeana de um campo escalar com parte imaginária não nula

$$\mathcal{L} = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\phi - m\bar{\phi}\phi\,, \tag{D.1}$$

onde m é a massa do campo ϕ.

Para calcular as equações de movimento desse sistema, precisaremos dos seguintes termos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m\bar{\phi}\,,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = -g^{\mu\nu}\partial_\nu\bar{\phi}\,,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\phi\,,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma g^{\mu\nu})} = 0\,.$$

A partir da equação de Euler-Lagrange para o campo temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= -m\bar{\phi} + \partial_\mu(g^{\mu\nu}\partial_\nu\bar{\phi}) \\ &= \partial^\mu\partial_\mu\bar{\phi} - m\bar{\phi} + \partial_\mu(g^{\mu\nu})\partial_\nu\bar{\phi}\,.\end{aligned} \tag{D.2}$$

Utilizando que

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}' = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - \partial_\sigma\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\sigma g^{\mu\nu})}\,, \tag{D.3}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma g^{\mu\nu})} + \text{Diferença}\,, \tag{D.4}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}' = -\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\phi\,, \tag{D.5}$$

de

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta(\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{D.6}$$

temos

$$\boxed{T_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\phi}\partial_\beta\phi + m\bar{\phi}\phi)}\,, \tag{D.7}$$

onde utilizamos a (4.85).

Aqui é importante notar que o primeiro termo de $T_{\mu\nu}$ não é proporcional ao tensor métrico, ou seja, é possível que exista uma componente não nula de $T_{\mu\nu}$ em que a mesma componente de $g_{\mu\nu}$ será nula.

O tensor energia-momento com os índices contravariantes é obtido a partir do $T_{\mu\nu}$ por

$$T^{\sigma\gamma} = g^{\sigma\mu}g^{\gamma\nu}T_{\mu\nu} = 2g^{\sigma\mu}g^{\gamma\nu}\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\phi - g^{\sigma\gamma}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\phi}\partial_\beta\phi - mg^{\sigma\gamma}\bar{\phi}\phi \tag{D.8}$$

Pela propriedade da simetria do tensor energia-momento, podemos escrever

$$2g^{\sigma\mu}g^{\gamma\nu} = g^{\sigma\mu}g^{\gamma\nu} + g^{\sigma\mu}g^{\gamma\nu} \tag{D.9}$$

$$2g^{\sigma\mu}g^{\gamma\nu} = g^{\sigma\mu}g^{\gamma\nu} + g^{\gamma\mu}g^{\sigma\nu}, \tag{D.10}$$

assim

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\partial_\alpha\bar{\phi}\partial_\beta\phi - mg^{\mu\nu}\bar{\phi}\phi}\,. \tag{D.11}$$

D.1 Equação de movimento campo escalar real

A fim de obter as equações de movimento do campo escalar em até a primeira ordem de perturbação, na métrica e no campo, a partir de $\nabla_\mu T^\mu{}_0$, consideramos um sistema que representa um campo escalar $\phi(t)$ em um potencial $V(\phi)$ descrito pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2}\partial^\mu\phi(t)\partial_\mu\phi(t) + V(\phi)\,. \tag{D.12}$$

Vamos utilizar a métrica do background como a métrica de FLRW no gauge síncrono

$$g^{(0)}_{\mu\nu} = -dt^2 + a^2\delta_{ij}dx^i dx_j\,. \tag{D.13}$$

Escrevemos

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \tag{D.14}$$

onde a métrica perturbada é

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} = a^2(t)\,\frac{h(x^\mu)}{3}\delta_{ij}dx^i dx^j\,, \tag{D.15}$$

temos

$$g_{\mu\nu} = -dt^2 + a^2(t)\left(1 + \frac{h(x^\mu)}{3}\right)\delta_{ij}dx^i dx^j\,. \tag{D.16}$$

Expandindo $h_{\mu\nu}$ em até a primeira ordem de perturbação considerando que $h << 1$, obtemos a métrica contravariante

$$g^{\mu\nu} = -dt^2 + a^2(t)\left(1 - \frac{h(x^\mu)}{3}\right)\delta_{ij}dx^i dx^j\,. \tag{D.17}$$

O tensor métrico com os índices mistos é calculado por

$$\begin{aligned} g^\mu{}_\nu &= g_{\alpha\nu}\,g^{\mu\alpha} \\ &= g_{0\nu}\,g^{\mu 0} + g_{1\nu}\,g^{\mu 1} + g_{2\nu}\,g^{\mu 2} + g_{3\nu}\,g^{\mu 3} \\ &= (-1)\delta_{0\nu}(-1)\delta^{\mu 0} + \left[a^2\left(1+h/3\right)\right]\left[a^2\left(1+h/3\right)\right]^{-1}\left(\delta_{1\nu}\,\delta^{\mu 1} + \delta_{2\nu}\,\delta^{\mu 2} + \delta_{3\nu}\,\delta^{\mu 3}\right)\,, \end{aligned} \tag{D.18}$$

portanto

$$g^\mu{}_\nu = \mathbf{1}^\mu{}_\nu \tag{D.19}$$

Como já foi na Eq. (D.7), o tensor energia momento é calculado por

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\phi\,\partial_\nu - g^\mu{}_\nu\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right]\,. \tag{D.20}$$

Enquanto que o primeiro termo faz com que seja possível $T^\mu{}_\nu$ mesmo com $g^\mu{}_\nu$, a componente $g^\mu{}_\nu$ faz com que o termo $\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)$ só exista na diagonal.

Podemos agora perturbar os termos da métrica na Eq. acima, mas optei por escrever a métrica completa em até a primeira ordem $g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, e agrupar os termos por ordem de perturbação. Para facilitar as contas na hora de introduzir o campo perturbado, iremos assumir que

$$\phi(t) \to \phi(x^\mu)\,, \tag{D.21}$$

para não deprezar as derivadas espaciais do campo ϕ. Vamos lembrar que a métrica total é diagonal, dessa forma

$$g^{0\alpha} = g^{00}\delta^{\alpha 0}\,, \tag{D.22}$$

e

$$\begin{aligned} g^{i\alpha} &= g^{ii}\delta^\alpha_i \\ &= g^{11}\delta^\alpha_1 + g^{22}\delta^\alpha_2 + g^{33}\delta^\alpha_3\,, \end{aligned} \tag{D.23}$$

como $g^{11} = g^{22} = g^{33}$ então

$$\begin{aligned} g^{i\alpha} &= g^{11}(\delta^\alpha_1 + \delta^\alpha_2 + \delta^\alpha_3) \\ &= g^{11}\delta^{i\alpha}\,. \end{aligned} \tag{D.24}$$

Dessa forma,

- A componente $T^0_{\ 0}$

$$
\begin{aligned}
T^0_{\ 0} &= g^{0\alpha}\partial_\alpha\phi\,\partial_0\phi - g^0_{\ 0}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)\right] \\
&= g^{00}\left(\partial_0\phi\right)^2 - g^0_{\ 0}\left\{\frac{1}{2}\left[g^{00}\left(\partial_0\phi\right)^2 + g^{ii}\left(\partial_i\phi\right)^2\right] + V(\phi)\right\} \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}g^{11}\left(\nabla\phi\right)^2 - V(\phi)\ . \qquad \text{(D.25)}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi &= \hat{x}^i\partial_i\phi \\
&= \hat{x}^1\partial_1\phi + \hat{x}^2\partial_2\phi + \hat{x}^3\partial_3\phi\,, \qquad \text{(D.26)}
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\left(\nabla\phi\right)^2 = \left(\partial_1\phi\right)^2 + \left(\partial_2\phi\right)^2 + \left(\partial_3\phi\right)^2\ . \qquad \text{(D.27)}
$$

- A componente $T^i_{\ i}$ é escrita como

$$
\begin{aligned}
T^i_{\ i} &= g^{i\alpha}\partial_\alpha\phi\,\partial_i\phi - g^i_{\ i}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)\right] \\
&= g^{ii}\left(\partial_i\phi\right)^2 - g^i_{\ i}\left\{\frac{1}{2}\left[g^{00}\left(\partial_0\phi\right)^2 + g^{ii}\left(\partial_i\phi\right)^2\right] + V(\phi)\right\} \\
&= -3\left[g^{00}\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right] - \frac{1}{2}g^{11}\left(\nabla\phi\right)^2\ . \qquad \text{(D.28)}
\end{aligned}
$$

Para o caso em que um índice está fixo como sendo i, espacial, e outro varia no espaço-tempo, $\mu = 0, 1, 2, 3$, temos

$$
T^i_{\ \mu} = g^{i\alpha}\partial_\alpha\phi\,\partial_\mu\phi\ . \qquad \text{(D.29)}
$$

- Assim, para $T^i_{\ 0}$

$$
\begin{aligned}
T^i_{\ 0} &= g^{i\alpha}\partial_\alpha\phi\,\partial_0\phi \\
&= g^{i0}\partial_0\phi\,\dot{\phi} + g^{ij}\partial_j\phi\,\dot{\phi} \\
&= g^{11}\delta^{ij}(\partial_j\phi)\,\dot{\phi}\ . \qquad \text{(D.30)}
\end{aligned}
$$

- E quando $j \neq i$

$$
\begin{aligned}
T^i_{\ j} &= g^{i\alpha}\partial_\alpha\phi\partial_j\phi \\
&= g^{i0}\partial_0\phi\partial_j\phi + g^{ik}\partial_k\phi\partial_j\phi \\
&= g^{11}\delta^{ik}(\partial_k\phi)(\partial_j\phi)\ . \qquad \text{(D.31)}
\end{aligned}
$$

- A última componente que falta é a

$$
\begin{aligned}
T^0_{\ i} &= g^{0\alpha}\partial_\alpha\phi\,\partial_i\phi \\
&= g^{00}\partial_0\phi\,\partial_i\phi + g^{0i}\partial_i\phi\,\partial_i\phi \\
&= g^{00}\dot{\phi}\,\partial_i\phi\;.
\end{aligned}
\tag{D.32}
$$

O campo escalar será perturbado da forma

$$
\phi(t) \to \phi(t) + \delta\phi(x^\mu) \tag{D.33}
$$

para $\delta\phi(x^\mu) \ll 1$. Dessa forma, o campo potencial pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
V(\phi) &\to \underbrace{V(\phi(t)+\delta\phi(x^\mu))}_{V+\delta V} \\
&\underbrace{\simeq}_{\text{expansão de Taylor}} V(\phi) + V(\phi+\delta\phi)\big|_{\delta\phi=0} + \frac{d}{d\phi}V(\phi+\delta\phi)\big|_{\delta\phi=0}\delta\phi \Rightarrow
\end{aligned}
\tag{D.34}
$$

o que implica em

$$
V(\phi) \to V(\phi) + V'(\phi)\,\delta\phi\;, \tag{D.35}
$$

onde a linha indica uma derivada com respeito ao campo ϕ.

- Considerando as perturbações dos campos e da métrica, temos

$$
\begin{aligned}
T^0_{\ 0} &= \frac{1}{2}g^{00}\left[\partial_0\left(\phi(t)+\delta\phi(x^\mu)\right)\right]^2 - \frac{1}{2}g^{11}\left[\nabla\left(\phi(t)+\delta\phi(x^\mu)\right)\right]^2 - \left(V(\phi)+V'(\phi)\,\delta\phi\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\partial_0\left(\phi+\delta\phi\right)\right]^2 - \frac{(1-h/3)}{2a^2}\left[\nabla\left(\phi+\delta\phi\right)\right]^2 - \left(V+V'\,\delta\phi\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2 + (\delta\dot{\phi})^2 + 2\dot{\phi}\,\delta\dot{\phi}\right] - \frac{(1-h/3)}{2a^2}\left[\nabla\left(\delta\phi\right)\right]^2 - V - V'\,\delta\phi\,.
\end{aligned}
\tag{D.36}
$$

Reagrupando os termos em ordem zero e ordem um de perturbação

$$
T^{0(0)}_{\ 0} = -\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V\right)\;, \tag{D.37}
$$

$$
T^{0(1)}_{\ 0} = -\left(\dot{\phi}\,\delta\dot{\phi} + V'\,\delta\phi\right)\;. \tag{D.38}
$$

- Para a componente $T^i_{\ i}$

$$
\begin{aligned}
T^{i}{}_{i} &= -3\left\{\frac{1}{2}g^{00}\left[\partial_0\left(\phi(t)+\delta\phi(x^{\mu})\right)\right]^2+\left(V(\phi)+V'(\phi)\,\delta\phi\right)\right\}-\frac{1}{2}g^{11}\left[\nabla\left(\phi(t)+\delta\phi(x^{\mu})\right)\right]^2 \\
&= -3\left\{-\frac{1}{2}\left[\partial_0\left(\phi+\delta\phi\right)\right]^2+\left(V+V'\,\delta\phi\right)\right\}-\frac{(1-h/3)}{2a^2}\left[\nabla\left(\phi+\delta\phi\right)\right]^2 \\
&= -3\left\{-\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2+(\delta\dot{\phi})^2+2\dot{\phi}\,\delta\dot{\phi}\right]+V+V'\,\delta\phi\right\}-\frac{(1-h/3)}{2a^2}\left[\nabla(\delta\phi)\right]^2\ ,
\end{aligned}
\tag{D.39}
$$

onde $\nabla\phi = 0$ pois $\phi(t)$ não depende das coordenadas espaciais. Reagrupando os termos em ordem zero e ordem um de perturbação

$$
T^{i(0)}_{\ i} = 3\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2}-V\right)\ , \tag{D.40}
$$

$$
T^{i(1)}_{\ i} = 3\left(\dot{\phi}\,\delta\dot{\phi}-V'\,\delta\phi\right)\ . \tag{D.41}
$$

- Para a componente $T^{i}{}_{0}$

$$
\begin{aligned}
T^{i}{}_{0} &= \frac{(1-h/3)}{a^2}\left[\partial_i\left(\phi(t)+\delta\phi(x^{\mu})\right)\right]\left[\partial_0\left(\phi(t)+\delta\phi(x^{\mu})\right)\right] \\
&= \frac{(1-h/3)}{a^2}\left[\partial_i\left(\delta\phi\right)\right]\left[\partial_0\left(\phi+\delta\phi\right)\right]\ ,
\end{aligned}
\tag{D.42}
$$

onde utilizamos que $\partial_i\phi(t) = 0$. Reagrupando os termos em ordem zero e ordem um de perturbação

$$
T^{i(0)}_{\ 0} = 0\,, \tag{D.43}
$$

$$
T^{i(1)}_{\ 0} = \frac{1}{a^2}\left(\partial_i\delta\phi\right)\dot{\phi}\,. \tag{D.44}
$$

- Para a componente $T^{i}{}_{j}$ com $i \neq j$

$$
\begin{aligned}
T^{i}{}_{j} &= g^{ii}\left[\partial_i\left(\phi(t)+\delta\phi(x^{\mu})\right)\right]\left[\partial_j\left(\phi(t)+\delta\phi(x^{\mu})\right)\right] \\
&= \frac{(1-h/3)}{a^2}\left[\partial_i\left(\delta\phi\right)\right]\left[\partial_j\left(\delta\phi\right)\right]\ ,
\end{aligned}
\tag{D.45}
$$

onde utilizamos que $\partial_i\phi(t) = 0$. Reagrupando os termos em ordem zero e ordem um de perturbação

$$
T^{i(0)}_{\ j} = 0 \tag{D.46}
$$

$$
T^{i(1)}_{\ j} = 0\ . \tag{D.47}
$$

- Para a componente $T^0_{\ i}$

$$\begin{aligned} T^0_{\ i} &= (-1)\left[\partial_0\left(\phi(t)+\delta\phi(x^\mu)\right)\right]\left[\partial_i\left(\phi(t)+\delta\phi(x^\mu)\right)\right] \\ &= -\left(\dot\phi+\delta\dot\phi\right)\left[\partial_i\left(\delta\phi\right)\right] , \end{aligned} \tag{D.48}$$

onde utilizamos que $\partial_i\phi(t)=0$. Reagrupando os termos em ordem zero e ordem um de perturbação

$$T^{0(0)}_{\ i} = 0 \, , \tag{D.49}$$

$$T^{0(1)}_{\ i} = -\dot\phi\,\partial_i(\delta\phi) \ . \tag{D.50}$$

Juntando os resultados, temos para as componentes do tensor energia-momento em ordem zero

$$T^{0(0)}_{\ 0} = -\left(\frac{\dot\phi^2}{2}+V\right) \ , \tag{D.51a}$$

$$T^{i(0)}_{\ i} = 3\left(\frac{\dot\phi^2}{2}-V\right) \ , \tag{D.51b}$$

$$T^{i(0)}_{\ 0} = 0 \ , \tag{D.51c}$$

$$T^{i(0)}_{\ j} = 0 \ , \tag{D.51d}$$

$$T^{0(0)}_{\ i} = 0 \ , \tag{D.51e}$$

e para as componentes em primeira ordem

$$T^{0(1)}_{\ 0} = -\left(\dot\phi\,\delta\dot\phi+V'\,\delta\phi\right) \ , \tag{D.52a}$$

$$T^{i(1)}_{\ i} = 3\left(\dot\phi\,\delta\dot\phi-V'\,\delta\phi\right) \ , \tag{D.52b}$$

$$T^{i(1)}_{\ 0} = \frac{1}{a^2}\left(\partial_i\delta\phi\right)\dot\phi \ , \tag{D.52c}$$

$$T^{i(1)}_{\ j} = 0 \ , \tag{D.52d}$$

$$T^{0(1)}_{\ i} = -\dot\phi\,\partial_i(\delta\phi) \ . \tag{D.52e}$$

É interessante lembrar da definição do tensor energia-momento para um fluido perfeito

Para calcular a derivada do tensor energia-momento vamos usar (E.82)

$$\nabla_\mu T^\mu_{\ \nu} = \partial_\mu T^\mu_{\ \nu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda_{\ \nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}T^\mu_{\ \lambda} \ . \tag{D.53}$$

Fixando $\nu=0$, temos

$$\nabla_\mu T^\mu_{\ 0} = \partial_\mu T^\mu_{\ 0} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda_{\ 0} - \Gamma^\lambda_{\mu 0}T^\mu_{\ \lambda} \ . \tag{D.54}$$

Apesar de estarmos calculando a derivada covariante da componente $T^{\mu}_{\ \nu}$, precisamos calcular todas as componentes do tensor energia-momento, pela existência do termo $\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} T^{\mu}_{\ \lambda}$ na Eq. (D.54).

As componentes do símbolo de Christoffel necessárias aqui considerando a métrica em até a primeira ordem em perturbação são

$$\Gamma^{0}_{00} = 0 \ , \quad \Gamma^{\mu}_{0\nu} = 0 \ , \ \forall \mu \neq \nu \ , \quad \Gamma^{i}_{i0} = H + \frac{1}{6}\partial_{\mu} h \ , \quad \Gamma^{i}_{ij} = \frac{1}{6}\partial_{j} h \ , \ \forall i \neq j \ . \tag{D.55}$$

Dessa forma

- $$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda}_{\ 0} = \Big(\underbrace{\Gamma^{0}_{0\lambda}}_{=0} + \Gamma^{i}_{i\lambda} \Big) T^{\lambda}_{\ 0} \ , \tag{D.56}$$
$$= \Gamma^{i}_{i0} T^{0}_{\ 0} + \Gamma^{i}_{ij} T^{j}_{\ 0} \ , \tag{D.57}$$
$$= 3 \left[\left(H + \dot{h}/6 \right) T^{0}_{\ 0} + \left(\partial_i h/6 \right) T^{i}_{\ 0} \right] \ , \tag{D.58}$$

  e

- $$\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} T^{\mu}_{\ \lambda} = \underbrace{\Gamma^{\lambda}_{00}}_{=0} T^{0}_{\ \lambda} + \Gamma^{\lambda}_{i0} T^{i}_{\ \lambda} \ , \tag{D.59}$$
$$= \left(H + \dot{h}/6 \right) T^{i}_{\ i} \ . \tag{D.60}$$

Vamos separar os termos de ordem zero e os de ordem um de $\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\ 0}$ assumindo que assim como o tensor energia-momento pode ser escrito como uma soma de termos em até a primeira ordem, $T^{\mu}_{\ \nu} = T^{\mu(0)}_{\ \nu} + \delta T^{\mu}_{\ \nu}$, os símbolos de Christoffel também podem ser separados por $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu(0)}_{\nu\rho} + \delta\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$. Portanto

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} T^{\mu}_{\ 0} =& (\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\ 0})^{(0)} + (\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\ 0})^{(1)} \\ =& \left[\partial_{\mu} T^{\mu(0)}_{\ 0} + \Gamma^{\mu(0)}_{\mu\lambda} T^{\lambda(0)}_{\ 0} - \Gamma^{\lambda(0)}_{\mu 0} T^{\mu(0)}_{\ \lambda} \right] + \\ &+ \left[\partial_{\mu} \delta T^{\mu}_{\ 0} + \Gamma^{\mu(0)}_{\mu\lambda} \delta T^{\lambda}_{\ 0} + \Gamma^{\mu(1)}_{\mu\lambda} T^{\lambda(0)}_{\ 0} - \Gamma^{\lambda(0)}_{\mu 0} \delta T^{\mu}_{\ \lambda} - \Gamma^{\lambda(1)}_{\mu 0} T^{\mu(0)}_{\ \lambda} \right] \end{aligned} \tag{D.61}$$

Precisamos calcular $\partial_{\mu} T^{\mu}_{0}$, $\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda}_{\ 0}$ e $\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} T^{\mu}_{\ \lambda}$ e separar os termos em primeira e segunda ordem de perturbação.

- $$\begin{aligned} \partial_{\mu} T^{\mu}_{\ 0} =& \partial_0 T^{i}_{\ 0} + \partial_i T^{i}_{\ 0} \\ =& \partial_0 \left\{ - \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) - \left[\dot{\phi} \, (\delta\dot{\phi}) + V'(\delta\phi) \right] \right\} + \frac{1 - h/3}{a^2} \sum_i \left[\dot{\phi} \, \partial_i (\delta\phi) \right] \ . \end{aligned} \tag{D.62}$$

Reagrupando os termos acima

$$\boxed{\begin{aligned}(\partial_\mu T^{\mu}_{\ 0})^{(0)} &= -\,\dot\phi\left(\ddot\phi + V'\right)\,,\\ (\partial_\mu T^{\mu}_{\ 0})^{(1)} &= -\left[\ddot\phi\,(\delta\dot\phi) + \dot\phi\,(\delta\ddot\phi) + \dot\phi V''(\delta\phi) + V'(\delta\dot\phi) - a^{-2}\dot\phi\,\nabla^2(\delta\phi)\right]\,.\end{aligned}}$$

(D.63a)

(D.63b)

•

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\,T^{\lambda}_{\ 0} &= 3\left[\left(H + \dot h/6\right)T^{0}_{\ 0} + (\partial_i h/6)\,T^{i}_{\ 0}\right]\\ &= 3\left[-\left(H + \dot h/6\right)\left(\frac{\dot\phi^2}{2} + V + \dot\phi\,\delta\dot\phi + V'\,\delta\phi\right) + \frac{1}{a^2}\,(\partial_i h/6)\,(\partial_i\delta\phi)\,\dot\phi\right]\,.\end{aligned} \tag{D.64}$$

Reagrupando os termos acima

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\,T^{\lambda}_{\ 0}\right)^{(0)} &= -3H\left(\frac{\dot\phi^2}{2} + V\right)\,,\\ \left(\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\,T^{\lambda}_{\ 0}\right)^{(1)} &= -3\left[H\left(\dot\phi\,\delta\dot\phi + V'\,\delta\phi\right) + \dot h/6\left(\frac{\dot\phi^2}{2} + V\right)\right]\,.\end{aligned}}$$

(D.65a)

(D.65b)

•

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}\,T^{\mu}_{\ \lambda} = 3\left(H + \dot h/6\right)\left(\frac{\dot\phi^2}{2} - V + \dot\phi\,\delta\dot\phi - V'\,\delta\phi\right)\,. \tag{D.66}$$

Reagrupando os termos acima

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}\,T^{\mu}_{\ \lambda}\right)^{(0)} &= 3H\left(\frac{\dot\phi^2}{2}-V\right)\ ,\\ \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}\,T^{\mu}_{\ \lambda}\right)^{(1)} &= 3\left[H\left(\dot\phi\,\delta\dot\phi - V'\,\delta\phi\right)+\dot h/6\left(\frac{\dot\phi^2}{2}-V\right)\right]\ .\end{aligned}}$$

(D.67a)

(D.67b)

Portanto, substituindo os resultados acima em

$$\nabla_\mu T^{\mu}_{\ 0} = \partial_\mu T^{\mu}_{\ 0} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}T^{\lambda}_{\ 0} - \Gamma^{\lambda}_{\mu 0}T^{\mu}_{\ \lambda}\ , \tag{D.68}$$

temos

$$\begin{aligned}(\nabla_\mu T^{\mu}_{\ 0})^{(0)} &= (\partial_\mu T^{\mu}_{\ 0})^{(0)} + \left(\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}T^{\lambda}_{\ 0}\right)^{(0)} - \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}T^{\mu}_{\ \lambda}\right)^{(0)}\\ &= -\,\dot\phi\left(\ddot\phi+V'\right) - 3H\left(\frac{\dot\phi^2}{2}+V\right) - 3H\left(\frac{\dot\phi^2}{2}-V\right)\\ &= -\,\dot\phi\left(\ddot\phi+3H\dot\phi+V'\right)\ ,\end{aligned} \tag{D.69}$$

e

$$\begin{aligned}(\nabla_\mu T^{\mu}_{\ 0})^{(1)} &= (\partial_\mu T^{\mu}_{\ 0})^{(1)} + \left(\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}T^{\lambda}_{\ 0}\right)^{(1)} - \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}T^{\mu}_{\ \lambda}\right)^{(1)}\\ &= -\left[\ddot\phi\,(\delta\dot\phi) + \dot\phi\,(\delta\ddot\phi) + \dot\phi V''(\delta\phi) + V'(\delta\dot\phi) - a^{-2}\dot\phi\,\nabla^2(\delta\phi)\right] +\\ &\quad - 3\left[H\left(\dot\phi\,\delta\dot\phi + V'\,\delta\phi\right) + \dot h/6\left(\frac{\dot\phi^2}{2}+V\right)\right] +\\ &\quad - 3\left[H\left(\dot\phi\,\delta\dot\phi - V'\,\delta\phi\right) + \dot h/6\left(\frac{\dot\phi^2}{2}-V\right)\right]\\ &= -\left[\dot\phi\,(\delta\ddot\phi) + \left(\ddot\phi+V'\right)(\delta\dot\phi) + \left(-a^{-2}\dot\phi\,\nabla^2 + \dot\phi V''\right)(\delta\phi)\right] +\\ &\quad - 6\left[H\,\dot\phi\,\delta\dot\phi + \dot h/6\left(\frac{\dot\phi^2}{2}\right)\right]\\ &= -\left[\dot\phi\,(\delta\ddot\phi) + \left(\ddot\phi + 6H\,\dot\phi + V'\right)(\delta\dot\phi) + \left(-a^{-2}\dot\phi\,\nabla^2 + \dot\phi V''\right)(\delta\phi) + \frac{\dot h\dot\phi^2}{2}\right]\ .\end{aligned} \tag{D.70}$$

Reagrupando os resultados temos

$$(\nabla_\mu T^\mu{}_0)^{(0)} = -\,\dot\phi\left(\ddot\phi + 3H\dot\phi + V'\right)\ , \tag{D.71}$$

$$(\nabla_\mu T^\mu{}_0)^{(1)} = -\left[\dot\phi\,(\delta\ddot\phi) + \left(\ddot\phi + 6H\,\dot\phi + V'\right)\,(\delta\dot\phi) + \left(-a^{-2}\dot\phi\,\nabla^2 + \dot\phi V''\right)(\delta\phi) + \frac{\dot h\dot\phi^2}{2}\right]\ . \tag{D.72}$$

Considerando o caso geral em que

$$\nabla_\mu T^\mu{}_0 = Q^{(0)} + Q^{(1)}\ , \tag{D.73}$$

onde $Q^{(0)}$ e $Q^{(1)}$, representam as interações de ordem zero e um, respetivamente. No espaço de Fourier (k-espaço), temos

$$\left(\ddot\phi + 3H\dot\phi + V'\right) = -\,\frac{Q^{(0)}}{\dot\phi}\ , \tag{D.74}$$

$$\dot\phi\,(\delta\ddot\phi) + \left(\ddot\phi + 6H\,\dot\phi + V'\right)\,(\delta\dot\phi) + \dot\phi\left(a^{-2}\,k^2 + V''\right)(\delta\phi) + \frac{\dot h\dot\phi^2}{2} = -\,Q^{(1)}\ . \tag{D.75}$$

Se substituirmos a primeira equação na segunda, obtemos

$$\boxed{(\delta\ddot\phi) + \left(3H - \frac{Q^{(0)}}{\dot\phi^2}\right)\,(\delta\dot\phi) + \left(a^{-2}\,k^2 + V''\right)(\delta\phi) + \frac{\dot h\dot\phi}{2} = -\frac{Q^{(1)}}{\dot\phi}}\ . \tag{D.76}$$

Apêndice E

Perturbações

As equações de campo de Einstein são um conjunto de 10 equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares acopladas, ou seja, são equações muito difíceis para serem resolvidas. No entanto, essas equações podem ser simplificadas se assumirmos algumas condições. Em cosmologia assumimos o princípio cosmológico, um axioma que diz que o universo é homogêneo e isotrópico visto de uma escala grande. Essas escalas são da ordem de 100Mpc−1000Mpc. Lembrando que 1pc (parsec) $\approx$ 3.26ly $\approx 10^{13}$km, vemos que 100Mpc $\approx 10^{18}$km, por isso não podemos testar o princípio cosmológico olhando para quaisquer dois pontos do universo. Portanto, podemos testar o princípio cosmológico de outras formas.

Para explicarmos estruturas em grandes escalas precisamos considerar desvios da homogeneidade e da isotropia, supostas como válidas em escalas maiores que 100Mpc[1]. Considerando perturbações de primeira ordem na densidade de matéria, ao menos para escalas maiores que $10Mpc$, é possível fazer predições com uma boa concordância em relação aos dados de distribuições de aglomerados de galáxias, e também é possível, considerando essas perturbações na temperatura da Radiação Cósmica de Fundo (do inglês *Cosmic Microwave Background*, CMB), fazer predições sobre a temperatura e a polarização da CMB.

A teoria perturbativa nos dá uma descrição unificada para qualquer matéria em todas as escalas. Infelizmente, as interpretações físicas de perturbações na Relatividade Geral são menos transparentes comparadas a perturbações na teoria Newtoniana. O problema principal é a liberdade que temos para escolher um sistema de coordenadas usado para descrevê-las. Ao contrário de um universo homogêneo e isotrópico onde fixamos um sistema de coordenadas segundo propriedades do "background", não há sistemas de coordenadas óbvios para analisar perturbações. A liberdade do sistema de coordenadas faz com que apareçam **modos perturbativos fictícios**. Esses modos não descrevem qualquer inomogeneidade real, apenas refletem as propriedades do sistema de coordenadas utilizado.

No universo primordial, as perturbações gravitacionais crescem até comprimentos de onda além do horizonte no final da época inflacionária. Flutuações de uma dada escala de comprimento reentram no horizonte em tempos tardios, quando o horizonte já cresceu até o tamanho das flutuações. Embora o processo de formação de galáxias em épocas recentes seja bem descrito pela gravidade Newtoniana (e outros proces-

[1] $1pc = 3.08568 \times 10^{16}$m.

sos físicos, como hidrodinâmica), um tratamento relativístico geral é necessário para perturbações em escalas maiores que o tamanho do horizonte antes do tempo de cruzamento do horizonte. O uso da Relatividade Geral trouxe a questão da liberdade de gauge. Em 1946 Lifshitz adotou o "gauge síncrono" para seu sistema de coordenadas, que tem sido o gauge mais utilizado para teorias de perturbação cosmológica. Contudo, algumas complicações associadas a este gauge, como o aparecimento de singularidades nas coordenadas e modos de gauge espúrios sugeridos por Bardeen (1980) e outros (por exemplo, Kodama e Sasaki, 1984) para formular abordagens alternativas que lidam apenas com quantidades invariantes de gauge. Uma completa revisão da teoria da perturbação invariante de gauge e sua aplicação na estrutura semeada por modelos de formação são apresentados por Durrer (1993). Outra possibilidade é adotar um gauge diferente.

Para estudar os modos perturbativos vamos considerar um universo homogêneo e isotrópico não perturbado, onde $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon(t)$. Na Relatividade Geral (RG) qualquer transformação entre as coordenadas é permitida, podemos então usar um novo tempo coordenada $\tilde{t}$ que se relaciona com o antigo, segundo $\tilde{t} = t + \delta t(\mathbf{x}, t)$. A nova densidade de energia é definida por $\tilde{\epsilon}(\tilde{t}, \mathbf{x}) \equiv \epsilon(t(\tilde{t}, \mathbf{x}))$ na hipersuperfície $\tilde{t} =$ const. e depende, em geral, da coordenada espacial $\mathbf{x}$. Assumindo que $\delta t << t$, temos

$$\epsilon(t) = \epsilon(\tilde{t} - \delta t(\mathbf{x}, t)) \simeq \epsilon(t)\Big|_{\delta t=0} - \frac{\partial \epsilon}{\partial t}\Big|_{\delta t=0} \delta t \equiv \epsilon(\tilde{t}) + \delta\epsilon(\mathbf{x}\ , \tilde{t}).$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima deve ser interpretado como a densidade de energia do background no novo sistema de coordenadas, enquanto o segundo descreve uma perturbação linear. **Essa perturbação não é física devido à escolha do novo tempo perturbado**. Nós podemos "produzir" perturbações fictícias simplesmente perturbando as coordenadas. Além disso, nós podemos "remover" uma perturbação real na densidade de energia, escolhendo a hipersuperfície do tempo constante igual a hipersuperfície da energia constante: nesse caso $\delta\epsilon = 0$ devido à presença da inomogeneidade real.

Para resolver os modos perturbativos reais e fictícios na RG é necessário ter um conjunto completo de variáveis. Para ser mais preciso, tomamos a perturbação no campo da matéria e da métrica.

Nessa seção vamos apresentar a condição necessária para assumir uma perturbação na RG. Vamos introduzir as variáveis invariantes de gauge e interpretar fisicamente os resultados, assim como utilizar alguns sistemas de coordenadas mais conhecidos. Foram utilizados [1–4, 259].

E.1 Perturbações na métrica e variáveis invariantes de gauge

Inomogeneidades na distribuição de matéria induzem perturbações na métrica que podem ser decompostas em partes irredutíveis. Em uma aproximação linear diferentes tipos de perturbações evoluem de forma independente e, portanto, podem ser analisados separadamente. Nessa subseção vamos primeiro caracterizar perturbações da métrica, então determinar como elas se transformam por transformações gerais de coordenadas e finalmente as variáveis independentes de gauge. Para isso usaremos a aproximação

$$(1+x)^{-n} \approx 1 - nx, \quad n \in \mathbb{C},$$

para $|x| << 1$. O ponto sobre a letra indica uma derivada em relação â coordenada temporal

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = x_{,0} \, ,$$

enquanto que a linha indica uma derivada em relação ao tempo conforme

$$x' \equiv \frac{dx}{d\eta}.$$

A relação entre a coordenada tempo e o tempo conforme é expressa por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{d\eta}{dt} \cdot \frac{d}{d\eta} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{d}{d\eta} \, . \end{aligned} \tag{E.1}$$

Vamos utilizar também as identidades

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2,$$

$$a\dot{a} = a^2 H \; .$$

Trabalharemos o tempo todo com um universo de FLRW plano.

E.1.1 Classificação das perturbações

A métrica do universo de FLRW plano com pequenas perturbações pode ser escrita como

$$\boxed{ds^2 = [{}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(x^\alpha)]dx^\mu dx^\nu},$$

onde $|\delta g_{\mu\nu}| << |{}^{(0)}g_{\mu\nu}|$. Usando o tempo conforme, a métrica do background se torna

$$\boxed{{}^{(0)}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j)} \; .$$

A perturbação na métrica $\delta g_{\mu\nu}$ pode ser categorizada em três tipos distintos: *escalar*, *vetorial* e *tensorial*. Essa classificação é baseada nas propriedades da simetria do background homogêneo e isotrópico, onde até o dado momento é obviamente invariante com respeito ao grupo de rotações e translações espaciais. O termo perturbado δg_{00} se comporta como um escalar sob estas rotações, e portanto,

$$\boxed{\delta g_{00} \equiv -2a^2\psi} \; ,$$

onde ψ é um 3-escalar.

O termo perturbado δg_{0i} do espaço-tempo pode ser decomposto em uma soma da parte espacial do gradiente de um escalar qualquer B e um vetor S_i com divergência zero ($S^i{}_{,i} = 0$)

$$\boxed{\delta g_{0i} \equiv a^2(B_{,i} + S_i)}\ .$$

De forma similar, os termos δg_{ij}, os quais se comportam como um tensor sob 3-rotações, pode ser escrito como a soma de irredutíveis partes

$$\boxed{\delta g_{ij} \equiv a^2(2\phi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij})}\ .$$

Aqui ϕ e E são funções escalares, o vetor F_i tem uma divergência nula ($F^i{}_{,i} = 0$) e o 3-tensor h_{ij} é simétrico e satisfaz as quatro condições seguintes

$$h^i{}_i = h = 0\ , \quad h^i{}_{j,i} = 0\ ,$$

isso significa que o traço é nulo e ele é transverso. Contando o número de funções independentes usadas para formar $g_{\mu\nu}$, obtemos quatro funções para as perturbações escalares, quatro funções para as perturbações vetoriais (dois 3-vetores com uma condição cada), e duas funções para as perturbações tensoriais (um 3-tensor simétrico tem seis componentes independentes e quatro condições). Assim temos dez funções ao todo. Esse número coincide com o número de componentes independentes de $\delta g_{\mu\nu}$.

Perturbações escalares são caracterizadas por quatro funções escalares ϕ, ψ, B, E. Elas são induzidas pela densidade de energia inomogênea. Essas perturbações são mais importantes porque exibem instabilidade gravitacional e podem nos conduzir para a formação da estrutura do universo.

Perturbações vetoriais são descritas por dois vetores S_i e F_i e se relacionam com os movimentos de rotação do fluido. Elas decaem rapidamente e não são muito interessantes do ponto de vista cosmológico.

Perturbações tensoriais h_{ij} descrevem ondas gravitacionais, no qual são os graus de liberdade do campo gravitacional. Na aproximação linear de ondas gravitacionais não influenciam qualquer perturbação no fluido perfeito.

Pelo fato das perturbações cosmológicas serem perturbações escalares, a partir daqui daremos mais importância a este tipo de perturbações. Um estudo mais completo sobre as perturbações vetoriais e tensoriais pode ser encontrado em [259]. Os três tipos de perturbações são desacoplados e assim estudaremos cada um deles separadamente.

E.1.2 Transformações de gauge e variáveis invariantes de gauge

Vamos considerar a transformação de coordenadas

$$x^\alpha \to \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha\ , \tag{E.2}$$

onde ξ^α são funções do espaço-tempo infinitesimais. Em um ponto dado da variedade do espaço-tempo o tensor métrico no sistema de coordenadas $\tilde{x}$ pode ser calculado usando a lei de transformação usual

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\gamma\delta}(\tilde{x}^\rho) \simeq & \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\gamma\delta}(\tilde{x}^\rho)\right)\Bigg|_{\tilde{x}=x} \\
& + \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta}\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial \xi}(\tilde{x}^\rho)\right)\Bigg|_{\tilde{x}=x} \cdot (\xi) \\
& + \left[\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta}\right) g_{\gamma\delta}(\tilde{x}^\rho)\right]_{\tilde{x}=x} \cdot (\xi) \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right)\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\gamma\delta}(\tilde{x}^\rho)\right]_{\tilde{x}=x} \cdot (\xi) \\
& + \mathcal{O}(\xi^2) \ ,
\end{aligned}
$$

o que implica em

$$
\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) \approx {}^{(0)}g_{\alpha\beta}(x^\rho) + \delta g_{\alpha\beta} - {}^{(0)}g_{\alpha\delta}\xi^\delta_{,\beta} - {}^{(0)}g_{\gamma\beta}\xi^\gamma_{,\alpha} \ , \tag{E.3}
$$

onde tomamos apenas os termos lineares em δg e ξ. Nas novas coordenadas $\tilde{x}$ a métrica pode também ser dividida no background em partes da perturbação,

$$
\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = {}^{(0)}g_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) + \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} \ , \tag{E.4}
$$

onde ${}^{(0)}g_{\alpha\beta}$ é a métrica de FLRW, na qual pode ser escrita em função de $\tilde{x}$. Igualando (E.3) com (E.4) temos

$$
{}^{(0)}g_{\alpha\beta}(x^\rho) \approx {}^{(0)}g_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) - {}^{(0)}g_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma \ ,
$$

usando abaixo,

$$
{}^{(0)}g_{\alpha\beta}(x^\rho) = {}^{(0)}g_{\alpha\beta}(x^\rho)\Big|_{x=\tilde{x}} + {}^{(0)}\delta g_{\alpha\beta}(x^\rho)\Big|_{x=\tilde{x}} + \delta\xi \ , \tag{E.5}
$$

podemos inferir a seguinte lei de transformação de gauge:

$$
\boxed{\delta g_{\alpha\beta} \to \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} - {}^{(0)}g_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}g_{\gamma\beta}\xi^\gamma_{,\alpha} - {}^{(0)}g_{\alpha\delta}\xi^\delta_{,\beta}} \ . \tag{E.6}
$$

Aqui foi calculada a transformação de um 4-tensor. É bem mais simples calcular a transformação de um 4-escalar q e de um 4-vetor covariante u

$$
\boxed{\delta q \to \delta\tilde{q} = \delta q - {}^{(0)}q_{,\alpha}\xi^\alpha} \ , \tag{E.7}
$$

$$
\boxed{\delta u_\alpha \to \delta\tilde{u}_\alpha - {}^{(0)}u_{\alpha,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}u_\gamma\xi^\gamma_{,\alpha}} \ . \tag{E.8}
$$

É claro que o valor do 4-escalar q em um dado ponto da variedade não muda com a transformação das coordenadas, mas a forma como dividimos o valor no background e a perturbação dependem das coordenadas usadas.

