

Thèse présentée pour l'obtention de l'

Habilitation à diriger des Recherches
Université de Paris VI

Spécialité :

Physique Théorique

par

Pierre Vanhove

Théorèmes de non-renormalisation en théorie des cordes

soutenue le 26 Octobre 2007 devant le jury composé de :

Jean-Pierre Derendinger	Rapporteur
Paolo di Vecchia	Rapporteur
Bernard Julia	
Ruben Minasian	
Michela Petrini	
Marios Petropoulos	
Kellog Stelle	Rapporteur

26/10/2007

Table des matières

AVANT-PROPOS	i
I SURVOL DE MES TRAVAUX DE RECHERCHE	1
1. Les dualités	1
2. Structure de la théorie M	2
• Actions effectives	3
• Invariants supersymétriques en \mathcal{R}^4 .	3
• Formalisme des spineurs purs	4
3. Les modèles de matrices	4
• Les modèles de matrices supersymétriques	5
• La M2-brane et les U-dualités.	5
4. Dualité entre cordes ouvertes et cordes fermées	6
5. Hypermultiplets de la supergravité $\mathcal{N} = 2$ en dimension quatre	6
6. Modification de la gravité à grande distance.	7
II THÉORIE M ET THÉORIE DES CORDES	9
7. Amplitudes et action effective des cordes	9
8. Supersymétries	13
9. Dualité S entre le couplage faible et le couplage fort	14
10. Couplage fort & théorie M	16
III AMPLITUDES DES CORDES À L'ORDRE DES ARBRES ET EN BOUCLES	19
11. Amplitudes à l'ordre des arbres	19
12. Amplitude à l'ordre d'une boucle	21
• Structure générale	21
• Contributions analytiques	22
• Contributions des seuils normaux	23
13. Structure des amplitudes aux ordres supérieurs	26
IV AMPLITUDES EN BOUCLES EN THÉORIE M	29
14. Théorèmes de non renormalisation	29
• Pour la corde de type IIA	30
• Pour la corde de type IIB	31
15. Amplitude à une boucle en onze dimensions	32
• Compactification sur un tore	33
• Contributions des seuils normaux de masse nulle	38
16. Amplitude à deux boucles en dimension onze	39
• Le couplage en D^4R^4	41
• Le couplage en D^6R^4	45
• Corrections aux seuils normaux de masse nulle	46
17. Comportement ultra-violet des amplitudes dans la théorie $N = 8$	47
V CONCLUSION	49

AVANT-PROPOS

Commentators on the whole agree on praising the logical and uncompromising clarity of his arguments and go on to differ fundamentally about what he meant.

D.H. PENNINGTON COMMENTING THE WORK OF THOMAS HOBBS.

Nous décrivons dans ce texte les recherches accomplies depuis la fin de ma thèse de doctorat soutenue le 18 avril 1998 à l'École Polytechnique.

Ma thèse de doctorat a eu lieu pendant la période très active qui a suivi la découverte des dualités et des D-branes. De ces développements sont sorties deux descriptions du régime non perturbatif de la théorie des cordes : la théorie M, et les modèles de matrices. Certains de mes travaux de recherche portent sur l'analyse du régime non perturbatif de la théorie des cordes, d'autres sur des sujets récents inspirés de la cosmologie comme les modèles de modification de la gravité aux échelles cosmologiques ou plus formels comme la formulation de la théorie des cordes et de la théorie M en termes de spineurs purs.

Le premier chapitre contient une introduction générale et une revue de mes travaux de recherche. Le reste de ce texte décrit un ensemble de théorèmes de non-renormalisation pour l'action effective de la théorie des cordes et leur implication sur le comportement ultra-violet de la théorie de supergravité $N = 8$. Les appendices contiennent une liste de publications et un CV.

Je tiens à remercier mes collaborateurs et collègues qui au cours des années m'ont aidé à mieux comprendre ce qu'est la théorie des cordes (tout au moins jusqu'à l'ordre d'une boucle et quatre états externes de masse nulle) et essayer de formaliser la théorie M. Mes remerciements vont en particulier à Costas Bachas, Ignatios Antoniadis, Michael B. Green, Kasper Peeters, Ruben Minasian et Stefan Theisen. Une mention spéciale va à Ruben Minasian pour sa patience et sa disponibilité à écouter des raisonnements souvent confus. Une admiration particulière va à Shannon Wheeler pour sa vision fascinante de la société à travers un filtre à café.



Too Much Coffee Man

Chapitre I

SURVOL DE MES TRAVAUX DE RECHERCHE

Dans ce chapitre je passe en revue mes travaux de recherche accomplis depuis la fin de ma thèse de doctorat. Le reste du manuscrit est consacré à l'énoncé de théorèmes de non-renormalisation et leurs implications sur le comportement ultra-violet de la théorie de supergravité $N = 8$.

1. Les dualités

De la découverte des relations de dualité entre les différentes théories des supercordes a surgi l'idée que les cinq théories de corde supersymétriques ne sont que des manifestations particulières de l'espace des configurations d'une théorie plus fondamentale appelée *la Théorie M* [1]. Malheureusement les degrés de liberté fondamentaux de cette théorie ne sont pas connus (le rôle de la membrane comme objet fondamental n'a toujours pas été clarifié. Dans la suite nous expliquerons comment nous contournons cette difficulté.) La théorie M peut être définie de plusieurs manières par des descriptions effectives. Toutes ces descriptions sont conjecturées équivalentes. Nous les passons en revue brièvement, et j'aurai l'occasion de revenir sur certains aspects en commentant mes travaux.

Les cinq formulations traditionnelles de la théorie des cordes (les cordes fermées de type IIA et de type IIB, les cordes hétérotiques avec les groupe de jauge $E_8 \times E_8$ et $SO(32)$ et la corde ouverte de type I avec le groupe de jauge $SO(32)$) sont vues comme des descriptions partielles de la théorie M. Le régime perturbatif des théories de cordes est organisé en une série en puissances en la constante de couplage g_s . Au delà de la série perturbative existent des effets non perturbatifs, mettant en jeu des états de tension $T_{RR} \sim 1/(g_s l_s^{1+p})$ ou $T_{NS} \sim 1/(g_s^2 l_s^6)$. Les états de tension T_{RR} sont des défauts topologiques connus sous le nom de D-brane. Ces objets doivent s'enrouler sur des cycles non triviaux de l'espace-temps pour être stabilisés. Par exemple, une D0-brane enroulée sur un cercle de rayon R contribuera à une masse effective de $T_{D0} = R/(g_s l_s)$. Nous remarquons que la valeur de la masse est contrôlée par la valeur du rapport du rayon R et de la constante de couplage g_s . C'est ainsi que les D-branes mélangent les notions de dimensions spatiales R , avec la constante de couplage des cordes g_s . Ceci a de très importantes implications en phénoménologie des cordes.

Dans les unités de longueur des cordes fondamentales l_s , la constante de couplage des cordes est vue comme une onzième dimension [1] spatiale

$$R_{11} = g_s l_s$$

et les D₀-branes sont vues comme des modes d'excitation de Kaluza–Klein n/R_{11} autour d'un cercle de rayon R_{11} de la métrique à onze dimensions. Tout ceci se résume par la conjecture que le régime de couplage fort $g_s \rightarrow \infty$ des théories des cordes supersymétriques est une théorie en dimension onze, dont la limite classique de basse énergie est la supergravité construite par Cremmer, Julia et Scherk [2].

Dans mes travaux je m'attache à préciser cette conjecture. En collaboration avec Michael Green nous avons pu établir des règles de calculs perturbatifs en boucles en théorie M.

En considérant à nouveau l'exemple de la D₀-brane, un autre point de vue de la Théorie M peut-être développé, à savoir le modèle de matrices (voir plus bas). Ce modèle est considéré par certains comme une définition (non-perturbative) de la théorie M. Un aspect intéressant est que cette description coïncide avec l'hamiltonien de la membrane dans la jauge de cône lumière [3]. Ceci semble indiquer que la membrane est l'objet fondamental en dimension onze, tout comme les cordes sont les objets fondamentaux en dimension dix. Cette hypothèse n'a toujours pas pu être vérifiée et nous aurons l'occasion de revenir sur cet aspect de la théorie M dans la suite.

Finalement, quelle que soit la définition fondamentale de la théorie M, celle-ci devra être compatible avec les symétries de U-dualités qui organisent les charges et les masses des degrés de liberté (perturbatifs et non-perturbatifs) de la théorie des cordes. Ce sera le principe qui guidera notre analyse.

2. Structure de la théorie M

Nous avons vu que la théorie M est naturellement définie en dimension onze, et que sa limite classique de basse énergie est la théorie de supergravité construite dans [2]. Considérant cette théorie de supergravité comme les termes cinétiques d'une théorie effective, les effets quantiques de la théorie M induiront des corrections d'ordre supérieur en dérivées organisées en une série de puissances de la longueur de Planck en dimension onze l_P . Ces effets sont des corrections quantiques liées à la dynamique de la membrane et son dual magnétique la 5-brane. Malheureusement nous ne disposons pas de formalisme pour quantifier ces objets mais des informations non triviales à ce sujet peuvent être déduites de la connaissance des corrections à l'action effective de supergravité.

Les travaux [4,5,6,7,8] portent donc sur la construction de ces corrections d'ordre supérieur en dérivées et sur l'analyse des propriétés de l'action effective pour la théorie M.

- Actions effectives

Dans ces publications en combinant différentes méthodes de la théorie des cordes : calcul d'éléments de matrice S (amplitudes), invariance sous les dualités U , etc ; nous avons construit les termes en R^4 (puissance quatrième du tenseur de Riemann) et $D^4 R^4$ qui sont les premières corrections quantiques à l'action de la supergravité de Cremmer-Julia-Scherk.

Avec Michael Green, dans [9], nous avons établi un formalisme pour calculer et régulariser des diagrammes de Feynman en boucles.

Dans l'action effective de la théorie des cordes fermées de type II en dimension dix, existe une classe très importante de couplages protégés par la supersymétrie. Ces couplages ont la propriété de ne recevoir qu'un nombre fini de corrections en boucles et des contributions non perturbatives. Ces couplages sont protégés des corrections radiatives par les symétries de la théorie et satisfont des théorèmes de non-renormalisation. Dans le cadre d'une théorie où la supersymétrie est réalisée sur la couche de masse (et dans le cadre d'une théorie où il n'existe pas de formalisme off-shell avec un nombre fini de champs auxiliaires) nous énoncerons l'extension de théorèmes de non-renormalisation à une classe plus importante (en fait infinie) de couplage protégés. Nous reviendrons sur ce point plus loin dans ce texte.

Nous avons montré avec Michael Green que les termes en R^4 [10] ne reçoivent pas de corrections perturbatives au-delà d'une boucle [7,11], les couplages en $D^4 R^4$ ne reçoivent pas de corrections perturbatives au delà de deux boucles [8] et les couplages en $D^6 R^4$ ne reçoivent pas de corrections perturbatives au au delà de trois boucles [12]. Ces résultats ont été confirmés indépendamment par les calculs à deux boucles de D'Hoker et Phong dans [13] et les calculs de Berkovits [14,15]. Récemment nous avons donné des arguments pour l'extension de tels théorèmes à tous les ordres en dérivées [16,17]. De tels théorèmes impliquent que la théorie de supergravité $N = 8$ a un comportement ultra-violet nettement meilleur que celui déduit des méthodes de superespace.

Dans la section 14 nous préciserons le domaine de validité de ce théorème et nous donnerons dans les sections suivantes du chapitre IV des exemples précis. Nous discuterons les conditions sous lesquelles ces théorèmes impliquent que la théorie des champs de supergravité $N = 8$ en dimension quatre est finie dans l'UV.

- Invariants supersymétriques en \mathcal{R}^4 .

La question de la renormalisabilité des théories de supergravité passe par la construction de possibles contre-termes. Ces objets sont des invariants de supersymétrie de dimension plus élevée. Un certain nombre des objets ont été construits dans un formalisme off-shell mais ici nous sommes intéressés au cas sur la couche de masse. Il est aussi attendu que les corrections par des opérateurs de dimension plus élevée à l'action effective de supergravité de la théorie des cordes compactifiée auront des implications sur la stabilisation des modules (le volume, ...). Nous avons donc entrepris avec Kasper Peeters et Anders Westerberg une construction de tels

invariants de supergravité dans le formalisme en composantes dans [4,5,6]. Nous avons utilisé la méthode de Noether pour construire des invariants de supersymétrie d'ordre supérieur en dérivées pour l'action effective gravitationnelle de la théorie des supercordes et de la théorie M. Nous avons pu ainsi construire une classe des termes en R^4 , ainsi que les déformations associées de l'algèbre de supersymétrie. Nous avons calculé comment ces corrections affectent la géométrie du super-espace en dimension onze (en particulier la composante de dimension zéro de la supertorsion). Ces résultats ont été confirmés plus tard par les méthodes de cohomologie spinorielle [18,19,20].¹

- Formalisme des spineurs purs

Les calculs en boucles faits en théorie M ont été réalisés en utilisant les propriétés d'unitarité de la matrice S dans la jauge de lumière SO(9). Une approche prometteuse pour justifier les théorèmes de non-renormalisation mentionnés plus haut et énoncés dans le chapitre IV est celle du *formalisme des spineurs purs* dû à Berkovits. C'est un nouveau formalisme de première quantification de la théorie de perturbations pour les supercordes en dimension dix et pour la supermembrane et la superparticule en dimension onze. Cette approche utilise des variables auxiliaires λ^α (les fantômes) qui forment un spineur d'espace-temps contraint par une équation quadratique $\lambda\gamma^m\lambda = 0$. La théorie est définie par la quantification de la charge BRST $Q = \int \lambda^\alpha d_\alpha$ obtenue par une combinaison linéaire des générateurs de supersymétrie. Le caractère non-linéaire de la contrainte rend l'action de la supersymétrie non-triviale et non-conventionnelle.

Avec Pietro-Antonio Grassi et Lilia Anguelova, dans [21], nous avons quantifié la superparticule en dimension onze de manière covariante. Ce formalisme est une approximation de modes zéros pour la supermembrane, et la première proposition de théorie des champs quantique covariante pour la quantification de la théorie M. Avec Pietro-Antonio Grassi, dans [22], nous avons formulé une prescription pour calculer à tous les ordres en boucles (seul l'ordre à une boucle avait été formulé dans [21]) et nous avons ainsi pu énoncer une définition quantique pour la théorie M topologique. La théorie M topologique est obtenue par un choix judicieux de conditions aux bords sur les coordonnées fermioniques. Nous montrons aussi que cette définition permet de retrouver les modèles topologiques de type A et B pour la théorie des cordes introduits par E. Witten il y a dix ans.

3. Les modèles de matrices

Nous avons déjà présenté le cas de la D0-brane, et plus généralement, les Dp-branes sont des objets non perturbatifs (de masse $1/g_s$ avec g_s la constante de couplage des cordes) décrits par des défauts topologiques d'extension spatiale p dont les fluctuations sont données par des petites cordes ouvertes attachées par une ou deux de leurs extrémités [23]. La théorie effective sur la surface d'univers d'une Dp-brane est une théorie de jauge non-Abélienne supersymétrique SYM $_{p+1}$, réduction à $p + 1$ dimension de la théorie de super-Yang-Mills $\mathcal{N}_{10} = 1$. Nous avons déjà présenté la conjecture identifiant le régime de couplage fort de la théorie des cordes fermées de type II avec la théorie M en dimension onze, et le modèle de mécanique quantique matricielle des D0-branes comme possible définition de la théorie M.

¹ La cohomologie spinorielle est équivalente à la cohomologie des spineurs purs à impulsion nulle.

- Les modèles de matrices supersymétriques

Les modèles de matrice SYM_d ont une invariance de jauge² héritée du modèle de Yang-Mills initial ainsi que 16 supercharges. Ces modèles décrivent la dynamique d'un ensemble de N Dp -brane parallèles au même point [24]. Nous mentionnons les modèles les plus intéressants.

La réduction à 0 dimension (tous les champs deviennent des matrices constantes) est le modèle IKKT [25], la réduction à une dimension (dépendant seulement du temps) donne le modèle de mécanique quantique BFSS [26], et finalement la réduction à deux dimensions ($d = 1 + 1$) donne le modèle DVV [27] des cordes matricielles (les coordonnées des cordes sont des matrices).

Dans le papier [28] avec I. Kostov, les fonctions de partition de ces différents modèles sont analysées. Partant de la fonction de partition pour les cordes matricielles de DVV, on montre comment obtenir celles des modèles BFSS et IKKT en faisant tendre vers zéro les "tailles" caractéristiques du modèle. Nous conjecturons que la fonction de partition du modèle DVV peut être calculée exactement en considérant la limite semi-classique (qui correspond au point fixe infra-rouge du modèle). Cette conjecture est basée sur la correspondance entre les configurations du modèle de matrice au point fixe infra-rouge ($g_{YM} \rightarrow 0$) et celles des états perturbatifs de cordes intervenant dans les calculs d'effets perturbatifs et non-perturbatifs analysés dans [29]. F. Sugino a prouvé cette conjecture, dans [30], en montrant que le modèle DVV peut être réécrit comme un modèle topologique ce qui justifie l'exactitude de l'approximation semi-classique.³

- La M2-brane et les U-dualités.

Avec F. Sugino, dans [32], nous avons dénombré les configurations de Membranes euclidiennes instantoniques enroulées sur un trois tore à volume fixé. Ce calcul est le premier calcul direct de ce facteur de comptage compatible avec les U-dualités (n'ayant pas de théorie fondamentale de la membrane, il n'est pas possible de calculer cette dégénérescence directement.) Nous avons pour cela étudié le modèle de matrices supersymétriques SYM_3 à trois dimensions nous avons montré que les auto-interactions de la membrane ne peuvent pas être ignorées⁴ ce qui se traduit par le fait que pour le modèle SYM_3 l'approximation semi-classique n'est pas exacte.

² Dans ce texte nous ne discutons que le cas du groupe de jauge $U(N)$, mais les modèles de matrices avec des groupes $SO(N)$ et $Sp(N)$ existent aussi.

³ Pour le modèle BFSS ceci a été montré dans [31].

⁴ C'est la raison pour laquelle l'approche de [33] ne donne pas un résultat correct. La procédure ad hoc utilisée dans ce papier revient à négliger les auto-interactions de la membrane qui pourtant jouent un rôle capitale dans la dynamique de la membrane.

4. Dualité entre cordes ouvertes et cordes fermées

La théorie des cordes contient des cordes ouvertes et fermées. Les cordes ouvertes donnent les théories de jauge, puisque chacune de leurs extrémités est chargée. Un diagramme à une boucle de corde ouverte (un anneau) peut être réinterprété comme un diagramme en arbre de corde fermée (le cylindre). Un fait remarquable est que le graviton est un état intermédiaire pour cette théorie initialement "purement" de jauge.

Sen a montré [34] qu'une configuration tachyonique instable (à partir d'une configuration des D-branes et anti-D-branes) pour les cordes ouvertes évolue vers un vide non tachyonique pour les cordes fermées ne contenant pas de degrés de liberté de cordes ouvertes. De nombreux tests de cette conjecture ont été faits dans le cadre de la théorie des champs de cordes. Dans cette approche le potentiel induit par la tachyon est calculé, et l'énergie du minimum du potentiel estimée [35,36,37].

Dans la publication [38], nous prenons un point de vue différent. Nous développons la théorie des cordes ouvertes autour de la configuration classique d'un instanton $SO(8)$. Toute l'énergie de l'instanton va dans la configuration d'une D1-brane et nous mettons en évidence des radiations décrites par des cordes hétérotiques (dans une configuration où la connexion de spin est identifiée avec certaines composantes du champ de jauge), en accord avec le calcul de K-théorie [39] de Witten dans [40].

