объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-373

В.К.Мельников

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – де ВРИСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1988

В настоящей заметке излагается метод интегрирования системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 8\sum_{m=1}^{N} \kappa_m \frac{\partial}{\partial x}|\phi_m|^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + u\phi_m = E_m\phi_m, \qquad m = 1, \dots, N, \tag{1}$$

в классе быстро убывающих по x функций. Здесь N — произвольное натуральное число, а вещественные параметры κ_m и E_m удовлетворяют условиям $\kappa_m^2 = 1$, $E_m > 0$, $m = 1,\dots,N$. Более точно, речь идет о нахождении решения системы (1), удовлетворяющего следующим требованиям. Пусть $u_0 = u_0(x)$ — произвольная вещественная функция, обладающая следующими свойствами:

1) существуют три непрерывные производные $u_0'(x)$, $u_0''(x)$, $u_0'''(x)$, такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{|xu_0(x)| + \sum_{r=0}^{3} |u_0^{(r)}(x)|\}\,dx < \infty; \tag{2}$$

2) уравнение Шредингера

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + u_0(x)\,\phi = E\phi \tag{3}$$

имеет ровно N дискретных собственных значений $E = E_m$, $m = 1,\dots, N$. Пусть, далее, $A_m = A_m(t)$ — произвольные непрерывные функции t, $m = 1,\dots,N$. Ниже с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера будет указан путь для построения решения $u = u(x,t)$, $\phi_m = \phi_m(x,t)$, $m = 1,\dots,N$, системы (1), такого, что

$$u(x,0) = u_0(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_m(x,t)|^2\,dx = |A_m(t)|^2, \qquad m = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Излагаемая здесь процедура нахождения названного выше решения системы (1) очень сходна с обнаруженной в работе [1] процедурой получения быстро убывающего по x решения уравнения Кортевега — де Вриса. Однако имеются и некоторые отличия, на которые будет указано ниже.

Пусть A, B, C и I_0 — квадратные матрицы порядка $N+3$, имеющие соответственно вид

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u+\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u' & u+\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \kappa_1 \bar{\phi}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_N \bar{\phi}_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} -u' & 2u-4\lambda & 0 & 4\phi_1 & \dots & 4\phi_N \\ -u''-4\sum\limits_{m=1}^{N}\kappa_m|\phi_m|^2 & u' & 2u-4\lambda & 4\phi_1' & \dots & 4\phi_N' \\ u+\lambda & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \kappa_1 \bar{\phi}_1' & -\kappa_1\bar{\phi}_1 & 0 & \lambda+E_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_N \bar{\phi}_N' & -\kappa_N\bar{\phi}_N & 0 & 0 & \dots & \lambda+E_N \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2u-4\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2u' & -4\phi_1 & \dots & -4\phi_N \\ -u' & -u-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \kappa_1 \bar{\phi}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_N \bar{\phi}_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$I_0 = \operatorname{diag}(1, 1, 0, 0, \dots, 0).$$

Здесь и всюду в дальнейшем черта означает комплексное сопряжение, а штрихами обозначено дифференцирование по x. Возьмем операторы

$$X = \partial_x + A, \quad T = I_0\,\partial_t + B,$$

где ∂_x и ∂_t означают частное дифференцирование по x и t соответственно. Нетрудно убедиться, что операторное соотношение

$$[T, X] = CT \tag{5}$$

эквивалентно системе (1). Из этого соотношения следует, что если вектор-столбец f удовлетворяет уравнению $Xf = 0$, то вектор-столбец $g = Tf$ удовлетворяет уравнению $(X + C)\,g = 0$.

Исходя из этого замечания, рассмотрим линейную систему уравнений

$$f_0'' + (u+\lambda)\,f_0 = 0, \tag{6}$$

$$f_m' + \kappa_m\bar{\phi}_m f_0 = 0, \quad m = 1, \dots, N. \tag{7}$$

Возьмем теперь произвольное решение этой системы и с его помощью образуем вектор-столбец f с $N+3$ компонентами $f_0, f_0', f_0'', f_1, \dots, f_N$. Нетрудно убедиться в справедливости равенства $Xf = 0$. Далее, легко увидеть, что вектор-столбец $g = Tf$ в этом случае имеет $N+3$ компоненты вида $g_0, g_0', 0, g_1, \dots, g_N$, где

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} - u' f_0 + (2u - 4\lambda)\,f_0' + 4\sum_{m=1}^{N}\phi_m f_m, \tag{8}$$

$$g_m = (\bar{\phi}_m' f_0 - \bar{\phi}_m f_0')\,\kappa_m + (\lambda + E_m)\,f_m, \quad m = 1, \dots, N. \tag{9}$$

Таким образом, из соотношения (5) вытекает, что определенные посредством (6)-(9) величины $g_0, g_1, \dots, g_N$ удовлетворяют равенству

$$g_0'' + (u+\lambda)\,g_0 = 4\sum_{m=1}^{N}\phi_m g_m. \tag{10}$$

Кроме того, из соотношения (5) следует, что при $m = 1, \dots, N$ величины g_m не зависят от x, т.е.

