Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

Кафедра квантовой теории поля

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
главный научный сотрудник, доцент
_____________ О.Н. Чайковская
«30» мая 2017 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ОПТИЧЕСКИЕ СКАЛЯРЫ ДЛЯ ГЕОМЕТРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР ВБЛИЗИ ГОРИЗОНТА СОБЫТИЙ

по основной образовательной программе подготовки магистров
направление подготовки 03.04.02 – Физика

Филюков Сергей Александрович

Научный руководитель ВКР
доктор физ.-мат. наук, профессор
_____________ А. В. Галажинский

Автор работы
студент группы № 0514
_____________ С.А. Филюков
«28» мая 2017 г.

Томск– 2017

Оглавление

Введение

В общей теории относительности существует три основных подхода к классификации решений уравнений Эйнштейна в координатно-независимом виде: исследование свойств симметрии многообразий - векторов Киллинга, изучение алгебраической структуры тензора Вейля - классификация по Петрову [1], и оптические скаляры [2], описывающие поведение конгруэнций светоподобных геодезических.

Например, известная теорема Голдберга-Сакса [3] утверждает, что любое вакуумное решение, допускающее бессдвиговую конгруэнцию, является алгебраически специальным. Следует отметить также формализм Ньюмана-Пенроуза [4], с помощью которого, в частности, были найдены все вакуумные решения типа D в классификации Петрова в $d = 4$ [5].

В настоящее время, большое внимание исследователей уделяется развитию идей АдС/КТП–соответствия. Одним из ответвлений которого является построение конформной теории поля, дуальной экстремальной черной дыре Керра вблизи горизонта событий – так называемое Керр/КТП–соответствие [6] (см. также обзорные работы [7, 8]). Интерес к данной проблеме в значительной степени был мотивирован более ранней работой Бардина и Горовица [9], в которой было показано, что вблизи горизонта событий группа изометрии метрики Керра $\mathcal{R}^1 \times U(1)$ расширяется до $SO(2,1) \times U(1)$. Позже было установлено, что конформная симметрия, описываемая группой $SO(2,1)$, характерна для широкого класса экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий [10–12].

В контексте Керр/КТП–соответствия рассматриваются возбуждения метрики вблизи горизонта событий, которые контролируются определенными граничными условиями. С каждым набором граничных условий ассоциируется асимптотическая группа симметрий, причем, согласно исходной работе [6], конформный фактор SO(2,1) не играет существенной роли, а U(1) фактор в исходной группе изометрий метрики расширяется до алгебры Вирасоро асимптотических симметрий. Вычисление центрального заряда в алгебре Вирасоро и использование формулы Карди позволяют воспроизвести значение энтропии экстремальной черной дыры Керра в терминах дуальной конформной теории поля [6].

Несмотря на то, что $SO(2,1)$–симметрия экстремальной черной дыры Керра вблизи горизонта событий пока не нашла непосредственного применения в контексте Керр/КТП–соответствия, ее приложение к более традиционным вопросам представляет несомненный интерес. В частности, модель массивной релятивистской частицы, движущейся вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры Керра, является конформно-инвариантной теорией.

Следует подчеркнуть, что построение и исследование новых интегрируемых систем механики и теории поля представляет собой самостоятельное и активно развивающееся направление теоретической и математической физики. В прикладных задачах свойство интегрируемости играет исключительно важную роль. В частности, оно существенно упрощает процедуру построения явного решения уравнений движения, а в некоторых случаях позволяет выразить общее решение через интегралы движения с привлечением только алгебраических операций. По–настоящему интенсивное развитие данная область получила в последние три десятилетия (см., например, [13, 14] и цитируемую там литературу), когда для построения новых моделей такого типа был применен анализ Пенлеве, метод, основанный на построении пары Лакса, а также подход, основанный на разделении переменных в уравнении Гамильтона–Якоби.

Целью настоящей работы является исследование структуры оптических скаляров для геометрии экстремальный чёрных дыр вблизи горизонта событий. Исследование конгруэнций геодезических в пространствах, отвечающих экстремальным чёрным дырам вблизи горизонта событий, позволяет построить новые содержательные примеры интегрируемых систем.

В главе 1 приведены основные сведения об оптических тензорах и скалярах: скаляре расширения, тензоре вращения и сдвига, соответствующих геодезическим конгруэнциям, как времениподобным, так и светоподобным. Обсуждается их геометрический смысл. Выводится уравнение Рачаудхури, связывающее оптические скаляры между собой. В главе 2 дан краткий обзор известных решений уравнений Эйнштейна, описывающих геометрию экстремальный чёрных дыр Керра и Райсснера-Нордстрема вблизи горизонта событий. В главе 3 вычислены оптические скаляры для таких геометрий. Произведено качественное сравнение решений общего вида с геометриями вблизи горизонта. В Заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе и выносимые на защиту.

Глава 1

Оптические скаляры

В этой главе водятся такие понятия как скаляр расширения и тензоры вращения и сдвига, описывающие поведение конгруэнций геодезических. Устанавливается их геометрический смысл. Выводится уравнение Рачаудхури связывающее оптические скаляры между собой.

1.1 Деформируемая мембрана

Рассмотрим чисто кинематическую задачу движения двумерной гибкой мембраны в R^3. Для этого зафиксируем две близкие точки O и P и проследим за эволюцией вектора смещения $\xi^a(t)$ между ними за малый промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$. Учитывая $\xi^a(t_1) = \xi^a(t_0) + \Delta\xi^a(t_0)$, получим

$$\Delta\xi^a = B^a{}_b(t_0)\xi^b(t_0)\Delta t + O(\Delta t^2), \tag{1.1}$$

где $B^a{}_b$ некоторый тензор, зависящий от эволюции самой мембраны.

Считая $\xi^a(t)$ малым, получим уравнение эволюции малого вектора смещения.

$$\frac{d\xi^a}{dt} = B^a{}_b\xi^b + O(\xi^2). \tag{1.2}$$

Учитывая, что любая матрица B_{ab} разбивается на симмтеричную, антисимметричную и бесследовую компоненты

$$B_{ab} = \frac{1}{2}\Theta\delta_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \tag{1.3}$$

где

$$\Theta = Tr(B_{ab}), \quad \sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{2}\Theta\delta_{ab}, \quad \omega_{ab} = B_{[ab]}, \tag{1.4}$$

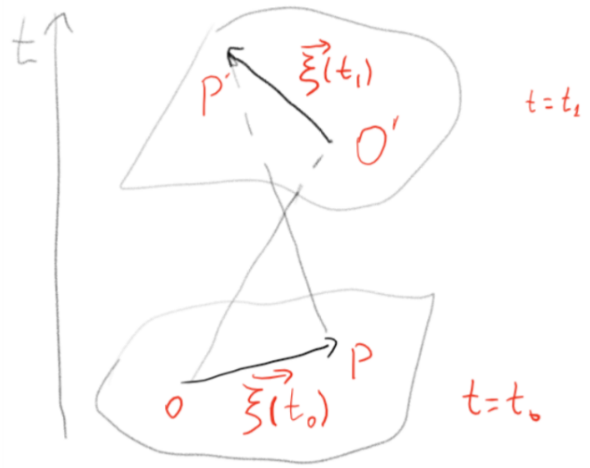

Рис. 1.1. Эволюция вектора смещения.

можно проследить за эволюцией малого диска радиуса r_0 с центром в точке O. Тогда для вектора смещения

$$\xi^a(t_0) = r_0(cos\phi, sin\phi), \tag{1.5}$$

получим 3 случая:

1) Параметр расширения.