Vamos escrever as componentes espaciais do vetor infinitesimal $\xi^\alpha \equiv (\xi^0, \xi^i)$ como

$$
\xi^i = \xi^i_\perp + \zeta^{,i} \ ,
$$

onde $\xi^i_\perp$ é um 3-vetor com divergência nula ($\xi^i_{\perp,i} = 0$) e ζ é uma função escalar. Desde que no universo de FLRW ${}^{(0)}g_{00} = -a^2(\eta)$ e ${}^{(0)}g_{ij} = a^2(\eta)\delta_{ij}$, obtemos de (E.6)

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{g}_{00} &= \delta g_{00} - {}^{(0)}g_{00,\gamma}\xi^\gamma - 2{}^{(0)}g_{00}\xi^0_{,0} \\
&= \delta g_{00} + 2(aa'\xi^0 + a^2\xi^0_{,0}) \\
&= \delta g_{00} + 2a(a\xi^0)' \\
&= -2a^2\psi + 2a(a\xi^0)' \\
&= -2a^2\left[\psi - \frac{1}{a}(a\xi^0)'\right] \\
&= -2a^2\tilde{\psi} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{g}_{0i} &= \delta g_{0i} - {}^{(0)}g_{0i,\gamma} - {}^{(0)}g_{0\delta}\xi^\delta_{,i} - {}^{(0)}g_{i\delta}\xi^\delta_{,0} \\
&= \delta g_{0i} - {}^{(0)}g_{00}\xi^0_{,i} - {}^{(0)}g_{ij}\xi^j_{,0} \\
&= \delta g_{0i} + a^2(\xi^0_{,i} - \xi^i_{,0}) \\
&= \delta g_{0i} - a^2[\xi'_{\perp i} + (\zeta' - \xi^0)_{,i}] \\
&= a^2[B_{,i} + S_i - \xi'_{\perp i} - (\zeta' - \xi^0)_{,i}] \\
&= a^2(\tilde{B}_{,i} + \tilde{S}_i) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{g}_{ij} &= \delta g_{ij} - {}^{(0)}g_{ij,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}g_{i\gamma}\xi^\gamma_{,j} - {}^{(0)}g_{j\gamma}\xi^\gamma_{,i} \\
&= \delta g_{ij} - {}^{(0)}g_{0}\xi^0 - {}^{(0)}g_{ij}\xi^j_{,j} - {}^{(0)}g_{ji}\xi^i_{,i} \\
&= \delta g_{ij} - (2aa')\xi^0\delta_{ij} - a^2[(\xi^j_\perp + \zeta^{,j})_i + (\xi^i_\perp + \zeta^{,i})_j]\delta_{ij} \\
&= \delta g_{ij} - a^2\left[2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\xi^0 + 2\zeta_{,ij} + (\xi_{\perp i,j} + \xi_{\perp j,i})\right] \\
&= a^2\left(2\phi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij} - 2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\xi^0 - 2\zeta_{,ij} - (\xi_{\perp i,j} - \xi_{\perp j,i})\right) \\
&= a^2\left[2\left(\phi - \frac{a'}{a}\xi^0\right)\delta_{ij} + 2(E-\zeta)_{,ij} + (F - \xi_\perp)_{i,j} + (F - \xi_\perp)_{j,i} + h_{ij}\right] \\
&= a^2\left(2\tilde{\phi}\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{,ij} + \tilde{F}_{i,j} + \tilde{F}_{j,i} + h_{ij}\right) \ ,
\end{aligned} \tag{E.9}$$

onde $\xi_{\perp i} \equiv \xi^i_\perp$. Foi utilizado o fato de ${}^{(0)}g_{\alpha\beta}$ ser diagonal, ou seja ${}^{(0)}g_{\alpha\beta} \propto \delta_{ij}$. Nas contas acima utilizamos uma nova mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}
\psi \to \tilde{\psi} &= \psi - \frac{1}{a}(a\xi^0)', \qquad & B \to \tilde{B} &= B - \zeta' + \xi^0, \\
\phi \to \tilde{\phi} &= \phi - \frac{a'}{a}\xi^0, \qquad & E \to \tilde{E} &= E - \zeta, \\
S_i \to \tilde{S}_i &= S_i - \xi'_{\perp i}, \qquad & F_i &\to \tilde{F}_i - \xi'_{\perp i} \ .
\end{aligned} \tag{E.10}$$

Utilizando esse novo sistema de coordenadas, a métrica do universo plano de FLRW com pequenas perturbações escalares, vetoriais e tensoriais é escrita como

$$\boxed{ds^2 = a^2\{-(1+2\psi)d\eta^2 + 2(B_{,i} + S_i)d\eta dx^i + [(1+2\phi)\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}]dx^i dx^j\}}, \tag{E.11}$$

onde, por facilidade, o til foi ignorado.

Perturbações escalares Para perturbações escalares a métrica toma a forma

$$ds^2 = a^2\{-(1+2\psi)d\eta^2 + 2B_{,i}d\eta dx^i + [(1+2\phi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j\} \ ,$$

que é (E.11) com a dependência apenas dos quatro escalares ψ, ϕ, B e E. As combinações lineares dessas funções que são invariantes de gauge e abrangem o espaço bidimensional das perturbações físicas são

$$\Psi \equiv \psi + \frac{1}{a}[a(B-E)]' \ , \qquad \Phi \equiv \phi + \frac{a'}{a}(B-E') \ , \tag{E.12}$$

isso pois

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} &= \tilde{\psi} + \frac{1}{a}[a(\tilde{B}-\tilde{E})]' \\
&= \psi - \frac{1}{a}(a\xi^0)' + \frac{1}{a}\{a[(B-\zeta'+\xi^0) - (E-\zeta)']\}' \\
&= \psi - \frac{1}{a}(a\xi^0)' + \frac{1}{a}[a(B-E'+\xi^0)]' \\
&= \psi + \frac{a'}{a}(B-E') + (B-E') \\
&= \psi + \frac{1}{a}[a(B-E')]' \\
&= \Psi \ ,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &= \tilde{\Phi} + \frac{a'}{a}(\tilde{B}-\tilde{E}') \\
&= \phi - \frac{a'}{a}\xi^0 + \frac{a'}{a}(B-E'+\xi^0) \\
&= \phi - \frac{a'}{a}(B-E') \\
&= \Phi \ .
\end{aligned}$$

Como são invariantes de gauge, não mudam sob transformações de coordenadas, se Ψ e Φ forem nulos em um sistema de coordenadas particular eles serão nulos em qualquer outro. *Isso significa que podemos distinguir inomogeneidades físicas de perturbações fictícias; se ambos Ψ e Φ forem nulos, então as perturbações na métrica são fictícias e podem ser removidas por uma mudança de coordenadas.*

É claro que podemos construir um número infinito de variáveis invariantes de gauge, desde que qualquer combinação de Ψ e Φ seja invariante de gauge. Nossa escolha dessas variáveis são justificáveis por razões de conveniência. Assim como os campos elétricos e magnéticos em eletrodinâmica, os potenciais Ψ e Φ são as combinações mais simples possíveis e satisfazem equações simples do movimento.

Utilizando o fato de que a densidade de energia ρ é um 4-escalar, segundo (E.7)

$$\begin{aligned} \bar{\delta\rho} &= \delta\rho - {}^{(0)}\rho_{,\alpha}\xi^{\alpha} \\ &= \delta\rho - {}^{(0)}\rho'\xi^{0} \\ &= \delta\rho - \rho_0'(B - E') \ , \end{aligned} \tag{E.13}$$

é a variável invariante de gauge que caracteriza a perturbação na densidade de energia[2].

Tomando uma 4-velocidade ${}^{(0)}u_{\alpha} = (a, 0, 0, 0)$ de um fluido em um universo homogêneo, temos que

$$\bar{\delta u}_{\alpha} = \delta u_{\alpha} - {}^{(0)}u_{\alpha,\gamma}\xi^{\gamma} - {}^{(0)}u_{\gamma}\xi^{\gamma}_{,\alpha} \ ,$$

segundo (E.8), temos que

$$\begin{aligned} \bar{\delta u}_0 &= \delta u_0 - {}^{(0)}u_{0,0}\xi^{0} - {}^{(0)}u_0\xi^{0}_{,0} \\ &= \delta u_0 - (a\xi^0)' \\ &= \delta u_0 - [a(B - E')] \ , \end{aligned} \tag{E.14}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\delta u}_i &= \delta u_i - {}^{(0)}u_i - {}^{(0)}u_0\xi^{0}_{,i} \\ &= \delta u_i - a\xi^{0}_{,i} \\ &= \delta u_i - a(B - E')_{,i} \ , \end{aligned} \tag{E.15}$$

são as variáveis independentes de gauge para as componentes covariantes das perturbações da velocidade, δu_{α}.

Perturbações vetoriais Para perturbações vetoriais a métrica é

$$ds^2 = a^2\{-d\eta^2 + 2S_i d\eta dx^i + [\delta_{ij} + F_{i,j} + F_{j,i}]dx^i dx^j\},$$

ou seja, (E.11) com apenas as funções vetoriais S_i e F_i. Já vimos como essas variáveis se transformam, da mesma forma que antes temos que

$$V_i = S_i - F_i',$$

é invariante de gauge, pois

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i &= \tilde{S}_i - \tilde{F}_i' \\ &= S_i - \xi'_{\perp i} - F_i' + \xi'_{\perp i} \\ &= S_i - F_i' \\ &= V_i \ . \end{aligned}$$

[2] Ver capítulo 1 de [259].

Apenas duas destas quatro funções independentes, S_i e F_i, caracterizam perturbações físicas; as outras duas refletem a liberdade de coordenadas. As coordenadas de V_i abrangem o espaço bidimensional de perturbações físicas e descrevem movimentos rotacionais. A correspondente componente covariante da velocidade rotacional $\delta u_{\perp i}$, satisfazendo também a condição $(\delta u_{\perp i})^{,i} = 0$, é também uma invariante de gauge.

Perturbações tensoriais Para perturbações tensoriais

$$ds^2 = a^2[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j] ,$$

e h_{ij} não é alterado por transformação de coordenadas. Ele descreve ondas gravitacionais na forma de invariantes de gauge.

E.1.3 Sistema de coordenadas

Liberdade de gauge tem mais importantes manifestações em perturbações escalares que em perturbações vetoriais e tensoriais. Nós podemos usá-la para impor duas condições nas funções ϕ, ψ, B, E, $\delta\rho$ e o potencial das perturbações da velocidades $\delta u_{\parallel i} = \varphi_{,i}$. Isso é possível desde que estejamos livres para escolher as duas funções ξ^0 e ζ. Impor as condições do gauge é equivalente a fixar o sistema de coordenadas. Vamos agora considerar várias opções de gauge e mostrar como, conhecendo a solução para as variáveis invariantes de gauge, podemos calcular a métrica e a perturbação da densidade em qualquer sistema de coordenadas particular de uma forma simples.

Gauge Síncrono As coordenadas síncronas, onde $\delta g_{0\alpha} = 0$, têm sido usadas mais largamente na literatura. Em nossa notação, elas correspondem à escolha do gauge $\psi_s = 0$ e $B_s = 0$. Essas condições não fixam nenhum sistema de coordenadas único; existe uma classe inteira de sistemas de coordenadas síncronas. De (E.10), segue que se as condições $\psi_s = 0$ e $B_s = 0$ forem satisfeitas em algum sistema de coordenadas $x^\alpha \equiv (\eta, \mathbf{x})$, então elas também serão satisfeitas em um outro sistema de coordenadas $\tilde{x}^\alpha$, relacionado com x^α por

$$\tilde{\eta} = \eta + \frac{C_1}{a} , \qquad \tilde{x}^i = x^i + C_{1,i} \int \frac{d\eta}{a} + C_{2,i} ,$$

onde $C_1 \equiv C_1(x^j)$ e $C_2 \equiv C_2(x^j)$ são funções arbitrárias de coordenadas espaciais. *Esta liberdade de coordenadas residual leva ao aparecimento de modos de gauge não físicos, que dificultam a interpretação dos resultados, especialmente em escalas maiores do que o raio de Hubble onde C podem ser não nulos para qualquer valor de x.*

Se conhecermos uma solução para perturbações em termos das variáveis invariantes de gauge ou, equivalentemente, no sistema de coordenadas Newtoniano-conforme, então o comportamento das perturbações no sistema de coordenadas síncrono pode ser facilmente determinado sem precisar resolver as equações de Einstein novamente. Aplicando as condições que definem o gauge em (E.12), temos

$$\Psi = \frac{-1}{a}(aE_s')' , \qquad \Phi = \phi_s - \frac{a'}{a}E_s' .$$

Essas duas equações podem facilmente ser resolvidas para expressar ϕ_s e E_s em termos dos potenciais invariantes de gauge:

$$E_s = -\int \frac{1}{a}\left(\int^{\eta} a\Psi d\tilde{\eta}\right) d\eta \;, \qquad \Phi_s = \Phi - \frac{a'}{a}\int a\Psi d\eta \;.$$

Similarmente a $\bar{\delta\rho} = \delta\rho - \rho_0'(B - E')$ já calculado, segue que as perturbações para a densidade de energia são

$$\delta\rho_s = \delta\rho + \frac{\rho_0'}{a}\int a\ \Psi\ d\eta \;.$$

As constantes de integração que aparecem nessas fórmulas correspondem a modos fictícios não físicos.

No apêndice recriamos a métrica para o gauge síncrono para entender melhor as contas feitas aqui.

Gauge Newtoniano-conforme (Longitudinal) O gauge longitudinal é definido pelas condições $B_l = E_l = 0$. De (E.10) vemos que impondo as condições acima teremos fixado um único sistema de coordenadas. De fato, a condição $E_l = 0$ é violada por qualquer $\zeta \neq 0$, e usando esse resultado vemos que qualquer transformação temporal com $\xi^0 \neq 0$ destrói a condição $B_l = 0$. Portanto não há coordenada livre extra que preserve $B_l = E_l = 0$. No correspondente sistema de coordenadas a métrica toma a forma

$$ds^2 = a^2[-(1 + 2\psi_l)d\eta^2 + (1 + 2\phi_l)\delta_{ij}] \;.$$

Assumimos apenas perturbações escalares. Se a parte espacial do tensor energia-momento for diagonal, isso é, $T_{ij} \propto \delta_{ij}$, nós temos $\psi_l = \phi_l$ e resta apenas uma variável caracterizando a métrica com perturbações escalares. A variável ψ_l é a generalização do potencial Newtoniano, por esse motivo o nome "Newtoniano-conforme" para esse sistema de coordenadas. Como visto, Ψ, Φ, $\bar{\delta\rho}$, $\bar{u_\alpha}$, são variáveis invariantes de gauge e têm uma interpretação física simples: eles são as amplitudes da métrica, densidade e perturbações da velocidade no sistema Newtoniano-conforme, em particular, $\Psi = \psi_l$, $\Phi = \phi_l$.

E.2 Perturbação do tensor de Einstein

Para derivar as equações para as perturbações temos que linearizar as equações de Einstein

$$G^\alpha_\beta \equiv R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}g^\alpha_\beta R = 8\pi T^\alpha_\beta \;,$$

para pequenas inomogeneidades no universo de FLRW. O cálculo do tensor de Einstein para a métrica do background dada por

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j) \;,$$

é muito simples e o resultado é

$${}^{(0)}G^0_0 = \frac{3\mathcal{H}^2}{a^2} \;, \quad {}^{(0)}G^0_i = 0, \quad {}^{(0)}G^i_j = \frac{1}{a^2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\delta_{ij} \;.$$

É claro que para satisfazer as equações de Einstein para o background, o tensor energia-momento para a matéria, ${}^{(0)}T^{\alpha}_{\beta}$, precisa seguir as seguintes propriedades de simetria:

$$ {}^{(0)}T^{0}_{i} = 0, \quad {}^{(0)}T^{\alpha}_{\beta} \propto \eta \delta^{\alpha}_{\beta} \ . $$

Para uma métrica com pequenas perturbações. O tensor de Einstein pode ser escrito como

$$ G^{\alpha}_{\beta} = {}^{(0)}G^{\alpha}_{\beta} + \delta G^{\alpha}_{\beta} + \cdots \ , $$

onde $\delta G^{\alpha}_{\beta}$ denota termos lineares nas flutuações da métrica. O tensor energia-momento pode ser dividido da mesma forma resultando nas equações linearizadas para perturbações

$$ \delta G^{\alpha}_{\beta} = 8\pi \delta T^{\alpha}_{\beta} \ . \tag{E.16} $$

Nem $\delta G^{\alpha}_{\beta}$ nem $\delta T^{\alpha}_{\beta}$ são invariantes de gauge. No entanto, combinando-os com as perturbações da métrica podemos construir correspondentes quantidades invariantes de gauge.

Derivando as leis de transformação (E.6) para $\delta T^{\alpha}_{\beta}$, temos

$$ \delta \bar{T}^{\alpha}_{\beta} = \delta T^{\alpha}_{\beta} - {}^{(0)}T^{\alpha}_{\beta,\gamma}\xi^{\gamma} - {}^{(0)}T^{\alpha}_{\gamma}\xi^{\gamma}_{,\beta} + {}^{(0)}T^{\gamma}_{\beta}\xi^{\alpha}_{,\gamma} \ , $$

portanto,

$$ \begin{aligned} \delta \bar{T}^{0}_{0} &= \delta T^{0}_{0} - {}^{(0)}T^{0}_{0,\gamma}\xi^{\gamma} - {}^{(0)}T^{0}_{\gamma}\xi^{\gamma}_{,0} + {}^{(0)}T^{\gamma}_{0}\xi^{0}_{,\gamma} \\ &= \delta T^{0}_{0} - {}^{(0)}T^{0}_{0,\gamma}\xi^{\gamma} - {}^{(0)}T^{0}_{\gamma}(\xi^{\gamma}_{,0} - \xi^{0}_{,\gamma}) \\ &= \delta T^{0}_{0} - {}^{(0)}T^{0}_{0,\gamma}\xi^{\gamma} - {}^{(0)}T^{0}_{\gamma}(\xi^{\gamma}_{,0} - \underbrace{{}^{(0)}g_{0\alpha}}_{=-\delta_{0\alpha}}{}^{(0)}g^{\beta\gamma}\xi^{\alpha}_{,\beta}) \\ &= \delta T^{0}_{0} - {}^{(0)}T^{0}_{0,\gamma}\xi^{\gamma} - {}^{(0)}T^{0}_{\gamma}(\xi^{\gamma}_{,0} + {}^{(0)}g^{\beta\gamma}\xi^{0}_{,\beta}) \\ &= \delta T^{0}_{0} - {}^{(0)}T^{0}_{0,\gamma}\xi^{\gamma} - {}^{(0)}T^{0}_{0}\,\underbrace{(\xi^{0}_{,0} + \underbrace{{}^{(0)}g^{\beta 0}}_{=-\delta^{\beta 0}}\xi^{0}_{,\beta})}_{=0} \\ &= \delta T^{0}_{0} - {}^{(0)}T^{0}_{0,\gamma}\xi^{\gamma} \\ &= \delta T^{0}_{0} - ({}^{(0)}T^{0}_{0})'(B - E') \ , \end{aligned} \tag{E.17} $$

$$ \begin{aligned} \delta \bar{T}^{0}_{i} &= \delta T^{0}_{i} - {}^{(0)}T^{0}_{i,\gamma}\xi^{\gamma} - {}^{(0)}T^{0}_{\delta}\xi^{\delta}_{,i} + {}^{(0)}T^{\delta}_{i}\xi^{0}_{,\delta} \\ &= \delta T^{0}_{i} - {}^{(0)}T^{0}_{0}\xi^{0}_{,i} + {}^{(0)}T^{\delta}_{i}\xi^{0}_{,\delta} \\ &= \delta T^{0}_{i} - {}^{(0)}T^{0}_{0}\xi^{0}_{,i} + \frac{1}{3}{}^{(0)}T^{k}_{k}\delta^{\delta}_{i}\xi^{0}_{,\delta} \\ &= \delta T^{0}_{i} - {}^{(0)}T^{0}_{0}\xi^{0}_{,i} + \frac{1}{3}{}^{(0)}T^{k}_{k}\xi^{0}_{,i} \\ &= \delta T^{0}_{i} - \left({}^{(0)}T^{0}_{0} - \frac{1}{3}{}^{(0)}T^{k}_{k}\right)\xi^{0}_{,i} \\ &= \delta T^{0}_{i} - \left({}^{(0)}T^{0}_{0} - \frac{1}{3}{}^{(0)}T^{k}_{k}\right)(B - E')_{,i} \ , \end{aligned} \tag{E.18} $$

e

$$\begin{aligned}
\delta\bar{T}^i_j &= \delta T^i_j - {}^{(0)}T^i_{j,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}T^i_\gamma\xi^\gamma_{,j} + {}^{(0)}T^\gamma_j\xi^i_{,\gamma} \\
&= \delta T^i_j - {}^{(0)}T^i_{j,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}T^i_i\xi^i_{,j} + \underbrace{{}^{(0)}T^j_j}_{={}^{(0)}T^i_i}\xi^i_{,j} \\
&= \delta T^i_j - {}^{(0)}T^i_{j,\gamma}\xi^\gamma \\
&= \delta T^i_j - {}^{(0)}T^i_{j,0}\xi^0 \\
&= \delta T^i_j - ({}^{(0)}T^i_j)'(B - E') \ , \qquad \text{(E.19)}
\end{aligned}$$

é fácil perceber que eles são invariantes de gauge quando $B = E'$. Para calcular $\delta\bar{T}^0_i$ foi utilizado o fato de que

$$\begin{aligned}
{}^{(0)}T^i_i &= \delta^\beta_k {}^{(0)}T^k_\beta \\
&= \delta^\beta_k {}^{(0)}g_{\alpha\beta} {}^{(0)}T^{\alpha k} \\
&= \delta^\beta_k {}^{(0)}g_{\alpha\beta} {}^{(0)}g^{\alpha\beta} {}^{(0)}T^k_\beta \\
&= \delta^\beta_k \delta^\beta_\beta {}^{(0)}T^k_\beta \\
&= \delta^j_j \delta^j_k {}^{(0)}T^k_j \\
&= 3\delta^j_k {}^{(0)}T^k_j \Rightarrow \\
\Rightarrow {}^{(0)}T^k_j &= \frac{1}{3}\delta^k_j {}^{(0)}T^i_i \ .
\end{aligned}$$

De forma similar às (E.17)-(E.19), podemos construir

$$\delta\bar{G}^0_0 = \delta G^0_0 - ({}^{(0)}G^0_0)'(B - E'),$$

$$\delta\bar{G}^0_i = \delta G^0_i - \left({}^{(0)}G^0_0 + \frac{1}{3}{}^{(0)}G^k_k\right)(B - E')_{,i}$$

e

$$\delta\bar{G}^i_j = \delta G^i_j - ({}^{(0)}G^i_j)'(B - E') \ ,$$

e reescrever (E.16) como

$$\delta\bar{G}^\alpha_\beta = 8\pi\delta\bar{T}^\alpha_\beta \ .$$

Portanto, (E.16) é invariante usando as equações de Einstein não perturbadas. As componentes de $\delta\bar{T}^\alpha_\beta$ também podem ser decompostas em partes escalar, vetorial e tensorial; cada parte contribui apenas na evolução da correspondente perturbação.

Vamos estudar a partir de agora perturbações escalares. Um estudo detalhado sobre o lado esquerdo das equações de Einstein assumindo perturbações vetoriais e tensoriais pode ser encontrado em [259].

O tensor de Einstein perturbado, $\delta\bar{G}^\alpha_\beta$, é invariante de gauge e depende apenas das perturbações da métrica. No gauge newtoniano, ele pode ser expresso inteiramente em termos do potencial Newtoniano, $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, \eta)$, e do potencial que representa a perturbação na curvatura espacial, $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, \eta)$.

Iremos agora relembrar algumas equações importantes, mas para isso devemos deixar claro qual métrica usaremos. Para o estudo de perturbações utilizamos até agora $dx^\alpha = (d\eta, dx^i)$, ou seja,

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(g_{00}(\eta)d\eta^2 + 2g_{0i}(\eta)d\eta dx^i + g_{ij}(\eta)dx^i dx^j\right) \qquad (A) \ ,$$

onde $x^0 = \eta$, porém, é importante saber transformar os resultados para uma outra métrica onde $dx^\alpha = (dt, dx^i)$,

$$ds^2 = g_{00}(t)dt^2 + a^2(t)\left(2g_{0i}(t)dtdx^i + g_{ij}(t)dx^i dx^j\right) \qquad (B) \ ,$$

com $x^0 = t$. Essa importância se deve ao fato de termos agora um estudo mais abrangente que poderá ser utilizado em outros trabalhos. Note que se trocarmos as coordenadas η na métrica (A) pela coordenada t, teremos

$$ds^2 = g_{00}(t)dt^2 + a^2(t)\left(2g_{0i}(\eta)\frac{1}{a}dtdx^i + g_{ij}(t)dx^i dx^j\right) \ ,$$

ou seja, a parte que só aparece quando assumimos uma perturbação proporcional a dx^0dx^i da métrica (A) será proporcional a $d\eta dx^i$ com $x^0 = \eta$ e proporcional a $(1/a)dtdx^i$ com $x^0 = t$, enquanto na métrica (B) será proporcional a $dtdx^i$. Percebemos que nas mesmas coordenadas os resultados só serão diferentes nas componentes $0i$, e por um fator de a.

Tomando os cuidados mencionados acima, temos que

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(\eta)(1 + 2\Psi(\mathbf{x}, \eta)) \qquad \text{para} \quad (A) \quad \text{e} \quad x^0 = \eta \\ &= -(1 + 2\Psi(\mathbf{x}, t)) \qquad \text{para} \quad (B) \quad \text{e} \quad x^0 = t \ , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij}a^2(\eta)(1 + 2\Phi(\mathbf{x}, \eta)) \qquad \text{para} \quad (A) \quad \text{e} \quad x^0 = \eta \\ &= \delta_{ij}a^2(t)(1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)) \qquad \text{para} \quad (B) \quad \text{e} \quad x^0 = t \ . \end{aligned}$$

Levando em consideração que a métrica é diagonal, devido à $\Psi, \Phi << 1$, podemos expandir a métrica inversa em série de Taylor até a primeira ordem em Ψ

$$\begin{aligned} g^{00} &\approx \frac{-1 + 2\Psi(\mathbf{x}, \eta)}{a^2(\eta)} \qquad \text{para} \quad (A) \quad \text{e} \quad x^0 = \eta \\ &\approx -1 + 2\Psi(\mathbf{x}, t) \qquad \text{para} \quad (B) \quad \text{e} \quad x^0 = t \ , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g^{ij} &\approx \frac{1 - 2\Psi(\mathbf{x}, \eta)}{a^2(\eta)} \qquad \text{para} \quad (A) \quad \text{e} \quad x^0 = \eta \\ &\approx \frac{1 - 2\Psi(\mathbf{x}, t)}{a^2(t)} \qquad \text{para} \quad (B) \quad \text{e} \quad x^0 = t \ . \end{aligned}$$

Para calcular diretamente o tensor de Einstein perturbado precisamos lembrar que

$$\delta G^\alpha_\beta = \delta R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta \mathcal{R} g^\alpha_\beta \ ,$$

onde

$$R^\alpha{}_{\beta\sigma\gamma} = \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\gamma} \ ,$$

$$R_{\beta\gamma} = g^{\lambda\sigma} g_{\lambda\alpha} R^\alpha{}_{\beta\sigma\gamma} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\gamma} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\alpha\gamma} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} \ ,$$

$$R^\alpha_\beta = g^{\sigma\alpha} R_{\sigma\beta} \ ,$$

$$\mathcal{R} = R^\lambda{}_\lambda = g^{\lambda\lambda} R_{\lambda\lambda} \ ,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(g_{\beta\lambda,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\beta} - g_{\beta\sigma,\lambda}) \ .$$

A partir daqui utilizaremos a métrica (B) com $x^0 = t$ e depois passar para $x^0 = \eta$.

Nas próximas seções iremos resolver as equações de Einstein supondo perturbações cosmológicas, escalares, utilizando a equação de Boltzmann e perturbações hidrodinâmicas. Para isso precisamos dos cálculos abaixo.

E.3 Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel não serão calculados aqui por serem contas cansativas e mecânicas. Após uma série de cálculos obtemos

$$\Gamma^0_{00} = \Psi_{,0} \ , \tag{E.20a}$$

$$\Gamma^0_{i0} = \Gamma^0_{0i} = \Psi_{,i} \ , \tag{E.20b}$$

$$\Gamma^0_{ij} = \delta_{ij} a^2 [H(1 + 2\Phi - 2\Psi) + \Phi_{,0}] \ , \tag{E.20c}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{\Psi_{,i}}{a^2} \ , \tag{E.20d}$$

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \delta^i_j (H + \Phi_{,0}) \ , \tag{E.20e}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \delta_{ik}\Phi_{,j} + \delta_{ij}\Phi_{,k} - \delta_{jk}\Phi_{,i} \ , \tag{E.20f}$$

onde foram ignorados os termos quadráticos em Φ e Ψ, i.e., Φ^2, Ψ^2, $\Phi\Psi$, portanto, também ignorados $\Phi^2_{,0}$ e $\Phi\Phi_{,0}$. Vamos então trabalhar com o espaço de Fourier para facilitar as contas, faremos a transformação da parte espacial para a sua transformada no espaço de Fourier, $(x^1, x^2, x^3) \mapsto (k^1, k^2, k^3)$ ou $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, o tempo pode ser mantido igual.

Pela teoria das transformadas de Fourier, se f for uma função integrável definida em todo $\mathbb{R}^n$ onde a transformada de Fourier é bem definida, então há uma relação simples entre a transformada de Fourier, $\tilde{f}(\mathbf{k})$, com a transformada de Fourier da derivada com respeito a coordenada x^i, $\mathcal{F}(\partial_i f(\mathbf{x}))$,

$$\mathcal{F}(\partial_i f(\mathbf{x})) = ik_i \, \mathcal{F}(f(\mathbf{x})) = ik_i \, \tilde{f}(\mathbf{k}).$$

Isso significa que o operador derivada pode ser simplificado a um mero multiplicador no espaço de Fourier. Vamos usar essa propriedade nas funções Φ e Ψ. Temos dessa forma

$$\Gamma^0_{00} = \Psi_{,0} \ , \tag{E.21}$$
$$\Gamma^0_{i0} = \Gamma^0_{0i} = ik_i\Psi \ , \tag{E.22}$$
$$\Gamma^0_{ij} = \delta_{ij}a^2[H(1+2\Phi-2\Psi)+\Phi_{,0}] \ , \tag{E.23}$$
$$\Gamma^i_{00} = \frac{ik^i}{a^2}\Psi \ , \tag{E.24}$$
$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \delta^i_j(H+\Phi_{,0}) \ , \tag{E.25}$$
$$\Gamma^i_{jk} = i\Phi(\delta_{ik}k_j+\delta_{ij}k_k-\delta_{jk}k_i) \ , \tag{E.26}$$

onde os tils foram omitidos nessas funções transformadas.

E.4 Tensor de Ricci

É importante lembrar, já que o tensor de Ricci depende de produtos dos símbolos de Christoffel, que a transformada de Fourier do produto de duas funções é diferente do produto da transformada de Fourier de cada uma das funções, ou seja,

$$\mathcal{F}(f\cdot g) \neq \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g) \ .$$

Portanto, a princípio, para utilizar transformação do tensor de Ricci deveríamos obter a transformação dos produtos diretamente, não funcionaria utilizar simplesmente as equações (E.21) - (E.26). No entanto, já que estamos lidando com aproximações de primeira ordem, podemos desprezar esta diferença; símbolos de Christoffel que na verdade contêm produtos de Φ e Ψ se anulam, assim os restantes contêm termos que podem ser juntados. Por isso, vamos simplesmente substituir as expressões para as transformadas de Fourier dos símbolos de Christoffel na expressão geral para o tensor de Ricci, no caso da nossa teoria de perturbação linear.

E.4.1 Componente tempo-tempo

Fixando ambos os índices do tensor de Ricci com 0, temos

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} \\ &= \frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial t} + \partial_l\Gamma^l_{00} - \frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma^l_{0l}}{\partial t} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} \\ &= \underbrace{\partial_l\Gamma^l_{00}}_{\text{(I)}} \underbrace{-\frac{\partial\Gamma^l_{0l}}{\partial t}}_{\text{(II)}} + \underbrace{\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{00}}_{\text{(III)}} \underbrace{-\Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda}}_{\text{(IV)}} . \end{aligned}$$

Vamos calcular os termos acima no espaço de Fourier:

(I) Calculando diretamente

$$\partial_l \Gamma^l_{00} = -\frac{k^2}{a^2}\Psi \ ,$$

onde $k^2 = k^l k_l$.

(II):

$$-\frac{\partial \Gamma^l_{0l}}{\partial t} = -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 + \Phi_{,00}\right) \ .$$

(III) e (IV) Nesse caso, podemos abrir as somas deixando apenas os termos temporais. Com isto, após manipulações, temos

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{00} = (\Gamma^0_{00})^2 + \Gamma^0_{0m}\Gamma^m_{00} + \Gamma^l_{l0}\Gamma^0_{00} + \Gamma^l_{lm}\Gamma^m_{00} \ ;$$

$$-\Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} = -(\Gamma^0_{00})^2 - \Gamma^0_{0m}\Gamma^m_{00} - \Gamma^l_{00}\Gamma^0_{0l} - \Gamma^l_{0m}\Gamma^m_{0l} \ .$$

Juntando estas equações e aplicando os símbolos de Christoffel relevantes, temos

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} = -3(H^2 + 2H\Phi_{,0}) \ .$$

Então, juntando as expressões (I), (II), (III) e (IV) concluimos que

$$\boxed{R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}) \ .} \tag{E.27}$$

E.4.2 Componente espaço-espaço

Para $\mu = i$, $\nu = j$, a expressão para o tensor de Ricci é

$$R_{ij} = \underbrace{\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij}}_{\text{(I)}} \underbrace{-\partial_j \Gamma^\lambda_{\lambda i}}_{\text{(II)}} + \underbrace{\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{ij}}_{\text{(III)}} \underbrace{-\Gamma^\lambda_{j\sigma}\Gamma^\sigma_{i\lambda}}_{\text{(IV)}} \ .$$

Vamos proceder da mesma forma que no caso anterior.

(I)

$$\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} = \underbrace{\frac{\partial \Gamma^0_{ij}}{\partial t}}_{\text{(i)}} + \underbrace{\partial_k \Gamma^k_{ij}}_{\text{(ii)}} \ .$$

Temos que tratar cada termo separadamente. Aplicando (E.23), e lembrando da lei do produto de Leibniz, (i) resulta em

$$\frac{\partial \Gamma^0_{ij}}{\partial t} = \delta_{ij}\left[(2a^2H^2 + a^2\dot{H})(1 + 2\Phi - 2\Psi) + 2a^2H(2\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\Phi_{,00}\right] \ .$$

Por outro lado, (ii) nos fornece

$$\partial_k \Gamma^k_{ij} = -2k_i k_j \Phi + \delta_{ij} k^2 \Phi \ ,$$

então, (I) é escrita como

$$\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} = \delta_{ij}\left[(2a^2H^2 + a^2\dot{H})(1+2\Phi-2\Psi) + 2a^2H(2\Phi_{,0}-\Psi_{,0}) + k^2\Phi + a^2\Phi_{,00}\right] - 2k_ik_j\Phi \,.$$

(II) Esse caso é bem simples. O resultado é

$$-\partial_j \Gamma^\lambda_{\lambda i} = k_ik_j(\Psi + 3\Phi) \,.$$

(III) Como de costume, abrimos as duas somas em dois termos dependentes apenas do tempo e duas somas nos índices espaciais

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{ij} = \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{0k}\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{k0}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij} \,.$$

O segundo e o quarto termo são de segunda ordem, então, serão desprezados. Os outros dois termos nos dão um resultado final

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{ij} = \delta_{ij}\left[a^2H\Psi_{,0} + 3a^2H^2(1+2\Phi-2\Psi) + 6a^2H\Phi_{,0}\right] \,.$$

(IV) Novamente, vamos proceder da mesma forma que em (III), expandindo as somas em partes simples. O primeiro e o quarto termo são de segunda ordem; o segundo termo e o terceiro são idênticos, podemos então somá-los. A expressão resultante é

$$-\Gamma^\lambda_{j\sigma}\Gamma^\sigma_{i\lambda} = -\delta_{ij}\left[2a^2H^2(1+2\Phi-2\Psi) + 4a^2H\Phi_{,0}\right] \,.$$

Finalmente, substituindo $\dot{H} = (\ddot{a}/a) - H^2$ em (I), podemos juntar esses quatro termos e obter

$$\boxed{R_{ij} = \delta_{ij}\left[\left(2a^2H^2 + a\frac{d^2a}{dt^2}\right)(1+2\Phi-2\Psi) + a^2H(6\Phi_{,0}-\Psi_{,0}) + k^2\Phi + a^2\Phi_{,00}\right] + k_ik_j(\Phi+\Psi) \,.} \tag{E.28}$$

E.4.3 Componente espaço-tempo

Vamos fixar os índices, $\mu = 0$, $\nu = i$, e calcular R_{0i}

$$R_{0i} = \underbrace{\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{0i}}_{\text{(I)}} \underbrace{-\partial_i \Gamma^\lambda_{\lambda 0}}_{\text{(II)}} + \underbrace{\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{0i}}_{\text{(III)}} \underbrace{-\Gamma^\lambda_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda 0}}_{\text{(IV)}} \,. \tag{E.29}$$

Novamente, vamos abrir e simplicar o máximo possível cada um dos quatro termos acima (I), (II), (III) e (IV) separadamente

(I) Vamos dividir a soma em um termo dependente apenas do tempo e outra dependente dos índices espaciais

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{0i} &= \partial_0 \Gamma^0_{0i} + \partial_k \Gamma^k_{0i} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(ik_i\Psi) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\delta^k_i(H + \Phi_{,0})\right] \\
&= ik_i\Psi_{,0} + ik_i\Phi_{,0} \\
&= ik_i(\Psi_{,0} + \Phi_{,0}) \,.
\end{aligned}$$

(II) Vamos fazer aqui o mesmo feito em **(I)**, e aplicar (E.21) e (E.25):

$$\begin{aligned} -\partial_i \Gamma^{\lambda}_{\lambda 0} &= -\partial_i \left(\Gamma^0_{00} + \Gamma^k_{k0}\right) \\ &= -\partial_i \Psi_{,0} - \partial_i \left(3(H + \Phi_{,0})\right) \\ &= -ik_i \Psi_{,0} - 3ik_i \Phi_{,0} \\ &= -ik_i(\Psi_{,0} + 3\Phi_{,0}) \ . \end{aligned}$$

(III) Novamente nesse caso, precisamos prestar atenção quando separamos os termos dependentes do tempo e os dependentes das coordenadas espaciais, porque temos duas somas, uma sobre λ e a outra sobre σ. O resultado é

$$\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{0i} = \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{0i} + \Gamma^0_{0k}\Gamma^k_{0i} + \Gamma^k_{k0}\Gamma^0_{0i} + \Gamma^k_{kj}\Gamma^j_{0i} \ .$$

Se abrirmos o primeiro termo, fica claro que ele é de primeira ordem

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{0i} &= ik_k\delta^k_i \Psi(H + \Phi_{,0}) + 3ik_i\Psi(H + \Phi_{,0}) + i\delta^j_i \Phi(H + \Phi_{,0})(\delta_{kk}k_j + \delta_{kj}k_k - \delta_{jk}k_k) \\ &= ik_i H\Psi + 3ik_i H\Psi + 3ik_i H\Phi \\ &= ik_i H(4\Psi + 3\Phi) \ . \end{aligned}$$

(IV) Vamos proceder exatamente da mesma forma feita no caso anterior. Temos

$$-\Gamma^{\lambda}_{i\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda 0} = -ik_i H(2\Psi + 3\Phi) \ .$$

Colocando todos os termos juntos, obtemos

$$\boxed{R_{0i} = 2ik_i(H\Psi - \Phi_{,0}) \ .} \tag{E.30}$$

E.5 Escalar de Ricci

Como a métrica é diagonal, é possível provar que os elementos do tensor de Ricci que não estão na diagonal não são utilizados quando calculamos o escalar de Ricci. Essa prova não será feita aqui por não fazer parte do escopo desse trabalho, ela pode ser encontrada em bons livros de Relatividade Geral. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{R} =& g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\ =& (-1 + 2\Psi)R_{00} + 3\frac{1 - 2\Phi}{a^2}\left[\left(2a^2H^2 + a\frac{d^2a}{dt^2}\right)(1 + 2\Phi - 2\Psi) + a^2H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + \right. \\ & \left. + k^2\Phi + a^2\Phi_{,00}\right] + \frac{1 - 2\Phi}{a^2}k^2(\Phi + \Psi) \ . \end{aligned}$$

Aplicando (E.27),

$$\begin{aligned} \mathcal{R} =& (-1 + 2\Psi)\left(-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0})\right) + 3(1 - 2\Phi)\left[\left(2H^2 + \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}\right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot (1 + 2\Phi - 2\Psi) + H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + \frac{k^2}{a^2}\Phi + \Phi_{,00}\right] + (1 - 2\Phi)\left(\frac{k}{a}\right)^2(\Phi + \Psi) \ . \end{aligned}$$

Expandindo a expressão acima e cancelando os termos de segunda ordem, obtemos

$$\mathcal{R} = 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k^2}{a^2}\Psi + 3\Phi_{,00} - 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}) + 3\left(2H^2 + \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}\right) \cdot$$
$$\cdot (1 + 2\Phi - 2\Psi) + 3H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + \frac{k^2}{a^2}(4\Phi + \Psi) + 3\Phi_{,00} - 6\Psi\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - 6\Phi\left(2H^2 + \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}\right),$$

e finalmente

$$\boxed{\mathcal{R} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right) - 12\Psi\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right) + \frac{2k^2}{a^2}\Psi + 6\Phi_{,00} - 6H(\Psi_{,0} - 4\Phi_{,0}) + \frac{4k^2}{a^2}\Phi\ .} \tag{E.31}$$

Notamos, comparando a equação acima com o escalar de Ricci para um universo de FLRW sem perturbações (universo smooth), que

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{smooth}} + \delta\mathcal{R}\ ,$$

onde

$$\boxed{\delta\mathcal{R} = -12\Psi\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right) + \frac{2k^2}{a^2}\Psi + 6\Phi_{,00} - 6H(\Psi_{,0} - 4\Phi_{,0}) + \frac{4k^2}{a^2}\Phi\ .} \tag{E.32}$$

Então $\delta\mathcal{R}$ é o termo de correção quando introduzimos perturbações lineares.