5. Hypermultiplets de la supergravité $\mathcal{N} = 2$ en dimension quatre

Dans le papier, [41], nous avons examiné les corrections quantiques à la métrique des hypermultiplets universels.⁵ Nous avons montré que la correction à une boucle est physique et affecte la géométrie quaternionique-kaehler du modèle sigma des hypermultiplets universels (corrigeant le résultat de Strominger donné dans [42]), alors que les corrections d'ordre supérieur en boucles n'affectent pas la géométrie. Nous avons alors identifié la métrique corrigée avec la métrique quaternionique-Kähler trouvée par Calderbank et Pedersen [43]. Un fait remarquable est que cette métrique est complètement déterminée par une unique fonction (le prépotentiel), tout comme dans le cas de la métrique des multiplets vectoriels. Ce fait est généralisable au cas d'une métrique sans aucune symétrie [44].

Au delà des corrections perturbatives à la géométrie des hypermultiplets universels existent des corrections non perturbatives. Ces corrections non perturbatives jouent un rôle non trivial dans l'opération de symétrie miroir.

Dans le papier [45] nous avons analysé des amplitudes spéciales dans le secteur des hypermultiplets de la théorie de supergravité $\mathcal{N} = 2$, en utilisant le formalisme hybride de Berkovits. Une extension de ces calculs au calcul du prépotentiel déterminant la métrique des hypermultiplets est en cours.

⁵ C'est l'hypermultiplet de la supergravité $\mathcal{N} = 2$ contenant le dilaton. Dans le langage des théorie conformes $c = 9 \mathcal{N} = 2$, ce multiplet correspond aux champs primaires chiraux reliés à l'identité par le flot spectral.

6. Modification de la gravité à grande distance.

Les récentes mesures des caractéristiques cosmologiques de notre univers, en particulier le fait que notre univers est en expansion incite à chercher de nouveaux modèles pour décrire la gravitation à des échelles cosmologiques.

Dvali, Gabadadze & Porrati (DGP) [46] ont proposé un modèle où le graviton à quatre dimensions (qui régit la physique gravitationnelle aux échelles galactiques) est métastable et peut s'évaporer dans un espace ambiant non compact (le bulk). Les interactions gravitationnelles deviennent plus faibles à grandes échelles et les équations de Friedman d'évolution de l'univers sont modifiées. Il est alors possible de trouver des solutions d'univers en expansion sans avoir de constante cosmologique. Cette idée permet de dissocier le problème de la constante cosmologique de celui de l'expansion de l'univers observée aujourd'hui. Cette approche ne résout pas le problème de la constante cosmologique. C'est pourquoi il est important de comprendre comment cette idée peut-être réalisée en théorie des cordes.

Avec Antoniadis et Minasian [47] nous avons montré comment réaliser ce modèle en théorie des supercordes, en développant la théorie des cordes autour d'un espace de type Calabi-Yau non compact.⁶ Nous montrons que le modèle [46] peut être réalisé dans une théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$, ce qui permet de contrôler les corrections quantiques aux paramètres physiques qui définissent le modèle. Notre construction garantit la validité du modèle tout en lui donnant un cadre bien défini pour étudier les problèmes de couplages forts.

Dans cette construction la hiérarchie entre la masse de Planck du bulk et celle en dimension quatre (déterminant la constante gravitationnelle à quatre dimensions), ainsi que la demande que l'échelle infra-rouge (l'échelle à laquelle la loi de Newton devient celle de l'espace ambiant) soit de l'ordre de la taille de l'univers nécessitent l'introduction⁷ dans le spectre des cordes fermées d'un très grand nombre, de l'ordre de 10^{23} , de particules supplémentaires de masse nulle (les champs twistés). Dans le cas d'un orbifold (qui est un cas particulier singulier de variété de type Calabi-Yau) ces particules supplémentaires sont localisées sur la singularité de l'orbifold et ne peuvent pas se propager dans l'espace ambiant. Ceci aussi garantit que ce grand nombre de particules de masse nulle supplémentaires ne modifiera pas la force gravitationnelle entre deux objets massifs et ne sera pas en contradiction avec le principe d'équivalence.

Avec Emmanuel Kohlprath, dans [48], nous avons recherché des modèles de cordes ouvertes réalisant le mécanisme de DGP dans le secteur fermé tout en ayant un petit groupe de jauge dans le secteur des cordes ouvertes (proche du groupe de jauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ du modèle standard). Afin que le grand nombre de champs twistés du secteur fermé ne pollue pas

⁶ Travailler avec des fonds non compacts est délicat, car la notion d'action effective n'est pas bien définie. En fait pour la physique qui nous intéresse ici il suffit de calculer les modifications au potentiel Newtonien qui peuvent être déduites d'amplitudes de cordes sans passer par une action effective. Des résultats partiels (non publiés) ont été obtenus avec Emmanuel Kohlprath, en examinant la diffusion de D0-brane dans une configuration d'orientifold.

⁷ Nous rappelons que la différence entre une théorie des champs (en $0+1$ dimensions) et une théorie des cordes (en $1+1$ dimensions) est la présence d'états supplémentaires, les champs twistés, pour cette dernière théorie aux singularités.

le spectre du secteur ouvert, nous avons construit une nouvelle famille infinie d'orientifolds de la théorie de type IIB. Nous avons aussi montré que le rang du groupe de jauge est toujours de l'ordre du nombre de champs twistés. Notre résultat montre qu'il n'est pas possible de modifier la gravité à des échelles cosmologiques selon le scénario de DGP sans augmenter le spectre du secteur de jauge.

La conclusion de cette analyse est que les interactions de jauge du modèle standard doivent être réalisées par un mécanisme différent indépendant du secteur fermé comme la théorie des petites cordes (little string theory). La présence d'un grand nombre de particules twistées dans le secteur fermé est suggestive d'une géométrie duale sous-jacente, peut-être en termes de NS5-branes.

Chapitre II

THÉORIE M ET THÉORIE DES CORDES

Dans ce chapitre nous passons en revue les propriétés principales de la théorie des cordes perturbative. Nous décrivons ses symétries de dualité et ses supersymétries, ainsi que son régime de couplage fort donné par la théorie M.

7. Amplitudes et action effective des cordes

Dans cette section nous introduisons la notion d'action effective de théorie comme l'action à basse énergie reproduisant les différentes amplitudes calculées en théorie des cordes. Puis nous discuterons les symétries de cette action effective irréductible à une particule (rPI).

La théorie des cordes décrit la propagation et les interactions d'une corde ouverte ou fermée dans l'espace-temps. Cette corde est caractérisée par sa tension $T_F = 1/(2\pi\alpha')$, et sur la surface d'univers obtenue par l'évolution de cette corde vit une théorie des champs à deux dimensions dont la partie bosonique de l'action est donnée par [49]

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \left[\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}(X) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} + \epsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} + \alpha' \phi R_{(2)} \right]. \quad (7.1)$$

Σ est une surface à deux dimensions sans bord pour le cas des cordes fermées (nous ne nous intéressons qu'à ce cas dans la suite) ou avec bords dans le cas des cordes ouvertes. Les quantités $X(\sigma^{\alpha})$ sont les coordonnées de plongement de la surface d'univers de la corde dans l'espace-temps. L'action présentée ci-dessus fait apparaître les constantes de couplages $g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, ϕ . Les contraintes d'invariance conforme de cette action impliquent l'annulation des fonctions β pour chacune de ces constantes de couplages, qui sont les équations du mouvement de la métrique $g_{\mu\nu}$, du champ antisymétrique $B_{\mu\nu}$ et du dilaton ϕ . Ce fait implique que la théorie des cordes est une théorie de la gravitation. Une version supersymétrique du modèle présenté dans l'action (7.1), donne lieu à une théorie de supergravité.

Dans le cas supersymétrique l'absence d'anomalie conforme impose que la dimension de l'espace-temps cible est $D = 10$ [49]. Ce qui implique qu'il y ait dix champs x^{μ} et dix spineurs ψ^{μ} .

Dans ce cas la quantification du modèle (7.1) donne lieu à un spectre α' *masse*² $\in \mathbb{N}$. Pour *mass*² = 0 nous avons les champs des théories de supergravité.

Dans l'action (7.1), le paramètre α' est l'équivalent pour la corde du paramètre \hbar de la mécanique quantique, et les corrections en boucles du modèle sigma (7.1) vont induire des corrections en puissance de α' aux fonctions β des champs de fond du modèle sigma, et donc des corrections en α' aux équations du mouvement de ces champs. Comme le paramètre α' a

la dimension (*longueur*)², les corrections en α' sont des corrections en dérivées aux équations du mouvement de la relativité générale (ou à la supersymétrie).

Ces équations du mouvement corrigées peuvent être déduites à partir de la variation d'une action effective en dimension dix dont la structure schématique est donnée par

$$S_{eff} = \frac{1}{(\alpha')^4} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (R_{(10)} + H^2 + (\nabla\phi)^2 + (\alpha')^3 [R^4 + R^3 H^2 + R^2 (\nabla H)^2]) . \quad (7.2)$$

Dans cette action (que nous précisons plus bas) $R_{(10)}$ est le scalaire de Ricci pour la métrique $g_{\mu\nu}$ dont la variation donne les équations du mouvement de la métrique de l'espace-temps dix dimensionnel où évolue la corde. Nous avons indiqué les premières corrections quantiques en dimension dix qui font apparaître des couplages de dimension (*longueur*)⁻⁸ sous la forme de la puissance quatrième du tenseur de Riemann.

Un aspect très important de la théorie des cordes est qu'il y a une autre façon de comprendre l'origine de cette action qui utilise le langage des amplitudes de diffusion et leur matrice S de diffusion associée. L'action effective de l'action (7.2) est alors vue comme une action de théorie des champs qui permet de reproduire les amplitudes A_Σ [50] décrites ci-dessous.

On peut considérer les fluctuations d'une corde dans une géométrie classique déterminée par une métrique $g_{\mu\nu}^{(0)}$, un champ $B_{\mu\nu}^{(0)}$ et aussi d'autres champs du spectre de la théorie des cordes, et calculer l'intégrale fonctionnelle

$$A_\Sigma = \int [Dh][DX][D\phi][Db, c, \beta, \gamma] V(g, B, \phi) \cdots V(g, B, \phi) e^{-S_\Sigma[X, \dots]} \quad (7.3)$$

l'action du modèle sigma de l'équation (7.1) est donnée dans la jauge superconforme par

$$S = \int d^2z \left[\frac{1}{2\pi\alpha'} (\partial x \cdot \bar{\partial} x - \psi \bar{\partial} \psi - \bar{\psi} \partial \psi) + \frac{1}{\pi} (\beta \bar{\partial} \gamma + b \bar{\partial} c) \right] \quad (7.4)$$

Les OPEs des différents champs conformes ainsi que leur poids conforme sont indiqués dans la table suivante

Champs	Poids Conf.	OPE
$x^m(z)$	0	$x^m(z)x^n(w) \sim -\eta^{mn} \ln z-w ^2$
$\psi^m(z)$	1/2	$\psi^m(z)\psi^n(w) \sim \frac{\eta^{mn}}{z-w}$
$(b(z), c(z))$	(2, -1)	$b(z)c(w) \sim -1/(z-w)$
$(\beta(z), \gamma(z))$	(3/2, -1/2)	$\beta(z)\gamma(w) \sim -1/(z-w)$

Table 1 : Champs du formalisme RNS avec $n=1$ supersymétrie sur la surface d'univers. x^m et ψ^m , $m=0, \dots, 9$ sont les champs de matière et contribuent à $c^{X, \psi} = 15$ à la charge centrale du système, (b, c) et (β, γ) forment le système de fantômes pour la corde supersymétrique et contribuent à $c^{ghost} = -26 + 11 = -15$ à la charge centrale.

L'amplitude est définie par une intégration sur la métrique de Polyakov $h_{\alpha\beta}$ du modèle sigma qui donne après fixation des symétries de reparamétrisation une intégration sur les déformations de la surface de Riemann où est définie l'amplitude (sphère, tore, bi-tore etc pour les cordes fermées). Ces paramètres (ou encore modules) de la surface de Riemann sont l'équivalent des paramètres de Schwinger utilisés pour écrire les amplitudes en boucles en théorie des champs. Ici nous avons des paramètres complexes car la géométrie est celle d'une surface.

Les amplitudes ne présentent pas de divergences ultra-violettes parce que la région d'intégration où ces divergences apparaissent en théorie des champs est exclue par l'invariance conforme. La tension de la corde est le paramètre de coupure ultra-violet.

La théorie (ponctuelle) des champs de la gravitation est obtenue en prenant la tension infinie ($\alpha' \rightarrow 0$) décrite par l'action (7.2). Nous construisons alors une action effective à partir des éléments de matrice S sur la couche de masse de la théorie des cordes.

A cause du couplage $\int_{\Sigma} \phi R_{(2)}$ dans l'action (7.1), chaque amplitude A_{Σ} est multipliée par un facteur de $\exp(-\phi \int_{\Sigma} R_{(2)}) = (g_s)^{\chi} = (g_s)^{2(g-1)}$ où $g_s = \exp(\phi)$ est la constante de couplage des cordes à la puissance de la caractéristique d'Euler $\chi = 2(g-1)$ de la surface de Riemann décrite par l'évolution de la cordes. L'action effective donnée dans (7.2) est proportionnelle à $1/g_s^2$ et donc vient des amplitudes à l'ordre des arbres (la sphère), mais en général les termes de dimensions supérieures à deux en dérivées reçoivent des contributions de différents ordres en boucles et sont donc multipliés par des fonctions non triviales de la constante de couplage, par exemple

$$S = \frac{1}{(\alpha')^4} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} R_{(10)} + \sum_{n \geq 3} (\alpha')^n f^{(n)}(\phi) R^{n+1} \right] \quad (7.5)$$

dans la section 14 nous indiquerons une série de théorèmes de non-renormalisation déduits de l'analyse de la relation entre cette action effective et la dynamique de la théorie M en dimension onze. Ces théorèmes de non-renormalisation donneront des contraintes très fortes sur la dépendance de ces fonctions en termes de la constante de couplage $g_s = \exp(\phi)$, comme nous le verrons dans le chapitre IV.

Les calculs d'amplitude en théorie des cordes sont faits sur la couche de masse, et l'action effective ainsi déduite est ambiguë à cause des contributions qui s'annulent en utilisant les équations du mouvement.⁸ Dans les applications concrètes nous sommes intéressés aux conséquences de la théorie en quatre dimensions. Pour cela nous avons deux options : 1) réduire à quatre dimensions l'action effective en dimension dix considérée valable hors de la couche de masse et pour des configurations d'espace-temps plus générales, 2) compactifier directement les amplitudes de cordes et prendre la limite de théorie des champs dans ces amplitudes.

⁸ La théorie des champs de corde donne une version hors de la couche de masse (off-shell) mais au prix d'un formalisme inextricable.

La première procédure est ambiguë et sera utilisée dans la suite uniquement à titre illustratif. Un danger dans l'utilisation de l'action effective en dimension dix pour déduire la structure de l'action effective en dimension inférieure est que les coefficients des opérateurs dépendent de la dimension et peuvent s'annuler en $D = 10$. Ceci a des implications importantes sur la structure des théorèmes de non-renormalisation qui sont sensibles à ces coefficients dépendant de la dimension. La seconde procédure est bien définie quoique difficile à mettre en œuvre en pratique à cause des possibles divergences infra-rouges des amplitudes qui apparaissent lors de la limite de théorie des champs.

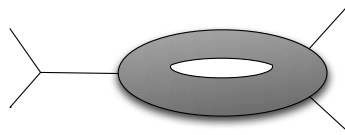


Fig. 1 Possible contribution donnant lieu à une divergence IR due à la propagation des états de masse nulle lors de la limite de théorie des champs d'une amplitude de corde.

La construction de l'action effective de théorie des champs⁹ est délicate à considérer à cause de la possibilité de pôles infra-rouges dus à la propagation d'états de masse nuls (voir la figure 1). Dans le cas d'une théorie avec le nombre maximal de supersymétries (comme la théorie en dimension dix non compactifiée) les résidus des ces pôles sont nuls et de tels phénomènes n'arrivent pas.¹⁰ Lorsque la théorie est compactifiée et que la supersymétrie est réduite ce genre de singularité est à l'origine des corrections de seuil aux constantes de couplages ou à la masse de Planck calculées par exemple dans les références [41,47]. Nous reviendrons sur ce point délicat à la fin de ce mémoire lorsque la limite de la théorie de supergravité $N = 8$ sera considérée.

Avant de passer aux symétries de l'action effective de la théorie des cordes nous faisons quelques remarques générales sur la raison d'être d'une théorie des champs de la gravitation.

La théorie des champs de la gravitation peut être analysée en extrayant les vertex à trois, quatre, et les interactions à multiples gravitons en linéarisant l'action de (super-)gravité. Le problème avec une telle approche est que le nombre de diagrammes de Feynman à considérer à chaque ordre en perturbation croît énormément et il devient rapidement impossible de faire une liste des diagrammes. Même à l'ordre des arbres les amplitudes à plusieurs gravitons font intervenir un grand nombre de diagrammes à cause de la multiplicité des interactions induite par la structure non-linéaire de la gravité. La théorie des champs de la gravité pure n'est pas finie dans l'ultra-violet (elle est divergente à une boucle si elle est couplée à la matière et elle est divergente à deux boucles pour la gravité pure) [51]. La théorie des cordes donne une théorie

⁹ La théorie des champs effective, extraite des éléments de matrice de la théorie des cordes, est horriblement compliquée avec une infinité d'interactions de dimension supérieure et des termes non locaux décrivant les processus création de seuil.

¹⁰ Comme c'est une conséquence de la supersymétrie, cette propriété n'est apparente qu'après sommation sur les structures de spins dans le formalisme RNS. Cette annulation est plus facile à obtenir dans le formalisme des spineurs purs de Berkovits.

de la gravitation régularisée dans l'ultraviolet tout en préservant les symétries de la théorie. En fait la théorie des cordes donne plus qu'une régularisation ultra-violette, elle organise la série perturbative gravitationnelle. A chaque ordre en perturbation les diagrammes de Feynman des amplitudes gravitationnelles ont un très mauvais comportement à haute énergie. Mais on peut montrer, à l'ordre des arbres en utilisant des techniques twistorielles [52] ou en boucle comme nous le décrivons dans la suite, que de nombreuses compensations ont lieu et les amplitudes ont un meilleur comportement ultra-violet à grande énergie. En fait même dans le cas des théories de supergravité pour lesquelles le comportement ultra-violet des diagrammes de Feynman est amélioré par la supersymétrie, il est attendu que de nombreuses compensations entre diagrammes aient lieu. L'origine de ces compensations n'est pas immédiate dans le langage de la théorie des champs, mais nous montrons dans la suite comment les dualités et la théorie des cordes permettent d'accéder à ces résultats.

Dans la suite nous décrivons les propriétés de l'action effective de la théorie des cordes. Ces symétries joueront un rôle capital pour contraindre le comportement à haute énergie des amplitudes de supergravité, comme nous le verrons dans le chapitre IV.

8. Supersymétries

L'action effective telle que définie ci-dessus contient donc l'essentiel des informations nécessaires pour décrire la dynamique de la théorie des cordes. Elle est aussi invariante sous les symétries laissant invariante la théorie des cordes. En dimension 10, il existe deux types de théorie des cordes fermées : celle de type IIA et celle de type IIB. Ces deux théories sont invariantes sous les transformations locales de supersymétrie étendue $\mathcal{N} = 2$ qui a deux réalisations dépendant de la chiralité relative des générateurs de symétrie. Nous avons une théorie sans chiralité dite de type IIA et une théorie chirale dite de type IIB.