Матрица B_{ab} имеет вид

$$B_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\Theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Theta = Tr(B_{ab}). \tag{1.6}$$

Вектор смещения получит приращение

$$\Delta\xi^a = \frac{1}{2}\Theta r_0 \Delta t(cos\phi, sin\phi), \tag{1.7}$$

что соответствует изменению радиуса изначального круга $r_0 \to r_0(1+\frac{1}{2}\Theta\Delta t)$ или, соответственно, изменению площади

$$\Theta = \frac{1}{A_0}\frac{\Delta A}{\Delta t}. \tag{1.8}$$

Таким образом, Θ соответствует удельному изменению площади за единицу времени.

Это свойство является общим и можно показать, что за изменение удельного объёма отвечает скаляр расширения.

Например, интерпретируя линейное преобразование

$$\xi^a(t_1) = (\delta^a{}_b + B^a{}_b \Delta t)\xi^b(t_0), \qquad (1.9)$$

как преобразование координат и вычисляя якобиан этого преобразования, получим:

$$J = det(\delta^a{}_b + B^a{}_b \Delta t) = 1 + Tr(B^a{}_b \Delta t) = 1 + \Theta \Delta t. \qquad (1.10)$$

Это означает, что соответствующие объёмы в моменты времени t_0 и t_1 связаны соотношением $V_1 = (1 + \Theta \Delta t)V_0$. Этот аргумент указывает на то, что тензоры вращения и сдвига не дают вклада в изменение объёма.

2) Тензор сдвига.

Матрица B_{ab} имеет вид

$$B_{ab} = \begin{pmatrix} \sigma_+ & \sigma_{\times +} \\ \sigma_{\times +} & -\sigma_+ \end{pmatrix}, \qquad (1.11)$$

соответственно, вектор смещения получит добавку

$$\Delta\xi^a = r_0 \Delta t(\sigma_+ cos\phi + \sigma_{\times +} sin\phi, -\sigma_+ sin\phi + \sigma_{\times +} cos\phi), \qquad (1.12)$$

что отвечает за деформацию исходной окружности в эллипс.

3) Тензор вращения.

Антисимметричной части матрицы B_{ab}

$$B_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.13)$$

соответствует следующему изменению вектора смещения

$$\Delta\xi^a = \omega r_0 \Delta t(sin\phi, -cos\phi). \qquad (1.14)$$

Иными словами, новый вектор смещения $\xi^a(t_1) = r_0(cos\phi', sin\phi')$, где $\phi' = \phi - \omega \Delta t$, получается из исходного поворотом на некоторый угол $\omega \Delta t$.

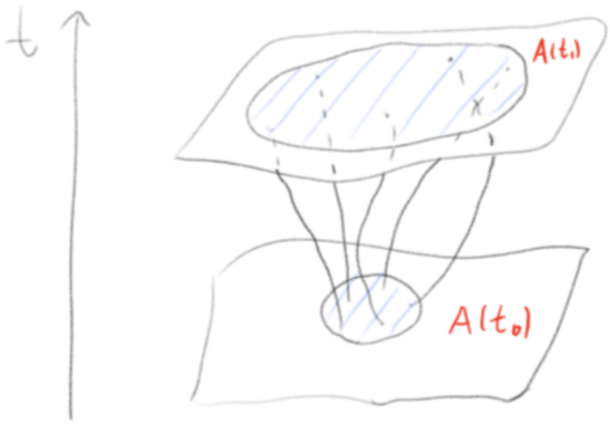

Рис. 1.2. Эффект от тензора расширения.

1.2 Конгруэнции времениподобных геодезических

Пусть (M, g) – (псевдо-)риманово многообразие, и $O \subset M$ – открытое множество в M. Конгруэнцией в O является семейство кривых таких, что через каждую точку $p \in O$ проходит в точности одна кривая этого семейства. Таким образом, касательные к конгруэнции определяют векторное поле в O, и наоборот, каждое непрерывное векторное поле порождает конгруэнцию кривых. Конгруэнция называется гладкой, если соответствующее векторное поле является гладким.

Аналогом вектора смещения, рассмотренного в предыдущей части, является вектор девиации $\xi = \xi^a(x)\partial_a$ между двумя близкими кривыми в конгруэнции. Проследим за эволюцией вектора девиации ξ, в предположении, что конгруэнция определена времениподобными геодезическими с заданным касательным векторным полем $u = u^a\partial_a$, удовлетворяющего следующим соотношениям:

$$g(u, u) = 1, \qquad \nabla_u u = 0, \qquad g(\xi, u) = 0, \qquad \pounds_\xi u = 0. \tag{1.15}$$

Отметим, что вектор девиации зафиксирован поперечно к потоку конгруэнции.

Переписывая условие $\pounds_\xi u = 0$ в ковариантном виде, получим прямой аналог (1.2)

$$\nabla_\xi u = \nabla_u \xi \quad \Rightarrow \quad \nabla_u \xi^a = B^a{}_b \xi^b, \tag{1.16}$$

где введённый тензор $B_{ab} = \nabla_b u_a$, как и в первой части этой главы, характеризует то, что поле не переносится параллельно, но растягивается и поворачивается линейным отображением B_{ab}, которое является поперечным к потоку конгруэнции, т.е.

$$B_{ab} u^b = u^a B_{ab} = 0. \tag{1.17}$$

Для того, чтобы разложить B_{ab} на неприводимые компоненты, удобно разбить исходную метрику на продольную и поперечную составляющие относительно заданной конгруэнции

$$g_{ab} = h_{ab} + u_a u_b \quad \Rightarrow \quad h_{ab} = g_{ab} - u_a u_b. \tag{1.18}$$

Таким образом, $h^a{}_b = g^{ac} h_{cb}$ является чисто пространственным оператором проектирования на подпространство касательного пространства, перпендикулярного к u, со свойствами

$$h^a{}_c h^c{}_b = h^a{}_b, \quad h^a{}_a = 3, \quad h_{ab} u^b = 0. \tag{1.19}$$

Тогда тензор B_{ab} разлагается на неприводимые компоненты

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \tag{1.20}$$

где скаляр расширения Θ, тензор сдвига σ_{ab} и тензор вращения ω_{ab} конгруэнции определены следующим образом:

$$\Theta = B^{ab} h_{ab} = B^{ab} h_{ab}, \tag{1.21}$$

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3}\Theta h_{ab}, \tag{1.22}$$

$$\omega_{ab} = B_{[ab]}. \tag{1.23}$$

Отметим, что тензоры σ_{ab} и ω_{ab} являются чисто пространственными, т.е. $\sigma_{ab}u^b = \omega_{ab}u^b = 0$ и, также как в случае с деформируемой мембраной, определяют вращение и деформацию конгруэнции. Таким образом, первоначальная сфера в касательном пространстве, параллельно переносимая вдоль вектора u^a касательного к конгруэнции, будет расширяться, пропорционально Θ, поворачиваться относительно начального расположения и деформироваться в эллипсоид, с главными осями вдоль собственных векторов $\sigma^a{}_b$ и со скоростями, являющимися собственными значениями $\sigma^a{}_b$.

Также заметим, что конгруэнция, определенная векторным полем $u^a\partial_a$, ортогональна к некоторой поверхности Σ тогда и только тогда, когда $\omega_{ab} = 0$. Это следует из теоремы Фробениуса, из которой также следует критерий ортогональности к некоторой поверхности, а именно: конгруэнция ортогональна к некоторому семейству поверхностей тогда и только тогда, когда $u \wedge du = 0$, где $u = u_a dx^a$ – 1-форма, дуальная векторному полю, касательному к конгруэнции.