E.6 Tensor de Einstein

Agora com as componentes do tensor de Ricci e com o escalar de Ricci fica fácil calcularmos as componentes do tensor de Einstein. Por facilidade calcularemos as componentes ${}^{\mu}{}_{\nu}$ e não as ${}_{\mu\nu}$, ou seja, o tensor com coordenadas mistas e não covariantes.

Dadas as perturbações para o tensor de Einstein, ainda não podemos obter a forma completa de suas equações pois precisamos das perturbações do tensor energia-momento, e não somos capazes de calculá-los explicitamente em termos dos componentes do universo antes de resolver a equação de Boltzmann, o que veremos adiante. Portanto, deixaremos as perturbações na sua forma fechada, $\delta T^{\alpha}{}_{\beta}$.

No final dessa seção passaremos os resultados da coordenada temporal para o tempo conforme, precisaremos saber algumas identidades

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(2\Phi - \Psi)' &= \frac{a'}{a} \cdot \frac{d}{d\eta}(2\Phi - \Psi) \\
&= a\dot{a}\frac{d}{dt}(2\Phi - \Psi) \\
&= a^2 H\frac{d}{dt}(2\Phi - \Psi)\ ,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 &= 2a\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2 \\ &= 2a\frac{d}{dt}\left(\frac{a'}{a}\right) + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \\ &= 2a\frac{d}{dt}(\dot{a}) + (\dot{a})^2 \\ &= a^2\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right) \ .\end{aligned}$$

Onde a linha representa uma derivada em relação ao tempo conforme e o ponto em relação ao tempo coordenada. Vamos utilizar também que

$$G^\alpha_\beta = {}^{(0)}G^\alpha_\beta + \delta G^\alpha_\beta \ .$$

E.6.1 Componente tempo-tempo

Pelo fato da métrica ser diagonal, temos que

$$G^0{}_0 = g^{\mu 0}G_{\mu 0} = g^{00}G_{00} \ .$$

Isto pode ser simplificado como

$$\begin{aligned}G^0{}_0 &= g^{00}\left(R_{00} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{00}\right) \\ &= (-1+2\Psi)R_{00} - \frac{\mathcal{R}}{2} \ .\end{aligned}$$

Substituindo o escalar de Ricci na equação acima e considerando apenas os termos relevantes, temos

$$G^0{}_0 = -3H^2 - 6H\Phi_{,0} + 6H^2\Psi - \frac{2k^2}{a^2}\Phi \ .$$

Sabemos que para a métrica de FLRW ${}^{(0)}G^0{}_0 = -3H^2$, portanto, o termo perturbativo pode ser escrito como

$$\delta G^0{}_0 = -6H\Phi_{,0} + 6H^2\Psi - \frac{2k^2}{a^2}\Phi \ . \tag{E.33}$$

Em um universo liso, temos $T^0{}_0 = -\rho$, no qual ρ é a densidade de energia total; aplicando esse termo e a componente tempo-tempo do tensor de Einstein não perturbado nas equações de Einstein, temos a equação de Friedmann para o background. Agora, se escrevermos

$$T^0{}_0 = -\rho + \delta T^0{}_0 \ ,$$

juntando a parte perturbada linearmente das equações de Einstein temos

$$\delta G^0{}_0 = -2\left[3H(\Phi_{,0} - H\Psi) + \frac{k^2}{a^2}\Phi\right] = 8\pi\delta T^0{}_0 \ .$$

Em termos do tempo conforme

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}\left(\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right) = -4\pi a^2 \delta T^0_{\ 0} \ , \tag{E.34}$$

ou, "saindo" do espaço de Fourier

$$\boxed{\Delta\Phi - 3\mathcal{H}\left(\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right) = 4\pi a^2 \delta T^0_{\ 0}} \ . \tag{E.35}$$

E.6.2 Componente espaço-espaço

Essa componente pode ser calculada da mesma forma que foi calculada a componente tempo-tempo,

$$\begin{aligned} G^i_{\ j} &= g^{ik} G_{kj} \\ &= g^{ik}\left(R_{kj} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\right) \\ &= \delta^{ik}\left(\frac{1-2\Phi}{a^2}\right) R_{kj} - \frac{\mathcal{R}}{2}\delta^i_j \ , \end{aligned} \tag{E.36}$$

aplicando a expressão para a componente R_{kj} do tensor de Ricci, (E.28), nós obtemos

$$G^i_{\ j} = A\delta^i_j + \frac{k^i k_j}{a^2}(\Phi + \Psi) \ , \tag{E.37}$$

onde definimos

$$A \equiv (1-2\Phi)\left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2\right)(1 + 2\Phi - 2\Psi) + H(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + \ddot{\Phi} + \frac{k^2}{a^2}\Phi\right] - \frac{1}{2}\mathcal{R} \ .$$

Podemos calcular essa componente de duas formas: (I) - calcular diretamente, o resultado é utilizado no estudo sobre perturbações hidrodinâmicas; (II) - calcular utilizando um operador de projeção longitudinal, será utilizada quando juntarmos as equações de Einstein com a equação de Boltzmann. Faremos abaixo das duas formas.

(I) Vamos abrir A em primeira ordem, lembrando que em primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2}\mathcal{R} =& -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right) + 6\Psi\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right) - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\ddot{\Phi} - 3H(4\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi \\ =& -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2\right)(1-2\Psi) + 3H^2(1-2\Psi) - \frac{k^2}{a^2}(\Psi + 2\Phi) - 3\ddot{\Phi} - \\ & - 3H(4\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi \ . \end{aligned}$$

Portanto, em primeira ordem,

$$\begin{aligned}
A &= \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a}+2H^2\right)(1-2\Psi)+H(6\Phi_{,0}-\Psi_{,0})+\Phi_{,00}+\frac{k^2}{a^2}\Psi\right]-3\left(\frac{\ddot{a}}{a}+2H^2\right)\times \\
&\quad \times(1-2\Psi)+3H^2(1-2\Psi)-\frac{k^2}{a^2}(\Psi+2\Phi)-3\ddot{\Phi}- \\
&\quad -3H(4\dot{\Phi}-\dot{\Psi})-2\frac{k^2}{a^2}\Psi \\
&= -2\ddot{\Phi}-H(6\dot{\Phi}-2\dot{\Psi})+\left(\frac{\ddot{a}}{a}+2H^2\right)(-2+4\Psi)+3H^2(1-2\Psi)- \\
&\quad -\frac{k^2}{a^2}(\Psi+\Phi)\ . \qquad \text{(E.38)}
\end{aligned}$$

Precisamos agora calcular ${}^{(0)}G^i_{\ j}$ em primeira ordem,

$$\begin{aligned}
{}^{(0)}G^i_{\ j} &= {}^{(0)}g^{ik(0)}G_{kj} \\
&= {}^{(0)}g^{ik}\left({}^{(0)}R_{kj}-\frac{1}{2}{}^{(0)}g_{kj}\mathcal{R}\right) \\
&= \delta^{ik(0)}R_{kj}-\frac{1}{2}\delta^{i(0)}_j\mathcal{R} \\
&= \delta^{ik}\delta_{kj}\frac{1}{a^2}(2\dot{a}^2+a\ddot{a})-\frac{1}{2}\delta^i_j\left(\frac{\ddot{a}}{a}+H^2\right) \\
&= \delta^i_j\left(2H^2+\frac{\ddot{a}}{a}-3\frac{\ddot{a}}{a}-3H^2\right) \\
&= -\delta^i_j\left(\frac{2\ddot{a}}{a}+H^2\right) \\
&= -\delta^i_j\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\ddot{a}}{a}+H^2\right)+\frac{2\ddot{a}}{a}+H^2\right]\ . \qquad \text{(E.39)}
\end{aligned}$$

Vamos agora substituir (E.39), (E.38) e (E.37) em (E.36),

$$\delta G^i_{\ j} = \delta^i_j\left\{A+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\ddot{a}}{a}+H^2\right)+\frac{2\ddot{a}}{a}+H^2\right]\right\}-\frac{k^ik_j(\Psi+\Phi)}{a^2}\ .$$

Considerando que não estamos mais no espaço de Fourier, ou seja

$$k^2=-\Delta, \qquad k^ik_j=-g^{il}\partial_l\partial_j,$$

vamos também utilizar o fato de que

$$\frac{\ddot{a}}{a}+2H^2=\frac{3}{2}H^2+\frac{1}{2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a}+H^2\right)$$

para calcularmos a componente do tensor de Einstein perturbado

$$
\begin{aligned}
\delta G^i_{\ j} =&\delta^i_j \left\{ -2\ddot{\Phi} - H(6\dot{\Phi} - 2\dot{\Psi}) + \left[\frac{3}{2}H^2 + \frac{1}{2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right)\right](-2+4\Psi) + \right. \\
&\left. \frac{3}{2}H^2(2-4\Psi) + \frac{\Delta}{a^2}(\Psi+\Phi) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + H^2\right) + \frac{2\ddot{a}}{a} + H^2\right]\right\} - g^{il}\frac{(\Psi+\Phi)_{,lj}}{a^2} \\
=&\delta^i_j \left[-2\ddot{\Phi} - 2H(3\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + \frac{1}{2}\left(2(\ddot{a}/a) + H^2\right)(-1+4\Psi) + \right. \\
&\left. + \frac{\Delta}{a^2}(\Psi+\Phi) + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{H^2}{2}\right] - g^{il}\frac{(\Psi+\Phi)_{,lj}}{a^2} \\
=& -2\delta^i_j\left[\ddot{\Phi} + H(3\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) - \Psi\left(2(\ddot{a}/a) + H^2\right) - \frac{\Delta}{2a^2}(\Psi+\Phi)\right] - g^{il}\frac{(\Psi+\Phi)_{,lj}}{a^2},
\end{aligned}
$$

utilizando o fato de que

$$
\Phi'' = \frac{d}{d\eta}\Phi' = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\Phi}{d\eta}\right) = a^2(\ddot{\Phi} + H\dot{\Phi}) \ ,
$$

para passar a equação acima de coordenada dependente do tempo para coordenada dependente do tempo conforme

$$
\delta G^i_{\ j} = -2\frac{\delta^i_j}{a^2}\left[\Phi'' + \mathcal{H}(2\Phi' - \Psi') - \Psi\left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right) - \frac{\Delta}{2}(\Psi+\Phi)\right] - g^{il}\frac{(\Psi+\Phi)_{,lj}}{a^2} \ .
$$

Substituindo o resultado nas equações de Einstein, obtemos

$$
\boxed{\delta^i_j\left[\Phi'' + \mathcal{H}(2\Phi' - \Psi') - \Psi\left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right) - \frac{\Delta}{2}(\Psi+\Phi)\right] + g^{il}(\Psi+\Phi)_{,lj} = -4\pi a^2 \delta T^i_j} \ . \tag{E.40}
$$

Em cosmologia temos muito geralmente que as perturbações são pequenas. O uso de não linearidade é raro e difícil. Significa gravitação forte, e apenas é utilizada em estruturas já formadas e muito densas.

(II) Veremos que a equação não tem dependência em A. Vamos definir o seguinte *operador projeção longitudinal*

$$
\mathcal{P}_i^j = \hat{k}_i\hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_i^j = \frac{k_i k^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta_i^j \ , \tag{E.41}
$$

e o aplicando em $G^i_{\ j}$. Vemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_i^j G^i_{\ j} &= \left(\frac{k_i k^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta_i^j\right)\left(A\delta_{ij} + \frac{\Phi+\Psi}{a^2}k_i k_j\right) \\
&= A + \frac{\Phi+\Psi}{a^2}k^2 - A - \frac{k^2}{3}\frac{\Phi+\Psi}{a^2} \\
&= \frac{2k^2}{3a^2}(\Phi+\Psi) \ .
\end{aligned}
$$

Portanto o operador projeção simplesmente cancela os termos que dependem de δ_{ij} (eles estão apenas em A). Podemos reescrever o tensor energia-momento como

$$T^i_{\ j} = p\delta_{ij} + \delta T^i_{\ j},$$

lembrando que, no background, as componentes espaciais de $T_{\mu\nu}$ são as mesmas e iguais a pressão, então temos

$$\mathcal{P}^j_i T^i_{\ j} = \mathcal{P}^j_i \delta T^i_{\ j} \ ,$$

pois o termo da pressão se anula. Multiplicando esse resultado por 8π e igualando os dois lados das equações de Einstein resulta que

$$\boxed{k^2(\Phi + \Psi) = 12\pi a^2(\mathcal{P}^j_i \delta T^i_{\ j}) \ .} \tag{E.42}$$

E.6.3 Componente espaço-tempo

Assim como a componente tempo-tempo do tensor de Einstein é fácil obter a componente espaço-tempo

$$\begin{aligned} G^0_{\ i} &= g^{0\mu}G_{\mu i} = g^{0\mu}\left(R_{\mu i} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu i}\right) \\ &= (-1 + 2\Psi)\delta_{0\mu}R_{\mu i} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\underbrace{\delta_{0i}}_{=0} \\ &= (-1 + 2\Psi)R_{0i} \ , \end{aligned}$$

aplicando (E.30) na equação acima

$$G^0_{\ i} = (-1 + 2\Psi)2ik_i(H\Psi - \dot{\Phi}),$$

e em primeira ordem

$$G^0_{\ i} = -2ik_i\left(H\Psi - \dot{\Phi}\right),$$

passando agora para o tempo conforme

$$G^0_{\ i} = -\frac{2ik_i}{a}\left(\mathcal{H}\Psi - \Phi'\right) \ .$$

Como ${}^{(0)}G^0_{\ i} = 0$, temos que $G^0_{\ i} = \delta G^0_{\ i}$. Vamos novamente "sair" do espaço de Fourier,

$$\delta G^0_{\ i} = -\frac{2}{a}\left(\mathcal{H}\Psi - \Phi'\right)_{,i} \ .$$

Precisamos igualar esta expressão a $8\pi T^0_{\ i}$. Isto é, como para o background ${}^{(0)}T^\mu_{\ \nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$, então $\delta T^0_{\ i} = T^0_{\ i}$. Temos portanto das equações de Einstein

$$\left(\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right)_{,i} = 4\pi a T^0_{\ i} \ , \tag{E.43}$$

para a métrica (B) com $x^0 = \eta$, para a métrica (A) com $x^0 = \eta$ temos

$$\boxed{\left(\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right)_{,i} = 4\pi a^2 T^0_{\ i}} \ . \tag{E.44}$$

Como já visto só haveria diferença entre os resultados para a métrica (B) e para a métrica (A) com $x^0 = \eta$ no caso ${}^{0}_{i}$.

Juntando os termos obtidos para o tensor de Einstein

$$\boxed{\delta^i_j \left[\Phi'' + \mathcal{H}(2\Phi' - \Psi') - \Psi\left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right) - \frac{\Delta}{2}(\Psi + \Phi) \right] + g^{il}(\Psi + \Phi)_{,lj} = -4\pi a^2 \delta T^i_j} \,. \tag{E.45}$$

$$\boxed{\Delta\Phi - 3\mathcal{H}\left(\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right) = 4\pi a^2 \delta T^0_{\ 0}} \,. \tag{E.46}$$

$$\boxed{\left(\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right)_{,i} = 4\pi a^2 T^0_i} \,. \tag{E.47}$$

E.7 Equações de Boltzmann

Para obtermos as equações de Einstein em uma forma onde o tensor energia-momento é escrito de forma explícita, precisamos obter as funções de distribuição para diferentes componentes do Universo. Com esse propósito, utilizaremos abaixo as equações de Boltzmann.

Se considerarmos perturbações nas densidades de matéria e de radiação, também deveremos considerá-las na métrica. As componentes do tensor métrico serão agora dadas por:

$$\begin{aligned} g_{00}(\mathbf{x}, t) &= -(1 + 2\Psi(\vec{x}, t)) \\ g_{0i}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ g_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \delta_{ij}(1 + 2\Phi(\vec{x}, t)), \end{aligned} \tag{E.48}$$

onde $\Psi(\vec{x}, t)$ é o potencial Newtoniano, e $\Phi(\vec{x}, t)$ é a perturbação na curvatura espacial. Como podemos ver, o tensor métrico acima só contém perturbações escalares da métrica e está escrito no *gauge Newtoniano conforme* - uma das vantagens desse gauge[3] é que o potencial newtoniano Ψ faz o papel do potencial gravitacional no limite newtoniano e por isso tem uma interpretação física. Esse gauge será influente nas operações, como o caso das que serão feitas abaixo, portanto as quantidade observáveis não serão alteradas. Também não serão consideradas perturbações vetoriais nem tensoriais.

Vamos revisar alguns conceitos importantes sobre Mecânica Estatística, as equações abaixo serão úteis para escrever o lado direito das equações de Einstein perturbadas.

E.7.1 Cálculos de mecânica estatística

O índice i representará uma certa espécie das partículas, distribuídas pela região Ω no espaço. Podemos definir a função de distribuição no espaço de fase como uma

[3] As equações para perturbações escalares, vetoriais, e tensoriais, não formam um conjunto completo de equações, isso porque ainda existe liberdade para fazer mudanças no sistema de coordenadas, da mesma ordem que perturbações físicas. O "gauge" é responsável por remover essa liberdade.

função de valor real que contém quantas partículas de uma dada espécie estão presentes em volta do ponto $\mathbf{x}$ com um momento em volta de $\mathbf{p}$. Portanto, se multiplicarmos essa função (representa um valor), $f_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, em um ponto pela energia $E(\mathbf{p}) = E(p)$ de uma única partícula, e somarmos sobre todas as partículas, teremos então um valor total para a energia das espécies. Dividindo por um elemento de volume do espaço de fase, que seu valor é calibrado pelo princípio de Heinserberg, nós encontramos que a densidade da espécie i será

$$\rho_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) E(p). \tag{E.49}$$

Na expressão acima g_i representa a degenerescência da espécie.

O momento p não é o momento comóvel, mas o momento próprio que decresce com a expansão. Estamos supondo um estado de equilíbrio para as partículas, como a função de distribuição não tem uma dependência explícita no tempo. Se considerarmos que a nossa distribuição é isotrópica e homogênea no equilíbrio, então ela não tem dependência com as direções e posições.

Vamos agora calcular a função de distribuição de Fermi-Dirac/Bose-Einstein. Primeiramente precisamos determinar a função de probabilidade de um sistema tal que o número de partículas não seja constante. Vamos considerar um sistema em contato com um reservatório térmico e com outro sistema com o qual possa trocar partículas. Consideramos também que a flutuação do número de partículas é pequeno em relação ao número médio de partículas e que esse sistema esteja em equilíbrio termodinâmico com o reservatório. Nesse caso temos que a probabilidade de encontar o sistema no estado r com energia E_r e n_r partículas é dada por

$$P_r = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E_r - \mu n_r)},$$

onde Ξ é uma constante de normalização, $\beta \equiv 1/T$ e μ é o potencial químico. A constante de normalização pode ser calculada lembrando que

$$\sum_r P_r = 1.$$

Temos portanto que a constante Ξ, ou *função de partição grande canônica*, é dada por

$$\Xi = e^{-\beta(E_r + \mu n_r)}.$$

Trabalharemos apenas com partículas idênticas, ou seja, considerando dois elétrons em posições diferentes do espaço, se trocarmos as duas partículas não notaremos diferença alguma. Não temos assim como rotular essas partículas, uma determinada partição $n_0, n_1, \ldots$ de n corresponde a apenas um estado do sistema. Utilizando o ensemble grande canônico em que a temperatura e o potencial químico são mantidos fixos, a probabilidade $P_s(n_s)$ de um orbital s estar ocupado por n_s partículas é dada por [4]

$$P_s(n_s) = \frac{1}{\zeta_s} e^{-\beta(\epsilon_s - \mu) n_s}, \tag{E.50}$$

[4] As contas explícitas podem ser encontradas em http://fig.if.usp.br/~oliveira/disc-intmecest.html.

em que

$$\zeta_s = \sum_{n_s} e^{-\beta(\epsilon_s+\mu)n_s}. \tag{E.51}$$

As partículas podem ser classificadas em dois tipos férmions e bósons, depende apenas do número de ocupação de um orbital. Os férmions seguem o princípio de Pauli, um orbital pode ser ocupado por só uma partícula, portanto $n_s = 0$ e 1. Já para os bósons, que não respeitam o princípio de Pauli, é possível haver mais de uma partícula em um mesmo orbital, $n_s = 0, 1, 2, \ldots$. Portanto, o número médio de ocupação, ou, se preferir, a função de distribuição, é dada por

$$f = \sum_{n_s} P_s = \frac{1}{\zeta_s} \sum_{n_s} e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)n_s}.$$

É fácil ver que

$$\sum_{n_s} e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)n_s} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\zeta_s,$$

portanto

$$\boxed{f = \frac{1}{\zeta_s}\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\zeta_s = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu} ln\zeta_s}. \tag{E.52}$$

- Para os férmions $(n_s = 0, 1)$

$$\zeta_s = 1 + e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)} \quad e \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\mu} = \beta e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}.$$

Temos de (E.52) que

$$f = \frac{1}{\beta}\left(1 + e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}\right)^{-1} \beta e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)} = \frac{e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s-\mu)} + 1}.$$

- Para os bósons $(n_s = 0, 1, 2, \ldots)$ por outro lado,

$$\begin{aligned}\zeta = \sum_{0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)n_s} =& \frac{\lim_{n_s\to\infty}\left(e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)} \cdot e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)n_s}\right) - \lim_{n_s\to 0} e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)n_s}}{e^{\beta(\epsilon_s-\mu)} - 1} \\ =& \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\mu} = -\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}\right)^2 \cdot \left(-\beta e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}\right) = \beta\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}\right)^2 \cdot \left(e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}\right).$$

Substituindo estes resultados em (E.52) temos

$$\begin{aligned}f =& \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}\right) \beta \left(1 - e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}\right)^2 \cdot \left(e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}\right) = \frac{e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_s-\mu)}} \\ =& \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s-\mu)} - 1}.\end{aligned}$$

Juntando as funções de distribuição de ordem zero de férmions e bósons obtidas acima em apenas uma equação obtemos que

$$\boxed{f = \frac{1}{e^{(E(p)-\mu)T} \pm 1}}.$$

O sinal positivo representa a distribuição de Fermi-Dirac enquanto o sinal negativo a distribuição de Bose-Einstein. Notamos que a temperatura T é meramente uma função do tempo para a distribuição de equilíbrio; isso é quase sempre verdade para o começo do Universo, quando as interações entre partículas eram tão intensas que tinham um estado de equilíbrio próximo.

Uma expressão similar ao da densidade da espécie i pode ser encontrada para a pressão $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \frac{p^2}{3E(p)}. \tag{E.53}$$

Essas expressões funcionam extremamente bem com as distribuições de Fermi-Dirac/Bose-Einstein quando considerado que o Universo respeita o princípio cosmológico (homogêneo e isotrópico); por exemplo, podemos aplicar a equação de densidade (E.49) para obter a quantidade de fótons no Universo quando a radiação CMB foi emitida, podemos mensurar a temperatura precisamente e estender o mecanismo estatístico.

No entanto, para um Universo perturbado, as funções de distribuição de Bose-Einstein/Fermi-Dirac não podem ser usadas; precisamos obter as perturbações de primeira ordem para elas, e é aí que utilizaremos a equação de Boltzmann. A equação de Boltzmann é utilizada para a análise dos fenômenos de transporte envolvendo gradientes de temperatura e densidade. Ela formaliza a taxa de variação de existência de uma certa espécie de partícula, que deverá ser igual à diferença entre a produção e a eliminação dessa espécie. A equação de Boltzmann é dada por:

$$\frac{df}{du} = C\left[f\right], \tag{E.54}$$

onde f é a função de distribuição - em geral depende de u, $\vec{x}$, e do quadrimomento P^μ no referencial comóvel -, u parametriza a trajetória da partícula e $C\left[f\right]$ é uma função que depende da função de distribuição, ela que contém a relação entre o que vai ser criado e aniquilado daquela espécie no processo.

Vamos usar a equação de Boltzmann para alguns componentes do Universo, para sabermos como eles interagem entre si. Baseamos as contas a seguir em [3] e [4].

Para nossas análises futuras vamos lembrar de algumas coisas:

- O quadrimomento P^μ do referencial comóvel se relaciona com o quadrimomento p^μ do referencial físico por $P^\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} p^\nu$;

- $p^i = p\hat{p}^i$, onde $\hat{p}^i$ é o versor de p^i;

• a densidade de números de partículas de uma espécie $\hat{\imath}$ é dada por $n_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i$;

• a densidade da velocidade média das partículas num elemento de volume situado em $\mathbf{x}$ é de $v_i = \frac{g_i}{n_i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i \frac{p^i}{E}$, onde g é o fator de degenerescência.

Por estarmos considerando o nosso Universo como sendo homogêneo e isotrópico, poderíamos descrever a evolução temporal das perturbações utilizando hidrodinâmica relativística, porém será utilizada a equação de Boltzmann, da teoria cinética relativística, no limite de meios contínuos, que é uma equação mais geral. No caso da radiação eletromagnética, a descrição é feita em termos de equações para as flutuações da temperatura da radiação. Sendo assim, é mais conveniente derivarmos as equações da evolução temporal das perturbações diretamente da equação de Boltzmann, por ser uma equação mais geral. A perturbação incluirá todos os termos existentes.

E.8 Conservação do tensor energia-momento e transformação de gauge

Para um universo homogêneo de FLRW com densidade de energia $\bar{\rho}(\tau)$ e pressão $\bar{P}(\tau)$, as equações de Einstein dão as seguintes equações de evolução para o fator de escala $a(\tau)$

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi}{3} G a^2 \rho - \kappa \ , \tag{E.55}$$

$$\dot{\mathcal{H}} = -\frac{4\pi}{3} G a^2 (\rho + 3P) \ . \tag{E.56}$$

onde o ponto $\dot{}$ denota derivada com respeito ao tempo conforme e κ é positivo, zero ou negativo para um universo fechado, plano ou aberto, respectivamente. Não consideramos aqui a constante cosmológica, para adicioná-la devemos somar $\bar{\rho} = \Lambda/8\pi G = -\bar{P}$ na equação acima.

As equações de Einstein com perturbação em até a primeira ordem no k-espaço no gauge síncrono é

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\mathcal{H}\dot{h} = -4\pi G a^2 \delta T^0_{\ 0} \quad \text{(Sín)} \ , \tag{E.57}$$

$$k^2\dot{\eta} = 4\pi G a^2 (\rho + P)\theta \quad \text{(Sín)} \ , \tag{E.58}$$

$$\ddot{h} + 2\mathcal{H}\dot{h} - 2k^2\eta = 8\pi G a^2 \delta T^i_{\ i} \quad \text{(Sín)} \ , \tag{E.59}$$

$$\ddot{h} + 6\ddot{\eta} + 2\mathcal{H}(\dot{h} + 6\dot{\eta}) - 2k^2\eta = -24\pi G a^2 (\rho + P)\sigma \quad \text{(Sín)} \ . \tag{E.60}$$

O "(Sín)" serve para diferenciar as componentes no gauge síncrono com a equação utilizando as componentes no gauge Newtoniano "(New)". As variáveis θ e σ são definidas como

$$(\rho + P)\theta \equiv -ik^j \, \delta T^0_{\ j} \ , \quad (\rho + P)\sigma \equiv -\left(\hat{\vec{k}}_i \cdot \hat{\vec{k}}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \Sigma^i_{\ j} \ , \tag{E.61}$$

e $\Sigma^i{}_j \equiv T^i{}_j - \delta^i{}_j T^k_k/3$ denota a componente sem traço de $T^i{}_j$. Quando consideradas diferentes componentes do universo, fazemos

$$\theta = \sum_{\text{componentes}} \theta_i \ , \quad \sigma = \sum_{\text{componentes}} \sigma_i \ , \tag{E.62}$$

onde i percorre todas as espécies de partículas.

No gauge Newtoniano conforme, em primeira ordem de perturbação as Eqs. de Einstein são escritas como

$$k^2\phi + 3\mathcal{H}\left(\dot{\phi} + \mathcal{H}\psi\right) = -4\pi G a^2 \delta T^0_{\ 0} \quad \text{(New)} \ , \tag{E.63}$$

$$k^2\left(\dot{\phi} + \mathcal{H}\psi\right) = 4\pi G a^2 (\rho + P)\theta \quad \text{(New)} \ , \tag{E.64}$$

$$\ddot{\phi} + 2\mathcal{H}\left(\dot{\psi} + 2\dot{\phi}\right) + \left(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\right)\psi + \frac{k^2}{3}(\phi - \psi) = -\frac{4\pi}{3} G a^2 \delta T^i{}_i \quad \text{(New)} \ , \tag{E.65}$$

$$k^2(\phi - \psi) = 12\pi G a^2 (\rho + P)\sigma \quad \text{(New)} \ . \tag{E.66}$$

Vamos agora calcular a transformação da perturbação do tensor energia-momento nos dois gauges. Para um fluido perfeito de densidade de energia ρ e pressão P, o tensor energia-momento tem a forma (A.31)

$$T^\mu_{\ \nu} = P g^\mu_{\ \nu} + (\rho + P) u^\mu u_\nu \ , \tag{E.67}$$

onde

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{\left(-ds^2\right)^{1/2}} \tag{E.68}$$

é a quadrivelocidade do fluido. A pressão P e a densidade de energia ρ de um fluido perfeito em um dado ponto são definidos como a pressão e a densidade de energia medidos por um observador comóvel em repouso no fluido no momento das medidas. Para um fluido se movendo com uma coordenada de velocidade pequena $v^i \equiv dx^i/d\tau$, v^i pode ser tratado como uma perturbação da mesma ordem que $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$, $\delta P = P - \bar{P}$ e as perturbações da métrica [205]. O tensor energia-momento em ordem linear de perturbação é escrito como

$$T^0_{\ 0} = -\left(\rho - \delta\rho\right) \ , \tag{E.69}$$

$$T^0_{\ i} = (\rho + P)\, v_i = -T^i_{\ 0} \ , \tag{E.70}$$

$$T^i{}_j = (P - \delta P)\, \delta^i{}_j + \Sigma^i{}_j \ , \quad \text{com} \quad \Sigma^i{}_i = 0 \ , \tag{E.71}$$

onde permitimos uma perturbação de cisalhamento anisotrópica $\Sigma^i{}_j$ em $T^i{}_j$. Notamos que para um fluido, θ definido na Eq. (E.61) é simplesmente a divergência da velocidade do fluido

$$\theta = -ik^j v_j \ . \tag{E.72}$$

O tensor energia-momento $T^{\mu}_{\ \nu}$ (Sín) no gauge síncrono se relaciona com o $T^{\mu}_{\ \nu}$ (New) no gauge Newtoniano conforme

$$T^{\mu}_{\ \nu}\,(\text{Sín}) = \frac{\partial \hat{x}^{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial \hat{x}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} T^{\sigma}_{\ \rho}\,(\text{New}) \ , \tag{E.73}$$

onde $\hat{x}^{\mu}$ e x^{μ} denotam as coordenadas do gauge síncrono e Newtoniano conforme, respectivamente. Em primeira ordem de perturbação,

$$T^{0}_{\ 0}\,(\text{Sín}) = T^{0}_{\ 0}\,(\text{New}) \ , \tag{E.74}$$
$$T^{0}_{\ j}\,(\text{Sín}) = T^{0}_{\ j}\,(\text{New}) + i\,k_j\,\alpha(\rho + P) \ , \tag{E.75}$$
$$T^{i}_{\ j}\,(\text{Sín}) = T^{i}_{\ j}\,(\text{New}) \ , \tag{E.76}$$

onde $\alpha = \hat{x}^0 - x^0 = \left(\dot{h} + 6\dot{\eta}\right)/2k^2$ no espaço k. Definimos aqui que

$$\delta \equiv -\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta T^{0}_{\ 0}}{\rho} \ . \tag{E.77}$$

Calculando as perturbações nos mesmos valores para as coordenadas no espaço-tempo, obtemos

$$\delta\,(\text{Sín}) = \delta\,(\text{New}) + \alpha\frac{\dot{\rho}}{\rho} \ , \tag{E.78}$$
$$\theta\,(\text{Sín}) = \theta\,(\text{New}) + \alpha\,k^2 \ , \tag{E.79}$$
$$\delta P\,(\text{Sín}) = \delta P\,(\text{New}) + \alpha\dot{P} \tag{E.80}$$
$$\sigma\,(\text{Sín}) = \sigma\,(\text{New}) \ . \tag{E.81}$$

Esta transformação também é aplicada aos componentes individuais [205].

A conservação do tensor energia-momento é uma consequência das equações de Einstein. A parte perturbada das equações de conservação do tensor energia-momento

$$T^{\mu\nu}_{\ \ \ ;\mu} = \partial_{\mu}T^{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\ \alpha\beta}T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\ \alpha\beta}T^{\nu\beta} \ , \tag{E.82}$$

no k-espaço implica nas equações de perturbação no dois gauges [205]

Gauge síncrono [5]

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\delta} =& (1+w)\left(-\theta + \frac{\dot{h}}{2}\right) - 3H\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - w\right)\delta \ , && \text{(E.83a)} \\ \dot{\theta} =& -H(1-3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1+w}\theta + \frac{\delta P/\delta\rho}{1+w}k^2\delta + k^2\sigma \ . && \text{(E.83b)} \end{aligned}}$$

Gauge Newtoniano conforme

[5] O programa CAMB utiliza esse gauge.

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\delta} =& -(1+w)\left(\theta + 3\dot{\phi}\right) - 3H\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - w\right)\delta\ ,\\ \dot{\theta} =& -H(1-3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1+w}\theta + \frac{\delta P/\delta\rho}{1+w}k^2\delta + k^2\sigma - k^2\psi\ .\end{aligned}}$$

(E.84a)

(E.84b)

Para perturbações primordiais isentrópicas consideradas nesse estudo, as equações acima simplificam desde que

$$\delta P = c_s^2\,\delta\rho\ , \tag{E.85}$$

onde

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = w + \rho\,\frac{dw}{d\rho} \tag{E.86}$$

é a velocidade do som adiabática ao quadrado.

No nosso caso estamos considerando três componentes, a DE, a DM e um neutrino escuro. Estamos tratando a DE como um campo escalar, nesse caso, como visto em [204], $c_{s,\phi}^2 = 1$. A DM têm uma equação de estado já conhecida onde $\delta P/\delta\rho = w = 0$. O neutrino escuro representa uma componente semelhante ao neutrino porém no setor escuro do universo, a sua equação de estado será chamada de w_ν. Dessa forma obtemos as equações de perturbação para os fluidos escuros

$$\dot{\delta}_{\phi^+} + 6H\delta_{\phi^+} = -\,\Gamma\delta_{\phi^+}\ , \tag{E.87}$$

$$\dot{\delta}_{\phi^0} + 6H\delta_{\phi^0} = \mu_{\phi^0}\Gamma\delta_{\phi^+}\ , \tag{E.88}$$

$$\dot{\delta}_{\psi} + \theta_{\psi} + \frac{\dot{h}}{2} = \mu_{\psi}\Gamma\delta_{\phi^+}\ , \tag{E.89}$$

$$\dot{\delta}_{\nu} + (1+w_\nu)\left(\theta_\nu + \frac{\dot{h}}{2}\right)\delta = \left(1 - \mu_{\phi^0} - \mu_{\psi}\right)\Gamma\delta_{\phi^+}\ , \tag{E.90}$$

Precisamos primeiro calcular o lado direito das equações de Einstein, para isso utilizaremos os resultados encontrados anteriormente.

Componente tempo-tempo das equações de Einstein Considerando a componente tempo-tempo das equações de Einstein perturbadas, e lembrando que o tensor energia-momento perturbado em até a primeira ordem é $T^0_{\ 0} = -\rho + \delta\rho$, usando a (E.49)

$$\rho = \sum_{\text{componentes}} g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_i(p) f_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t),$$

para obter a contribuição da energia de cada componente do universo separadamente, ou seja, a soma das densidades de energia de fótons, neutrinos, energia escura, matéria escura e bárions.

Utilizaremos as equações calculadas anteriormente no espaço de Fourier, porém, por facilidade não colocaremos o til.

Fótons Já vimos que a função de distribuição perturbada para fótons é dada por

$$f_\gamma = f_\gamma^{(0)} - p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\theta.$$

Como a degenerescência do spin para os fótons é 2, a contribuição é escrita como

$$(T^0_{\ 0})_\gamma = -2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p\left(f_\gamma^{(0)} - p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\theta\right).$$

O primeiro termo é simplesmente a densidade de energia não perturbada para fótons. Vamos então considerar o segundo. A integral pode ser resolvida por partes, como de costume, permitindo que a função de distribuição desapareça rapidamente, o suficiente para que quaisquer ordens de p possam impedir a anulação do segundo termo, e o resultado final é

$$(T^0_{\ 0})_\gamma = \rho_\gamma^{(0)}(1+4\theta_0).$$

Lembrando que o fator de degenerescência foi absorvido em $f_\gamma^{(0)}$.

Neutrinos Para os neutrinos a densidade de energia é idêntica à densidade dos fótons,

$$(T^0_{\ 0})_\nu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p\left(f_\nu^{(0)} - p\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial p}N\right) = \rho_\nu^{(0)}(1+4N_0),$$

onde N_0 é a densidade não perturbada do neutrino.

Energia escura Para a energia escura temos simplesmente $\rho_{ee} = \rho_{ee}^{(0)}$, pois estamos considerando que essa é homogênea.

Matéria escura e bárions Para a matéria escura e bárions , as densidades de energias são definidas por $\rho_{me}^{(0)}(1+\delta_{me})$ e $\rho_b^{(0)}(1+\delta_b)$, respectivamente.