$$\frac{\partial g_m}{\partial x} = 0, \quad m = 1, \dots, N. \tag{11}$$

Положим теперь $\lambda = k^2$, где $k \in (-\infty, \infty)$, и возьмем два решения f_0^- и f_0^+ уравнения (6), определяемых требованиями

$$f_0^- \sim \exp(-ikx), \qquad x \to -\infty,$$

$$f_0^+ \sim \exp(ikx), \qquad x \to \infty.$$

Пусть, далее, при $m = 1,\dots,N$

$$f_m^- = -\kappa_m \int_{-\infty}^{x} \bar{\phi}_m(z)\, f_0^-(z,k)\, dz, \tag{12}$$

$$f_m^+ = \kappa_m \int_{x}^{\infty} \bar{\phi}_m(z)\, f_0^+(z,k)\, dz.$$

Подставив эти выражения в равенства (8), (9), мы определим величины $g_0^-, g_0^+, g_1^-, g_1^+, \dots, g_N^-, g_N^+$. На основании (11) легко получаем, что при $m = 1,\dots,N$ справедливо равенство $g_m^- = g_m^+ \equiv 0$. Отсюда согласно (10) следует, что

$$g_0^- = 4ik^3 f_0^-, \qquad g_0^+ = -4ik^3 f_0^+. \tag{13}$$

При $k \neq 0$ пара решений $f_0^-(x,k)$ и $f_0^-(x,-k)$ является линейно независимой. Следовательно, справедливо равенство

$$f_0^+(x,k) = a(k)\, f_0^-(x,-k) + b(k)\, f_0^-(x,k). \tag{14}$$

Возьмем теперь вытекающее из (8), (13) равенство

$$\frac{\partial f_0^+}{\partial t} - u' f_0^+ + (2u - 4\lambda)\frac{\partial f_0^+}{\partial x} + 4\sum_{m=1}^{N} \phi_m f_m^+ + 4ik^3 f_0^+ = 0, \tag{15}$$

заменим в нем f_0^+ на выражение, стоящее в правой части равенства (14), и перейдем к пределу при $x \to -\infty$. В результате получим, что

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial t} + 8ik^3 b = 0, \tag{16}$$

т.е. эволюция величин a и b в нашем случае точно такая же, как и в случае уравнения Кортевега — де Вриса без источника.

Из равенства (14) вытекает хорошо известное представление для функции $a(k)$, т.е.

$$a(k) = \frac{1}{2ik}\left[\frac{\partial f_0^+}{\partial x} f_0^- - f_0^+ \frac{\partial f_0^-}{\partial x}\right].$$

Отсюда следует, что функция $a(k)$ допускает аналитическое продолжение по k в верхнюю полуплоскость, а ее нулям $k = k_m$ в верхней полуплоскости соответствуют точки дискретного спектра уравнения (6), т.е. при $k = k_m$ справедливо равенство

$$f_0^+(x,k_m) = B_m f_0^-(x,k_m), \tag{17}$$

где величины B_m не зависят от x. В силу (3) при $m = 1,\dots,N$ имеем $k_m^2 + E_m = 0$. Далее, с помощью (9) получаем, что при $m = 1,\dots,N$ выполняется равенство

$$\phi_m(x) = C_m f_0^+(x,k_m), \tag{18}$$

где величины C_m также не зависят от x. Возьмем теперь равенство (15), подставим в него вместо f_0^+ правую часть равенства (17) и перейдем к пределу при $x \to -\infty$. С учетом (4), (12), (17) и (18) получаем, что

$$\frac{dB_m}{dt} + (8ik_m^3 + 4\kappa_m |A_m(t)|^2)\, B_m = 0. \tag{19}$$

При $A_m \equiv 0$ это уравнение совпадает в точности с тем, что имеет место для уравнения Кортевега — де Вриса. Вместе с равенством (16) уравнение (19) полностью определяет эволюцию данных рассеяния для оператора Шредингера, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для нахождения интересующих нас решений системы (1). В частности, по этим данным полностью определяется ядро интегрального уравнения Гельфанда — Левитана /2/.

В заключение отметим, что правомерность всех используемых выше предельных переходов основывается на условии (2) и может быть строго доказана. Отметим также довольно необычную динамику солитонных решений системы (1), частично уже обнаруженную ранее в работе /3/. Наконец, отметим, что система (1) обладает следующей гамильтоновой структурой:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u}, \qquad \frac{\delta H}{\delta \phi_m} = \frac{\delta H}{\delta \bar{\phi}_m} = 0, \qquad m = 1,\dots,N,$$

где

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left[u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 8\sum_{m=1}^{N} \kappa_m \left(u|\phi_m|^2 - \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial x}\right|^2 - E_m|\phi_m|^2\right)\right] dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C.S. et al. – Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, No19, p.1095.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, т.15, №4, с.309.
3. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-87-868, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 мая 1988 года.

Мельников В.К. Р2-88-373

Метод интегрирования уравнения Кортевега — де Вриса с самосогласованным источником

Показано, что быстро убывающие по x решения уравнения Кортевега — де Вриса с самосогласованным источником могут быть найдены с помощью метода обратной задачи рассеяния для одномерного оператора Шредингера на прямой.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-88-373

Integration Method of the Korteweg — de Vries Equation with a Self-Consistent Source

It is shown that solutions rapidly decreasing with x of the Korteweg — de Vries equation with a self-consistent source can be found by the inverse scattering method for the one-dimensional Schroedinger operator on a straight line.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988