

CHAMPS, LAGRANGIENS, SYMETRIES

C. Itzykson
CERN - Genève
et
DPHT, CEN - Saclay

Notes de cours
Ecole de Gif sur Yvette, 1973

18 septembre 1973

Les notes qui suivent ont été préparées pour servir d'introduction à un cours de théorie quantique des champs, donné en collaboration avec R. Stora et E. Brézin. Elles présentent les aspects traditionnels de la mécanique lagrangienne et insistent sur les symétries, les courants associés, l'invariance de jauge abélienne et non abélienne, dans un contexte classique. C'est dire que pour l'essentiel les notions traitées sont élémentaires. A dessein on a omis d'indiquer des références, les matières évoquées ici se trouvant, pour la plus grande partie, amplement développées dans les ouvrages consacrés à ce sujet. Décidément, quelques remarques sont peut être originales, sans que cela puisse être garanti. Le lecteur trouvera assurément de nombreux passages fastidieux, c'est qu'on n'a pas voulu passer sous silence certains détails peut-être utiles à quelqu'un qui est moins familier avec le formalisme théorique.

J'exprime ma reconnaissance aux organisateurs de l'école de l'occasion qu'ils m'ont offerte de présenter ce cours, et à mon ami R. Stora de la patience et la science qu'il m'a prodiguées dans sa préparation. Enfin, je profite de cette occasion pour remercier le CERN de son hospitalité et des facilités qu'il m'a accordées dans la mise au point matérielle de ces notes.

Table des matières

	<u>Page</u>
1. PRINCIPE DE MOINDRE ACTION EN MECANIQUE CLASSIQUE	1
2. SYSTEMES A UN NOMBRE INFINI DE DEGRES DE LIBERTE	8
3. SYMETRIES ET LOIS DE CONSERVATION	18
4. INVARIANCES GEOMETRIQUES ET TENSEUR DENSITE D'ENERGIE-IMPULSION	24
5. SYMETRIES INTERNES	39
6. CHAMPS DE JAUGE	48
7. PROPAGATEURS	69

1. PRINCIPE DE MOINDRE ACTION EN MECANIQUE CLASSIQUE

Les équations de la mécanique classique résultent dans la plupart des cas d'un principe de moindre action. Si q désigne collectivement les variables de configuration (supposées pour l'instant en nombre fini $q \equiv q_1, q_2, \dots, q_N$) et \dot{q} les vitesses associées à l'instant t , l'action est définie comme :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)). \quad (1)$$

La fonction de Lagrange L dépend des positions et des vitesses et parfois aussi explicitement du temps. Le principe de moindre action s'exprime alors en disant que, parmi les façons $q(t)$ de passer de la position q_1 au temps t_1 à la position q_2 au temps t_2 , la trajectoire réelle est celle qui rend stationnaire l'action I . Il s'agira d'un véritable minimum si q_2, t_2 sont assez voisins de q_1, t_1 . Cette action est une fonctionnelle des "bonnes" fonctions $q(t)$ satisfaisant aux conditions, aux limites. Si $Q(t)$ désigne la trajectoire réelle, on doit exprimer la condition de stationnarité en considérant des fonctions voisines $q(t) = Q(t) + \delta q(t)$ et en développant l'action en puissances de δq :

$$I(q) = I(Q) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta I}{\delta q}(Q) \delta q(t) + \dots$$

Annulant la variation au premier ordre, comme on annule la dérivée d'une fonction pour trouver un extremum, on voit que les équations du mouvement doivent prendre la forme :

$$\frac{\delta I}{\delta q(t)} = 0. \quad (2)$$

Pour comparer cela avec les équations d'Euler-Lagrange, il suffit d'apprendre à dériver fonctionnellement l'expression (1). Pour cela on remarque que :

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \delta q(t), \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta I}{\delta q(t)} \delta q(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d}{dt} \delta q(t) \right\}.$$

Intégrant par parties le second terme du membre de droite, on voit que les termes tout intégrés s'annulent en vertu des conditions aux limites, et on retrouve effectivement les équations familières :

$$\frac{\delta I}{\delta q(t)} = \frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0. \quad (3)$$

Lorsqu'il y a plusieurs degrés de liberté il faut, bien entendu, écrire ces équations pour chaque variation $\delta q_i(t)$ indépendamment.

Une propriété évidente de cette formulation est que les équations du mouvement sont inchangées si la fonction de Lagrange est modifiée en lui ajoutant une dérivée totale dans le temps. Il est clair que cela ne modifie l'action que par des termes tout intégrés qui ne sont pas affectés par des variations laissant fixes les extrémités de la trajectoire. Par exemple, si on ajoute à la fonction de Lagrange relative à un degré de liberté un terme $\dot{q}f(q) = d/dt \int^q f(q')dq'$, rien n'est changé aux équations du mouvement. Ceci montre que la fonction de Lagrange n'est pas réellement l'objet intrinsèque qui détermine le mouvement et cette remarque conduit à une formulation un peu plus abstraite dont nous ne parlerons pas ici.

Il est bien connu qu'il existe aussi une formulation hamiltonnienne des équations du mouvement, obtenue en introduisant les moments conjugués :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} . \quad (4)$$

Supposons qu'on soit capable d'inverser ces équations en exprimant les vitesses \dot{q} en fonction de q et de p . Dans le cas de plusieurs degrés de liberté, il peut y avoir des difficultés si le Jacobien de cette transformation s'annule. Nous y reviendrons plus loin, en admettant pour l'instant que c'est possible. Alors la fonction de Hamilton est obtenue par la transformation de Legendre :

$$H(p, q) = p \dot{q}(p, q) - L(q, \dot{q}(p, q)) . \quad (5)$$

Par différentiation :

$$dH = \left[\dot{q} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dp + \left[-\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - p \right) \right] dq .$$

Utilisant la définition des moments conjugués et les équations d'Euler Lagrange, on voit que sous forme hamiltonnienne le mouvement est décrit par les équations :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} . \quad (6)$$

Plus généralement la variation d'une fonction définie sur l'espace des phases (l'espace des $2N$ variables p, q) est :

$$\frac{d}{dt} f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} . \quad (7)$$

La notation introduite est celle du crochet de Poisson $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}$.

Il découle de la définition (7) qu'une fonction sur l'espace des phases ne dépendant pas explicitement du temps et dont le crochet de Poisson avec l'Hamiltonien s'annule est une constante de mouvement.

Il est remarquable que les équations de Hamilton (6) découlent elles aussi du principe de moindre action. En effet, on remarque que :

$$L(q, \dot{q}) dt = p dq - H(p, q) dt .$$

Utilisant cette expression dans la formule (1) nous écrivons l'action sous la forme :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} p dq - H dt . \quad (8)$$

Considérons alors $p(t)$, $q(t)$ comme $2N$ variables de "configuration" et exigeons que I soit stationnaire en imposant les mêmes conditions aux limites que précédemment : $q(t_1) = q_1$, $q(t_2) = q_2$. Aucune restriction n'est apportée sur $p(t_1)$ et $p(t_2)$. Alors :

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta p \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) + \left(p \frac{d}{dt} \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right) \right] dt .$$

Intégrant par parties comme précédemment le terme en $p \frac{d}{dt} \delta q$, nous voyons que :

$$\frac{\delta I}{\delta p} = \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \quad - \frac{\delta I}{\delta q} = \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} .$$

Les conditions de stationnarité, obtenues en exigeant que ces dérivées fonctionnelles s'annulent, redonnent bien les équations (6). Notons que par adjonction d'une dérivée totale on peut aussi écrire :

$$I = p_2 q_2 - p_1 q_1 - \int_{t_1}^{t_2} q dp + H dt .$$

qui montre les rôles (anti-) symétriques joués par les variables q et p .

Complétons ces brèves indications en examinant tout d'abord les propriétés de l'action évaluée pour la trajectoire qui la rend stationnaire. Nous supposons $q_2 t_2$ assez voisin de $q_1 t_1$ pour que cette trajectoire soit unique^{*)}. La fonction obtenue dépend de $q_1 t_1$, $q_2 t_2$. Nous la noterons $I(q_2 t_2, q_1 t_1)$. Alors on vérifie sans difficulté que :

$$\delta I(q_2 t_2, q_1 t_1) = (p_2 \delta q_2 - H_2 \delta t_2) - (p_1 \delta q_1 - H_1 \delta t_1) . \quad (9)$$

*) Il ne faut pas croire qu'il s'agisse là d'une précaution oratoire assez vaine. Ainsi pour un oscillateur harmonique il existe une infinité de trajectoires, qui issues de l'origine, y retournent après une demi période.

Si la fonction de Lagrange dépend d'un paramètre α , on a en outre :

$$\frac{d}{d\alpha} I(q_2 t_2, q_1 t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha, Q(t, \alpha), \dot{Q}(t, \alpha)) dt, \quad (10)$$

où la dérivation porte sur la dépendance explicite de L . Une application de ce dernier résultat est la suivante : supposons qu'à la fonction de Lagrange L_0 nous ajoutons un terme $qF(t)$ qui contribue aux équations du mouvement par l'adjonction de la force $F(t)$. Dans ces conditions I devient une fonctionnelle de F et pour t compris entre t_1 et t_2 on aura en vertu de (10) :

$$\frac{\delta}{\delta F(t)} I(q_2 t_2, q_1 t_1) = Q(t),$$

où Q est la trajectoire en présence de la force F (on pourra si l'on veut évaluer les deux membres à $F = 0$). Ceci n'est en rien un moyen commode de résoudre les équations du mouvement, mais illustre une idée qui réapparaît constamment dans les raisonnements de la théorie des champs, et qui est celle de fonctionnelle génératrice.

A titre d'exemple des différentes formules écrites ci-dessous, considérons une particule matérielle se déplaçant le long d'un axe et soumise à une force dépendant du temps $F(t)$. La fonction de Lagrange est :

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + q F(t).$$

La solution des équations du mouvement est :

$$Q(t) = \frac{q_1(t_2 - t) + q_2(t - t_1)}{t_2 - t_1} + \int_{t_1}^{t_2} dt' G(t, t') \frac{F(t')}{m},$$

où la "fonction de Green" $G(t, t')$, symétrique en t et t' , s'annulant pour $t = t_1$ et $t = t_2$, est solution de :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') = \delta(t - t');$$

et s'écrit :

$$G(t, t') = \frac{-1}{t_2 - t_1} \left\{ \theta(t - t') (t_2 - t)(t' - t_1) + (t \leftrightarrow t') \right\}.$$

Quant à l'action évaluée le long de la trajectoire, elle a la forme :

$$I(q_2 t_2, q_1 t_1) = \frac{m}{2} \frac{(q_2 - q_1)^2}{t_2 - t_1} + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{q_1(t_2 - t) + q_2(t - t_1)}{t_2 - t_1} F(t) dt \\ + \frac{1}{2m} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' F(t) G(t, t') F(t').$$

Nous vérifions en particulier que la dérivée fonctionnelle de I par rapport à la force est l'équation de la trajectoire :

$$\frac{\delta I(q_2, t_2, q_1, t_1)}{\delta F(t)} = \frac{q_1(t_2 - t) + q_2(t - t_1)}{t_2 - t_1} + \int_{t_1}^{t_2} dt' G(t, t') \frac{F(t')}{m} .$$

Si, en particulier, $F = 0$ on trouve évidemment :

$$\frac{\partial I}{\partial q_2} = m \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = p_2 \quad \frac{\partial I}{\partial t_2} = - \frac{m}{2} \left(\frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} \right)^2 = - H(p_2, q_2) .$$

Toutes expressions fort raisonnables !

J'allais oublier de mentionner - mais bien sûr tout le monde le sait par coeur - que pour un système de points matériels soumis à des forces dérivant d'un potentiel la fonction de Lagrange est la différence entre énergie cinétique et énergie potentielle.

Il est difficile de ne pas ajouter un mot sur les transformations canoniques. Dans un grand nombre de problèmes il peut y avoir un arbitraire dans le choix des variables, disons pour l'instant des variables de configuration; ainsi on peut modifier la disposition des axes de coordonnées, ou plus généralement, la paramétrisation de la variété formée par les configurations possibles ... La forme Hamiltonienne suggère même des variantes encore plus nombreuses où les transformations envisagées affectent les variables de l'espace des phases.

Certaines transformations privilégiées seront appelées canoniques. Supposons que nous introduisions dans l'espace des phases une paramétrisation différente (qui peut dépendre explicitement du temps)^{*)} :

$$q = q(q', p', t) \quad p = p(q', p', t) .$$

La transformation sera dite canonique si la condition suivante est satisfaite: il existe une fonction H' (de p' , q' et éventuellement du temps) de telle sorte que, en fonction des variables p' , q' , les équations du mouvement conservent la forme :

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} \quad \dot{p}' = - \frac{\partial H'}{\partial q'} .$$

Pour bien faire apprécier la chose il faut écrire explicitement le cas de plusieurs degrés de liberté. N'importe quelle transformation n'est pas canonique. Le principe de moindre action suggère alors immédiatement la stratégie à adopter pour trouver la solution. Il est clair que la condition nécessaire et suffisante est que :

$$\sum_i p'_i dq'_i - H' dt \quad \text{et} \quad \sum_i p_i dq_i - H dt$$

ne diffèrent que par une différentielle totale. A son tour cette condition est

*) On pourrait même aller plus loin et considérer en même temps des transformations de la variable temps $t \equiv t(t')$ conservant l'ordre chronologique $dt/dt' > 0$.

équivalente à la condition que les différentielles (extérieures) des deux formes soient égales :

$$\sum_i dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt = \sum_i dp'_i \wedge dq'_i - dH' \wedge dt .$$

Explicitant cette condition, on trouve :

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial p'_k} \frac{\partial q_i}{\partial q'_l} - \frac{\partial p_i}{\partial q'_l} \frac{\partial q_i}{\partial p'_k} \right) = \delta_{kl} ; \quad \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial p'_k} \frac{\partial q_i}{\partial p'_l} - \frac{\partial p_i}{\partial p'_l} \frac{\partial q_i}{\partial p'_k} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial q'_k} \frac{\partial q_i}{\partial q'_l} - \frac{\partial p_i}{\partial q'_l} \frac{\partial q_i}{\partial q'_k} \right) = 0$$

et

$$\frac{\partial H'}{\partial p'_i} = \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial p'_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) + \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial p'_i} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial t} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial H'}{\partial q'_i} = \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial q'_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) + \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial q'_i} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial t} \right) .$$

Il est plus facile de comprendre les conditions (11) si on reconnaît qu'elles expriment que le produit des deux matrices $2N \times 2N$ est égal à l'unité. Indiquant les indices de ligne par une minuscule et ceux de colonne par une majuscule ceci s'écrit :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \frac{\partial p_A}{\partial p'_a} & \frac{\partial q_A}{\partial p'_a} \\ \hline \frac{\partial p_A}{\partial q'_a} & \frac{\partial q_A}{\partial q'_a} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{\partial q_a}{\partial q'_A} & -\frac{\partial q_a}{\partial p'_A} \\ \hline -\frac{\partial p_a}{\partial q'_A} & \frac{\partial p_a}{\partial p'_A} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline I & 0 \\ \hline 0 & I \\ \hline \end{array} .$$

Or si $AB = I$ on a $BA = I$. C'est dire que l'on a :

$$\sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial p'_i} - \frac{\partial q_i}{\partial p'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial q'_i} \right) = \{ p'_j, q_i \}' = \delta_{ij} = \{ p'_j, q'_i \}$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial p'_i} - \frac{\partial q_i}{\partial p'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q'_i} \right) = \{ q'_j, q_i \}' = 0 = \{ q'_j, q'_i \}$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial p'_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial q'_i} \right) = \{ p'_j, p_i \}' = 0 = \{ p'_j, p'_i \} .$$

Dans les seconds membres figurent les crochets de Poisson exprimés en fonction des variables $p'q'$. En d'autres termes, la structure en crochets de Poisson est préservée par les transformations canoniques qu'on utilise les variables (pq) ou (p',q') :

$$\{f, g\} = \{f, g\}'.$$

Quant aux équations (12), elles fournissent la nouvelle fonction de Hamilton H' ; on peut bien sûr lui ajouter un terme uniquement fonction du temps et qui n'a pas d'importance pour la dynamique. Notons que la condition d'intégrabilité du système (12) est automatiquement satisfaite par les transformations canoniques.

Cette condition s'écrit en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q'_j} \frac{\partial H'}{\partial p'_i} - \frac{\partial}{\partial p'_i} \frac{\partial H'}{\partial q'_j} &= - \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial p'_i} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} - \frac{\partial p_k}{\partial q'_j} \frac{\partial q_k}{\partial p'_i} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial p'_j} \frac{\partial H'}{\partial p'_i} - \frac{\partial}{\partial p'_i} \frac{\partial H'}{\partial p'_j} &= - \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial p'_i} \frac{\partial q_k}{\partial p'_j} - \frac{\partial p_k}{\partial p'_j} \frac{\partial q_k}{\partial p'_i} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial q'_i} \frac{\partial H'}{\partial q'_i} - \frac{\partial}{\partial q'_i} \frac{\partial H'}{\partial q'_i} &= - \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial q'_i} \frac{\partial q_k}{\partial q'_i} - \frac{\partial p_k}{\partial q'_i} \frac{\partial q_k}{\partial q'_i} \right\}. \end{aligned}$$

Les membres de droite sont automatiquement zéro pour les transformations canoniques en vertu de leur définition (11).

Un cas typique de transformation canonique est fourni par les solutions des équations du mouvement elles-mêmes. Dans ce cas, si on connaît les trajectoires dans l'espace des phases, compte tenu des conditions initiales (q', p') au temps $t = 0$, on voit que la condition sur les crochets de Poisson est satisfaite. Au temps $t = 0$ $\{p_i, q_j\}' = \delta_{ij}$ et on vérifie que $\partial/\partial t \{p_i, q_j\}' = 0$. Les équations (12) montrent de plus qu'on peut poser $H' = 0$. Donc (q', p') sont indépendants du temps, circonstance fort heureuse ! Toutes ces considérations cependant sont locales, c'est-à-dire valables au voisinage d'un point $p'q't$.

Les quantités (q', p') au nombre de $2N$ sont fonctions de $q(t)$, $p(t)$ et du temps. En éliminant le temps, on obtient ainsi $2N-1$ fonctions de $q(t)$ et $p(t)$ qui sont en fait indépendantes du temps. On voit qu'en général il existe $2N-1$ constantes du mouvement mais seul un petit nombre d'entre elles s'exprime globalement comme des fonctions univoques. D'après un théorème de Poincaré ces dernières sont en fait liées à l'existence de symétries des lois du mouvement.

Enfin, on observe que les transformations canoniques conservent la mesure $\prod_i dp_i dq_i$. C'est évident en vertu de leur définition pour un degré de liberté. Pour plusieurs degrés de liberté on observe, grâce à la forme matricielle donnée ci-dessus, que le carré du Jacobien de la transformation $p q \rightarrow p' q'$ est égal à l'unité. Appliquée à l'évolution dans le temps, cette remarque fournit le théorème de Liouville.

2. SYSTEMES A UN NOMBRE INFINI DE DEGRES DE LIBERTE

En mécanique des fluides, en électromagnétisme ... nous sommes familiers avec la situation où le nombre de degrés de liberté d'un système dynamique est infini.

Pour être concrets nous discuterons d'abord l'exemple important du champ électro-magnétique en présence des sources prescrites à l'avance. Les équations du mouvement sont les équations de Maxwell qui, lorsque la vitesse de la lumière c est prise égale à l'unité, s'écrivent:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \rho & \operatorname{div} B &= 0 \\ \operatorname{rot} B - \frac{\partial E}{\partial t} &= j & \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

E et B désignent le champ électrique et l'induction magnétique, ρ et j les densités de charge et de courant satisfaisant à l'équation de conservation (de la charge):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0 \quad (2)$$

En général ρ et j varient avec la position x et le temps t , il en est de même de E et B . Il est commode d'introduire une notation compacte pour les vecteurs, tenseurs ... qui a de plus l'avantage de rendre explicite l'invariance relativiste de la théorie. Les indices $\mu, \nu \dots$ prendrons les valeurs 0 1 2 3. Le tenseur métrique :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

servira à monter ou abaisser les indices. On pose :

$$x^\mu \equiv \{t, x\} \quad j^\mu = \{\rho, j\}$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{vmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{vmatrix}$$

On abrège les dérivations $\partial/\partial x^\mu$ en ∂_μ . Enfin le symbole de Lévi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\tau}$ [= ± 1 si $(\mu\nu\rho\tau)$ est une permutation paire ou impaire de (0123) et 0 autrement], sert à passer d'un tenseur antisymétrique à son dual :

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\tau} F_{\rho\tau}$$

\tilde{F} se déduit de F par la substitution $E \rightarrow B \quad B \rightarrow -E$.

Avec ces notations les équations de Maxwell prennent la forme :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 ; \quad (1')$$

et l'équation de conservation :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \quad (2')$$

Nous utilisons la convention de sommation sur les indices muets.

Pour relier ces équations dynamiques au formalisme de la première section, il faut identifier la coordonnée d'espace avec l'indice i des degrés de liberté, la correspondance étant du type $\Sigma_i \rightarrow \int d^3x$. Les équations de Maxwell apparaissent de prime abord comme faisant intervenir les dérivées (partielles) du premier ordre par rapport au temps, si nous considérons les champs E et B comme les variables de configuration. De plus l'invariance relativiste semble s'opposer à faire jouer au temps un rôle privilégié.