Somando as densidades de energia dos componentes do universo e passando para o espaço de Fourier (sem o til), obtemos

$$T^0_{\ 0} = \rho_\gamma^{(0)}(1+4\theta_0) + \rho_\nu^{(0)}(1+4N_0) + \rho_{ee} + \rho_{me}^{(0)}(1+\delta_{me}) + \rho_b^{(0)}(1+\delta_b).$$

Substituindo a equação acima em (E.35) e agrupando os termos de ordem zero e de ordem um, obtemos, respectivamente

$$\boxed{H^2 = \frac{1}{3/\sqrt{8\pi}}\left(\rho_\gamma^{(0)} + \rho_\nu^{(0)} + \rho_{ee} + \rho_{me}^{(0)} + \rho_b^{(0)}\right)} \tag{E.91}$$

e

$$3H\frac{\partial\Phi}{\partial t} - 3H^2\Psi + \frac{k^2}{a^2}\Phi = \frac{1}{2/\sqrt{8\pi}}\left(4\rho_\gamma^{(0)}\theta_0 + 4\rho_\nu^{(0)}N_0 + \rho_{me}^{(0)}\delta_{me} + \rho_b^{(0)}\delta_b\right). \tag{E.92}$$

A (E.92) é a equação de Friedmann para um universo plano. Reescrevendo (E.92) em função do tempo conforme η temos

$$\boxed{3\mathcal{H}\left(\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right) + k^2\Phi = \frac{a^2}{2/\sqrt{8\pi}}\left(4\rho_\gamma^{(0)}\theta_0 + 4\rho_\nu^{(0)}N_0 + \rho_{me}^{(0)}\delta_{me} + \rho_b^{(0)}\delta_b\right)}. \tag{E.93}$$

Componente espaço-espaço das equações de Einstein Vamos considerar a parte espacial das equações de Einstein para obter mais uma equação. Utilizaremos o resultado utilizando o operador projeção para isso, (E.42):

$$\delta^i_j\left[\Phi'' + \mathcal{H}(2\Phi' - \Psi') - \Psi\left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right) - \frac{\Delta}{2}(\Psi + \Phi)\right] + (\Psi + \Phi)_{,ij} = -4\pi a^2\delta T^i_j.$$

Vamos encontrar uma forma para o lado direito da equação acima. Começaremos com a definição geral do tensor energia-momento, escrevendo o mesmo da forma mais conveniente

$$(T^\mu{}_\nu)_{\text{componente k}} = g_k\int\frac{dP_1dP_2dP_3}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{P^\mu P_\nu}{P^0}f_k(\mathbf{p}), \tag{E.94}$$

onde k denota o k-ésimo componente do universo, descrito pela função de distribuição $f_k(\mathbf{p})$, e onde $g \equiv det(g_{\mu\nu})$.

Utilizaremos um tensor métrico FLRW não perturbado, pois queremos apenas a parte perturbada do tensor energia momento. Se tivermos uma métrica perturbada então o resultado dos termos perturbados serão de segunda ordem, e poderão ser desprezados. Dessa forma

$$\begin{aligned} p^2 &= g_{ij}P^iP^j \\ &= g^{ij}P_iP_j \\ &= \frac{1}{a^2}\left(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{P_i}{a}.$$

Utilizando $p_i = p\hat{p}_i$ na equação acima temos

$$P_i = ap\hat{p},$$

$$dP_i = dp \Rightarrow dP_1dP_2dP_3 = a^3d^3p.$$

Em (E.94) nós temos P com o índice em cima, para obtê-lo utilizaremos (F.2) com $\Phi = 0$. Então

$$P^i = \frac{p\hat{p}^i}{a}.$$

A componente zero do quadri-momento P para esse caso será a energia da partícula calculada por (F.1),

$$P^0 = \sqrt{p^2 + m^2} \equiv E(p).$$

Finalmente, utilizando o tensor métrico FLRW não perturbado, onde $\sqrt{-g} = a^3$ e juntando todas essas expressões em (E.94), depois de alguma álgebra temos

$$(T^i{}_j)_{componentek} = g_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{E_k(p)} \hat{p}^i \hat{p}_j f_k(\mathbf{p}).$$

Vamos aplicar agora o operador projeção, $\mathcal{P}_i^j = \hat{k}_i \hat{k}^j - (1/3)\delta_i^j$. Como $\hat{p}^i \hat{p}_i = 1$, podemos reorganizar o operador projeção de tal forma que $\hat{k}_i \hat{k}^j - (1/3)\delta_i^j = (2/3)P_2(\hat{k}, \hat{p})$, onde P_2 é o polinômio de Legendre de ordem 2. Sendo assim

$$\mathcal{P}_i^j T^i{}_j = \frac{2}{3} \sum_{\text{componentes k}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{P_2\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)}{E_k(p)} \hat{p}^i \hat{p}_j f_k(\mathbf{p}). \tag{E.95}$$

Como aparece $P_2\left(\hat{k} \cdot \hat{p}\right)$ no integrando, a expressão acima será proporcional aos momentos de quadrupolos das distribuições. *As partículas não relativísticas, como as de matéria escura e os bárions, têm momentos de quadrupolo desprezíveis*, pois quanto maior o momento angular maior a velocidade. Assim sendo, somente os fótons e os neutrinos contribuirão para o último membro da igualdade acima. Calculando a contribuição dos fótons, temos

$$\begin{aligned} 2\frac{2}{3} \int \frac{dp}{4\pi^2} p^4 \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \int^{\pi_0} d\left(cos(\alpha)\right) P_2\left(cos(\alpha)\right) \theta\left(cos(\alpha)\right) &= 2\frac{2}{3}\theta_2 \int \frac{dp}{2\pi^2} p^4 \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \\ &= -\frac{8}{3}\rho_\gamma^{(0)}\theta_2, \end{aligned}$$

onde $cos(\alpha) = \hat{k} \cdot \hat{p}$. O fator 2, em evidência no lado esquerdo na igualdade acima, é o fator de degenerescência dos fótons. A contribuição dos neutrinos terá uma expressão idêntica. Substituindo estas duas expressões em (E.95) temos

$$\mathcal{P}_i^j T_j^i = -\frac{8}{3}\left(\rho_\gamma^{(0)}\theta_2 + \rho_\nu^{(0)} N_2\right).$$

Multiplicando por $\sqrt{8\pi}$ e igualando a (E.35), obtemos

$$\boxed{k^2(\Phi - \Psi) = -8\sqrt{2\pi}a^2\left(\rho_\gamma^{(0)}\theta_2 + \rho_\nu^{(0)} N_2\right)}. \tag{E.96}$$

Existe também a possibilidade de perturbações vetoriais e tensoriais da métrica. Não há, no entanto, evidência em favor de perturbações tensoriais. As perturbações escalares são as únicas que se acoplam com as perturbações na densidade da matéria, sendo portanto as únicas associadas com a formação de estrutura. São também as mais importantes a se acoplarem com as perturbações de temperatura dos fótons. Por outro lado, graças ao *teorema da decomposição*, perturbações escalares, vetoriais e tensoriais não se acoplam.

Juntando os resultados

$$\boxed{H^2 = \frac{1}{3/\sqrt{8\pi}}\left(\rho_\gamma^{(0)} + \rho_\nu^{(0)} + \rho_{ee} + \rho_{me}^{(0)} + \rho_b^{(0)}\right)}\ , \tag{E.97}$$

$$\boxed{3\mathcal{H}\left(\Phi' - \mathcal{H}\Psi\right) + k^2\Phi = \frac{a^2}{2/\sqrt{8\pi}}\left(4\rho_\gamma^{(0)}\theta_0 + 4\rho_\nu^{(0)}N_0 + \rho_{me}^{(0)}\delta_{me} + \rho_b^{(0)}\delta_b\right)}\ , \tag{E.98}$$

$$\boxed{k^2(\Phi - \Psi) = -8\sqrt{2\pi}a^2\left(\rho_\gamma^{(0)}\theta_2 + \rho_\nu^{(0)}N_2\right)}. \tag{E.99}$$

E.9 Perturbações hidrodinâmicas no tensor energia-momento

Perturbações hidrodinâmicas também são perturbações cosmológicas. Vamos considerar um fluido perfeito com o tensor energia-momento dado por

$$T^\mu_{\ \nu} = Pg^\mu_{\ \nu} + (\rho + P)u^\mu u_\nu\ .$$

Vamos considerar apenas perturbações em P e ρ, não especificando sobre qual componente do universo estamos nos referindo. É facilmente verificado que as perturbações invariantes de gauge, definidas em (E.17)-(E.19), podem ser escritas como

$$\bar{\delta T}^0_{\ 0} = \bar{\delta\rho}, \quad \bar{\delta T}^0_{\ i} = \frac{1}{a}(\rho_0 + P_0)(\bar{\delta u}_{\parallel i} + \delta u_{\perp i}), \quad \bar{\delta T}^i_{\ j} = -\bar{\delta P}\delta^i_j, \tag{E.100}$$

onde $\bar{\delta\rho}$, $\bar{\delta u}_{\parallel i}$ e $\bar{\delta P}$ são definidas em (E.13), (E.14) e (E.15). O único termo que contribui para a perturbação vetorial é proporcional a $\delta u_{\parallel i}$, todos os outros termos têm a mesma forma estrutural que as perturbações escalares na métrica.

Vamos ver apenas as perturbações escalares. Para ler sobre perturbações vetoriais ver [259].

Desde que $\delta T^i_{\ j} = 0$ para $i \neq j$, (E.40) se reduz a

$$(\Psi + \Phi)_{,ij} = 0 \qquad (i \neq j).$$

A única solução consistente para a equação acima é $\Phi = -\Psi$. Utilizando essa relação e substituindo (E.100) em (E.35), (E.40) e (E.44) obtemos as seguintes equações

$$\boxed{\Delta\Psi - 3\mathcal{H}\left(\Psi' + \mathcal{H}\Psi\right) = -4\pi a^2\bar{\delta\rho}}, \tag{E.101}$$

$$\boxed{\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi = -4\pi a^2\bar{\delta P}}, \tag{E.102}$$

$$\boxed{(a\Psi)_{,i} = -4\pi a^2(\rho_0 + P_0)\bar{\delta u}_{\parallel i}}. \tag{E.103}$$

Em um universo que não está se expandindo $\mathcal{H} = 0$, a primeira equação coincide com a equação de Poisson para o potencial gravitacional. Em um universo em expansão, o segundo e o terceiro termo do lado esquerdo de (E.101) é suprimido na sub escala de Hubble por um fator da ordem de λ/H^{-1}, e então ele pode ser desprezado. Então (E.101) generaliza a equação de Poisson e suporta a interpretação de Ψ como uma generalização relativística do potencial gravitacional Newtoniano. Note que, em escalas menores que o raio de Hubble, (E.101) pode ser aplicada mesmo para inomogeneidades não-lineares, porque isso requer apenas $|\Psi| << 1$ mas não necessariamente $|\delta\rho/\rho_0| << 1$. Em (E.103) temos que a derivada no tempo conforme de $(a\Psi)'$ é tratada como o potencial da velocidade.

Dado $P(\rho, S)$, a flutuação da pressão δP pode ser expressa em termos da densidade de energia e perturbações da entropia[6],

$$\boxed{\bar{\delta P} = c_s^2 \bar{\delta\rho} + \sigma\delta S}, \tag{E.104}$$

onde $\sigma \equiv (\partial P/\partial S)_\rho$. Substituindo essa equação em (E.102),

$$\begin{aligned} \Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi &= -4\pi a^2 \bar{\delta P} \\ &= -4\pi a^2 (c_s^2 \bar{\delta\rho} + \sigma\delta S) \end{aligned}$$

substituindo agora (E.101) na equação acima, obtemos a forma fechada da equação para o potencial gravitacional

$$\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi = -4\pi a^2\sigma\delta S + c_s^2\left[\Delta\Psi - 3\mathcal{H}\left(\Psi' + \mathcal{H}\Psi\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\Psi'' + 3(1 + c_s^2)\mathcal{H}\Psi' - c_s^2\Delta\Psi + \left[2\mathcal{H}' + \left(1 + 3c_s^2\right)\mathcal{H}^2\right]\Psi = -4\pi a^2\sigma\delta S}. \tag{E.105}$$

É possível encontrar as soluções exatas dessa equação em dois casos particulares: para a matéria não relativística com pressão igual a zero; para fluido relativístico com a equação de estado constante $P = w\rho$.

[6] Expressão importante para o cálculo de acreção.

Apêndice F

Eq. de Boltzmann para os componentes do universo

F.1 A equação de Boltzmann para matéria escura

A matéria escura só interage com outros componentes do espaço gravitacionalmente, então $C\left[f_{DM}\right] = 0$. Deve ser possível obter as equações que governam seu comportamento pelas equações de um fluido relativístico obtidas pela continuidade do tensor energia-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. A DM tem sido tratada como fluido clássico, se for apenas um fluido não há eq. de Boltzmann associada a ela. A Eq. de Boltzmann é sempre a equação de movimento de uma partícula quântica enquanto a conservação da energia é a equação de movimento de um fluido, que nesse caso será da parte escura. A princípio, as equações de Euler e da continuidade para a matéria escura deveriam ser suficientes, e deveríamos esperar obtê-las usando qualquer outro formalismo válido. Chegaremos nelas utilizando a equação de Boltzmann.

$$ds^2 = -d\tau^2 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -1 \Rightarrow$$
$$\left(m\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -m^2 \Rightarrow$$
$$g_{\mu\nu}P^\mu P_\nu = -m^2$$

onde m é a massa da partícula de matéria escura. Usando $P^\mu P_\mu = p^\mu p_\mu$ e (E.48), vamos calcular P^0 e P^i. Abrindo a equação acima temos

$$g_{00}\left(P^0\right)^2 + \underbrace{g_{0i}}_{=0} P^0 P^i + \underbrace{g_{i0}}_{=0} P^i P^0 + \underbrace{g_{ij} P^i P^j}_{\equiv p^2 = ||\mathbf{p}||^2} = -m^2 \Rightarrow$$

$$g_{00}\left(P^0\right)^2 = -\underbrace{\left(p^2 + m^2\right)}_{\equiv E^2} \Rightarrow$$

$$P^0 = \sqrt{-g^{00}}E \Rightarrow$$

$$P^0 = \frac{E}{\sqrt{1+2\Psi}} \approx E(1-\Psi), \tag{F.1}$$

onde na última equação fizemos uma expansão do denominador em primeira ordem. Definimos a energia de uma partícula de matéria escura como $E = \sqrt{p^2+m^2}$. Para a parte espacial usaremos o fato de que todas as componentes $\hat{p}^i$ estão normalizadas e por isso, assumiremos que existe uma constante C tal que $P^i = C\hat{p}^i$. Pela definição de p

$$\begin{aligned} p^2 &= g_{ij}P^iP^j \Rightarrow \\ p^2 &= g_{ij}C^2\hat{p}^i\hat{p}^j \\ &= \delta_{ij}a^2(1+2\Phi)C^2\hat{p}^i\hat{p}^j \\ &= a^2C^2(1+2\Phi)\underbrace{\hat{p}^i\hat{p}_i}_{=1}, \end{aligned}$$

portanto, tomando a aproximação

$$C = \frac{p}{a\sqrt{1+2\Phi}} \approx \frac{p}{a}(1-\Phi),$$

obtemos assim

$$P^i = \frac{p}{a}(1-\Phi)\hat{p}^i. \tag{F.2}$$

Finalmente obtemos o quadri-momento para a matéria escura

$$\boxed{P^\mu = \left(E(1-\Psi), \frac{p^i(1-\Phi)}{a}\right)} \tag{F.3}$$

A equação de Boltzmann (E.54) para o caso da matéria escura será então

$$\frac{df_{DM}}{du} = 0,$$

pois nesse caso já vimos que $C\left[f_{DM}\right] = 0$. Lembrando que

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{du},$$

e notando que a função de distribuição para a matéria escura, f_{DM}, dependerá de E e $\hat{p}^i$, além de $\mathbf{x}$ e t, ou seja, $f_{DM} = f_{DM}(t, \mathbf{x}, E, \hat{p}^i)$, no equilíbrio,

$$\frac{df_{DM}}{dt} = \frac{\partial f_{DM}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial f_{DM}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}}_{(I)} + \underbrace{\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{dE}{dt}}_{(II)} + \underbrace{\frac{\partial f_{DM}}{\partial \hat{p}^i}\frac{d\hat{p}^i}{dt}}_{(III)} = 0. \tag{F.4}$$

(I) Vamos primeiramente calcular $\dfrac{dx^i}{dt}$. Lembrando que, para partículas massivas, o parâmetro da trajetória das partículas u é proporcional ao tempo próprio τ e usando a definição

$$P^\mu \equiv m\frac{dx^\mu}{d\tau},$$

temos que

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\frac{dx^i}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{P^i}{P^0}.$$

Aplicando esse resultado em (F.3), considerando apenas termos até a primeira ordem obtemos

$$\frac{dx^i}{dt} \simeq \frac{p^i}{aE}(1 - \Phi + \Psi). \tag{F.5}$$

Quando aplicamos esse termo na equação de Boltzmann, as perturbações Φ e Ψ desaparecerão, isso ocorre pois dx^i/dt multiplicado por $\partial f/\partial x^i$ não existe no background e, além disso, é agora um termo linear, portanto $\frac{\partial f_{DM}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial f_{DM}}{\partial x^i}\frac{\hat{p}^i}{a}$.

(II) Calcularemos $\frac{dE}{dt}$. Usando novamente a definição de P^μ, a equação da geodésica pode ser reescrita como

$$P^0 \frac{dP^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} P^\nu P^\kappa = 0.$$

Considerando inicialmente que $\mu = 0$ e utilizando (F.3) e (F.5), após algumas manipulações algébricas teremos para a aproximação linear

$$\frac{dE}{dt} = -\left(H\frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right). \tag{F.6}$$

(III) Vamos desprezar o último termo da equação acima pois $\frac{\partial f_{DM}}{\partial \hat{p}^i}$ e $\frac{d\hat{p}^i}{dt}$ são de primeira ordem, isso porque, respectivamente, a direção de propagação de uma partícula de matéria escura só muda se considerarmos perturbação da métrica, e distribuições de equilíbrio só dependem do módulo do momento. Queremos calcular então os outros termos que existem na equação.

Substituindo (F.5) e (F.6) em (F.4) obtemos

$$\boxed{\frac{df_{DM}}{dt} = \frac{\partial f_{DM}}{\partial t} + \frac{\partial f_{DM}}{\partial x^i}\frac{p^i}{aE} - \frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\left(H\frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) = 0}. \tag{F.7}$$

Vamos calcular agora os momentos de ordem zero e de ordem um da equação (F.7) para obtermos as equações que governam as perturbações. Pelo fato de estarmos trabalhando com partículas de matéria escura não relativística temos que $E \simeq m$.

Momento de ordem zero O momento de ordem zero seria obtido multiplicando a (F.7) por $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 E}$ e integrando, mas como o segundo membro de (F.7) é igual a zero, podemos calcular o momento de ordem zero de (F.7) integrando simplesmente em $\dfrac{d^3p}{(2\pi)^3}$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f_{DM}}_{(I)}+\underbrace{\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f_{DM}\frac{p^i}{E}}_{(II)}-$$
$$\underbrace{-\left(H+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^2}{E}}_{(III)}\underbrace{-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}p^i}_{(IV)}=0. \tag{F.8}$$

(I), (II) Utilizando as definições de densidade de número de partículas e velocidade média das partículas apresentadas inicialmente, e absorvendo g_{DM} numa redefinição de f_{DM}, os dois primeiros termos de (F.8) se tornam respectivamente

$$\frac{\partial n_{DM}}{\partial t},$$

e

$$\frac{1}{a}\frac{\partial(n_{DM}v^i_{DM})}{\partial x^i}.$$

(III) Notando que $\dfrac{dE}{dp}=\dfrac{p}{E}$, pois $E=\sqrt{p^2+m^2}$, a integral resulta em

$$\begin{aligned}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^2}{E}&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}p\frac{\partial f_{DM}}{\partial p}\\&=4\pi\int_0^\infty\frac{dp}{(2\pi)^3}\,p^3\frac{\partial f_{DM}}{\partial p},\end{aligned}$$

onde expandimos a integral no volume em coordenadas esféricas. Agora podemos integrar por partes; o termo $p^3f_{DM}|_0^\infty$ é nulo. Obviamente é zero para $p=0$, mas o comportamento é desconhecido quando $p\to\infty$ porque conhecemos pouco sobre a matéria escura. *Vamos supor que a função de distribuição deva ir assintóticamente para zero, e que essa forma funcional não deva diferir muito da distribuição exponencial de Maxwell-Boltzmann.* Por essa razão, é aceitável que f_{DM} vá para zero mais rápido que p^3 divirja, e esse termo não contribue para a integral. Dentro da integral apenas p^2 continua com f_{DM}, então, retransformando em coordenadas cartesianas temos

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^2}{E}=-3\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f_{DM}=-3n_{DM}.$$

(IV) A integral do último termo é de primeira ordem, porém ela está sendo multiplicada por um termo de primeira ordem, o que faz com que o último termo seja de segunda ordem, como queremos apenas termos de primeira ordem ele será desprezado.

Dessa maneira a (F.8) resulta na equação da continuidade para matéria escura num espaço-tempo com métrica dada por (E.48) e em primeira ordem, em teoria de perturbações,

$$\frac{\partial n_{DM}}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial n_{DM} v^i_{DM}}{\partial x^i} + 3\left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) n_{DM} = 0. \tag{F.9}$$

Vamos agora separar o termo homogêneo de n_{DM} da perturbação. Seja

$$n_{DM} = n^{(0)}_{DM}\left[1 + \delta_{DM}(\vec{x}, t)\right],$$

onde $n^{(0)}_{DM}$denota a densidade de equilíbrio.

Momento de ordem zero parte homogênea Substituindo essa expansão de n_{DM} em (F.9) o termo de ordem zero nos fornece

$$\frac{\partial n^{(0)}_{DM}}{\partial t} + 3Hn^{(0)}_{DM} = \frac{dn^{(0)}_{DM} a^3}{dt} = 0.$$

Essa equação é a equação para a evolução da energia dos componentes, no caso em que $\mathcal{P} = 0$. Concluímos que a matéria escura só interage com ela mesma por meio da gravidade. Essa equação fornece o clássico resultado

$$\boxed{n^{(0)}_{DM} \propto a^{-3}}.$$

Pelas condições da matéria escura descritas inicialmente, para um fluido não relativístico a temperatura zero, $E \simeq M$, $\rho_{DM} \simeq Mn_{DM}$ e $\delta_{DM} \simeq \dfrac{\delta\rho_{DM}}{\rho_{DM}}$. Nesse caso a equação acima é equivalente a

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = 0.$$

O mesmo resultado pode ser encontrado pela equação de conservação para a matéria escura.

Momento de ordem zero parte perturbada O termo de ordem um de (F.9) resultará em:

$$\boxed{\frac{\partial \delta_{DM}}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial v^i_{DM}}{\partial x^i} + 3\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0}. \tag{F.10}$$

Momento de ordem um Com o intuito de calcular as equações que utilizam as componentes da velocidade, vamos multiplicar a equação de Boltzmann (F.7) por $\dfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\dfrac{p^j}{E}$ e integrar, para assim encontrar seu primeiro momento,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{DM}\frac{p^j}{E}}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{DM}\frac{p^i\hat{p}^j}{E^2}}_{(II)} - \underbrace{\left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^3\hat{p}^j}{E^2}}_{(III)} -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^2\hat{p}^i\hat{p}^j}{E}}_{(IV)} = 0. \tag{F.11}$$

(I) É fácil ver que o primeiro termo é igual a $\dfrac{\partial\left(n_{DM}v^j_{DM}\right)}{\partial t}$.

(II) O segundo termo, por ser de ordem dois, $\left\langle(p/E)^2\right\rangle$, pode ser desprezado.

(III) O terceiro termo deve ser calculado, para isso vamos lembrar que $(p/E)\,(\partial/\partial E) = (\partial/\partial p)$

$$\begin{aligned}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^3\hat{p}^j}{E^2} &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial p}\frac{p^2\hat{p}^j}{E}\\ &= \int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\hat{p}^j\int_0^\infty dp\frac{p^4}{E}\frac{\partial f_{DM}}{\partial p}.\end{aligned}$$

Na segunda linha, mudamos o sistema de coordenadas para o sistema de coordenadas esféricas. A integral em p pode ser feita por partes - um termo proporcional a $f_{DM}p^4$ sai da integral, e pela mesma razão anterior, supomos que ele é desprezado quando calculado em $p=0$ e $p\to\infty$. Então temos

$$\begin{aligned}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^3\hat{p}^j}{E^2} &= -\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\hat{p}^j\int_0^\infty f_{DM}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^4}{E}\right)dp\\ &= -\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\hat{p}^j\int_0^\infty f_{DM}\left(\frac{4p^3}{E}-\underbrace{\frac{p^5}{E^3}}_{\sim 0}\right)\\ &= -4\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f_{DM}\frac{p\hat{p}^j}{E} = -4n_{DM}v^j.\end{aligned}$$

(IV) Agora só falta o quarto termo a ser calculado.

$$\begin{aligned}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^2}{E}\hat{p}^i\hat{p}^j &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}p\frac{\partial f_{DM}}{\partial p}\hat{p}^i\hat{p}^j\\ &= \int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\hat{p}^i\hat{p}^j\int_0^\infty p^3\frac{\partial f_{DM}}{\partial p}dp\\ &\overset{(por partes)}{=} -3\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\hat{p}^i\hat{p}^j\int_0^\infty p^2 f_{DM}dp.\end{aligned}$$

Vamos utilizar a relação $\displaystyle\int d\Omega\hat{p}^i\hat{p}^j = \delta^{ij}4\pi/3$ (esse resultado pode ser verificado escrevendo $\hat{p} = sen(\theta)\cos\varphi\hat{\imath} + sen(\theta)sen(\varphi)\hat{\jmath} + \cos\theta\hat{k}$ e integrando cada componente no tempo) e integrar da mesma forma que integramos o terceiro termo,

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f_{DM}}{\partial E}\frac{p^2}{E}\hat{p}^i\hat{p}^j = -3\left(\frac{4\pi}{3}\right)\delta^{ij}\frac{n_{DM}}{4\pi} = -n_{DM}\delta^{ij}.$$

Juntando todos os termos acima calculados, (F.11) resulta em

$$\frac{\partial(n_{DM}v^j_{DM})}{\partial t} + 4Hn_{DM}v^j_{DM} + \frac{n_{DM}}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j} = 0. \tag{F.12}$$

Note que

$$n_{DM}v^j = n^{(0)}_{DM}(t)\left[1+\delta_{DM}(\vec{x},t)\right]v^j_{DM} \simeq n^{(0)}_{DM}v^j_{DM},$$

em primeira ordem. Da mesma forma,

$$n_{DM}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j} \simeq n^{(0)}_{DM}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}.$$

Utilizando essas duas relações e lembrando que $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x^j} \propto a^3$, a (F.12) pode ser reescrita como

$$\boxed{\frac{\partial v^j_{DM}}{\partial t} + Hv^j_{DM} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^j} = 0}. \tag{F.13}$$

Esta é a equação de Euler para a mecânica dos fluidos. Na verdade, com a forma

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\mathcal{P},$$

com algumas observações. Primeiro, o termo $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$ é de segunda ordem, então ele desaparece. Também, como a matéria escura é não interagente[1], $\mathcal{P} = 0$. Os outros termos são devido à expansão do Universo e suas perturbações.

As equações (F.10) e (F.13) representam as equações para perturbações na matéria escura. Estas formam um sistema de equações diferenciais acopladas. Vamos primeiro mudar o parâmetro de evolução do tempo coordenada para o tempo conforme,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\delta}{\partial t} + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial v^i}{\partial t} + \dfrac{\dot{a}}{a}v^i + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x^i} = 0 \end{cases} \xRightarrow{t\to\eta} \begin{cases} \delta' + \dfrac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3\Phi' = 0 \\ (v^i)' + \dfrac{a'}{a}v^i + \dfrac{\partial\Psi}{\partial x^i} = 0. \end{cases}$$

Se as passarmos para o espaço de Fourier (utilizaremos o til para indicar esse espaço) podemos transformar esse sistema num sistema de equações diferenciais ordinárias, que é mais fácil de resolver

$$\boxed{\frac{d\tilde{\delta}_{DM}}{d\eta} + i\kappa\tilde{v}_{DM} + 3\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0}, \tag{F.14}$$

e

[1]Como a energia escura é uma partícula bosônica, tal como as partículas mediadoras de força, para que haja alguma interação não trivial entre a matéria escura e a energia escura estas devem ser de "tipos" diferentes, portanto consideramos a matéria escura como sendo um férmion.

$$\boxed{\frac{d\tilde{v}_{DM}}{d\eta} + \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta} + i\kappa\tilde{\Psi} = 0}, \tag{F.15}$$

onde κ é o k-ésimo modo de Fourier. Estamos supondo que o campo de velocidades é irrotacional, $\nabla \times \tilde{v}^i = 0 \Rightarrow \tilde{v}^i = \tilde{v}\left(\kappa^i/\kappa\right)$.

F.2 A equação de Boltzmann para bárions

Vamos considerar agora a evolução das variáveis perturbativas de prótons e elétrons. Costuma-se agrupar elétrons com prótons chamando-os de bárions, apesar de elétrons serem léptons. Utilizaremos o espalhamento Coulomb e o espalhamento Compton.

Prótons e elétrons são acoplados através do **espalhamento Coulomb** ($e^- + p \leftrightarrow e^- + p$). Para todas as épocas de interesse a taxa de espalhamento Coulomb é muito maior que a taxa de expansão do Universo. Devido à isso, os contrastes de densidade dos prótons e dos elétrons se tornam iguais, podemos dizer que iguais aos contrastes de densidade dos bárions

$$\delta_p = \delta_e \equiv \delta_b,$$

o mesmo acontece com as suas velocidades vetoriais

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_e \equiv \mathbf{v}_b.$$

No caso dos elétrons devemos também considerar o **espalhamento Compton** ($e^-(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{p}) \leftrightarrow e^-(\mathbf{q}') + \gamma(\mathbf{p}')$). Utilizando o mesmo raciocínio utilizado para chegar na (F.3) e lembrando que $df/du = dt/du \cdot df/dt$, obtemos

$$\frac{df}{du} \simeq m\frac{df}{dt},$$

tanto para os elétrons quanto para os prótons. Na última passagem usamos que $E \simeq m$, para partículas não relativísticas, e desprezamos o potencial Newtoniano Ψ, pois esse levaria a termos de ordem superior na expansão perturbativa. As equações de Boltzmann (E.54) para elétrons e prótons são

$$m_e\frac{df_e(\mathbf{x},\mathbf{q},t)}{dt} = \langle C_{ep}\rangle_{QQ'q'} + \langle C_{e\gamma}\rangle_{pp'q'} \tag{F.16}$$

e

$$m_p\frac{df_p(\mathbf{x},\mathbf{Q},t)}{dt} = \langle C_{ep}\rangle_{qq'Q'} \tag{F.17}$$

onde m_e é a massa do elétron e m_p é a massa do próton. Vamos utilizar aqui que o momento do elétron antes e depois do espalhamento é q e q', respectivamente, o do próton é Q e Q' e o do fóton p e p'. Os termos de colisão são escritos como

$$\langle C_{ep}\rangle_{QQ'q'} = \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \times \Big\{(2\pi)^4\delta^4(Q+q-Q'-q')\times \\ \times\frac{|M_{ep}|^2}{8E_p(Q)E_p(Q')E_e(q')} \times \left[f_e(q')f_p(Q') - f_e(q)f_p(Q)\right]\Big\},$$

$$\langle C_{e\gamma}\rangle_{pp'q'} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \times \Big\{(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\times \\ \times\frac{|M_{e\gamma}|^2}{8E_\gamma(p)E_\gamma(p')E_e(q')} \times [f_e(q')f_\gamma(p') - f_e(q)f_\gamma(p)]\Big\},$$

e

$$\langle C_{ep}\rangle_{qq'Q'} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3} \times \Big\{(2\pi)^4\delta^4(q+Q-q'-Q')\times \\ \times\frac{|M_{ep}|^2}{8E_p(Q')E_e(q)E_e(q')} \times [f_e(q')f_p(Q') - f_e(q)f_p(Q)]\Big\}.$$

Nos termos de colisão acima, $|M_{ep}|^2$ e $|M_{e\gamma}|^2$ são as amplitudes para os espalhamentos Coulomb e Compton, respectivamente. Note que em (F.17) não estamos considerando o espalhamento de prótons por fótons, pois, sendo a seção de choque inversamente proporcional ao quadrado da massa, então a razão entre as seções de choque do espalhamento de prótons por fótons e do espalhamento Compton será da ordem de $\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \sim 10^{-7}$. Também deve-se observar que estamos desprezando os fatores quânticos $1+f$ e $1-f$, que correspondem à emissão estimulada e ao Princípio de Exclusão de Pauli, respectivamente, e deveriam estar multiplicando as funções de distribuição nos integrandos acima. Em primeira ordem em teoria de perturbações, no entanto, esses fatores podem ser desprezados. Também estamos considerando que todos os elétrons estejam ionizados, ou seja, estamos desprezando termos de ionização e de recombinação.

Momento de ordem zero Tomando o momento de ordem zero de (F.16), ou seja, multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{d^3q}{(2\pi)^3E_e(q)}$ e integrando, obtemos

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial n_e v_e^i}{\partial x^i} + 3\left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)n_e = \langle C_{ep}\rangle_{qQQ'q'} + \langle C_{e\gamma}\rangle_{pqp'q'},$$

onde o índice adicional q nos termos de colisão indica a integração em d^3q mencionada acima. Note que o primeiro membro dessa equação é igual ao primeiro membro de (F.9), que representa a equação obtida tomando o momento de ordem zero da equação de Boltzmann para a matéria escura. É óbvio que naquele caso o segundo membro da equação deveria ser nulo (pois $df_{DM}/du = 0$) enquanto que o segundo membro dessa equação não necessariamente, dependendo de quanto vale $\langle C_{ep}\rangle_{qQQ'q'} + \langle C_{e\gamma}\rangle_{pqp'q'}$. Se calcularmos ambos os termos do segundo membro da equação acima veremos que são iguais a zero, isso porque a média da integração em ambos os termos é simétrica pela troca dos momentos iniciais pelos momentos finais, o integrando é antissimétrico devido às funções de distribuição. Isso corresponde à conservação do número de elétrons: no caso do espalhamento Coulomb, quando integramos o termo proporcional a $f_e(q')f_p(Q')$, obtemos o número de elétrons após o espalhamento, que deve ser igual ao número de elétrons antes do espalhamento, que é obtido ao integrarmos o termo proporcional a $f_e(q)f_p(Q)$. O mesmo argumento vale para o espalhamento Compton. Portanto, agora, sabemos que a equação acima é idêntica à correspondente para a matéria escura, desse modo, vamos seguir os mesmos passos feitos para aquele componente. Separando n_e nas partes homogênea e perturbada,

$$n_e = n_e^{(0)}(t)[1 + \delta_b(\mathbf{x}, t)],$$

obtemos, assim como no caso da matéria escura, que

Momento de ordem zero termo homogêneo

$$\boxed{n_{DM}^{(0)} \propto a^{-3}},$$

enquanto o termo perturbado obedecerá a uma equação idêntica a (F.10). No espaço de Fourier

Momento de ordem zero termo perturbado

$$\boxed{\frac{d\tilde{\delta}_b}{d\eta} + ik\tilde{v}_b + 3\frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} = 0}. \tag{F.18}$$

Se calculássemos o momento de ordem zero de (F.17) chegaríamos no mesmo resultado.

Para encontrar uma equação para v_b, a velocidade dos bárions, vamos tomar os primeiros momentos de (F.16) e (F.17).

Momento de ordem um de (F.17) Multiplicando (F.17) por $\frac{d^3Q}{(2\pi)^3}\frac{Q^j}{E_p(Q)}$ e integrando, teremos o primeiro membro idêntico ao de (F.11) (lógico que com outras variáveis) multiplicado pela massa do próton. Diferente daquele caso o segundo termo não será desprezado, pois esse, embora pequeno em geral, será importante para valores de k suficientemente grandes. Calculemos então esse termo, já que é o único que ainda não foi calculado,

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{E^2}\hat{Q}^i\hat{Q}^j = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{1}{3}\int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{3E^2}\right],$$

onde usamos que $\hat{Q}^i\hat{Q}^j = \delta^{ij}/3$. Utilizando o tensor energia-momento temos que $T \equiv \frac{T_i^i}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{E}\hat{Q}^j\hat{Q}_j = \frac{1}{3}\int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{E}$, substituindo T na equação acima temos que

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} f_p \frac{Q^2}{E^2}\hat{Q}^i\hat{Q}^j \simeq \frac{1}{m_p a}\frac{\partial P}{\partial x^j}.$$

A pressão também pode ser dividida em um termo homogêneo e em um termo perturbado, e somente a perturbação dependerá de $\mathbf{x}$,

$$P = P^{(0)}(t) + \delta P(\mathbf{x}, t),$$

desse modo, $\dfrac{\partial P}{\partial x^j} = \dfrac{\partial(\delta P)}{\partial x^j}$. Como a velocidade do som ao quadrado é dada por $c_s^2 = \dfrac{\delta P}{\delta \rho} \equiv \dfrac{1}{3(1+R)}$, onde $R \equiv \dfrac{\delta\rho_b}{\delta\rho_\gamma} = \dfrac{3\rho_b^{(0)}}{4\rho_\gamma^{(0)}}$[2], então $\dfrac{\partial P}{\partial x^j} = \rho^{(0)} c_s^2 \dfrac{\partial(\delta_b)}{\partial x^j}$. Assim, obtemos uma equação semelhante a (F.12) encontrada para a matéria escura, a diferença é que nessa equação temos a massa do próton multiplicando ambos os lados, o segundo termo e o termo de colisão são diferentes de zero

$$m_p \frac{\partial(n_b v_b^j)}{\partial t} + \frac{1}{a}\rho_b^{(0)} c_s^2 \frac{\partial(\delta_b)}{\partial x^j} + 4H\rho_b^{(0)} v_b^j + \frac{\rho_b^{(0)}}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \langle C_{epQ^j}\rangle_{qQQ'q'}.$$

Na equação acima usamos que $\rho_b^{(0)} \simeq m_b n_b^{(0)}$.