1.3 Уравнение Рачаудхури

Используя определение тензора B_{ab}, можно найти скорость изменения Θ, σ_{ab} и ω_{ab}

$$u^c\nabla_c B_{ab} = u^c\nabla_c\nabla_b u_a = u^c\nabla_b\nabla_c u_a + R^d_{cba}u^c u_d = \tag{1.24}$$

$$= -B^c{}_b B_{ac} + R^d_{cba}u^c u_d. \tag{1.25}$$

Вычислив след этого выражения, получим

$$u^c\nabla_c\Theta = \frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}u^c u^d. \tag{1.26}$$

Это уравнение известно как уравнение Рачаудхури и оно играет важную роль в математической теории чёрных дыр, в частности, при доказательстве теорем о сингулярностях (**Вставить ссылки!**). Например из него видно, что если в вакуумном случае конгруэнция ортогональна некоторой поверхности, то начиная с некоторого момента конгруэнция будет фокусироваться и достигнет некоторой точки за конечное собственное время.

1.4 Конгруэнции светоподобных геодезических

Перейдём к рассмотрению афинно параметризованных светоподобных геодезических $k^a\partial_a$, для которых выполнены следующие соотношения:

$$g(k,k)=0, \qquad \nabla_k k=0, \qquad g(\xi,k)=0, \qquad \pounds_\xi k=0, \tag{1.27}$$

где $\xi = \xi^a\partial_a$ – вектор девиации. Также, как и в случае времениподобных геодезических, определим для касательного поля $k^a\partial_a$ к конгруэнции светоподобных геодезических тензорное поле следующим образом:

$$B_{ab}=\nabla_b k_a. \tag{1.28}$$

Для того чтобы разбить его на неприводимые пространственные компоненты, необходимо определить поперечную часть метрики. Так как в случае конгруэнции светоподобных геодезических не существует естественного пути нормировки касательного векторного поля, то необходимо определить дополнительное светоподобное векторное поле $N^a\partial_a$, для которого выполнено:

$$g(k,N)=1, \qquad g(N,N)=0. \tag{1.29}$$

Теперь можно разложить метрику на продольную и поперечную части

$$g_{ab}=h_{ab}+k_aN_b+N_bk_a, \tag{1.30}$$

где, оператор проецирования на трансверсальное подпространство h_{ab}, обладает следующими свойствами

$$h^a{}_c h^c{}_b=h^a{}_b, \quad h^a{}_a=2, \quad h_{ab}k^b=0. \tag{1.31}$$

Таким образом, в отличии от случая конгруэнций времениподобных геодезически, поперечная метрика h_{ab} ортогональна как k^a, так и N^a и является эффективно двумерной.

По аналогии с конгруэнцией времениподобных геодезических, введём скаляр расширения, тензор вращения и тензор сдвига. Тензорное поле (1.28) является ортогональным к касательному полю k^a и удовлетворяет следующему уравнению:

$$\nabla_k \xi^a = B^a{}_b \xi^b, \tag{1.32}$$

которое, как и прежде, является выражением того, что поле девиации ξ^a не переносится параллельно вдоль конгруэнции светоподобных геодезических.

Проектирую сам вектор девиации ξ^a и все его свёртки с тензорным полем $B^a{}_b$ на ортогональное подпространство оператором проецирования, определённым в (1.30), получим что

$$\nabla_{\tilde{k}} \xi^a = \tilde{B}^a{}_b \tilde{\xi}^b, \tag{1.33}$$

где $\tilde{\xi}^a = h^a{}_b \xi^b$ и $\tilde{B}_{ab} = h^c{}_a h^d{}_b B_{cd}$ – соответствующие поперечные части ξ^a и B_{ab}.

Теперь, тензор B_{ab} можно разбить на неприводимые части:

$$B_{ab} = \frac{1}{2}\Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \tag{1.34}$$

где введены обозначения:

$$\Theta = \tilde{B}^{ab} h_{ab} = B^{ab} h_{ab}, \tag{1.35}$$

$$\sigma_{ab} = \tilde{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\Theta h_{ab}, \tag{1.36}$$

$$\omega_{ab} = \tilde{B}_{[ab]}. \tag{1.37}$$

Они имеют аналогичную геометрическую интерпретацию, как и в случае с конгруэнциями времениподобных геодезических, а также удовлетворяют уравнению Рачаудхури.

Отметим, что выбор вспомогательного векторного поля N^a, удовлетворяющего (1.29) не однозначен. Соответственно, все величины, вычисленные с его помощью, зависят явным образом от N^a. Чтобы избавится от этой явной зависимости рассмотрим следующие величины:

$$\Theta = B^{ab}h_{ab}, \tag{1.38}$$

$$|\sigma| = \sqrt{B_{ab}B^{(ab)} - \frac{1}{2}\Theta^2}, \tag{1.39}$$

$$\omega = \sqrt{B_{ab}B^{[ab]}}, \tag{1.40}$$

которые принято называть оптическими скалярами.

Глава 2

Геометрия экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий

В данной главе описывается процедура построения решений вакуумных уравнений Эйнштейна, описывающих геометрию экстремальных черных дыр вблизи горизонта событий. В частности, рассматриваются чёрные дыры Керра и Райснера-Нордстрема вблизи горизонта событий.

2.1 Метрика Керра вблизи горизонта событий

В координатах Бойера–Линдквиста метрика Керра имеет вид:

$$ds^2 = -e^{2\chi}dt^2 + e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 + \rho^2(\Delta^{-1}dr^2 + d\theta^2), \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} &\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \\ &e^{2\chi} = \frac{\Delta\rho^2}{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}, \quad e^{2\psi} = \Delta\sin^2\theta e^{-2\chi}, \quad \omega = \frac{2Mra}{\Delta\rho^2}e^{2\chi}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь M – масса черной дыры. Параметр вращения a связан с угловым моментом посредством соотношения $J = Ma$. Условие экстремальности черной дыры, которое означает, что внешний и внутренний горизонты совпадают, приводит к ограничению $a = M$. При этом $\Delta = (r-M)^2$ и горизонт событий расположен на поверхности $r = \tilde{r}_0 = M$.

Для описания геометрии экстремальной черной дыры Керра вблизи горизонта событий представляется естественным применить преобразование [9]:

$$r \to \tilde{r}_0 + \varepsilon r \tag{2.3}$$

к метрике (2.1) и затем перейти к пределу $\varepsilon \to 0$. Для того, чтобы получить невырожденную и несингулярную метрику, в работе [9] было предложено дополнить (2.3) преобразованиями временной и азимутальной угловой переменных t и φ:

$$r \to \tilde{r}_0 + \varepsilon r, \quad t \to \frac{t}{\varepsilon}, \quad \varphi \to \varphi + \frac{t}{2M\varepsilon}. \tag{2.4}$$

После перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ имеем:

$$ds^2 = \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\left[-\frac{r^2}{r_0^2}dt^2 + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2 + r_0^2 d\theta^2\right] + \frac{2r_0^2\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}\left(d\varphi + \frac{r}{r_0^2}dt\right)^2, \tag{2.5}$$

где введено обозначение $r_0^2 = 2M^2$. Прямыми вычислениями убеждаемся, что метрика (2.5) доставляет решение вакуумным уравнениям Эйнштейна.

Решение (2.5) обладает рядом интересных особенностей. Пространство не является асимптотически плоским. При $\theta = 0$ и $t = \pi$ метрика сводится к метрике двумерного пространства анти-де Ситтера. Метрика обладает дополнительными симметриями: к трансляциям времени t и азимутального угла φ, являющихся симметриями исходной метрики Керра (2.1), добавляется дилатация

$$t' = t + \gamma t, \qquad r' = r - \gamma r, \tag{2.6}$$

и специальное конформное преобразование

$$t' = t + \frac{1}{2}(t^2 + \frac{r_0^4}{r^2})\sigma, \qquad r' = r - tr\sigma, \qquad \phi' = \phi - \frac{r_0^2}{r}\sigma. \tag{2.7}$$

По аналогии с двумерным пространством анти де Ситтера несложно ввести глобальные координаты, в которых метрика принимает вид

$$ds^2 = \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\left[-(1+y^2)d\tau^2 + \frac{dy^2}{1+y^2} + d\theta^2\right] + \frac{2\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}(d\phi + yd\tau)^2 \tag{2.8}$$

и убедиться, что пространство является геодезически полным.