Ces théories sont invariantes sous les transformations locales de supersymétrie sur la couche de masse (on-shell) ce qui implique que la variation des termes de dimension supérieure dans l'action effective sous les transformations classiques de la supersymétrie donne un résultat proportionnel aux équations du mouvement. L'invariance de l'action effective des cordes sous la supersymétrie locale est obtenue par le principe de Noether selon la procédure suivante [4,53,54]. On organise l'action effective et les transformations de supersymétrie en puissance de α' selon

$$\begin{aligned} S &= S^{(0)} + (\alpha')^3 S^{(3)} + (\alpha')^5 S^{(5)} + (\alpha')^6 S^{(6)} + \dots \\ \delta_\epsilon &= \delta_\epsilon^{(0)} + (\alpha')^3 \delta_\epsilon^{(3)} + (\alpha')^5 \delta_\epsilon^{(5)} + (\alpha')^6 \delta_\epsilon^{(6)} + \dots \end{aligned} \quad (8.1)$$

et l'invariance de l'action effective $\delta_\epsilon S = 0$ donne les équations suivantes

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\epsilon^{(0)} S^{(0)} \\ \delta_\epsilon^{(0)} S^{(3)} &= -\delta_\epsilon^{(3)} S^{(0)} \\ \delta_\epsilon^{(0)} S^{(5)} &= -\delta_\epsilon^{(5)} S^{(0)} \\ \delta_\epsilon^{(0)} S^{(6)} + \delta_\epsilon^{(3)} S^{(3)} &= -\delta_\epsilon^{(6)} S^{(0)} . \end{aligned} \quad (8.2)$$

La première équation donne l'invariance des termes à deux dérivées (les termes cinétiques) sous les transformations classiques de supersymétrie données par [55] pour la théorie de type IIA et par [56,57,58] pour la théorie de type IIB.

La seconde équation indique que la variation des termes de dimension huit n'est pas zéro mais donne une variation proportionnelle aux équations du mouvement des champs. Cette variation est compensée par une déformation des transformations de supersymétrie à l'ordre en $(\alpha')^3$ selon le principe de Noether [4]. A chaque ordre en dérivée il peut exister plusieurs invariants indépendants sous la supersymétrie et une classification de ces divers invariants est difficile. Dans la suite nous mentionnerons le cas des opérateurs à l'ordre en $(\alpha')^7$ où plusieurs structures indépendantes sous la supersymétrie locale peuvent être exhibées.

Un phénomène nouveau apparaît à l'ordre $(\alpha')^6$ car la variation de l'action fait intervenir les modifications à l'ordre en $(\alpha')^3$ de la transformation de supersymétrie et de l'action effective. Ceci est générique à partir de cet ordre en α' , nous reviendrons sur ce point plus bas lorsque nous discuterons la structure des couplages dans la théorie de type IIB et leur origine en théorie M.

9. Dualité S entre le couplage faible et le couplage fort

Le cas de la théorie de type IIB est spécial car en dimension dix la théorie possède une symétrie non-perturbative dite de S-dualité donnée par l'action du groupe $Sl(2, \mathbb{Z})$, hérité du groupe de R-symétrie de la théorie de supergravité associée [56,58], agissant sur la constante de couplage complexifiée $\tau = C^{(0)} + i/g_s$. Cette symétrie, en inversant la constante de couplage, échange le régime de couplage faible avec celui de fort couplage. Par exemple, puisque la métrique est inerte sous les transformations de S-dualité [56,58] les fonctions $f^{(n)}(\phi)$ dans l'action effective (7.5) doivent être des formes modulaires

$$f^{(n)}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = f^{(n)}(\tau); \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{Z}). \quad (9.1)$$

L'action effective (7.5) est invariante sous les transformations de supersymétrie (8.2), seulement si les couplages $f^{(n)}(\tau)$ satisfont des contraintes non-triviales [53,54,59,12]

$$\begin{aligned} 4\tau_2^2 \partial_\tau \bar{\partial}_{\bar{\tau}} f^{(3)}(\tau) &= \frac{3}{4} f^{(3)}(\tau) \\ 4\tau_2^2 \partial_\tau \bar{\partial}_{\bar{\tau}} f^{(5)}(\tau) &= \frac{15}{4} f^{(3)}(\tau) \\ 4\tau_2^2 \partial_\tau \bar{\partial}_{\bar{\tau}} f^{(6)}(\tau) &= 12 f^{(6)}(\tau) - 6(f^{(3)})^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

L'invariance sous les transformations (9.1) et la condition que dans la limite de couplage faible $\tau_2 = \Im m(\tau) \rightarrow \infty$ ces fonctions ne doivent pas être plus singulières que la contribution à

l'ordre des arbres $f^{(n)}(\tau) \sim \tau_2^{n/2}$ permettent de les déterminer complètement (même si une formule fermée est parfois difficile à obtenir).

Une question importante est celle du nombre d'invariants de supersymétrie indépendants à chaque ordre en α' . Il est fort probable qu'aux ordres en $(\alpha')^3$ et $(\alpha')^4$ il n'y ait qu'un seul invariant de supersymétrie mais aux ordres suivants plusieurs invariants apparaissent.

Un cas important est le suivant. A partir de l'ordre en $(\alpha')^9$ les amplitudes à quatre gravitons donnent lieu à deux structures cinématiques indépendantes qui auront des couplages différents [16]

$$S^{(9)} = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[f^{(I)}(\tau) (\sigma_2)^3 R^4 + f^{(II)}(\tau) (\sigma_3)^2 R^4 \right] \quad (9.3)$$

où nous avons introduit les invariants cinématiques $\sigma_2 = s^2 + t^2 + u^2$ et $\sigma_3 = s^3 + t^3 + u^3$ exprimés en termes des variables de Mandelstam $s = (k_1 + k_2)^2$, $t = (k_1 + k_3)^2$ et $u = (k_1 + k_4)^2$. Les couplages $f^{(I)}$ et $f^{(II)}$ satisfont des contraintes données par des équations différentielles avec une source quadratique en couplages aux ordres inférieurs en α' selon une structure compatible avec l'invariance de l'action effective sous les transformations sur la couche de masse (8.2).

Au même ordre en α' existe la contribution $(\alpha')^9 |G|^{12} R^4$ qui décrit le couplage entre quatre gravitons et douze trois formes complexes $G = (F_{RR} + \tau H_{NS})/\sqrt{\tau_2}$. Cette amplitude fait partie de la classe spéciale d'interactions $|G|^{4(g-1)} R^4$ considérées par Berkovits et Vafa [60] dont le couplage est donné par une série d'Eisenstein de poids $1/2 + g$

$$Z_{\frac{1}{2}+g}(\tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\tau_2^{\frac{1}{2}+g}}{|m + n\tau|^{1+2g}} = 2\zeta(2g+1) \tau_2^{\frac{1}{2}+g} + \sqrt{4\pi} \zeta(2g) \frac{\Gamma(g-1/2)}{\Gamma(g+1/2)} \tau_2^{\frac{1}{2}-g} + n.p. \quad (9.4)$$

Ces séries d'Eisenstein, qui satisfont à l'équation différentielle

$$4\tau_2^2 \partial \bar{\partial} Z_{\frac{1}{2}+g} = \frac{(g+1)(g-1)}{4} Z_{\frac{1}{2}+g} \quad (9.5)$$

donnent deux contributions perturbatives : ordre des arbres et g boucles.

Nous expliquerons dans la suite que l'opérateur $D^{12} R^4$ ne reçoit pas de corrections perturbatives au delà de 6 boucles, et que la contribution à 6 boucles est non nulle, ce qui montre que cet opérateur ne peut pas être dans le même invariant de supersymétrie que $|G|^{12} R^4$ qui reçoit au plus une contribution à 4 boucles.

10. Couplage fort & théorie M

Nous venons de décrire les propriétés principales de l'action effective des cordes en dimension 10. L'action effective est une somme infinie d'opérateurs aux dimensions croissantes induits par les états massifs des cordes, et les couplages sont des fonctions non triviales de la constante de couplage.

Witten [24] a remarqué que dans un choix d'unité correct la limite de couplage fort de la théorie de supergravité de type IIA (l'action à deux dérivées dans (7.2)) est donnée par la supergravité en dimension onze, avec la relation suivante entre les paramètres de corde et ceux de la supergravité

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= G_{MN} dx^M dx^N = \frac{\ell_p^3}{l_s^2 R_{11}} g^{IIA}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R_{11}^2 (dx^{11} - C_\mu dx^\mu)^2 \\ R_{11}^3 &= g_s^2 \ell_P^3 \\ \ell_P &= g_s^{\frac{1}{3}} \sqrt{\alpha'} . \end{aligned} \quad (10.1)$$

Dans cette correspondance la constante de couplage devient le paramètre géométrique R_{11} reliant la dimension dix et onze. La limite de couplage fort correspond à $R_{11} \rightarrow \infty$ et la théorie devient onze dimensionnelle. Dans cette limite les états massifs de la théorie des cordes découplent, les D0-branes deviennent de masse nulle formant les degrés de liberté de la supergravité en dimension onze.

Bien que les états massifs de la corde soient supprimés dans la limite de couplage fort, certaines corrections en α' à l'action effective subsistent en dimension onze [61,8], de sorte que la limite de couplage fort de (7.2) est

$$S = \frac{1}{\ell_P^9} \int d^{11}x \sqrt{-G} \left[R_{(11)} + \sum_{n \neq 0} c_n \ell_P^{6n+6} R^{3n+4} \right] \quad (10.2)$$

où le coefficient c_n est celui de la contribution à $n + 1$ -boucles du couplage $f^{(3n+4)}(\phi) = \dots + c_n g_s^{2n} + \dots$. La supersymétrisation des termes à deux dérivées donne lieu à la théorie de supergravité construite par Cremmer, Julia et Scherk [2]. Réciproquement, dans le formalisme de superespace décrivant la supergravité en dimension onze, on peut montrer [62] que si les contraintes sur les torsions ne sont pas modifiées seulement la théorie de supergravité est obtenue. L'inclusion des termes d'ordre supérieur en dérivées nécessite une modification de la géométrie du superespace [4]. Les corrections dans (10.2) sont induites soit par la M2-brane (de tension $T_{M2} \sim 1/\ell_P^3$) ou la M5-brane (de tension $T_{M5} \sim 1/\ell_P^6$). Le rôle de la M2-brane et de la M5-brane dans l'origine de ces corrections n'est pas clarifié sauf pour les termes de dimension huit en $C_3 \wedge R^4$ nécessaires pour l'annulation des anomalies de la M5-brane [63].

Nous avons ici supposé que les relations (10.1), sont toujours valables à n'importe quel ordre en dérivées ou en les champs. Ceci n'est absolument pas garanti et le dictionnaire entre les paramètres de cordes et ceux de la théorie M doit sûrement recevoir des corrections

d'ordre supérieur (de telles corrections préservent la masse des états 1/2-BPS et donc préservent le fait que les D0-brane sont des excitations de Kaluza-Klein de la métrique à onze dimensions). Dans la suite nous appliquerons cette correspondance au cas de l'action effective à quatre points où $R^{3n+4} \sim \partial^{6n} R^4$, qui a plus de chance d'être protégée.

Bien que dans la limite $R_{11} \rightarrow \infty$ les états massifs des cordes sont supprimés, leur effets seront réobtenus lorsque nous considérerons la réduction de Kaluza-Klein des diagrammes en boucles en dimensions onze dans le chapitre IV.

Les relations entre les paramètres de la théorie M et les cordes sont

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = R_{10}R_{11} &= \exp\left(\frac{1}{3}\phi^B\right) r_B^{-\frac{4}{3}}; & r_A &= \frac{1}{r_B} = R_{10}\sqrt{R_{11}} \\ \Omega_1 = C_{10} &= C^{(0)}; & \Omega_2 &= \frac{R_{10}}{R_{11}} = \exp(-\phi^B) = r_A \exp(-\phi^A). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Cette identification donne que la constante de couplage complexifiée τ est la structure complexe Ω du 2-tore de compactification et que la symétrie $Sl(2, \mathbb{Z})$ de la théorie de type IIB a pour origine la symétrie géométrique du tore de compactification. Dans le cas d'une compactification de la théorie M sur un tore les fonctions $f_n(\phi)$ sont obtenues après réduction de la théorie M sur un tore de volume nul mais à structure complexe constante [64,65,66]. Ces relations joueront un rôle important dans le chapitre suivant lorsque nous déduirons la structure de l'action effective de type IIB à partir de la théorie M.

Chapitre III

AMPLITUDES DES CORDES À L'ORDRE DES ARBRES ET EN BOUCLES

Dans ce chapitre nous passons en revue la structure de l'amplitude à quatre gravitons à l'ordre des arbres et à une et deux boucles en théorie des cordes fermées de type II en dimension dix. Les résultats décrits dans ce chapitre nous serviront de base de comparaison avec ce qui est obtenu en calculant des diagrammes en boucles en théorie M. Nous montrerons dans le chapitre suivant comment la structure analytique des amplitudes en boucles de la théorie des cordes peut-être reproduite à partir de la théorie M.

11. Amplitudes à l'ordre des arbres

$$A_4^{(2)} = \kappa_{10}^2 \hat{R}^4 e^{-2\phi} T(\alpha' s, \alpha' t, \alpha' u), \quad (\text{II.1})$$

où la constante de Newton en dimension dix est donnée par $2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7 \alpha'^4$. Le préfacteur en \hat{R}^4 correspond à quatre puissances linéarisées du tenseur de Riemann contractées avec le tenseur $t_8 t_8$.¹¹ La fonction $T(s, t, u)$ est donnée par

$$\begin{aligned} T &= \frac{64}{\alpha'^3 stu} \frac{\Gamma(1 - \frac{\alpha'}{4}s) \Gamma(1 - \frac{\alpha'}{4}t) \Gamma(1 - \frac{\alpha'}{4}u)}{\Gamma(1 + \frac{\alpha'}{4}s) \Gamma(1 + \frac{\alpha'}{4}t) \Gamma(1 + \frac{\alpha'}{4}u)} \\ &= \frac{64}{\alpha'^3 stu} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\zeta(2n+1)}{2n+1} \frac{\alpha'^{2n+1}}{4^{2n+1}} (s^{2n+1} + t^{2n+1} + u^{2n+1}) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Si on introduit les variables

$$\sigma_n = \left(\frac{\alpha'}{4} \right)^n (s^n + t^n + u^n) \quad (\text{II.3})$$

¹¹ La structure du facteur en R^4 qui apparaît dans ces formules est la linéarisation du $t_8 t_8 R^4$ donnée par

$$t_8^{\mu_1 \dots \mu_8} t_8^{\nu_1 \dots \nu_8} \prod_{i=1}^4 \zeta_{\mu_{2i-1} \nu_{2i-1}}^{(i)} k_{\mu_{2i}}^{(i)} k_{\nu_{2i}}$$

avec le tenseur t_8 donné dans les références [49] et tel que

$$\begin{aligned} t_8^{\mu_1 \dots \mu_8} F_{\mu_1 \mu_2}^1 \dots F_{\mu_7 \mu_8}^4 &= 8\text{tr}(F^1 F^2 F^3 F^4) + 8\text{tr}(F^1 F^4 F^2 F^3) + 8\text{tr}(F^1 F^3 F^4 F^2) \\ &\quad - 2\text{tr}(F^1 F^2)\text{tr}(F^3 F^4) - 2\text{tr}(F^1 F^3)\text{tr}(F^2 F^4) - 2\text{tr}(F^1 F^4)\text{tr}(F^2 F^3) \end{aligned}$$

il est facile de montrer qu'à tout ordre en n ces grandeurs sont des polynômes en σ_2 et σ_3 si la condition de couche de masse $s + t + u = 0$ est satisfaite. La formule explicite est

$$\sigma_n = n \sum_{2p+3q=n} \frac{(p+q-1)!}{p!q!} \left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^p \left(\frac{\sigma_3}{3}\right)^q. \quad (\text{II.4})$$

Nous voyons donc que sur la couche de masse un terme d'ordre $D^{2n}R^4 = \sigma_n R^4$ se décompose sur autant de tenseurs $\sigma_2^p \sigma_3^q R^4$ que la décomposition $n = 2p + 3q$ le permet donnant lieu à plusieurs structures tensorielles avec des couplages différents.

Avec cette relation nous pouvons réécrire l'amplitude à l'ordre des arbres selon

$$T = \frac{3}{\sigma_3} + A(\sigma_2, \sigma_3), \quad (\text{II.5})$$

avec

$$\begin{aligned} A(\sigma_2, \sigma_3) &= 2\zeta(3) + \zeta(5)\sigma_2 + \frac{2}{3}\zeta(3)^2\sigma_3 + \frac{1}{2}\zeta(7)\sigma_2^2 + \frac{2}{3}\zeta(3)\zeta(5)\sigma_2\sigma_3 \\ &+ \frac{1}{4}\zeta(9)\sigma_2^3 + \frac{2}{27}(2\zeta(3)^3 + \zeta(9))\sigma_3^2 + \frac{1}{6}(2\zeta(3)\zeta(7) + \zeta(5)^2)\sigma_2^2\sigma_3 \\ &+ \frac{1}{8}\zeta(11)\sigma_2^4 + \frac{1}{9}(2\zeta(3)^2\zeta(5) + \zeta(11))\sigma_2\sigma_3^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

C'est à l'ordre en $D^{12}R^4$ qu'apparaissent pour la première fois deux structures tensorielles différentes, avec des coefficients différents

$$\begin{aligned} I_{D^{12}R^4}^{(a)} &= \frac{1}{g_s^2} \frac{\zeta(9)}{4} \sigma_2^3 R^4 \\ I_{D^{12}R^4}^{(b)} &= \frac{1}{g_s^2} \frac{2}{27} (2\zeta(3)^3 + \zeta(9)) \sigma_3^2 R^4 \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Au même ordre en dérivées l'action effective de la théorie de type IIB en dimension dix contient l'interaction en $|G|^{12}R^4$ avec comme couplage [60]

$$\tau_2^{-\frac{5}{2}} Z_{\frac{9}{2}} |G|^{12} R^4 = \left(\frac{1}{g_s^2} 2\zeta(9) + \frac{64}{35}\zeta(8)g_s^6 + n.p. \right) |G|^{12} R^4. \quad (\text{II.8})$$

Ce couplage qui ne reçoit de contribution qu'à l'ordre des arbres, à quatre boucles et des contributions non perturbatives, est exact [60]. Nous voyons déjà que la dépendance en les fonctions zêta de ce couplage et des termes en $D^{12}R^4$ n'est pas la même, ce qui est un premier indice que ces objets ne font pas partie du même invariant de supersymétrie. Ceci sera confirmé lorsque nous montrerons que les couplages en $D^{12}R^4$ reçoivent des corrections perturbatives jusqu'à six boucles.

12. Amplitude à l'ordre d'une boucle

Dans cette section nous discutons des aspects de l'amplitude à quatre gravitons en théorie des cordes de type II qui nous seront nécessaires dans la suite.