Momento de ordem um de (F.16) Calculando o primeiro momento de (F.16), obtemos uma equação cujo primeiro membro é idêntico, trocando prótons por elétrons, ao momento de ordem um de (F.17). *Não esquecendo que* $m_p >> m_e$, ao somarmos as duas equações obtemos

$$m_p \frac{\partial(n_b v_b^j)}{\partial t} + \frac{1}{a}\rho_b^{(0)} c_s^2 \frac{\partial(\delta_b)}{\partial x^j} + 4H\rho_b^{(0)} v_b^j + \frac{\rho_b^{(0)}}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \langle C_{ep}(q^j + Q^j)\rangle_{qQQ'q'} + \langle C_{e\gamma} q^j\rangle_{pqp'q'}.$$

O primeiro termo do segundo membro da equação é igual a zero, pelo mesmo motivo visto anteriormente, a conservação do momento. No primeiro termo do primeiro membro podemos substituir $n_b v_b^j = n_b^{(0)}(t)[1 + \delta_b(\mathbf{x}, t)]v_b^j$ por $n_b^{(0)} v_b^j$ já que v_b^j é de primeira ordem. Como $n_b^{(0)} \propto a^{-3}$, temos algo parecido com (F.13),

$$\boxed{\rho_b^{(0)}\left[\frac{\partial v_b^j}{\partial t} + \frac{1}{a}c_s^2 \frac{\partial(\delta_b)}{\partial x^j} + H v_b^j + \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right] = \langle C_{e\gamma} q^j\rangle_{pqp'q'}}. \tag{F.19}$$

Termo de colisão Para finalizar a equação de Boltzmann para bárions precisamos do termo de colisão da equação (F.19). Vamos inicialmente calcular $\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'}$,

$$\begin{aligned}\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'} = &\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \times \left\{(2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}' - \mathbf{q}')\times\right.\\ &\times \frac{|M_{e\gamma}|^2}{8E_e(q)E_e(q')E_\gamma(p')} \times [f_e(\mathbf{q}')f_\gamma(\mathbf{p}') - f_e(\mathbf{q})f_\gamma(\mathbf{p})]\times\\ &\left.\delta[E_\gamma(p) + E_e(q) - E_\gamma(p') - E_e(q')]\right\}.\end{aligned}$$

A energia dos fótons é simplesmente $E_\gamma(p) = p$ e a dos elétrons *não relativísticos*, $E_e(q) \simeq m_e + \dfrac{q^2}{2m_e}$. Substituindo na equação acima e eliminando a integral em q' através da delta nos momentos ($\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'$),

[2] Lembrando que $P = P_\gamma = \rho_\gamma/3$, $\rho = \rho_\gamma + \rho_b$, onde $\rho_\gamma \sim T^{-4}$ e $\rho_b \sim T^{-3}$

$$\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \times \left\{ \frac{\pi}{4m_e^2} \frac{1}{p} \delta \left[\mathbf{p} + \frac{q^2}{2m_e} - \mathbf{p}' - \frac{(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{2m_e} \right] \times \right.$$
$$\left. \times |M_{e\gamma}|^2 \times [f_e(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')f_\gamma(\mathbf{p}') - f_e(\mathbf{q})f_\gamma(\mathbf{p})] \right\}.$$

Note que nos denominadores substituímos simplesmente $E_e \simeq m_e$. *Antes de prosseguirmos faremos algumas considerações.* No espalhamento Compton não relativístico, $p \simeq p'$, ou seja, o espalhamento é aproximadamente elástico. Desse modo, $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ tem a ordem muito menor que p, que por sua vez é da ordem da temperatura T. Como a energia cinética típica dos elétrons é também da ordem de T, então q é muito maior que p e p'. Assim, na energia cinética no final do elétron, $\dfrac{(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{2m_e}$, podemos desprezar o termo quadrático em $(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$, de modo que obtemos

$$E_e(q) - E_e(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{2m_e} \simeq \frac{(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{q}}{m_e}.$$

Vale observar também que como $\dfrac{q}{m_e} \sim v_b$, então $\dfrac{(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{q}}{m_e} \sim T v_b$, ou seja, a variação relativa na energia do elétron devido à um espalhamento Compton será, de fato, pequena, da ordem de v_b. Portanto, podemos expandir a delta de Dirac como

$$\begin{aligned} \delta\left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{2m_e}\right] \simeq& \delta(p-p') + (E_e(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}') - E_e(q)) \times \\ & \times \left.\frac{\partial\delta(p + E_e(q) - p' - E_e(q'))}{\partial E_e(q')}\right|_{E_e(q)=E_e(q')} \\ =& \delta(p-p') + \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{q}}{m_e} \cdot \frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade usamos que $\dfrac{\partial f(x-y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial f(x-y)}{\partial y}$. Usando a expressão acima e também fazendo a aproximação $f_e(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}') \simeq f_e(\mathbf{q})$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'} =& \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f_e(\mathbf{q}) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{p'} \frac{\pi}{4m_e^2} \times \left[\delta(p-p') + \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{q}}{m_e} \cdot \frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right] \times \\ & \times |M_{e\gamma}|^2 \times [f_\gamma(\mathbf{p}') - f_\gamma(\mathbf{p})]. \end{aligned} \tag{F.20}$$

Para prosseguir no cálculo, consideremos explicitamente a amplitude do espalhamento Compton, que é dada por

$$|M_{Compton}|^2 = 12\pi\sigma_T m_e^2 (\hat{\epsilon}\cdot\hat{\epsilon}')^2, \tag{F.21}$$

onde σ_T é a seção de choque de Thomson, $\hat{\epsilon}$ é o vetor de polarização do fóton incidente e $\hat{\epsilon}'$ é o vetor de polarização do fóton espalhado. A amplitude $|M_{e\gamma}|^2$ se refere ao caso de luz incidente não polarizada. Nesse caso, será a média da amplitude do espalhamento

Compton (F.21) sobre todas as possíveis direções do vetor de polarização incidente $\hat{\epsilon}$. Escrevendo $\hat{\epsilon}$ em coordenadas polares como $\hat{\epsilon} = cos(\varphi)\hat{\epsilon}_1 + sen(\varphi)\hat{\epsilon}_2$, onde $\hat{\epsilon}_1$ e $\hat{\epsilon}_2$ são dois versores ortogonais entre si e o ângulo φ é o ângulo entre $\hat{\epsilon}'$ e o plano de espalhamento, temos

$$|M_{e\gamma}|^2 = 12\pi\sigma_T m_e^2 \frac{1}{2\pi}\int d\varphi[(cos(\varphi)\hat{\epsilon}_1 + sen(\varphi)\hat{\epsilon}_2)\cdot\hat{\epsilon}']^2. \tag{F.22}$$

Para obtermos o termo de colisão correto, deveríamos considerar a amplitude de espalhamento (F.22), mas na derivação abaixo não consideraremos o estado de polarização do fóton espalhado. Nesse caso, a amplitude (F.22) deve ser substituída por

$$|M_{e\gamma}|^2 = 12\pi\sigma_T m_e^2 \frac{1}{2\pi}\int d\varphi \sum_{i=1}^{2}[(cos(\varphi)\hat{\epsilon}_1 + sen(\varphi)\hat{\epsilon}_2)\cdot\hat{\epsilon}_i']^2,$$

onde $\hat{\epsilon}_i'$ formam uma base de estados de polarização finais. Efetuando a integração em φ, obtemos

$$|M_{e\gamma}|^2 = 6\pi\sigma_T m_e^2 \sum_{i=1}^{2}\left[(\hat{\epsilon}_1\cdot\hat{\epsilon}_i')^2 + (\hat{\epsilon}_2\cdot\hat{\epsilon}_i')^2\right].$$

Levando em conta que $\hat{\epsilon}_1$, $\hat{\epsilon}_2$ e $\hat{p}$ são ortonormais, o que, naturalmente, também é verdade para os correspondentes versores do fóton espalhado, $\hat{\epsilon}_1'$, $\hat{\epsilon}_2'$ e $\hat{p}'$, obtemos

$$|M_{e\gamma}|^2 = 6\pi\sigma_T m_e^2\left[1 + (\hat{p}\cdot\hat{p}')^2\right]. \tag{F.23}$$

Substituindo (F.23) em (F.20), temos

$$\begin{aligned}\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'} =& \frac{3\pi^2\sigma_T}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}f_e(\mathbf{q})\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{p'}\times\left[1 + (\hat{p}\cdot\hat{p}')^2\right]\times\left[\delta(p-p') + \right.\\ &\left.+\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{q}}{m_e}\times\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right]\times[f_\gamma(\mathbf{p}') - f_\gamma(\mathbf{p})],\end{aligned}$$

usando a definição de n_e e de $\mathbf{v}_b$, temos

$$\begin{aligned}\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'} =& \frac{3\pi^2\sigma_T n_e}{2}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{p'}\times\left[1 + (\hat{p}\cdot\hat{p}')^2\right]\times\left[\delta(p-p') + (\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\right.\\ &\left.\mathbf{v}_b\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right]\times[f_\gamma(\mathbf{p}') - f_\gamma(\mathbf{p})]. \end{aligned}\tag{F.24}$$

Vamos calcular agora a função de distribuição dos fótons. A distribuição de equilíbrio dos fótons é a distribuição de Bose-Einstein. O fator mais forte que determina se um sistema está em equilíbrio ou não é a temperatura. Para o caso de um universo *smooth* a temperatura é simplesmente dependente do tempo. Podemos caracterizar a perturbação na função de distribuição através da flutuação da temperatura θ, definida por

$$T(\mathbf{x},\hat{p},t) = T(t)[1 + \theta(\mathbf{x},\hat{p},t)].$$

Note que tomamos a perturbação da temperatura como independente do módulo do momento dos fótons p. Isso segue do fato, já mencionado acima, de que no espalhamento Compton não relativístico a magnitude do momento do fóton é pouco alterada. A função de distribuição dos fótons é dada por

$$f_\gamma(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \left\{ exp\left[\frac{p}{T(t)[1+\theta(\mathbf{x},\hat{p},t)]}\right] - 1\right\}^{-1} \tag{F.25}$$

lembrando que $\mathbf{p} = p\hat{p}$. Expandindo em primeira ordem a equação acima temos

$$f_\gamma(\mathbf{x},\mathbf{p},t) \simeq f_\gamma(\mathbf{x},\mathbf{p},t)|_{\theta=0} + \left(\frac{\partial f_\gamma}{\partial T}\right)\Big|_{\theta=0} T(t)\theta(\mathbf{x},\hat{p},t) = f_\gamma^{(0)}(p,t) - p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}(p,t)\theta(\mathbf{x},\hat{p},t).$$

Aqui definimos

$$f_\gamma(\mathbf{x},\mathbf{p},t)|_{\theta=0} = \left[exp\,(p/T) - 1\right]^{-1}.$$

Substituindo a aproximação acima em (F.24) e *retendo somente os termos de primeira ordem*, obtemos

$$\begin{aligned}\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'} =& \frac{3\pi^2\sigma_T n_e}{2}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{p'} \times \left[1+(\hat{p}\cdot\hat{p}')^2\right] \times \left\{\delta(p-p')\left[p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\theta(\mathbf{x},\hat{p},t) - \right.\right.\\ &\left.\left. -p'\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p'}\theta(\mathbf{x},\hat{p}',t)\right] + (\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{v}_b\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\left[f_\gamma^{(0)}(p') - f_\gamma^{(0)}(p)\right]\right\}.\end{aligned}$$

O elemento de volume na integral acima é, em coordenadas esféricas, $d^3p' = p'^2dp'd\Omega^2$ e $(\hat{p}\cdot\hat{p}')^2 = \dfrac{2P_2(\hat{p}\cdot\hat{p}')+1}{3}$, sendo P_2 o polinômio de Legendre de ordem 2. Substituindo na expressão acima e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'} =& \sigma_T n_e\left\{p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\left[\theta(\mathbf{x},\hat{p},t) - \theta_0(\mathbf{x},t)\right] - \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}_b\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\right\} + \\ &+ \frac{\sigma_T n_e}{8\pi}\int dp'p'\int d\Omega' P_2(\hat{p}\cdot\hat{p}') \times \left\{\delta(p-p')\left[p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\theta(\mathbf{x},\hat{p},t) - \right.\right.\\ &\left.\left. -p'\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\theta(\mathbf{x},\hat{p}',t)\right] + (\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{v}_b\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\left[f_\gamma^{(0)}(p') - f_\gamma^{(0)}(p)\right]\right\},\end{aligned}$$

onde definimos

$$\theta_l(\mathbf{x},t) \equiv \frac{1}{4\pi(-i)^l}\int d\Omega' P_l(\hat{p}')\theta(\mathbf{x},\hat{p},t),$$

e usamos integração por partes para eliminar a derivada da função delta de Dirac. Para efetuar a última integral, é útil expandirmos $P_2(\hat{p}\cdot\hat{p}')$ em harmônicos esféricos,

$$P_2(\hat{p}\cdot\hat{p}') = \frac{4\pi}{5}\sum_{m=-2}^{2} Y_{2m}(\hat{p})Y_{2m}^*(\hat{p}').$$

A integral angular dos harmônicos esféricos é nula, exceto para $m = 0$. Com isso e também com

$$Y_{20}(\hat{p})Y^*_{20}(\hat{p}') = \frac{5}{4\pi}P_2(\hat{p})P_2(\hat{p}'),$$

obtemos

$$\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'} = \sigma_T n_e p^2 \frac{\partial f^{(0)}_\gamma}{\partial p}\left[\theta(\mathbf{x},\hat{p},t) - \theta_0(\mathbf{x},t) - \hat{p}\cdot\mathbf{v}_b\right] - \frac{\sigma_T n_e p^2}{2}P_2(\hat{p})\frac{\partial f^{(0)}_\gamma}{\partial p}\theta_2(\mathbf{x},t). \tag{F.26}$$

Para obter a expressão acima usamos que

$$\int d\Omega' P_2(\hat{p}') = 0$$

e

$$\int d\Omega' P_2(\hat{p}')\hat{p}' = 0.$$

Consideremos que $\langle C_{e\gamma}q^j\rangle_{pqp'q'} = -\langle C_{e\gamma}p^j\rangle_{pqp'q'}$, de modo que o cálculo feito aqui poderá ser aproveitado quando derivarmos a equação de Boltzmann para os fótons. Multiplicando $\langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'}$ por $\dfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\dfrac{p^j}{p}$ e integrando, obtemos

$$-\langle C_{e\gamma}p^j\rangle_{pqp'q'} = -\sigma_T n_e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p^j p\frac{\partial f^{(0)}_\gamma}{\partial p}\left[\theta(\mathbf{x},\hat{p},t) - \theta_0(\mathbf{x},t) - \hat{p}\cdot\mathbf{v}_b\right].$$

Passando para o espaço de Fourier e multiplicando por $\hat{k}^j$, teremos

$$\begin{aligned}
-\langle C_{e\gamma}pcos(\alpha)\rangle_{pqp'q'} =& -\sigma_T n_e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p^2 cos(\alpha)\frac{\partial f^{(0)}_\gamma}{\partial p}\left[\tilde{\theta}(\mathbf{k},\hat{p},t) - \tilde{\theta}_0(\mathbf{k},t) - \hat{p}\cdot\tilde{v}_b\right]\\
=& -\sigma_T n_e \int_0^\infty \frac{dp}{4\pi^2}p^4\frac{\partial f^{(0)}_\gamma}{\partial p}\left[\int_0^\pi d\alpha sen(\alpha)cos(\alpha)\tilde{\theta}(\mathbf{k},\hat{p},t) - \right.\\
&\left. -\tilde{\theta}_0(\mathbf{k},t)\int_0^\pi d\alpha sen(\alpha)cos(\alpha) - \tilde{v}_b\int_0^\pi d\alpha sen(\alpha)cos^2(\alpha)\right],
\end{aligned}$$

onde usamos que $\mathbf{p}\cdot\hat{k} = p\cos(\alpha)$, ou seja, definimos o eixo z como sendo paralelo ao módulo de Fourier $\mathbf{k}$. Além disso, estamos também supondo que a velocidade seja sempre paralela a $\mathbf{k}$ (velocidade irrotacional), ou seja, $\hat{p}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_b = \tilde{v}_b cos(\alpha)$. No segundo termo, a integral angular resulta em zero, enquanto que no terceiro termo resulta em $2/3$. Usando a definição de $\tilde{\theta}_l$,

$$\tilde{\theta}_l(\mathbf{k},t) = \frac{1}{2(-i)^l}\int_{-1}^1 d(cos(\alpha))P_l(cos(\alpha))\tilde{\theta}\left(\mathbf{k},cos(\alpha),t\right),$$

a integral angular do primeiro termo resulta em $-2i\tilde{\theta}_1(\mathbf{k},t)$. A integral em p pode ser efetuada usando integração por partes, e resulta em $-4\rho^{(0)}_\gamma$. Portanto, o termo de colisão será

$$\boxed{\langle C_{e\gamma}pcos(\alpha)\rangle_{pqp'q'} = \sigma_T n_E\frac{4\rho^{(0)}_\gamma(t)}{3}\left[3i\tilde{\theta}_1\left(\mathbf{k},t\right) - \tilde{v}_b\left(\mathbf{k},t\right)\right]}\,.$$

Passando agora o primeiro membro de (F.19) para o espaço de Fourier, multiplicando por $\hat{k}^j$ e substituindo o termo de colisão acima, obtemos, finalmente

$$\boxed{\frac{d\tilde{v}_b}{d\eta} + \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}\tilde{v}_b + ikc_s^2\tilde{\delta}_b + ik\Psi = \frac{d\Theta}{d\eta}\frac{1}{R}\left[3i\tilde{\theta}_1 - \tilde{v}_b\right]}, \tag{F.27}$$

onde usamos que

$$\tilde{\mathbf{v}}_b = \hat{k}\tilde{v}_b,$$

e

$$d\Theta/d\eta \equiv -\sigma_T n_e a.$$

Note também que mudamos da variável coordenada temporal t para o tempo conforme η. Devemos observar que a taxa de espalhamento, $\frac{d\Theta}{d\eta}$, foi definida supondo que 100% dos elétrons estão livres. A taxa de espalhamento pode ser escrita de modo mais realista, levando em conta que somente uma fração x_e dos elétrons está ionizada,

$$\frac{d\Theta}{d\eta} = -\sigma_T x_e n_e a.$$

A quantidade

$$\Theta(\eta) \equiv \int_\eta^{\eta_0} d\eta' \sigma_T x_e n_e a, \tag{F.28}$$

sendo η_0 o tempo conforme atual, é a chamada *profundidade ótica*. Antes da recombinação, quando a fração de ionização x_e é alta, temos $\Theta >> 1$. Em tempos mais recentes, quando x_e é baixa, temos $\Theta << 1$.

F.3 A equação de Boltzmann para fótons

Agora derivaremos a equação de evolução das flutuações de temperatura dos fótons. A equação de Boltzmann é dada por

$$p\frac{df_\gamma}{dt} = \langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'}.$$

O segundo membro já foi calculado, sendo dado por (F.26).

Um fóton não tem massa, então não podemos definir uma energia $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, também não faz sentido fixar o referencial num fóton, por isso não falamos de tempo próprio de um fóton. Levando em conta esses fatos, para calcular a energia de um fóton devemos fazer algo parecido com o que foi feito para a matéria escura, porém para esse caso $ds^2 = 0$,

$$ds^2 = 0 \Rightarrow P^2 = g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = 0 \Rightarrow$$

$$P^2 = g_{00}\left(P^0\right)^2 + g_{ij}P^iP^j = 0 \Rightarrow$$

$$-(1 + 2\Phi)E^2 + p^2 = 0$$

o que implica em

$$E = \frac{p}{\sqrt{1+2\Psi}} \approx p(1-\Psi). \tag{F.29}$$

O resultado acima generaliza o resultado usual da relatividade especial $E = p$, na presença de campos gravitacionais fracos. Na nossa convenção de sinal, uma região mais densa é dada por $\Psi < 0$, enquanto que uma região menos densa é dada por $\Psi > 0$. Com $\Psi = 0$ temos o limite em que a densidade é uniforme. Podemos então obter um resultado astrofísico extremamente importante. Vamos considerar o caso em que um fóton deixa um considerável potencial negativo em direção ao espaço interestelar. Nesse processo, o lado direito de (F.29) vai de um valor maior que 1 para essencialmente 1, dado que poderíamos considerar $\Psi = 0$ quando o fóton está longe de qualquer sistema estelar. Além disso, podemos ver diretamente que o fóton perde energia quando deixa o potencial negativo. Em outras palavras, esse é o redshift. Assim, simplesmente levando em consideração campos gravitacionais fracos, dada pela pequena perturbação Ψ, obtemos o resultado já conhecido do *redshift gravitacional.*

A equação (F.29) estabelece as restrições dos valores do quadri-momento. Vamos estudar o lado esquerdo da equação de Boltzmann para fótons. Explicitamente

$$\frac{df_\gamma}{dt} = \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial \hat{p}^i}\frac{d\hat{p}^i}{dt}.$$

O cálculo do segundo e do terceiro termo deve ser feito de forma análoga ao que foi feito para o caso da matéria escura. O último termo deve ser desprezado pelos seguintes motivos: o termo $\partial f_\gamma/\partial \hat{p}^i$ não existe nas equações do background, pois a distribuição de Bose-Einstein é isotrópica, então, se o termo é não nulo agora, ele precisa ser de primeira ordem, precisa depender de Ψ ou de Φ; o mesmo ocorre com $d\hat{p}^i/dt$: na ausência de inomogeneidades no campo gravitacional os fótons não mudam suas direções. Então esse termo precisa ser de primeira ordem também; se os dois termos são de primeira ordem então o produto é de segunda ordem, portanto, o termo precisa ser desprezado.

Usando o quadrimomento do fóton

$$\boxed{P^\mu = \left(p(1-\Psi), \frac{p^i(1-\Phi)}{a}\right)},$$

obtemos

$$\frac{df_\gamma}{dt} = \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial f_\gamma}{\partial x^i} - p\frac{\partial f_\gamma}{\partial p}\left[H + \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right].$$

Substituindo a equação acima e (F.25) na equação de Boltzmann para fótons temos uma equação com termos de ordem zero e termos de ordem um.

Momento de ordem zero

$$\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial t} - Hp\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} = 0, \tag{F.30}$$

onde $f_\gamma^{(0)}$é a distribuição de Bose-Einstein. Esta equação pode ser facilmente resolvida para dar a dependência da temperatura em ordem zero. De fato, como

$$\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial t} = -\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p},$$

(F.30) se torna

$$-\left(\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} + H\right)p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} = 0, \tag{F.31}$$

que será verdadeira se

$$\frac{dT}{T} = -\frac{da}{a} \Rightarrow$$

$$\boxed{T \propto \frac{1}{a}}.$$

Momento de ordem um termo homogêneo Vamos calcular o primeiro momento de (F.30)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}pf_\gamma^{(0)} - H\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p^2\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} = 0.$$

Usando que

$$-p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} = T\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial T}$$

e lembrando que a pressão dos fótons é dada por

$$P_\gamma = \frac{1}{3}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}pf_\gamma^{(0)},$$

obtemos

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + 3HT\frac{\partial P_\gamma}{\partial T} = 0.$$

Usando a relação

$$T\frac{\partial P}{\partial T} = \rho + P = \rho(1+\omega),$$

recuperamos a equação de conservação de energia para os fótons no caso homogêneo,

$$\boxed{\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + 3HT\rho_\gamma(1+\omega_\gamma) = 0}. \tag{F.32}$$

Comparando a definição de P_γ com a equação acima fica evidente que $\omega_\gamma = 1/3$, portanto, a equação acima nos fornece que

$$\boxed{\rho_\gamma \propto a^{-4}}.$$

Momento de ordem um termo perturbado

$$-p^2\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\left\{\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right\} = \langle C_{e\gamma}\rangle_{qp'q'}.$$

Substituindo (F.26) no segundo membro da equação acima, mudando da variável t para o tempo conforme η e passando para o espaço de Fourier, obtemos

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} + ik\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)\tilde{\theta} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + ik\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)\tilde{\Psi} = -\frac{d\tau}{d\eta}\left[\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta} + \tilde{v}_b\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)\right].$$

Porém, em (F.26) foi utilizada a amplitude (F.23), que não considera o estado de polarização do fóton espalhado. Se, ao invés disso usarmos a amplitude mais geral, dada por (F.22), obtemos outro resultado para o lado direito da equação acima [4], e a equação se torna

$$\boxed{\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} + ik\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)\tilde{\theta} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} + ik\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)\tilde{\Psi} = -\frac{d\tau}{d\eta}\left[\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta} + \tilde{v}_b\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right) - \frac{P_2\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)}{2}\Pi\right]}, \tag{F.33}$$

onde $\Pi = \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_{P2} + \tilde{\theta}_{P0}$, sendo $\tilde{\theta}_{P2}$ e $\tilde{\theta}_{P0}$ os momentos de monopolo e quadrupolo, respectivamente, da intensidade da polarização no espaço de Fourier, $\tilde{\theta}_P$, que por sua vez é dada por[3]

$$\tilde{\theta}_P\left(\mathbf{k},\hat{p},\eta\right) = Q\left(\mathbf{k},\hat{p},\eta\right),$$

onde

$$Q\left(\mathbf{k},\hat{p},\eta\right) = C\int d\Omega' f(\hat{p}')\sum_{i=1}^{2}\left(|\hat{\epsilon}_1(\hat{p})\cdot\hat{\epsilon}'_i(\hat{p}')|^2 - |\hat{\epsilon}_2(\hat{p})\cdot\hat{\epsilon}'_i(\hat{p}')|^2\right),$$

em que C é uma constante de normalização, $f(\hat{p}')$ é a intensidade da radiação incidindo na direção $\hat{p}'$ e $d\Omega'$ denota integração sobre todas as direções de incidência.

Embora essa não tenha sido derivada aqui, há também a equação para a intensidade da polarização $\tilde{\theta}_P$ (ver [4]):

$$\boxed{\frac{d\tilde{\theta}_P}{d\eta} + ik\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)\tilde{\theta}_P = -\frac{d\tau}{d\eta}\left[-\tilde{\theta}_P + \frac{\left(1 - P_2\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)\right)}{2}\Pi\right]}. \tag{F.34}$$

F.4 A equação de Boltzmann para neutrinos sem massa

Podemos estender o sistema de equações de Boltzmann para incluir neutrinos sem massa, onde denotamos a flutuação na sua temperatura no espaço de Fourier por $\tilde{N}\left(\mathbf{k},\hat{p},\eta\right)$, a equação de evolução será identica à dos fótons, sem o termo de colisão,

$$\boxed{\frac{d\tilde{N}}{d\eta} + ik\left(\hat{k}\cdot\hat{p}\right)\tilde{N} = 0}. \tag{F.35}$$

Até o presente momento não é do nosso interesse calcular a equação de Boltzmann para neutrinos com massa.

[3] Essa igualdade só é válida no nosso caso em que definimos o eixo z como paralelo ao modo de Fourier $\mathbf{k}$.

Apêndice G

Gauges

O estudo aqui realizado seguiu as notações de [205].

O elemento de linha no gauge síncrono é dado por

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + \left(\delta_{ij} + h_{ij}dx^i dx^j\right)\right] \ , \tag{G.1}$$

onde τ é o tempo comóvel.

A perturbação da métrica h_{ij} pode ser decomposta em uma parte com traço $h \equiv h_{ii}$ e outra de traço nulo, onde essa última é constituída por três pedaços $h_{ij}^{||}$, $h_{ij}^{\perp}$ e h_{ij}^{T}, de tal forma com que

$$h_{ij} = \frac{h\,\delta_{ij}}{3} + h_{ij}^{||} + h_{ij}^{\perp} + h_{ij}^{T} \ . \tag{G.2}$$

Por definição $h_{ij}^{||}$ tem divergência longitudinal, $h_{ij}^{\perp}$ tem divergência transversa, e h_{ij}^{T} é um tensor transverso, satisfazendo

$$\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_l h_{lk}^{||} = 0 \ , \quad \partial_i\partial_j h_{ij}^{\perp} = 0 \ , \quad \partial_i h_{ij}^{T} = 0 \ . \tag{G.3}$$

Dessa forma, podemos escrever $h_{ij}^{||}$ em termos de um campo escalar μ, e $h_{ij}^{\perp}$ em termos de um campo vetorial $\vec{A}$ de divergência nula

$$h_{ij}^{||} \equiv \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\mu \tag{G.4}$$

$$h_{ij}^{\perp} \equiv \partial_i A_j + \partial_j A_i \ , \quad \text{com} \quad \partial_i A_i = 0 \ . \tag{G.5}$$

O índice i repetido na equação acima representa uma somatória. Os campos escalares h e μ caracterizam o modo escalar das perturbações da métrica, enquanto que A_i representa o modo vetorial e h_{ij}^{T} o modo tensorial.

Introduzindo dois campos $h(\vec{k},\tau)$ e $\eta(\vec{k},\tau)$ no k-espaço é possível escrever o modo escalar de h_{ij} como uma integral de Fourier

$$h_{ij}(\vec{x},\tau) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\left[\hat{k}_i\hat{k}_j + \left(\hat{k}_i\hat{k}_j\, h(\vec{k},\tau) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)6\eta(\vec{k},\tau)\right] \ , \tag{G.6}$$

onde $\vec{k} = k\hat{k}$.

Existem algumas dificuldades para usar o gauge síncrono. Desde que a escolha da hipersuperfície inicial e suas coordenadas sejam arbitrárias, as condições do gauge síncrono não fixam os graus de liberdade do gauge completamente. Outra dificuldade é que desde que as coordenadas sejam definidas para observadores em queda livre, as singularidades aparecem quando as trajetórias de dois observadores se intersectam, teremos um ponto do espaço-tempo com dois sistemas de coordenadas. Uma hipersuperfície inicial diferente de tempo constante terá que ser utilizada para remover essas singularidades [205].

No gauge Newtoniano as perturbações escalares são caracterizadas por dois potenciais escalares ψ e ϕ que aparecem no elemento de linha como

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\psi)d\tau^2 + (1-2\phi)dx^i dx^j\right] \ . \tag{G.7}$$

Uma vantagem desse gauge é que a métrica é diagonal, facilitando as contas, e que ψ faz o papel do potencial gravitacional no limite Newtoniano.

G.1 Transformações de gauge

Vamos derivar a lei de transformação para dois gauges arbitrários para depois obter as relações de transformação entre o gauge síncrono e o gauge Newtoniano.

Uma métrica perturbada plana de FLRW pode ser escrita de uma forma geral como

$$g_{00} = -a^2(\tau)\left[1+2\psi(\vec{x},\tau)\right] \ , \tag{G.8}$$
$$g_{0i} = a^2(\tau) w_i(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.9}$$
$$g_{ij} = a^2(\tau)\left\{\left[1-2\phi(\vec{x},\tau)\right]\delta_{ij} + \chi(\vec{x},\tau)\right\} \ , \quad \text{com} \quad \chi_{ii} = 0 \ , \tag{G.10}$$

onde as funções ψ, ϕ, w_i e χ_{ij} representam as perturbações da métrica e são consideradas muito menores do que a unidade. A parte de traço não nulo na perturbação de g_{ij} foi absorvida em ϕ.

Vamos assumir que um sistema geral de coordenadas x^μ se transforma para outro sistema $\hat{x}^\mu$ segundo (E.2)

$$x^\mu \to \hat{x}^\mu = x^\mu + d^\mu(x^\nu) \ . \tag{G.11}$$

Escrevemos a parte temporal e a espacial separadamente

$$\hat{x}^0 = x^0 + \alpha(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.12}$$
$$\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \nabla\beta(\vec{x},\tau) + \vec{\epsilon}(\vec{x},\tau) \ , \quad \text{com} \quad \nabla\cdot\vec{\epsilon} = 0 \ , \tag{G.13}$$

onde o vetor $\vec{d}$ tem sido decomposto em uma componente longitudinal $\nabla\beta$ ($\nabla\times\nabla\beta = 0$) e uma componente transversa $\vec{\epsilon}$ ($\nabla\cdot\vec{\epsilon} = 0$). Para que o elemento de linha seja invariante por essa transformação de coordenadas ele deve satisfazer (E.3)

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\beta}(x)\partial_\nu d^\beta - g_{\alpha\nu}(x)\partial_\mu d^\alpha - d^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(d^2) \ . \tag{G.14}$$

Os dois lados dessa equação são calculados no mesmo valor da coordenada x, porém esse valor não representa, necessariamente, o mesmo ponto no espaço-tempo. Assumindo que $d\mu$ seja da mesma ordem das perturbações da métrica, as perturbações da métrica em dois sistemas de coordenadas são relacionados até a primeira ordem de perturbação por

$$\hat{\psi}(\vec{x},\tau) = \psi(\vec{x},\tau) - \dot{\alpha}(\vec{x},\tau) - \frac{\dot{a}}{a}\alpha(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.15}$$

$$\hat{w}_i(\vec{x},\tau) = w_i(\vec{x},\tau) + \partial_i\vec{\alpha}(\vec{x},\tau) - \partial_i\dot{\beta}(\vec{x},\tau) - \dot{\vec{\epsilon}}(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.16}$$

$$\hat{\phi}(\vec{x},\tau) = \phi(\vec{x},\tau) + \frac{1}{3}\nabla^2\beta(\vec{x},\tau) + \frac{\dot{a}}{a}\alpha(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.17}$$

$$\hat{\chi}_{ij}(\vec{x},\tau) = \chi_{ij}(\vec{x},\tau) - 2\left[\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\beta(\vec{x},\tau) + \frac{1}{2}\left(\partial_i\vec{\epsilon}_j + \partial_j\vec{\epsilon}\right)\right] \ . \tag{G.18}$$

Podemos decompor as transformações w_i e χ_{ij} acima em partes longitudinais e transversais

$$\hat{w}_i^{||}(\vec{x},\tau) = w_i^{||}(\vec{x},\tau) + \partial_i\alpha(\vec{x},\tau) - \partial_i\dot{\beta}(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.19}$$

$$\hat{w}_i^{\perp}(\vec{x},\tau) = w_i^{\perp}(\vec{x},\tau) - \dot{\vec{\epsilon}}(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.20}$$

e

$$\hat{\chi}_{ij}^{||}(\vec{x},\tau) = \chi_{ij}^{||}(\vec{x},\tau) - 2\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\beta(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.21}$$

$$\hat{\chi}_{ij}^{\perp}(\vec{x},\tau) = \chi_{ij}^{\perp}(\vec{x},\tau) - \left(\partial_i\vec{\epsilon}_j + \partial_j\vec{\epsilon}_i\right) \ , \tag{G.22}$$

$$\hat{\chi}_{ij}^{T}(\vec{x},\tau) = \chi_{ij}^{T}(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.23}$$

onde

$$w_i = w_i^{||} + w_i^{\perp} \ , \tag{G.24}$$

$$\chi_{ij} = \chi_{ij}^{||} + \chi_{ij}^{\perp} + \chi_{ij}^{T} \ , \tag{G.25}$$

e $\chi_{ij}^{||}$, $\chi_{ij}^{\perp}$, e χ_{ij}^{T} obedecem (G.3).

Podemos usar as Eqs. (G.15)-(G.18) para relacionar as perturbações escalares da métrica (ϕ, ψ) no gauge Newtoniano com $h_{ij} = h\delta_{ij}/3 + h_{ij}^{||}$ no gauge síncrono. Vamos denotar as coordenadas do gauge síncrono por $\hat{x}^\mu$ e do gauge Newtoniano por x^μ, com a transformação de coordenadas $\hat{x}^\mu = x^\mu + d^\mu$. A partir das Eqs. (G.19)-(G.23) encontramos

$$\alpha(\vec{x},\tau) = \dot{\beta}(\vec{x},\tau) + \xi(\tau) \ , \tag{G.26}$$

$$\vec{\epsilon}_i(\vec{x},\tau) = \vec{\epsilon}_i(\vec{x}) \ , \tag{G.27}$$

$$h_{ij}^{||}(\vec{x},\tau) = -2\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\beta(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.28}$$

$$\partial_i\vec{\epsilon}_j + \partial_j\vec{\epsilon}_i = 0 \ , \tag{G.29}$$

onde $\xi(\tau)$ é uma função arbitrária do tempo, refletindo a liberdade de gauge associada à transformação de coordenadas

$$\hat{x}^0 = x^0 + \xi(\tau) \ , \tag{G.30}$$
$$\hat{x}^i = x^i \ . \tag{G.31}$$

Essa transformação corresponde à redefinição global das unidades do tempo sem significado físico; de agora em diante vamos assumir então que $\xi = 0$. A partir das Eqs. (G.15) e (G.17) obtemos

$$\psi(\vec{x},\tau) = \ddot{\beta}(\vec{x},\tau) + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\beta}(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.32}$$
$$\phi(\vec{x},\tau) = -\frac{1}{6}h(\vec{x},\tau) - \frac{1}{3}\nabla^2\beta(\vec{x},\tau) - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\beta}(\vec{x},\tau) \ , \tag{G.33}$$

onde β é determinado por $h^{||}$ na Eq. (G.28).

Utilizando a Eq. (G.6), é possível ver que

$$h^{||}_{ij}(\vec{x},\tau) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(\hat{\vec{k}}_i\hat{\vec{k}}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\left[h(\vec{k},\tau) + 6\eta(\vec{k},\tau)\right] \ . \tag{G.34}$$

Comparando $h^{||}_{ij}$ entre a Eq. (G.28) e a Eq. (G.34), podemos obter

$$\beta(\vec{x},\tau) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{2k^2}\left[h(\vec{k},\tau) + 6\eta(\vec{k},\tau)\right] \ . \tag{G.35}$$

Conforme as Eqs. (G.32) e (G.33), os potenciais do gauge Newtonianos ϕ e ψ se relacionam com os potenciais h e η do gauge síncrono por

$$\psi(\vec{x},\tau) = \frac{1}{2k^2}\left\{\ddot{h}(\vec{x},\tau) + 6\ddot{\eta}(\vec{x},\tau) + \frac{\dot{a}}{a}\left[\dot{h}(\vec{x},\tau) + 6\dot{\eta}(\vec{x},\tau)\right]\right\} \ , \tag{G.36}$$
$$\phi(\vec{x},\tau) = \eta(\vec{x},\tau) - \frac{1}{2k^2}\frac{\dot{a}}{a}\left[\dot{h}(\vec{x},\tau) + 6\dot{\eta}(\vec{x},\tau)\right] \ . \tag{G.37}$$

As outras componentes das perturbações da métrica são nulas em ambos os gauges.

Apêndice H

Tunelamento

Caso a partícula esteja no mínimo metaestável, existe uma probabilidade não nula, segundo a mecânica quântica [260], dela tunelar a barreira de potencial e decair para o mínimo estável.

Pode-se utilizar o método WKB da mecânica quântica para calcular a amplitude de transição entre o mínimo metaestável e o mínimo estável. Este método obtém uma solução aproximada para a equação de Schrödinger independente do tempo em uma dimensão.

A equação de Schrödinger para uma partícula de massa unitária em 1+1 dimensão, sujeita a um potencial $V(x)$ é

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = \frac{2(V-E)}{\hbar^2}\psi \ , \tag{H.1}$$

cuja solução é de onda plana se $V(x)$ for constante

$$\psi \propto e^{\pm ikx} \ , \tag{H.2}$$

onde $k \equiv \dfrac{\sqrt{2(E-V)}}{\hbar}$.

Na região classicamente proibida $(E-V)<0$, a solução será

$$\psi \propto e^{\mp\kappa x} \ , \tag{H.3}$$

onde $\kappa \equiv \dfrac{\sqrt{2|E-V|}}{\hbar}$.

Se considerarmos agora que $V(\phi)$ não é exatamente uma constante mas que varia muito lentamente em relação ao comprimento de onda $\lambda = \dfrac{1}{\kappa}$, então o comprimento de onda é muito pequeno em comparação aos parâmetros do potencial da partícula, ou seja,

$$\lambda = \frac{1}{\kappa(x)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2|E-V(x)|}} \rightarrow \text{muito pequeno} \ . \tag{H.4}$$

Esse limite em que $\hbar \rightarrow 0$ é chamado de **limite semiclássico**.

Vamos considerar que o potencial varie lentamente com a posição $V(x) \simeq$ cte, podemos derivar a expressão (H.3) e obter

$$\frac{d\psi}{dx} = \mp\kappa(x)\psi \ , \tag{H.5}$$

Resolvendo a equação acima para uma partícula que tunela para a direita

$$\psi \propto e^{-\int \kappa(x)\,\mathrm{d}x} \ , \tag{H.6}$$

de modo que a amplitude de uma trajetória de tunelamento entre os pontos a e b é dada por

$$A \propto e^{-2\int_a^b \kappa(x)\,\mathrm{d}x} \ , \tag{H.7}$$

Derivando a eq. (H.5) obtemos

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = \left[\frac{2\,(V(x)-E)}{\hbar^2} + \frac{V'(x)}{\hbar\sqrt{2\,(V(x)-E)}}\right]\psi \tag{H.8}$$

No limite semiclássico, $h \to 0$, podemos desprezar o segundo termo do lado direito da equação acima retomando a eq. de Schrödinger original.

No espaço de Minkowski a Lagrangeana é dada por $\mathcal{L}_M = -p\,\dot{x}$. Assim, o expoente da amplitude da solução de Schrödinger em 1+1 dimensão no limite semiclássico pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{2\,(V(x)-E)}\mathrm{d}x =& \int_a^b i\,p\mathrm{d}x \\ =& i\int_{t_a}^{t_b} p\,\dot{x}\,\mathrm{d}t \\ =& -i\int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}_M\,\mathrm{d}t \\ =& -i\,S_M \ ,\end{aligned} \tag{H.9}$$

onde S_M é a ação no espaço de Minkowski.

Da teoria de campos sabemos que as amplitudes podem ser escritas na formulação de integrais de caminho na forma

$$\begin{aligned}A =& \langle x=b|\,e^{iHt/\hbar}\,|x=a\rangle \\ =& \mathcal{N}\int \mathrm{d}(x(t))\,e^{i\,S_M(x(t))/\hbar} \ ,\end{aligned} \tag{H.10}$$

onde $\mathcal{N}$ é o fator de normalização.

Calcular a probabilidade de transição para uma partícula tunelar através de uma região classicamente proibida pela integral de caminho no espaço de Minkowski corresponde a calcular a amplitude para a partícula tunelar através de uma região classicamente permitida no espaço euclidiano[1]. Neste espaço, a integral (H.9) se torna

[1]Fazendo uma rotação de Wick $t \to i\tau$, no espaço euclideano a energia passará a ser negativa, ou seja, as regiões classicamente proibidas passarão a ser permitidas [261]

$$-\int_{\tau_a}^{\tau_b} p\,\dot{x}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathcal{L}_E\,\mathrm{d}\tau = S_E\ , \tag{H.11}$$

onde $\mathcal{L}_E$ é a lagrangeana no espaço euclideano e S_E é a ação no mesmo espaço.