Полезно напомнить, что исходная геометрия Керра обладает скрытой симметрией, которая описывается тензором Киллинга второго ранга:

$$K_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} - r^2 g_{\mu\nu}, \tag{2.9}$$

где:

$$Q_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 & a\Delta\sin^2\theta \\ 0 & \dfrac{\rho^4}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a\Delta\sin^2\theta & 0 & 0 & -a^2\Delta\sin^4\theta \end{pmatrix}.$$

Как хорошо известно, каждому вектору Киллинга ξ^μ отвечает интеграл движения $\xi^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}$ уравнений геодезических. Тензору Киллинга $K_{\mu\nu}$ соответствует интеграл движения, квадратичный по скоростям $K_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$. В частности, наличие такого квадратичного интеграла позволило Картеру проинтегрировать уравнения движения массивной частицы в поле черной дыры Керра в квадратурах [17]. Отметим, что тензор Киллинга также позволяет разделить переменные в уравнениях Дирака и Клейна–Гордона на фоне метрики Керра [18]. Стоит заметить также, что в моделях суперчастиц в искривленном пространстве, допускающем тензоры Киллинга, могут быть построены дополнительные суперзаряды [19], скобки Пуассона которых дают тензоры Киллинга [20].

Применение преобразований (2.4) к тензору Киллинга (2.9) и последующий предел $\varepsilon \to 0$ приводят к следующему выражению:

$$K_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\left[-\frac{r^2}{r_0^2}dt^2 + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2\right]. \tag{2.10}$$

С точностью до конформного множителя тензор Киллинга (2.10) совпадает с AdS_2–метрикой в координатах Пуанкаре. Как было установлено в работе [21], вблизи горизонта событий тензор Киллинга является приводимым (в терминологии [22]), поскольку его можно построить из векторов Киллинга, отвечающих группе изометрий $SO(2,1)\times U(1)$.

2.2 Метрика Керра–Ньюмана–АдС вблизи горизонта событий

Решением Керра–Ньюмана–АдС называется частное решение уравнений Эйнштейна–Максвелла с космологической постоянной [23]. Метрика и векторный потенциал имеют вид:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \; & \frac{\Delta_r}{\rho^2}\left(dt - \frac{a}{\Xi}\sin^2\theta d\varphi\right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_r}dr^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_\theta}d\theta^2 - \\
& - \frac{\Delta_\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\left(adt - \frac{r^2+a^2}{\Xi}d\varphi\right)^2, \\
A = \; & -\frac{q_e r}{\rho^2}\left(dt - \frac{a\sin^2\theta}{\Xi}d\varphi\right) - \frac{q_m\cos\theta}{\rho^2}\left(adt - \frac{r^2+a^2}{\Xi}d\varphi\right),
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

где обозначено:

$$
\begin{aligned}
& \Delta_r = (r^2+a^2)\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right) - 2Mr + q^2, \quad \Delta_\theta = 1 - \frac{a^2}{l^2}\cos^2\theta, \\
& \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Xi = 1 - \frac{a^2}{l^2}, \quad q^2 = q_e^2 + q_m^2.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Параметры M, a, q_e, q_m связаны с массой, угловым моментом, электрическим и магнитным зарядами посредством соотношений [24]:

$$
M_{ADM} = \frac{M}{\Xi^2},\; J = \frac{aM}{\Xi^2},\; Q_{e/m} = \frac{q_{e/m}}{\Xi},
\tag{2.13}
$$

а l связано с космологической постоянной следующим образом: $\Lambda = -3/l^2$. Нули функции Δ_r, которые обозначим за r_+ и r_-, определяют внешний и внутренний горизонты событий, соответственно.

Метрика и электромагнитное поле инвариантны относительно трансляций угловой координаты φ и времени t:

$$
\delta t = \tau,\; \delta\varphi = \phi.
\tag{2.14}
$$

Менее очевидный факт заключается в том, что метрика (2.11) допускает тензор Киллинга второго ранга:

$$K_{ij} = Q_{ij} + r^2 g_{ij}, \tag{2.15}$$

где обозначено:

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} -\Delta_r & 0 & 0 & \dfrac{a\Delta_r}{\Xi}\sin^2\theta \\ 0 & \dfrac{\rho^4}{\Delta_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{a\Delta_r}{\Xi}\sin^2\theta & 0 & 0 & -\dfrac{a^2\Delta_r}{\Xi^2}\sin^4\theta \end{pmatrix}.$$

В экстремальном случае внешний и внутренний горизонты совпадают при $r = r_+$. Тогда имеют место равенства:

$$\begin{cases} \Delta_r|_{r=r_+} = 0 \\ \Delta'_r|_{r=r_+} = 0, \end{cases}$$

откуда находим условия экстремальности:

$$a^2 = \frac{r_+^2(1 - 3r_+^2/l^2) - q^2}{1 - r_+^2/l^2},\ M = \frac{r_+((1 + r_+^2/l^2)^2 - q^2/l^2)}{1 - r_+^2/l^2}, \tag{2.16}$$

при этом

$$\Delta_r = (r - r_+^2)^2((r + r_+^2)^2 + 2r_+^2 + l^2 + a^2)/l^2. \tag{2.17}$$

Для перехода к области вблизи горизонта событий используем преобразование координат [24]:

$$r \to r_+ + \varepsilon r_0 r, \quad t \to \frac{tr_0}{\varepsilon}, \quad \varphi \to \frac{tr_0 a\Xi}{\varepsilon(r_+^2 + a^2)}, \tag{2.18}$$

после чего вычислим предел $\varepsilon \to 0$. Первое преобразование в (2.18) является естественным для описания геометрии вблизи горизонта событий, второе и третье нужны для того, чтобы в пределе метрика была несингулярной и невырожденной. Параметр r_0 выбирается из соображений удобства. В итоге получаем:

$$ds^2 = \Gamma\left(r^2dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} - \alpha d\theta^2\right) - \gamma(d\varphi + krdt)^2,\ A = f(d\varphi + krdt), \quad (2.19)$$

где:

$$\Gamma = \frac{\rho_+^2 r_0^2}{r_+^2 + a^2}, \quad \alpha = \frac{r_+^2 + a^2}{\Delta_\theta r_0^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta_\theta (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2\theta}{\rho_+^2 \Xi^2},$$
$$\rho_+^2 = r_+^2 + a^2\cos^2\theta, \quad r_0^2 = \frac{(r_+^2 + a^2)(1 - r_+^2/l^2)}{1 + 6\frac{r_+^2}{l^2} - 3\frac{r_+^4}{l^4} - \frac{q^2}{l^2}}, \quad k = \frac{2ar_+\Xi r_0^2}{(r_+^2 + a^2)^2}, \quad (2.20)$$
$$f = (r_+^2 + a^2)\frac{q_e(r_+^2 - a^2\cos^2\theta) + 2q_m a r_+ \cos\theta}{2\rho_+^2 \Xi a r_+}.$$

Полевая конфигурация (2.19) является решением уравнений Эйнштейна–Максвелла и сводится к экстремальному решению Керра при $q_e = q_m = 0$ и $l^2 \to \infty$.