- Structure générale

L'amplitude à quatre gravitons et à une boucle donnée dans les livres [49] s'écrit sous la forme d'une intégrale sur le domaine fondamental du tore

$$I = \hat{R}^4 \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} F(\tau, \bar{\tau}) \quad (\text{I2.1})$$

avec $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ et $d^2\tau \equiv d\tau_1 d\tau_2 = d\tau d\bar{\tau}/2$, et où \mathcal{F} dénote un domaine fondamental de $Sl(2, \mathbb{Z})$,

$$\mathcal{F} = \{|\tau_1| \leq \frac{1}{2}, |\tau|^2 \geq 1\}. \quad (\text{I2.2})$$

La partie dynamique de (I2.1) est donnée par une intégrale sur la position des opérateurs de vertex $\nu^{(i)} = \nu_1^{(i)} + i\nu_2^{(i)}$ selon

$$F(\tau, \bar{\tau}) = \int_{\mathcal{T}} \prod_{i=1}^3 \frac{d^2\nu^{(i)}}{\tau_2} e^{\mathcal{D}} \quad (\text{I2.3})$$

où $d^2\nu^{(i)} \equiv d\nu_1^{(i)} d\nu_2^{(i)}$, $\nu^{(4)} = \tau$, et le domaine \mathcal{T} est défini par

$$\mathcal{T} = \{-\frac{1}{2} \leq \nu_1 < \frac{1}{2}, 0 \leq \nu_2 < \tau_2\} \quad (\text{I2.4})$$

et enfin

$$\mathcal{D} = \alpha' s (\mathcal{P}_{12} + \mathcal{P}_{34}) + \alpha' t (\mathcal{P}_{14} + \mathcal{P}_{23}) + \alpha' u (\mathcal{P}_{13} + \mathcal{P}_{24}). \quad (\text{I2.5})$$

où $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}(\nu^{(i)} - \nu^{(j)}|\tau)$ est le propagateur sur le tore entre les points $\nu^{(i)}$ et $\nu^{(j)}$ sur le tore. Le propagateur à deux dimensions avec la périodicité du tore est donné par

$$\mathcal{P}(\nu|\tau) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \ln |\nu + m + n\tau| - \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \ln |m + n\tau| \right) + \frac{\pi\nu_2^2}{2\tau_2}. \quad (\text{I2.6})$$

Le dernier terme de cette expression est le mode zéro du Laplacien. Cette expression peut-être réécrite en utilisant la fonction thêta de Jacobi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu|\tau) &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\theta_1(\nu|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)} \right|^2 + \frac{\pi\nu_2^2}{2\tau_2} \\ &= \frac{\pi\nu_2^2}{2\tau_2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \right|^2 - \sum_{m \geq 1} \left(\frac{q^m}{1-q^m} \frac{\sin^2(m\pi\nu)}{m} + c.c. \right), \end{aligned} \quad (\text{I2.7})$$

où $q = \exp(2i\pi\tau)$.

Pour les considérations qui vont suivre il est utile d'utiliser la représentation obtenue par transformation de Fourier sur la variable ν , faisant apparaître la structure du propagateur en terme du moment discret sur le tore $\mathbf{p} = m + n\tau$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu|\tau) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\tau_2}{|m\tau + n|^2} \exp \left[2\pi i m \left(\nu_1 - \tau_1 \frac{\nu_2}{\tau_2} \right) - 2\pi i n \frac{\nu_2}{\tau_2} \right] + C(\tau, \bar{\tau}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\tau_2}{|m\tau + n|^2} \exp \left[\frac{\pi}{\tau_2} (\bar{\nu}(m\tau + n) - \nu(m\bar{\tau} + n)) \right] + C(\tau, \bar{\tau}). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Le mode zéro de cette expression est donné par

$$C(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{2} \ln \left| (2\pi)^{1/2} \eta(\tau) \right|^2, \quad (12.9)$$

avec $\eta(\tau)$ la fonction de Dedekind standard.

Il est important de remarquer que ce facteur de mode zéro n'est pas invariant modulaire, mais l'anomalie induite par ce terme disparaît grâce à la condition de couche de masse et l'intégrand de l'amplitude à une boucle est invariant modulaire. Nous considérons donc dans la suite la partie invariant modulaire du propagateur où ce facteur de mode zéro a été soustrait

$$\hat{\mathcal{P}} = \ln \hat{\chi}_{ij}(\nu^{(ij)}, \tau) = \mathcal{P} - C. \quad (12.10)$$

Comme toute amplitude de théorie des champs, l'amplitude à une boucle contient deux types de contributions : les contributions analytiques qui correspondent aux opérateurs de dimensions supérieures qui apparaissent dans l'action effective de la théorie des cordes ; et les contributions non-analytiques qui correspondent aux seuils normaux. Nous décrivons ces contributions car nous montrerons dans le chapitre suivant comment ces caractéristiques de l'amplitude à une boucle sont reproduites à partir des diagrammes en supergravité en $D = 11$ (qui permet aussi d'obtenir la structure des amplitudes de cordes en genre plus élevé).

- Contributions analytiques

En développant l'amplitude (12.1) en puissances successives de α' selon

$$I = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} F(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \int_{\mathcal{T}} \prod_{i=1}^3 \frac{d^2\nu^{(i)}}{\tau_2} \frac{1}{n!} \mathcal{D}^n \quad (12.11)$$

nous obtenons qu'à l'ordre en $(\alpha')^n$ la contribution

$$\int_{\mathcal{T}} \prod_{i=1}^3 \frac{d^2\nu^{(i)}}{\tau_2} \mathcal{D}^n = \sum_{2p+3q=n} D_{(p,q)}(\tau) \sigma_2^p \sigma_3^q. \quad (12.12)$$

Les quantités $D_{(p,q)}(\tau)$ sont des fonctions de vertex d'ordre $n = 2p + 3q$ invariantes modulaires que l'on peut représenter par des diagrammes de Feynman sur le tore, avec n lignes connectant au plus 4 vertex (cf. figure fig. 2). La représentation (12.8) du propagateur sur le tore implique qu'à chaque ligne est associée le propagateur discret sur le tore $\tau_2/|m + n\tau|^2$, et à chaque noeud la conservation des impulsions est imposée par l'intégrale sur les positions $\nu^{(i)}$.

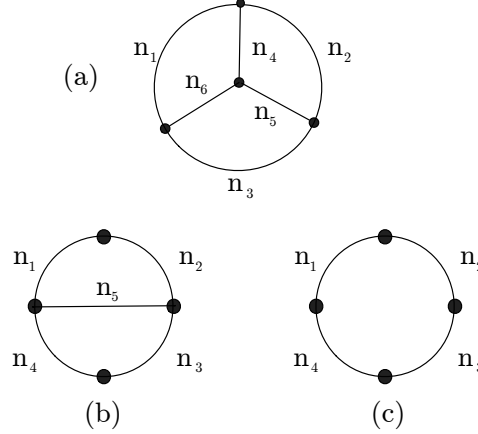


Fig. 2 Fonctions à quatre vertex. Les labels de chaque ligne donnent le nombre de propagateurs connectant les différents vertex. Ces quantités peuvent être nulles, ce qui signifie que certains vertex ne sont pas connectés.

Les fonctions de vertex $D_{(p,q)}(\tau)$ prennent la forme générale suivante (avec $k = 2p + 3q$)

$$D_{(p,q)}(\tau) = \sum_{(m_i, n_i) \neq (0,0)} \frac{\tau_2^k}{|m_1 + n_1\tau|^2 \cdots |m_k + n_k\tau|^2} \prod_{i=1}^4 \delta^{(i)}\left(\sum m_l\right) \delta^{(i)}\left(\sum n_l\right) \quad (12.13)$$

Les fonctions δ proviennent de la relation de conservation des impulsions sur le tore à chaque vertex.

L'analyse des ces fonctions de vertex est très compliquée et pour cela nous avons développé des programmes pour Mathematica pour extraire les couplages à une boucle à l'action effective des cordes en dimensions 10 et 9 [67]. Ces informations servent de point de référence pour tester la validité de la construction des amplitudes à partir des éléments de la matrice S en dimension 11.

- Contributions des seuils normaux

L'amplitude à une boucle a aussi des contributions non analytiques en les variables de Mandelstam résultant des seuils normaux.

La première contribution non analytique rencontrée est celle de la théorie des champs (de supergravité) obtenue dans la limite $\alpha' \rightarrow 0$ de l'amplitude de corde. Dans cette limite les contributions viennent de la région où $\tau_2 \rightarrow \infty$ de l'amplitude (12.1)

$$I_{\mathcal{T}_{st}} = \int_L^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \int_{\mathcal{T}_{st}} \prod_{i=1}^3 d\omega_i e^{\alpha' \pi \tau_2 Q(s,t)}, \quad (12.14)$$

avec

$$Q(s, t) = s\omega_1(\omega_3 - \omega_2) + t(\omega_2 - \omega_1)(1 - \omega_3) \quad (12.15)$$

qui est obtenue en prenant la limite asymptotique $\tau_2 \rightarrow \infty$ des propagateurs sur le tore $\Delta_s \rightarrow \hat{\mathcal{P}}^\infty(\nu^{(12)}) + \hat{\mathcal{P}}^\infty(\nu^{(34)})$.

Pour des raisons de convergence l'intégrale à une boucle doit être décomposée en trois régions physiques $\mathcal{T}_{st} = \{0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq 1\}$ avec $\omega_i = \nu^{(i)}/\tau_2$, $\mathcal{T}_{su} = \{0 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq \omega_3 \leq 1\}$ où $Q(s, u) = s(\omega_3 - \omega_1)\omega_2 + u(\omega_1 - \omega_2)(1 - \omega_3)$ et $\mathcal{T}_{tu} = \{0 \leq \omega_1 \leq \omega_3 \leq \omega_2 \leq 1\}$ où $Q(t, u) = u(\omega_2 - \omega_1)\omega_1 + t(\omega_3 - \omega_1)(1 - \omega_2)$.

Dans cette limite l'intégrale peut-être évaluée en utilisant la régularisation dimensionnelle en $D = 10 - 2\epsilon$ pour obtenir

$$\begin{aligned} I(s, t) &= c(D, \epsilon) \left(I^{(0)} - \epsilon I^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \\ I^{(0)} &= \int_0^1 d\xi \frac{(-\alpha' s \xi)^{\frac{D}{2}-3} - (-\alpha' t(1-\xi))^{\frac{D}{2}-3}}{\alpha' t + \alpha' u \xi} \\ I^{(1)} &= \int_0^1 d\xi \frac{(-\alpha' s \xi)^{\frac{D}{2}-3} \log(-\alpha' s \xi) - (-\alpha' t(1-\xi))^{\frac{D}{2}-3} \log(-\alpha' s \xi)}{\alpha' t + \alpha' u \xi} \end{aligned} \quad (12.16)$$

avec

$$c(D, \epsilon) = \frac{\Gamma(4 - \frac{D}{2} + \epsilon) \Gamma(\frac{D}{2} - 2 - \epsilon)^2}{(D - 6 - 2\epsilon) \Gamma(D - 4 - 2\epsilon)} \quad (12.17)$$

En dimension dix nous avons

$$\begin{aligned} I(s, t) &= -\frac{1}{5! \epsilon} e^{-\gamma_E \epsilon} \left(1 + \frac{45}{15} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \left(\frac{\alpha' u}{2} - \epsilon I^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \\ &= -\frac{\alpha' u}{240 \epsilon} - \frac{1}{120} \alpha' u (\gamma_E + 23/15) + \frac{1}{5!} I^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (12.18)$$

après sommation des différentes contributions des régions (s, t) , (t, u) et (s, u) du plan de Mandelstam, et en utilisant la relation de couche de masse $s + t + u = 0$ le pôle en ϵ disparaît.

La fonction $I^{(1)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} I^{(1)}(s, t) &= \int_0^1 \frac{d\xi}{\alpha' t + \alpha' u \xi} [(-\alpha' t(1-\xi))^2 \log(-\alpha' t(1-\xi)) - (-\alpha' s \xi)^2 \log(-\alpha' s \xi)] \\ &= \frac{\alpha' u}{4} + \alpha' \frac{st}{2u} - \alpha' \frac{s^4 \log(-\alpha' s) + t^4 \log(-\alpha' t) + 4s^3 t \log(-\alpha' s) + 4st^3 \log(-\alpha' t)}{2u^3} \\ &\quad - \alpha' \frac{s^2 t^2}{2u^3} \left[3 \log(\alpha'^2 st) + \log\left(-\frac{t}{s}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (12.19)$$

On remarque que

$$I^{(1)}(Ls, Lt) = L I^{(1)}(s, t) - \frac{\alpha' u}{2} L \log(L) \quad (12.20)$$

et ainsi après sommation sur les différentes régions (s, t) , (t, u) et (s, u) et en utilisant la condition de couche de masse, l'échelle des logarithmes disparaît.

Cette structure décrit les seuils normaux de l'amplitude de supergravité. L'amplitude de corde a des corrections d'ordre supérieur induites par ses modes massifs, et dans la région (s, t) avec $t = 0$ nous avons la structure suivante

$$I^{nonanal} = s \log(s) + s^4 \log(s) + s^6 \log(s) + s^7 \log(s) + s^8 \log(s) + \dots \quad (12.21)$$

La première correction massive apparaît à l'ordre en $s^4 \log(s)$ à cause de la structure de l'amplitude à l'ordre des arbres (11.6) qui présente un gap dans ses premiers ordres de développement.

Dans le canal s dans la limite $\tau_2 \rightarrow \infty$ le propagateur asymptotique Δ_s reçoit les corrections massives suivantes

$$\delta_s = \sum_{m \neq 0} \frac{1}{4|m|} \left(e^{2i\pi(m\nu_1^{(12)} + i|m\nu_2^{(12)}|)} + e^{2i\pi(m\nu_1^{(34)} + i|m\nu_2^{(34)}|)} \right). \quad (12.22)$$

et nous avons donc la contribution suivante

$$I^{nonanal}(s, t) = \int_L^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \int_{\mathcal{T}_{st}} \prod_{i=1}^3 \frac{d^2\nu}{\tau_2} \exp\left(\alpha' s(\tilde{\Delta}_s - \tilde{\Delta}_u) + \alpha' t(\tilde{\Delta}_t - \tilde{\Delta}_u)\right) \exp(\alpha' s \delta_s). \quad (12.23)$$

Nous avons restreint un domaine fondamental aux valeurs $\tau_2 \geq L$.¹² Le terme en $(\alpha' s)^4 \log(s)$ est obtenu en considérant la contribution en δ_s^2 dans (12.23). Dans la région (s, t) du plan de Mandelstam nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta I^{nonanal}{}^2(s, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} \frac{(-\alpha' s)^2}{(4m)^2} \int_L^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \int_{\mathcal{T}_{st}} \prod_{i=1}^3 d\omega_i e^{\alpha' \pi \tau_2 Q(s, t) - 4\pi m \tau_2 (\omega_2 - \omega_1)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} \frac{(-\alpha' s)^2}{(4m)^2} \int_L^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \int_{\mathcal{T}_{st}} \prod_{i=1}^3 d\omega_i e^{\alpha' \pi \tau_2 Q(s, t) - 4\pi m \tau_2 (1 - \omega_3)} \\ &= \sum_{m \neq 0} \frac{(-\alpha' s)^2}{(4m)^2} g_L(\alpha' s, \alpha' t). \end{aligned} \quad (12.24)$$

¹² Il est bien entendu que la dépendance en L disparaît à la fin du calcul car elle est compensée par la contribution de la région $\tau_2 \leq L$.

Nous obtenons dans la région (s, t) avec $t = 0$ (pour des raisons de clarté nous ne présentons les formules que dans la limite de diffusion vers l'avant)

$$I_{nonana(2)}(s, 0) \sim \frac{\zeta(3)\zeta(4)}{2(4\pi)^3} (-\alpha' s)^2 (\log(-\alpha' s\pi L) - \gamma_E - 2/5) \quad (12.25)$$

dans la région (t, u) nous avons

$$I_{nonana(2)}(0, -s) \sim \frac{\zeta(3)\zeta(4)}{2(4\pi)^3} (\alpha' s)^2 (\log(\alpha' s\pi L) - \gamma_E - 2/5) \quad (12.26)$$

et dans la région (s, u)

$$\begin{aligned} I_{nonana(2)}(s, -s) &\sim \frac{\zeta(3)\zeta(4)}{2(4\pi)^3} (-\alpha' s)^2 (\log(-\alpha' s\pi L) - \gamma_E - 2/5) \\ &+ \frac{\zeta(3)\zeta(4)}{2(4\pi)^3} (\alpha' s)^2 (\log(\alpha' s\pi L) - \gamma_E - 2/5) \end{aligned} \quad (12.27)$$

En sommant toutes ces contributions nous obtenons au total

$$I(s, 0, -s) = \frac{\zeta(3)\zeta(4)}{(4\pi)^3} (-\alpha' s)^4 (\log(-\alpha' s\pi L) - \gamma_E - 2/5) + (s \leftrightarrow -s) \quad (12.28)$$

La dépendance en L est compensée par la dépendance en L du domain fondamental tronqué $\mathcal{F}_L = \{|\tau_1| \leq 1/2; 1 \leq \tau_2 \leq L\}$ [7].

13. Structure des amplitudes aux ordres supérieurs

La structure analytique des amplitudes de cordes aux ordres supérieurs est plus difficile à analyser par manque d'une formulation explicite des amplitudes en genre supérieur à 2. Dans le cas du genre 2 les formules données par D'Hoker et Phong [68] contiennent les informations que nous décrivons qualitativement ci-dessous.

En genre deux la structure de l'amplitude à quatre gravitons est déterminée par les relations d'unitarité qui permettent de factoriser cette amplitude comme le produit d'une amplitude à l'ordre des arbres à quatre points et d'une amplitude à une boucle à quatre points en utilisant une coupure à deux particules ou comme le produit de deux amplitudes à l'ordre des arbres à cinq points en considérant les coupures à trois particules. Dans la suite nous basons notre raisonnement sur la structure des coupures à deux particules mais il est bien sûr entendu que les résultats sont les mêmes en utilisant d'autres coupures.¹³

¹³ En théorie des champs à partir de 3 boucles nous rencontrons des diagrammes qui n'ont pas de coupure à deux particules. Nous négligeons ce fait qui est néanmoins important pour la structure générale des amplitudes.

De la structure de l'amplitude à l'ordre des arbres donnée dans l'équation (11.5) et à une boucle dans l'équation (12.21) nous déduisons que l'amplitude à deux boucles a la structure suivante

$$A^{(2)} \sim \hat{R}^4 s^5 (\log^2(s) + s^2 \log(s) + \dots) \quad (13.1)$$

La contribution en $s^5 \log^2(s)$ est la contribution de la théorie des champs (tout comme le $s \log(s)$ est celle à une boucle). La contribution en $s^7 \log(s)$ vient des corrections massives des cordes.¹⁴

A l'ordre en genre 3 la structure analytique de l'amplitude est

$$A^{(3)} \sim \hat{R}^4 (s^6 \log(s) + s^9 \log^3(s) + \dots) \quad (13.2)$$

la contribution en $s^6 \log(s) R^4$ (qui est une contribution massive des cordes à la structure analytique de l'amplitude en genre 3) descend de la contribution de seuil $s^6 R^4 \log(s)$ du diagramme à deux boucles en dimension onze.

Ces contributions seront discutées dans le chapitre suivant où nous expliquerons comment elle apparaissent de la structure des diagrammes en dimension onze.

¹⁴ Les contributions en $s \log(s)$ et $s^5 \log^2(s)$ sont facilement mises en évidence par les coupures à deux particules. La contribution en $s \log(s) \log(t)$ à une boucle est obtenue en considérant une coupure quadruple où le diagramme à une boucle est coupé selon toutes ses lignes internes.

Chapitre IV

AMPLITUDES EN BOUCLES EN THÉORIE M

Dans ce chapitre je présente l'approche consistant à construire les amplitudes en boucle à quatre gravitons en théorie M et leurs connection avec les amplitudes en genre supérieur de la théorie des cordes.

Nous décrivons d'abord les contraintes imposées par la conjecture de la théorie M sur la structure des amplitudes en boucles en dimension onze et en théories des cordes.

Ensuite nous présenterons une approche de la théorie de la matrice S pour la théorie M en dimension onze. Nous verrons comment la structure analytique de la série perturbative des cordes, décrite dans le chapitre précédant peut être reconstruite à partir des éléments de matrice S en dimension onze.

14. Théorèmes de non renormalisation

Nous ne connaissons pas les degrés de liberté fondamentaux de la théorie M, nous travaillerons donc avec la théorie de supergravité effective en introduisant un régulateur ultra-violet Λ . Les divergences seront soustraites par des contre-termes et nous expliquons dans la suite comment les dualités permettent de fixer la partie finie résiduelle obtenue après la soustraction.