Da mesma forma que foi feito anteriormente, podemos escrever a amplitude na formulação de integrais de caminho,

$$\begin{aligned} A =& \langle x=b|\, e^{-H\tau/\hbar}\,|x=a\rangle \\ =&\mathcal{N}\int \mathrm{d}(x(\tau))\, e^{-i\,S_E(x(\tau))/\hbar}\ . \end{aligned} \tag{H.12}$$

Podemos expandir a matriz acima multiplicando os dois lados da equação por $1 = \sum_n |n\rangle\,\langle n|$, assim

$$\begin{aligned} A =& \langle x=b|\, e^{-H\tau/\hbar}\,|x=a\rangle \\ =&\sum_n \langle b|n\rangle\,\langle n|a\rangle\, e^{-E_n\,\tau/\hbar}\ . \end{aligned} \tag{H.13}$$

A energia de um estado metaestável é dada por

$$E_0 = \epsilon + i\Gamma/2\ , \tag{H.14}$$

onde Γ corresponde à largura de decaimento da partícula. Queremos obter Γ, mas para isso vamos calcular o caso de uma energia puramente real, com o estado estável, onde essa energia é calculada a partir da amplitude de transição obtida acima. Supomos que a partícula tunele a partir do repouso. Para calcular E_0 vamos fazer $b = a$. Quando $\tau \to \infty$ o sistema tende ao estado de mais baixa energia, portanto,

$$A = \langle a|\, e^{-H\tau/\hbar}\,|a\rangle \underset{\tau\to\infty}{\approx} |\,\langle a|0\rangle\,|^2 e^{-E_0\tau/\hbar} + \cdots\ . \tag{H.15}$$

A amplitude A também pode ser expressa pela integral de caminho (H.12), com as condições de contorno

$$x(-T/2) = x(T/2) = a\ , \tag{H.16}$$

onde T é o intervalo de tempo, que tenderá ao infinito.

Esta integral de caminho é uma soma sobre todos os caminhos que têm essas mesmas condições de contorno. No entanto, como o integrando cai com o crescimento da ação euclideana, $e^{-S_E(x(\tau))/\hbar}$, a maior contribuição virá dos caminhos que possuem a menor ação, que são os caminhos clássicos. Portanto a amplitude é dominada pela solução clássica. Então podemos expandir a ação em torno dos caminhos clássicos, ou seja, aqueles caminhos cuja ação segue a equação $\delta\,S/\delta\,x(\tau) = 0$. Expandindo a ação em série de Taylor temos

$$S_E\,(x(\tau)) = S\,(x_c(\tau)) + \frac{1}{2}\int d\tau'\,d\tau''\,\frac{\delta^2 S_E\,(x(\tau))}{\delta x(\tau')\,\delta x(\tau'')}\bigg|_{x(\tau)=x_c(\tau)} \delta x(\tau')\,\delta x(\tau'') + \cdots\ , \tag{H.17}$$

onde x_c é o valor clássico de x e $\delta x(\tau) = x(\tau) - x_c(\tau)$. A derivada funcional é dada por

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\delta^2 S_E\left(x(\tau)\right)}{\delta x(\tau')\,\delta x(\tau'')}\right|_{x(\tau)=x_c(\tau)} &= \frac{1}{\delta x(\tau')\,\delta x(\tau'')}\delta^2 \left.\left\{\left(\frac{-d_\tau x(\tau) d_\tau x(\tau)}{2}\right) + V\right\}\right|_{x(\tau)=x_c(\tau)} \\
&= \left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''\left(x_c(\tau')\right)\right]\delta\left(\tau' - \tau''\right) \ . \qquad \text{(H.18)}
\end{aligned}
$$

A ação expandida pode ser escrita como

$$
S_E\left(x(\tau)\right) = S\left(x_c(\tau)\right) + \frac{1}{2}\int d\tau\, dx(\tau)\left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''\left(x_c(\tau)\right)\right]\delta x(\tau) + \cdots \ . \qquad \text{(H.19)}
$$

Vamos expandir $\delta x(\tau)$ em termos de um conjunto completo de autofunções ortonormais $x_n(\tau)$ do operador $\left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''\left(x_c(\tau')\right)\right]$,

$$
\delta x(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x_n(\tau) \ , \qquad \text{(H.20)}
$$

onde

$$
\left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''\left(x_c(\tau')\right)\right] x_n(\tau) = \lambda_n\, x_n(\tau) \ , \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \ , \qquad \text{(H.21)}
$$

que satisfazem as condições de contorno

$$
x_n\left(-T/2\right) = x_n\left(T/2\right) = a \ , \qquad \text{(H.22)}
$$

com a completeza

$$
\sum_{n=1}^{\infty} x_n(\tau)\, x_n(\tau') = \delta\left(\tau - \tau'\right) \ , \qquad \text{(H.23)}
$$

e a ortonormalidade

$$
\int_{T/2}^{T/2} d\tau\, x_n(\tau)\, x_m(\tau) = \delta_{nm} \ . \qquad \text{(H.24)}
$$

Após a expansão de $\delta x(\tau)$ a ação pode ser escrita como

$$
S_E\left(x(\tau)\right) = S_E\left(x_c(\tau)\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\, c_n^2 + \mathcal{O}\left(c_n^3\right) \ , \qquad \text{(H.25)}
$$

e a amplitude

$$
\begin{aligned}
\langle a|\, e^{-T\hat{H}/\hbar}\, |a\rangle =& \mathcal{N} \int \mathrm{d}x(\tau)\, e^{-\frac{1}{\hbar}\left[S_E(x_c(\tau)) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, c_n^2 + \mathcal{O}\left(c_n^3\right)\right]} \\
=& \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\, S_E(x_c(\tau))} \int \mathrm{d}x(\tau)\, e^{-\frac{1}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, c_n^2 + \mathcal{O}\left(c_n^3\right)\right]} \\
\simeq& \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\, S_E(x_c(\tau))} \int \mathrm{d}x(\tau)\, \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\,\hbar}\lambda_n\, c_n^2} \ .
\end{aligned} \tag{H.26}
$$

Vamos transformar a integral em uma somatória fazendo

$$
\mathcal{D}x(\tau) \to \prod_{n=1}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \ . \tag{H.27}
$$

Dessa forma, a equação da amplitude pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\langle a|\, e^{-T\hat{H}/\hbar}\, |a\rangle =& \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\, S_E(x_c(\tau))} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\lambda_n\, c_n^2 + \mathcal{O}\left(c_n^3\right)\right]} \\
=& \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\, S_E(x_c(\tau))} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d\tilde{c}_n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left[\frac{1}{2}\lambda_n\, \tilde{c}_n^2 + \mathcal{O}(\hbar)\right]} \\
=& \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\, S_E(x_c(\tau))} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\, (1 + \mathcal{O}(\hbar))\right] \ ,
\end{aligned} \tag{H.28}
$$

onde fizemos $c_n \to \tilde{c}_n \sqrt{\hbar}$ e integramos c_n. Para isso é interessante lembrar da integral da gaussiana. Como feito em [262], da Eq. (H.21),

$$
\langle a|\, e^{-T\hat{H}/\hbar}\, |a\rangle = \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\, S_E(x_c(\tau))} \left\{\det\left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''\left(x_c(\tau)\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \ , \tag{H.29}
$$

O que foi feito até aqui considera a mecânica quântica, vamos utilizar o mesmo raciocínio para reproduzir as contas para teoria de campos. Na medida de integração não utilizaremos mais coordenadas, utilizaremos campos, da mesma forma que as variáveis que representavam as posições no espaço-tempo agora representam apenas parâmetros. Agora a variável dinâmica possui um número infinito de graus de liberdade.

Vamos supor que o campo seja invariante por transformação do grupo $\mathcal{O}(4)$

$$
\phi\left(\vec{x}, \tau\right) = \phi(\rho) \tag{H.30}
$$

onde $\rho \equiv \left(|\vec{x}|^2 + \tau^2\right)^{1/2}$.

Desta forma, a ação euclideana na teoria de campos é

$$
S_E(\phi) = 2\pi^2 \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho\, \rho^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \phi}{\partial\, \rho}\right)^2 + V(\phi)\right] \tag{H.31}
$$

Nesse caso não teremos as mesmas condições de contorno. Vamos assumir que inicialmente o campo seja igual ao campo do vácuo metaestável, $\phi(\rho) = \phi_+$, e futuramente também, ou seja, $\lim_{\rho\to\pm\infty} \phi(\rho) = \phi_+$. Assim, como no caso anterior, vamos supor um intervalo de tempo $-\frac{T}{2}$ a $+\frac{T}{2}$. Temos duas soluções para essas condições de contorno. A primeira delas é aquela em que o campo não sai de ϕ_+, solução estática, a segunda é a solução em que o campo sai de ϕ_+, oscila, e volta para ϕ_+, nesse caso $\frac{d\phi}{d\rho}\big|_{\rho=0} = 0$.

Como feito para chegarmos em (H.29), podemos expandir a amplitude para a teoria de campos como

$$\langle\phi_+|e^{-T\hat{H}/\hbar}|\phi_+\rangle = \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(\phi_0(\rho))} \left\{\det\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{H.32}$$

onde $(\phi_0(\rho))$ corresponde à solução não estática. Podemos definir uma nova função de normalização

$$\mathcal{K} \equiv \frac{\left\{\det\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}}{\left[\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}} \tag{H.33}$$

onde $w^2 \equiv V''(\phi_+)$ corresponde à solução estática, de tal forma que

$$\mathcal{N}\left\{\det\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} \to \mathcal{K}\left[\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{H.34}$$

Minimizando a ação obtemos a equação de movimento clássica do campo ϕ, no espaço euclideano, com potencial $V(\phi)$

$$\frac{\delta S_E\left(\phi(x)\right)}{\delta\phi} = 0\ , \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu\partial_\mu\, \phi(\rho) - V'\left(\phi(\rho)\right) = 0\ . \tag{H.35}$$

Com um pouco de algebra é possível ver que a equação de movimento do campo escalar é [263]

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} - V'(\phi) = 0 \tag{H.36}$$

Essa equação pode ser interpretada como a equação de uma partícula na posição ϕ movendo-se no tempo ρ, sujeita à uma força de atrito $-V'$. Para as nossas condições de contorno é como se a partícula estivesse viajando em um potencial $-V$, ela parte de ϕ_+, potencial metaestável, em sentido ao ϕ_-, potencial estável, quando ela chega no ponto mais próximo a ele possível ela volta invertendo o sinal do segundo termo da equação de movimento.

O potencial invertido pode ser visto na Fig. (H.1) abaixo

Vamos supor que a partícula esteja inicialmente em um ponto ϕ_i muito próximo de ϕ_-, vácuo estável, com velocidade nula no instante inicial $\tau = 0$. O ponto ϕ_i fica entre os dois vácuos e entre o vácuo estável e o ponto ϕ_1 que é o ponto em que $V = 0$, ou seja $\phi_- < \phi_i < \phi_1 < \phi_+$. A partícula que parte de ϕ_i sairá da posição próxima ao máximo e a sua velocidade demorará muito para aumentar pois o coeficiente de atrito é proporcional à ρ^{-1}, e como ρ inicialmente é muito pequeno o atrito é inicialmente muito grande. Então, o tempo para que a partícula cruze o eixo $V = 0$ pode ser

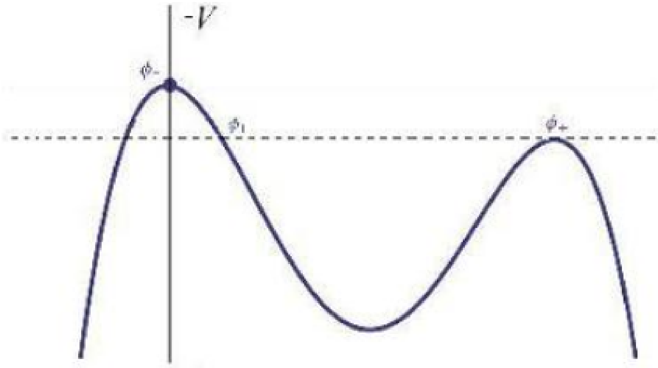

Figura H.1: O potencial invertido [261].

tão longo que o coeficiente de atrito passa a ser desprezível e o sistema passa a se comportar como um sistema conservativo. Como a partícula fica um longo tempo próxima à posição inicial e então rapidamente cruza o potencial no instante próximo de $T = 0$, chamamos esta solução de instaton [261]. Revertendo o movimento temos outra solução que inicia em ϕ_+ e chega em ϕ_-. Esta solução tem a mesma ação que a anterior e é chamada de anti-instaton.

Como estamos tratando do caso em que o tempo vai para o infinito, teremos outras soluções com a mesma ação da solução clássica descrita acima, a única diferença é o momento em que a partícula cruza o eixo pois existe uma simetria temporal. A degenerescência da solução é entaõ T, faremos $\tau = T$. Nestes casos $\delta S \approx 0$, portanto a translação temporal representada por $\dot{\phi}$ satisfaz

$$[\partial_\mu \partial_\mu - V''(\phi_0(\rho))]\,\dot{\phi} = 0 \ . \tag{H.37}$$

Isto implica em um modo nulo no determinante de (H.32). Vamos sumir com esse problema integrando a solução sob as posições da oscilação, ela ficará multiplicada pelo tempo, T, e pelo volume, V, e a integral do Jacobiano, $\left(\sqrt{\frac{S_E(\phi_0(\rho))}{2\pi\hbar}}\right)^D$, responsável pela transformação de coordenadas na integral, onde D é a dimensão do espaço-tempo [264]. Estamos aqui considerando que o tempo não vai para o infinito, pois zeraria a nossa amplitude, mas sim que o tempo vai para um valor muito grande, nesse caso, o modo nulo não é nulo mas tende à zero. Excluindo o modo nulo escrevemos a amplitude como [264]

$$\begin{aligned}\langle\phi_+|e^{-T\hat{H}/\hbar}|\phi_+\rangle =& \frac{[S_E(\phi_0(\rho))]^2}{(2\pi\hbar)^2} T\, V\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(\phi_0(\rho))}\left[\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{\frac{\det'[-\partial_\mu\partial_\mu + V''(\phi_0(\rho))]}{[\det(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2)]}\right\}^{-1/2} \ , \end{aligned} \tag{H.38}$$

onde $'det$ indica que o modo nulo foi excluído do determinante.

Estamos aqui assumindo apenas a solução de uma oscilação, instanton e anti-instanton, mas ela não é única, uma solução formada por várias oscilações bem separadas dentro de um intervalo de tempo T também é válida. Nesse caso teremos n pares de instantons - anti-instantons [261]. Para T muito grande a ação para n pares será $n\, S_E\,(\phi_0(\rho))$, e a degenerescência $\dfrac{T^n}{n!}$.

O determinante das n oscilações é obtido pela transformação

$$\left\{\frac{\det'\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]}{\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)}\right\}^{-1/2} \to \left\{\frac{\det'\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]}{\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)}\right\}^{-n/2}, \tag{H.39}$$

e a amplitude

$$\langle\phi_+|e^{-T\hat{H}/\hbar}|\phi_+\rangle = \left[\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[S_E\left(\phi_0(\rho)\right)\right]^{2n}}{(2\pi\hbar)^{2n}} \left[\frac{(T\,V)^n}{n!}\right]$$
$$e^{-\frac{n}{\hbar}S_E(\phi_0(\rho))} \left\{\frac{\det'\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]}{\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)}\right\}^{-n/2}. \tag{H.40}$$

Essa expressão nos fornece

$$\langle\phi_+|e^{-T\hat{H}/\hbar}|\phi_+\rangle = \left[\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\left[S_E\left(\phi_0(\rho)\right)\right]^{2}}{(2\pi\hbar)^{2}} T\,V$$
$$e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(\phi_0(\rho))} \left\{\frac{\det'\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]}{\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)}\right\}^{-1/2} \tag{H.41}$$

A partir da amplitude (H.15) escrevemos

$$A = \langle\phi_+|e^{-H\tau/\hbar}|\phi_+\rangle \underset{\tau\to\infty}{\approx} |\,\langle\phi_+|0\rangle\,|^2\, e^{-E_0\tau/\hbar} + \cdots\,. \tag{H.42}$$

Da equação acima é possível notar que a energia E_0 corresponde ao termo no expoente multiplicado por $\hbar/\tau$. A expressão do determinante $\left[\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$ corresponde à expressão de um oscilador harmônico livre,

$$\left[\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{w}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{w\,\tau}{2}}\,. \tag{H.43}$$

Desse modo

$$E_0 = \frac{\hbar w}{2} + \hbar\frac{\left[S_E\left(\phi_0(\rho)\right)\right]^{2}}{(2\pi\hbar)^{2}}\,V e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(\phi_0(\rho))} \left\{\frac{\det'\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]}{\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)}\right\}^{-1/2} \tag{H.44}$$

Como já vimos, a largura Γ de decaimento de uma partícula em um estado meta-estável se relaciona com a energia por

$$E_0 = \epsilon + i\,\Gamma/2\,, \tag{H.45}$$

então

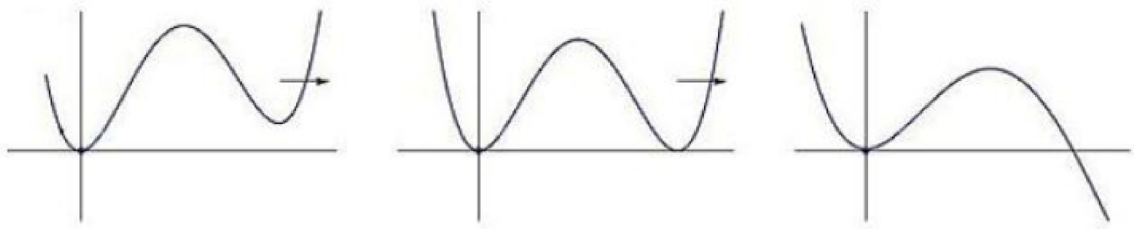

Figura H.2: Esquerda: $\alpha = 0$. Central: α crítico. Direita: $\alpha = 1$ [261].

$$\Gamma = 2\mathcal{I}m\, E_0 \;. \tag{H.46}$$

A equação (H.44) representa uma energia com parte real. Porém, como o autovalor do modo nulo é dado pela função $\dot{\phi}$, ele tem um sinal negativo na ida e positivo na volta, ou seja, a função possui um zero. No entando, o estado de autovalor não deveria possuir um zero. Portanto, deve existir um autovalor negativo [262].

A raiz do determinante acima nos fornece a raiz do produto dos autovalores, que são negativos, então o determinante será imaginário. Dessa forma [262]

$$\Gamma = 2\mathcal{I}m\, E_0 = 2\hbar \frac{\left[S_E\left(\phi_0(\rho)\right)\right]^2}{(2\pi\hbar)^2} V e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(\phi_0(\rho))} \left\{ \frac{\det'\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]}{\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)} \right\}^{-1/2} , \tag{H.47}$$

se

$$A = \langle\phi_+|e^{-HT/\hbar}|\phi_+\rangle = \langle\phi_+|\epsilon + i\frac{\Gamma}{2}\rangle\,\langle\epsilon + i\frac{\Gamma}{2}|\phi_+\rangle\, e^{-\left(\epsilon + i\frac{\Gamma}{2}\right)T/\hbar} \;. \tag{H.48}$$

Mas esta expressão não é bem definida. A Hamiltoniana é um operador hermiteano com todos os autovalores reais, então não há nenhum estado que corresponda a um estado metaestável, com autovalor imaginário. A integral de caminho que calculamos não é bem definida. Vamos obter então o estado metaestável através da continuação analítica de um outro caso.

Vamos partir de um potencial com um mínimo estável que é função de um parâmetro α. Para potenciais desse tipo a integral de caminho que calculamos está correta. Vamos agora fazer uma continuação analítica no parâmetro α e alterar o potencial de tal forma a obter o potencial que queremos, com o mínimo metaestável. A transformação é apresentada na figura abaixo H.2 [261]

Após fazer a continuação analítica, recuperando o potencial metaestável, esperamos obter uma energia com parte imaginária. As contas da continuação analítica envolvem cálculos que não são do nosso interesse. É possível ver em [265], que a largura de decaimento é dada por

$$\frac{\Gamma}{V} = \hbar \frac{S_E\left(\phi_0(\rho)\right)^2}{(2\pi\hbar)^2} e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(\phi_0(\rho))} \frac{1}{\sqrt{\lambda_-}} \left\{ \frac{\det'\left[-\partial_\mu\partial_\mu + V''\left(\phi_0(\rho)\right)\right]}{\det\left(-\partial_\mu\partial_\mu + w^2\right)} \right\}^{-1/2} \tag{H.49}$$

Essa expressão para o Γ ganhou um fator de 1/2 em relação à expressão calculada anteriormente (H.47). O símbolo $'$ no determinante que antes indicava a exclusão do modo nulo agora indica a exclusão do modo nulo e dos modos negativos. Esse último foi considerado em λ_-.

Em todo o nosso cálculo consideramos que o potencial é nulo no mínimo metaestável $V(\phi_+) = 0$. Calculamos então a diferença entre a ação da solução oscilatória e a ação da solução estática no vácuo metaestável. Deste modo, o mais correto é escrever [265]

$$\frac{\Gamma}{V} = \hbar \frac{S_E \left(\phi_0(\rho)\right)^2}{(2\pi\hbar)^2} e^{-\frac{1}{\hbar}(S_E - S_\Lambda)} \left\{ \frac{\det' \left[-\partial_\mu \partial_\mu + V'' \left(\phi_0(\rho)\right)\right]}{\det \left(-\partial_\mu \partial_\mu + w^2\right)} \right\}^{-1/2} , \tag{H.50}$$

onde S_Λ corresponde à ação da solução estacionária no vácuo falso, e $'$, nesse caso, volta a indicar a exclusão do autovalor nulo no determinante.

No sistema de unidades em que estamos trabalhando, $\hbar = c = 1$, a expressão da taxa de decaimento por unidade de volume terá dimensão de massa^4, que equivale ao inverso da unidade de volume pelo inverso do tempo. No caso em que estamos trabalhando temos uma simetria espaço-temporal euclideana com a dimensão do espaço-tempo igual a quatro. Neste caso

$$t_{\text{decaimento}} = \left(\frac{V}{\Gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{H.51}$$

Apêndice I

Cálculo do tensor energia-momento para o modelo Horndeski

Calcularemos a variação da Lagrangeana 4.66 que constitue $T^{\mu\nu}_{(u)}$.

L2

$$\mathcal{L}_2 \equiv \sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\left(X - \eta X^{1/2}\right)\ . \tag{I.1}$$

Vamos considerar uma pequena variação na métrica da forma

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \qquad \text{e} \qquad g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}\ . \tag{I.2}$$

Então, a variação da Lagrangeana pode ser escrita conforme

$$\delta\mathcal{L}_2 = \underbrace{\frac{1}{2}\delta(\sqrt{-g})\ \left(X - \eta X^{1/2}\right)}_{\delta_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\delta\left(X - \eta X^{1/2}\right)}_{\delta_2}\ . \tag{I.3}$$

A partir da fórmula de Jacobi

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}\ , \tag{I.4}$$

portanto

$$\delta_1 = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left(X - \eta X^{1/2}\right)\,\delta g_{\mu\nu}\ . \tag{I.5}$$

Para calcular o δ_2 devemos perturbar o X

$$\begin{aligned}
\delta_2 \equiv&\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\delta\left(X - \eta X^{1/2}\right)\\
=&\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[\delta X - \eta\,\delta\left(X^{1/2}\right)\right]\\
=&\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(1 - \frac{\eta}{2}\,X^{-1/2}\right)\delta X\ ,
\end{aligned} \tag{I.6}$$

onde usamos a expansão em série de Taylor

$$\sqrt{x+\epsilon} \simeq \sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{x^{1/2}} + \cdots \ ,$$

com $x \to X$ e $\epsilon \to \dfrac{1}{2}\,\delta g_{\mu\nu}\,\partial^\mu\phi\,\partial^\nu\phi$.

Como

$$\begin{aligned} X =& -\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi \\ =& -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi \ , \end{aligned} \tag{I.7}$$

então

$$\delta X = -\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\,\delta g_{\mu\nu} \ . \tag{I.8}$$

Dessa forma

$$\delta_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\left(1 - \frac{\eta}{2}\,X^{-1/2}\right)\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\,\delta g_{\mu\nu} \ . \tag{I.9}$$

Utilizamos aqui que $\nabla^\mu\phi = \partial^\mu\phi$ pelo fato do campo ser escalar.

Substituindo a Eq. (I.5) e a Eq. (I.9) na Eq. (I.3), temos

$$\boxed{\delta\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\left[\left(-g^{\mu\nu}\,X + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\right) - \frac{\eta}{2}X^{-1/2}\left(-2g^{\mu\nu}X + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\right)\right]\delta g_{\mu\nu}} \tag{I.10}$$

L3

Definimos

$$\mathcal{L}_3 \equiv -\frac{\lambda_3}{2}\sqrt{-g}\,\Box\phi\,X^{-1/2} \tag{I.11}$$

$$= -\frac{\lambda_3}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\nabla^\mu\partial^\nu\phi\,X^{-1/2} \tag{I.12}$$

$$= -\frac{\lambda_3}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\partial_\nu\phi\,X^{-1/2} \tag{I.13}$$

$$= -\frac{\lambda_3}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\partial_\nu\phi\,\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi}} \ . \tag{I.14}$$

Agora vamos considerar uma pequena variação na métrica da forma

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \qquad \text{e} \qquad g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \ . \tag{I.15}$$

A variação da métrica escrita como a Eq. (I.13), pode ser escrita como

$$\delta\mathcal{L}_3 = -\frac{\lambda_3}{2}\Bigg[\underbrace{\delta\left(\sqrt{-g}\right)\,\Box\phi\,X^{-1/2}}_{\delta_1} + \underbrace{\sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}\right)\nabla_\mu\partial_\nu\phi\,X^{-1/2}}_{\delta_2}$$
$$+\underbrace{\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\left(\nabla_\mu\partial_\nu\phi\right)\,X^{-1/2}}_{\delta_3} + \underbrace{\sqrt{-g}\,\Box\phi\,\delta\left(X^{-1/2}\right)}_{\delta_4}\Bigg]\ , \tag{I.16}$$

onde utilizamos o fato de que

$$\begin{aligned}\delta\Box\phi &= \underbrace{\sqrt{-g}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\right)\nabla_\mu\partial_\nu\phi\,X^{-1/2}}_{\delta_2} + \underbrace{\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta\left(\nabla_\mu\partial_\nu\phi\right)\,X^{-1/2}}_{\delta_3}\\ &= \underbrace{\sqrt{-g}\,\delta\left(g_{\mu\nu}\right)\nabla^\mu\partial^\nu\phi\,X^{-1/2}}_{\delta_5} + \underbrace{\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta\left(\nabla^\mu\partial^\nu\phi\right)\,X^{-1/2}}_{\delta_6}\ .\end{aligned}$$

Aqui calcularemos $\delta\Box\phi = \delta_2 + \delta_3$. Apesar de não ser apresentado o cálculo por $\delta\Box\phi = \delta_5 + \delta_6$, o resultado é o mesmo, como deveria ser.

Para calcular

$$\delta_1 = \delta(\sqrt{-g})X^{-1/2} \tag{I.17}$$

utilizamos a identidade

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}\ , \tag{I.18}$$

tal que

$$\boxed{\delta_1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\Box\phi\,X^{-1/2}\right)\delta g_{\mu\nu}}\ . \tag{I.19}$$

Para calcular

$$\delta_4 = \sqrt{-g}\delta(X^{-1/2}) \tag{I.20}$$

partimos de

$$X^{-1/2} = \left(-\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\,g^{\mu\nu}\right)^{-1/2}\ . \tag{I.21}$$

Quando $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, então $X^{-1/2} \to X^{1/2} + \delta X^{-1/2}$, onde

$$X^{-1/2} \to \left[-\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\,\left(g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}\right)\right]^{-1/2}\ . \tag{I.22}$$

Utilizando a expansão de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{x+\epsilon}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{x^{3/2}} + \cdots\ ,$$

com $x \to X$ e $\epsilon \to -\delta X = \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\,\delta g^{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned}\delta X^{-1/2} =& -\frac{1}{2}X^{-3/2}\,\delta X\\ =& -\frac{1}{2}X^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right)\delta g^{\mu\nu}\\ =& -\frac{1}{2}X^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right)\left(-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right)\\ =& -\frac{1}{4}X^{-3/2}\,\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}\ .\end{aligned} \tag{I.23}$$

Substituindo a Eq. (I.23) no δ_4 obtemos

$$\boxed{\delta_4 = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\,\Box\phi\, X^{-3/2}\,\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\mu\nu}}\ . \tag{I.24}$$

Vamos agora calcular $\delta\Box\phi = \delta_2 + \delta_3$. Primeiramente calculemos

$$\delta_2 \equiv \sqrt{-g}\delta\left(g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\alpha\partial_\beta\phi\, X^{-1/2}\ . \tag{I.25}$$

Utilizando a Eq. (C.36) temos

$$\boxed{\delta_2 = \left(-\sqrt{-g}\, g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\,\nabla_\alpha\partial_\beta\phi\, X^{-1/2}\right)\delta g_{\mu\nu}}\ . \tag{I.26}$$

Deixamos o cálculo de

$$\delta_3 \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\left(\nabla_\mu\partial_\nu\phi\right)\, X^{-1/2}\ , \tag{I.27}$$

por último por ser o mais trabalhoso. Queremos calcular

$$\delta\left(\nabla_\mu\partial_\nu\phi\right)\ , \tag{I.28}$$

Para isso precisamos de algumas definições. A primeira delas é a definição da derivada covariante

$$\nabla_\mu\partial_\nu\phi = \partial_\mu\partial_\nu\phi - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi\ ,$$

o que implica em

$$\begin{aligned}\delta\left(\nabla_\mu\partial_\nu\phi\right) =& \delta(\partial_\mu\partial_\nu\phi) - \delta(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi)\\ =& -\delta(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})\partial_\lambda\phi\ ,\end{aligned} \tag{I.29}$$

A segunda é a definição do Γ:

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\ .$$

Temos então

$$\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\left(\delta g^{\lambda\sigma}\right)\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) + g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu\delta g_{\nu\sigma} + \partial_\nu\delta g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\delta g_{\mu\nu}\right)\right]\ .$$

O primeiro termo da equação acima é bem conhecido. A principal questão aqui é o segundo termo. Ele envolve derivada das variações do tensor métrico o índice embaixo. Para resolver esse problema devemos nos lembrar que estamos trabalhando no contexto do princípio variacional, o que nos permite fazer uma integração por partes, e quando feita. podemos desconsiderar o termo de borda. Substituindo o que foi visto aqui em δ_3, temos

$$\begin{aligned}
\delta_3 \equiv& \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta\left(\nabla_\mu\partial_\nu\phi\right)\, X^{-1/2} \\
=& -\sqrt{-g}\, X^{-1/2}\, g^{\mu\nu}\, \delta({\Gamma^\lambda}_{\mu\nu})\partial_\lambda\phi \\
=& -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2}\, g^{\mu\nu}\left[\delta g^{\lambda\sigma}\left(2\partial_\mu g_{\nu\sigma}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)+2g^{\lambda\sigma}\partial_\mu\delta g_{\nu\sigma}-g^{\lambda\sigma}\partial_\sigma\delta g_{\mu\nu}\right]\partial_\lambda\phi\ ,
\end{aligned} \tag{I.30}$$

onde consideramos estar tratando de uma métrica simétrica. Fazendo a integração por partes no segundo e no terceiro termo (verde e azul respectivamente) da equação acima, escrevemos

$$\begin{aligned}
\delta_3 =& -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2} g^{\mu\nu}\delta g^{\lambda\sigma}\left(2\partial_\mu g_{\nu\sigma}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\partial_\lambda\phi \\
&+2\partial_\mu\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}\partial_\lambda\phi\right)\delta g_{\nu\sigma}-\partial_\sigma\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}\partial_\lambda\phi\right)\delta g_{\mu\nu}\ .
\end{aligned} \tag{I.31}$$

Vamos agora fazer duas trocas de índices, $\mu\to\alpha$ e $\nu\to\beta$, no primeiro termo (vermelho), e uma troca, $\mu\leftrightarrow\sigma$, no segundo termo (verde)

$$\begin{aligned}
\delta_3 =& -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2} g^{\alpha\beta}\delta g^{\lambda\sigma}\left(2\partial_\alpha g_{\beta\sigma}-\partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right)\partial_\lambda\phi \\
&+2\partial_\sigma\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2} g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}\partial_\lambda\phi\right)\delta g_{\mu\nu}-\partial_\sigma\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}\partial_\lambda\phi\right)\delta g_{\mu\nu}\ .
\end{aligned} \tag{I.32}$$

Para finalizar, vamos abaixar os índices da variação da métrica no primeiro termo (vermelho), lembrando que $\delta g^{\lambda\sigma}=-g^{\lambda\mu}g^{\sigma\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$

$$\boxed{\begin{aligned}
\delta_3 =& \left\{\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu}\left(2\partial_\alpha g_{\beta\sigma}-\partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right)\partial_\lambda\phi\right. \\
&\left.+\partial_\sigma\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2}\Big(2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}-g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\Big)\partial_\lambda\phi\right]\right\}\delta g_{\mu\nu}\ .
\end{aligned}}$$

Juntando δ_2 e δ_3, temos

$$\begin{aligned}
\delta\Box\phi =& \Big[-\sqrt{-g}\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\, \nabla_\mu\partial_\nu\phi\, X^{-1/2} \\
&+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu}\left(2\partial_\alpha g_{\beta\sigma}-\partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right)\partial_\lambda\phi \\
&+\partial_\sigma\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2}\Big(2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}-g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\Big)\partial_\lambda\phi\right]\Big]\,\delta g_{\mu\nu}\ .
\end{aligned}$$

Lembrando que $\delta\mathcal{L}_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$, obtemos

$$\boxed{\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_3 = -\frac{\lambda_3}{2}\Bigg[&\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\Box\phi\, X^{-1/2} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu})\,\nabla_\alpha\partial_\beta\phi\, X^{-1/2} \\ &+ \frac{1}{4}\sqrt{-g}\, X^{-1/2}g^{\alpha\beta}(g^{\lambda\mu}g^{\sigma\nu} + g^{\lambda\nu}g^{\sigma\mu})\,(2\partial_\alpha g_{\beta\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta})\,\partial_\lambda\phi \\ &+ \partial_\sigma\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, X^{-1/2}\Big(g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\nu\lambda}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\Big)\partial_\lambda\phi\right] \\ &- \frac{1}{4}\sqrt{-g}\,\Box\phi\, X^{-3/2}\,\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\Bigg]\,\delta g_{\mu\nu}\ .\end{aligned}} \tag{I.34a}$$

Levamos em conta que o tensor energia-momento é um tensor simétrico.

L4

Variando o tensor de Ricci R com respeito a métrica, obtemos o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. A variação do terceiro termo de (4.66) nos fornece

$$\boxed{\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_4\right) &= \delta(\sqrt{-g}R/2) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\ .\end{aligned}} \tag{I.35a}$$

L5

O termo de acoplamento não mínimo é

$$\frac{\lambda_5}{2}\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\ . \tag{I.36}$$

Variando com respeito a métrica (não vamos carregar as constantes), temos

$$
\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) =& \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) \\
=& \underbrace{(\delta\sqrt{-g})g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\equiv\delta_1} + \\
&+ \underbrace{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\equiv\delta_2} + \\
&+ \underbrace{\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}\delta g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\equiv\delta_3} \\
&+ \underbrace{\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}\delta G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\equiv\delta_4} \ .
\end{aligned} \tag{I.37}
$$

O primeiro termo é

$$
\boxed{\underbrace{(\delta\sqrt{-g})G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{=\delta_1} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}G^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi\delta g^{\mu\nu}} \ . \tag{I.38}
$$

O segundo termo é

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\delta_2} &= \sqrt{-g}\delta g^{\mu\kappa}G^{\nu}_{\kappa}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\
&= \sqrt{-g}G^{\lambda}_{\mu}\nabla_\nu\phi\nabla_\lambda\phi\delta g^{\mu\nu} \\
&= \sqrt{-g}G^{\lambda}_{(\mu}\nabla_{\nu)}\phi\nabla_\lambda\phi\delta g^{\mu\nu} \ ,
\end{aligned} \tag{I.39}
$$

onde

$$
G^{\lambda}_{(\mu}\nabla_{\nu)}\phi = \frac{1}{2}(G^{\lambda}_{\mu}\nabla_\nu\phi + G^{\lambda}_{\nu}\nabla_\mu\phi) \ . \tag{I.40}
$$

O terceiro termo é idêntico ao segundo.

No último termo, temos que variar o tensor de Einstein e lembrar que

$$
G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \ .
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}\delta G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi =& \underbrace{\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi}_{\equiv\delta_{41}} + \\
& \underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi}_{\equiv\delta_{42}} + \\
& \underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi}_{\equiv\delta_{43}} + \\
& \underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi}_{\equiv\delta_{44}} \ .
\end{aligned}
$$

Vamos calcular cada um desses termos. Variando o tensor de Ricci obtemos

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi}_{=\delta_{41}} =&\sqrt{-g}[\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}]\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi \\
=&\sqrt{-g}\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi - \sqrt{-g}\nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi \\
=&-\sqrt{-g}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) + \sqrt{-g}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\nabla_{\nu}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) \\
=&-\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu})\nabla_{\lambda}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) \\
&+\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_{\lambda}\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\lambda\mu})\nabla_{\nu}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) \\
=&-\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma}\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\nu}\nabla_{\lambda}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) + \frac{\sqrt{-g}}{2}\nabla^{\lambda}\delta g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) \\
&+\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\lambda\sigma}\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\lambda}\nabla_{\nu}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) \\
=&\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma}\delta g_{\sigma\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\lambda}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) - \frac{\sqrt{-g}}{2}\delta g_{\mu\nu}\Box(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) \\
&-\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\lambda\sigma}\delta g_{\sigma\lambda}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) \\
=&\sqrt{-g}[-\delta g^{\sigma\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\sigma}(\nabla^{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi) + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\Box(\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi) \\
&+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\nabla_{\lambda}(\nabla^{\sigma}\phi\nabla^{\lambda}\phi)] \\
=&\sqrt{-g}[-\nabla_{\sigma}\nabla_{(\mu}\nabla^{\sigma}\phi\nabla_{\nu)}\phi + \frac{1}{2}\Box(\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi) \\
&+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\nabla_{\lambda}(\nabla^{\sigma}\phi\nabla^{\lambda}\phi)]\delta g^{\mu\nu}\ .
\end{aligned} \tag{I.41}$$

As variações da métrica dão

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}(\delta g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g_{\mu\nu}\delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta})\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi}_{=\delta_{42}+\delta_{43}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(R\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - R_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\phi\nabla_{\alpha}\phi)\delta g^{\mu\nu}\ . \tag{I.42}$$

Variando $R_{\mu\nu}$ de novo

$$
\begin{aligned}
\underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi}_{\delta_{44}} =& -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
=& -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}]\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
=& \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
=& \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\nabla_\mu\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu})\nabla_\lambda\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
& - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\nabla_\mu\delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_\lambda\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma\delta g_{\lambda\mu})\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
=& \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta g_{\sigma\nu}\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
=& -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\sigma\nu}\nabla_\mu\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi + \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\Box(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
=& +\frac{\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\sigma\nu}\nabla_\nu\nabla_\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\Box(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
=& \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)\right]\delta g^{\mu\nu}\ .
\end{aligned} \tag{I.43}
$$

Juntando todos os termos obtemos

$$
\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi) = \sqrt{-g}\Bigg[& \underbrace{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi}_{\propto\delta_1} + \underbrace{2G^\lambda_{(\mu}\nabla_{\nu)}\phi\nabla_\lambda\phi}_{\propto(\delta_2+\delta_3)} + \\
& \underbrace{-\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi + \frac{1}{2}\Box(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla_\lambda(\nabla^\sigma\phi\nabla^\lambda\phi)}_{\propto\delta_{41}} + \\
& + \underbrace{\frac{1}{2}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi}_{\propto(\delta_{42}+\delta_{43})} + \\
& + \underbrace{\frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)}_{\propto\delta_{44}}\Bigg]\delta g^{\mu\nu}\ .
\end{aligned} \tag{I.44}
$$

Vamos tomar termos de derivadas de ordem superior. A partir do terceiro termo de δ_{41} e do segundo termo de δ_{44}

$$
\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla_\lambda(\nabla^\sigma\phi\nabla^\lambda\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \quad , \tag{I.45}
$$

enquanto que do primeiro e segundo termo de δ_{41} e do primeiro termo de δ_{44} obtemos

$$-\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi+\frac{1}{2}\Box(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)+\frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \tag{I.46}$$

Abrindo as derivadas da Eq. (I.45), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)\\
=&\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\nabla_\alpha\nabla_\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi)-\nabla_\beta\nabla^\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)]\\
=&\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi+\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi+\Box\phi\Box\phi+\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\Box\phi\\
&-\Box\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi-\nabla^\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla_\alpha\phi-\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\nabla_\alpha\phi-\nabla^\alpha\phi\Box\nabla_\alpha\phi]\\
=&\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(\Box\phi)^2-\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi+\nabla^\alpha\phi(\nabla_\alpha\nabla_\beta-\nabla_\beta\nabla_\alpha)\nabla^\beta\phi]\\
=&\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[(\Box\phi)^2-\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi-R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\right]\quad,
\end{aligned} \tag{I.47}$$

onde usamos

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\phi-\nabla_\beta\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi=-R_{\alpha\beta}\nabla^\beta\phi\ . \tag{I.48}$$

Abrindo as derivadas da Eq. (I.46), obtemos

$$\begin{aligned}
&-\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi+\frac{1}{2}\Box(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)+\frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)\\
&\qquad=-\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\mu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi)-\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\nu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\phi)+\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla^\alpha(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)\\
&\qquad\quad+\frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)+\frac{1}{4}\nabla_\nu\nabla_\mu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)\\
&\qquad=\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi-\Box\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+\frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi+\frac{1}{2}\nabla_\nu\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi\\
&\qquad\quad-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\nabla_\mu\phi\\
&\qquad=\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi-\Box\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+\frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi(\nabla_\mu\nabla_\alpha-\nabla_\alpha\nabla_\mu)\nabla_\nu\phi\\
&\qquad\quad+\frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi(\nabla_\nu\nabla_\alpha-\nabla_\alpha\nabla_\nu)\nabla_\mu\phi\\
&\qquad=\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi-\Box\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+\frac{1}{2}R_{\nu\alpha\mu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi+\frac{1}{2}R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\\
&\qquad=\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi-\Box\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\ .
\end{aligned} \tag{I.49}$$

Substituindo as Eqs. (I.47) e (I.49) na Eq. (I.44), finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi)=&\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi+2G^\lambda_{(\mu}\nabla_{\nu)}\phi\nabla_\lambda\phi\right.\\
&+\frac{1}{2}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi-\frac{1}{2}R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi\\
&+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[(\Box\phi)^2-\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi-R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\right]\\
&\left.+\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi-\Box\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi\right]\delta g^{\mu\nu}\ .
\end{aligned} \tag{I.50}$$

Podemos reagrupar os termos

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
&= -g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + XG_{\mu\nu} \quad ,
\end{aligned}
\tag{I.51}
$$

e obter

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\lambda_5}\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_5\right) =&\delta(\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi) \\
=&\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R + 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi G^\alpha_{\nu)} + \nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta}\right. \\
&+ XG_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla^a\phi\nabla_\nu\nabla_a\phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi(\Box\phi) \\
&\left.+ g_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta}\right)\right) \quad ,
\end{aligned}
\tag{I.52}
$$

que implica em

$$
\boxed{
\begin{aligned}
T^{(\mathcal{L}_5)}_{\mu\nu} =&\lambda_5\left[-\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R - 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi G^\alpha_{\nu)} - XG_{\mu\nu} - \nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta} - \nabla_\mu\nabla^a\phi\nabla_\nu\nabla_a\phi + \right. \\
&\left.+ \nabla_\mu\nabla_\nu\phi(\Box\phi) - g_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta}\right)\right] \ .
\end{aligned}
}
\tag{I.53a}
$$

Apêndice J

HiClass

A teoria de campos efetiva (EFT, do inglês *Effective Field Theory*) é um formalismo que foi desenvolvido originalmente para teorias de inflação com rolamento lento, mas posteriormente, foi utilizada para descrever a maioria dos modelos de energia escura ou gravitação modificada que contenham um único grau de liberdade escalar.