Toutes ces difficultés vont pouvoir être surmontées. La première tâche consiste à obtenir des équations du second ordre par rapport au temps en introduisant le potentiel A^μ . En effet, il découle des équations de Maxwell homogènes qu'on peut toujours écrire :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad , \quad E = -\nabla A^0 - \frac{\partial A}{\partial t} \quad , \quad B = \text{rot} A . \quad (3)$$

On peut toujours en fait, étant donné $F^{\mu\nu}$, trouver un potentiel explicitement en utilisant la formule :

$$A^\nu(x) = - \int_0^1 dt \quad t F^{\mu\nu}(tx) x_\nu . \quad (4)$$

Un tel potentiel n'est pas défini d'une manière univoque par l'équation (3). On peut le modifier en lui ajoutant le gradient d'une fonction arbitraire. Cette transformation porte le nom de changement de jauge :

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \phi . \quad (5)$$

Si \square désigne le d'Alembertien $\partial_\mu \partial^\mu$, les équations de Maxwell exprimées en terme de A^μ s'écrivent :

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu . \quad (6)$$

Elles sont bien entendu invariantes de jauge :

$$\square \partial^\nu \phi - \partial^\nu (\partial_\mu \partial^\mu \phi) \equiv 0 .$$

Cet arbitraire de jauge peut apparaître, selon les cas, comme une circonstance fort ennuyeuse, ou au contraire fort utile, et dont les conséquences sont très profondes. Par des choix de jauge judicieux, il est parfois possible d'introduire d'intéressantes simplifications. Inversement, il peut se faire par exemple qu'on brise l'invariance relativiste manifeste (si ϕ' n'est pas choisi comme un champ scalaire).

Le premier objectif fixé est atteint, en ce sens que les équations (7) auxquelles se réduisent les équations de Maxwell sont du second ordre. En fait les expressions compactes sont légèrement trompeuses. Il est instructif de récrire de manière plus détaillée les équations (6) :

$$\begin{aligned} \rho &= \square A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} A^0 + \text{div} A \right) = -\Delta A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} A \\ \mathbf{j} &= \square A + \nabla \left(\frac{\partial A^0}{\partial t} + \text{div} A \right) . \end{aligned} \quad (6)$$

Nous voyons que pour certaines jauges (du type $\text{div} \vec{A} = 0$: jauge coulombienne) la première équation (l'équation de Poisson) n'a plus rien à faire avec l'évolution dans le temps. Par exemple si $\text{div} A = 0$ on peut la résoudre pour A^0 :

$$A^0(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 x'}{4\pi} \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} ;$$

et récrire l'équation du potentiel vecteur :

$$\square A = \mathbf{j} - \nabla \int \frac{d^3 x'}{4\pi} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} .$$

Naturellement la divergence du membre de droite est nulle en vertu de l'équation de conservation.

Cette procédure est employée quelquefois pour obtenir une formulation Lagrangienne en vue de la quantification. Elle a le désavantage de ne pas préserver explicitement l'invariance relativiste bien que la motivation physique sous-jacente (potentiel coulombien instantané) soit fort utile dans certains types de problèmes (par exemple ceux qui ont trait à l'étude des états liés).

Passons au principe de moindre action. La fonction de Lagrange (si fonction il y a) doit apparaître comme une intégrale sur la variable d'espace d'une densité à laquelle on donne le nom de lagrangien. L'action elle-même sera l'intégrale quadridimensionnelle du lagrangien $\mathcal{L}(x)$:

$$I = \int d^4 x \mathcal{L}(x) . \quad (7)$$

Nous n'indiquerons pas par la suite les bornes de cette intégrale. Nous pouvons nous contenter d'imaginer que l'intégrale s'étend à tout l'espace, des conditions adéquates ayant été imposées aux champs à l'infini (dans les directions d'espace et de temps) pour que toutes les intégrations par parties soient justifiées. On suppose que le potentiel A^μ se transforme comme un champ quadrivectoriel. De manière à ce que le principe variationnel de moindre action conduise différents

observateurs utilisant des repères reliés par des transformations de Lorentz à écrire des équations équivalentes, il est naturel d'exiger que le lagrangien \mathcal{L}

- i) soit un champ scalaire,
- ii) s'exprime au plus quadratiquement en A puisque les équations de Maxwell sont linéaires,
- iii) ne fasse intervenir au plus que les dérivées (partielles) du premier ordre,
- iv) soit enfin tel qu'une transformation de jauge ne le modifie au plus que par l'addition d'une quadri-divergence. Cette condition est l'analogie de la propriété équivalente de la fonction de Lagrange. On pouvait ajouter à cette dernière une différentielle totale dans le temps sans modifier le contenu du principe de moindre action. De même, en vertu du théorème du Gauss, si on ajoute une divergence au lagrangien, l'action n'est modifiée que par des termes qui dépendent uniquement des conditions aux limites.

Très généralement si un lagrangien est fonction de champs $\phi_i(x)$ et de leurs gradients $\partial_\mu \phi_i(x)$, la variation de l'action pour une variation infinitésimale des champs sera :

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_i(x)} \delta \phi_i(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \partial_\mu \phi_i(x)} \delta \partial_\mu \phi_i(x) \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i(x)} \right) \delta \phi_i(x) . \end{aligned}$$

La stationnarité de l'action conduit donc aux équations d'Euler Lagrange généralisées :

$$\frac{\delta I}{\delta \phi_i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i(x)} . \quad (8)$$

Mis à part la condition (iv), la forme la plus générale du lagrangien que nous puissions écrire pour l'électrodynamique est la suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ a (\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) + b (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + c (\partial_\mu A^\mu)^2 + d A_\mu A^\mu \right\} + e A_\mu j^\mu .$$

Nous avons immédiatement éliminé $\alpha \partial_\mu A^\mu + \beta$ qui comme divergence ne saurait intervenir ainsi que des termes du style $j^\mu \partial_\mu f(A^\rho, \partial^\sigma A^\tau)$ qui en vertu de la conservation du courant sont aussi des divergences. Enfin, un facteur de proportionnalité global est arbitraire.

Nous exigeons alors que les équations d'Euler-Lagrange s'identifient aux équations de Maxwell. Les premières s'écrivent :

$$\begin{aligned} d A^\mu + e j^\mu &= \partial_\nu \{ a \partial^\nu A^\mu + b \partial^\mu A^\nu + c g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho \} \\ &= a \square A^\mu + (b+c) \partial^\mu \partial_\nu A^\nu. \end{aligned}$$

Comparant cette expression avec (6) on voit que :

$$\begin{aligned} d &= 0 && (d \neq 0 \text{ correspondrait à un champ massif}) \\ -a &= -e = (b + c) \end{aligned}$$

Le facteur de proportionnalité général est à ce niveau arbitraire. Faisons le choix (qui sera justifié plus tard) :

$$-a = -e = (b + c) = 1 ;$$

ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} - j_\rho A^\rho + \frac{c}{2} \left((\partial_\rho A^\rho)^2 - (\partial_\rho A^\nu)(\partial_\nu A^\rho) \right).$$

Le terme multiplié par le coefficient c arbitraire est en fait une divergence comme on pouvait s'y attendre :

$$(\partial_\rho A^\rho)^2 - (\partial_\rho A^\nu)(\partial_\nu A^\rho) = \partial_\rho A_\nu [g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu] = \partial_\rho \{ A_\nu [g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu] \}.$$

On peut donc si on le désire l'éliminer, ce qui revient à poser $c = 0$. On aboutit par conséquent à la forme suivante de l'action :

$$I = - \int d^4x \left(\frac{1}{4} F^2 + jA \right) = \int d^4x \left\{ \frac{E^2 - B^2}{2} - \rho A^0 + \vec{j} \cdot \vec{A} \right\}. \quad (9)$$

Cette expression nous montre cependant que ce lagrangien n'est pas invariant du jauge mais que, supposant le courant conservé, une transformation $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi$ revient à l'adjonction d'une divergence :

$$j_\nu \partial^\nu \phi = \partial^\nu (j_\nu \phi) ;$$

ce qui explique l'invariance de jauge des équations du mouvement. Nous en concluons

que la conservation du courant est une condition nécessaire (et suffisante) à l'invariance de jauge de la théorie.

A ce stade tout autre choix du coefficient c est tout aussi légitime. Par exemple pour $c = 1$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left\{ (\partial_\rho A^\nu)(\partial^\rho A_\nu) - (\partial_\rho A^\rho)^2 \right\} - A_\rho j^\rho .$$

Comme cette question d'invariance de jauge est capitale, il est instructif de présenter une autre façon de voir qui se révélera utile dans la suite. Jusqu'ici la théorie est présentée sans qu'un choix particulier soit fait explicitement qui restreigne l'arbitraire sur A . Un choix semble particulièrement indiqué, il consisterait à imposer à A la condition supplémentaire (invariante relativiste) de Lorentz :

$$\partial_\rho A^\rho = 0 .$$

Dans ce cas l'équation du mouvement se réduirait à :

$$\square A^\rho = j^\rho .$$

Notons que ceci est encore compatible avec la condition de Lorentz et que cette dernière réduit l'arbitraire de jauge sur A considérablement, puisque cette fois ci on n'est plus autorisé qu'à des transformations :

$$A_\rho \rightarrow A_\rho + \partial_\rho \phi \quad \square \phi = 0 .$$

Voyons s'il est possible d'introduire cette contrainte dans le formalisme.

La première idée qui vient à l'esprit, est la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Comme il est bien connu, si on veut traiter un problème de minimisation avec contraintes, on peut ajouter à la quantité initiale une combinaison linéaire des équations de contraintes et faire des variations arbitraires. Les coefficients sont alors déterminés en requérant que les contraintes soient satisfaites par la solution du problème auxiliaire. Puisque $\partial_\mu A^\mu = 0$ consiste en fait en une infinité de contraintes (l'annulation d'une fonction pour tout x), on voudrait rajouter au lagrangien $\int d^4x \lambda(x) \partial_\mu A^\mu(x)$. Ceci est possible mais il est plus économique de remarquer que $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ est équivalent à une condition unique $\int d^4x (\partial_\mu A^\mu(x))^2 = 0$. Il suffit donc d'ajouter au lagrangien $\lambda/2(\partial_\mu A^\mu)^2$ avec $\lambda \neq 0$, indépendant de x . Ceci revient, en comparant avec ce que nous disions plus haut, à éliminer la condition $b + c = 1$. Les équations du mouvement deviennent donc :

$$\square A^\nu + (\lambda - 1) \partial^\nu \partial_\rho A^\rho = j^\nu .$$

En prenant la divergence des deux membres on aura :

$$\lambda \square \partial_\nu A^\nu = 0 .$$

Pour $\lambda \neq 0$ on assurera la condition de Lorentz par des conditions aux limites, par exemple en demandant que $\partial_\mu A^\mu$ s'annule asymptotiquement (pour $|t| \rightarrow \infty$). Alors la seule solution de l'équation précédente est la fonction nulle : $\partial_\mu A = 0$ et $\square A^\mu = j^\mu$. Ce choix de jauge n'influera en rien sur l'expression des champs E et B en fonction des sources et nous voyons que nous obtenons de cette manière une théorie parfaitement équivalente aux équations de Maxwell.

Résumons la logique du raisonnement :

$$1) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 - j \cdot A$$

Invariance de jauge \Leftrightarrow courant conservé

Principe de moindre action \Rightarrow équations de Maxwell.

$$2) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 - j \cdot A + \frac{\lambda}{2} (\partial A)^2$$

Le courant est conservé $\partial j = 0$

Principe de moindre action $\Rightarrow \square \partial_\mu A^\mu = 0$

Conditions aux limites \Rightarrow jauge de Lorentz \Rightarrow équations de Maxwell.

Je me suis fort appesanti sur cette question parce que c'est une source de confusion considérable. Par ailleurs, ceci va être généralisé au cas des champs de Yang-Mills. De même la théorie de la gravitation fait intervenir des concepts analogues.

Ajoutons quelques remarques mnémotechniques permettant de retenir les signes, quelles que soient les conventions de métrique ... On veut que les termes en $(\partial A / \partial t)^2$ (les seuls qui soient quadratiques dans les "vitesses") soient affectés d'un coefficient $+\frac{1}{4}$. De même $\rho^0 A^0$ est une énergie potentielle et doit intervenir avec le signe moins. Enfin, dimensionnellement (dans le système Gaussien rationalisé utilisé ici) tout va bien puisque $\int d^3x E^2/2$ est une énergie donc $\int d^4x E^2/2$ est bien une action : énergie \times temps.

L'électromagnétisme n'est pas, tant s'en faut, le sujet unique de la théorie des champs. D'ailleurs nous n'avons même pas traité dynamiquement les degrés de liberté des sources. Pour compléter ces indications sur les systèmes infinis, passons en revue quelques cas simples qui servent de matériaux à des constructions plus ambitieuses. Convenons d'appeler "lagrangien libre" la partie du lagrangien quadratique dans les champs. Nous nous bornons pour l'instant essentiellement à ce cas.

Par exemple un champ scalaire satisfaisant à l'équation de Klein-Gordon :

$$(\hbar^2 \square + m^2) \phi(x) = 0, \tag{10}$$

aura pour lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ (\hbar \partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right\}. \tag{11}$$

J'ai ajouté explicitement un facteur \hbar ayant les dimensions d'une action pour montrer que le concept d'un champ de Yukawa massif nécessite l'introduction d'une nouvelle constante. Désormais on identifie ce \hbar avec la constante de Planck et l'on fait $\hbar = 1$. Dans ce type d'unité l'action est sans dimension et ϕ (comme A_μ) a les dimensions d'une énergie ou de l'inverse d'une longueur.

Si l'on veut un terme de source j dans le second membre de l'équation de Klein-Gordon, il faut ajouter $+j\phi$ au lagrangien (11). Dans une théorie plus ambitieuse, par exemple si le champ scalaire interagit avec lui-même, comme c'est le cas des vibrations anharmoniques d'un cristal, les termes les plus simples que l'on puisse ajouter sont en ϕ^3 et ϕ^4 (on verra plus tard que si on peut quantifier ces théories de manière à obtenir des prédictions non ambiguës, dans l'état actuel des techniques de calcul, la renormalisabilité introduit de sévères restrictions sur le type de termes d'interactions possibles). Par exemple un modèle hyper-simplifié d'interaction $\pi^0\pi^0$ (négligeant isospin, couplage aux baryons ...) ajouterait un terme d'interaction $-\lambda/4! \phi^4$ avec $-\lambda/4\pi$ de l'ordre de la longueur de diffusion d'onde s en unité $1/m_\pi$.

Les champs vectoriels massifs semblent jouer un rôle essentiel dans la structure des interactions faibles.

En présence de sources extérieures les équations du mouvement sont :

$$(\square + m^2) B^\nu - \partial^\nu (\partial_\nu B^\nu) = j^\nu. \quad (13)$$

Prenant la divergence des deux membres :

$$m^2 \partial_\nu B^\nu = \partial_\nu j^\nu. \quad (14)$$

Si les sources s'annulent ou sont conservées $\partial_\mu j^\mu = 0$ et le champ B est transverse (trois polarisations possibles dans le cas libre). Introduisant encore le tenseur antisymétrique $G^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu$ le lagrangien prendra la forme :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} B_\nu B^\nu - j_\nu B^\nu.$$

Ici le champ B est en principe "mesurable". Cependant rien n'interdit de considérer des variations de l'action induites par des variations de B de la forme :

$$B_\nu \rightarrow B_\nu + \partial_\nu \delta\phi,$$

avec :

$$\delta I = -\int d^4x (m^2 \partial_\nu B^\nu - \partial_\nu j^\nu) \delta\phi.$$

On voit alors que la condition de transversalité doit nécessairement émerger du principe de moindre action.

Anticipant sur la question des champs avec spin, il me faut quand même ajouter quelques mots sur les champs de spin $\frac{1}{2}$. Le prototype est fourni par les solutions de l'équation de Dirac :

$$\left\{ \frac{1}{2i} \gamma^\mu \partial_\mu - m \right\} \psi = \eta ; \quad (16)$$

où ψ et η (la source) sont des spineurs à quatre composantes. Les quatre matrices γ^μ satisfont à :

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2 g^{\mu\nu} .$$

Pour ce qui suit nous pouvons nous contenter de la représentation habituelle :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\alpha \\ -\sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \quad \sigma^\alpha \text{ matrices de Pauli .}$$

L'équation de Dirac est du premier ordre dans le temps. Cependant, le champ ψ peut être considéré comme intrinsèquement complexe, ce qui fait qu'on peut varier indépendamment ψ et ψ^\dagger .

Bien que cela ne soit pas essentiel pour la suite, le traitement correct au niveau "classique" des spineurs est de les considérer comme faisant partie d'une algèbre anticommutante (ceci peut être formalisé). L'opération $\psi \rightarrow \psi^\dagger$ est supposée renverser l'ordre des facteurs en plus d'être antilinéaire : $(\lambda\psi_1 + \mu\psi_2)^\dagger = \lambda^* \psi_1^\dagger + \mu^* \psi_2^\dagger$, $(\psi_1\psi_2)^\dagger = \psi_2^\dagger \psi_1^\dagger$

L'action (invariante par l'opération[†]) s'écrit explicitement :

$$\mathbf{I} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2i} [\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi - \bar{\eta} \psi - \bar{\psi} \eta \right\} ,$$

avec : $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 .$

Des variations indépendantes de ψ et $\bar{\psi}$ donnent alors :

$$\delta \mathbf{I} = \int d^4x \left\{ \delta \bar{\psi} \left[\left(\frac{1}{2i} \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi - \eta \right] - \frac{1}{2i} (\partial_\mu \delta \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right. \\ \left. + \left[\bar{\psi} \left(-\frac{1}{2i} \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu - m \right) - \bar{\eta} \right] \delta \psi + \frac{1}{2i} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right\} .$$

Intégrant par parties les termes en $\partial_\mu(\delta\bar{\psi})$ et $\partial_\mu\delta\psi$ et annulant les coefficients de $\delta\bar{\psi}$ et de $\delta\psi$ séparément, on obtient l'équation de Dirac et sa conjuguée :

$$\left(\frac{1}{i} \gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi = \eta \quad , \quad \bar{\psi} \left(-\frac{1}{i} \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m\right) = \bar{\eta} \quad .$$

L'anticommuation n'a joué aucun rôle dans cette dérivation. Cependant, son introduction se justifie dans le cadre de certaines méthodes non rigoureuses mais fort suggestives qui, partant de l'expression "classique" de l'action, permettent d'obtenir la version quantique de la théorie (les intégrales de chemin de Feynman). La seule façon de procéder pour les champs de spin demi-entier en respectant la relation entre spin et statistique est d'utiliser les règles d'anticommuation envisagées ci-dessus. La limite classique d'un champ de bosons est identifiable à un champ classique au sens ordinaire du terme comme c'est par exemple le cas du champ électromagnétique. En revanche la limite classique d'un champ obéissant à la statistique de Fermi ne peut s'étendre que dans un sens très particulier. Il n'y a pas de champ "neutrinique" équivalent au champ électromagnétique.

3. SYMETRIES ET LOIS DE CONSERVATION

Pour introduire le sujet revenons à la mécanique d'un nombre fini de degrés de liberté. L'objectif essentiel du formalisme, à ne pas perdre de vue, est la résolution des équations du mouvement, compte tenu de conditions aux limites appropriées. On s'intéresse à toutes les propriétés générales qui peuvent aider dans cette tâche. Les symétries jouent un rôle décisif dans la mesure où d'une part, les contraintes qu'elles imposent sont dans une large mesure indépendantes de la dynamique souvent imprécisément connue, d'autre part elles permettent de restreindre les choix de modèles.

A priori, on dispose dans de nombreux cas de deux types d'arguments. Le premier type est la prise en considération de symétries évidentes (ou moins évidentes) dans le problème. Le second consiste à remarquer, en manipulant les équations, que certaines quantités sont inchangées dans le mouvement. Le fait remarquable est qu'il existe très souvent une relation très étroite entre ces deux types d'arguments.

Partons d'un exemple très simple, pour nous orienter. Une particule matérielle est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel indépendant du temps. Il est clair que dans ces conditions la position à l'instant t du point représentatif du mouvement de la particule, partie d'un point déterminé de l'espace des phases, à l'instant $t = 0$, est évidemment la même que celle d'une autre particule au temps $t + \tau$ partie du même point initial à l'instant τ . Il y a invariance du problème par translation dans le temps. Par ailleurs, en combinant les équations du mouvement, nous savons que dans ce cas l'énergie (la valeur de la fonction de Hamilton) est conservée. Ces deux remarques sont en fait liées. Nous avons vu que la variation dans le temps de toute fonction sur l'espace des phases est donnée par la relation;

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} .$$

L'invariance par translation dans le temps se traduit ici par le fait que le potentiel est indépendant du temps. C'est dire que l'on a $\partial H / \partial t = 0$ et comme $\{H, H\} = 0$:

$$\frac{dH}{dt} = 0 .$$

En d'autres termes la valeur de la fonction de Hamilton - l'énergie - est conservée par le mouvement. Cette simple remarque suffit par exemple à résoudre explicitement par quadratures le problème du mouvement d'une particule matérielle se déplaçant sur un axe sous l'effet d'une force indépendante du temps.