Метрика и поле (2.19) обладают расширенной группой симметрий: в дополнение к (2.14) она включает преобразование дилатации

$$\delta t = \lambda t, \quad \delta r = -\lambda r, \quad (2.21)$$

и специальное конформное преобразование

$$\delta t = (t^2 + \frac{1}{r^2})\sigma, \quad \delta r = -2tr\sigma, \quad \delta\varphi = -\frac{2k}{r}\sigma. \quad (2.22)$$

Вместе они образуют группу $SO(2,1) \times U(1)$.

Преобразованиям трансляции времени, сдвигу угла φ, дилатации и специальному конформному преобразованию (2.14), (2.21), (2.22) отвечают векторы Киллинга[1]

$$H = \partial_t,\ P = \partial_\varphi,\ D = t\partial_t - r\partial_r,\ K = (t^2 + \frac{1}{r^2})\partial_t - 2tr\partial_r - \frac{2k}{r}\partial_\varphi \quad (2.23)$$

[1] Векторы Киллинга и отвечающие им сохраняющиеся величины, равно как и тензор Киллинга, будем обозначать одними и теми же буквами.

соответственно. Как легко убедиться, они образуют алгебру $so(2,1) \oplus u(1)$:

$$[H, D] = H, \quad [H, K] = 2D, \quad [D, K] = K. \tag{2.24}$$

Коммутатор P со всеми остальными векторными полями равен нулю.

Применяя преобразование (2.18) к тензору Киллинга (2.15) получаем:

$$L = \Gamma^2 \left(r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} \right). \tag{2.25}$$

Второе слагаемое в (2.15) редуцируется к метрике, умноженной на постоянное слагаемое, являющейся тривиальным тензором Киллинга, поэтому ее можно отбросить. Стоит также заметить, что (2.25) с точностью до конформного множителя Γ^2 совпадает с AdS_2–метрикой в координатах Пуанкаре. Также отметим, что тензор Киллинга (2.25) является приводимым.

2.3 Метрика Мелвина–Керра вблизи горизонта событий

Решение Мелвина–Керра описывает вращающуюся черную дыру во внешнем магнитном поле и может быть построено при помощи преобразований Гаррисона. Преобразования Гаррисона действуют на так называемые потенциалы Эрнста $\mathcal{E}, \Phi$, относящиеся к решению Керра:

$$\mathcal{E}' = \Lambda^{-1}\mathcal{E}, \quad \Phi' = \Lambda^{-1} \left(\Phi - \frac{B\mathcal{E}}{2} \right), \tag{2.26}$$

где $\Lambda = 1 + B\Phi - 1/4B^2\mathcal{E}$ и позволяют построить пространство–время с внешним магнитным полем. При этом метрика, записанная в следующей форме:

$$ds^2 = f^{-1} \left(\rho^2 dt^2 - 2P^{-2} d\zeta d\zeta^* \right) - f(d\varphi - \omega dt)^2, \tag{2.27}$$

преобразуется по следующему закону :

$$\begin{gathered} f' = |\Lambda|^2 f, \\ \nabla\omega' = |\Lambda|^2 \nabla\omega + \rho f^{-1}(\Lambda^* \nabla\Lambda - \Lambda\nabla\Lambda^*). \end{gathered} \tag{2.28}$$

Звездочка в этих формулах обозначает комплексное сопряжение, а ∇ – оператор градиента, построенный по метрике $d\zeta d\zeta^*$.

Для метрики Керра (2.1) данные преобразования приводят к метрике Мелвина–Керра [28]:

$$ds^2 = \Sigma|\Lambda|^2 \left(-\frac{\Delta}{A}dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + \frac{\Xi \sin^2\theta}{\Sigma}(d\varphi - wdt)^2. \tag{2.29}$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\Xi = (r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta, \quad \Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \\ \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr,\end{gathered} \tag{2.30}$$

а также:

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\Lambda = 1 + \frac{B^2}{4}\left((r^2+a^2)\sin^2\theta + \frac{2a^2Mr\sin^4\theta}{\Sigma}\right), \\ \operatorname{Im}\Lambda = -\frac{B^2\cos\theta}{4}\left(2aM(2+\sin^2\theta) + \frac{2a^3M\sin^4\theta}{\Sigma}\right), \\ w = \frac{16Mra + w_B(r,\theta)B^4}{6\Xi},\end{gathered} \tag{2.31}$$

где

$$w_B(r,\theta) = -aM(r^3+(2M-3r)a^2)\Delta\cos^4\theta + 6Mra(2a^2r^2+r^4+a^4-2Mr^3)\cos^2\theta.$$

Эта метрика доставляет решение уравнениям Эйнштейна–Максвелла, совместно со следующим электромагнитным полем:

$$A = (\Phi_0 - w\Phi_3)dt + \Phi_3 d\varphi, \tag{2.32}$$

где компоненты Φ_0 и Φ_3 равны:

$$\Phi_0 = -\frac{a}{8\Xi}\left(4a^4M^2 + 2a^4Mr - 24a^2M^3r - 24a^2M^2r^2 - 4a^2Mr^3 - \right.$$

$$12M^2r^4 - 6Mr^5 - \Delta\left(12Mr(r^2+a^2)\cos^2\theta + \right.$$

$$\left.\left. +(2Mr^3 + a^2(4M^2 - 6Mr))\cos^4\theta\right)\right),$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{8\Sigma\Xi}\left[4\Xi B\sin^2\theta + B^4\left(\Sigma(r^2+a^2)^2\sin^4\theta + 4a^2Mr(r^2+a^2)\sin^6\theta + \right.\right.$$

$$\left.\left. +4a^2M^2\left(r^2(2+\sin^2\theta)\cos^2\theta + a^2(1+\cos^2\theta)^2\right)\right)\right]. \tag{2.33}$$

Переход от представленной выше геометрии к геометрии, описывающей область вблизи горизонта событий, осуществляется посредством следующего преобразования:

$$t \to \frac{2M^2}{\varepsilon}t, \quad r \to M + \varepsilon r, \quad \varphi \to \varphi + \frac{(1+2B^4M^4)M}{(1+B^4M^4)\varepsilon}t, \tag{2.34}$$

после которого вычисляется предел $\varepsilon \to 0$. Применение этих преобразваний дает следующую метрику, которая также является решением уравнений Эйнштейна–Максвелла:

$$ds^2 = \Gamma(\theta)\left(-r^2dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + d\theta^2 + \gamma(\theta)(d\phi + krdt)^2\right), \tag{2.35}$$

где обозначено:

$$\Gamma(\theta) = M^2(\sigma^2 + \tau^2\cos^2\theta), \quad \gamma(\theta) = \frac{4\sin^2\theta}{(\sigma^2+\tau^2\cos^2\theta)^2}, \quad k = -\sigma\tau. \tag{2.36}$$

Постоянные σ и τ связаны с массой M и магнитным зарядом B черной дыры Мелвина–Керра следующим образом:

$$\sigma = 1 + B^2M^2, \quad \tau = 1 - B^2M^2. \tag{2.37}$$

Потенциал магнитного поля A принимает вид:

$$A = f(\theta)(krdt + d\phi), \quad f(\theta) = \frac{2C_1\sigma\tau\cos\theta + C_2(\tau^2\cos^2\theta - \sigma^2)}{\sigma^2 + \tau^2\cos^2\theta}, \tag{2.38}$$

где произвольные постоянные C_1, C_2 удовлетворяют уравнению окружности:

$$C_1^2 + C_2^2 = \frac{M^2(\tau^2 - \sigma^2)}{\sigma^2\tau^2}. \tag{2.39}$$

У фоновой геометрии вблизи горизонта (2.35) появляются дополнительные изометрии, описываемые векторными полями Киллинга:

$$H = \partial_t, \quad D = t\partial_t - r\partial_r, \quad K = (t^2 + r^{-2})\partial_t - 2tr\partial_r - \frac{2k}{r}\partial_\phi \tag{2.40}$$

которые образуют алгебру $so(2,1)$. Еще одна дополнительная изометрия связана с трансляциями азимутального угла: $P = \partial_\varphi$.