La contribution à l'opérateur $D^{2k} R^4$ d'un diagramme à L -boucles en supergravité en dimension onze est

$$S_L^k = \ell_P^{9(L-1)} \Lambda^m \int d^{11}x \sqrt{-G^{(11)}} D^{2k} R^4 \quad (14.1)$$

où $\ell_P^9 \sim 2\kappa_{11}^2$ est la longueur de Planck en dimension onze. Pour la théorie de supergravité κ_{11} est la constante de couplage et servira de paramètre de comptage de boucle. Λ est un paramètre de coupure ultra-violette dont nous préciserons plus bas l'origine et la valeur dans le cadre de notre schéma de renormalisation. Le degré de divergence ultra-violette superficiel d'un diagramme à quatre gravitons à L -boucles en dimension onze est

$$\mathcal{A}_L = [\Lambda]^{11+9(L-1)} = R^4 [\Lambda]^{9L-6} \quad (14.2)$$

La supersymétrie $\mathcal{N} = 8$ de la théorie garantit que toutes les amplitudes à quatre gravitons en dimension quelconque factorisent un terme en R^4 [69], ce qui réduit le degré de divergence UV de la théorie. En fait nous allons montrer dans la suite que le comportement UV des diagrammes en boucles en supergravité est encore meilleur puisqu'aux ordres plus élevés en boucles des puissances supplémentaires des moments externes peuvent être factorisées donnant le comportement

$$\mathcal{A}_L = [\Lambda]^{(D-2)L-6-2\beta_L} D^{2\beta_L} R^4 \quad (14.3)$$

Dans la suite nous expliquons comment nous déterminons β_L en fonction de l'ordre L en boucles.

Ici nous ne discutons que les contributions des amplitudes à quatre points, et nous n'avons pas accès aux contributions qui ne reçoivent de contributions que des amplitudes à plus de points. Il n'est pas suffisant d'avoir montré que toutes les amplitudes à 4 points sont finies dans l'ultra-violet pour déduire que la théorie est finie dans l'ultra-violet. Car même si l'unitarité relie les amplitudes à n points à celles à quatre points des divergences supplémentaires sont introduites par l'intégration sur l'espace des phases.

Dans le reste de ce texte L dénotera l'ordre en boucle des diagrammes en dimension onze, et h ou g feront référence au genre des diagrammes de théories des cordes.

- Pour la corde de type IIA

Après la réduction de la théorie sur un cercle de rayon R_{11} , les amplitudes en boucles peuvent être développées en puissance successive des impulsions externes. Nous conservons toujours des états externes de masse nulle et les excitations de Kaluza-Klein tournent dans les boucles. La contribution à l'opérateur $D^{2k} R^4$ d'un diagramme à L -boucles en supergravité en dimension onze est

$$S_L^{(\beta_L+v+3)} = \sum_{w=0}^{w_L} \ell_P^{9(L-1)} \frac{\Lambda^{9L-6-2\beta_L-w}}{R_{11}^{w-2}} (R_{11}^2 D^2)^v D^{2\beta_L} R^4 \quad (14.4)$$

Dans cette formule apparaissent le cutoff ultraviolet Λ et le rayon du cercle de compactification R_{11} qui joue le rôle de régulateur infrarouge. La variable w paramétrise les divergences sous-dominantes du diagramme à L -boucle donc $0 \leq w \leq w_L < 9L - 6 - 2\beta_L$, la variable $v \in \mathbb{N}$ est un entier positif décrivant les effets des modes de Kaluza-Klein intervenant dans les boucles.

En utilisant le dictionnaire (10.1) cette expression devient dans les variables de la théorie des cordes de type IIA

$$S_{m,h}^{(k+3)A} = \ell_s^{2k-2} \Lambda^\delta \int d^{10}x \sqrt{-g_A} c_h e^{2(h-1)\phi_A} D^{2k} R^4 \quad (14.5)$$

où

$$\delta = 9L - 6 - 2\beta_L - w; \quad h = 1 + k - \frac{w + 2\beta_L}{3}. \quad (14.6)$$

Dans cette expression h est le genre en boucle où apparaît ce couplage dans un calcul perturbatif en théorie des cordes.

Puisque w paramétrise les divergences UV sous dominantes nous avons

$$w = 3 + 3k - 3h - 2\beta_L \geq 0 \iff h \leq k + 1 - \frac{2\beta_L}{3} \quad (14.7)$$

La structure connue des diagrammes à deux boucles en supergravité et en théorie des cordes garantit que $\beta_L \geq 2$ pour $L \geq 2$. Nous en déduisons donc que [16]

- ▷ La borne maximale sur le genre en boucle où peut apparaître le couplage $D^{2k} R^4$ est $h_{max} = k$. Cette borne est obtenue *uniquement* pour le diagramme à une boucle $L = 1$ pour lequel $\beta_1 = 0$. Ainsi la contribution maximale au couplage $D^{2k} R^4$ en théorie des cordes est complètement déterminée par sa valeur obtenue par le diagramme à une boucle en 11D [8,12]. Les diagrammes d'ordres plus élevés $L \geq 1$ contribuent aux couplages en $D^{2k} R^4$ en renormalisant les contributions en genre $h < k$ dans l'action effective des théorie des cordes de type II en dimension dix.
- ▷ Ces même inégalités impliquent le résultat équivalent que les amplitudes en genre h à quatre gravitons se comportent comme

$$\mathcal{A}_h^{(4)} \sim D^{2h} R^4 + \dots \quad (14.8)$$

donc satisfont

$$\beta_h = h. \quad (14.9)$$

Ces comportements ont été confirmés par Berkovits jusqu'à l'ordre de cinq boucles en utilisant le formalisme non minimal des spineurs purs [70].

- Pour la corde de type IIB

Dans le cas de la théorie de type IIB les couplages sont des fonctions de la constante de couplage complexifiée $\tau = C^{(0)} + i/g_s$ identifiée avec la structure complexe Ω du tore sur lequel nous avons compactifié la théorie M. En considérant la théorie en dimensions neuf nous obtenons

$$\begin{aligned} S_L^{(k)} &= (\ell_P)^{9(L-1)} \Lambda^n \mathcal{V}^{-m} \int d^9 x \mathcal{V} \sqrt{-G^9} h(\Omega, \bar{\Omega}) D^{2k} R^4 \\ &= \hat{\Lambda}^n \int d^9 x r_B^{(4m-2k-3)/3} (g_s^{IIB})^{(2k-m)/3} h(\Omega, \bar{\Omega}) \sqrt{-g} D^{2k} R^4 \end{aligned} \quad (14.10)$$

où nous avons utilisé le dictionnaire (10.3) pour convertir les variables de la théorie M en celles de la théorie de type IIB. Les contributions linéaires en le rayon r_B telles que

$$m = \frac{k+3}{2}, \quad (14.11)$$

se décompactifient dans la limite $r_B \rightarrow \infty$ en une contribution à l'action effective de type IIB en dimension dix

$$S^{(k)} = \int d^{10} x \sqrt{-g^{IIB}} \tau_2^{\frac{k-1}{2}} h(\Omega, \bar{\Omega}) D^{2k} R^4. \quad (14.12)$$

En utilisant la contrainte dimensionnelle $n + 2m + 2k = 9L - 6$ et (14.11) alors le degré de divergence du diagramme à L -boucle donnant le terme en $D^{2k} R^4$ est

$$n = 9(L - 1) - 3k \geq 0. \quad (14.13)$$

La valeur minimale positive de n satisfaisant cette égalité est telle que

- ▷ le terme en R^4 en type IIB est donné par la contribution finie du diagramme à une boucle $\mathcal{V}^{-3/2} f^{(3)}(\Omega)$.
- ▷ le terme en $D^4 R^4$ est donné par $\mathcal{V}^{-5/2} f^{(5)}$ venant de la divergence sous-dominante Λ^3 du diagramme à deux boucles $L = 2$.
- ▷ le terme en $D^6 R^4$ est donné par la contribution finie du diagramme $L = 2$ à deux boucles $\mathcal{V}^{-3} f^{(6)}$.
- ▷ les termes en $D^8 R^4$ reçoivent une contribution $\mathcal{V}^{-7/2} f^{(7)}$ de la divergence sous-dominante Λ^6 . Mais ce n'est pas la seule contribution à ce couplage.

Les fonctions $f^{(3)}$, $f^{(5)}$ et $f^{(6)}$ sont les formes modulaires contraintes par les équations différentielles (8.2). Nous donnerons leur forme précise dans la suite, déduite des diagrammes avec $L \geq 2$. Les valeurs non minimales de n satisfaisant la relation (14.13) correspondent aux renormalisations possibles de ces couplages par des contributions en boucles d'ordre supérieure $L \geq 2$.

Dans les sections suivantes nous analysons les diagrammes à une et deux boucles en dimension onze et nous en déduisons les équations différentielles (8.2).

Il n'est toujours pas connu quelle théorie fondamentale décrit la théorie M, néanmoins il est clairement établi [62,4] que l'inclusion des termes de dimension supérieure à deux nécessite des corrections quantiques à la structure du superspace de la supergravité en dimension onze. La membrane (ou M2-brane) est sûrement le candidat le plus prometteur pour donner une description fondamentale de la théorie M mais la quantification d'un tel objet étendu n'est pas comprise. Nous nous contenterons dans la suite d'une analyse ne faisant intervenir que les degrés de liberté de masse nulle de la théorie. Et plutôt que d'essayer de construire ces amplitudes à partir de principes premiers (en utilisant les méthodes décrites dans [71,72,73,21,22,74]), nous utiliserons la construction basée sur l'unitarité due à Bern et al. [75].

15. Amplitude à une boucle en onze dimensions

Dans cette section nous décrivons les propriétés de l'amplitude à quatre gravitons à une boucle en dimension onze et sa réduction en dimension dix sur un cercle de rayon R_{11} et en dimension neuf sur un tore de rayons (R_{10}, R_{11}) .



Fig. 3 Diagramme à une boucle avec son contre-terme

L'amplitude à une boucle à quatre gravitons en dimension onze est donnée par [11],

$$A_4^{(1)} = \frac{\kappa_{11}^4}{(2\pi)^{11}} \mathcal{R}^4 [I_{box}(S, T) + I_{box}(U, S) + I_{box}(T, U)], \quad (15.1)$$

où la fonction I_{box} est donnée par l'intégrale à une boucle pour la théorie scalaire φ^3 de masse nulle,¹⁵

$$I_{box}(S, T) = \int d^{11}q \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+k_1)^2} \frac{1}{(q+k_1+k_2)^2} \frac{1}{(q-k_4)^2}, \quad (15.2)$$

avec q_μ ($\mu = 0, \dots, 10$) le moment en dimension onze.

Le fait que cette amplitude factorise le terme à huit dérivées \mathcal{R}^4 est une conséquence de la supersymétrie [75,11] et a pour conséquence la réduction du degré de divergence des amplitudes. L'amplitude à une boucle (15.2) diverge comme Λ^3 . Cette divergence est soustraite par le contre terme de la figure 3(b) avec

$$\delta A_4^{(1)} = \frac{\kappa_{11}^4}{(2\pi)^{11}} \mathcal{R}^4 \frac{\pi^3}{2\ell_P^3} c_1. \quad (15.3)$$

La valeur finie obtenue après soustraction est déterminée dans la suite à partir des contraintes de dualité et le spectre des cordes. Cette procédure est expliquée dans la sous-section suivante.

- Compactification sur un tore

Nous considérons la compactification de cette amplitude sur un tore \mathcal{T}^2 . Les moments de Kaluza-Klein dans la boucle sont $(l_1^2/R_{11}^2, l_2^2/R_{10}^2)$, et nous conservons les polarisations des gravitons dans les 9 directions transverses au tore. L'amplitude prend la forme

$$I(S, T) = \frac{1}{\ell_P^2 \mathcal{V}} \int \prod_{r=1}^4 d\sigma_r \int d^9q \sum_{\{l_1, l_2\}} e^{-G^{IJ} l_I l_J \sigma - \sum_{r=1}^4 p_r^2 \sigma_r}, \quad (15.4)$$

¹⁵ Ceci est une conséquence non triviale de la supersymétrie qui a des implications très importantes sur le degré de divergence ultra-violet de la théorie. De façon générale à l'ordre d'une boucle nous aurions attendu l'apparition d'un diagramme triangulaire avec un vertex en φ^4 et deux vertex en φ^3 , et une bulle avec deux vertex en φ^4 , par exemple. Mais ces diagrammes n'apparaissent pas dans les amplitudes à une boucle jusqu'à sept états externes [76].

où $\sigma = \sum_{r=1}^4 \sigma_r$ est la somme des paramètres de Schwinger qui ont la dimension (*longueur*)², et $p_r = q + \sum_{s=1}^r k_s$ avec q le moment dans la boucle et k_r les impulsions des états externes. Après intégration sur le moment q nous obtenons que chacune des intégrales scalaires dans (15.4) peut être écrite comme

$$I(S, T) = \frac{2\pi^{\frac{9}{2}}}{\ell_P^2 \mathcal{V}} \int_0^\infty d\sigma \sigma^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathcal{T}_{ST}} \prod_{r=1}^3 d\omega_r \sum_{\{l_1, l_2\}} e^{-G^{IJ} l_I l_J \sigma - Q(S, T; \omega_r) \sigma} \quad (15.5)$$

avec $Q(S, T; \omega_r) = -S\omega_1(\omega_3 - \omega_2) - T(\omega_2 - \omega_1)(1 - \omega_3)$. Le domaine d'intégration indiqué par \mathcal{T}_{ST} est défini par $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq 1$. Les deux autres contributions dans (15.4) sont données par les deux régions $\mathcal{T}_{TV} : 0 \leq \omega_3 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq 1$ et $\mathcal{T}_{SV} : 0 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq \omega_3 \leq 1$. L'intégrale (15.5) est évaluée pour $S, T < 0$ où elle est convergente puis continuée analytiquement à la région physique. Nous séparons l'amplitude en une contribution indépendante des impulsions externes I_o et une contribution dépendant des impulsions externes $I'(S, T)$ selon

$$I(S, T) = I_o + I'(S, T) . \quad (15.6)$$

avec

$$I_o \equiv I(0, 0) = \frac{\pi^4}{\ell_P^2 \mathcal{V}} \int_0^\infty d\sigma \sigma^{-\frac{3}{2}} \sum_{\{l_1, l_2\}} e^{-\pi G^{IJ} l_I l_J \sigma} . \quad (15.7)$$

Comme l'amplitude à une boucle dont elle est originaire cette expression est cubiquement divergente pour $\sigma \rightarrow 0$. Cette divergence est isolée par une resommation de Poisson sur les entiers l_1 et l_2 . La divergence est alors localisée dans le secteur $\hat{l}_1 = \hat{l}_2 = 0$, avec le résultat

$$I_o = \frac{\pi^3}{2\ell_P^3} \left(\frac{4\pi}{3} (\Lambda \ell_P)^3 + \mathcal{V}^{-\frac{3}{2}} E_{3/2}(\Omega, \bar{\Omega}) \right) , \quad (15.8)$$

où Λ^3 est la valeur régularisée de la divergence du secteur $\hat{l}_1 = \hat{l}_2 = 0$. Le terme fini est donné par une fonction de la structure complexe Ω du tore, qui en vertu du dictionnaire (10.1) est une fonction de la constante de couplage de la théorie des cordes de type IIB

$$\begin{aligned} E_s &= \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\Omega_2^s}{|m + n\Omega|^{2s}} \\ &= 2\zeta(2s) e^{-s\phi^B} + 2\pi\zeta(2s-1) \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} e^{-(1-s)\phi^B} + \text{non-perturbatif} . \end{aligned} \quad (15.9)$$

La dépendance en le volume \mathcal{V} est telle que dans la limite de décompactification $\mathcal{V} \rightarrow \infty$, ce terme disparaît et seul le terme en Λ^3 contribue à l'action effective de la théorie M en dimension onze.

La limite $\mathcal{V} \rightarrow 0$ est celle qui permet d'obtenir l'action effective de la théorie de type IIB en dimension dix, selon (14.10). Le terme ainsi calculé survit la limite de type IIB et donne le couplage en \mathcal{R}^4 à l'action effective de type IIB. Le développement en mode de Fourier de la fonction $E_{3/2}$ montre que ce couplage reçoit une contribution aux ordres en arbre, une boucle et non-perturbatives.

Nous étudions maintenant la fonction $I(S, T)$ dans (15.5) en termes des impulsions externes. Pour cela nous séparons la partie avec les modes de Kaluza-Klein nuls $l_1 = l_2 = 0$ du reste selon

$$I'(S, T) = I^0(S, T) + \sum_{n=2}^{\infty} I_n(S, T). \quad (15.10)$$

La partie non analytique de l'amplitude est contenue dans le terme $I^0(S, T)$ qui prend la forme en dimension d

$$\begin{aligned} \ell_P^2 \mathcal{V} I_d^0(S, T) &= 2\pi^{\frac{d}{2}} \int_0^\infty d\sigma \sigma^{3-\frac{d}{2}} \int_{\mathcal{T}_{ST}} \prod_{r=1}^3 d\omega_r \left(e^{-Q(S, T; \omega_r)\sigma} - 1 \right) \\ &= 2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \int_{\mathcal{T}_{ST}} \prod_{r=1}^3 d\omega_r Q(S, T; \omega_r)^{\frac{d-8}{2}} \\ &= 2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) (-\mathcal{G}_{st})^{\frac{d-8}{2}}, \end{aligned} \quad (15.11)$$

avec

$$\mathcal{G}_{st}^n = \int_{\mathcal{T}_{ST}} \prod_{r=1}^3 d\omega_r (-Q(S, T; \omega_r))^n. \quad (15.12)$$

Les quantités \mathcal{G}_{tu}^n et \mathcal{G}_{us}^n sont définies de même après une permutation circulaire des variables S, T et U . Pour le cas $d = 9$ qui nous intéresse plus particulièrement nous avons

$$\ell_P^2 \mathcal{V} I^0(S, T) \equiv -8\pi^5 (-\mathcal{G}_{st})^{\frac{1}{2}} = -8\pi^5 \int_{\mathcal{T}_{ST}} \prod_{r=1}^3 d\omega_r (Q(S, T; \omega_r))^{\frac{1}{2}}, \quad (15.13)$$

qui présente la structure en racine carrée typique des seuils normaux en dimension neuf dus aux particules de masse nulle se propageant dans les boucles (ce qui correspond aux seuils de la théorie des champs).

Les termes I_n dans (15.10) sont des polynômes homogènes de degré n dans les variables S et T

$$\begin{aligned} \ell_P^2 \mathcal{V} I_n(S, T) &= 2\pi^{\frac{9}{2}} \frac{\mathcal{G}_{st}^n}{n!} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{3}{2}-n}} \sum_{(l_1, l_2) \neq (0,0)} e^{-G^{IJ} l_I l_J \sigma} \\ &= 2\pi^{\frac{9}{2}} \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \ell_P^{2n-1} \mathcal{V}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{G}_{st}^n}{n!} E_{n-\frac{1}{2}}(\Omega, \bar{\Omega}). \end{aligned} \quad (15.14)$$

Ces termes font intervenir les séries d'Eisenstein E_s définies dans (15.9).