Afin de pouvoir discuter des symétries de type différent nous pouvons donner à la relation entre invariance par déplacement dans le temps et conservation de l'énergie une forme légèrement différente. Considérons l'action évaluée pour la trajectoire stationnaire entre les configurations (q_1, t_1) et (q_2, t_2) . L'invariance par translation dans le temps s'exprime alors par la relation :

$$I(q_2, t_2 + \tau; q_1, t_1 + \tau) = I(q_2, t_2; q_1, t_1).$$

Prenant τ infinitésimal ceci équivaut à :

$$\frac{\partial I}{\partial t_2} - \frac{\partial I}{\partial t_1} = 0;$$

ou encore en tenant compte de (I-9) :

$$H_2 = H_1.$$

De manière analogue l'invariance par translation d'espace entraînera :

$$I(\{\vec{q}_n + \vec{a}\}_2, t_2; \{\vec{q}_n + \vec{a}\}_1, t_1) = I(\{\vec{q}_n\}_2, t_2; \{\vec{q}_n\}_1, t_1),$$

et sous forme différentielle, en tenant compte de (I-9), on obtient la loi de conservation de l'impulsion totale (somme des moments conjugués)

$$(\sum \vec{p}_n)_2 = (\sum \vec{p}_n)_1.$$

L'invariance de l'action résulte au fond de la formule :

$$\frac{d}{d\alpha} I(q_2, t_2; q_1, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha, Q(t, \alpha), \dot{Q}(t, \alpha)),$$

lorsqu'on a $\partial L / \partial \alpha = 0$ et α désigne l'un des paramètres de la transformation.

Si on a encore invariance par rotation $q \rightarrow Rq$, R désignant la matrice de rotation, une transformation infinitésimale d'angle $\delta\alpha$ autour de la direction \vec{u} donnera :

$$\vec{q} \rightarrow \vec{q}' = \vec{q} + \delta\alpha \vec{u} \wedge \vec{q}.$$

Utilisant des notations évidentes, la même formule :

$$\delta I(z, t) = (p\delta q - H\delta t) \Big|_1^2,$$

entraînera l'égalité :

$$\sum_n \vec{p}_n \cdot (\vec{u} \wedge \vec{q}_n) \Big|_2 = \sum_n p_n \cdot (\vec{u} \wedge \vec{q}_n) \Big|_1.$$

Comme l'axe de rotation est arbitraire on obtient ainsi la loi de conservation du moment angulaire total :

$$\sum_n \vec{q}_n \wedge \vec{p}_n \Big|_2 = \sum_n \vec{q}_n \wedge \vec{p}_n \Big|_1 .$$

La méthode employée ci-dessus peut donc se résumer comme suit : le problème dynamique envisagé admet une certaine invariance. L'action $I(2,1)$ qui résultait de l'intégration le long de la trajectoire stationnaire entre les configurations 1 et 2 est égale à $I(2',1')$ où 1' et 2' sont les configurations transformées par la symétrie en question. Dans le cas où les transformations envisagées dépendent continument d'un paramètre qui peut être pris infinitésimal ou aboutit à une loi de conservation.

Remarquons que certaines symétries sont discrètes. C'est le cas de la parité, du renversement du sens du temps ... Par exemple cette dernière propriété équivaut à $I(q_2, t_2; q_1, t_1) = I(q_1, -t_1; q_2, -t_2)$, (on note que ceci entraîne $p_2 \leftrightarrow -p_1$); mais elle ne conduit pas une loi de conservation. Ceci n'est pas tout à fait exact en ce sens qu'il peut exister des invariants intégraux. A titre d'exemple de cette dernière circonstance, considérons le mouvement d'une particule à une dimension dans un potentiel périodique de période a . On a dans ce cas conservation de la quantité intégrale :

$$\int_0^a dp p_1(p) = \int_0^a dp p_2(p) ,$$

où

$$p_1(p) = \frac{\partial}{\partial q_1} I(q_2 + p, t_2; q_1 + p, t_1) .$$

En d'autres termes, soit dans l'espace de phase au temps t_1 une courbe arbitraire C_1 partant d'un point (q_1, p_1) et le joignant au point (q_1+a, p_1) . Au temps t_2 les points représentatifs formeront une courbe C_2 partant de (q_2, p_2) et allant à (q_2+a, p_2) , alors :

$$\int_{C_2} p dq = \int_{C_1} p dq .$$

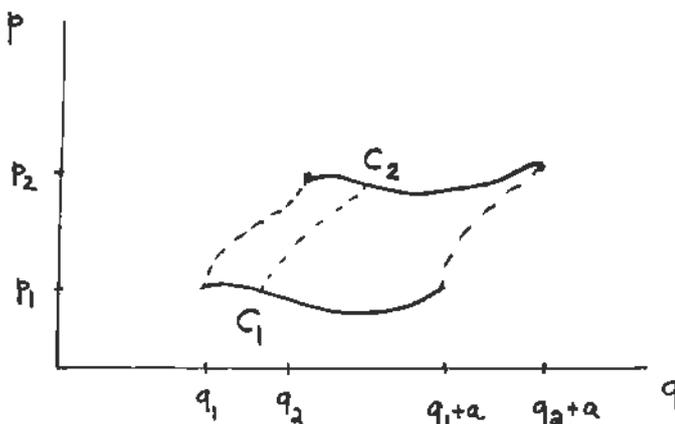


Fig. 1 - L'espace des phases pour un potentiel de période a .

Tout se passe comme si l'espace des phases avait la structure d'un cylindre avec l'identification $q \equiv q + na$. Dans ces conditions C_1 et C_2 apparaissent comme des cycles fermés et $\int_{\text{cycle fermé}} p dq$ est un invariant. A la limite où $a \rightarrow 0$ nous retrouvons la conservation du moment habituel.

La question de ces invariants intégraux déborde le cadre de notre discussion. Désormais, nous nous bornerons à des ensembles de transformations dépendant de manière différentiable de certains paramètres.

Nous pouvons faire une dernière généralisation pour nous préparer à la suite. Pour cela revenons à l'action envisagée comme fonctionnelle de toutes les trajectoires, entre les configurations 1 et 2. Pour être spécifiques reprenons l'exemple de l'invariance par rotation :

$$I = \int_1^2 dt L(\vec{q}_n, \dot{\vec{q}}_n)$$

Nous avons $L(R\vec{q}_n, R\dot{\vec{q}}_n) = L(\vec{q}_n, \dot{\vec{q}}_n)$. Pour une rotation infinitésimale $R\vec{q} = \vec{q} + \delta\alpha \vec{u}_\Lambda \vec{q}$. Bien entendu L n'est invariant que si l'angle $\delta\alpha$ est indépendant du temps, sinon $d/dt R\vec{q} \neq R d\vec{q}/dt$. Cependant, dans le principe variationnel rien n'empêche de choisir au voisinage de la trajectoire de stationarité des variations particulières :

$$\delta\vec{q} = \delta\alpha(t) \vec{u}_\Lambda \vec{q} ,$$

à condition bien entendu que $\delta\alpha(t_1) = \delta\alpha(t_2) = 0$. L'invariance par rotation dit que, lorsque $\delta\alpha$ est constant, $\delta I = 0$. De manière générale on a nécessairement

$$\frac{\delta I(\alpha)}{\delta \alpha(t)} = 0 .$$

Explicitons cette condition. En utilisant la remarque ci-dessus on a :

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha(t)} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}(t)} = 0 . \tag{1}$$

Donc la quantité $\partial L / \partial \dot{\alpha}$ est conservée; elle ne dépend bien sûr plus de $\delta\alpha$ puisqu'on néglige les termes que ne sont pas des infiniment petits du premier ordre. De plus:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta\alpha} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \delta \dot{q}_i}{\partial \delta \dot{\alpha}}$$

Or, on a :

$$\frac{\partial}{\partial \delta \dot{\alpha}} \delta \dot{q} = \frac{\partial}{\partial \delta \alpha} \delta q .$$

La quantité conservée est donc :

$$\frac{\partial L}{\partial \delta \dot{\alpha}} = \sum_i p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial \delta \alpha} .$$

Par exemple, pour le cas des rotations, on trouve :

$$\sum_m \vec{p}_m \cdot (\vec{u} \wedge \vec{q}_m) = \vec{u} \cdot \sum_m \vec{q}_m \wedge \vec{p}_m .$$

Pour le cas de l'invariance par translation dans le temps, il faut faire un peu attention, car le cas $\delta \alpha = \text{cte}$ correspond au déplacement des temps initiaux et finaux. Plus directement posons :

$$\delta q = \delta \alpha \dot{q} \quad \delta \dot{q} = \delta \alpha \ddot{q} + \delta \dot{\alpha} \dot{q} ;$$

et $\delta \alpha(t_1) = \delta \alpha(t_2) = 0$. Au voisinage de la trajectoire réelle on aura :

$$\begin{aligned} 0 &= \delta I = \int_1^2 dt \left\{ \delta \alpha(t) \left[\dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] + \delta \dot{\alpha}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right\} \\ &= \int_1^2 dt \delta \alpha(t) \left[\frac{d}{dt} \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \right] . \end{aligned}$$

L'invariance est exprimée par la condition $\partial L / \partial t = 0$, et on retrouve heureusement la conservation de l'énergie $p\dot{q} - L$. Plus généralement $\frac{d}{dt} (p\dot{q} - L) = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

Il peut se faire que la loi de force possède une invariance sans que la fonction de Lagrange soit invariante. Ce qui arrive alors, c'est qu'une transformation infinitésimale, de paramètre indépendant du temps, ajoute à la fonction de Lagrange une dérivée totale dans le temps*. Il n'en reste donc pas moins vrai que $\delta I / \delta \alpha(t) = 0$ conduit à une loi de conservation, mais la quantité conservée n'est plus $\partial L / \partial \delta \dot{\alpha}$ et peut même dépendre explicitement du temps. A l'opposé ce que l'on pourrait imaginer cette circonstance n'a rien d'exceptionnel. Un exemple simple est fourni par le mouvement d'un point matériel soumis à un champ de force indépendant de la position (mais pouvant dépendre du temps). Le problème est évidemment invariant par translation mais l'impulsion n'est évidemment pas conservée ! Pour une translation indépendante du temps $\delta \alpha$, à la fonction de Lagrange

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \vec{F}(t) \cdot \vec{q} ,$$

* Autrement dit $\frac{\partial L}{\partial \delta \alpha} = \frac{d}{dt} \phi(t)$ et $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \delta \dot{\alpha}} - \phi \right) = 0$

s'ajoute :

$$\vec{F}(t) \cdot \delta \vec{a} = \frac{d}{dt} \int^t dt' \vec{F}(t') \cdot \delta \vec{a} ,$$

qui est bien une dérivée totale.

Si $\delta \vec{a}$ dépend du temps, on trouvera :

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \vec{a}(t)} = - \frac{d}{dt} \left(m \dot{\vec{q}} - \int^t dt' \vec{F}(t') \right) .$$

La quantité conservée est $m \dot{\vec{q}} - \int^t dt' \vec{F}(t')$ en accord avec les lois du mouvement ! On observe que même pour une force constante cette quantité dépend explicitement du temps. Physiquement il est bien sûr impossible de réaliser une telle force constante à travers tout l'espace comme le demande l'invariance par translation.

La généralisation au cas d'un système à un nombre infini de degrés de liberté ne va pas présenter de difficultés particulières. Nous allons envisager deux types légèrement différents de transformations. Dans le premier type, qui sera l'analogie des translations dans le temps, la propriété d'invariance se traduira par $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x')$ où x' sera un point transformé, dans le second par $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x)$. Les premières transformations seront dites "géométriques", les secondes "internes". Cette distinction n'est ici qu'une commodité de langage.

4. INVARIANCES GEOMETRIQUES ET TENSEUR DENSITE D'ENERGIE-IMPULSION

Supposons un lagrangien exprimé en fonction de champs et de leurs gradients, mais sans dépendance explicite dans les coordonnées x . Alors par translation :

$$\mathcal{L}(x+a) \equiv \mathcal{L}(\phi_i(x+a), \partial_\mu \phi_i(x+a)).$$

Dans une transformation infinitésimale $\delta\phi_i(x) = \delta a^\mu \partial_\mu \phi_i(x)$. Suivant les recettes présentées ci-dessus, nous envisageons des transformations infinitésimales dépendant de x , à savoir :

$$\delta\phi_i(x) = \delta a^\mu(x) \partial_\mu \phi_i(x) \quad \delta\partial_\mu \phi_i(x) = \delta a^\nu(x) \partial_\nu \partial_\mu \phi_i(x) + \partial_\mu(\delta a^\nu(x)) \partial_\nu \phi_i(x).$$

La variation correspondante de l'action, après une intégration par parties, s'écrit :

$$\delta I = \int d^4x \left[\partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \partial_\nu \phi_i \right\} \right] \delta a^\nu.$$

Annulant le coefficient de $\delta a^\nu(x)$, on obtient une généralisation de notre discussion de la conservation de l'énergie. Le tenseur "canonique" $\theta^{\mu\nu}$ exprimant cette fois ci la conservation de l'énergie et de l'impulsion a pour expression :

$$\theta^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \partial^\nu \phi_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1)$$

et il satisfait à l'équation de conservation :

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0. \quad (2)$$

Il en résulte que les quatre quantités P^ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$) correspondant respectivement à l'énergie totale et aux trois composantes de l'impulsion totale :

$$P^\nu = \int d^3x \theta^{0\nu}(t, \vec{x}), \quad (3)$$

sont conservées, c'est-à-dire indépendantes du temps. En effet, il résulte immédiatement de (2) que :

$$\frac{d}{dt} P^\nu = \int d^3x \partial_0 \theta^{0\nu}(\vec{x}, t) = - \int d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i \theta^{i\nu}(\vec{x}, t) = 0,$$

pourvu que les champs s'annulent suffisamment vite à l'infini.

Ce résultat est un cas typique du théorème de Noether. A toute "invariance" du Lagrangien par une famille de transformations dépendant continument d'un paramètre correspond un "courant" conservé. En intégrant sur tout l'espace la quatrième composante de ce courant on obtient une constante indépendante du temps :

la "charge" associée. En fait on peut aussi bien intégrer sur une surface du genre espace σ , d'élément de surface $d\sigma^\mu$. Ainsi, dans le cas présent, on a aussi bien:

$$p^\nu = \int_{\sigma} d\sigma_\rho \Theta^{\rho\nu} . \quad (3')$$

Il peut se faire que le lagrangien ne soit pas invariant. Par exemple, il pourrait contenir une dépendance explicite dans les coordonnées x , par l'intermédiaire d'un champ extérieur. Dans ces conditions :

$$\delta a^\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \partial_\nu \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \phi_i} \partial_\nu \partial_\rho \phi_i \right\}$$

n'est pas égale à :

$$\delta a^\nu \partial_\nu \mathcal{L} ,$$

mais à :

$$\delta a^\nu (\partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\nu^{\text{explicité}} \mathcal{L}) ,$$

où $\partial_\nu^{\text{explicité}} \mathcal{L}$ désigne la dérivation par rapport à la dépendance explicite dans les coordonnées x à champs constants. Il faut faire attention au fait que ce n'est pas réellement un gradient. De ce fait, on aura:

$$\partial_\rho \Theta^{\rho\nu} = -\partial_\rho^{\text{explicité}} \mathcal{L} . \quad (4)$$

Par exemple si le lagrangien est la somme d'un terme invariant \mathcal{L}_0 , et d'un terme de couplage à des sources extérieures $\sum_i \phi_i j_i$, il y a une dépendance dans les coordonnées à travers les sources $j_i(x)$. On aura :

$$\Theta^{\rho\nu} = \Theta_0^{\rho\nu} - g^{\rho\nu} \sum_i \phi_i j_i ,$$

et :

$$\partial_\rho \Theta^{\rho\nu} = -\sum_i \phi_i \partial^\nu j_i .$$

Soit encore :

$$\partial_\rho \Theta_0^{\rho\nu} = \sum_i j_i \partial^\nu \phi_i .$$

Ecrivons ceci explicitement pour un champ scalaire ;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + j\phi ,$$

$$\Theta_0^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right\} ,$$

et :

$$\partial_\rho \Theta_0^{\mu\nu} = j \partial^\nu \phi .$$

Au passage nous observons que l'expression de la densité d'énergie est :

$$\Theta_0^{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 .$$

Classiquement pour que la densité d'énergie soit bornée inférieurement il est nécessaire que la constante de couplage λ soit positive.

De plus, le tenseur canonique θ^{i0} ($i=1,2,3$) est égal à la densité d'impulsion θ^{0i} . Cette propriété ne signifie nullement qu'au champ scalaire sont associées des excitations de masse nulle. C'est en fait une propriété fort raisonnable. Prenons un petit exemple pour le montrer. Considérons une assemblée de particules de masse m uniformément réparties dans l'espace (densité n_0), sans interactions, et plaçons nous dans un repère où elles sont toutes en mouvement avec l'impulsion \vec{p} et la vitesse $\vec{v} = \vec{p}/p_0$, $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}$. Le nombre n de particules par unité de volume est $n_0/\sqrt{1-v^2} = n_0 p_0/m$ en raison de la contraction des distances, et par conséquent la densité d'énergie est :

$$\Theta^{00} = n_0 \frac{p_0}{m} p_0 ,$$

et son flux :

$$\Theta^{i0} = \Theta^{00} v^i = n_0 \frac{p_0}{m} p_0 v^i = \frac{n_0}{m} p_0 p^i .$$

Par ailleurs la densité d'impulsion est :

$$\Theta^{i0} = n_0 \frac{p_0}{m} p^i .$$

On voit bien que : flux d'énergie = densité d'impulsion. En fait le tenseur complet est très simple dans ce cas, et s'écrit :

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{n_0}{m} p^\mu p^\nu .$$

Considérons à présent le champ électromagnétique couplé à un courant conservé extérieur. Rappelons que le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - j \cdot A .$$

Appliquant la formule (1) on trouve que :

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta_0^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} j \cdot A ,$$

$$\Theta_0^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho .$$

En l'absence de courant extérieur Θ_0 est conservé; mais que j soit nul ou pas Θ n'est pas invariant de jauge ! Si $A \rightarrow A + \partial\phi$;

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} \rightarrow \Theta^{\mu\nu} - F^{\mu\rho} \partial^\nu \partial_\rho \phi + g^{\mu\nu} j^\rho \partial_\rho \phi = \\ \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho \{ g^{\mu\nu} j^\rho \phi - F^{\mu\rho} \partial^\nu \phi \} - j^\mu \partial^\nu \phi . \end{aligned}$$

En revanche pour des champs s'annulant suffisamment vite à l'infini et en l'absence de courant extérieur; le terme additionnel s'exprimant comme une quadridivergence n'influera pas sur l'expression de l'impulsion totale.

Il est néanmoins extrêmement désagréable de voir un tenseur d'énergie-impulsion qui, au moins dans ce cas, est en principe mesurable (ou le suppose en général couplé au champ de gravitation), dépendre de la jauge. Qui plus est, la partie antisymétrique de $\Theta^{\mu\nu}$:

$$\Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = F^{\nu\rho} \partial^\mu A_\rho - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho ,$$

ne s'annule pas, même si l'on utilise les équations de mouvement.

Cependant, de même que le lagrangien n'est pas entièrement déterminé par les équations du mouvement, de même le tenseur densité d'impulsion-énergie souffre d'un arbitraire. Très généralement si $k^\mu(x)$ désigne un "courant" conservé $\partial_\mu k^\mu = 0$ définissant une charge $K = \int d^3x k^0(x,t)$, on ne modifie en rien les charges et éventuellement les propriétés de conservation et de covariance relativiste si on change le courant :

$$k^\mu \rightarrow k^\mu + \Delta k^\mu ,$$

de telle sorte que ;

$$\partial_\nu \Delta k^\nu = 0 ,$$

et :

$$\int d^3x \Delta k^0(\vec{x}, t) = 0 .$$

Une solution générale à ces contraintes est :

$$\Delta k^\mu = \partial_\rho K^{\mu\rho} ,$$

où $K^{\mu\rho}$ est un tenseur antisymétrique dépendant localement des champs. En effet, on a bien $\partial_\mu \partial_\rho K^{\mu\rho} = 0$ et :

$$\int d^3x \partial_\rho K^{0\rho} = \int d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i K^{0i} = 0 .$$

Dans le cas présent, on peut donc ajouter au tenseur $\theta^{\mu\nu}$ canonique :

$$\Delta \theta^{\mu\nu} = \partial_\rho \Theta^{\mu\rho, \nu} ,$$

où $\Theta^{\mu\rho, \nu}$ est antisymétrique en μ et ρ , local dans les champs mais à cela près arbitraire.