Глава 3

Оптические скаляры для геометрии экстремальных чёрных дыр вблизи горизонта событий

В настоящей главе строятся оптические скаляры для геометрий экстремальных чёрных дыр Керра и Райснера-Нордстрема вблизи горизонта событий.

3.1 Оптические скаляры для геометрии Керра вблизи горизонта событий

В главе 2 было показано, что экстремальная метрика Керра вблизи горизонта событий (2.5) имеет вид:

$$ds^2 = (1 + \cos^2\theta)\left(r^2 dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} - d\theta^2\right) - \frac{4\sin^2\theta}{(1 + \cos^2\theta)}(rdt + d\phi)^2, \tag{3.1}$$

и обладает группой симметрий $SO(2, 1) \times U(1)$, с генераторами:

$$\xi_E = \partial_t, \quad \xi_D = t\partial_t - r\partial_r, \quad \xi_K = (t^2 - \frac{1}{r^2})\partial_t - 2tr\partial_r - \frac{2}{r}\partial_\phi, \quad \xi_L = \partial_\phi \tag{3.2}$$

Для вычисления оптических скаляров необходимо вычислить ковариантную производную:

$$B_{ab} = u_{a;b} = \nabla_b u_a, \tag{3.3}$$

где $u = u^a\partial_a$ - касательное поле к конгруэнции светоподобных геодезических:

$$\nabla_u u = 0, \quad E = g(u, u) = g_{ab}u^a u^b = 0, \tag{3.4}$$

Ввиду высокой симметрии метрики, представляется возможным явно вычислить дуальное поле $u_a dx^a$ к касательному полю светоподобной конгруэнции.

Так как каждому вектору Киллинга ξ^a метрики (3.1) соответствует первый интеграл для уравнений геодезических $\xi^a u_a$, из (3.2) получим

$$E = u_t, \quad L = u_\phi, \quad D = tE - ru_r, \quad K = (t^2 - \frac{1}{r^2})E - 2tru_r - \frac{2}{r}u_\phi. \tag{3.5}$$

Явное выражение u_r получается из сохраняющейся величины отвечающемему тензору Киллинга (2.10)

$$T = KE - D^2 + L^2 = (\frac{E}{r} - L)^2 - (ru_r)^2 \quad \Rightarrow \quad u_r^2 = \frac{(E - rL)^2 - r^2 T}{r^4}, \tag{3.6}$$

Компоненту u_θ получаем из условия нормировки геодезической $E = g(u,u) = 0$, используя (3.5) получим

$$E = g^{tt}E^2 + g^{rr}p_r^2 + g^{\theta\theta}u_\theta^2 + g^{\phi\phi}L^2 + 2g^{t\phi}EL \tag{3.7}$$

откуда, учитывая что

$$g^{tt} = \frac{g_{\phi\phi}}{\Delta}, \quad g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{g_{tt}}{\Delta}, \quad g^{t\phi} = \frac{-g_{t\phi}}{\Delta}, \tag{3.8}$$

где $\Delta = g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 = -4r^2 sin^2\theta$, имеем

$$u_\theta^2 = g_{\theta\theta}\left(E - \frac{1}{\Delta}(g_{\phi\phi}E^2 - 2g_{t\phi}EL + g_{tt}L^2) - \frac{1}{g_{rr}}\frac{(E - rL)^2 - r^2T}{r^4}\right) \tag{3.9}$$

$$= T - \underbrace{(1 + \cos^2\theta)\left(E + \frac{1 + \cos^2\theta}{4sin^2\theta}L^2\right)}_{=f(\theta)\geq 0}. \tag{3.10}$$

Собирая всё вместе, находим

$$u = Edt + Ld\phi \pm \left(\frac{(E - rL)^2 - r^2T}{r^4}\right)^{1/2} dr \pm \tag{3.11}$$

$$\pm\left(T - (1 + \cos^2\theta)\left(E + \frac{1 + \cos^2\theta}{4sin^2\theta}L^2\right)\right)^{1/2} d\theta. \tag{3.12}$$

Эта форма является интегрируемой, $u_a \propto \partial_a \Sigma$, следовательно, вращение отсутствует для всех геодезических.

Также можно вычислить $\Theta = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}u^a) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}u_b)$, получим 4 случая:

$$\Theta = \frac{1}{1+cos^2\theta}\left(\pm\frac{L(H-rL)+rT}{\sqrt{(H-rL)^2-r^2T}}\mp\right. \tag{3.13}$$

$$\left.\mp\frac{(2T-4Ecos^2\theta+(1+cos^2\theta)L^2)cos\theta}{2sin\theta\sqrt{T-(1+\cos^2\theta)\left(E+\frac{1+\cos^2\theta}{4sin^2\theta}L^2\right)}}\right) \tag{3.14}$$

Ввиду громоздкости выражения для σ^2, как и ω_{ab} не приведены.

3.1.1 Оптические скаляры для метрики Керра вблизи горизонта событий в глобальных координатах

Полученная выше метрика Керра, вблизи горизонта событий (2.5), записана в координатах Пуанкаре, которые покрывают только часть пространства. Рассмотрим расширение решение Керра вблизи горизонта событий в глобальных координатах:

$$ds^2 = (1+\cos^2\theta)\left((1+y^2)dt^2 - \frac{dr^2}{1+y^2} - d\theta^2\right) - \frac{4\sin^2\theta}{(1+\cos^2\theta)}(ydt+d\phi)^2, \tag{3.15}$$

которое также обладает группой симметрий $SO(2,1)\times U(1)$.

Вычисляя оператор Казамира для $SO(2,1)\times U(1)$ и используя условие массовой оболочки $E = g(u,u)$, получим

$$u = Edt + Ld\phi \pm \frac{\sqrt{(E-yL)^2-(1+y^2)T}}{1+y^2}dy \pm \tag{3.16}$$

$$\pm\sqrt{T-(1+\cos^2\theta)\left(E+\frac{1+\cos^2\theta}{4sin^2\theta}L^2\right)}d\theta, \tag{3.17}$$

где E, L, T, E - константы.

Вычисляя $\Theta = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}u^a) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}u_b)$, получим 4 случая:

$$\Theta = \frac{1}{1+cos^2\theta}\left(\pm\frac{L(E-rL)+rT}{\sqrt{(E-rL)^2-(1+r^2)T}}\mp\right. \tag{3.18}$$

$$\left.\mp\frac{(2T-4Ecos^2\theta+(1+cos^2\theta)L^2)cos\theta}{2sin\theta\sqrt{T-(1+\cos^2\theta)\left(E+\frac{1+\cos^2\theta}{4sin^2\theta}L^2\right)}}\right) \tag{3.19}$$

Ввиду громоздкости выражения для σ^2, как и ω_{ab} не приведены.

Отметим, что полученное решение справедливо только в области, где

$$(E-yL)^2-(1+y^2)T \geq 0 \quad T-(1+\cos^2\theta)\left(E+\frac{1+\cos^2\theta}{4sin^2\theta}L^2\right) \geq 0 \tag{3.20}$$

Если потребовать, чтобы u было определено для всех (y,θ), то мы получим, что $L=T=E=0$, т.е.

$$u = Edt \pm \frac{E}{1+y^2}dy, \quad \Rightarrow \quad \Theta = \sigma^2 = 0. \tag{3.21}$$

Соответствующее светоподобное геодезическое векторное поле, с равными нулю оптическими скалярами, совпадает с двойноым принципиальным светоподобным направлением тензора Вейля. Тем самым, экстремальная метрика Керра вблизи горизонта событий принадлежит классу Кундта и принадлежит к типу D в классификации Петрова.