En utilisant encore une fois le dictionnaire (10.1) nous obtenons l'action effective à quatre points de type IIA

$$\begin{aligned}
S_{4pt}^{IIA} = & \frac{1}{l_s^2} \int d^9 x \sqrt{-g^{IIA}} \mathcal{R}^4 r_A \left[2\zeta(3)e^{-2\phi^A} + \frac{2\pi^2}{3r_A^2} + \frac{2\pi^2}{3} - 8\pi^2 r_A l_s(-\mathcal{W})^{\frac{1}{2}} \right. \\
& + 8\pi^{\frac{3}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\Gamma(n - \frac{1}{2})\zeta(2n - 1) \frac{r_A^{2(n-1)}}{n!} (l_s^2 \mathcal{W})^n \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{\pi}\Gamma(n - 1)\zeta(2n - 2) \frac{e^{2(n-1)\phi^A}}{n!} (l_s^2 \mathcal{W})^n \right) \right] + \text{non - perturbatif},
\end{aligned} \tag{15.15}$$

et l'action effective de type IIB

$$\begin{aligned}
S_{4pt}^{IIB} = & \frac{1}{l_s^2} \int d^9 x \sqrt{-g^{IIB}} \mathcal{R}^4 r_B \left[2\zeta(3)e^{-2\phi^B} + \frac{2\pi^2}{3} + \frac{2\pi^2}{3} \frac{1}{r_B^2} - \frac{8\pi^2}{r_B^3} l_s(-\mathcal{W})^{\frac{1}{2}} \right. \\
& + 8\pi^{\frac{3}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\Gamma(n - \frac{1}{2})\zeta(2n - 1) \frac{1}{n!} \frac{(l_s^2 \mathcal{W})^n}{r_B^{2n-2}} \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{\pi}\Gamma(n - 1)\zeta(2n - 2) \frac{e^{2(n-1)\phi^B}}{n!} \frac{(l_s^2 \mathcal{W})^n}{r_B^{2n+2}} \right) \right] + \text{non - perturbatif},
\end{aligned} \tag{15.16}$$

avec

$$\mathcal{W}^n = (\mathcal{G}_{st})^n + (\mathcal{G}_{tu})^n + (\mathcal{G}_{us})^n. \tag{15.17}$$

Les premiers termes des développements (15.15) et (15.16) donnent les couplages à l'ordre des arbres qui reproduisent les résultats donnés par l'amplitude de Veneziano [49]. Le reste des termes sur la première ligne et la seconde ligne sont des contributions à une boucle. Et la troisième ligne donne des contributions à n boucles aux couplages $D^{2n} R^4$.

La contribution totale de l'amplitude à une boucle en dimension neuf à l'ordre en R^4 est

$$S_{\mathcal{R}^4} = \frac{1}{3 \cdot (4\pi)^7 l_P} \int d^9 x \sqrt{-G} \mathcal{V} \mathcal{R}^4 \left(\mathcal{V}^{-\frac{3}{2}} E_{\frac{3}{2}}(\Omega, \bar{\Omega}) + c_1 + \frac{4\pi}{3} (\Lambda l_P)^3 \right), \tag{15.18}$$

qui en termes des variables de cordes selon le dictionnaire (10.1)

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{R}^4} = & \frac{1}{3 \cdot (4\pi)^7 l_s} \int d^9 x \sqrt{-g^B} r_B \mathcal{R}^4 \left(2\zeta(3)e^{-2\phi^B} + \frac{2\pi^2}{3} + \frac{c_1 + 4\pi(\Lambda l_P)^3/3}{r_B^2} + \dots \right) \\
= & \frac{1}{3 \cdot (4\pi)^7 l_s} \int d^9 x \sqrt{-g^A} r_A \mathcal{R}^4 \left(2\zeta(3)e^{-2\phi^A} + \frac{2\pi^2}{3} \frac{1}{r_A^2} + c_1 + \frac{4\pi}{3} (\Lambda l_P)^3 + \dots \right).
\end{aligned} \tag{15.19}$$

L'égalité¹⁶ de l'amplitude à quatre gravitons à une boucle en type IIA et IIB en dimension neuf implique que l'on doit identifier les termes de ces deux actions terme à terme en puissances de $r = r_A = r_B$ ou de façon équivalente tel que chaque action doit être invariante sous la transformation $r \leftrightarrow 1/r$. Cette symétrie est respectée pour le premier terme car $r_B \exp(-2\phi^B) = r_A \exp(-2\phi^A)$ et si la valeur du contre terme c_1 satisfait la relation

$$c_1 = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{4\pi}{3}(\Lambda\ell_P)^3. \quad (15.20)$$

En ceci consiste notre schéma de régularisation, qui se trouve être compatible avec la supersymétrie [11].

Nous avons mentionné que les amplitudes à quatre gravitons à une boucle en type IIA et type IIB doivent être identiques mais il est clair que les secondes lignes de (15.15) et (15.16) ne sont pas invariantes sous les transformations $r \rightarrow 1/r$, ce qui signifie que le calcul à une boucle que nous avons présenté ne donne pas toute l'information sur l'action effective de la théorie des cordes. En fait pour reconstruire complètement l'action effective des cordes il est nécessaire de considérer tous les ordres en boucles, ce qui est symbolisé par le diagramme 4 indiquant la relation entre les éléments de matrice S de la supergravité en dimension onze et celle de la théorie des cordes.

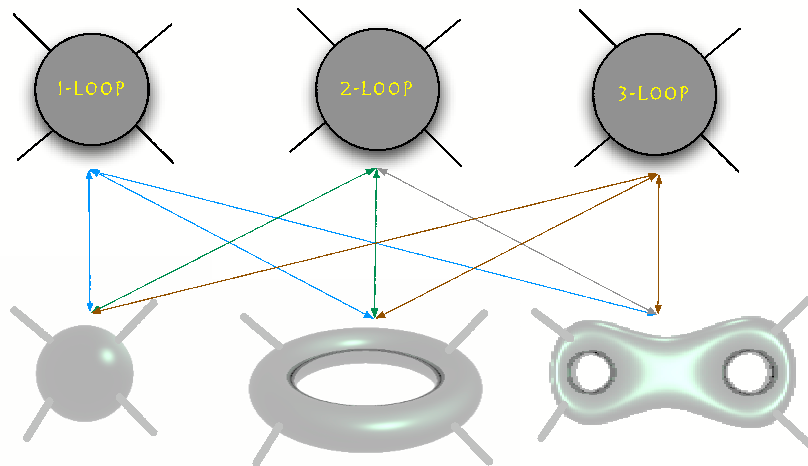


Fig. 4 Relations entre les éléments de matrice S de la théorie des cordes et en théorie M

La limite de décompactification en dimension dix est $r_A \rightarrow \infty$ pour la théorie de type IIA ou $r_B \rightarrow \infty$ pour la théorie de type IIB. La dernière ligne de (15.15) donne des contributions au genre n aux couplages $D^{2n} R^4$ dans l'action effective de type IIA en dimension dix. Ces

¹⁶ Ces deux amplitudes sont identiques parce que les contraintes cinématiques ne permettent pas de contribution de la structure de spin impaire qui permet de différencier la chiralité des deux théories. Ce ne sera pas le cas des amplitudes au delà de 3 boucles en théorie des cordes, et l'action effective de la théorie de type IIA est différente de celle de type IIB. Egalement les amplitudes à plus de quatre points à une boucle ne sont pas identiques.

contributions sont celles de l'ordre dominant des amplitudes à n boucles données dans (14.8). Les arguments de la section 14 garantissent que les ordres supérieurs en boucles en 11D ne changeront pas ce résultat.

Dans l'expression de type IIB nous voyons que les termes des deuxièmes et troisièmes lignes tendent vers zéro dans la limite $r_B \rightarrow \infty$ et ne survivent pas la limite de décompactification. Les contributions en dérivées d'ordre supérieur en type IIB viennent des diagrammes en boucles d'ordre supérieur.

- Contributions des seuils normaux de masse nulle

Les amplitudes en boucles sont des fonctions analytiques non triviales des variables cinématiques de Mandelstam. La structure non triviale est induite par la propagation de particules dans les boucles et est la base des relations d'unitarité de la matrice S de diffusion.

Les termes dans la deuxième ligne de l'action effective de type IIA (15.15) divergent lorsque r_A tend vers l'infini. En fait ces termes doivent être resommés pour donner la structure analytique de l'amplitude à une boucle en dimension dix. Dans les variables de la théorie M ces contributions sont données par

$$\begin{aligned} & -\frac{4\pi^5}{\ell_P^2 \mathcal{V}} (-\mathcal{W})^{\frac{1}{2}} + 4\pi^{\frac{9}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \ell_P^{2n-3} \frac{\mathcal{W}^n \mathcal{V}^{n-\frac{3}{2}}}{n!} \Gamma(n - \frac{1}{2}) \zeta(2n - 1) \left(\frac{R_{10}}{R_{11}} \right)^{n-\frac{1}{2}} \\ & = -\frac{4\pi^5}{\ell_P^3 \mathcal{V}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left(\frac{r^2}{R_{10}^2} - \ell_P^2 \mathcal{W} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\ell_P^3 R_{11} R_{10}^2} 4\pi^5 \zeta(-1) \Gamma(-\frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (15.21)$$

Le deuxième terme dans la seconde ligne est compensé par une contribution équivalente dans la première ligne de (15.15). La limite de décompactification en dimension dix de

$$\int_{T_{st}} \prod_{r=1}^3 d\omega_r \left[-\frac{8\pi^2}{\ell_P^3 \mathcal{V}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left(\frac{r^2}{R_{10}^2} + \ell_P^2 Q(S, T; \omega_r) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (15.22)$$

est donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned} \lim_{R_{10} \rightarrow \infty} -\frac{4\pi^5}{\ell_P^3 \mathcal{V}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left(\frac{r^2}{R_{10}^2} - \ell_P^2 \mathcal{W} \right)^{\frac{1}{2}} & = -\frac{8\pi^5}{\ell_P^3 R_{11}} \int_0^\infty dy (y^2 - \ell_P^2 \mathcal{W})^{\frac{1}{2}} \\ & = \frac{2\pi^5}{\ell_P R_{11}} \mathcal{W} (\ln(-\mathcal{W}) - 2). \end{aligned} \quad (15.23)$$

Le paramètre de régularisation (infra-rouge) de l'intégrale pour $y \rightarrow \infty$ à été réabsorbé dans le logarithme de façon implicite. Cette expression est celle des seuils normaux de masse nulle de l'amplitude à quatre gravitons en dimension dix [69]

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}^4 (\mathcal{G}_{st} \ln \mathcal{G}_{st} + \mathcal{G}_{tu} \ln \mathcal{G}_{tu} + \mathcal{G}_{us} \ln \mathcal{G}_{us}) \\ & \sim \mathcal{R}^4 (\mathcal{G}_{st} \ln \mathcal{G}_{st} + \mathcal{G}_{tu} \ln \mathcal{G}_{tu} + \mathcal{G}_{us} \ln \mathcal{G}_{us}). \end{aligned} \quad (15.24)$$

où les quantités \mathcal{G}_{st} , \mathcal{G}_{tu} and \mathcal{G}_{us} sont définies en terme des variables des cordes.

$$(\mathcal{G}_{st})^n = \int_{\mathcal{T}_{st}} \prod_{r=1}^3 d\omega_r (-s\omega_1(\omega_3 - \omega_2) - t(\omega_2 - \omega_1)(1 - \omega_3))^n . \quad (15.25)$$

16. Amplitude à deux boucles en dimension onze

Après avoir analysé l'amplitude à une boucle en dimension onze nous passons à l'analyse de l'amplitude à deux boucles. Comme nous l'avons vu plus haut les résultats extraits de l'amplitude à une boucle ne donnent pas l'action effective de corde complète et nous allons voir comment l'amplitude à deux boucles complète ces résultats.

Nous construisons l'amplitude à quatre gravitons à deux boucles en utilisant la méthode des coupures. Il a été montré par Bern et al. dans [75] que la supersymétrie de la théorie implique que l'amplitude à deux boucles se réduit encore à la somme de diagrammes pour la théorie φ^3 scalaire le tout multiplié par la structure tensorielle $D^4 R^4$.

L'ensemble des diagrammes peut être construit en utilisant des coupures à deux particules et est donné dans la figure 5. Le diagramme 5(c) est obtenu à partir du contre-terme introduit à une boucle et est proportionnel à c_1 déterminé par la relation (15.20). Le seul nouvel arbitraire à cette ordre en boucles est contenu dans le contre-terme donné par le diagramme 5(d) associé à la divergence superficielle du diagramme à deux boucles.¹⁷ Puisque l'amplitude à deux boucles est multipliée par le facteur de $D^4 R^4$ nous avons $\beta_2 = 2$ et la divergence est celle de la théorie φ^3 en dimension onze, qui est Λ^8 .

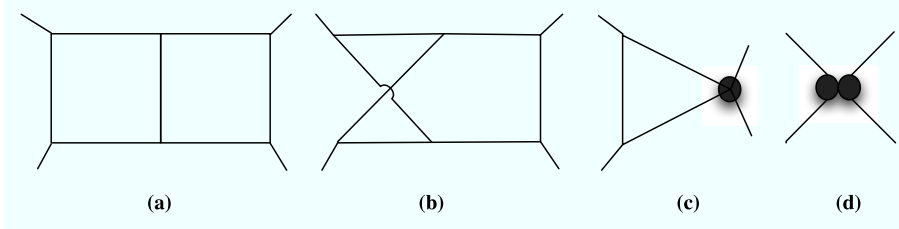


Fig. 5 Les diagrammes scalaires φ^3 planaire (a) et non-planaire (b) qui contribuent à l'amplitude à quatre gravitons en dimension onze. Les contributions (c) et (d) correspondent respectivement au contre-terme associés aux divergences sous-dominante et dominante.

La somme des diagrammes planaire 5(a) et non-planaire 5(b) est donnée par

$$A_4^{(2)} = i \frac{\kappa_{11}^6}{(2\pi)^{22}} \mathcal{R}^4 [S^2 (I^P(S, T) + I^P(S, U) + I^{NP}(S, T) + I^{NP}(S, U)) + perms.] , \quad (16.1)$$

où *perms* symbolise les permutations sur les variables S, T et U . La présence du facteur en S^2 indique que cette amplitude contribue à partir de l'ordre en $D^4 R^4$. Les quantités $I^P(S, T)$ et

¹⁷ La théorie n'est pas renormalisable par comptage de puissance en dimension onze.

$I^{NP}(S, T)$ sont les fonctions du diagramme à deux boucles planaire et non-planaire données par

$$I^P(S, T) = \int d^{11}p d^{11}q \frac{1}{p^2(p-k_1)^2(p-k_1-k_2)^2(p+q)^2q^2(q-k_3-k_4)^2(q-k_4)^2} \quad (16.2)$$

et

$$I^{NP}(S, T) = \int d^{11}p d^{11}q \frac{1}{p^2(p-k_1)^2(p+q)^2(p-k_1-k_2)^2q^2(p+q+k_3)^2(q-k_4)^2}. \quad (16.3)$$

Tout comme à l'ordre à une boucle nous étudions cette amplitude sur un cercle S^1 de rayon R_{11} et sur un tore \mathcal{T}^2 de rayons R_{10} et R_{11} . Les états externes ont toujours leur polarisation dans les dimensions transverses aux directions de compactification.

Le diagramme planaire donne

$$I^P(S, T) = \frac{1}{\ell_P^{2n} \mathcal{V}_n^2} \sum_{\{m_I, n_I\}} \int d^{11-n}p d^{11-n}q \int \prod_{r=1}^7 d\sigma_r e^{-[G^{IJ}(\sigma m_I m_J + \lambda n_I n_J + \rho(m+n)_I(m+n)_J) + \sum_{r=1}^7 K_r \sigma_r]}, \quad (16.4)$$

où les indices I, J sont selon les directions du tore \mathcal{T}^n . Le vecteur K_r est défini par

$$K_r = (p, p-k_1, p-k_1-k_2, q, q-k_4, q-k_3-k_4, p+q), \quad (16.5)$$

et les paramètres de Schwinger sont

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad \lambda = \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6, \quad \rho = \sigma_7. \quad (16.6)$$

Le diagramme non-planaire est donné par

$$I^{NP}(S, T) = \frac{1}{\ell_P^{2n} \mathcal{V}_n^2} \sum_{\{m_I, n_I\}} \int d^{11-n}p d^{11-n}q \int \prod_{r=1}^7 d\sigma_r e^{-[G^{IJ}(\sigma m_I m_J + \lambda n_I n_J + \rho(m+n)_I(m+n)_J) + \sum_{r=1}^7 K'_r \sigma_r]}, \quad (16.7)$$

avec

$$K'_r = (q, q-k_4, p, p-k_1, p-k_1-k_2, p+q, p+q+k_3), \quad (16.8)$$

et

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \lambda = \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5, \quad \rho = \sigma_6 + \sigma_7. \quad (16.9)$$

Après intégration sur les impulsions internes p et q nous obtenons

$$I^P(S, T) = \frac{\pi^{11-n}}{\ell_P^{2n} \mathcal{V}_n^2} \sum_{\{m_I, n_I\}} \int_0^\infty d\sigma d\lambda d\rho \frac{\sigma^2 \lambda^2}{\Delta^{\frac{11-n}{2}}} e^{-G^{IJ}(\sigma m_I m_J + \lambda n_I n_J + \rho(m+n)_I(m+n)_J)} \\ \int_0^1 dv_2 dw_2 \int_0^{v_2} dv_1 \int_0^{w_2} dw_1 e^{T \frac{\sigma \lambda \rho}{\Delta} (v_2 - v_1)(w_2 - w_1) + S[\frac{\sigma \lambda \rho}{\Delta} (v_1 - w_1)(v_2 - w_2) + \sigma v_1(1 - v_2) + \lambda w_1(1 - w_2)]}, \quad (16.10)$$

et

$$I^{NP}(S, T) = \frac{\pi^{11-n}}{\ell_P^{2n} \mathcal{V}_n^2} \sum_{\{m_I, n_I\}} \int_0^\infty d\sigma d\lambda d\rho \frac{2\sigma \lambda^2 \rho}{\Delta^{\frac{11-n}{2}}} e^{-G^{IJ}(\sigma m_I m_J + \lambda n_I n_J + \rho(m+n)_I(m+n)_J)} \\ \int_0^1 du_1 dv_1 dw_2 \int_0^{w_2} dw_1 e^{T \frac{\sigma \lambda \rho}{\Delta} (w_2 - w_1)(u_1 - v_1) + S[\frac{(\sigma + \rho)\lambda^2}{\Delta} w_1(1 - w_2) + \frac{\sigma \lambda \rho}{\Delta} (w_1(1 - u_1) + v_1(u_1 - w_2))]} . \quad (16.11)$$

En développant les exponentielles nous obtenons des termes en dérivées d'ordre supérieur par rapport à $D^4 R^4$. Nous étudions plus bas le cas de $D^6 R^4$.