La discussion de l'effet d'un changement de jauge sur le tenseur canonique suggère immédiatement un choix possible. Dans ce cas on avait, en effet, en l'absence de courant extérieur :

$$\Delta_{\text{jauge}} \theta^{\mu\nu} = - \partial_\rho \{ F^{\mu\rho} \partial^\nu \phi \} .$$

Nous choisissons donc d'ajouter au tenseur canonique :

$$\Delta \theta^{\mu\nu} = \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) .$$

Avec

$$\tilde{\theta}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \Delta \theta^{\mu\nu} ,$$

$$\tilde{\theta}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{4} F^2 + J \cdot A \right\} - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \partial_\rho \{ F^{\mu\rho} A^\nu \} .$$

Or, en vertu des équations du mouvement $\partial_\rho F^{\mu\rho} = -j^\mu$, si bien que :

$$\tilde{\theta}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + g^{\mu\nu} J \cdot A - j^\nu A^\mu .$$

En l'absence de source, le nouveau tenseur $\Theta_0^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + F^{\mu\rho} F_\rho^\nu$ est à la fois symétrique et invariant de jauge. On vérifie qu'en accord avec la théorie générale :

$$\partial_\nu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \partial_\nu \Theta^{\mu\nu} = -A_\rho \partial^\nu j^\rho,$$

ce qui peut être arrangé pour lui donner la forme :

$$\partial_\nu \tilde{\Theta}_0^{\mu\nu} = \partial_\nu \left\{ \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + F^{\mu\rho} F_\rho^\nu \right\} = j_\rho F^{\rho\nu}.$$

En conséquence, il est possible d'identifier le nouveau $\tilde{\theta}_0$ défini ci-dessus comme la contribution purement électromagnétique à la densité d'énergie-impulsion qui coïncide, bien entendu, avec l'expression habituelle du tenseur de Maxwell. La densité d'énergie :

$$\tilde{\Theta}_0^{00} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2),$$

est bien positive.

Le fait que, même après nos manipulations, il reste encore dans $\tilde{\theta}_{\mu\nu}$, en présence de sources extérieures fixes, des termes non-invariants de jauge, ne saurait vraiment nous surprendre puisque le système est ouvert. Pour montrer ce qui se passe dans un système fermé, en tenant compte de la dynamique des sources, considérons un ensemble de particules chargées, ponctuelles, en nombre fini, interagissant avec le champ électromagnétique. L'action est donnée par (le signe est conventionnel) :

$$-I = \frac{1}{4} \int F^2(x) d^4x + \sum_n \int d\tau_n \left\{ \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2(\tau_n) + e_n \dot{x}_n(\tau_n) \cdot A(x_n(\tau_n)) \right\}.$$

Le point désigne une dérivation par rapport au paramètre τ servant à décrire les trajectoires des particules dans l'espace temps et qui, d'après les équations du mouvement, peut s'identifier au temps propre.

Dans une translation :

$$A(x) \rightarrow A(x+a) \quad x_n(\tau_n) \rightarrow x_n(\tau_n) - a,$$

l'action est invariante

Si on envisage des variations :

$$\delta A_\rho(x) = \delta a^\nu(x) \partial_\nu A_\rho(x) \quad \delta x_n^\mu = -\delta a^\mu(x_n(\tau_n)),$$

on trouve :

$$-\frac{\delta I}{\delta a^\nu(x)} = \partial_\rho \Theta^{\rho\nu}(x) = 0 ,$$

avec :

$$\Theta_{\text{canonique}}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \sum_n \int d\tau_n e_n \dot{x}_n^\mu(\tau_n) \delta(x - x(\tau_n)) A^\nu(x_n(\tau_n)) \\ + \sum_n m_n \int d\tau_n \dot{x}_n^\mu(\tau_n) \dot{x}_n^\nu(\tau_n) \delta(x - x_n(\tau_n)) .$$

Si on répète les manipulations destinées à rendre $\Theta^{\mu\nu}$ symétrique, c'est-à-dire si l'on ajoute :

$$\Delta \Theta^{\mu\nu} = \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) ,$$

on obtient :

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + F^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \sum_n m_n \int d\tau_n \dot{x}_n^\mu(\tau_n) \dot{x}_n^\nu(\tau_n) \delta(x - x_n(\tau_n)) .$$

Le résultat est un tenseur symétrique, conservé, et invariant de jauge. Les termes dangereux ont tous disparu. On observe que les contributions des sources chargées et du champ électromagnétique s'ajoutent purement et simplement.

Notons que, dans les régions où les sources s'annulent, la trace de $\tilde{\Theta}_0$ est nulle. Cette propriété entraîne immédiatement que, pour un gaz de photons, la pression est égale au tiers de densité d'énergie. D'ailleurs un argument simple, reposant essentiellement sur la nullité de la masse des photons, permet de le comprendre. Or, ce dernier argument ne fait jouer aucun rôle au spin du photon. On est donc amené à penser que des "photons scalaires" devraient satisfaire à la même relation : pression = $\frac{1}{3}$ densité d'énergie. En d'autres termes, si on considère la "théorie en ϕ^4 " on s'attend à ce que $\Theta^{\mu\mu}$ soit proportionnel à m^2 et par conséquent s'annule lorsque $m^2 = 0$. Or, en l'absence de sources nous avons l'expression :

$$\Theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right\} ,$$

$$\Theta^\mu{}_\mu = - \partial_\rho (\phi \partial^\rho \phi) + \phi \square \phi + 2m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \phi^4 .$$

Si nous tenons compte des équations du mouvement :

$$\square \phi = -m^2 \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3,$$

et :

$$\Theta^\mu{}_\nu = m^2 \phi^2 - \partial_\nu (\phi \partial^\mu \phi) = m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \square \phi^2.$$

On voit que la propriété annoncée n'est vérifiée qu'à une divergence près !

Question : Peut-on jouer sur l'arbitraire dans $\Theta^{\mu\nu}$ de manière à rendre sa trace proportionnelle à m^2 ? La réponse est *oui* mais le prix à payer est qu'on ne peut se contenter d'une expression en termes des dérivées premières du champ. On limitera le choix en exigeant de ne pas introduire de paramètres dimensionnels nouveaux. Le tenseur $\Theta^{\mu\nu}$ a la dimension 4 (en énergie); en effet, c'est une énergie par unité de volume. Le seul choix non trivial possible est alors par inspection :

$$\begin{aligned} \Delta \Theta^{\mu\nu} &= a \partial_\rho \{ (g^{\mu\nu} \partial^\rho - g^{\rho\nu} \partial^\mu) \phi^2 \} \\ &= a (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \phi^2 \end{aligned}$$

$$\Delta \Theta^\mu{}_\mu = 3a \square \phi^2$$

Et au total :

$$\Theta^\mu{}_\mu + \Delta \Theta^\mu{}_\mu = m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} (6a-1) \square \phi^2.$$

Si donc on choisit $a = 1/6$, la trace sera proportionnelle à m^2 . L'adjonction de $\Delta \Theta^{\mu\nu}$ fournit un tenseur d'énergie-impulsion amélioré :

$$\Theta^{\mu\nu}_{\text{amélioré}} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{1}{6} (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \phi^2,$$

qui reste conservé et symétrique, et dont la trace s'annule avec le seul paramètre dimensionnel m^2 .

En réalité les arguments donnés ci-dessus pour faire cette modification sont assez fallacieux. Pour définir une pression et une densité d'énergie macroscopique on sera amené à faire des moyennes dans l'espace et dans le temps, moyennes qui

feront disparaître le terme $\partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi)$. La limite $m^2 \rightarrow 0$ est celle de la disparition de tout paramètre dimensionnel de la théorie, c'est-à-dire à l'apparition d'une nouvelle invariance. On conçoit que l'annulation de la trace du tenseur $\theta^{\mu\nu}$ soit liée à cette propriété que nous n'avons pas la place de discuter ici.

En revanche il est instructif d'analyser un peu plus en détail l'origine de notre dérivation du tenseur densité d'impulsion-énergie. Initialement nous discutons l'invariance par translation $x \rightarrow x + a$. Cependant, dans l'esprit du théorème de Noether, nous avons en fait introduit ce qui revient à des transformations de coordonnées infinitésimales totalement arbitraires. Nous avons alors exploité le fait que le lagrangien ne dépendait des coordonnées que par l'intermédiaire des variables dynamiques (dans le cas d'invariance). Ceci nous entraîne à examiner l'introduction de systèmes de coordonnées complètement généraux, c'est-à-dire où la métrique prend la forme $ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}(\xi) d\xi^\alpha d\xi^\beta$. On peut se demander ce qui se passe lorsque partant d'un espace de Minkowski plat avec des coordonnées globales x^μ on se propose de faire un changement de coordonnées arbitraire $x \equiv x(\xi)$. Après tout les variables x sont muettes, et on est bien libre de choisir une autre indexation.

Pour ne pas abuser des notations prenons l'exemple du champ scalaire et écrivons $\phi(x(\xi)) = \tilde{\phi}(\xi)$. Nous expliciterons les dérivations par rapport aux variables ξ , mais nous conserverons les conventions "relativistes restreintes" $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$, $\phi(x(\xi)) = \tilde{\phi}(\xi)$, $g_{\mu\nu}$ restant égal à l'expression numérique utilisée jusqu'ici. L'action s'écrit :

$$I = \int d^4\xi \left| \frac{D(x)}{D(\xi)} \right| \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\nu \xi^\alpha \partial^\nu \xi^\beta) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^\beta} - V(\tilde{\phi}) \right\}.$$

Le "potentiel" $V(\phi)$ est par exemple :

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4,$$

et nous omettons les sources extérieures de façon à avoir une situation invariante. Le Jacobien de la transformation est le déterminant :

$$\left| \frac{D(x)}{D(\xi)} \right| = \det \left| \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \right|.$$

Quant à la métrique, on a :

$$ds^2 = dx^\nu dx_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \gamma_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta.$$

Il n'est pas difficile de voir que :

$$\gamma_{\alpha\beta} \partial_\nu \xi^\alpha \partial^\nu \xi^\beta = \delta_\alpha^\alpha \quad ,$$

en d'autres termes, l'inverse $\gamma^{\alpha\beta}$ de la matrice $\gamma_{\alpha\beta}$ est donné par :

$$\gamma^{\alpha\beta} = \partial_\nu \xi^\alpha \partial^\nu \xi^\beta .$$

De plus, on vérifie que :

$$\left| \frac{D(x)}{D(\xi)} \right| = \sqrt{-\det \gamma_{\alpha\beta}} .$$

Le signe moins inséré ici, tient au fait que, tant que le changement de variable n'est pas dégénéré, le déterminant de γ est du signe de celui de g , c'est-à-dire négatif. Ainsi :

$$I = \int d^4\xi \sqrt{-\det \gamma} \left\{ \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi^\beta} - v(\tilde{\Phi}) \right\} .$$

Le système de coordonnées est maintenant arbitraire. Il se reflète uniquement dans l'apparition des dix fonctions $\gamma_{\alpha\beta}(\xi)$ (dix à cause de la symétrie). Or, un changement de coordonnées dépend de quatre fonctions arbitraires $x^\mu(\xi)$. Les fonctions $\gamma_{\alpha\beta}$ satisfont donc à six contraintes non triviales qui expriment géométriquement que l'espace est plat (le tenseur de courbure est nul) et se traduisent analytiquement par le fait qu'on doit avoir :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi^\beta} .$$

Ainsi, une variation des champs, qui reflète uniquement une indexation différente des points de l'espace temps, entraîne que :

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int d^4\xi \delta \left\{ \sqrt{-\det \gamma} \mathcal{L}(\gamma, \tilde{\Phi}) \right\} \\ &= \int d^4\xi \frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} \left\{ \sqrt{-\det \gamma} \mathcal{L}(\gamma, \tilde{\Phi}) \right\} \delta \gamma_{\alpha\beta}(\xi) . \end{aligned}$$

Mais $\delta\gamma_{\alpha\beta}(\xi)$ n'est pas arbitraire. Il faut tenir compte des contraintes indiquées ci-dessus. Si on modifie les fonctions $x^\mu(\xi)$ en $x^\mu(\xi) + \delta x^\mu(\xi)$, on aura :

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \delta x_\nu + \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \delta x_\nu .$$

Par conséquent :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \right\} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} \left\{ \sqrt{-\det \gamma} \mathcal{L}(\gamma, \tilde{\phi}) \right\} = 0 .$$

La densité tensorielle :

$$\tilde{\Theta}^{\alpha\beta} = -2 \frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} \left\{ \sqrt{-\det \gamma} \mathcal{L}(\gamma, \tilde{\phi}) \right\} ,$$

est automatiquement symétrique et peut s'identifier avec l'expression du tenseur impulsion-énergie en coordonnées arbitraires. Dans notre exemple en notant :

$$\gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \tilde{\phi} = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \tilde{\phi} ,$$

$$\tilde{\Theta}^{\alpha\beta} = \sqrt{-\det \gamma} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \tilde{\phi} - \frac{1}{\sqrt{-\det \gamma}} \gamma^{\alpha\beta} \mathcal{L}(\gamma, \tilde{\phi}) .$$

Si en particulier $x^\mu(\xi) \equiv \xi^\mu$ on trouvera :

$$\tilde{\Theta}^{\alpha\beta} \rightarrow \Theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} ;$$

et comme $\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} = \delta^\nu_\beta$, la loi de conservation prend la forme habituelle :

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 ,$$

La symétrie de $\Theta^{\mu\nu}$ apparaît alors comme une conséquence nécessaire de sa définition.

Le lecteur est invité à généraliser ce qui précède au cas où on a des champs vectoriels, Spinoriels ... Par une modification appropriée de la méthode ci-dessus

qui consiste essentiellement à traiter le champ ϕ non comme un scalaire mais comme une densité de poids $-\frac{1}{2}$: $\phi(x(\xi)) = (-\det \gamma)^{-\frac{1}{2}} \tilde{\phi}(\xi)$ il est même possible de dériver ainsi l'expression du tenseur amélioré.

Il y a donc un lien étroit entre la définition du tenseur densité d'impulsion-énergie, qui apparaît comme une réponse à un changement infinitésimal de métrique, et la théorie géométrique de la gravitation. Il n'est donc pas surprenant de trouver dans le membre de droite des équations d'Einstein une contribution de la matière par l'intermédiaire de θ . Nous ne pouvons évidemment développer ce sujet ici.

Après ces longs développements à propos de l'invariance par translation, bornons-nous à de très succinctes remarques dans le cas de l'invariance par transformation homogène de Lorentz. Sous forme infinitésimale :

$$\delta x^\mu = \delta \omega^{\mu\nu} x_\nu \quad \text{ou} \quad \delta \omega^{\mu\nu} = -\delta \omega^{\nu\mu} \quad \text{est infinitésimal.}$$

Pour l'application du théorème de Noether, on considère $\delta \omega^{\mu\nu}$ comme dépendant de x . On définit donc de nouvelles coordonnées ξ avec :

$$\xi^\mu(x) = x^\mu + \delta x^\mu(x).$$

A l'ordre le plus bas :

$$x^\mu = \xi^\mu - \delta \omega^{\mu\nu}(\xi) \xi_\nu,$$

$$\delta \delta_{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\beta \delta \omega_{\alpha\gamma} - \xi^\gamma \partial_\alpha \delta \omega_{\beta\gamma}.$$

En identifiant le coefficient de $\delta \omega_{\alpha\beta}$ dans la variation de l'action, on trouve sans peine qu'avec le tenseur $\theta^{\mu\nu}$ symétrique défini ci-dessus :

$$\partial_\rho (\theta^{\mu\nu} x^\sigma - \theta^{\mu\sigma} x^\nu) = 0,$$

correspondant à la conservation du moment angulaire généralisé :

$$J^{\mu, \nu\sigma} = \theta^{\mu\nu} x^\sigma - \theta^{\mu\sigma} x^\nu.$$

Les quantités conservées sont bien entendu :

$$J^{\nu\sigma} = \int d^3x \quad J^{0, \nu\sigma}(x, t)$$

$J^{\nu\sigma}$ n'est évidemment pas invariant par translation. Si l'origine des coordonnées d'intégration est déplacée de x : $J^{\nu\sigma} \rightarrow J^{\nu\sigma} + P^\nu a^\sigma - P^\sigma a^\nu$. Une quantité intrinsèque le moment cinétique propre est obtenu en formant la combinaison

$S_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} J^{\beta\gamma} P^\delta / \sqrt{p^2}$, qui a la propriété de se réduire au moment angulaire ordinaire dans le système où la tri-impulsion totale s'annule.

J'ai beaucoup insisté ici sur le tenseur densité d'impulsion-énergie, ses différentes définitions et propriétés, parce qu'au fond il joue un rôle central dans la question des invariances géométriques. Le sujet est cependant loin d'être épuisé.

Il faut encore ajouter quelques très brèves indications sur la formulation hamiltonienne. Jusqu'ici on a évité d'étendre au cas relativiste les crochets de Poisson du formalisme hamiltonien. Et ceci parce qu'inévitablement on est alors amené à faire jouer au temps un rôle privilégié. Cependant, rien n'interdit en principe de le faire. A un temps t déterminé on peut définir l'expression:

$$\pi(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x,t)} = \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}(x,t)} \int d^3y \mathcal{L}(y,t) ,$$

qui est l'analogie du moment conjugué de la mécanique non relativiste. De même on peut définir le crochet de Poisson anti-symétrique de deux fonctionnelles L_1 et L_2 des champs ϕ et π au temps t :

$$\{L_1, L_2\} = -\{L_2, L_1\} = \int d^3x \frac{\delta L_1}{\delta \pi(x,t)} \frac{\delta L_2}{\delta \phi(x,t)} - \frac{\delta L_1}{\delta \phi(x,t)} \frac{\delta L_2}{\delta \pi(x,t)} .$$

L'expression $\delta L / \delta \phi(t,x)$ est à prendre avec un grain de sel. Par exemple si L s'écrit comme l'intégrale (à trois dimensions) d'une densité faisant intervenir des gradients de ϕ , il faudra intégrer par parties les variations $\delta \vec{\nabla} \phi$. Alors, on aura :

$$\{\pi(x,t), \phi(y,t)\} = \delta^3(x-y) ,$$

$$\{\pi(x,t), \pi(y,t)\} = \{\phi(x,t), \phi(y,t)\} = 0 ;$$

et par exemple :

$$\{\pi(x,t), \nabla \phi(y,t)\} = \nabla_y \delta(x-y)$$

etc ...

Pour une application cohérente de ce formalisme au cas de champs spinoriels formant une algèbre anticommutante, il faudra d'une part respecter l'ordre des facteurs, d'autre part poser :

$$\{ \psi(x,t), \psi^\dagger(y,t) \} = + \{ \psi^\dagger(y,t), \psi(x,t) \} = \delta^3(x-y).$$

Nous ne nous appesantirons pas sur ce sujet.

On s'attend à ce que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\partial_0 \phi(x,t) = \{ H, \phi(x,t) \} = \frac{\delta}{\delta \pi(x,t)} H,$$

$$\partial_0 \pi(x,t) = \{ H, \pi(x,t) \} = - \frac{\delta}{\delta \phi(x,t)} H.$$

Quant à la fonction de Hamilton H, ce n'est rien d'autre que l'intégrale spatiale de la densité d'énergie :

$$H = \int d^3x \theta^{00}(x,t),$$

exprimée comme fonctionnelle de ϕ , $\nabla\phi$ et π .

Illustrons ceci sur l'exemple du champ scalaire en interaction. Rappelons que :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi)$$

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} (\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi)$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} = \partial_0 \phi$$

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right).$$

Par conséquent :

$$\{ H, \phi(x,t) \} = \pi(x,t)$$

$$\{ H, \pi(x,t) \} = \left(\Delta\phi - \frac{d}{d\phi} V(\phi) \right)(x,t).$$

Les équations de Hamilton donnent alors :

$$\partial_0 \phi(x, t) = \{ H, \phi(x, t) \} = \pi(x)$$

$$\partial_0 \pi(x, t) = \{ H, \pi(x, t) \} = \Delta \phi(x, t) - \frac{d}{d\phi} V(\phi(x, t)).$$

En les combinant on obtient bien :

$$\square \phi + \frac{d}{d\phi} V = 0 ,$$

qui est l'équation du mouvement obtenue par le principe variationnel.

En matière de divertissement le lecteur est invité à voir s'il y a lieu de modifier ce qui précède si on utilise le tenseur densité d'impulsion-énergie amélioré. Il pourra examiner les crochets de Poisson $\{ \theta^{\mu\nu}(x, t), \theta^{\bar{\mu}\bar{\nu}}(y, t) \}$ dans la théorie scalaire et voir comment la construction précédente s'applique aux cas de champs spinoriels, vectoriels ...

5. SYMETRIES INTERNES

En dehors des invariances géométriques d'autres symétries jouent un rôle important. Un exemple simple est l'invariance isotopique des forces nucléaires. Plus généralement on a une symétrie SU(3) approximative des interactions entre particules, ou même SU(3) × SU(3). En électrodynamique nous avons l'invariance de jauge, d'une nature légèrement différente.

Ayant reculé jusqu'ici devant la nécessité d'évoquer la théorie des groupes, on se trouve à ce point obligé d'en récapituler très brièvement quelques notions, ne fut-ce que pour préciser les notations.

Il faut d'abord distinguer la notion abstraite du groupe, formé d'éléments se combinant suivant une loi de multiplication associative, avec élément unité et inverse, de ses réalisations concrètes sous forme de groupe de transformations. Dans ce dernier cas on a affaire à des permutations au sens large d'éléments d'un ensemble qui peut être fini ou infini, comme une variété géométrique ou un espace vectoriel. Dans ce dernier cas on parlera de représentation (sous entendu linéaire) de dimension finie ou infinie, unitaire, orthogonale ou symplectique ... suivant que les transformations laissent invariante une forme sesquilinéaire, bilinéaire positive, antisymétrique non dégénérée.