É possível escrever a teoria de Horndeski em termos das variáveis ADM, de forma que a ação de Horndeski se torna uma subclasse da ação da EFT.

A EFT é baseada na escolha de um gauge unitário para o qual uma hipersuperfície de tempo constante coincide com a hipersuperfície em que o campo escalar é uniforme, hipersuperfície do tipo espaço. Nesse gauge o campo escalar é absorvido pela métrica de forma que a Lagrangeana depende apenas de quantidades geométricas.

J.1 Perturbações lineares em Cosmologia

Vamos utilizar o sistema de coordenadas ADM por ser um sistema apropriado para descrever o fatiamento do espaço-tempo em hipersuperfícies de campo escalar uniforme. A ação gravitacional geral é dada por

$$S_g = \int d^4x \sqrt{-g}\mathcal{L}(N, K_{ij}, R_{ij}, h_{ij}, D_i; t) \ , \tag{J.1}$$

onde g é o determinante da métrica, N a função lapso, K_{ij} a curvatura extrínseca, R_{ij} a curvatura intrínseca, D_i a derivada covariante associada à métrica espacial tri dimensional h_{ij}. A métrica de FLRW em coordenadas ADM é escrita na forma

$$ds^2 = -\bar{N}^2(t)\, dt^2 + a^2(t)\, \delta_{ij}\, dx^i dx^j \ . \tag{J.2}$$

A ação de Einstein-Hilbert é dada por

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g}\frac{M_P^2}{2}\ {}^{(4)}R \ , \tag{J.3}$$

onde a massa de Planck é $M_P \equiv 1/\sqrt{8\pi G}$. A variação da ação de Einstein-Hilbert (J.3) nos dá a variação da ação geométrica

$$\delta\bar{S}_g = \int d^4x \left\{ a^3(\bar{\mathcal{L}} + \bar{N}\mathcal{L}_N - 3H\mathcal{F})\delta\bar{N} + 3a^2\bar{N}\left(\bar{\mathcal{L}} - 3H\mathcal{F} - \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\bar{N}}\right)\delta a \right\} \ , \tag{J.4}$$

com

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K_{ij}}\right) \equiv \mathcal{F}a^{-2}\delta^{ij} \quad , \quad \mathcal{L}_N \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{N}} \ . \tag{J.5}$$

Na presença de matéria, no background de FLRW, a variação da ação nos dá

$$\delta\bar{S}_m = \int d^4x\bar{N}a^3\left(-\rho_m\frac{\delta\bar{N}}{\bar{N}} + 3p_m\frac{\delta a}{a}\right) \ . \tag{J.6}$$

A ação total é $\bar{S} = \bar{S}_g + \bar{S}_m$. Combinando (J.4) e (J.6), obtemos a primeira e a segunda equação de Friedmann

$$\bar{\mathcal{L}} + \bar{N}\mathcal{L}_N - 3H\mathcal{F} = \rho_m \quad , \tag{J.7}$$

$$\bar{\mathcal{L}} - 3H\mathcal{F} - \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\bar{N}} = -P_m \ . \tag{J.8}$$

onde $\bar{\mathcal{L}}$ é a Lagrangeana $\mathcal{L}$ quando a curvatura extrínseca é $K^i_j = \dfrac{\dot{a}}{\bar{N}a}\delta^i_j$.

Vamos expandir a ação (J.1) até a segunda ordem em torno do *background* de FLRW, com a finalidade de estudar as perturbações lineares. Para isso, vamos introduzir as quantidades perturbativas de segunda ordem

$$\delta N \equiv N - \bar{N} \ , \qquad \delta K^i{}_j \equiv K^i{}_j - \delta^i{}_j \ . \tag{J.9}$$

A expansão da Lagrangeana até a segunda ordem nos fornece

$$\mathcal{L}(N, K^i{}_j, R^i{}_j, ...) = \bar{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_N\,\delta N + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K^i{}_j}\delta K^i{}_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R^i{}_j}\delta R^i{}_j + \mathcal{L}^{(2)} + \cdots \ , \tag{J.10}$$

com

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} =& \frac{1}{2}\mathcal{L}_{NN}\,\delta N^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial K^i{}_j\partial K^k{}_l}\delta K^i{}_j\delta K^k{}_l + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial R^i{}_j\partial R^k{}_l}\delta R^i{}_j\delta R^k{}_l + \\ &+ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial K^i{}_j\partial R^k{}_l}\delta K^i{}_j\delta R^k{}_l + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N\partial K^i{}_j}\delta N\delta K^i{}_j + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N\partial R^i{}_j}\delta N\delta R^i{}_j + \cdots \ ,\end{aligned} \tag{J.11}$$

onde

$$\mathcal{L}_{NN} \equiv \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N\partial N} \ . \tag{J.12}$$

O segundo termo de $\mathcal{L}^{(2)}$ deve ter a forma

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial K^i{}_j\partial K^k{}_l} \equiv \hat{\mathcal{A}}_K\delta^j_i\delta^l_k + \mathcal{A}_K(\delta^l_i\delta^j_k + \delta_{ik}\delta^{jl}) \ , \tag{J.13}$$

em que $\hat{\mathcal{A}_K}$ e $\mathcal{A}_K$ são, a priori, dependentes do tempo. Analogamente se define

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial R^i{}_j\partial R^k{}_l} \equiv \hat{\mathcal{A}}_R\delta^j_i\delta^l_k + \mathcal{A}_R(\delta^l_i\delta^j_k + \delta_{ik}\delta^{jl}) \ , \tag{J.14}$$

e

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial K^i{}_j\partial R^k{}_l} \equiv \hat{\mathcal{C}}\delta^j_i\delta^l_k + \mathcal{C}(\delta^l_i\delta^j_k + \delta_{ik}\delta^{jl}) \ . \tag{J.15}$$

Os coeficientes que aparecem na segunda linha de (J.11) são proporcionais a δ^i_j e podem ser escritos como

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N \partial K^i{}_j} = \mathcal{B}\delta^i_j \;, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N \partial R^i{}_j} = \mathcal{B}_R\delta^i_j \;. \tag{J.16}$$

Definindo novos coeficientes como

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^* &= \mathcal{G} + \frac{\dot{\mathcal{C}}}{2N} + H\mathcal{C} \;, \\
\mathcal{C}^* &= \hat{\mathcal{G}} + \frac{1}{2}\mathcal{C} \;, \\
\mathcal{B}^*_R &= \mathcal{B}_R - \frac{\dot{\mathcal{C}}}{2N^2} \;.
\end{aligned} \tag{J.17}$$

onde

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R^i{}_j} = \mathcal{G}\delta^j i \;, \tag{J.18}$$

após algumas manipulações a Lagrangeana quadrática (J.11) fica reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2)} =& \bar{N}\mathcal{G}^*\,\delta_1 R\,\delta\sqrt{h} + a^3\left(\mathcal{L}_N + \frac{1}{2}\bar{N}\,\mathcal{L}_{NN}\right)\delta N^2 + \\
&+ \bar{N}a^3\Bigg[\mathcal{G}^*\,\delta_2 R + \frac{1}{2}\mathcal{A}_K\,\delta K^2 + \mathcal{B}\,\delta K\,\delta N + \mathcal{C}^*\,\delta K\,\delta R + \mathcal{A}_K\,\delta K^i{}_j\,\delta K^j{}_i + \\
&+ \mathcal{A}_R\,\delta R^i{}_j\,\delta R^j{}_i + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}_R\,\delta R^2 + \left(\frac{\mathcal{G}^*}{\bar{N}} + \mathcal{B}^*_R\right)\delta N\,\delta R\Bigg] + \cdots \;,
\end{aligned} \tag{J.19}$$

onde $\delta_1 R$ e $\delta_2 R$ são, respectivamente, os termos de primeira e segunda ordem do escalar de curvatura R em termos das perturbações da métrica.

J.1.1 Modos tensoriais

Em primeira ordem de perturbação, os modos tensoriais correspondem à perturbação da métrica espacial

$$h_{ij} = a^2(t)(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) \quad , \tag{J.20}$$

sendo γ_{ij} um tensor de ordem 2 com traço e divergência nula, $\gamma^i{}_i = 0$, e $\partial_i\gamma^{ij} = 0$, respectivamente. Após perturbar a curvatura extrínseca e a curvatura intrínseca, obtemos

$$S^{(2)}_\gamma = \int d^4x a^3\left[\frac{\mathcal{A}_K}{4}\dot{\gamma}^2_{ij} - \frac{\mathcal{G}^*}{4a^2}(\partial_k\gamma_{ij})^2\right] \;, \tag{J.21}$$

em que fizemos $\bar{N} = 1$. A relatividade geral é recuperada quando fazemos $\mathcal{A}_K = \mathcal{G}^* = M^2_{PL}/2$. Dessa forma, para teorias mais gerais definimos a *massa de Planck efetiva* como

$$M^2_* \equiv 2\mathcal{A}_K \;. \tag{J.22}$$

A velocidade ao quadrado da propagação das ondas gravitacionais é definida como

$$c_T^2 \equiv 1 + \alpha_T = \frac{\mathcal{G}^*}{\mathcal{A}_K} \quad , \tag{J.23}$$

em que α_T representa o desvio da velocidade das ondas gravitacionais com relação à velocidade da luz. Outra importante função que será definida é a função α_M que descreve a taxa de variação da massa de Planck efetiva, dada por

$$\alpha_M \equiv \frac{1}{H}\frac{d}{dt}\ln M_*^2 \quad . \tag{J.24}$$

Com essas três definições, é possível reescrever a ação (J.21) como

$$S_\gamma^{(2)} = \int d^4x a^3 \frac{M_*^2}{8}\left[\dot{\gamma}_{ij}^2 - \frac{c_T^2}{a^2}(\partial_k\gamma_{ij})^2\right] \quad . \tag{J.25}$$

J.1.2 Modos escalares

Os modos escalares podem ser descritos pelas perturbações da métrica

$$N = 1 + \delta N \quad , \quad N^i = \delta^{ij}\partial_j\psi \quad , \quad h_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta}\delta_{ij} \quad . \tag{J.26}$$

A Lagrangeana (J.19) pode ser expressa em termos das novas variáveis

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} = &\frac{a^3}{2}[2\mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{NN} - 6\mathcal{B}H + 3H^2(3\hat{\mathcal{A}}_K + 2\mathcal{A}_K)]\delta N^2 \\ &+ a^3\left[(\mathcal{B} - (3\hat{\mathcal{A}}_K + 2\mathcal{A}_K)H)\left(3\dot{\zeta} - \frac{\nabla^2\psi}{a^2}\right) + 4(2H\mathcal{C}^* - \mathcal{G}^* - \mathcal{B}_R)\frac{\nabla^2\zeta}{a^2}\right]\delta N \\ &+ a^3\left[-(3\hat{\mathcal{A}}_K + 2\mathcal{A}_K)\dot{\zeta}\frac{\nabla^2\zeta}{a^2} - 12\mathcal{C}^*\dot{\zeta}\frac{\nabla^2\zeta}{a^2} + \left(\frac{9}{2}\hat{\mathcal{A}}_K + 3\mathcal{A}_K\right)\dot{\zeta}^2 + 2\mathcal{G}^*\frac{(\nabla^2\zeta)^2}{a^2}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{A}}_K + 2\mathcal{A}_K)\frac{(\nabla^2\psi)^2}{a^4} + 4\mathcal{C}^*\frac{(\nabla^2\psi)(\nabla^2\zeta)}{a^4} + 2(4\hat{\mathcal{A}}_R + 3\mathcal{A}_R)\frac{(\nabla^2\zeta)^2}{a^4}\right] \quad . \end{aligned} \tag{J.27}$$

Impondo condições para evitar equações com derivadas espaciais de ordem maior que dois nesses vínculos, e introduzindo a função *kinetic brainding*,

$$\alpha_B \equiv \frac{\mathcal{B}}{4\mathcal{A}_K}\,, \tag{J.28}$$

que descreve a contribuição que o acoplamento do campo escalar com a gravitação faz para a energia cinética do campo escalar, obtemos a relação

$$\begin{aligned}\delta N \quad &= \frac{4\mathcal{A}_K}{\mathcal{W}}\dot{\zeta} \\ &= \frac{4\mathcal{A}_K}{\mathcal{B} + 4H\mathcal{A}_K}\dot{\zeta} \\ &= \frac{\dot{\zeta}}{H(1+\alpha_B)}\,, \end{aligned} \tag{J.29}$$

que nos permite escrever a ação de ordem 2 para os modos escalares como

$$S_\zeta^{(2)} = \int d^4x a^3 Q_S \left[\dot{\zeta}^2 - \frac{c_S^2}{a^2}(\partial_i\zeta)^2\right] \ , \tag{J.30}$$

em que

$$Q_S \equiv \frac{2M_*^2 D}{(2-\alpha_B)^2} \quad , \quad D \equiv \alpha_K + \frac{3}{2}\alpha_B^2 \quad , \quad \alpha_K \equiv \frac{2\mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{NN}}{2H^2\mathcal{A}_K} \ , \tag{J.31}$$

e a velocidade do som ao quadrado é definida como

$$c_s^2 \equiv -\frac{(2-\alpha_B)[\dot{H} - \frac{1}{2}H^2\alpha_B(1+\alpha_T) - H^2(\alpha_M - \alpha_T)] - H\dot{\alpha}_B}{H^2 D} \quad . \tag{J.32}$$

A partir da Lagrangeana (J.30), é possível escrever a ação de ordem quadrática mais geral para as EFT's em termo das funções α's

$$S^{(2)} = \int d^4x a^3 \frac{M_*^2}{2}\left[\delta K^i_j \delta K^j_i - \delta K^2 + (1+\alpha_T)\left(R\frac{\delta\sqrt{h}}{a^3} + \delta_2 R\right)\right.$$
$$\left. + \alpha_K H^2 \delta N^2 + 4\alpha_B \delta K \delta N + R\delta N\right] \quad . \tag{J.33}$$

A tabela seguinte foi construída a fim de facilitar a relação entre as funções α' de (J.33) e os coeficientes da Lagrangeana quadrática (J.19).

Equação (J.33)	M_*^2	α_M	α_K	α_B	α_T
Equação (J.19)	$2\mathcal{A}_K$	$\dfrac{1}{H}\dfrac{d}{dt}\ln\mathcal{A}_K$	$\dfrac{2\mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{NN}}{2H^2\mathcal{A}_K}$	$\dfrac{\mathcal{B}}{4H\mathcal{A}_K}$	$\dfrac{\mathcal{G}^*}{\mathcal{A}_K} - 1$

Para evoluir as equações de movimento da EFT, além das quatro funções α, é necessário fornecer a função de Hubble $H(a)$, que é tratada nessa parametrização como uma função independente.

J.1.3 Condições de estabilidade

Vamos obter as condições de estabilidade para o nosso caso de teorias de campos escalares mais gerais de segunda ordem

$$S^{(2)} = \int d^4x a^3 \left[Q_S\left(\dot{\varsigma}^2 - \frac{c_S^2}{a^2}(\partial_i\varsigma)\right) + Q_T\left(\dot{h}_{ij}^2 - \frac{c_T^2}{a^2}(\partial_k h_{ij})^2\right)\right] \ . \tag{J.34}$$

Para isso, vamos estudar a estabilidade, as condições para evitar a *instabilidade Laplaciana* e a *instabilidade fantasma*, para o caso de um campo escalar descrito pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[A\dot{\varphi}^2 - B(\partial_i\varphi)^2] \ . \tag{J.35}$$

O momento canônicamente conjugado é

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} \ , \tag{J.36}$$

e a densidade Hamiltoniana é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[A^{-1}\Pi^2 + B(\partial_i\varphi)^2] \; . \tag{J.37}$$

Essa Hamiltoniana possui um **limite inferior** se $A > 0$ e $B > 0$, possui um **limite superior** se $A < 0$ e $B < 0$ e é **indefinida** se A e B possuírem sinais diferentes.

No espaço de Fourier o campo escalar obedece a equação de movimento

$$\ddot{\varphi} + c_s^2 k^2 \varphi = 0 \; , \qquad c_s^2 = \frac{B}{A} \; , \tag{J.38}$$

que pode ser obtido aplicando a equação de Euler-Lagrange à Lagrangeana do campo escalar. Essa equação de movimento nos fornece

$$\varphi \propto e^{\pm\, i\, c_S k t} \; . \tag{J.39}$$

Existem essencialmente três tipos de instabilidade que podem desqualificar a escolha do background [234]

- *Instabilidades Laplicianas* ocorrem quando a velocidade do som é negativa. Isso leva a instabilidades exponenciais com uma taxa correspondente ao modo mais curto permitido pela teoria efetiva. É importante ressaltar que tais instabilidades podem não ser visíveis até que modos muito curtos e/ou ordem mais alta (interação) sejam incluídos na evolução e, portanto, uma evolução sem perturbações lineares não seja suficiente para que as previsões sejam corretas, necessitando da estabilidade teste.

- *Instabilidades fantasmas* ocorrem quando o sinal do termo cinético de um grau de liberdade está errado, dando um modo de energia negativa e violando a evolução unitária. Se as massas desses fantasmas forem menores do que o *cutoff* da teoria, isso poderia levar a uma rápida produção de pares em modos de energia negativa, destruindo o *background*.

- *Instabilidades taquiônicas* ocorrem quando a massa ao quadrado para as perturbações é negativa. Isso leva a uma instabilidade na lei das potências no grau de liberdade escalar em grandes escalas, que fica sob controle quando o modo entra no horizonte sonoro. Uma vez que o impacto do táquion nos observáveis não diverge em nenhum limite físico, nós escolhemos deixar os dados excluirem tais casos, ao invés de criar um teste de estabilidade, assumindo que eles sejam suprimidos no momento em que `hi-class` inicia a evolução dos modos.

A *instabilidade Laplaciana* aparece no caso em que a solução cresce exponencialmente. Isso ocorre quando a Hamiltoniana é indefinida, $c_s^2 \leq 0$. Para evitar essas instabilidades, impomos $c_s^2 \geq 0$. As *instabilidades fantasmas* ocorrem quando $E_\varphi \leq 0$. Analisando a Hamiltoniana (J.37), isso ocorrerá quando $A \leq 0$ e $B \leq 0$.

Para evitar tanto as instabilidades fantasmas quanto as instabilidades Laplacianas, devemos ter $A \geq 0$ e $B \geq 0$. Impondo as condições para os modos escalares

$$Q_S = \frac{2M_*^2 D}{(2-\alpha_B)^2} > 0 \; , \qquad D \equiv \alpha_K + \frac{3}{2}\alpha_B^2 \; , \tag{J.40}$$

$$c_s^2 = -\frac{(2-\alpha_B)[\dot{H} - \frac{1}{2}H^2\alpha_B(1+\alpha_T) - H^2(\alpha_M - \alpha_T)] - H\dot{\alpha}_B}{H^2 D} > 0 \; ,$$

e para os modos tensoriais

$$
\begin{aligned}
Q_T &= \frac{M_*^2}{8} > 0 \ , \\
c_T^2 &= 1 + \alpha_T > 0 \ .
\end{aligned} \tag{J.41}
$$

J.1.4 Perturbações lineares

O valor do campo escalar não é um observável. Podemos reparar o campo definindo um novo campo $\tilde{\phi} \equiv \tilde{\phi}(\phi)$ em que todos os observáveis devem permanecer inalterados. Isso significa que concentrar-se no valor do escalar introduz um inobservável redundante na descrição. Em vez disso, pode-se notar que o gradiente do campo escalar forma uma quadrivelocidade natural

$$
u_\mu \equiv -\frac{\partial_\mu \phi}{\sqrt{2X}} \ , \tag{J.42}
$$

que define um referencial comóvel e providencia que ∂_μ seja tipo-tempo, $X > 0$. O significado do gradiente de ϕ é a direção temporal para um observador em repouso nesse referencial, ou seja, está relacionado ao versor da hipersuperfície. A perturbação do escalar, quando apropriadamente normalizada, pode ser interpretada como potencial escalar para um campo de velocidade peculiar

$$
v_X \equiv -\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \ . \tag{J.43}
$$

Esse potencial de velocidade é então invariante sob as reparametrizações de ϕ e nos permite escrever um conjunto muito mais simples de equações de perturbações. Modelos oscilatórios, onde o campo de velocidade no *background* ϕ cruza o eixo, não pode ser descrito diretamente usando a nossa formulação, uma vez que singularidades em (J.42) teriam que ser devidamente consideradas.

O efeito da presença do escalar de Horndeski é introduzir o potencial de velocidade dinâmica v_X, descrevendo a perturbação do campo escalar através da Eq. (J.42). Mantemos estes termos no lado esquerdo das equações de Einstein perturbadas para enfatizar a natureza do tipo-gravidade deste grau de liberdade resultante da universalidade de seu acoplamento. Além do mais, a configuração do *background* do escalar altera os coeficientes dos potenciais gravitacionais para valores muito distintos de seus valores padrão decorrentes do tensor de Einstein. No lado direito das equações de Einstein estão apresentadas as contribuições padrões de todas as fontes de matéria da cosmologia [234].

Vamos apresentar as equações de Einstein perturbadas em primeira ordem no gauge Newtoniano [234]. A componente (00) das equações de Einstein é representada por

$$
\begin{aligned}
3(2-\alpha_B)H\dot{\Phi} + (6-\alpha_K-6\alpha_B)H^2\Psi + \frac{2k^2\Phi}{a^2} + \\
-(\alpha_K+3\alpha_B)H^2\dot{v}_X - \left[\alpha_B\frac{k^2}{a^2} - 3\dot{H}\alpha_B + 3(2\dot{H}+\tilde{\rho}_m+\tilde{p}_m)\right]Hv_X = -\tilde{\rho}_m\delta_m \ ,
\end{aligned} \tag{J.44}
$$

A componente $(0i)$ das equações de Einstein é

$$2\dot{\Phi} + (2 - \alpha_B)H\Psi - \alpha_B H\dot{v}_X - (2\dot{H} + \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m)v_X = -(\tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m)v_m \ , \tag{J.45}$$

A componente (ij) tem a forma

$$\Psi - (1 + \alpha_T)\Phi - (\alpha_M - \alpha_T)Hv_X = \tilde{p}_m\pi_m \ , \tag{J.46}$$

e a equação da pressão (ii) é

$$\begin{aligned}
2\ddot{\Psi} - \alpha_B H\ddot{v}_X + 2(3 + \alpha_M)H\dot{\Psi} + (2 - \alpha_B)H\dot{\Psi} + \\
+[H^2(2 - \alpha_B)(3 + \alpha_M) - \alpha_B H + 4\dot{H} - (2\dot{H} + \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m)]\Psi + \\
-[(2\dot{H} + \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m) + \alpha_B H + H^2\alpha_B(3 + \alpha_M)]\dot{v}_X + \\
-[2\ddot{H} + 2\dot{H}H(3 + \alpha_M) + \dot{\tilde{p}}_m + \alpha_M H\tilde{p}_m]v_X = \delta p_m/M_*^2 \ .
\end{aligned} \tag{J.47}$$

Por fim, temos a equação de movimento do potencial de velocidades v_X:

$$\begin{aligned}
3H\alpha_B\ddot{\Phi} + H^2\alpha_K\ddot{v}_X - 3[(2\dot{H} + \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m) - H^2\alpha_B(3 + \alpha_M) - \alpha_B H]\dot{\Phi} + \\
+(\alpha_K + 3\alpha_B)H^2\dot{\Psi} - 2(\alpha_M - \alpha_T)H\frac{k^2}{a^2}\Phi - \alpha_B H\frac{k^2}{a^2}\Psi + \\
-[3(2\dot{H} + \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m) - H^2(3 + \alpha_M)(\alpha_K + 3\alpha_B) + \\
-\dot{H}(2\alpha_K + 9\alpha_B) - H(\dot{\alpha}_K + 3\dot{\alpha}_B) - H^2(3 + \alpha_M)(\alpha_K + 3\alpha_B)]H\Psi + \\
+[2\dot{H}\alpha_K + \dot{\alpha}_K H + H^2\alpha_K(3 + \alpha_M)]H\dot{v}_X + H^2M^2v_X + \\
+[-(2\dot{H} + \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m) + 2H^2(\alpha_M - \alpha_T) + H^2\alpha_B(1 + \alpha_M) + \alpha_B H]\frac{k^2}{a^2}v_X = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{J.48}$$

com

$$H^2M^2 \equiv 3\dot{H}[\dot{H}(2 - \alpha_B) + \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m - H\dot{\alpha}_B] - 3H\alpha_B[\ddot{H} + \dot{H}H(3 + \alpha_M)] \ . \tag{J.49}$$

A evolução das equações lineares é feita usando códigos de Boltzmann apropriados como o EFTCAMB [266] ou o `hi-class` [267].

J.1.5 Descrição do `hi-class`

O CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System) [268] é um código de Einstein-Boltzmann desenvolvido para calcular perturbações cosmológicas no regime linear. O `hi-class` incorpora ao código CLASS teorias de Horndenski de gravidade modificada.

Em [234] é desenvolvida uma implementação da dinâmica de Horndeski de descrever as perturbações lineares em termos das quatro funções α's referidas (α_K, α_B, α_M e α_T) segundo a parametrização

$$\alpha_i = \tilde{\Omega}_{DE}(t)\,\hat{\alpha}_i \ , \qquad \hat{\alpha}_i = \text{const.} \ , \tag{J.50}$$

para as funções α's. Essa parametrização se baseia no fato de que os valores das funções α's são descritos pelo campo escalar dinâmico, assim como a densidade de energia escura. A proposta assume também que a evolução da expansão cósmica do background

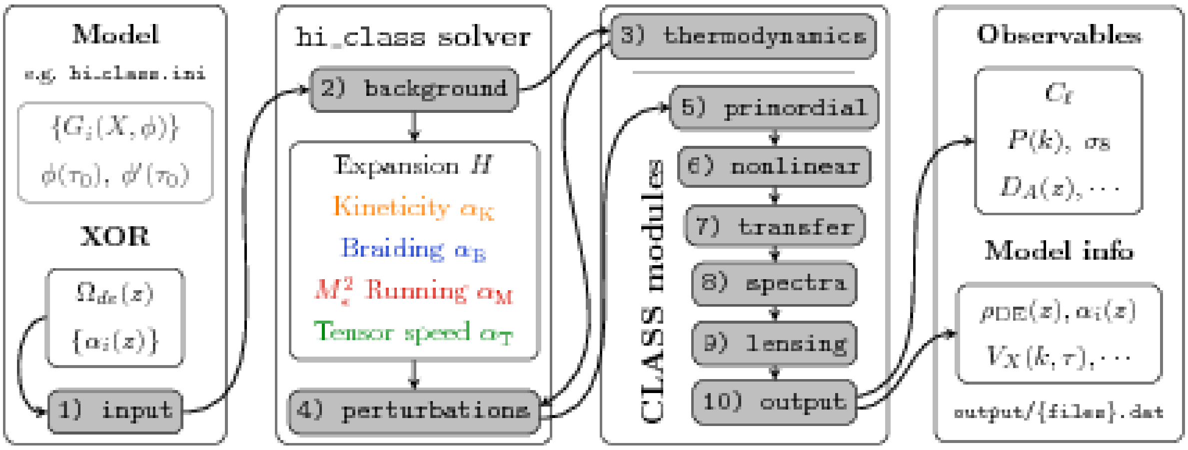

Figura J.1: A esturtura do `hi-class`. É necessário especificar uma parametrização para o background e para as funções α, computando a função de Hubble e as funções α. O restante do código não é modificado em relação ao CLASS original. Extraído de [267].

segue a prevista pelo modelo ΛCDM. Os *inputs* do `hi-class` são a evolução da densidade de energia escura no background e as funções α's como esquematizado na Fig. (J.1.5).

Na primeira versão do `hi-class` estão disponíveis duas escolhas de parametrização do background:

1. `lcdm`: A energia escura tem densidade de energia constante;
2. `wowa`: A equação de estado evolui com os parâmetros $(\Omega_{de,0}, \omega_0, \omega_a)$.

Já para as funções α, estão disponíveis quatro parametrizações:

1. `propto-omega`: As funções α são proporcionais a Ω_{de}, i.e, $\alpha_i = \hat{\alpha}_i \Omega_{de}(\tau)$;
2. `propto-scale`: As funções α são proporcionais ao fator de escala, i.e, $\alpha_i = \hat{\alpha}_i\, a(\tau)$;
3. planck-linear: k-essência acoplada com a gravidade estudado pela colaboração Planck [269];
4. planck-exponential: k-essência alternativa acoplada com a gravidade estudado pela colaboração Planck [269].

Os dois últimos modelos `planck-linear` e `planck-exponential` seguem a parametrização

$$
\begin{aligned}
\alpha_K &= \frac{3(\rho_{de}+p_{de})}{H^2} + \frac{3\Omega(\rho_m+p_m)}{H^2(1+\Omega)} - \frac{\Omega'' - 2aH\Omega'}{a^2H^2(1+\Omega)} \,, \\
\alpha_M &= \frac{\Omega'}{aH(1+\Omega)} \,, \\
\alpha_B &= -\alpha_M \,, \\
\alpha_T &= 0 \,,
\end{aligned}
$$

sendo que para `planck-linear` $\Omega = \Omega_0 a(\tau)$ e para `planck-exponential` temos $\Omega = \exp[\frac{\alpha_{M0}}{\beta}\alpha^{\beta}(\tau)] - 1$.

Apêndice K

BAO

Oscilações acústicas de bárions (BAO) são flutuações regulares e periódicas da densidade de matéria bariônica no universo. Vamos falar brevemente de onde essas flutuações vieram.

O universo primordial consistia de um plasma quente e denso de elétrons (léptons) e bárions (prótons e neutrons), chamaremos a combinação de todos eles de matéria bariônica. Nessa época, os fótons tinham um caminho livre muito pequeno, eles viajavam pequenas distâncias até se chocarem com esse plasma pelo espalhamento Thomson [3]. Com a expansão do universo o plasma esfriou a uma temperatura abaixo de 3000K, temperatura baixa o suficiente para que os elétrons e prótons do plasma se juntassem formando átomos de hidrogênio. Essa é a chamada **era da recombinação**, aconteceu por volta dos 379000 anos de idade do universo, em $z = 1089$. Os fótons interagem em menor quantidade com matéria neutra e assim sendo, depois da recombinação, era como se os fótons estivessem livres no universo. A radiação da CMB é a luz emitida depois da recombinação, assim, quando olhamos para os dados do Planck, estamos olhando para a imagem que o universo tinha em $z = 1089$.

O Planck [17] indica um universo *smooth* e homogêneo com anisotropias na densidade de 10 partes por milhão [3], no entanto, quando observamos o universo hoje encontramos largas estruturas e flutuações da densidade. Acredita-se que pequenas anisotropias no início do universo, como a gravidade, criaram o universo de hoje, locais de muita densidade atraem mais massa enquanto que locais de menos densidade atraem menos.

Imagine uma região de muita densidade no plasma primordial. Enquanto essa região de alta densidade atrai matéria em sua direção gravitacionalmente, o calor das interações fóton-matéria faz uma grande pressão para fora do centro de massa. Essas forças de mesma direção mas sentido oposto criam oscilações, análogas às ondas sonoras criadas no ar devido às diferenças de pressão.

Considere uma onda que originou dessa região de muita densidade no centro do plasma. Essa região contém DM, bárions e fótons. A pressão resultante é uma onda de som esférica causada pelos bárions e pelos fótons se movendo juntamente com uma velocidade um pouco acima da metade da velocidade da luz [270, 271] pra fora da região. A DM interage apenas gravitacionalmente, então ela ficará no centro da onda sonora, região de alta densidade. Antes do desacoplamento, os fótons e bárions se movem para fora juntos, depois do desacoplamento, os fótons já não interagem da mesma forma com a matéria bariônica e se espalham. Isso alivia a pressão sobre o sistema deixando para trás uma concha de matéria bariônica em um raio fixo, em um referencial comóvel, de 150 Mpc. Esse raio pode ser referido como o **horizonte sonoro**. Sem a pressão da interação fóton-bárion empurrando as coisas para fora, a única força restante que atua nos bárions é a força gravitacional. Assim, os bárions e a DM formam uma configuração que inclui alta densidade de matéria tanto no local original da anisotropia quanto na casca do horizonte sonoro para essa anisotropia [272].

Muitas dessas anisotropias criaram as ondulações do espaço que atraiu a matéria e eventualmente formaram as galáxias em um padrão similar. Portanto, é de se esperar ver um maior número de galáxias separadas pelo horizonte sonoro de 150 Mpc do que em outras escalas de comprimento [272]. Essa configuração particular de matéria ocorreu em cada anisotropia do início do universo, e portanto o universo não é composto por uma onda sonora, mas por muitas. Não é possível observar essa separação privilegiada no olho, mas tratamentos estatísticos, como a análise da função de correlação de dois pontos, podem observar essa separação para um número muito grande de galáxias.

Comparando observações do horizonte sonoro medido hoje por clusters de galáxias com o horizonte sonoro da época da recombinação visto no CMB, podemos ter uma melhor compreensão da expansão do universo utilizando BAO, do que pode ser explicado por técnicas de supernovas.

Apêndice L

BINGO

Em 1998 dois grupos independentes utilizando a medição de supernovas do tipo Ia [25, 77] inferiram, inevocadamente, a aceleração cósmica. Ela pode ser explicada pelo postulado de uma pressão negativa gerada a partir de um novo componente do universo, conhecido como energia escura. Em combinação com outras observações, como a radiação cósmica de fundo (CMB), há pouca dúvida sobre a existência de tal componente, por esse motivo tem-se tentado determinar suas propriedades detalhadas.

O BINGO (BAO *from Integrated Neutral Gas Observations*) é um radiotelescópio criado para fazer a primeira detecção de oscilações acústicas de bárions (BAO) (Apêndice K) em frequência de rádio, através da medição da distribuição de gás hidrogênio neutro a distâncias cosmológicas. Junto com a CMB, a escala de BAO é uma das sondas mais poderosas dos parâmetros cosmológicos, incluindo a energia escura [216,217].

Por ser de grande importância para a cosmologia e astrofísica, existem muitos programas observacionais em andamento que visam elucidar o setor escuro do universo envolvendo várias abordagens diferentes. Entre estes, encontramos lentes gravitacionais, contagens de fragmentação e busca de supernovas, porém uma das sondas mais poderosas das propriedades da energia escura é o estudo de BAO. Até o momento BAO foram observados através da realização de pesquisas de redhift de galáxias na banda óptica. No entanto, dadas as implicações destas medidas, é importante que elas sejam confirmadas em outras bandas. A janela de observação crítica é o espectro de rádio que pode dar contribuições importantes para o entendimento da energia escura usando a linha de emissão de 21cm (estrutura hiperfina) do hidrogênio neutro de galáxias distantes. BINGO será o primeiro telescópio do mundo operando nesta faixa de frequência com o objetivo de estudar BAO com mapeamento da linha de 21 cm.

O BAO é uma assinatura na distribuição da matéria a partir da época de recombinação. Note que o BAO ocorre na distribuição de galáxias em redshifts menores do que aqueles da época de reionização. No contexto do modelo cosmológico padrão (ΛCDM), o BAO manifesta-se como um excesso pequeno mas detectável, de galáxias com separações da ordem de 150Mpc. Esse excesso é a marca das oscilações acústicas que ocorreram antes da recombinação. Por conseguinte, uma medida da sua escala angular pode ser usada para determinar a distância até um determinado desvio para o vermelho. As mesmas oscilações produzem as características familiares dominantes vistas no espectro de energia da CMB.

O BINGO é um novo instrumento proposto projetado especificamente para a observação de tal sinal, fornecendo uma visão profunda e detalhada sobre o universo. Estas observações nos darão a primeira medição de BAO por este método e trarão uma contribuição fundamental para o estudo da energia escura. Comparado com outros radiotelescópios que estão sendo montados com o intuito de estudar BAO na frequência de rádio, o BINGO é de fácil construção, assim pretendemos ser os primeiros a detectar BAO nesse domínio e mapear a distribuição tridimensional de hidrogênio, o elemento mais abundante do universo [216, 217].

A abordagem padrão para se sondar a estrutura em larga escala (LSS) é realizando um grande mapa de redshifts. Isto produz as posições e redshifts de muitas galáxias e estas podem ser utilizadas para se inferir o contraste de densidade para as galáxias e a função de correlação de dois pontos. Diferente do que tem sido feito na banda óptica, a característica natural na banda de rádio é a linha de 21 centímetros do hidrogênio neutro, mas a emissividade dessa linha é baixa, o que significa que a detecção de galáxias individuais em z $\sim$ 1 requer uma área de coleta muito grande. Uma ideia inovadora é a utilização da temperatura integrada como marcador de LSS, em oposição a detectar as galáxias individuais, explorando os telescópios de rádio de baixa frequência, o que é conhecido como técnica de mapeamento de intensidade. Felizmente, a emissão de 21 cm integrados deverá ter variações características com a frequência onde a emissão contínua tem um espectro muito liso, permitindo assim que os dois sinais sejam separados. Contudo, o instrumento utilizado para fazer isso terá de ser cuidadosamente projetado para evitar os efeitos sistemáticos, que podem resultar em vazamento do fundo contínuo.

Referências Bibliográficas

[1] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* 1972.

[2] S. Weinberg. *Cosmology.* Oxford University Press, 2008.

[3] Scott Dodelson. *Modern Cosmology.* Academic Press, 1 edition, March 2003.

[4] S. Micheletti. *Vínculos Observacionais em Modelos de Energia Escura Interagente.* PhD thesis, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Matemática, 2009.

[5] Edmund J. Copeland. Dynamics of dark energy. *AIP Conf. Proc.*, 957:21–29, 2007.

[6] Andrew R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological inflation and large scale structure.* 2000.