- Le couplage en $D^4 R^4$

Le couplage en $D^4 R^4$ correspondant au terme dominant de l'amplitude à deux boucles est obtenu en posant égal à zéro les impulsions externes. A cet ordre la somme des contributions planaires et non-planaires donne

$$I^P(0) + I^{NP}(0) = \frac{\pi^{11-n}}{3 \ell_P^{2n} \mathcal{V}_n^2} \sum_{\{m_I, n_I\}} \int_0^\infty d\sigma d\lambda d\rho \frac{1}{\Delta^{\frac{7-n}{2}}} e^{-G^{IJ}(\sigma m_I m_J + \lambda n_I n_J + \rho(m+n)_I(m+n)_J)}. \quad (16.12)$$

Tout comme dans le cas de l'amplitude à une boucle cette amplitude diverge pour toutes les valeurs des entiers des modes de Kaluza-Klein dans la région où $\sigma, \lambda, \rho \sim 0$. Nous isolons la divergence ultra-violette de ce diagramme en procédant à une resommation de Poisson sur les entiers m_I et n_I . Après resommation, il est pratique d'introduire les variables

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\Delta}, \quad \hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\Delta}, \quad (16.13)$$

et

$$\Delta = \sigma \lambda + \sigma \rho + \lambda \rho = \hat{\Delta}^{-1} = (\hat{\sigma} \hat{\lambda} + \hat{\sigma} \hat{\rho} + \hat{\lambda} \hat{\rho})^{-1}. \quad (16.14)$$

et l'amplitude (16.12) devient

$$I^{P+NP}(0) = \frac{\pi^7}{3} \sum_{\{m_I, n_I\}} \int_0^\infty d\hat{\sigma} d\hat{\lambda} d\hat{\rho} \hat{\Delta}^{1/2} e^{-\pi E_w}, \quad (16.15)$$

avec

$$E_w(\hat{\sigma}, \hat{\lambda}, \hat{\rho}) = G_{IJ} \left(\hat{\lambda} \hat{m}_I \hat{m}_J + \hat{\sigma} \hat{n}_I \hat{n}_J + \hat{\rho} (\hat{m} + \hat{n})_I (\hat{m} + \hat{n})_J \right), \quad (\text{I6.16})$$

qui est une fonction des paramètres d'enroulement. Afin de faire apparaître les divergences encore plus clairement nous introduisons les nouvelles variables modulaires [8]

$$\tau_1 = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho} + \hat{\lambda}}, \quad \tau_2 = \frac{\sqrt{\hat{\Delta}}}{\hat{\rho} + \hat{\lambda}}, \quad V = \ell_P^2 \sqrt{\hat{\Delta}}. \quad (\text{I6.17})$$

et la mesure d'intégration devient

$$d\hat{\lambda} d\hat{\sigma} d\hat{\rho} = 2\ell_P^{-6} dV V^2 \frac{d^2\tau}{\tau_2^2}, \quad (\text{I6.18})$$

où $d^2\tau = d\tau_1 d\tau_2$.

Le domaine d'intégration est $[0, \infty[$ pour la variable V alors que le paramètre complexe τ est restreint au sous groupe $\Gamma_0(2)$ de $Sl(2, \mathbb{Z})$ (cf. la partie grisée de la figure 6)

$$\mathcal{F}_{\Gamma_0(2)} = \left\{ 0 \leq \tau_1 \leq 1, \tau_2^2 + \left(\tau_1 - \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{4} \right\}. \quad (\text{I6.19})$$

Dans ces nouvelles variables l'amplitude (I6.12) devient

$$I^{P+NP}(0) = \frac{2\pi^7}{\ell_P^8} \sum_{\{\hat{m}_I, \hat{n}_I\}} \int_0^\infty dV V^3 \int_{\mathcal{F}_{\Gamma_0(2)}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} e^{-\pi \frac{V G_{IJ}}{\ell_P^2 \tau_2} [(\hat{m} + \tau \hat{n})^I (\hat{m} + \bar{\tau} \hat{n})^J]}. \quad (\text{I6.20})$$

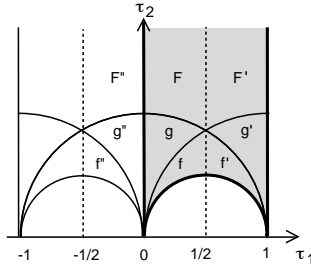


Fig. 6 *Domaine d'intégration de l'amplitude à deux boucles. La domaine en gris est celui pour $\Gamma_0(2)$ qui présente 3 pointes (cups) en $\tau = 0, 1$ et $\tau \sim i\infty$ correspondant aux divergences sous-dominantes du diagramme lorsqu'une boucle diverge.*

Dans ces nouvelles variables les divergences de l'amplitude à deux boucles sont facilement isolées.

- ▷ La divergence superficielle en Λ^8 du diagramme vient de la région $V \rightarrow \infty$ pour toutes les valeurs de τ . Nous régularisons cette divergence en restreignant le domaine d'intégration de V à $V \leq \Lambda^2$. Le contre-terme associé à cette divergence est la contribution en Λ^8 du diagramme 5(d).

- ▷ Les divergences sous-dominantes apparaissent lorsque τ approche l'une des régions en pointe du domaine $\Gamma_0(2) : \tau \rightarrow (\infty, 0, 1)$. Nous régularisons cette divergence en restreignant le domaine d'intégration de τ_2 par $\tau_2 \leq \tau_2^c = \Lambda^2/V$. Ces régimes correspondent à une boucle qui diverge et il est facile de vérifier que l'intégrale se comporte comme Λ^3 dans ce régime. Cette divergence est régularisée par le contre-terme 5(c).

En spécialisant au cas du tore \mathcal{T}^2 , la fonction des modes d'enroulement dans (16.16) prend la forme

$$E_w = \frac{\mathcal{V}V}{\Omega_2 \tau_2} |(1 \ \Omega)A(\tau \ 1)|^2 - 2\mathcal{V}V \det(A), \quad (16.21)$$

où nous avons utilisé la paramétrisation de la métrique du tore en termes de son volume \mathcal{V} et de sa structure complexe Ω

$$G_{IJ} \hat{m}_I \hat{m}_J = \ell_P^2 \mathcal{V} \frac{|\hat{m}_1 + \hat{m}_2 \Omega|^2}{\Omega_2}, \quad (16.22)$$

et défini la matrice 2×2 $A = (\hat{m}_I, \hat{n}_I)$. L'amplitude (16.20) prend alors la forme familière

$$I^{P+NP}(0) = \frac{2\pi^7}{\ell_P^8} \int_0^{V^c} dV V^3 \int_{\mathcal{F}_{\tau_2^c}} \frac{d^2 \tau}{\tau_2^2} \tau_2 \Gamma_{(2,2)}(\mathcal{V}, \Omega; V, \tau). \quad (16.23)$$

où nous reconnaissons l'expression de l'amplitude à une boucle en théorie des cordes compactifiée sur un tore \mathcal{T}^2 .

Cette expression est facilement analysée par la méthode des orbites [29,8] qui nous donne les trois cas suivants

- (I) L'orbite singulière pour laquelle tous les modes d'enroulement sont nuls $A = 0$. Cette contribution donne la divergence dominante en Λ^8 . Le contre-terme dans l'action effective est

$$\int d^9 x \sqrt{-G} D^8 R^4 = \int d^9 x \sqrt{-g^{IIA}} (g_s^{IIA})^{4/3} D^8 R^4 \quad (16.24)$$

qui n'a aucune interprétation en théorie des cordes. Notre schéma de régularisation nous impose de soustraire cette divergence selon

$$A_{div}^{(2)} + \delta_2 A^{(2)} \Big|_{5(d)} = D^8 R^4 (\Lambda^8 + c_2) = 0. \quad (16.25)$$

- (II) L'orbite dégénérée pour laquelle $\det A = 0$ mais $A \neq 0$. Ces configurations sont données par les classes d'équivalence à droite sous l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$. Ces orbites sont paramétrisées par $[A] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & l \\ 0 & k \end{pmatrix} \gamma, \gamma \in SL(2, \mathbb{Z}) \right\}$. L'action à droite de $SL(2, \mathbb{Z})$ peut être réabsorbée par une transformation du paramètre modulaire τ . La somme de toutes ces transformations déplie le domaine fondamental en la bande $-1/2 \leq \tau_1 \leq 1/2$ et

$0 \leq \tau_2$. Dans cette bande l'intégrale est divergente dans la région $\tau_2 \rightarrow \infty$ et donne lieu à la divergence sous-dominante en Λ^3 . En coupant les grandes valeurs de τ_2 on montre que cette contribution est donnée par [8]

$$A_{s-div}^{(2)} = \frac{\pi^{5/2} \Lambda^3}{\ell_P^5} \mathcal{V}^{-\frac{5}{2}} E_{\frac{5}{2}}. \quad (16.26)$$

a cette contribution nous devons ajouter celle du contre-terme venant du diagramme 5(c) selon

$$\begin{aligned} A_{s-div}^{(2)} + \delta_1 A^{(2)} \Big|_{5(c)} &= (\Lambda^3 + c_1) \times \frac{\pi^5}{2 \ell_P^5} \mathcal{V}^{-\frac{5}{2}} E_{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{2\pi^2}{6 \ell_P^5} \times \pi^5 \mathcal{V}^{-\frac{5}{2}} E_{\frac{5}{2}}. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Nous avons utilisé la valeur déterminée à une boucle (cf. l'équation (15.20)) pour le contre-terme c_1 .

(III) L'orbite non dégénérée $\det(A) \neq 0$. Les classes d'équivalence sous l'action à droite de $SL(2, \mathbb{Z})$ sont paramétrisées par $A = \pm \begin{pmatrix} m & j \\ 0 & n \end{pmatrix}$ où $0 \leq j \leq m-1$, $m > 0$ et $n \neq 0$. Dans ce cas le domaine fondamental est déplié en le plan complexe supérieur. Cette orbite non dégénérée donne une contribution finie à l'amplitude, donnée par

$$\frac{2\pi^4 \zeta(3)\zeta(4)}{\ell_P^8} \mathcal{V}^{-4} \quad (16.28)$$

Nous avons donc déterminé le couplage en $D^4 R^4$ à partir du diagramme à deux boucles et il est donné par

$$\mathcal{S}_{D^4 R^4} = \frac{\ell_P^3}{96 \cdot (4\pi)^7} \int d^9 x \sqrt{-G} \mathcal{V} D^4 R^4 \left(\mathcal{V}^{-\frac{5}{2}} E_{\frac{5}{2}}(\Omega, \bar{\Omega}) + \frac{8}{\pi^2} \zeta(3)\zeta(4) \mathcal{V}^{-4} \right) \quad (16.29)$$

Ce couplage reçoit donc une contribution à l'ordre des arbres et deux boucles, et des contributions non perturbatives en théorie de type IIB. Cette expression prend la forme suivante dans les variables de la théorie de type IIB

$$\mathcal{S}_{D^4 R^4} = \frac{l_s^3}{96 \cdot (4\pi)^7} \int d^9 x \sqrt{-g^B} r_B D^4 R^4 \left(e^{\frac{1}{2}\phi^B} E_{\frac{5}{2}}(\Omega, \bar{\Omega}) + \frac{8}{\pi^2} \zeta(3)\zeta(4) r_B^2 \right). \quad (16.30)$$

Le dernier terme en r_B^2 est une contribution à une boucle $g = 1$ en théorie des cordes qui vient compléter celle de l'action effective (15.16) obtenue à partir du diagramme à une boucle en dimension onze, pour restaurer la symétrie $r \rightarrow 1/r$ à cet ordre en dérivées. Le coefficient à deux boucles contenu dans $E_{5/2}$ est le même que le coefficient à deux boucles pour la théorie de type IIA obtenu dans (15.15). Ce qui n'est pas surprenant car il faut aller jusqu'à 5 boucles pour voir l'effet de la chiralité des théories sur les couplages à quatre points. Ces couplages ont été confirmés récemment par D'Hoker et Phong par un calcul direct en genre deux dans [13]. L'exactitude de ce résultat est confirmée par la structure des diagrammes à trois boucles établie par le travail récent de Bern et al. [77].

- Le couplage en $D^6 R^4$

Après avoir étudié le comportement à impulsion nulle de l'amplitude à deux boucles nous passons aux termes d'ordre supérieur en dérivées. Le développement de l'exponentielle dans (16.10) et (16.11) donne un terme en $D^6 R^4$. La compactification sur un tore T^2 est donnée par l'intégrale

$$I_{D^6 R^4}^{P+NP} = 2\pi^8 \int_0^\infty dV V^2 \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} A(\tau, \bar{\tau}) \tau_2 \Gamma_{(2,2)}, \quad (16.31)$$

où

$$A(\tau, \bar{\tau}) = \frac{|\tau|^2 - |\tau| + 1}{\tau_2} + 5 \frac{(\tau_1^2 - |\tau_1|)(|\tau|^2 - |\tau_1|)}{\tau_2^2}. \quad (16.32)$$

Nous voyons apparaître une fonction non triviale de τ dans l'intégrand de l'amplitude. Cette fonction satisfait une équation différentielle

$$4\tau_2^2 \partial_\tau \bar{\partial}_{\bar{\tau}} A(\tau, \bar{\tau}) = 12A(\tau, \bar{\tau}) - 12\tau_2 \delta(\tau_1), \quad (16.33)$$

qui sera capitale pour extraire la dépendance en les modules du tore.

Plus généralement aux ordres suivants en dérivées apparaissent des fonctions de plus en plus compliquées mais qui satisfont des équations différentielles assez simples. La structure générale est de la forme $A = \sum_{i=1}^N a_i(\tau, \bar{\tau})$ satisfaisant chacune une équation différentielle

$$\Delta a_i(\tau, \bar{\tau}) = \lambda_i a_i(\tau, \bar{\tau}) + \tau_2 P(\tau_2) \delta(\tau_1) \quad (16.34)$$

où $P(\tau_2)$ est un polynôme en τ_2 symétrique sous l'inversion : $P(\tau_2) = P(-1/\tau_2)$.

Pour chacune des fonctions satisfaisant une équation différentielle du type (16.34) nous pouvons extraire le couplage en considérant l'action du Laplacien Δ_Ω sur l'intégrale et en utilisant que le réseau $\Gamma_{(2,2)}$ satisfait l'identité

$$\Delta_\Omega(\tau_2 \Gamma_{(2,2)}) = \Delta_\tau(\tau_2 \Gamma_{(2,2)}), \quad (16.35)$$

Ainsi l'intégrale (16.31) satisfait l'équation différentielle

$$\Delta_\Omega I_{D^6 R^4}^{N+NP} = 12 I_{D^6 R^4}^{N+NP} - \frac{3\pi^3}{2\mathcal{V}^3} Z_{3/2}^2 \quad (16.36)$$

où le terme non homogène vient de la contribution du terme inhomogène en $\delta(\tau_1)$ dans (16.33). Puisque le réseau $\tau_2 \Gamma_{(2,2)}$ ne dépend du volume \mathcal{V} que selon la combinaison $V\mathcal{V}$ (cf. la formule (16.21)), il est clair que le couplage (16.31) à la bonne dépendance en \mathcal{V}^{-3} dans le volume de compactification pour survivre à la limite de décompactification en type IIB (cf. l'équation (14.11)). Le couplage à l'action effective de type IIB sera donné par $\mathcal{E}_{(3/2,3/2)} = 4\mathcal{V}^3/\pi^3 I_{D^6 R^4}^{N+NP}$. Cette fonction est complètement caractérisée par l'équation différentielle

$$\Delta_\Omega \mathcal{E}_{(3/2,3/2)} = 12 \mathcal{E}_{(3/2,3/2)} - 6Z_{3/2}^2 \quad (16.37)$$

et la condition que le terme dominant dans la limite de couplage faible soit le terme des arbres i.e. $\lim_{\Omega_2 \rightarrow 0} \mathcal{E}_{(3/2,3/2)} \sim \Omega_2^3$. Cette fonction contient des contributions perturbatives jusqu'à 3 boucles [12]. Nous avons donc $\beta_3 = 3$ en accord avec le théorème de non renormalisation (14.8).

- Corrections aux seuils normaux de masse nulle

La réduction de l'amplitude à une boucle sur un tore donnée dans l'équation (15.15) donne dans les variables de type IIA une série de termes à une boucle en théorie des cordes qui présentent des puissances positives en r_A . Dans la limite de décompactification en dimension dix ces contributions se resomment pour reconstruire la contribution en $\hat{R}^4 s \log(s)$ de l'amplitude à une boucle

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r_A} (-\alpha' s)^{\frac{1}{2}} - \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma(n - \frac{1}{2}) \zeta(2n - 1) \frac{r_A^{2n-1}}{n!} s^{2n} \right) \hat{R}^4 \\ &= \frac{1}{r_A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n^2}{r_A^2} - \alpha' s \right)^{\frac{1}{2}} \hat{R}^4 \\ &\longrightarrow_{r_A \rightarrow \infty} s \log(s) \hat{R}^4 \end{aligned} \quad (16.38)$$

De la même façon la resommation des contributions en $r_A^{2k-7} D^{2k} \hat{R}^4$ produit les contributions en $s^4 \log(s)$ que nous avons analysées dans la chapitre précédant. Cette fois ces contributions viennent du diagramme à deux boucles $L = 2$ où sont resommés les modes de Kaluza-Klein dans une des deux boucles, et où les modes de masses nuls sont conservés dans l'autre boucle.

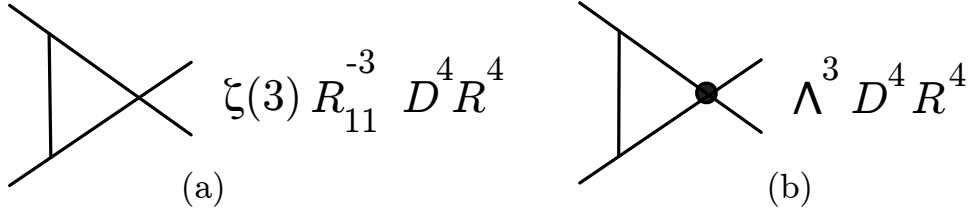


Fig. 7 Diagramme à deux boucles contribuant à la contribution en $s^4 \log(s)$ en type IIA

Le cas de type IIB est différent car pour reconstruire les contributions donnant la structure non-analytique des seuils normaux de production de particules, nous devons resommer les modes d'enroulement plutôt que les modes de Kaluza-Klein.

Comme on le constate sur la formule (15.16) issue de la réduction de l'amplitude à une boucle $L = 1$ seulement des puissances en $1/r_B$ apparaissent. Il faut considérer les amplitudes en ordre plus élevés $L \geq 2$ afin d'obtenir les contributions d'enroulement qui se sommeront. Ce phénomène est un cas particulier de la construction que nous décrivons qui ne donne des expressions invariantes sous la T-dualité $r \rightarrow 1/r$ que seulement après sommation de plusieurs diagrammes. Les diagrammes individuellement ne présentent pas cette invariance.

La structure de l'action effective en termes des variables de type IIB est

$$S = \int d^9 x \sqrt{g^{(9)}} r_B^{-1 + \frac{4q-2k}{3}} e^{\frac{2k-q}{3}\phi} f_{k,q}(\Omega) D^{2k} \hat{R}^4 \quad (16.39)$$

où $f_{k,q}(\Omega)$ est une forme modulaire invariante sous l'action de $Sl(2, \mathbb{Z})$ sur Ω . Les termes linéaires en r_B tels que $q = 3/2 + k/2$ donnent les contributions analytiques à l'action effective de type IIB, et sont les contributions que nous avons discutées pour les termes en R^4 (avec $k = 2$), $D^4 R^4$ (avec $k = 2$) et $D^6 R^4$ (avec $k = 3$). Les termes avec des puissances positives de r_B divergent et se resomment en les contributions non-analytiques du côté de type IIB

L'analyse des diagrammes à une boucle $L = 1$, deux boucles $L = 2$, trois boucles $L = 3$ et des diagrammes associés à des divergences sous-dominantes à quatre boucles $L = 4$ donnent la structure schématique suivante

$$S = \left(s \log(s) + \Omega_2^{-\frac{3}{2}} Z_{\frac{3}{2}} s^4 \log(s) + \Omega_2^{-2} s^5 \log(s) + \Omega_2^{-\frac{5}{2}} Z_{\frac{5}{2}} s^6 \log(s) \right. \\ \left. + \Omega_2^{-3} \left(Z_{\frac{3}{2}}^2 + E_{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})} \right) s^7 \log(s) + \dots \right) R^4 \quad (16.40)$$

17. Comportement ultra-violet des amplitudes dans la théorie $N = 8$

Les arguments que nous avons présentés, et surtout la connexion avec la structure de la théorie des cordes nous permettent donc de supposer que $\beta_L = L$ pour $L \geq 2$.

Dans ce cas le degré de divergence des amplitudes à quatre gravitons est

$$\delta_L = (D - 4)L - 6 \quad (17.1)$$

qui est le même degré de divergence que les amplitudes à quatre points en théorie de jauge $N = 4$ SYM [78].¹⁸

Sous l'hypothèse que la formule (17.1) est valable à tous les ordres en boucles nous en déduisons que la théorie est finie dans l'UV en quatre dimensions, et la théorie de supergravité $N = 8$ serait donc une théorie finie de la gravitation.