En dehors des groupes finis ou discrets, les groupes de Lie jouent un rôle essentiel en physique. Ces groupes sont munis d'une structure (infiniment) différentiable compatible avec les opérations de multiplication et d'inversion. Nous n'envisageons pour l'instant que des groupes à un nombre fini de paramètres.

Dans une représentation, les éléments du groupe correspondront à des opérateurs linéaires, indexés par des paramètres variant de manière continue, et en nombre égal à la dimension du groupe (trois pour les rotations de l'espace ordinaire, huit pour SU(3) ...). En particulier, au voisinage de l'identité représentée par l'opérateur unité, on pourra écrire ces opérateurs :

$$U(\alpha) = e^{\sum \alpha_i X_i} \quad , \quad (1)$$

où les α_i sont suffisamment petits et les opérateurs X_i fixes. La loi de groupe s'exprimera en disant qu'il existe une fonction α'' (analytique réelle, en fait) de α et α' telle que :

$$U(\alpha) U(\alpha') = U(\alpha'') \quad . \quad (2)$$

Bien évidemment $U^{-1}(\alpha) = U(-\alpha)$. Insérant la représentation (1) dans la condition (2) on voit que :

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i X_i)^n}{n!} \cdot \frac{(\alpha'_j X'_j)^m}{m!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha''_k X_k)^p}{p!} \quad .$$

Remplaçons $\alpha + \lambda\alpha$, $\alpha' + \lambda\alpha'$, on peut essayer de déterminer α'' comme une série en λ avec :

$$\alpha'' = \lambda(\alpha + \alpha') + \lambda^2 a_2 + \dots$$

Identifiant les termes en λ^2 il vient :

$$a_{2k} X_k = \frac{1}{2} \alpha_i \alpha'_j [X_i, X_j]$$

Pour que le processus ait quelque chance d'exister, il est donc nécessaire de supposer que les commutateurs soient des combinaisons linéaires des générateurs eux-mêmes :

$$[X_i, X_j] = c_{ijk} X_k \quad (3)$$

Les coefficients de structure c_{ijk} obéissent bien évidemment à :

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0,$$

et à une relation déduite de l'identité de Jacobi :

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0.$$

Pour revenir à la détermination de α'' on a évidemment :

$$a_{2k} = \frac{1}{2} \alpha_i \alpha'_j c_{ijk}$$

Ce qui est remarquable c'est que la condition (3) est à la fois nécessaire, comme on vient de le voir, mais aussi suffisante, pour que l'ensemble des opérateurs $\exp \alpha.X$ forment (un germe de) groupe. La formule explicite (Campbell-Hansdorf), donnant le produit en termes des relations de commutation est trop générale pour être très utile en pratique.

Notons que nous venons de prouver que $e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \dots}$, où $+$... signifie des termes en commutateurs multiples qui s'annulent en particulier si A et B commutent avec $[A,B]$; ce résultat nous sera utile par la suite.

Les propriétés principales du groupe se déduiront d'une étude de l'algèbre de Lie engendrée par les X_i . Quelques exemples caractéristiques sont fournis par les groupes de rotation de l'espace à n dimensions, $SO(n)$ avec, pour algèbre de Lie, l'ensemble des matrices (réelles) antisymétriques $n \times n$, ou les groupes de transformations unitaires de déterminant unité $SU(n)$, l'algèbre de Lie correspondante étant celle des matrices $n \times n$ antihermitiques.

Une représentation du groupe et de son algèbre est particulièrement importante. C'est la représentation adjointe ou régulière. Elle consiste à prendre

pour espace vectoriel l'algèbre de Lie elle-même et à associer à tout élément X l'opérateur linéaire qui transforme un élément Y en $[X, Y]$:

$$\text{adj}(x) Y = [X, Y] . \quad (4)$$

En vertu de l'identité de Jacobi, on aura bien défini une représentation :

$$\text{adj}(x) \text{adj}(y) - \text{adj}(y) \text{adj}(x) = \text{adj}[x, y] .$$

Pour que la représentation adjointe soit fidèle, il faut qu'aucun élément de l'algèbre ne commute avec tous les autres. Un sous-espace invariant de cette représentation est un idéal. Une algèbre sera dite simple s'il n'existe aucun idéal non trivial. S'il n'existe pas d'idéal abélien (c'est-à-dire commutatif) on dira que l'algèbre est semi-simple. Toute algèbre simple est donc évidemment semi-simple. Il existe un critère de semi-simplicité. Pour cela on considère la forme bilinéaire (de Killing) :

$$(X, Y) = \text{Tr} \text{adj}(X) \text{adj}(Y) . \quad (5)$$

Si cette forme est non dégénérée, l'algèbre est semi-simple, et si elle est définie négative le groupe est compact.

Par exemple le groupe des rotations $SO(3)$ est simple, le groupe de Lorentz n'est que semi-simple (si on étend l'algèbre aux nombres complexes).

Explicitons la représentation adjointe. Prenant une base dans l'algèbre de Lie on écrira :

$$X = x_s X^s , \quad Y = y_s X^s ,$$

$$\text{adj}(X^s) Y = y_t \text{adj}(X^s) X^t = y_t c_{stu} X^u .$$

Si les quantités (y) sont considérées comme les coordonnées du vecteur Y, celle du vecteur $Y' = (\text{adj} X^s)Y$ sont donc :

$$y'_u = c_{stu} y_t , \quad \text{d'où} \quad [\text{adj}(X^s)]_{ut} = c_{stu} .$$

Notons la transposition des deux derniers indices. Les matrices $e^{\alpha_s \text{adj}(X^s)}$ laissent invariante la forme de Killing :

$$(X, X) = \sum_{st} x_s x_t \text{Tr} \text{adj}(X^s) \text{adj}(X^t) = \sum_{stuv} x_s x_t c_{suv} c_{tvu} .$$

Si le groupe est compact cette forme est définie négative. Il existe donc une base telle que :

$$\sum_{uv} C_{suv} C_{tvu} = -\delta_{st}.$$

Dans ces conditions $e^{\alpha_s \text{adj}(X^s)}$ est une matrice orthogonale et adj^{X^s} antisymétrique; c'est-à-dire :

$$C_{stu} = -C_{sut}$$

Comme par ailleurs $C_{stu} = -C_{tsu}$, on voit que dans cette base C est totalement antisymétrique (au passage si on examine la forme de Killing on voit que c'est ce fait qui la rend négative).

Après ces indications très succinctes revenons à la dynamique. Envisageons un système de champs couplés en interaction ϕ_1, \dots, ϕ_N . Ces champs peuvent être scalaires, spinoriels, vectoriels ... réels ou complexes. Pour chaque valeur de x considérons les comme les composantes d'un vecteur ϕ d'un espace à N dimensions où opère une représentation d'un groupe G. Cette représentation peut être réductible, c'est-à-dire laisser invariants certains sous-espaces. (Il en sera en particulier nécessairement ainsi si les champs ont des propriétés de transformations différentes pour les transformations de Lorentz). De plus nous supposons la représentation en question unitaire et nous écrirons les générateurs iX^s , $s = 1, \dots, r$, avec X^s hermitique.

Envisageons des variations :

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= i \delta\alpha_s(x) X^s \phi(x) \quad , \\ \delta\phi^+(x) &= -i \phi^+(x) X^s \delta\alpha_s(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Les quantités réelles $\delta\alpha_s(x)$ sont infinitésimales, dépendent de x et ϕ^+ désigne la conjugaison hermitique dans l'espace de la représentation envisagée.

Après substitution de ϕ en $\phi + \delta\phi$ dans le lagrangien on obtient :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi + \delta\phi) \quad ;$$

$\mathcal{L}(\phi + \delta\phi)$ est une fonction $\hat{\mathcal{L}}$ de ϕ , $\partial_\mu \phi$ (et leur conjugués éventuellement) de $\delta\alpha(x)$ et $\partial_\mu \delta\alpha(x)$. On ne retient évidemment que les infinitésimaux du premier ordre en $\delta\alpha$.

Pour une variation au voisinage d'une solution des équations du mouvement, l'action est stationnaire. Après une intégration par parties devenue traditionnelle, on obtient donc :

$$0 = \delta I = \int d^4x \quad \delta\alpha_s(x) \left[\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \delta\alpha_s(x)} - \partial_\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\nu \delta\alpha_s(x)} \right] \quad (7)$$

On définit les courants (en nombre égal à celui des paramètres du groupe) $j_s^\mu(x)$ par :

$$j_s^\mu(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu \delta \alpha_s(x)} \quad . \quad (8)$$

Notons ici les réserves habituelles sur l'arbitraire inhérent à ces définitions, arbitraire déjà discuté dans la section précédente. Le théorème de Noether résulte alors de l'équation déduite de (7) qui donne la divergence de ces courants :

$$\partial_\mu j_s^\mu(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}(x)}{\partial \delta \alpha_s(x)} \quad . \quad (9)$$

En définissant $\hat{\mathcal{L}}$ nous avons distingué la dépendance en $\delta \alpha(x)$ et $\partial_\mu \delta \alpha(x)$ résultant de la présence de dérivées premières dans le lagrangien. Mais le membre de droite s'identifie avec la dérivée par rapport à $\delta \alpha_s$, les paramètres infinitésimaux étant supposés indépendants de la coordonnée x . Nous recevons donc cette équation sous la forme :

$$\partial_\mu j_s^\mu(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}(x)}{\partial \delta \alpha_s} \quad , \quad \delta \alpha_s \text{ indépendant de } x. \quad (9')$$

Certains courants j_s seront conservés (leur divergence sera nulle) si, et seulement si, le membre de droite de (9') correspondant s'annule. Ceci veut dire que le lagrangien originel est invariant dans la transformation (indépendante de x) engendrée par les X_s de même indice.

A toute transformation laissant le lagrangien invariant correspond donc un courant conservé et par intégration de sa quatrième composante une "charge", constante du mouvement :

$$Q_s = \int d^3x \quad j_s^0(x,t),$$

$$\frac{dQ_s}{dt} = \int d^3x \quad \partial_\mu j_s^\mu(x,t) = 0 \quad . \quad (10)$$

Prenons un exemple concret pour illustrer ce qui précède. Considérons un champ de pions (pseudo-scalaire) à trois composantes (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) interagissant avec des nucléons (ψ_1, ψ_2) de spin $\frac{1}{2}$ (protons et neutrons). Le groupe envisagé est SU(2) (spin isotopique) pour lequel ϕ forme un vecteur et ψ un spineur. Le

lagrangien se composera d'un lagrangien libre \mathcal{L}_0 et d'un lagrangien d'interaction \mathcal{L}_I ne faisant pas intervenir de dérivées. D'après la définition (8) seul \mathcal{L}_0 nous est alors utile dans la construction du courant. Rassemblant ce qui a été dit dans la section II, nous écrivons :

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} [(\partial \phi_i)^2 - \mu_i^2 \phi_i^2] + \sum_{\alpha=1}^2 [\frac{1}{2i} \bar{\Psi}_\alpha \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi_\alpha - m_\alpha \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha] ,$$

$$\delta \phi_i = i \delta \alpha_s(x) T_{ij}^S \phi_j$$

$$\delta \Psi_\alpha = i \delta \alpha_s(x) \frac{1}{2} \tau_{\alpha\beta}^S \Psi_\beta$$

$$\delta \bar{\Psi}_\alpha = -i \bar{\Psi}_\beta \frac{1}{2} \tau_{\beta\alpha}^S \delta \alpha_s(x) .$$

Les matrices τ et T sont respectivement les matrices de Pauli et les matrices représentatives du spin (isotopique)1 : $T_{ij}^S = i \epsilon_{ij3}$.

On obtient immédiatement en supprimant les indices :

$$j_s^\mu(x) = \frac{1}{2i} \phi T^S \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi + \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\tau^S}{2} \Psi .$$

Ces courants seront conservés si le lagrangien total est invariant par SU(2). Ceci requiert tout d'abord une masse commune μ pour les mésons, une masse commune pour les nucléons m . Il faudra de plus des couplages invariants. Par exemple (avec $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = \gamma^5$) :

$$\mathcal{L}_I = g \bar{\Psi} \gamma^5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\phi} \Psi - \lambda (\vec{\phi}^2)^2 .$$

Le lagrangien total ainsi obtenu $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ est en fait le lagrangien, renormalisable, le plus général faisant intervenir des pions et des nucléons, et qui soit invariant par SU(2). Il dépend de deux constantes dimensionnelles (les masses) et de deux constantes de couplage sans dimension.

Revenons à la discussion générale en faisant usage du formalisme hamiltonien introduit à la fin de la section IV. De fait, envisageons le cas général où l'on ne fait aucune hypothèse sur la conservation des courants, c'est-à-dire sur l'invariance du Lagrangien. Cela n'empêche pas d'introduire à un temps déterminé des charges $Q_g(t)$. Dans ce qui suit t restera fixe et nous omettrons de l'indiquer. La question est alors de déterminer le crochet de Poisson $\{Q_g, \mathcal{F}\}$ où \mathcal{F} est une fonctionnelle des champs ϕ et des moments conjugués π au temps t . Par définition:

$$\{Q_s, \mathcal{F}\} = \int d^3x \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\delta Q_s}{\delta \pi_{\alpha}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi_{\alpha}} - \frac{\delta Q_s}{\delta \phi_{\alpha}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi_{\alpha}} \right\} ,$$

$$Q_s = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \partial_0 \delta \alpha_s(x)} ,$$

$$\pi_{\alpha}(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \partial_0 \phi_{\alpha}(x)} \quad . \quad (11)$$

Dans $\hat{\mathcal{L}}$ la dépendance en $\partial_0 \delta \alpha_s(x)$ n'apparaît que par l'intermédiaire de la dépendance de \mathcal{L} en $\partial_0 \phi_{\alpha}(x)$. Pour simplifier supposons les champs réels (auquel cas les matrices X^S doivent être imaginaires pures, et antisymétriques) :

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \partial_0 \delta \alpha_s(x)} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi_{\alpha}(x)} X_{\alpha\beta}^S \phi_{\beta}(x) = i \pi(x) X^S \phi(x),$$

$$Q_s = i \int d^3x \pi(x) X^S \phi(x) \quad . \quad (12)$$

De sorte que :

$$\{Q_s, \mathcal{F}\} = i \int d^3x \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi} X^S \phi - \pi X^S \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi} \right) .$$

Si, en particulier, \mathcal{F} se réduit à $\phi(x)$ ou $\pi(x)$, on trouve :

$$\{Q_s, \phi(x)\} = i X^S \phi(x) \quad (13)$$

$$\{Q_s, \pi(x)\} = -i \pi(x) X^S = i X^S \pi(x) ,$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \{\delta \alpha_s Q_s, \phi(x)\} &= \delta \phi(x) , \\ \{\delta \alpha_s Q_s, \pi(x)\} &= \delta \pi(x) , \end{aligned} \quad (13')$$

où $\delta \phi(x)$ n'est rien d'autre que la variation du champ ϕ engendrée par la transformation de générateur $\delta \alpha_s Q_s$.

De même :

$$\{Q_t, Q_s\} = - \int d^3x \pi(x) (X^s X^t - X^t X^s) \phi(x) .$$

Or :

$$X^s X^t - X^t X^s = - [X^t, X^s] = -i C_{tsu} X^u ,$$

où les C_{tsu} sont les constantes de structure du groupe et le facteur i additionnel tient à notre choix de générateurs hermitiques. En d'autres termes, les crochets de Poisson des charges constituent une réalisation de l'algèbre de Lie du groupe :

$$\{Q_t, Q_s\} = i C_{tsu} Q_u . \quad (14)$$

Insistons sur le fait que toutes les quantités introduites ici le sont au même temps t , et que toute la construction est valable, que la théorie soit invariante sous l'action du groupe ou ne le soit pas.

En fait si L est la fonction de Lagrange $L = \int d^3x \mathcal{L}(x, t)$ et H la fonction de Hamilton, on vérifiera sans peine que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q_s(t) &= \{H(t), Q_s(t)\} = \{Q_s(t), -H(t)\} \\ &= \{Q_s(t), L(t)\} = \int d^3x \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}(x, t)}{\partial \alpha_s} , \end{aligned}$$

en accord avec ce qui précède.

Allant un peu plus loin, on constate qu'on peut aussi écrire les crochets de Poisson des composantes de temps des courants à temps égaux :

$$\{j_s^0(x, t), j_u^0(y, t)\} = i C_{suv} j_v^0(x, t) \delta^3(y-x) , \quad (15)$$

Des équations analogues s'appliquent aussi aux composantes du tenseur densité d'impulsion-énergie. On trouve que :

$$\begin{aligned}
 \{\theta^{00}(x,t), \theta^{00}(y,t)\} &= (\theta^{0k}(x,t) + \theta^{0k}(y,t)) \nabla_k^x \delta^3(x-y) \\
 \{\theta^{00}(x,t), \theta^{0k}(y,t)\} &= (\theta^{kl}(x,t) - g^{kl} \theta^{00}(y,t)) \nabla_l^x \delta^3(x-y) \\
 \{\theta^{0k}(x,t), \theta^{0l}(y,t)\} &= (\theta^{0k}(y,t) \nabla_l^x + \theta^{0l}(x,t) \nabla_k^x) \delta^3(x-y),
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Pour les quantités intégrées, impulsion P^μ et moment cinétique $J^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 P^\mu &= \int d^3x \theta^{0\mu}(x,t), \\
 J^{\mu\nu} &= \int d^3x \theta^{0\mu}(x,t) x^\nu - \theta^{0\nu}(x,t) x^\mu,
 \end{aligned}$$

on en déduit l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré (à temps égaux) :

$$\begin{aligned}
 \{P^\mu, P^\nu\} &= 0 \quad \{J^{\mu\nu}, P^\sigma\} = P^\mu g^{\nu\sigma} - P^\nu g^{\mu\sigma} \\
 \{J^{\mu\nu}, J^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\} &= g^{\mu\bar{\nu}} J^{\nu\bar{\mu}} + g^{\nu\bar{\mu}} J^{\mu\bar{\nu}} - g^{\mu\bar{\mu}} J^{\nu\bar{\nu}} - g^{\nu\bar{\nu}} J^{\mu\bar{\mu}}.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Dans la version quantifiée de ces résultats, il peut se faire que les éléments de matrice des courants soient mesurables au moyen des transitions induites par des interactions électromagnétiques ou faibles. En physique atomique on déduit ainsi la règle de somme dipolaire de Kuhn :

$$\sum_n \frac{E_n - E_a}{\hbar} |\langle n | q | a \rangle|^2 = \frac{\hbar}{m},$$

de la règle de commutation $[q, p] = i\hbar$, qui en représentation de Heisenberg est l'analogie de (15). Bien que la dynamique ne joue pas de rôle dans ces règles de commutation, elle intervient dans l'identification des amplitudes de transition observées avec les éléments de matrice des courants déduits du théorème de Noether.

6. CHAMPS DE JAUGE

On va trouver ici une brève description du couplage minimal, une discussion classique de la brisure spontanée des symétries et de ses conséquences (théorème de Goldstone), une introduction au phénomène de Higgs, enfin une généralisation aux groupes de jauge non abéliens.

Pour introduire le sujet, considérons deux champs scalaires réels ϕ_1 et ϕ_2 , couplés de telle sorte que le lagrangien soit invariant par les rotations :

$$(\phi_1, \phi_2) \rightarrow (\cos \alpha \phi_1 - \sin \alpha \phi_2, \sin \alpha \phi_1 + \cos \alpha \phi_2).$$

Nous l'écrivons, pour simplifier,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial \phi_1)^2 + (\partial \phi_2)^2 \right) - V \left(\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2} \right) = \partial \phi^\dagger \partial \phi - V(\phi^\dagger \phi), \quad (1)$$

avec :

$$\phi = \frac{\phi_1 + i \phi_2}{\sqrt{2}} \quad \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i \phi_2}{\sqrt{2}}.$$

La loi de transformation du champ complexe ϕ est :

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad \phi^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger. \quad (2)$$

D'après la méthode générale exposée dans la section 5, le courant conservé associé à cette propriété d'invariance est :

$$\begin{aligned} j^\nu(x) &= - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\nu \delta \alpha} = - \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu \delta \alpha)} \left(i \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\nu (\delta \alpha \phi) - i \partial_\nu (\delta \alpha \phi^\dagger) \partial^\mu \phi \right) \\ &= i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\nu \phi. \end{aligned} \quad (3)$$

Pour obtenir ce courant on a, en fait, considéré des rotations $e^{i\chi(x)}$ variant de point à point. Ceci, bien que le lagrangien (1) ne soit invariant que pour des transformations globales constantes, en raison de la présence de termes dérivatifs. La question que l'on pose est alors la suivante : quelle modification faut-il apporter au lagrangien (1) pour que les transformations :

$$\phi(x) \rightarrow e^{ie\chi(x)} \phi(x),$$

le laissent invariant, quelle que soit la fonction réelle $\chi(x)$? L'adjonction d'un facteur e sans dimension est une affaire de pure commodité. Pour cela, il va falloir modifier les termes dérivatifs $\partial_\mu \phi$ en $D_\mu \phi$, de telle sorte que :

$$D_\mu e^{ie\chi(x)} \phi(x) = e^{ie\chi(x)} D_\mu \phi(x), \quad (4)$$

tandis que l'on avait :

$$\partial_\rho e^{ie\chi(x)} \phi(x) = e^{ie\chi(x)} \left(\partial_\rho \phi(x) + ie \partial_\rho \chi(x) \phi(x) \right).$$

On introduit donc des degrés de liberté supplémentaires, ceux du potentiel électromagnétique $A_\mu(x)$, qui se combinent à la dérivation ∂_μ pour former la dérivation "covariante" D_μ :

$$D_\rho \phi(x) = \left(\partial_\rho + ie A_\rho(x) \right) \phi(x). \quad (5)$$

Le potentiel est tel que, à la transformation (2) du champ ϕ , correspond une transformation de jauge :

$$A_\rho(x) \rightarrow A_\rho(x) - \partial_\rho \chi(x). \quad (6)$$

En particulier si χ est constant, A_μ est invariant. Dans ces conditions, on modifie le lagrangien (1) :

- a) en remplaçant les dérivées $\partial_\mu \phi$ par les dérivées covariantes $D_\mu \phi$,
- b) en ajoutant le lagrangien libre $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ du champ électromagnétique, automatiquement invariant de jauge.