[7] James E. Lidsey, Andrew R. Liddle, Edward W. Kolb, Edmund J. Copeland, Tiago Barreiro, and Mark Abney. Reconstructing the inflation potential : An overview. *Rev. Mod. Phys.*, 69:373–410, 1997.

[8] Antonio Riotto. Inflation and the theory of cosmological perturbations. *ICTP Lect. Notes Ser.*, 14:317–413, 2003.

[9] Bruce A. Bassett, Shinji Tsujikawa, and David Wands. Inflation dynamics and reheating. *Rev. Mod. Phys.*, 78:537–589, 2006.

[10] Scott Dodelson. *Modern Cosmology.* Academic Press, Amsterdam, 2003.

[11] T. Padmanabhan. Advanced topics in cosmology: a pedagogical introduction. *AIP Conf. Proc.*, 843:111–166, 2006.

[12] Mark Trodden and Sean M. Carroll. TASI lectures: Introduction to cosmology. In *Progress in string theory. Proceedings, Summer School, TASI 2003, Boulder, USA, June 2-27, 2003*, pages 703–793, 2004. [,703(2004)].

[13] T. S. van Albada, John N. Bahcall, K. Begeman, and R. Sancisi. The Distribution of Dark Matter in the Spiral Galaxy NGC-3198. *Astrophys. J.*, 295:305–313, 1985.

[14] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586, 1999.

[15] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.

[16] Adam G. Riess et al. BV RI light curves for 22 type Ia supernovae. *Astron. J.*, 117:707–724, 1999.

[17] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018.

[18] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.

[19] Varun Sahni and Alexei A. Starobinsky. The Case for a positive cosmological Lambda term. *Int. J. Mod. Phys.*, D9:373–444, 2000.

[20] Varun Sahni. Dark matter and dark energy. *Lect. Notes Phys.*, 653:141–180, 2004. [,141(2004)].

[21] T. Padmanabhan. Cosmological constant: The Weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235–320, 2003.

[22] Adam G. Riess et al. Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *Astrophys. J.*, 607:665–687, 2004.

[23] T. Roy Choudhury and T. Padmanabhan. Cosmological parameters from supernova observations: A Critical comparison of three data sets. *Astron. Astrophys.*, 429:807, 2005.

[24] John L. Tonry et al. Cosmological results from high-z supernovae. *Astrophys. J.*, 594:1–24, 2003.

[25] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.

[26] W. L. Freedman et al. Final results from the Hubble Space Telescope key project to measure the Hubble constant. *Astrophys. J.*, 553:47–72, 2001.

[27] Raul Jimenez, P. Thejll, U. Jorgensen, J. MacDonald, and B. Pagel. Ages of globular clusters: a new approach. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 282:926–942, 1996.

[28] Harvey B. Richer et al. The Lower main sequence and mass function of the globular cluster Messier 4. *Astrophys. J.*, 574:L151–L154, 2002.

[29] Brad M. S. Hansen, James Brewer, Greg G. Fahlman, Brad K. Gibson, Rodrigo Ibata, Marco Limongi, R. Michael Rich, Harvey B. Richer, Michael M. Shara, and Peter B. Stetson. The white dwarf cooling sequence of the globular cluster messier 4. *Astrophys. J.*, 574:L155–L158, 2002.

[30] D. N. Spergel et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology. *Astrophys. J. Suppl.*, 170:377, 2007.

[31] Max Tegmark et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys. Rev.*, D69:103501, 2004.

[32] Uros Seljak et al. Cosmological parameter analysis including SDSS Ly-alpha forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy. *Phys. Rev.*, D71:103515, 2005.

[33] Steven Weinberg. Curvature dependence of peaks in the cosmic microwave background distribution. *Phys. Rev.*, D62:127302, 2000.

[34] Robert G. Crittenden and Neil Turok. Looking for Lambda with the Rees-Sciama effect. *Phys. Rev. Lett.*, 76:575, 1996.

[35] M. J. Rees and D. W. Sciama. Large scale Density Inhomogeneities in the Universe. *Nature*, 217:511–516, 1968.

[36] Bharat Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys. Rev.*, D37:3406, 1988.

[37] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1582, 1998.

[38] I. Zlatev, L.-M. Wang, and P. J. Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82:896–899, 1999.

[39] J. Valiviita, E. Majerotto, and R. Maartens. Instability in interacting dark energy and dark matter fluids. *JCAP*, 0807:020, 2008.

[40] J.-H. He, B. Wang, and E. Abdalla. Stability of the curvature perturbation in dark sectors' mutual interacting models. *Phys. Lett.*, B671:139–145, 2009.

[41] Chang Feng, Bin Wang, Elcio Abdalla, and Ru-Keng Su. Observational constraints on the dark energy and dark matter mutual coupling. *Phys. Lett.*, B665:111–119, 2008.

[42] Jian-Hua He, Bin Wang, and Pengjie Zhang. The Imprint of the interaction between dark sectors in large scale cosmic microwave background anisotropies. *Phys. Rev.*, D80:063530, 2009.

[43] J.-H. He and B. Wang. Effects of the interaction between dark energy and dark matter on cosmological parameters. *JCAP*, 0806:010, 2008.

[44] Gabriela Caldera-Cabral, Roy Maartens, and Bjoern Malte Schaefer. The Growth of Structure in Interacting Dark Energy Models. *JCAP*, 0907:027, 2009.

[45] E. Abdalla, L. R. Abramo, and J. C. C. de Souza. Signature of the interaction between dark energy and dark matter in observations. *Phys. Rev.*, D82:023508, 2010.

[46] Bin Wang, Jiadong Zang, Chi-Yong Lin, Elcio Abdalla, and S. Micheletti. Interacting Dark Energy and Dark Matter: Observational Constraints from Cosmological Parameters. *Nucl. Phys.*, B778:69–84, 2007.

[47] E. Abdalla, L. R. W. Abramo, L. Sodre, Jr., and B. Wang. Signature of the interaction between dark energy and dark matter in galaxy clusters. *Phys. Lett.*, B673:107–110, 2009.

[48] Jounghun Lee. The Misalignments between Matter and Galaxy Distributions in Triaxial Clusters: A Signature of a Possible Fifth Force? 2010.

[49] Marco Baldi, Jounghun Lee, and Andrea V. Maccio. The Effect of Coupled Dark Energy on the Alignment between Dark Matter and Galaxy Distributions in Clusters. *Astrophys. J.*, 732:112, 2011.

[50] C. E. Pellicer, Elisa G. M. Ferreira, Daniel C. Guariento, Andre A. Costa, Leila L. Graef, Andrea Coelho, and Elcio Abdalla. The role of Dark Matter interaction in galaxy clusters. *Mod. Phys. Lett.*, A27:1250144, 2012.

[51] B. Wang, Y.-G. Gong, and E. Abdalla. Transition of the dark energy equation of state in an interacting holographic dark energy model. *Phys. Lett.*, B624:141–146, 2005.

[52] Neal Dalal, Kevork Abazajian, Elizabeth Ellen Jenkins, and Aneesh V. Manohar. Testing the cosmic coincidence problem and the nature of dark energy. *Phys. Rev. Lett.*, 87:141302, 2001.

[53] Winfried Zimdahl and Diego Pavón. Scaling cosmology. *Gen. Rel. Grav.*, 35:413–422, 2003.

[54] Luca Amendola, Radouane Gannouji, David Polarski, and Shinji Tsujikawa. Conditions for the cosmological viability of f(R) dark energy models. *Phys. Rev.*, D75:083504, 2007.

[55] B. Li and John D. Barrow. The Cosmology of f(R) gravity in metric variational approach. *Phys. Rev.*, D75:084010, 2007.

[56] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of f(R) Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests. *Phys. Rev.*, D76:064004, 2007.

[57] Eric V. Linder. Exponential Gravity. *Phys. Rev.*, D80:123528, 2009.

[58] Rachel Bean. A weak lensing detection of a deviation from General Relativity on cosmic scales. 2009.

[59] Shinji Tsujikawa, Kotub Uddin, and Reza Tavakol. Density perturbations in f(R) gravity theories in metric and Palatini formalisms. *Phys. Rev.*, D77:043007, 2008.

[60] Pengjie Zhang. Testing $f(R)$ gravity against the large scale structure of the universe. *Phys. Rev.*, D73:123504, 2006.

[61] Shinji Tsujikawa and Takayuki Tatekawa. The effect of modified gravity on weak lensing. *Phys. Lett.*, B665:325–331, 2008.

[62] Fabian Schmidt. Weak Lensing Probes of Modified Gravity. *Phys. Rev.*, D78:043002, 2008.

[63] Jian-Hua He, Bin Wang, and Elcio Abdalla. Deep connection between f(R) gravity and the interacting dark sector model. *Phys. Rev.*, D84:123526, 2011.

[64] Fabrizio F. Bernardi and Ricardo G. Landim. Coupled quintessence and the impossibility of an interaction: a dynamical analysis study. *Eur. Phys. J.*, C77(5):290, 2017.

[65] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.

[66] Christian G. Boehmer and Nyein Chan. Dynamical systems in cosmology. 2014.

[67] Edmund J. Copeland, Andrew R Liddle, and David Wands. Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Phys. Rev.*, D57:4686–4690, 1998.

[68] T. Barreiro, Edmund J. Copeland, and N. J. Nunes. Quintessence arising from exponential potentials. *Phys. Rev.*, D61:127301, 2000.

[69] Varun Sahni and Li-Min Wang. A New cosmological model of quintessence and dark matter. *Phys. Rev.*, D62:103517, 2000.

[70] I. Percival and D. Richards. *Introduction to Dynamics*. Cambridge University Press, 1999.

[71] Marek Szydlowski and Orest Hrycyna. Dynamical dark energy models: Dynamical system approach. *Gen. Rel. Grav.*, 38:121–135, 2006.

[72] Marek Szydlowski and Orest Hrycyna. Dissipative or conservative cosmology with dark energy? *Annals Phys.*, 322:2745–2775, 2007.

[73] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. (Texts in Applied Mathematics). Springer, 2nd edition, October 2003.

[74] B. Gumjudpai, T. Naskar, M. Sami, and S. Tsujikawa. Coupled dark energy: Towards a general description of the dynamics. *JCAP*, 0506:007, 2005.

[75] J. Carr. *Applications of centre manifold theory*. Springer, New York Heidelberg Berlin, 2016.

[76] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016.

[77] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys.J.*, 517:565–586, 1999.

[78] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, and P. J. Steinhardt. A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438–4441, 2000.

[79] T. Padmanabhan. Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter. *Phys.Rev.*, D66:021301, 2002.

[80] J. S. Bagla, H. K. Jassal, and T. Padmanabhan. Cosmology with tachyon field as dark energy. *Phys.Rev.*, D67:063504, 2003.

[81] P. Brax and J. Martin. Quintessence and supergravity. *Phys. Lett.*, B468:40–45, 1999.

[82] E. J. Copeland, N. J. Nunes, and F. Rosati. Quintessence models in supergravity. *Phys. Rev.*, D62:123503, 2000.

[83] R. C. G. Landim. Cosmological tracking solution and the Super-Higgs mechanism. *Eur. Phys. J.*, C76(8):430, 2016.

[84] C. Armendariz-Picon. Could dark energy be vector-like? *JCAP*, 0407:007, 2004.

[85] T. Koivisto and D. F. Mota. Vector Field Models of Inflation and Dark Energy. *JCAP*, 0808:021, 2008.

[86] K. Bamba and S. D. Odintsov. Inflation and late-time cosmic acceleration in non-minimal Maxwell-$F(R)$ gravity and the generation of large-scale magnetic fields. *JCAP*, 0804:024, 2008.

[87] V. Emelyanov and F. R. Klinkhamer. Possible solution to the main cosmological constant problem. *Phys. Rev.*, D85:103508, 2012.

[88] V. Emelyanov and F. R. Klinkhamer. Reconsidering a higher-spin-field solution to the main cosmological constant problem. *Phys. Rev.*, D85:063522, 2012.

[89] V. Emelyanov and F. R. Klinkhamer. Vector-field model with compensated cosmological constant and radiation-dominated FRW phase. *Int. J. Mod. Phys.*, D21:1250025, 2012.

[90] S. Kouwn, P. Oh, and C.-G. Park. Massive Photon and Dark Energy. *Phys. Rev.*, D93(8):083012, 2016.

[91] Stephen D. H. Hsu. Entropy bounds and dark energy. *Phys. Lett.*, B594:13–16, 2004.

[92] M. Li. A model of holographic dark energy. *Phys. Lett.*, B603:1, 2004.

[93] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Unifying phantom inflation with late-time acceleration: Scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy. *Gen. Rel. Grav.*, 38:1285–1304, 2006.

[94] Diego Pavon and Winfried Zimdahl. Holographic dark energy and cosmic coincidence. *Phys. Lett.*, B628:206–210, 2005.

[95] B. Wang, Y. Gong, and E. Abdalla. Thermodynamics of an accelerated expanding universe. *Phys. Rev.*, D74:083520, 2006.

[96] B. Wang, C.-Y. Lin, and E. Abdalla. Constraints on the interacting holographic dark energy model. *Phys. Lett.*, B637:357–361, 2006.

[97] B. Wang, C.-Y. Lin, D. Pavon, and E. Abdalla. Thermodynamical description of the interaction between dark energy and dark matter. *Phys. Lett.*, B662:1–6, 2008.

[98] R. C. G. Landim. Holographic dark energy from minimal supergravity. *Int. J. Mod. Phys.*, D25(4):1650050, 2016.

[99] Miao Li, Xiao-Dong Li, Shuang Wang, and Xin Zhang. Holographic dark energy models: A comparison from the latest observational data. *JCAP*, 0906:036, 2009.

[100] Miao Li, Xiao-Dong Li, Shuang Wang, Yi Wang, and Xin Zhang. Probing interaction and spatial curvature in the holographic dark energy model. *JCAP*, 0912:014, 2009.

[101] Miao Li, Xiao-Dong Li, Shuang Wang, and Yi Wang. Dark Energy. *Commun. Theor. Phys.*, 56:525–604, 2011.

[102] Shuang Wang, Yi Wang, and Miao Li. Holographic Dark Energy. 2016.

[103] D. Stojkovic, G. D. Starkman, and R. Matsuo. Dark energy, the colored anti-de Sitter vacuum, and LHC phenomenology. *Phys. Rev.*, D77:063006, 2008.

[104] Ricardo G. Landim and Elcio Abdalla. Metastable dark energy. *Phys. Lett.*, B764:271–276, 2017.

[105] E. Greenwood, E. Halstead, R. Poltis, and D. Stojkovic. Dark energy, the electroweak vacua and collider phenomenology. *Phys. Rev.*, D79:103003, 2009.

[106] E. Abdalla, L. L. Graef, and B. Wang. A Model for Dark Energy decay. *Phys. Lett.*, B726:786–790, 2013.

[107] A. Shafieloo, D. K. Hazra, V. Sahni, and A. A. Starobinsky. Metastable Dark Energy with Radioactive-like Decay. 2016.

[108] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models. *Phys. Rept.*, 505:59–144, 2011.

[109] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. *Astrophys. Space Sci.*, 342:155–228, 2012.

[110] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati. 4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space. *Phys. Lett. B*, 485:208, 2000.

[111] S. Yin, B. Wang, E. Abdalla, and C. Lin. Transition of equation of state of effective dark energy in the Dvali-Gabadadze-Porrati model with bulk contents. *Phys.Rev. D*, 76:124026, 2007.

[112] Sara Jamali and Mahmood Roshan. The phase space analysis of modified gravity (MOG). *Eur. Phys. J.*, C76(9):490, 2016.

[113] Salvatore Capozziello and Mahmood Roshan. Exact cosmological solutions from Hojman conservation quantities. *Phys. Lett.*, B726:471–480, 2013.

[114] P. J. E. Peebles and B. Ratra. Cosmology with a Time Variable Cosmological Constant. *Astrophys.J.*, 325:L17, 1988.

[115] B. Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys.Rev.*, D37:3406, 1988.

[116] J. A. Frieman, C. T. Hill, and R. Watkins. Late time cosmological phase transitions. 1. Particle physics models and cosmic evolution. *Phys.Rev.*, D46:1226–1238, 1992.

[117] J. A. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins, and I. Waga. Cosmology with ultralight pseudo Nambu-Goldstone bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2077, 1995.

[118] C. Wetterich. The Cosmon model for an asymptotically vanishing time dependent cosmological 'constant'. *Astron.Astrophys.*, 301:321–328, 1995.

[119] L. Amendola. Coupled quintessence. *Phys.Rev.*, D62:043511, 2000.

[120] G. R. Farrar and P. J. E. Peebles. Interacting dark matter and dark energy. *Astrophys. J.*, 604:1–11, 2004.

[121] Z.-K. Guo and Y.-Z. Zhang. Interacting phantom energy. *Phys. Rev. D.*, 71:023501, 2005.

[122] R.-G. Cai and A. Wang. Cosmology with interaction between phantom dark energy and dark matter and the coincidence problem. *JCAP*, 0503:002, 2005.

[123] Z.-K. Guo, R.-G. Cai, and Y.-Z. Zhang. Cosmological evolution of interacting phantom energy with dark matter. *JCAP*, 0505:002, 2005.

[124] X.-J. Bi, B. Feng, H. Li, and X. Zhang. Cosmological evolution of interacting dark energy models with mass varying neutrinos. *Phys. Rev. D.*, 72:123523, 2005.

[125] S. Micheletti, E. Abdalla, and B. Wang. A Field Theory Model for Dark Matter and Dark Energy in Interaction. *Phys.Rev.*, D79:123506, 2009.

[126] A. A. Costa, L. C. Olivari, and E. Abdalla. Quintessence with Yukawa Interaction. *Phys. Rev.*, D92(10):103501, 2015.

[127] M. Shahalam, S. D. Pathak, M. M. Verma, M. Yu. Khlopov, and R. Myrzakulov. Dynamics of interacting quintessence. *Eur. Phys. J.*, C75(8):395, 2015.

[128] R. C. Nunes, S. Pan, and E. N. Saridakis. New constraints on interacting dark energy from cosmic chronometers. *Phys. Rev.*, D94(2):023508, 2016.

[129] J. Sola, J. Perez, A. Gomez-Valent, and R. C. Nunes. Dynamical Vacuum against a rigid Cosmological Constant. 2016.

[130] B. Wang, E. Abdalla, F. Atrio-Barandela, and D. Pavon. Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures. *Rep. Prog. Phys.*, 79(9):096901, 2016.

[131] W. Zimdahl and D. Pavon. Interacting quintessence. *Phys.Lett.*, B521:133–138, 2001.

[132] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon, and W. Zimdahl. Interacting quintessence solution to the coincidence problem. *Phys.Rev.*, D67:083513, 2003.

[133] S. C. C. Ng, N. J. Nunes, and F. Rosati. Applications of scalar attractor solutions to cosmology. *Phys.Rev.*, D64:083510, 2001.

[134] E. J. Copeland, M. R. Garousi, M. Sami, and S. Tsujikawa. What is needed of a tachyon if it is to be the dark energy? *Phys.Rev.*, D71:043003, 2005.

[135] X.-H. Zhai and Y.-B. Zhao. A cosmological model with complex scalar field. *Nuovo Cim.*, B120:1007–1016, 2005.

[136] J. De-Santiago, J. L. Cervantes-Cota, and D. Wands. Cosmological phase space analysis of the F(X) - V(ϕ) scalar field and bouncing solutions. *Phys. Rev.*, D87(2):023502, 2013.

[137] M. Azreg-Ainou. Phase-space analysis of the cosmological 3-fluid problem: Families of attractors and repellers. *Class. Quant. Grav.*, 30:205001, 2013.

[138] R. C. G. Landim. Dynamical analysis for a vector-like dark energy. *Eur. Phys. J.*, C76:480, 2016.

[139] A. Alho and C. Uggla. Scalar field deformations of ΛCDM cosmology. *Phys. Rev.*, D92(10):103502, 2015.

[140] S. Tsujikawa. General analytic formulae for attractor solutions of scalar-field dark energy models and their multi-field generalizations. *Phys.Rev.*, D73:103504, 2006.

[141] L. Amendola, M. Quartin, S. Tsujikawa, and I. Waga. Challenges for scaling cosmologies. *Phys.Rev.*, D74:023525, 2006.

[142] X.-M. Chen, Y.-G. Gong, and E. N. Saridakis. Phase-space analysis of interacting phantom cosmology. *JCAP*, 0904:001, 2009.

[143] N. Mahata and S. Chakraborty. Dynamical system analysis for DBI dark energy interacting with dark matter. *Mod. Phys. Lett .A*, 30(02):1550009, 2015.

[144] R. C. G. Landim. Coupled tachyonic dark energy: a dynamical analysis. *Int. J. Mod. Phys.*, D24:1550085, 2015.

[145] R. C. G. Landim. Coupled dark energy: a dynamical analysis with complex scalar field. *Eur. Phys. J.*, C76(1):31, 2016.

[146] M. B. Gavela, D. Hernandez, L. Lopez Honorez, O. Mena, and S. Rigolin. Dark coupling. *JCAP*, 0907:034, 2009. [Erratum: JCAP1005,E01(2010)].

[147] J.-H. He, B. Wang, and E. Abdalla. Testing the interaction between dark energy and dark matter via latest observations. *Phys. Rev.*, D83:063515, 2011.

[148] R. J. F. Marcondes, R. C. G. Landim, A. A. Costa, B. Wang, and E. Abdalla. Analytic study of the effect of dark energy-dark matter interaction on the growth of structures. *JCAP*, 2016(12):009, 2016.

[149] Timothée Delubac et al. Baryon acoustic oscillations in the Lya forest of BOSS DR11 quasars. *Astron. Astrophys.*, 574:A59, 2015.

[150] E. Abdalla, E. G. M. Ferreira, J. Quintin, and B. Wang. New evidence for interacting dark energy from BOSS. 2014.

[151] J. Wainwright and G. F. R. Ellis. *Dynamical Systems in Cosmology.* Cambridge University Press, 1997.

[152] A. A. Coley. *Dinamical Systems and Cosmology.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 2003.

[153] S. C. C. Ng, N. J. Nunes, and Francesca Rosati. Applications of scalar attractor solutions to cosmology. *Phys. Rev.*, D64:083510, 2001.

[154] Urbano França and Rogerio Rosenfeld. Fine tuning in quintessence models with exponential potentials. *JHEP*, 10:015, 2002.

[155] A. de la Macorra and G. Piccinelli. General scalar fields as quintessence. *Phys. Rev.*, D61:123503, 2000.

[156] R. Bean, S. H. Hansen, and A. Melchiorri. Early universe constraints on a primordial scaling field. *Phys.Rev.*, D64:103508, 2001.

[157] Ricardo G. Landim, Rafael J. F. Marcondes, Fabrizio F. Bernardi, and Elcio Abdalla. Interacting Dark Energy in the Dark $SU(2)_R$ Model. *Braz. J. Phys.*, 48(4):364–369, 2018.

[158] Leanne D. Duffy and Karl van Bibber. Axions as Dark Matter Particles. *New J. Phys.*, 11:105008, 2009.

[159] Luca Visinelli and Paolo Gondolo. Dark Matter Axions Revisited. *Phys. Rev.*, D80:035024, 2009.

[160] P. Sikivie. Dark matter axions. *Int. J. Mod. Phys.*, A25:554–563, 2010.

[161] Lars Bergstrom. Dark Matter Candidates. *New J. Phys.*, 11:105006, 2009.

[162] S. Weinberg. The quantum theory of fields: Modern Applications. *Cambridge University Press*, 2, 2013.

[163] M. Shifman. Advanced Topics in Quantum Field Theory. A lecture course. *Cambridge University Press*, 2012.

[164] S. R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory. *Phys. Rev.*, D15:2929–2936, 1977. [Erratum: Phys. Rev.D16,1248(1977)].

[165] P. A. R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron.Astrophys.*, 571:A16, 2014.

[166] S. Weinberg. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, 1989.

[167] E. N. Saridakis. Ricci-Gauss-Bonnet holographic dark energy. 2017.

[168] A. Al Mamon. Reconstruction of interaction rate in holographic dark energy model with Hubble horizon as the infrared cut-off. *Int. J. Mod. Phys.*, D26(11):1750136, 2017.

[169] P. Mukherjee, A. Mukherjee, H. K. Jassal, A. Dasgupta, and N. Banerjee. Holographic dark energy: constraints on the interaction from diverse observational data sets. 2017.

[170] A. Mukherjee. Reconstruction of interaction rate in Holographic dark energy. *JCAP*, 1611:055, 2016.

[171] L. Feng and X. Zhang. Revisit of the interacting holographic dark energy model after Planck 2015. *JCAP*, 1608(08):072, 2016.

[172] R. Herrera, W. S. Hipolito-Ricaldi, and N. Videla. Instability in interacting dark sector: An appropriate Holographic Ricci dark energy model. *JCAP*, 1608:065, 2016.

[173] M. Forte. Holographik, the k-essential approach to interactive models with modified holographic Ricci dark energy. *Eur. Phys. J.*, C76(12):707, 2016.

[174] M. Szydłowski, A. Stachowski, and K. Urbanowski. Quantum mechanical look at the radioactive-like decay of metastable dark energy. 2017.

[175] A. Stachowski, M. Szydłowski, and K. Urbanowski. Cosmological implications of the transition from the false vacuum to the true vacuum state. *Eur. Phys. J.*, C77(6):357, 2017.

[176] A. A. Costa, X.-D. Xu, B. Wang, E. G. M. Ferreira, and E. Abdalla. Testing the Interaction between Dark Energy and Dark Matter with Planck Data. *Phys. Rev.*, D89(10):103531, 2014.

[177] A. A. Costa, X.-D. Xu, B. Wang, and E. Abdalla. Constraints on interacting dark energy models from Planck 2015 and redshift-space distortion data. *JCAP*, 1701(01):028, 2017.

[178] B. Wang, E. Abdalla, F. Atrio-Barandela, and D. Pavon. Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures. *Rept. Prog. Phys.*, 79(9):096901, 2016.

[179] L. Santos, Wen Zhao, Elisa G. M. Ferreira, and Jerome Quintin. Constraining interacting dark energy with CMB and BAO future surveys. *Phys. Rev.*, D96(10):103529, 2017.

[180] W. Yang and S. Banerjee, N.and Pan. Constraining a dark matter and dark energy interaction scenario with a dynamical equation of state. *Phys. Rev.*, D95(12):123527, 2017.

[181] R. F. vom Marttens, L. Casarini, W. S. Hipólito-Ricaldi, and W. Zimdahl. CMB and matter power spectra with non-linear dark-sector interactions. *JCAP*, 1701(01):050, 2017.

[182] W. Yang, S. Pan, and J. D. Barrow. Large-scale Stability and Astronomical Constraints for Coupled Dark-Energy Models. 2017.

[183] X. Xu, Y.-Z. Ma, and A. Weltman. Constraining the interaction between dark sectors with future HI intensity mapping observations. 2017.

[184] J. L. Hewett and T. G. Rizzo. Low-Energy Phenomenology of Superstring Inspired E(6) Models. *Phys. Rept.*, 183:193, 1989.

[185] C. S. Aulakh, A. Melfo, and G. Senjanovic. Minimal supersymmetric left-right model. *Phys. Rev.*, D57:4174–4178, 1998.

[186] P. Duka, J. Gluza, and M. Zralek. Quantization and renormalization of the manifest left-right symmetric model of electroweak interactions. *Annals Phys.*, 280:336–408, 2000.

[187] B. A. Dobrescu and Z. Liu. W' Boson near 2 TeV: Predictions for Run 2 of the LHC. *Phys. Rev. Lett.*, 115(21):211802, 2015.

[188] B. A. Dobrescu and P. J. Fox. Signals of a 2 TeV W' boson and a heavier Z' boson. *JHEP*, 05:047, 2016.

[189] P. Ko and T. Nomura. $SU(2)_L \times SU(2)_R$ minimal dark matter with 2 TeV W'. *Phys. Lett.*, B753:612–618, 2016.

[190] J. Brehmer, J. Hewett, J. Kopp, T. Rizzo, and J. Tattersall. Symmetry Restored in Dibosons at the LHC? *JHEP*, 10:182, 2015.

[191] F. Bezrukov, H. Hettmansperger, and M. Lindner. keV sterile neutrino Dark Matter in gauge extensions of the Standard Model. *Phys. Rev.*, D81:085032, 2010.

[192] J. N. Esteves, J. C. Romao, M. Hirsch, W. Porod, F. Staub, and A. Vicente. Dark matter and LHC phenomenology in a left-right supersymmetric model. *JHEP*, 01:095, 2012.

[193] H. An, P. S. B. Dev, Y. Cai, and R. N. Mohapatra. Sneutrino Dark Matter in Gauged Inverse Seesaw Models for Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 108:081806, 2012.

[194] M. Nemevsek, G. Senjanovic, and Y. Zhang. Warm Dark Matter in Low Scale Left-Right Theory. *JCAP*, 1207:006, 2012.

[195] S. Bhattacharya, E. Ma, and D. Wegman. Supersymmetric left-right model with radiative neutrino mass and multipartite dark matter. *Eur. Phys. J.*, C74:2902, 2014.

[196] J. Heeck and S. Patra. Minimal Left-Right Symmetric Dark Matter. *Phys. Rev. Lett.*, 115(12):121804, 2015.

[197] C. Garcia-Cely and J. Heeck. Phenomenology of left-right symmetric dark matter. *JCAP*, 1603:021, 2015.

[198] A. Berlin, P. J. Fox, D. Hooper, and G. Mohlabeng. Mixed Dark Matter in Left-Right Symmetric Models. *JCAP*, 1606(06):016, 2016.

[199] P. S. B. Dev, R. N. Mohapatra, and Y. Zhang. Heavy right-handed neutrino dark matter in left-right models. *Mod. Phys. Lett.*, A32:1740007, 2017.

[200] P. S. B. Dev, D. Kazanas, R. N. Mohapatra, V. L. Teplitz, and Y. Zhang. Heavy right-handed neutrino dark matter and PeV neutrinos at IceCube. *JCAP*, 1608(08):034, 2016.

[201] P. S. Bhupal Dev, Rabindra N. Mohapatra, and Y. Zhang. Naturally stable right-handed neutrino dark matter. *JHEP*, 11:077, 2016.

[202] Nima Arkani-Hamed, Sergei Dubovsky, Leonardo Senatore, and Giovanni Villadoro. (No) Eternal Inflation and Precision Higgs Physics. *JHEP*, 03:075, 2008.

[203] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley, 1990. Frontiers in Physics, 69.

[204] Christopher Gordon and Wayne Hu. A Low CMB quadrupole from dark energy isocurvature perturbations. *Phys. Rev.*, D70:083003, 2004.

[205] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges. *Astrophys. J.*, 455:7–25, 1995.

[206] Didam Duniya, Daniele Bertacca, and Roy Maartens. Clustering of quintessence on horizon scales and its imprint on HI intensity mapping. *JCAP*, 1310:015, 2013.

[207] Qing-Guo Huang, Ke Wang, and Sai Wang. Distance priors from Planck 2015 data. *JCAP*, 1512(12):022, 2015.

[208] M. Betoule et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astron. Astrophys.*, 568:A22, 2014.

[209] Florian Beutler, Chris Blake, Matthew Colless, D. Heath Jones, Lister Staveley-Smith, Gregory B. Poole, Lachlan Campbell, Quentin Parker, Will Saunders, and Fred Watson. The 6dF Galaxy Survey: $z \approx 0$ measurement of the growth rate and σ_8. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 423:3430–3444, 2012.

[210] Ashley J. Ross, Lado Samushia, Cullan Howlett, Will J. Percival, Angela Burden, and Marc Manera. The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample – I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 449(1):835–847, 2015.

[211] Lauren Anderson et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Releases 10 and 11 Galaxy samples. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 441(1):24–62, 2014.

[212] Andreu Font-Ribera et al. Quasar-Lyman α Forest Cross-Correlation from BOSS DR11 : Baryon Acoustic Oscillations. *JCAP*, 1405:027, 2014.

[213] Michele Moresco, Lucia Pozzetti, Andrea Cimatti, Raul Jimenez, Claudia Maraston, Licia Verde, Daniel Thomas, Annalisa Citro, Rita Tojeiro, and David Wilkinson. A 6% measurement of the Hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *JCAP*, 1605(05):014, 2016.

[214] Adam G. Riess et al. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 826(1):56, 2016.

[215] George Koutsoumbas, Konstantinos Ntrekis, Eleftherios Papantonopoulos, and Emmanuel N. Saridakis. Unification of Dark Matter - Dark Energy in Generalized Galileon Theories. 2017.

[216] R. A. Battye, M. L. Brown, I. W. A. Browne, R. J. Davis, P. Dewdney, C. Dickinson, G. Heron, B. Maffei, A. Pourtsidou, and P. N. Wilkinson. BINGO: a single dish approach to 21cm intensity mapping. 2012.

[217] Richard Battye et al. Update on the BINGO 21cm intensity mapping experiment. 2016.

[218] Austin Joyce, Bhuvnesh Jain, Justin Khoury, and Mark Trodden. Beyond the Cosmological Standard Model. *Phys. Rept.*, 568:1–98, 2015.

[219] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification. *Phys. Rev.*, D66:043507, 2002.

[220] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384, 1974.

[221] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. The Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev.*, D79:064036, 2009.

[222] C. Deffayet, Gilles Esposito-Farese, and A. Vikman. Covariant Galileon. *Phys. Rev.*, D79:084003, 2009.

[223] C. Deffayet, S. Deser, and G. Esposito-Farese. Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors. *Phys. Rev.*, D80:064015, 2009.

[224] C. Deffayet, Xian Gao, D. A. Steer, and G. Zahariade. From k-essence to generalised Galileons. *Phys. Rev.*, D84:064039, 2011.

[225] N. Chow and J. Khoury. Galileon Cosmology. *Phys. Rev.*, D80:024037, 2009.

[226] Antonio De Felice, Ryotaro Kase, and Shinji Tsujikawa. Vainshtein mechanism in second-order scalar-tensor theories. *Phys. Rev.*, D85:044059, 2012.

[227] Eugeny Babichev, Cedric Deffayet, and Gilles Esposito-Farese. Improving relativistic MOND with Galileon k-mouflage. *Phys. Rev.*, D84:061502, 2011.

[228] Emmanuel N. Saridakis and Minas Tsoukalas. Cosmology in new gravitational scalar-tensor theories. *Phys. Rev.*, D93(12):124032, 2016.

[229] Massimiliano Rinaldi. Mimicking dark matter in Horndeski gravity. *Phys. Dark Univ.*, 16:14–21, 2017.

[230] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. The Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev.*, D79:064036, 2009.

[231] C. Deffayet, Xian Gao, D. A. Steer, and G. Zahariade. From k-essence to generalised Galileons. *Phys. Rev.*, D84:064039, 2011.

[232] M. Ostrogradsky. Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres. *Mem. Acad. St. Petersbourg*, 6 no 4:385, 1850.

[233] Michele Mancarella. *An effective description of dark energy: from theory to phenomenology.* PhD thesis, IPhT, Saclay, 2017.

[234] Emilio Bellini and Ignacy Sawicki. Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity. *JCAP*, 1407:050, 2014.

[235] Antonio De Felice, Tsutomu Kobayashi, and Shinji Tsujikawa. Effective gravitational couplings for cosmological perturbations in the most general scalar-tensor theories with second-order field equations. *Phys. Lett.*, B706:123–133, 2011.

[236] Tsutomu Kobayashi, Masahide Yamaguchi, and Jun'ichi Yokoyama. Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations. *Prog. Theor. Phys.*, 126:511–529, 2011.

[237] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models. *JCAP*, 1202:007, 2012.

[238] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. Cosmology of a covariant Galileon field. *Phys. Rev. Lett.*, 105:111301, 2010.

[239] Stephen Appleby and Eric V. Linder. The Paths of Gravity in Galileon Cosmology. *JCAP*, 1203:043, 2012.

[240] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016.

[241] Maria da Conceicao Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen. WMAP constraints on the generalized Chaplygin gas model. *Phys. Lett.*, B575:172–180, 2003.

[242] Paolo Creminelli and Filippo Vernizzi. Dark Energy after GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251302, 2017.

[243] B. P. Abbott et al. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. *Astrophys. J.*, 848(2):L13, 2017.

[244] B.P. Abbot et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett*, 119(16):161101, 2017.

[245] A. Goldstein et al. An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A. *Astrophys. J.*, 848(2):L14, 2017.

[246] T. Baker, E. Bellini, P. G. Ferreira, M. Lagos, J. Noller, and I. Sawicki. Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251301, 2017.

[247] Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui. Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251304, 2017.

[248] Luca Amendola, Martin Kunz, Ippocratis D. Saltas, and Ignacy Sawicki. Fate of Large-Scale Structure in Modified Gravity After GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 120(13):131101, 2018.

[249] Guy D. Moore and Ann E. Nelson. Lower bound on the propagation speed of gravity from gravitational Cherenkov radiation. *JHEP*, 09:023, 2001.

[250] David Langlois, Michele Mancarella, Karim Noui, and Filippo Vernizzi. Effective Description of Higher-Order Scalar-Tensor Theories. *JCAP*, 1705(05):033, 2017.

[251] Diego Blas, Mikhail M. Ivanov, Ignacy Sawicki, and Sergey Sibiryakov. On constraining the speed of gravitational waves following GW150914. *JETP Lett.*, 103(10):624–626, 2016. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.103,no.10,708(2016)].

[252] Neil Cornish, Diego Blas, and Germano Nardini. Bounding the speed of gravity with gravitational wave observations. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161102, 2017.

[253] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384, 1974.

[254] Diego Blas, Oriol Pujolas, and Sergey Sibiryakov. Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy. *JHEP*, 04:018, 2011.

[255] Jérôme Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, 114(21):211101, 2015.

[256] Ted Jacobson. Einstein-aether gravity: A Status report. *PoS*, QG-PH:020, 2007.

[257] R.A. D'Inverno. *Introducing Einsteins's Relativity.* Oxford University Press(1992).

[258] R. M. Wald. *General Relativity.* The University of Chicago Press, 1984.

[259] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology.* Cambridge University Press, 2005.

[260] D. J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics.* Pearson Education, 2nd edition, 2005.

[261] Manu Paranjape. *The Theory and Applications of Instanton Calculations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2017.

[262] Sidney R. Coleman. The Uses of Instantons. *Subnucl. Ser.*, 15:805, 1979. [,382(1978)].

[263] L.L. Graef. *Um modelo para decaimento da energia escura.* PhD thesis, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Matemática, 2012.

[264] Curtis G. Callan, Jr. and Sidney R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections. *Phys. Rev.*, D16:1762–1768, 1977.

[265] Sidney R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory. *Phys. Rev.*, D15:2929–2936, 1977. [Erratum: Phys. Rev.D16,1248(1977)].

[266] Bin Hu, Marco Raveri, Noemi Frusciante, and Alessandra Silvestri. Effective Field Theory of Cosmic Acceleration: an implementation in CAMB. *Phys. Rev.*, D89(10):103530, 2014.

[267] Miguel Zumalacarregui, Emilio Bellini, Ignacy Sawicki, Julien Lesgourgues, and Pedro G. Ferreira. hi_class: Horndeski in the Cosmic Linear Anisotropy Solving System. *JCAP*, 1708(08):019, 2017.

[268] Diego Blas, Julien Lesgourgues, and Thomas Tram. The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) II: Approximation schemes. *JCAP*, 1107:034, 2011.

[269] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity. *Astron. Astrophys.*, 594:A14, 2016.

[270] R. A. Sunyaev and Ya. B. Zeldovich. Small scale fluctuations of relic radiation. *Astrophys. Space Sci.*, 7:3–19, 1970.

[271] P. J. E. Peebles and J. T. Yu. Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe. *Astrophys. J.*, 162:815–836, 1970.

[272] Daniel J. Eisenstein, Idit Zehavi, David W. Hogg, Roman Scoccimarro, Michael R. Blanton, Robert C. Nichol, Ryan Scranton, Hee-Jong Seo, Max Tegmark, Zheng Zheng, Scott F. Anderson, Jim Annis, Neta Bahcall, Jon Brinkmann, Scott Burles, Francisco J. Castander, Andrew Connolly, Istvan Csabai, Mamoru Doi, Masataka Fukugita, Joshua A. Frieman, Karl Glazebrook, James E. Gunn, John S. Hendry, Gregory Hennessy, Zeljko Ivezić, Stephen Kent, Gillian R. Knapp, Huan Lin, Yeong-Shang Loh, Robert H. Lupton, Bruce Margon, Timothy A. McKay, Avery Meiksin, Jeffery A. Munn, Adrian Pope, Michael W. Richmond, David Schlegel, Donald P. Schneider, Kazuhiro Shimasaku, Christopher Stoughton, Michael A. Strauss, Mark SubbaRao, Alexander S. Szalay, István Szapudi, Douglas L. Tucker, Brian Yanny, and Donald G. York. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560, 2005.