3.2 птические скаляры для геометрии Райснера-Нордстрема вблизи горизонта событий

Перейдём к рассмотрению геометрии экстремальной чёрной дыры Райснера-Нордстрема вблизи горизонта событий. Метрика имеет вид:

$$ds^2_{RN} = r^2dt^2 - \frac{dr^2}{r^2} - (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{3.22}$$

и обладает группой симметрий $SO(2,1)\times SO(3)$, с генераторами

$$\xi_E=\partial_t,\quad \xi_D=t\partial_t-r\partial_r,\quad \xi_K=(t^2+\frac{1}{r^2})\partial_t-2tr\partial_r, \tag{3.23}$$

и

$$\xi_{L_1}=\partial_\phi,\quad \xi_{L_2}=-cos\phi\partial_\theta+ctg\theta sin\phi\partial_\phi,\quad \xi_{L_3}=sin\phi\partial_\theta+ctg\theta cos\phi\partial_\phi, \tag{3.24}$$

соответственно. Сохраняющиеся величины имеют вид

$$E=u_t,\quad D=tE-ru_r,\quad K=(t^2+\frac{1}{r^2})E-2tru_r \tag{3.25}$$

$$L_1=u_\phi,\quad L_2=-cos\phi u_\theta+ctg\theta sin\phi u_\phi,\quad L_3=sin\phi u_\theta+ctg\theta cos\phi u_\phi, \tag{3.26}$$

Вычисляя норму 1-формы u получим

$$m^2=g^{ab}u_au_b=T-C, \tag{3.27}$$

где T и C - выражения для элементов Казимира групп $SO(2,1)$ и $\times SO(3)$, соответственно

$$T=EK-D^2=\frac{E^2}{r^2}-r^2u_r^2,\quad C=L_iL_i=u_\theta^2+\frac{L^2}{\sin^2\theta}, \tag{3.28}$$

откуда получаем вид 1-формы

$$u=Edt+Ld\phi+\frac{\sqrt{E^2-r^2T}}{r^2}dr+\sqrt{T-\frac{L^2}{\sin^2\theta}}d\theta. \tag{3.29}$$

Отсюда видно, что $du=0$ и, в силу теоремы Фробениуса, заключаем, что вращение конгруэнции равной нулю.

Вычисляя оптические скаляры (при $T=C$), получим

$$\Theta_{RN}=\frac{rT}{\sqrt{E^2-r^2T}}-\frac{Tctg\theta}{\sqrt{T-\frac{L^2}{\sin^2\theta}}}, \tag{3.30}$$

$$\sigma_{RN}^2=\frac{T^2\left(ctg\theta\sqrt{E^2-r^2T}+r\sqrt{T-\frac{L^2}{\sin^2\theta}}\right)^2}{2(E^2-r^2T)(T-\frac{L^2}{\sin^2\theta})} \tag{3.31}$$

Отметим, что при $T=0$ все оптические скаляры обращаются в ноль. Что также означает, что метрика (3.22) принадлежит к классу Кунда.

Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в работе:

1. Установлена структура оптических скаляров для геометрий экстремальной черной дыры Керра вблизи горизонта событий.

2. Установлена структура оптических скаляров экстремальной чёрной дыры Райснера-Нордстрема вблизи горизонта событий.

Список литературы

1. Петров А.З. Классификация пространств, определяющих поля тяготения // Учёные записки Казанского университета. 1954. V. 114. P. 55–69.
2. Sachs R. K. Gravitational Waves in General Relativity. VI. The Outgoing Radiation Condition //Proceedings of the Royal Society A. 1961. V. 264. P. 1318.
3. Goldberg J. N., Sachs R. K. A theorem on Petrov types // Acta Physica Polonica B. 1962. V. 22. P. 23.
4. Newman E.T., Penrose R. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients // 1962. V. 3. P. 566–768.
5. d'Inverno R. Introducing Einstein's Relativity // Oxford University Press, 1992.
6. Guica M., Hartman T., Song W., Strominger A. The Kerr/CFT Correspondence // Phys Rev. D. - 2009. - Vol. 80. - №124008.
7. Bredberg I., Keeler C., Lysov V., Strominger A. Cargese Lectures on the Kerr/CFT Correspondence // Nucl. Phys. Proc. Suppl. - 2011. - Vol. 216. - pp. 194-210.
8. Compere G. The Kerr/CFT Correspondence and its Extensions // Living Reviews in Relativity. - 2012. - Vol. 15. - №lrr-2012-11.
9. Bardeen J. M., Horowitz G. T. The Extreme Kerr Throat Geometry: A Vacuum Analog of $AdS_2 \times S^2$ // Phys. Rev. D. - 1999. Vol. 60. - №104030.
10. Kunduri H. K., Lucietti J., Reall H. S. Near-horizon symmetries of extremal black holes // Class. Quant. Grav. - 2007. - Vol. 24. - P. 4169-4190.
11. Kunduri H. K., Lucietti J. A classification of near-horizon geometries of extremal vacuum black holes // J. Math. Phys. - 2009. - Vol. 50. - №082502.
12. Lu H., Mei J., Pope C. Kerr-AdS/CFT correspondence in diverse dimensions // JHEP. - 2009. - Vol. 04. - №054.

13. Hietarinta Direct Methods for the Search of the Second Invariant // Phys. Rept. - 1987. - Vol. 147. - P. 87.
14. Yehia H., Elmandouh A. New conditional integrable cases of motion of a rigid body with Kovalevskaya's configuration // J. Phys. A. - 2011. - Vol. 44. - №012001.
15. Poisson E. A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics // Cambridge University Press, 2004.
16. H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, Exact Solutions of Einstein's Field Equations // Cambridge University Press, 2003.
17. Carter B. Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields // Phys. Rev. - 1968. - Vol. 174. - pp. 1559-1571.
18. Frolov V., Kubizňák D. Higher–Dimensional Black Holes: Hidden Symmetries and Separation of Variables // Class. Quant. Grav. - 2008. - Vol. 25. - №154005.
19. Gibbons G. W., Rietdijk R. H., van Holten J. W. SUSY in the sky // Nucl. Phys. B. - 1993. - Vol. 404. - pp. 42-64.
20. Ngome J. P., Horváthy P. A., van Holten J. W. Dynamical supersymmetry of spin particle-magnetic field interaction // J. Phys. A. - 2010. - Vol. 43. - №285401
21. Galajinsky A. Particle dynamics near extreme Kerr throat and supersymmetry // JHEP. - 2010. - Vol. 11. - №126.
22. Walker M., Penrose R. On quadratic first integrals of the geodesic equations for the type {2,2} spacetimes // Comm. Math. Phys. - Vol. 18. - 1970. - p. 256-274.
23. Carter B. Hamilton–Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einstein's equations // Comm. Math. Phys. - 1968. - Vol. 10. - pp. 280-310.
24. Hartman T., Murata K., Nishioka T., Strominger A. CFT duals for extreme black holes // JHEP. - 2009.- Vol. 4. - №19.