Le résultat s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{minimal}} = -\frac{1}{4} F^2 + (D\phi)^\dagger (D\phi) - V(\phi^\dagger \phi). \quad (7)$$

La théorie ainsi obtenue est invariante par les transformations de jauge locales (2) et (6), dites de seconde espèce (les transformations de première espèce correspondent à $\chi = \text{const.}$). Ces transformations ont une structure de groupe infinitésimal à une infinité de paramètres.

Le couplage au champ électromagnétique décrit ci-dessus est dit minimal, la recette pour l'obtenir étant la substitution $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$. Pour autant que l'on puisse les vérifier expérimentalement, les conséquences de cette théorie, une fois quantifiée, sont en excellent accord avec les observations. Bien entendu, on pourrait envisager d'autres formes de couplages, par exemple dans le cas ci-dessus, on pourrait ajouter un terme (non renormalisable) : $\lambda \phi^\dagger \phi F^2 \dots$. Enfin, si le modèle présentait plusieurs champs chargés ϕ, ϕ', \dots , rien n'implique, dans ce qui précède, que les constantes de couplage e, e', \dots soient des multiples de l'une d'entre elles, ce qui se vérifie en fait, permet à la matière macroscopique d'être globalement neutre et demeure une énigme au même titre que la valeur numérique de la constante de structure fine $\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137, \dots}$.

Le potentiel électromagnétique $A_\mu(x)$ est appelé un champ de jauge abélien parce que le groupe associé est commutatif :

$$e^{ie\chi_1(x)} e^{ie\chi_2(x)} = e^{ie\chi_2(x)} e^{ie\chi_1(x)}$$

Nous voyons que si, dans le lagrangien (7), $A_\mu(x)$ et $\partial_\mu A_\nu(x)$ sont considérés comme des variables indépendantes :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{minimal}}}{\partial A_\nu(x)} &= ie(\phi^\dagger D^\nu \phi - (D^\nu \phi)^\dagger \phi) \\ &= ie(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\nu \phi) - 2e^2 A^\nu \phi^\dagger \phi \\ &= J^\nu(A, x) \end{aligned} \quad (8)$$

En d'autres termes, le courant (3) (non invariant de jauge) $j_\mu(x)$ est relié à la dérivée partielle du lagrangien par rapport au potentiel A_μ à $A_\mu = 0$ par :

$$j_\mu(x) = -\frac{1}{e} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu(x)} \Big|_{A=0} = \frac{1}{e} J_\mu(A, x) \Big|_{A=0}$$

définition tout à fait parallèle à celle que l'on a donnée pour le tenseur impulsion-énergie.

Si l'on explicite la définition du lagrangien (7), on voit qu'il a la forme :

$$\mathcal{L}_{\text{minimal}} = -\frac{1}{4} F^2 + \partial\phi^\dagger\partial\phi - V(\phi^\dagger\phi) - e\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} + e^2 A^2 \phi^\dagger\phi \quad (7)'$$

On note que, dans le cas d'un champ scalaire chargé, il n'y a pas moyen d'exprimer le terme d'interaction électromagnétique sous la forme $-e\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$ en raison de la présence de termes quadratiques en A qui apparaissent avec un coefficient un dans \mathcal{L}_{min} et deux dans $J(A, x) \cdot A$.

Le lecteur n'aura aucune peine à généraliser l'exemple précédent au cas de lagrangiens plus compliqués, en particulier faisant intervenir des champs spinoriels.

L'invariance de jauge, d'après sa définition même, entraîne l'existence de degrés de liberté supplémentaires sans influence sur la dynamique. Il est clair que les équations du mouvement ne sauraient, en l'absence de conditions supplémentaires qui peuvent partiellement apparaître sous forme de conditions aux limites, prédire les valeurs des champs A_μ et ϕ . Laissons provisoirement là l'électrodynamique.

A propos de ce modèle simple, nous allons maintenant présenter les idées sous-jacentes au théorème de Goldstone et au phénomène de Higgs. Nous ne prétendons donner que des indications suggestives, et non des résultats rigoureux.

Tout d'abord, examinons les équations du mouvement qui découlent du principe d'action minimale appliqué au lagrangien (7) :

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) &= J^\nu(A,x) = ie (\phi^\dagger D^\nu \phi - (D^\nu \phi)^\dagger \phi)(x) \\ D^2 \phi(x) &= -\phi(x) V'(\phi^\dagger(x)\phi(x)). \end{aligned} \quad (10)$$

Utilisant les techniques et les expressions développées dans la section 4, nous voyons que le tenseur densité d'impulsion énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= \Theta_{can}^{\mu\nu} + \partial_\rho (F^{\nu\rho} A^\mu) = \\ &= F^{\nu\rho} F_\rho^\nu + (D^\nu \phi)^\dagger D^\nu \phi + (D^\nu \phi)^\dagger D^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{4} F^2 + (D\phi)^\dagger D\phi - V(\phi^\dagger\phi) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

En particulier, la densité d'énergie est :

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + (D^0 \phi)^\dagger D^0 \phi + (\vec{D}\phi)^\dagger \vec{D}\phi + V(\phi^\dagger\phi). \quad (12)$$

Au terme $V(\phi^\dagger\phi)$ près, la densité d'énergie est explicitement non négative, la situation classique d'énergie minimale correspondant à $F = 0$, $D\phi = 0$, $V(\phi^\dagger\phi)$ minimum. Ceci signifie que $A_\mu = -\partial_\mu \chi(x)$, $\phi(x) = \phi_0 e^{ie\chi(x)}$, $V(\phi_0^\dagger\phi_0)$ minimum avec $\phi_0^\dagger\phi_0$ indépendant de x .

Deux situations, conduisant à des conclusions physiques très différentes, peuvent se présenter.

a) V est minimum pour ϕ_0 égal à zéro. C'est la situation "normale". L'énergie minimum correspond à $\phi = 0$ et, par une transformation de jauge, $A_\mu = 0$. La discussion des excitations se fera à partir de cet état d'énergie minimale qui, quantiquement, s'identifiera au vide.

b) Le minimum de V se présente, pour une valeur de $\phi^\dagger\phi = \phi_0^\dagger\phi_0$, différente de zéro. On note que cette condition est absolument indépendante du couplage avec le champ de jauge A_μ . On aura :

$$V = c\lambda + \lambda \left(\phi^\dagger\phi - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \dots \quad (13)$$

où λ est une constante positive (et les termes $+$... sont en fait absents si l'on veut que la théorie soit renormalisable). Les termes constants sont sans importance physique.

L'état d'énergie minimum correspond cette fois à une valeur ϕ_0 non nulle:

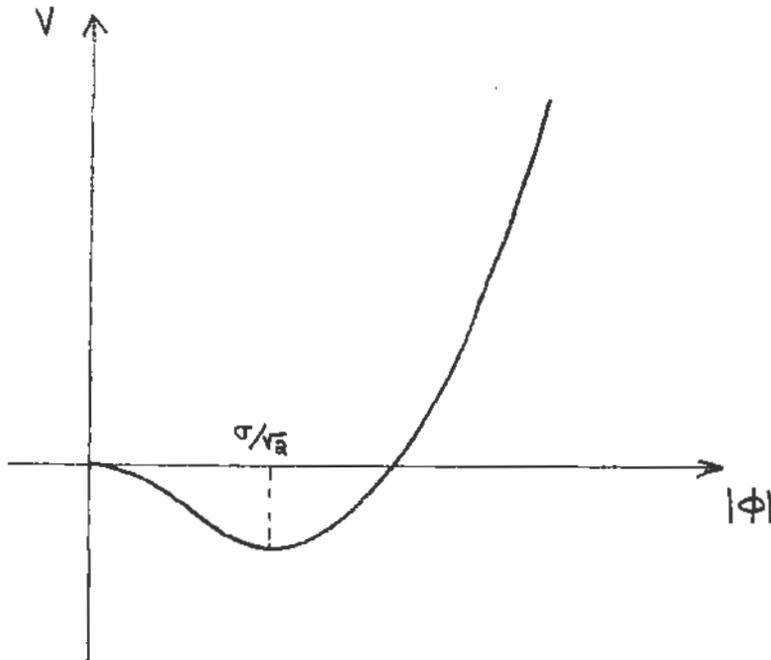


Fig. 1 : Le potentiel $V(\phi^+\phi)$ dans le cas d'une symétrie brisée spontanément

$$\phi_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{i\chi_0} \quad (14)$$

La direction de ϕ_0 dans le plan complexe, dictée par la valeur de χ_0 , est arbitraire et reflète l'invariance de jauge de première espèce. Les excitations seront de la forme :

$$\phi(x) = \phi_0 + \psi(x) \quad (15)$$

On a à faire un choix pour la phase de ϕ_0 et, de ce fait, on parlera d'invariance spontanément brisée.

Examinons le résultat de la substitution de la "translation" (15) sur le lagrangien (7). On a :

$$\begin{aligned} D_\mu \phi(x) &= ie A_\mu(x) \phi_0 + D_\mu \psi(x) \quad , \quad \phi^+ \phi - \sigma^2 = \phi_0^+ \psi + \psi^+ \phi_0 + \psi^+ \psi \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^2 + \frac{e^2}{2} \sigma^2 A^2 + (D\psi)^\dagger D\psi + ie \phi_0 (D\psi)^\dagger A - ie \phi_0^\dagger (D\psi) A \\ &\quad - \lambda (\psi^+ \psi + \phi_0^+ \psi + \phi_0 \psi^+) ^2 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Sans limiter la généralité de la discussion nous pouvons, par une rotation, prendre χ_0 nul, c'est-à-dire ϕ_0 réel égal à $\sigma/\sqrt{2}$.

Dans ces conditions :

$$D^\mu \phi = D^\mu \psi + ie \frac{\sigma}{\sqrt{2}} A^\mu$$

$$D^2 \phi = (\partial_\mu + ie A) (D^\mu + ie A^\mu) \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \psi \right] = D^2 \psi + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} (ie \partial A - e^2 A^2)$$

$$V'(\phi^\dagger \phi) = 2\lambda \left(\psi^\dagger \psi + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} (\psi + \psi^\dagger) \right).$$

D'où les équations du mouvement :

$$\partial_\rho F^{\rho\nu} = ie \left(\psi^\dagger D^\nu \psi - (D^\nu \psi)^\dagger \psi \right) - e^2 \sigma A^\nu \frac{\psi + \psi^\dagger}{\sqrt{2}} + ie \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left(D^\nu \psi - (D^\nu \psi)^\dagger \right) - e^2 \sigma^2 A^\nu \quad (17)$$

$$D^2 \psi + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} (ie \partial A - e^2 A^2) = -2\lambda \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + \psi \right) \left(\psi^\dagger \psi + \sigma \frac{\psi + \psi^\dagger}{\sqrt{2}} \right).$$

Pour y voir un peu plus clair, il est utile de revenir aux notations réelles :

$$\psi = \frac{\psi_1 + i\psi_2}{\sqrt{2}} \quad \psi^\dagger = \frac{\psi_1 - i\psi_2}{\sqrt{2}}$$

la direction 1 correspondant à la direction de la valeur non nulle ϕ_0 dans l'état fondamental. Les équations (17) prennent alors la forme :

$$(\square + 2\lambda\sigma^2) \psi_1 = -\lambda\sigma(\psi_1^2 + \psi_2^2) - 2\lambda\psi_1 \left(\sigma\psi_1 + \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{2} \right) + e \left\{ A^\mu, \partial_\mu \right\} \psi_2 + e^2 A^2 \psi_1 + \sigma e^2 A^2$$

$$\square \psi_2 = -2\lambda\psi_2 \left(\sigma\psi_1 + \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{2} \right) - e \left\{ A^\mu, \partial_\mu \right\} \psi_1 + e^2 A^2 \psi_1 - e\sigma \partial_\nu A \quad (17)'$$

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial A + e^2 \sigma^2 A^\nu = e \left(\psi_2 \partial^\nu \psi_1 - \psi_1 \partial^\nu \psi_2 \right) - e^2 A^\nu (\psi_1^2 + \psi_2^2) - e^2 \sigma A^\nu \psi_1 - e\sigma (\partial^\nu \psi_2 + e A^\nu \psi_1).$$

Ces équations n'ont toujours pas l'air très aisément interprétables. Pour les apprécier, examinons d'abord le cas où $e = 0$, c'est-à-dire lorsque A et ϕ sont découplés. Nous voyons alors que :

$$(\square + 2\lambda\sigma^2)\psi_1 = \text{Polynome en } \psi_1 \text{ et } \psi_2 \text{ de degré } \geq 2$$

$$\square\psi_2 = \text{Polynome en } \psi_1 \text{ et } \psi_2 \text{ de degré } \geq 2$$

Si nous traitons les seconds membres de ces équations perturbativement, ψ_1 apparaît comme un champ massif ($m_0 = 2\lambda\sigma^2 > 0$); ψ_2 en revanche est un champ de masse nulle. Ceci est une manifestation du théorème de Goldstone. L'invariance dans les rotations du plans (ϕ_1, ϕ_2) est spontanément brisée parce que l'état d'énergie minimale correspondait à une valeur non nulle du champ ϕ . Toutes les valeurs $|\phi_0| = \sigma/\sqrt{2}$ étaient acceptables, l'une d'entre elles a été choisie, par exemple $\phi_0 = \sigma/\sqrt{2}$; les excitations $\phi_1 + i\phi_2 = \sigma + \psi_1 + i\psi_2$ sont telles que ψ_2 est un champ de masse nulle correspondant à des interactions à longue portée. Ce champ apparaît dans la direction 2, c'est-à-dire orthogonale à la direction choisie pour ϕ_0 .

Le couplage du champ A_μ ($e \neq 0$) modifie complètement la situation. Si nous nous limitons aux termes linéaires dans les champs, nous voyons que les équations ont la forme :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\square + 2\lambda\sigma^2)\psi_1 = 0 \\ \text{b)} \quad & \square\psi_2 + e\sigma \partial A = 0 \\ \text{c)} \quad & \square A^\nu - \partial^\nu \partial A + e^2\sigma^2 A^\nu + e\sigma \partial^\nu \psi_2 = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

D'ailleurs, pour entreprendre un développement systématique des équations (17), il est possible de supposer que σ est d'ordre $1/e$ et λ d'ordre e^2 . Alors, les termes retenus sont d'ordre 1 et les termes négligés d'ordre $e, e^2 \dots$

Nous observons que :

- i) ψ_2 et A restent apparemment couplés,
- ii) dans l'équation satisfaite par A , il apparaît un terme de masse $e^2\sigma^2 A^\nu$ similaire à celui que nous avons dans la discussion des champs vectoriels massifs.

Les transformations de jauge générales ont la forme :

$$\begin{aligned} \delta\psi_1 &= -e\psi_2 \delta\alpha & \delta\psi_2 &= e(\sigma + \psi_1) \delta\alpha \\ \delta A_\rho &= -\partial_\rho \alpha \end{aligned} \tag{19}$$

Travaillant à l'ordre zéro en e , suivant la recette indiquée ci-dessus, ces transformations se réduisent à :

$$\begin{aligned} \delta\psi_1 &= 0 & \delta\psi_2 &= e\sigma\delta\chi \\ \delta A_\mu &= -\partial_\mu\chi. \end{aligned} \quad (20)$$

Nous pouvons aisément vérifier que les équations (18) admettent bien ce groupe d'invariance. Toujours à cet ordre, la combinaison :

$$B_\mu = A_\mu + \frac{1}{e\sigma} \partial_\mu \psi_2, \quad (21)$$

est invariante de jauge. On peut récrire les équations (18) b) et (18) c) sous la forme :

$$\partial_\nu B^\nu = 0 \quad (18) \text{ b)}$$

$$\square B^\nu + e^2\sigma^2 B^\nu = 0, \quad (18) \text{ c)}$$

qui ne sont rien d'autre que :

$$\square B^\nu - \partial^\nu \partial B + e^2\sigma^2 B^\nu = 0 \quad (22)$$

En d'autres termes, B_μ est un champ vectoriel massif invariant de jauge de masse $e^2\sigma^2$.

L'introduction au champ vectoriel A_μ a donc transféré la propriété : {existence d'un champ scalaire de masse nulle, ψ_2 } en la propriété {apparition d'un champ vectoriel massif, B_μ }. C'est le phénomène de Higgs.

Si l'on veut introduire les termes d'interaction, il est en fait plus avantageux de faire le changement de variables :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma + \psi_1 + i\psi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma + \rho) e^{i\frac{\theta}{f}}, \quad (23)$$

où ρ et θ sont deux champs réels avec :

$$\psi_1(x) = \rho(x) + \dots$$

$$\psi_2(x) = \theta(x) + \dots$$

Les termes additonnels sont quadratiques et plus en ρ et θ . On vérifiera alors qu'à tous les ordres :

$$B_\mu = A_\mu + \frac{1}{e\sigma} \partial_\mu \theta, \quad (24)$$

est bien invariant de jauge comme ρ , et que le lagrangien peut être entièrement exprimé en termes de ρ et B_μ , correspondant respectivement à des champs scalaires et vectoriels massifs. Les degrés de liberté correspondant à θ ont, en fait, été complètement éliminés. En posant :

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

ce lagrangien s'écrit en effet :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^2 + \frac{1}{2} (\partial\rho)^2 + e^2 (\sigma + \rho)^2 B^2 + \frac{\lambda}{4} \rho^2 (\rho + z\sigma)^2. \quad (25)$$

La seule trace de l'invariance de jauge initiale, mais elle est importante, est dans la relation entre les différents couplages et les termes de masse.

La discussion précédente est heuristique. Mais il est possible, après quantification, de justifier les assertions précédentes en discutant le spectre des fonctions de Green.

Le modèle de Goldstone-Higgs, que nous venons brièvement de présenter, repose sur un groupe d'invariance abélien, c'est-à-dire commutatif (ici les rotations dans un espace à deux dimensions). Il est possible de généraliser ce qui précède au cas de groupes non-abéliens, idée originellement due à Yang et Mills. Esquissons-en les grandes lignes.

Comme dans la section 5, on suppose l'existence de N champs couplés ϕ_α ($\alpha = 1, \dots, N$) et leurs interactions invariantes par les transformations :

$$\delta\phi(x) = ig \delta\alpha_s X^s \phi(x), \quad (26)$$

où les X^s sont les matrices (hermitiques) représentant les transformations infinitésimales d'un groupe de Lie à r paramètres ($s = 1, \dots, r$). Nous avons ajouté un facteur constant g.

Si nous envisageons les transformations de jauge correspondant à l'équation (26), c'est-à-dire si nous prenons $\delta\alpha_s$ dépendant de la position x, les termes dérivatifs empêchent que le lagrangien soit invariant, car on aura :

$$\delta \partial_\nu \phi(x) = ig \delta\alpha_s(x) X^s \partial_\nu \phi(x) + ig (\partial_\nu \delta\alpha_s(x)) X^s \phi(x).$$

On introduit alors des champs de jauge vectoriels $A_{\mu s}(x)$ en nombre égal à celui de paramètres du groupe. Et l'on définit une dérivée covariante :

$$D_\nu \phi = (\partial_\nu + ig A_{\nu s} X^s) \phi.$$

La constante g est sans dimension. La règle du jeu va consister à n'introduire de dérivations que selon la combinaison D_μ . On aura :

$$\delta D_\mu \phi = ig \delta \alpha_s X^s D_\mu \phi + ig (\partial_\mu \delta \alpha_s) X^s \phi + ig \delta A_{\mu s} X^s \phi - g^2 A_{\mu\alpha} X^\alpha \delta \alpha_t X^t \phi + g^2 \delta \alpha_t X^t A_{\mu\alpha} X^\alpha \phi.$$

Les deux derniers termes se combinent en :

$$ig^2 \delta \alpha_t A_{\mu\alpha} c_{tus} X^s,$$

lorsque l'on fait usage des règles de commutation du groupe :

$$[X^t, X^u] = i c_{tus} X^s.$$

Si l'on veut que $D_\mu \phi$ se transforme comme ϕ dans les transformations de jauge, c'est-à-dire :

$$\delta D_\mu \phi = ig \delta \alpha_s X^s D_\mu \phi, \quad (27)$$

on est donc amené à exiger que :

$$\delta A_{\mu s} = -\partial_\mu \delta \alpha_s - g \delta \alpha_t c_{tus} A_{\mu\alpha}.$$

A x et μ fixes si nous considérons les champs $A_{\mu s}$ comme appartenant à la représentation adjointe du groupe, représentation dont les générateurs sont $Y_{tu}^s = i c_{sut}$, on peut encore récrire la transformation du champ A_μ sous forme compacte :

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \delta \alpha + ig \delta \alpha_s Y^s A_\mu. \quad (28)$$

Ceci montre la nature hybride et exhibe l'originalité du cas non abélien.