Un tel comportement ultra-violet n'est possible que si de nombreuses compensations se produisent entre les différents diagrammes de Feynman apparaissant à chaque ordre en boucles. En effet chaque diagramme considéré individuellement a un très mauvais comportement ultra-violet avec au mieux au delà de deux boucles $\delta_L = (D - 2)L - 10$. Les techniques actuelles de superspace et d'implémentation de la supersymétrie linéaire ne permettent pas d'expliquer ce comportement, même si les contraintes sur les divergences des théorie de supergravité ont été récemment améliorées [80].

¹⁸ Les calculs récents les plus avancés en théorie de jauge $N = 4$ SYM jusqu'à 5 boucles [79] et en théorie de supergravité $N = 8$ jusqu'à 3 boucles confirment cette coïncidence [77].

Chapitre V

CONCLUSION

Nous venons de présenter une théorie de la matrice S pour la théorie M . Nous avons expliqué en quoi cette construction est compatible avec les symétries de dualité de la théorie M et nous avons présenté sa connexion avec la matrice S de la théorie des cordes dont nous avons reproduit certaines des caractéristiques principales (à une et deux boucles). Cette relation est représentée sur la figure 4.

Nous avons déduit des bornes sur le comportement des diagrammes en boucles montrant que le comportement ultra-violet des éléments de matrices S des amplitudes gravitationnelles à un ordre donné est nettement meilleur que celui des diagrammes de Feynman individuels. Ce fait a été confirmé par le calcul récent à trois boucles en supergravité $N = 8$ [77].

Nous avons présenté des arguments montrant que le comportement ultra-violet des amplitudes à quatre gravitons en supergravité $N = 8$ est identique à celui des amplitudes en $N = 4$ super-Yang-Mills, jusqu'à trois boucles au moins. Si ce comportement subsiste à tous les ordres en perturbation alors la théorie de supergravité $N = 8$ serait finie dans l'ultra-violet en dimension 4. Il est capital de comprendre jusqu'à quel ordre en perturbation cette relation est valide et quelle est la relation entre cette théorie de supergravité et la théorie des cordes.

Reste à comprendre l'origine de ces compensations donnant ce très bon comportement UV. Le formalisme RNS ou le formalisme de la jauge de cône de lumière ne sont pas adaptés. Le formalisme des spineurs purs construit par Berkovits [81] semble être plus prometteur. Mais ce formalisme n'est pas déduit de principes premiers, et il est défini par une prescription inspirée des cordes topologiques $N = 2$. Il semble utile de comprendre l'origine du formalisme et analyser ses conséquences. Une version de ce formalisme existe en dimension onze, où il est possible de formuler une théorie de spineur pur pour la supermembrane [82] ou pour la superparticule [21,22]. Nous espérons que ce formalisme permettra de confirmer et systématiser l'analyse des diagrammes en boucles en dimension onze que nous avons présentée dans ce texte. Le rôle de la M_2 - et M_5 -brane dans la construction en dimension onze reste à clarifier, mais nous n'avons toujours pas d'outils pour analyser ces objets.

Peut-être que la théorie des twisteurs pour la gravité développée dans [83] donnera des réponses à ces questions.

RÉFÉRENCES

-
- [1] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. B **443**, 85 (1995) [arXiv :hep-th/9503124].
 - [2] E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, *Supergravity Theory In 11 Dimensions*, Phys. Lett. B **76**, 409 (1978).
 - [3] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, *On The Quantum Mechanics Of Supermembranes*, Nucl. Phys. B **305**, 545 (1988).
 - [4] K. Peeters, P. Vanhove and A. Westerberg, *Supersymmetric higher-derivative actions in ten and eleven dimensions, the associated superalgebras and their formulation in superspace*, Class. Quant. Grav. **18**, 843 (2001) [arXiv :hep-th/0010167].
 - [5] K. Peeters, P. Vanhove and A. Westerberg, *Towards complete string effective actions beyond leading order*, Fortsch. Phys. **52**, 630 (2004) [arXiv :hep-th/0312211].
 - [6] K. Peeters, P. Vanhove and A. Westerberg, *Chiral splitting and world-sheet gravitinos in higher-derivative string amplitudes*, Class. Quant. Grav. **19**, 2699 (2002) [arXiv :hep-th/0112157].
 - [7] M. B. Green and P. Vanhove, *The low energy expansion of the one-loop type II superstring amplitude*, Phys. Rev. D **61**, 104011 (2000) [arXiv :hep-th/9910056].
 - [8] M. B. Green, H. H. Kwon and P. Vanhove, *Two loops in eleven dimensions*, Phys. Rev. D **61**, 104010 (2000) [arXiv :hep-th/9910055].
 - [9] M. B. Green, H. h. Kwon and P. Vanhove, *Two loops in eleven dimensions*, Phys. Rev. D **61**, 104010 (2000) [arXiv :hep-th/9910055].
 - [10] M. Green et M. Gutperle, *Effects of D-instantons*, Nucl. Phys. **B498** (1997) 195, hep-th/9701093.
 - [11] M. Green, M. Gutperle et P. Vanhove, *One loop in eleven dimensions*, Phys. Lett. **409B** (1997) 177, hep-th/9706175.
 - [12] M. B. Green and P. Vanhove, *Duality and higher derivative terms in M theory*, JHEP **0601**, 093 (2006) [arXiv :hep-th/0510027].
 - [13] E. D'Hoker, M. Gutperle and D. H. Phong, *Two-loop superstrings and S-duality*, arXiv :hep-th/0503180.
 - [14] N. Berkovits, *Multiloop amplitudes and vanishing theorems using the pure spinor formalism for the superstring*, arXiv :hep-th/0406055.
 - [15] N. Berkovits, *New higher-derivative R^4 theorems*, arXiv :hep-th/0609006.
 - [16] M. B. Green, J. G. Russo and P. Vanhove, *Non-renormalisation conditions in type II string theory and maximal supergravity*, arXiv :hep-th/0610299.
 - [17] M. B. Green, J. G. Russo and P. Vanhove, *Ultraviolet properties of maximal supergravity*, arXiv :hep-th/0611273.
 - [18] M. Cederwall, U. Gran, M. Nielsen and B. E. W. Nilsson, *Manifestly supersymmetric M-theory*, JHEP **0010**, 041 (2000) [arXiv :hep-th/0007035]; *Generalised 11-dimensional supergravity*, arXiv :hep-th/0010042.
 - [19] M. Cederwall, B. E. W. Nilsson and D. Tsimpis, *Spinorial cohomology and maximally supersymmetric theories*, JHEP **0202**, 009 (2002) [arXiv :hep-th/0110069]; *Supersymmetric corrections to eleven-dimensional supergravity*, arXiv :hep-th/0409107.

- [20] P. S. Howe and D. Tsimpis, *On higher-order corrections in M theory*, JHEP **0309**, 038 (2003) [arXiv :hep-th/0305129].
- [21] L. Anguelova, P. A. Grassi and P. Vanhove, *Covariant one-loop amplitudes in $D = 11$* , Nucl. Phys. B **702**, 269 (2004), [arXiv :hep-th/0408171]
- [22] P. A. Grassi and P. Vanhove, *Topological M theory from pure spinor formalism*, arXiv :hep-th/0411167.
- [23] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995) [arXiv :hep-th/9510017].
- [24] E. Witten, *Bound states of strings and p-branes*, Nucl. Phys. B **460**, 335 (1996) [arXiv :hep-th/9510135].
- [25] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *A large- N reduced model as superstring*, Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [arXiv :hep-th/9612115].
- [26] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, *M theory as a matrix model : A conjecture*, Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997) [arXiv :hep-th/9610043].
- [27] R. Dijkgraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, *Matrix string theory*, Nucl. Phys. B **500**, 43 (1997) [arXiv :hep-th/9703030].
- [28] I. K. Kostov and P. Vanhove, *Matrix string partition functions*, Phys. Lett. B **444**, 196 (1998) [arXiv :hep-th/9809130].
- [29] C. Bachas, C. Fabre, E. Kiritsis, N. A. Obers and P. Vanhove, *Heterotic/type-I duality and D-brane instantons*, Nucl. Phys. B **509**, 33 (1998) [arXiv :hep-th/9707126].
- [30] F. Sugino, *Cohomological field theory approach to matrix strings*, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 3979 (1999) [arXiv :hep-th/9904122].
- [31] G. W. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, *D-particle bound states and generalized instantons*, Commun. Math. Phys. **209**, 77 (2000) [arXiv :hep-th/9803265].
- [32] F. Sugino and P. Vanhove, *U-duality from matrix membrane partition function*, Phys. Lett. B **522**, 145 (2001) [arXiv :hep-th/0107145].
- [33] B. Pioline, H. Nicolai, J. Plefka and A. Waldron, *R^4 couplings, the fundamental membrane and exceptional theta correspondences*, JHEP **0103**, 036 (2001) [arXiv :hep-th/0102123].
- [34] A. Sen, *Tachyon condensation on the brane antibrane system*, JHEP **9808**, 012 (1998) [arXiv :hep-th/9805170].
Universality of the tachyon potential, JHEP **9912**, 027 (1999) [arXiv :hep-th/9911116].
- [35] A. A. Gerasimov and S. L. Shatashvili, *On exact tachyon potential in open string field theory*, JHEP **0010**, 034 (2000) [arXiv :hep-th/0009103].
- [36] D. Kutasov, M. Marino and G. W. Moore, *Remarks on tachyon condensation in superstring field theory*, arXiv :hep-th/0010108 ;
Some exact results on tachyon condensation in string field theory, JHEP **0010**, 045 (2000) [arXiv :hep-th/0009148].
- [37] L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, *String field theory around the tachyon vacuum*, Adv. Theor. Math. Phys. **5**, 353 (2002) [arXiv :hep-th/0012251].
- [38] R. Minasian, S. L. Shatashvili and P. Vanhove, *Closed strings from $SO(8)$ Yang-Mills instantons*, Nucl. Phys. B **613**, 87 (2001) [arXiv :hep-th/0106096].
- [39] R. Minasian and G. W. Moore, *K-theory and Ramond-Ramond charge*, JHEP **9711**, 002 (1997) [arXiv :hep-th/9710230].

- [40] E. Witten, *D-branes and K-theory*, JHEP **9812**, 019 (1998) [arXiv :hep-th/9810188].
- [41] I. Antoniadis, R. Minasian, S. Theisen and P. Vanhove, *String loop corrections to the universal hypermultiplet*, Class. Quant. Grav. **20**, 5079 (2003) [arXiv :hep-th/0307268].
- [42] A. Strominger, *Loop corrections to the universal hypermultiplet*, Phys. Lett. B **421**, 139 (1998) [arXiv :hep-th/9706195].
- [43] D. M. J. Calderbank and H. Pedersen, *Selfdual Einstein metrics with torus symmetry*, J. Diff. Geom. **60** (2002) 485-521. [arXiv :math.dg/0105263].
- [44] D. Robles-Llana, F. Saueressig and S. Vandoren, *String loop corrected hypermultiplet moduli spaces*, JHEP **0603**, 081 (2006) [arXiv :hep-th/0602164].
- [45] J. Kappeli, S. Theisen and P. Vanhove, *A note on topological amplitudes in hybrid string theory*, arXiv :hep-th/0607021.
- [46] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *4D gravity on a brane in 5D Minkowski space*, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000) [arXiv :hep-th/0005016].
- [47] I. Antoniadis, R. Minasian and P. Vanhove, *Non-compact Calabi-Yau manifolds and localized gravity*, Nucl. Phys. B **648**, 69 (2003) [arXiv :hep-th/0209030].
- [48] E. Kohlprath and P. Vanhove, *Localized gravity in non-compact superstring models*, arXiv :hep-th/0409197.
- [49] M. Green, J. H. Schwarz et E. Witten *Superstring Theory*, Cambridge University Press 1985 ;
E. D'Hoker et D.H. Phong *The Geometry of String Perturbation Theory*, Rev. Mod. Phys. **60** (1988) 917 ;
D. Lüst et S. Theisen *Lectures on String Theory*, Springer Lecture notes in physics 1989 ;
J. Polchinski, *String theory. Vol. 2 : Superstring theory and beyond*, Cambridge University Press 1998.
- [50] D. J. Gross and J. H. Sloan, *The quartic effective action for the heterotic string*, Nucl. Phys. B **291**, 41 (1987).
- [51] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *One loop divergencies in the theory of gravitation*, Annales Poincaré Phys. Theor. A **20**, 69 (1974).
- [52] P. Benincasa, C. Boucher-Veronneau and F. Cachazo, *Taming tree amplitudes in general relativity*, arXiv :hep-th/0702032.
- [53] M. B. Green and S. Sethi, *Supersymmetry constraints on type IIB supergravity*, Phys. Rev. D **59**, 046006 (1999) [arXiv :hep-th/9808061].
- [54] A. Sinha, JHEP **0208**, 017 (2002) [arXiv :hep-th/0207070].
- [55] B. de Wit and H. Nicolai, *N=8 Supergravity*, Nucl. Phys. B **208**, 323 (1982).
- [56] P. S. Howe and P. C. West, *The Complete N=2, D = 10 Supergravity*, Nucl. Phys. B **238**, 181 (1984).
- [57] J. H. Schwarz and P. C. West, *Symmetries And Transformations Of Chiral N=2 D = 10 Supergravity*, Phys. Lett. B **126**, 301 (1983).
- [58] J. H. Schwarz, *Covariant Field Equations Of Chiral N=2 D = 10 Supergravity*, Nucl. Phys. **B226** (1983) 269.
- [59] N. Berkovits, *Construction of R⁴ terms in N = 2 D = 8 superspace*, Nucl. Phys. B **514**, 191 (1998) [arXiv :hep-th/9709116].

- [60] N. Berkovits and C. Vafa, *Type IIB R^4 $H^{**}(4g-4)$ conjectures*, Nucl. Phys. B **533**, 181 (1998) [arXiv :hep-th/9803145].
- [61] J. G. Russo and A. A. Tseytlin, *One-loop four-graviton amplitude in eleven-dimensional supergravity*, Nucl. Phys. B **508**, 245 (1997) [arXiv :hep-th/9707134].
- [62] P. S. Howe, *Weyl superspace*, Phys. Lett. B **415**, 149 (1997) [arXiv :hep-th/9707184].
- [63] M. Duff, J. Liu et R. Minasian, Nucl. Phys. **B452** (1995) 261, hep-th/9506126.
- [64] J. H. Schwarz, Phys. Lett. **360B** (1995) 13, hep-th/9508143.
- [65] P. Aspinwall, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B46** (1996) 30, hep-th/9508154
- [66] J. H. Schwarz, *Lectures on Superstring and M-theory dualities*, hep-th/9607201.
- [67] M.B. Green, J. Russo and P. Vanhove, *Low energy expansion of the four-graviton one-loop amplitude in type II superstring theory to appear*
- [68] E. D'Hoker and D. H. Phong, *Lectures on two-loop superstrings*, arXiv :hep-th/0211111 ;
Two-loop superstrings I-VI, hep-th/0110247, hep-th/0110283, hep-th/0111016, hep-th/0111040, hep-th/0501196 ,hep-th/0501197
- [69] M. B. Green, J. H. Schwarz and L. Brink, *$N=4$ Yang-Mills And $N=8$ Supergravity As Limits Of String Theories*, Nucl. Phys. B **198**, 474 (1982).
- [70] N. Berkovits, *New higher-derivative R^4 theorems*, arXiv :hep-th/0609006.
- [71] L. Brink and J. H. Schwarz, *Quantum Superspace*, Phys. Lett. B **100**, 310 (1981).
- [72] N. Berkovits, *Covariant quantization of the superparticle using pure spinors*, JHEP **0109**, 016 (2001) [arXiv :hep-th/0105050].
- [73] M. B. Green, M. Gutperle and H. H. Kwon, *Light-cone quantum mechanics of the eleven-dimensional superparticle*, JHEP **9908**, 012 (1999) [arXiv :hep-th/9907155].
- [74] P. Dai and W. Siegel, *Worldline green functions for arbitrary Feynman diagrams*, arXiv :hep-th/0608062 ;
K. Lee and W. Siegel, *Simpler superstring scattering*, JHEP **0606**, 046 (2006) [arXiv :hep-th/0603218] ;
K. Y. Lee and W. Siegel, *Conquest of the ghost pyramid of the superstring*, JHEP **0508**, 102 (2005) [arXiv :hep-th/0506198].
- [75] Z. Bern, L.J. Dixon, D.C. Dunbar, M. Perelstein and J.S. Rozowsky, *On the relationship between Yang–Mills theory and gravity and its implications for ultraviolet divergences*, Nucl. Phys. B **530**, 401 (1998). [arXiv :hep-th/9802162]
- [76] N. E. J. Bjerrum-Bohr, D. C. Dunbar, H. Ita, W. B. Perkins and K. Risager, *The no-triangle hypothesis for $N = 8$ supergravity*, JHEP **0612**, 072 (2006) [arXiv :hep-th/0610043].
- [77] Z. Bern, L. J. Dixon and R. Roiban, *Is $N = 8$ supergravity ultraviolet finite ?*, Phys. Lett. B **644**, 265 (2007) [arXiv :hep-th/0611086].
Z. Bern, J. J. Carrasco, L. J. Dixon, H. Johansson, D. A. Kosower, R. Roiban, *Three-Loop Superfiniteness of $N=8$ Supergravity*, [arXiv :hep-th/0702112]
- [78] P. S. Howe and K. S. Stelle, *Ultraviolet Divergences In Higher Dimensional Supersymmetric Yang-Mills Theories*, Phys. Lett. B **137**, 175 (1984).
- [79] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson and D. A. Kosower, *Maximally Supersymmetric Planar Yang-Mills Amplitudes at Five Loops*, arXiv :0705.1864 [hep-th].

- [80] P. S. Howe and K. S. Stelle, *Supersymmetry counterterms revisited*, Phys. Lett. B **554**, 190 (2003) [arXiv :hep-th/0211279].
- [81] N. Berkovits, *ICTP lectures on covariant quantization of the superstring*, arXiv :hep-th/0209059.
- [82] N. Berkovits, *Covariant quantization of the supermembrane*, JHEP **0209**, 051 (2002) [arXiv :hep-th/0201151].
- [83] M. Abou-Zeid, C. M. Hull and L. J. Mason, *Einstein supergravity and new twistor string theories,*” arXiv :hep-th/0606272 ;
M. Abou-Zeid and C. M. Hull, *A chiral perturbation expansion for gravity*, JHEP **0602**, 057 (2006) [arXiv :hep-th/0511189].

Dans cette thèse nous énonçons des théorèmes de non-renormalisation en théorie des cordes dans le secteur gravitationnel. Ces théorèmes sont obtenus en reliant les éléments de matrice S en théorie des cordes et en supergravité en dimension onze dans le cadre de la conjecture de la théorie M. Ces théorèmes impliquent que la théorie de supergravité $N = 8$ à le même degré de divergence ultra-violette que la théorie de super-Yang-Mills $N = 4$ au moins jusqu'à trois boucles et pourrait être finie dans l'ultra-violet en dimension quatre.

Mots clés : supercordes, supersymétrie, phénomènes non perturbatifs, théorèmes de non renormalisation

In this thesis we describe various non renormalisations theorems for the string effective action. These results are derived in the context of the M theory conjecture allowing to connect the four gravitons string theory S matrix elements with that of eleven dimensional supergravity. These theorems imply that $N = 8$ supergravity theory has the same UV behaviour as the $N = 4$ SYM theory at least up to three loops, and could be UV finite in four dimensions.

Keywords : superstring theory, supersymmetry, non-renormalisation theorems