25. Vasudevan M., Stevens K., Page D. Particle Motion and Scalar Field Propagation in Myers–Perry Black Hole Spacetimes in All Dimensions // Class. Quant. Grav. - 2005. - Vol. 22. PP. 1469-1482.
26. Gibbons G., Lu H., Page D., Pope C. The General Kerr-de Sitter Metrics in All Dimensions // J. Geom. Phys. - 2005. - Vol. 53. - PP. 49-73.
27. Vasudevan M., Stevens K., Page D. Separability of the Hamilton-Jacobi and Klein-Gordon Equations in Kerr-de Sitter Metrics // Class. Quant. Grav. - 2005. - Vol. 22. - PP. 339-352.
28. Ernst F., Wild W. Kerr black holes in a magnetic universe // J. Math. Phys. - 1976. - Vol. 17. - P. 182.
29. Pin O. Curvature and Mechanics // Advances in Mathematics. 1975. V. 15. P. 269-311.
30. Eisenhart L. Dynamical trajectories and geodesics // Annals of Mathematics. 1929. V. 30. P. 591.
31. Minguzzi E. Eisenhart's theorem and the causal simplicity of Eisenhart's spacetime // Classical and Quantum Gravity. 2007. V. 24. P. 2781. arXiv:gr-qc/0612014.
32. Kerr R. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics // Physical Review Letters. 1963. V. 11. P. 237-238.
33. Gibbons G.W., Houri T., Kubiznak D., Warnick C. Some spacetimes with higher rank Killing–Stackel tensors // Physics Letters B. 2011. V. 700. P. 68. arXiv:1103.5366.

Уважаемый пользователь!
Обращаем ваше внимание, что система Антиплагиат отвечает на вопрос, является ли тот или иной фрагмент текста заимствованным или нет. Ответ на вопрос, является ли заимствованный фрагмент именно плагиатом, а не законной цитатой, система оставляет на ваше усмотрение. Также важно отметить, что система находит источник заимствования, но не определяет, является ли он первоисточником.

Информация о документе:

Имя исходного файла:	Магистерская_диссертация_Филюков.pdf
Имя компании:	Томский гос. Университет
Тип документа:	ПРочее
Имя документа:	Магистерский диплом Филюков
Дата проверки:	06.06.2017 11:41
Модули поиска:	Интернет (Антиплагиат), Кольцо вузов, Университетская библиотека онлайн, Диссертации и авторефераты РГБ, Модуль поиска ЭБС "Айбукс", Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика, Научные статьи Elibrary, Модуль поиска ЭБС "Лань", Томский гос. Университет

Текстовые статистики:

Индекс читаемости:	сложный
Неизвестные слова:	в пределах нормы
Макс. длина слова:	в пределах нормы
Большие слова:	в пределах нормы

☑	Источник	Ссылка на источник	Коллекция/модуль поиска	Доля в отчёте	Доля в тексте
☑	**[1]** Action-Angle Variabl...	http://arxiv.org/pdf/1410.6515.pdf#4	Интернет (Антиплагиат)	2.94%	2.94%
☑	**[2]** Action-Angle Variabl...	http://arxiv.org/abs/1410.6515	Интернет (Антиплагиат)	0%	2.44%
☑	**[3]** Hidden Symmetries of...	http://arxiv.org/pdf/0809.2452.pdf#7	Интернет (Антиплагиат)	1.22%	2.25%
☑	**[4]** МЕХ 2010 Лашманов Ши...		Кольцо вузов	1.72%	2.21%
☑	**[5]** I ВСЕРОССИЙСКИЙ ФЕСТ...	http://old.tspu.edu.ru/fmf/files/file/doc/festival_nauki.pdf	Интернет (Антиплагиат)	0.65%	1.79%
☑	**[6]** Classification of ne...	http://arxiv.org/pdf/1306.2517.pdf#5	Интернет (Антиплагиат)	0.73%	1.42%
☑	**[7]** Скачать/Пенроуз - Пу...	http://www.e-reading.org.ua/download.php?book=135835	Интернет (Антиплагиат)	0.54%	1.22%
☑	**[8]** Черные дыры, белые к...	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=45372	Университетская библиотека онлайн	0.06%	1.01%
☑	**[9]** Физиев, Пламен Петко...	http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005093000/rsl01005093...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.44%	0.87%
☑	**[10]** Поля частиц в римано...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=28732	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	0.75%
☑	**[11]** Поля частиц в римано...	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=86654	Университетская библиотека онлайн	0%	0.71%
☑	**[12]** Буринский, Александр...	http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002614000/rsl01002614...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.59%
☑	**[13]** Khasanov I Sh disser...	http://dissovet.rudn.ru/web-local/prep/rj/dis/download.php?f...	Интернет (Антиплагиат)	0.03%	0.54%
☑	**[14]** Алиев, Аликрам Нухба...	http://dlib.rsl.ru/rsl01003000000/rsl01003424000/rsl01003424...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.18%	0.54%
☑	**[15]** Основы физической те...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=8253	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	0.5%
☑	**[16]** Современные технолог...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=19298	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	0.5%
☑	**[17]** Мастеров, Иван Викто...	http://dlib.rsl.ru/rsl01006000000/rsl01006637000/rsl01006637...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.29%	0.5%
☑	**[18]** Шапошникова, Елена В...	http://dlib.rsl.ru/rsl01003000000/rsl01003042000/rsl01003042...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.5%
☑	**[19]** Предельное состояние...	http://elibrary.ru/item.asp?id=15211502	Научные статьи Elibrary	0%	0.5%
☑	**[20]** Geometrical methods ...	http://arxiv.org/abs/1311.0733	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.5%
☑	**[21]** Galajinsky A., Nerse...	http://wwwinfo.jinr.ru/publish/Pepan_letters/panl_2014_7/13_...	Интернет (Антиплагиат)	0.05%	0.5%
☑	**[22]** Моисеев В.С. Приклад...	http://www.kai.ru/science/publications/moiseev_mono1.pdf	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.5%
☑	**[23]** 9347	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9347	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.5%

☑	**[24]** 9390	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9390	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.5%
☑	**[25]** Курс дифференциально...	http://elibrary.ru/item.asp?id=15250419	Научные статьи Elibrary	0%	0.49%
☑	**[26]** 2328	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2328	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.49%
☑	**[27]** 2262	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2262	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.49%
☑	**[28]** ДП140613 ТЭФ ru Бате...		Кольцо вузов	0.46%	0.46%
☑	**[29]** Денисова, Ирина Павл...	http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002279000/rsl01002279...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.44%
☑	**[30]** Спирякова А.В.		Кольцо вузов	0%	0.43%
☑	**[31]** 256623	http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=256623	Университетская библиотека онлайн	0%	0.43%
☑	**[32]** Хосе Анибал Пауйак У...	http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002745000/rsl01002745...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.05%	0.4%
☑	**[33]** Министерство образов...		Томский гос. Университет	0.35%	0.35%
☑	**[34]** Организация деятельн...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=18062	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	0.33%
☑	**[35]** 68284	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=68284	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.33%
☑	**[36]** Родченко, Егор Дмитр...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004652000/rsl01004652...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.26%
☑	**[37]** Тришин, Владимир Ник...	http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002739000/rsl01002739...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.25%
☑	**[38]** Горбанева 2		Кольцо вузов	0%	0.23%
☑	**[39]** Нигматзянов, Ильнур ...	http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004721000/rsl01004721...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.2%
☑	**[40]** Методика создания и ...		Томский гос. Университет	0%	0.18%
☑	**[41]** Геометрофизика. Учеб...	http://www.bibliorossica.com/book.html?&currBookId=18727	Модуль поиска ЭБС БиблиоРоссика	0%	0.15%
☑	**[42]** Иващук, Владимир Дми...	http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002627000/rsl01002627...	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.15%
☑	**[43]** Геометрофизика —4-е ...	http://ibooks.ru/reading.php?short=1&productid=335357	Модуль поиска ЭБС "Айбукс"	0%	0.15%
☑	**[44]** 4373	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4373	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.15%
☑	**[45]** Цыганов, Андрей Влад...	http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002606000/rsl01002606...	Диссертации и авторефераты РГБ	0.13%	0.13%

Оригинальные блоки: 90.17%

Заимствованные блоки: 9.83%

Заимствование из "белых" источников: 0%

Итоговая оценка оригинальности: **90.17%**