En effet, A_μ se transforme suivant un terme $(-\partial_\mu \delta \alpha)$ qui généralise la propriété de champ de jauge abélien, et un autre $(ig \delta \alpha Y A)$ qui nous invite à le considérer, par comparaison avec l'équation (26), comme "chargé" lui aussi.

Dans le lagrangien primitif correspondant aux champs ϕ_α , on devra non seulement remplacer les dérivées ordinaires ∂_μ par les dérivées covariantes D_μ , mais on devra, en outre, ajouter un terme faisant intervenir le champ A seul (et ses dérivées). Nous exigeons de ce terme qu'il soit uniquement fonction de $A_{\mu s}$, $\partial_\nu A_{\mu s}$, quadratique au plus dans les dérivées, invariant de Lorentz et invariant de jauge. Pour cela, nous allons introduire l'analogue du tenseur $F_{\mu\nu}$ de la théorie électromagnétique. Cet analogue n'est pas :

$$\partial_\nu A_{\mu s} - \partial_\mu A_{\nu s},$$

ni :

$$(\partial_\nu + ig A_{\nu t} Y^t) A_\mu - (\mu \leftrightarrow \nu) \equiv D_\nu A_\mu - D_\mu A_\nu.$$

Les deux combinaisons précédentes ne sont en effet pas invariantes de jauge. On veut définir un $F_{\mu\nu}$ qui se transforme selon :

$$\delta F_{\mu\nu} = ig \delta \alpha_s Y^s F_{\mu\nu}. \quad (29)$$

Pour obtenir la combinaison correcte on observe que, dans le cas abélien, on avait :

$$[(\partial_\mu + ie A_\mu)(\partial_\nu + ie A_\nu) - (\nu \leftrightarrow \mu)] \phi = [D_\mu, D_\nu] \phi = ie F_{\mu\nu} \phi.$$

Le membre de gauche était multiplié par $e^{ie\chi(x)}$ dans une transformation de jauge comme ϕ lui-même, on en déduisait que $F_{\mu\nu}$ était nécessairement invariant de jauge.

Ceci suggère de poser, dans le cas non abélien,

$$[D_\mu, D_\nu] = ig F_{\mu\nu,s} X^s, \quad (30)$$

assurés comme précédemment que le tenseur de droite est bien invariant. Explicitement :

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + ig A_{\mu t} X^t, \partial_\nu + ig A_{\nu u} X^u] = \\ &= ig (\partial_\mu A_{\nu s} - \partial_\nu A_{\mu s} + ig A_{\mu t} A_{\nu u} c_{tus}) X^s; \end{aligned}$$

soit :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{\nu s} - \partial_\nu A_{\mu s} - g A_{\mu t} A_{\nu u} c_{tus}. \quad (31)$$

Introduisant une notation matricielle valable dans la représentation adjointe (et par substitution $Y^s + X^s$ dans toute représentation de l'algèbre de Lie) :

$$\hat{A}_\mu = A_{\mu s} Y^s, \quad \hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu s} Y^s.$$

On voit que :

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + ig [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]. \quad (31')$$

Dans une transformation de jauge :

$$\delta \hat{A}_\mu = -\partial_\mu \delta \hat{\alpha} + ig [\delta \hat{\alpha}, \hat{A}_\mu]; \quad (28')$$

et l'on vérifie, après un bref calcul (utilisant l'identité de Jacobi), que la définition de $\hat{F}_{\mu\nu}$ entraîne bien :

$$\delta \hat{F}_{\mu\nu} = ig [\delta \hat{a}, \hat{F}_{\mu\nu}], \quad (29')$$

qui indique que \hat{F} se transforme selon la représentation adjointe. Il est instructif de comparer l'expression (31) de $F_{\mu\nu}$ avec la forme $(D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu)_s = \partial_\mu A_{\nu s} - \partial_\nu A_{\mu s} - 2g A_{\mu t} A_{\nu u} C_{tus}$; dans la définition correcte, le coefficient du terme quadratique est 1, dans cette version incorrecte il vaut 2.

En raison de l'introduction d'un facteur i supplémentaire dans les règles de commutation, la forme de Killing :

$$(Y^s, Y^t) = \text{Tr } Y^s Y^t,$$

est définie positive si le groupe est compact. La quantité :

$$\mathcal{L}(A) = -\frac{1}{4} \text{Tr } \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \quad , \quad (32)$$

est invariante de jauge et, si le groupe est compact, se réduit à une expression diagonale par un choix convenable de base :

$$\mathcal{L}(A) = -\frac{1}{4} \sum_s F_{\mu\nu s} F^{\mu\nu s} \quad . \quad (32')$$

C'est évidemment un bon candidat pour un lagrangien du champ de Yang-Mills. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que c'est l'unique solution aux conditions imposées. Remarquons que, puisque F contient des termes linéaires en ∂A et quadratiques en A , ce lagrangien est loin d'être un lagrangien libre. En fait, même au niveau classique, on sait peu de choses sur les solutions des équations du mouvement auquel il conduit. Ecrivons ces dernières. Pour une variation arbitraire de A on a :

$$\delta \hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta \hat{A}_\nu - \partial_\nu \delta \hat{A}_\mu + ig [\delta \hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu] + ig [\hat{A}_\mu, \delta \hat{A}_\nu],$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta \mathcal{L}(x) &= - \int d^4x \text{Tr } \hat{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta \hat{A}_\nu + ig [\hat{A}_\mu, \delta \hat{A}_\nu]) \\ &= \int d^4x \text{Tr} \left\{ (\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} + ig [\hat{A}_\mu, \hat{F}^{\mu\nu}]) \delta \hat{A}_\nu \right\}. \end{aligned}$$

La forme de Killing est supposée non dégénérée, il s'ensuit que les équations du mouvement du champ de Yang-Mills seul ont la forme :

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} + ig [\hat{A}_\mu, \hat{F}^{\mu\nu}] \equiv D_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (33)$$

Cette équation aurait pu être écrite d'emblée par analogie avec l'électrodynamique.

Nous allons maintenant examiner quelques propriétés simples des équations de Yang-Mills (33).

Tout d'abord, comme pour les équations de Maxwell, la définition de $\hat{F}_{\mu\nu}$ [équation (31)] est indispensable pour compléter l'équation (33).

Cherchons tout d'abord les solutions statiques, invariantes par rotation, c'est-à-dire l'analogie du potentiel coulombien pour l'électromagnétisme ou de la métrique de Schwarzschild pour la gravitation. [Nous admettons que l'équation (33) soit satisfaite partout, sauf peut-être à l'origine.]

Le potentiel cherché est donc de la forme :

$$\begin{aligned}\hat{A}^0 &= \hat{a}(r) \\ \hat{A}^k &= \hat{b}(r) r^k,\end{aligned}$$

où r^k désigne les coordonnées cartésiennes et r la distance à l'origine. Les seules composantes non nulles de \hat{F} sont les composantes "électriques" :

$$\hat{F}^{0k} = r^k (\hat{a}' + ig[\hat{a}, \hat{b}]).$$

L'annulation de \hat{F}^{kl} montre que \hat{A}^k peut être éliminé par une transformation de jauge. Ce point est un peu moins trivial que dans le cas abélien, aussi allons-nous en donner une preuve explicite. Dans une transformation de jauge finie, \hat{A}^k se transforme selon :

$$\hat{A}_k \rightarrow e^{ig\hat{\alpha}} \hat{A}_k e^{-ig\hat{\alpha}} - \frac{1}{ig} (\partial_k e^{ig\hat{\alpha}}) e^{-ig\hat{\alpha}}.$$

Si, donc, on peut trouver une matrice $\hat{\alpha}(r)$ telle que :

$$e^{ig\hat{\alpha}} (-\hat{b}(r) r^k) e^{-ig\hat{\alpha}} - \frac{1}{ig} (\partial_k e^{ig\hat{\alpha}}) e^{-ig\hat{\alpha}} = 0,$$

une transformation de jauge éliminera \hat{A} . Cette condition peut se récrire :

$$ig \hat{b}(r) r^k = - (e^{-ig\hat{\alpha}}) \partial_k (e^{ig\hat{\alpha}}) = (\partial_k e^{-ig\hat{\alpha}}) e^{ig\hat{\alpha}},$$

soit encore :

$$(\partial_k - ig \hat{b}(r) r^k) e^{-ig\hat{\alpha}} \equiv (\partial_k + ig \hat{A}_k) e^{-ig\hat{\alpha}} \equiv D_k e^{-ig\hat{\alpha}} = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité de ces trois équations sont satisfaites puisque, précisément, $[D_k, D_l] = 0$ dans notre cas. En fait, ces équations se réduisent à :

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - i \hat{b}(r) \right\} e^{-ig\hat{a}(r)} = 0$$

On a fait usage de la symétrie sphérique. Posons $\tau = r^2/2$ et $e^{-ig\hat{a}(r)} = U(\tau)$, où U appartient au groupe. (En fait, cette notation est un peu plus correcte puisqu'il peut se faire que certains éléments finis du groupe ne puissent s'écrire $e^{-ig\hat{a}}$, \hat{a} appartenant à l'algèbre de Lie et que l'on soit obligé de les écrire comme le produit de tels termes. Ce pourrait, par exemple, être le cas si le groupe n'était pas compact.) Par rapport à la variable τ , nous définissons un produit chronologique T qui consiste à ordonner des éléments non commutant, dépendant de τ (matrices, opérateurs, etc.), de telle sorte que leurs arguments aillent croissant de droite à gauche. La solution de l'équation précédente, qui se réduit à l'identité pour $\tau = 0$ par exemple, s'obtient alors aisément sous la forme :

$$U(\tau) = T \exp i \int_0^\tau d\tau' \hat{b}(\tau') = \sum_0^\infty i^n \int_0^\tau d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \hat{b}(\tau_n) \dots \hat{b}(\tau_1).$$

On peut encore mettre cette expression, notée $U(\tau, 0)$, sous forme d'un produit :

$$U(\tau, 0) = U(\tau, \tau_1) U(\tau_1, 0).$$

Procédant de la sorte par subdivisions successives et observant que, si $\Delta\tau$ est très petit, on a :

$$U(\tau + \Delta\tau, \tau) \simeq e^{i \Delta\tau \hat{b}(\tau)};$$

on finit par écrire :

$$U(\tau, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i \frac{\tau}{n} \hat{b}(\tau_n)} e^{i \frac{\tau}{n} \hat{b}(\tau_{n-1})} \dots e^{i \frac{\tau}{n} \hat{b}(\tau_1)}$$

où $\tau_p = (p/n)\tau$. Le théorème de Campbell-Hausdorff (section 5) montre que ces produits appartiennent bien au groupe et la compacité qu'ils convergent vers $U(\tau, 0)$.

Ainsi, il existe une transformation de jauge qui annule \hat{A}^k , mais qui modifie \hat{A}^0 . Dans la nouvelle jauge nous continuons à noter $\hat{a}(r)$ la quatrième composante du potentiel, car il est clair qu'elle continue à ne dépendre que de la distance à l'origine. Dans ces conditions, les équations (33) se réduisent à :

$$\partial_k \left(\frac{r_k}{r} \frac{d}{dr} \hat{a}(r) \right) = 0, \quad [\hat{a}, \frac{d}{dr} \hat{a}] = 0.$$

La deuxième équation simplifie le problème en montrant que, dans l'algèbre de Lie, $\hat{a}(r)$ conserve une direction fixe (notons-la \hat{Y}) et ramène le problème à un problème scalaire :

$$\hat{A}^0 = \hat{a}(r) = a(r)\hat{Y},$$

$$\Delta a(r) = 0.$$

Les solutions non triviales de l'équation de Laplace, sauf peut-être à l'origine, sont de la forme du potentiel de Coulomb plus une constante :

$$\hat{A}^0(r) = \left(\frac{\alpha}{r} + \beta\right) \hat{Y}.$$

Autrement dit, à une transformation de jauge près, les seules solutions statiques invariantes par rotation, sont coulombienne. A posteriori, ce résultat n'a rien de surprenant, car il était clair qu'en choisissant une direction fixe dans l'algèbre de Lie, on ramenait le problème à un problème abélien dont la solution est bien connue.*

En revanche, il existe une grande richesse de solutions statiques non invariantes par rotation. Certaines d'entre elles ont été étudiées par Yang et Wu.

Poursuivant notre digression, généralisons l'un des résultats que nous venons d'obtenir. Nous avons vu que les transformations de jauge finies sont de la forme :

$$\hat{A}_\mu(x) \rightarrow \hat{A}'_\mu(x) = e^{ig\hat{\alpha}(x)} \hat{A}_\mu(x) e^{-ig\hat{\alpha}(x)} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu e^{ig\hat{\alpha}(x)}) e^{-ig\hat{\alpha}(x)} \quad (34)$$

Si, en particulier, le potentiel est de la forme :

$$\frac{i}{g} (\partial_\mu e^{ig\hat{\alpha}}) e^{-ig\hat{\alpha}},$$

$\hat{F}_{\mu\nu}$ s'annule en vertu de la covariance de ce tenseur, ou en remarquant que :

$$D_\mu = \partial_\mu - (\partial_\mu e^{ig\hat{\alpha}}) e^{-ig\hat{\alpha}} = e^{ig\hat{\alpha}} \partial_\mu e^{-ig\hat{\alpha}}$$

et que, par conséquent, $[D_\mu, D_\nu] = 0$. Réciproquement, on voudrait montrer que, si $\hat{F} = 0$, le potentiel est de la forme indiquée.

A nouveau, le caractère non abélien du groupe rend cette propriété un peu moins aisée à établir que dans le cas électromagnétique. C'est pourquoi il vaut peut-être la peine d'en expliciter la preuve. Pour alléger les notations, posons $g = 1$. Nous supposons donc \hat{A} tel que :

$$\partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + i [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu] = 0, \quad (35)$$

et nous cherchons un élément $e^{i\hat{\alpha}}$ du groupe tel que :

$$\hat{A}_\mu = (i\partial_\mu e^{i\hat{\alpha}}) e^{-i\hat{\alpha}},$$

* On pourra éliminer la constante β sans introduire de potentiel vecteur en faisant la transformation de jauge $\hat{A}_\mu \rightarrow \hat{A}'_\mu = e^{ig\beta t \hat{Y}} \hat{A}_\mu e^{-ig\beta t \hat{Y}} - \frac{1}{ig} \partial_\mu (e^{ig\beta t \hat{Y}}) e^{-ig\beta t \hat{Y}}$
 $\hat{A}'_0 = \alpha/2 \hat{Y}, \hat{A}'_i = 0.$

soit ;

$$(\partial_\mu + i \hat{A}_\mu) e^{i\hat{\alpha}} = 0. \quad (36)$$

Les conditions d'intégrabilité de l'équation (36) sont satisfaites. Elles correspondent à l'annulation de $\hat{F}_{\mu\nu}$ (35).

La propriété suivante va nous fournir la clef du succès. Soit C une courbe différentiable dans l'espace temps, partant du point x_0 et arrivant au point x. Choisissons une paramétrisation ;

$$\tau \rightarrow x(\tau) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad x(1) = x \quad ; \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

La paramétrisation est arbitraire, comme l'est la courbe C. Continuons à désigner par T l'ordre chronologique suivant le paramètre τ . Cet ordre n'a, bien entendu, rien à voir avec l'ordre temporel habituel.

Soit :

$$e^{i\hat{\alpha}} = T e^{-i \int_0^1 d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \hat{A}_\mu(x(\tau))} = T e^{-i \int_{C(x, x_0)} dx^\mu \hat{A}_\mu(x)}. \quad (37)$$

Le membre de droite de cette définition est bien de la forme $e^{i\hat{\alpha}}$, où $\hat{\alpha}$ appartient à l'algèbre de Lie du groupe, suivant un argument utilisé précédemment. En raison des conditions (35), la propriété remarquable de $e^{i\hat{\alpha}}$ est qu'il dépend bien de x_0 et x, mais pas de la courbe C qui les joint. Pour le vérifier, montrons que, si $x_0 \equiv x$, c'est-à-dire si la courbe C est fermée, alors :

$$T e^{-i \int_{C(x_0, x_0)} dx^\mu \hat{A}_\mu(x)} = 1. \quad (38)$$

On va se contenter de le vérifier pour une courbe C infinitésimale. Le lecteur fera aisément le passage au cas fini par une méthode classique, analogue à celle employée pour la démonstration du théorème de Cauchy par exemple. Choisissons l'origine au centre d'un quadrilatère. Soient n_1 et n_2 deux quadrivecteurs fixes et :

$$x_0 = d\alpha n_1 + d\beta n_2.$$

La courbe C est représentée sur la figure 3, à la page suivante.

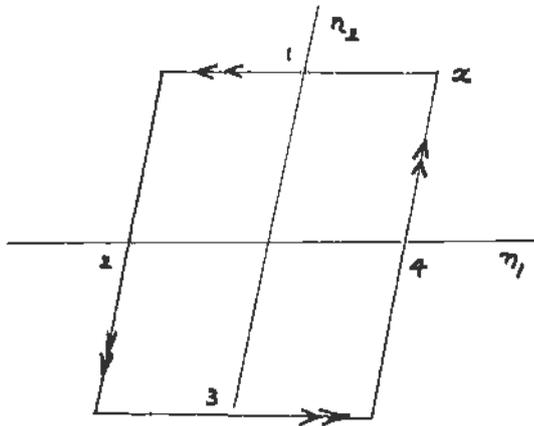


Fig. 3 : Le contour d'intégration utilisé dans la formule (38). L'intégrand est évalué aux points 1, 2, 3 et 4.

On évalue $A_{\mu}(x)$ au voisinage de l'origine sous la forme :

$$\hat{A}_{\mu}(x) = \hat{a}_{\mu} + x^{\nu} \partial_{\nu} \hat{a}_{\mu} + \dots ,$$

avec :

$$a_{\mu} \equiv \hat{A}_{\mu}(0) \quad , \quad \partial_{\nu} \hat{a}_{\mu} \equiv \partial_{\nu} \hat{A}_{\mu}(0) .$$

Les calculs qui suivent sont effectués jusqu'au second ordre en $d\alpha$, $d\beta$ inclus. Les intégrales sont estimées à l'aide du théorème de la moyenne, $\hat{A}_{\mu}(x)$ étant calculé aux moitiés des segments du quadrilatère C.

Notons $U(c)$ le membre de gauche de l'équation (38). On a essentiellement :

$$U(c) = e^{-2id\beta(\hat{a} \cdot n_2 + d\alpha n_1 \cdot \partial \hat{a} \cdot n_2)} e^{-2id\alpha(\hat{a} n_1 - d\beta n_2 \cdot \partial \hat{a} n_1)} \times \\ \times e^{2id\beta(\hat{a} \cdot n_2 - d\alpha n_1 \cdot \partial \hat{a} n_2)} e^{2id\alpha(\hat{a} \cdot n_1 + d\beta n_2 \cdot \partial \hat{a} n_1)}$$

Appliquons la formule :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \dots} ,$$

obtenue dans la section 5 au produit des deux premiers termes, des deux derniers, enfin, au produit résultant. On obtient :

$$U(c) = e^{-4id\alpha d\beta n_1^{\nu} n_2^{\nu} \{ \partial_{\nu} \hat{a}_{\nu} - \partial_{\nu} \hat{a}_{\nu} + i[\hat{a}_{\mu}, \hat{a}_{\nu}] \}} + \dots$$

où $+ \dots$ signifie des termes d'ordre plus élevé en $d\alpha$, $d\beta$. En vertu de l'annulation de $\hat{F}_{\mu\nu}$ [équation (35)], on a bien, à l'ordre voulu :

$$U(c) = T e^{-i \int_{C(x,x)} dx \cdot \hat{A}(x)} = 1 .$$

Ceci est valable pour une courbe fermée quelconque. On en déduit que l'intégrale correspondante, pour une courbe ouverte, ne dépend que des extrémités. Il suffit, pour cela, d'utiliser la propriété ($\bar{T} \equiv$ ordre antichronologique) :

$$\begin{aligned} \left[T e^{-i \int_{C(x, x_0)} dx^\mu \hat{A}_\mu(x)} \right] &= \left[T e^{-i \int_0^1 d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \hat{A}_\mu(x(\tau))} \right]^{-1} \\ &= \bar{T} e^{i \int_0^1 d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \hat{A}_\mu(x(\tau))} = T e^{-i \int_{C(x_0, x)} dx^\mu \hat{A}_\mu(x)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Calculons alors le gradient de l'équation (37) en utilisant une courbe $C(x + \delta x, x_0)$ de la forme :

$$C(x + \delta x, x_0) = \delta C(x + \delta x, x) \cup C(x, x_0)$$

où δC est un segment infinitésimal joignant x à $x + \delta x$. Le gradient s'obtient immédiatement :

$$\partial_\nu e^{i\hat{\alpha}(x, x_0)} = -i \hat{A}_\nu(x) e^{i\hat{\alpha}(x, x_0)}$$

et, par conséquent, quel que soit x_0 choisi à l'avance, $e^{i\hat{\alpha}(x, x_0)}$, défini par l'équation (37), est bien la solution de l'équation voulue (36). Nous avons ainsi complété notre démonstration.

Profitons de ce résultat pour montrer que l'arbitraire de jauge peut être mis à profit pour imposer une condition supplémentaire analogue à la condition de Lorentz en électromagnétisme :

$$\partial^\mu \hat{A}_\mu(x) \left(\equiv D^\mu \hat{A}_\mu(x) \right) = 0. \quad (40)$$

En d'autres termes, supposant que $\hat{A}_\mu(x)$ est un champ de Yang-Mills (couplé éventuellement de façon invariante à d'autres champs), il existe une transformation $\hat{A}_\mu + \hat{A}'_\mu$ de la forme (34) telle que \hat{A} satisfasse à la condition de Lorentz, $\partial^\mu \hat{A}'_\mu$ étant a priori arbitraire, égale à $\hat{a}(x)$. Faisant toujours $g = 1$, on est toujours à la recherche de $e^{i\hat{\alpha}}$ tel que, cette fois :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\mu \left(e^{i\hat{\alpha}} \hat{A}_\mu e^{-i\hat{\alpha}} \right) + i \partial^\mu \left\{ \left(\partial_\nu e^{i\hat{\alpha}} \right) e^{-i\hat{\alpha}} \right\}, \\ \hat{a}(x) &= \partial^\mu \hat{A}_\mu(x). \end{aligned} \quad (41)$$

Il est, a priori, assez malcommode de dériver des exponentielles contenant des facteurs non-commutants. Au passage, le lecteur établira sans peine la formule :

$$-i\partial_\nu e^{i\hat{\alpha}(x)} = \int_0^1 du e^{i u \hat{\alpha}(x)} \partial_\nu \hat{\alpha}(x) e^{i(1-u)\hat{\alpha}(x)}, \quad (42)$$

mais une utilisation directe de ce résultat dans l'équation (41) ne conduit pas à de grandes simplifications. Aussi allons-nous raisonner différemment. La première équation (41) exprime que $\partial^\mu \hat{A} = 0$. Exprimons \hat{A} en fonction de \hat{A}' . On obtient :

$$\hat{A}_\nu(x) = e^{-i\hat{\alpha}} \hat{A}'_\nu e^{i\hat{\alpha}} + i(\partial_\nu e^{-i\hat{\alpha}}) e^{i\hat{\alpha}},$$

qui ne diffère de l'équation (34) que par la signe de $\hat{\alpha}$ (propriété de groupe).

Ainsi, en prenant la divergence :

$$\hat{\alpha}(x) = (\partial^\nu e^{-i\hat{\alpha}}) \hat{A}'_\nu e^{i\hat{\alpha}} + e^{-i\hat{\alpha}} \hat{A}'_\nu \partial^\nu e^{i\hat{\alpha}} + \partial^\nu ((i\partial_\nu e^{-i\hat{\alpha}}) e^{i\hat{\alpha}}).$$

Insérons, dans le membre de droite, \hat{A}' en fonction de \hat{A} . On obtient :

$$\hat{\alpha}(x) = (\partial^\nu e^{-i\hat{\alpha}}) e^{i\hat{\alpha}} \hat{A}_\nu + \hat{A}_\nu e^{-i\hat{\alpha}} \partial^\nu e^{i\hat{\alpha}} + \partial^\nu ((i\partial_\nu e^{-i\hat{\alpha}}) e^{i\hat{\alpha}}).$$

Posons :

$$\hat{\beta}_\nu = (i\partial_\nu e^{-i\hat{\alpha}}) e^{i\hat{\alpha}}. \quad (43)$$

Alors, le système (41) est équivalent à :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \hat{\alpha}(x) &= \partial^\mu \hat{\beta}_\mu + i [\hat{A}^\mu, \hat{\beta}_\mu] \\ \text{b)} \quad \partial_\mu \hat{\beta}_\nu - \partial_\nu \hat{\beta}_\mu + i [\hat{\beta}_\mu, \hat{\beta}_\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

L'équation (44) b) est une conséquence de la définition (43) de $\hat{\beta}$. Nous savons inversement que, si elle est satisfaite, on pourra mettre $\hat{\beta}$ sous la forme (43). Nous allons montrer que l'équation (44) admet des solutions par un raisonnement perturbatif (ou au sens des séries formelles). Pour cela, imaginons que $\hat{\alpha}$ soit d'ordre (de petitesse) un dans un paramètre quelconque (on pourra, par exemple, remplacer $\hat{\alpha}$ par $\lambda\hat{\alpha}$), et cherchons $\hat{\beta}$ sous la forme :

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \dots + \hat{\beta}_n + \dots$$

Dans ce qui suit, on ne suppose pas \hat{A}_μ petit, mais $\hat{\alpha} = \partial^\mu \hat{A}_\mu$. Considérons d'abord les équations à l'ordre 1. On obtient :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{\beta}'_\nu - \partial_\nu \hat{\beta}'_\mu &= 0 \\ \partial^\mu \hat{\beta}'_\mu + i [\hat{A}^\mu, \hat{\beta}'_\mu] &= \hat{\alpha}. \end{aligned} \quad (45)$$

Il s'ensuit que $\hat{\rho}_\mu = \partial_\mu \hat{\phi}^1$ et que $\hat{\phi}^1$ doit satisfaire à :

$$\square \hat{\phi}^1 + i [\hat{A}^\mu, \partial_\mu \hat{\phi}^1] = \hat{a}. \quad (46)$$

L'équation (46) a toujours des solutions. Il n'y a pas de condition d'intégrabilité particulière à satisfaire. (Le lecteur pourra restituer le paramètre g et se convaincre, par exemple, que l'on trouve aisément un développement perturbatif de ϕ_1 .)

Supposons donc ϕ_1 trouvé, donc ρ_1 , et montrons par un raisonnement perturbatif que, si l'on connaît $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ de telle sorte que les équations (44) soient satisfaites jusqu'à l'ordre $n-1$, on peut construire $\hat{\rho}_n$ pour $n > 1$. A cet ordre, il faut satisfaire à :

$$\begin{aligned} \partial^\mu \hat{\rho}_\mu^n + i [\hat{A}^\mu, \hat{\rho}_\mu^n] &= 0 \\ \partial_\mu \hat{\rho}_\nu^n - \partial_\nu \hat{\rho}_\mu^n + i [\hat{\rho}_\mu, \hat{\rho}_\nu]^n &= 0 \end{aligned} \quad n > 1 \quad (47)$$

où $[\hat{\rho}_\mu, \hat{\rho}_\nu]^n$ désigne le terme d'ordre n du développement de $[\hat{\rho}_\mu, \hat{\rho}_\nu]$ soit, explicitement :

$$\sum_1^{n-1} [\hat{\rho}_\mu^p, \hat{\rho}_\nu^{n-p}] = [\hat{\rho}_\mu, \hat{\rho}_\nu]^n.$$

Il possède les propriétés formelles des commutateurs (identité de Jacobi en particulier).

Nous observons que $[\hat{\rho}_\mu, \hat{\rho}_\nu]^n$ s'exprime en termes de $\hat{\rho}^p$ avec $p \leq n-1$. La seconde équation (47) requiert donc que certaines équations d'intégrabilité soient satisfaites. Ces conditions ne sont rien d'autre que les analogues des équations de Maxwell homogènes, à savoir :

$$\partial^\mu [\hat{\rho}^\nu, \hat{\rho}^\sigma]^n + \text{permutations cycliques} = 0.$$

En différentiant, on voit que ceci s'écrit :

$$[\partial^\mu \hat{\rho}^\nu - \partial^\nu \hat{\rho}^\mu, \hat{\rho}^\sigma]^n + \text{permutations cycliques} = 0.$$

Or, selon l'hypothèse de récurrence, la seconde équation (47) est satisfaite pour tout p compris entre 1 et $n-1$, et dans $[\partial^\mu \hat{\rho}^\nu - \partial^\nu \hat{\rho}^\mu, \hat{\rho}^\sigma]^n$ on voit que seuls interviennent $\partial^\mu \hat{\rho}^{\nu p} - \partial^\nu \hat{\rho}^{\mu p}$ avec $1 \leq p \leq n-1$.

On a donc :

$$[\partial^\nu \hat{p}^\nu - \partial^\nu \hat{p}^\nu, \hat{p}^\sigma]^m \quad + \text{permutations cycliques} =$$

$$\frac{1}{\lambda} [[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu], \hat{p}^\sigma]^m \quad + \text{permutations cycliques} = 0 ,$$

en vertu de l'identité de Jacobi. Dans ces conditions, la seconde équation (47) a toujours des solutions. On a vu, en discutant les propriétés des équations de Maxwell (section 2), comment on trouvait une solution particulière explicitement, soit \hat{R}^n , et l'on aura la solution générale sous la forme :

$$\hat{p}^{\nu n} = \hat{R}^{\nu n} + \partial^\nu \hat{\phi}^n .$$

Portant ceci dans le première équation (47), on obtient :

$$\square \hat{\phi}^n + i [\hat{A}^\nu, \partial_\nu \hat{\phi}^n] = - \left\{ \partial^\nu \hat{R}_\nu^n + i [\hat{A}^\nu, \hat{R}_\nu^n] \right\} \equiv \hat{a}^n .$$

Cette équation est analogue à l'équation (46) et permet de déterminer $\hat{\phi}_n$, donc $\hat{p}^{\mu n}$. Ainsi, la construction itérative peut se poursuivre : on obtiendra \hat{p}^μ et $e^{i\hat{Q}}$. De cette manière, au sens des séries formelles, une transformation de jauge permet toujours, classiquement, de se placer dans la jauge de Lorentz.

Ces petits exercices nous montrent que, dans le cas non abélien, la structure des champs de jauge est réellement non triviale.

La généralisation du théorème de Goldstone et du phénomène de Higgs se fait sans difficulté particulière et conduit à des résultats semblables à ceux du cas abélien. Nous ne pouvons, ici, en présenter tous les détails. En revanche, la quantification introduit des difficultés nouvelles qui, à elles seules, réclament de très longs développements. Nous nous arrêterons à ce point, en ce qui concerne cette introduction à la théorie des champs de jauge.

Il nous reste encore à traiter d'un sujet qui appartient à la théorie classique des champs, à savoir la définition des propagateurs.

7. PROPAGATEURS

Les équations typiques de la théorie des champs sont de la forme :

$$(\square + m_\alpha^2) \phi_\alpha(x) = j_\alpha(x) , \quad (1)$$

où $j_\alpha(x)$ peut dépendre des champs $\phi_\beta(x)$ et, éventuellement, de leurs gradients. Pour l'instant nous supposons que j est donné et nous omettrons l'indice α . Le paramètre de masse m^2 sera supposé non négatif. On a alors à résoudre une équation aux dérivées partielles du second ordre, hyperbolique, qui détermine ϕ en voisinage d'un point si on connaît sa valeur et celle de sa dérivée normale sur un élément de surface (à trois dimensions) passant par le point en question. A l'exception toutefois d'éléments dits caractéristiques, contenant dans ce cas des directions du genre lumière.

Les besoins de la théorie de la diffusion font qu'on a rarement à résoudre le problème dans les termes évoqués ci-dessus, et que les conditions aux limites imposées à ϕ le seront généralement à des temps très grands, positifs ou négatifs. Il est alors commode d'introduire des solutions standards du problème où le second membre de l'équation (1) est remplacé par une distribution concentrée au point x' . Nous les noterons par le symbole général $G(x, x')$:

$$(\square + m^2) G(x, x') = \delta^4(x - x') . \quad (2)$$

Un suffixe supplémentaire servira à distinguer entre elles les solutions répondant à des conditions aux limites variées. Ces conditions seront toujours invariantes par translation, et les fonctions de Green ou propagateurs ne dépendront que de l'argument $x-x'$. En vertu de la propriété de superposition, on engendrera des solutions de l'équation (1) par la formule :

$$\phi_\alpha(x) = \int d^4x' G(x-x') j_\alpha(x') + \phi_\alpha^0(x) , \quad (3)$$

où $\phi_0(x)$, solution de l'équation homogène, est choisi de manière à satisfaire les conditions aux limites imposées. L'équation (2) se résout en faisant usage de la transformation de Fourier qui joue un rôle capital parce qu'elle permet d'exprimer simplement les propriétés d'invariance par translation.

Posons donc :

$$G(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip \cdot (x-x')} \tilde{G}(p) . \quad (4)$$

Comme la transformée de Fourier de la distribution de Dirac est égale à 1, l'équation satisfaite par \hat{G} se réduit simplement à :

$$(-p^2+m^2) \tilde{G}(p) = 1. \quad (5)$$

Avant de pouvoir diviser les deux membres de cette équation par p^2-m^2 , il faut observer que, en raison de la métrique de Lorentz, p^2-m^2 s'annule sur une hyperboloïde (à deux nappes si $m^2 > 0$, ou sur un cône si $m^2 = 0$).

Il en résulte que la solution $\tilde{G}(p) = -(p^2-m^2)^{-1}$ n'est bien définie que si on précise la façon de traiter la singularité dans l'intégrale (4). En outre, il est toujours possible d'ajouter à une solution particulière de l'équation (5) une solution de l'équation homogène de la forme $g(\vec{p}, \frac{p_0}{|p_0|}) \delta(p^2-m^2)$. Ces choix vont être dictés par des conditions aux limites. On définit d'abord les solutions retardées et avancées (correspondant aux potentiels de Lienardt et Wiechert si $m^2 = 0$):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ret}(p) &= \frac{-1}{(p_0 - i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} \\ \tilde{G}_{av}(p) &= \frac{-1}{(p_0 + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

c'est-à-dire :

$$G_{ret,av}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{ip \cdot x}}{(p_0 \mp i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}.$$

La signification de $\mp i\epsilon$ est simplement qu'il faut d'abord faire l'intégration sur p puis faire tendre ϵ vers zero. En d'autres termes, G est à envisager comme une distribution. En effectuant d'abord l'intégration sur la variable p_0 traitée comme une variable complexe on voit que l'on a la latitude, suivant le signe x^0 , de compléter le contour dans le demi plan supérieur (si $x^0 > 0$) ou inférieur (si $x^0 < 0$). On s'assure alors que $G_{ret}(x) = 0$ si $x_0 < 0$, et $G_{av}(x) = 0$ si $x_0 > 0$.

On peut d'ailleurs remplacer les conditions $x_0 < 0$ (ou $x_0 > 0$) par $x \notin V_+$ ($x \notin V_-$) où V_+ est le cône futur : $x^2 > 0, x_0 > 0$ (et V_- le cône passé : $V_- = -V_+$). Ceci découle de l'invariance relativiste de G , quelle que soit la transformation de Lorentz homogène Λ (de déterminant +1 et orthochrone : $\Lambda^0_0 > 0$) :

$$G_{\text{ret}} \left(\Lambda x \right) = G_{\text{ret}} (x).$$

Cette propriété d'invariance implique en outre que pour donner un sens aux expressions telles que (6), il faut les considérer comme des intégrales répétées. Les solutions avancées et retardées sont en fait réelles. Par exemple :

$$G_{\text{ret}} (x)^* = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip \cdot x}}{(p_0 + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{ip \cdot x}}{(p_0 - i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} = G_{\text{ret}} (x),$$

où l'on a effectué le changement de variable d'intégration $p \leftrightarrow -p$.

Dans le cas $m^2 = 0$, l'intégration de (6) peut être effectuée explicitement en termes très simples ;

$$G_{\text{ret}} (x) \Big|_{m^2=0} = \frac{1}{2\pi} \Theta(\pm x_0) \delta(x^2), \quad (7)$$

résultat bien connu en électromagnétisme. Lorsque $m^2 \neq 0$, on obtient des expressions faisant intervenir des fonctions de Bessel qui ne sont guère illuminantes. Au voisinage du cône $x^2 = 0$ la singularité est identique à celle du cas $m^2 = 0$, c'est-à-dire que le front d'onde produit par un ébranlement ponctuel continue à se déplacer à la vitesse de la lumière mais la fonction est différente de zéro à l'intérieur du cône de la lumière $x^2 > 0$. Il y a des remous derrière le front d'onde !

Revenons à l'expression de $G_{\text{ret}}(x)$ et effectuons l'intégrale sur p_0 .

Si $\omega_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, on a :

$$\frac{1}{(p_0 - i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left(\frac{1}{p_0 - \omega_{\vec{p}} - i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + \omega_{\vec{p}} - i\epsilon} \right).$$

Donc :

$$G_{\text{ret}}(x-x') = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \int d p_0 e^{i p_0 (x_0 - x'_0)} \left(\frac{1}{p_0 - \omega_{\vec{p}} - i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + \omega_{\vec{p}} - i\epsilon} \right).$$

Si $x_0 - x'_0 < 0$ on peut refermer le contour d'intégration dans le demi plan inférieur et l'intégrale s'annule. Donc :

$$G_{ret}(x-x') = \frac{1}{i(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \left\{ e^{i\omega_{\vec{p}}(x_0-x'_0) - i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} - e^{-i\omega_{\vec{p}}(x_0-x'_0) - i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \right\}$$

Nous pouvons remplacer l'intégrale sur \vec{p} par une limite de somme Riemannienne en posant :

$$\vec{p} = \frac{2\pi\vec{n}}{L} \quad \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{n}} \quad , \quad (8)$$

où L est une longueur et \vec{n} un vecteur à coordonnées entières (positives ou négatives). De ce fait à la limite $L \rightarrow \infty$:

$$G_{ret}(x-x') = \frac{\Theta(x_0-x'_0)}{i} \left(\sum \varphi_{+, \vec{p}}(x) \varphi_{+, \vec{p}}(x')^* - \sum \varphi_{-, \vec{p}}(x) \varphi_{-, \vec{p}}(x')^* \right) \quad (9)$$

avec \vec{p} choisi comme dans (8), et :

$$\varphi_{\pm, \vec{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{\pm i\omega_{\vec{p}}x_0 - i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

sont des solutions périodiques dans un cube de côté L de l'équation de Klein-Gordon homogène. Le signe \pm correspond au signe de la fréquence. Le signe relatif - entre les deux termes de (9) ainsi que le facteur $1/i$ tient alors à la "norme" non définie qui est laissée invariante par l'équation de Klein-Gordon, ϕ_+ est de norme positive, ϕ_- de norme négative. La formule (9) fournit ainsi une image physique de la propagation.

On aura une interprétation analogue de $G_{av}(x)$ en utilisant la relation :

$$G_{ret}(x) = G_{av}(-x) \quad (10)$$

La différence :

$$G^{(-)}(x) = \left(G_{ret}(x) - G_{av}(x) \right) = \frac{1}{i} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{ipx} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2) \quad (11)$$

est une fonction impaire avec :

$$G^{(-)}(x_0=0, \vec{x}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} G^{(-)}(x_0=0, \vec{x}) = \delta^3(\vec{x}) .$$

La fonction $G^{(-)}$ satisfait évidemment à l'équation de Klein-Gordon homogène. On a une expression analogue à (9) pour $G^{(-)}$ en remplaçant $\Theta(x_0 - x'_0) \rightarrow 1$.
Si $m^2 = 0$;

$$G^{(-)}(x) \Big|_{m^2=0} = \frac{1}{2\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2) .$$

Quant à la demi somme :

$$G^{(+)}(x) = \frac{1}{2} (G_{ret}(x) + G_{adv}(x)) = - \frac{PP}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2} , \quad (12)$$

où le symbole partie principale PP s'applique à l'intégration sur p_0 , c'est une solution paire de l'équation inhomogène.

Il existe enfin une autre solution paire de l'équation inhomogène qui joue crucial dans toute la théorie des champs. C'est le propagateur de Feynman:

$$G_F(x) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} , \quad (13)$$

qui est cette fois ci complexe.

$$\begin{aligned} (\square + m^2) G_F(x) &= \delta^4(x) \\ G_F(-x) &= G_F(x) . \end{aligned}$$

Si on procède à une décomposition en solutions de l'équation homogène, en d'autres termes, si on intègre sur la variable p_0 , on trouve :

$$G_F(x-x') = \frac{1}{i} \Theta(x_0 - x'_0) \sum_{\vec{p}} \varphi_{+\vec{p}}(x) \varphi_{+\vec{p}}^*(x') + \frac{1}{i} \Theta(x'_0 - x_0) \sum_{\vec{p}} \varphi_{-\vec{p}}(x) \varphi_{-\vec{p}}^*(x') . \quad (14)$$

La symétrie de cette expression en x, x' est évidente (et permet de retenir les signes relatifs) si on note que :

$$\varphi_{+, \vec{p}}(x)^* = \varphi_{-, -\vec{p}}(x) .$$

Alors que toutes les fonctions introduites jusqu'ici s'annulaient à l'extérieur du cône de lumière $x^2 < \infty$, G_F y est différent de zéro mais décroît exponentiellement. Ainsi pour $x_0 = 0$, notant $|x| \equiv |\vec{x}|$, après une rotation de contour :

$$G_F(0, \vec{x}) = \frac{i}{(2\pi)^2 |x|} \int_0^\infty \frac{p dp}{m \sqrt{p^2 - m^2}} e^{-p|x|} \simeq \frac{i e^{-m|x|} \sqrt{\pi m |x|}}{(2\pi)^2 |x|^2} .$$

La formule (14) donne un contenu concret à l'expression imaginée selon laquelle pour la fonction de Green de Feynman "les termes à fréquence positive se propagent suivant la direction positive du temps, et vice versa pour les fréquences négatives". Cette propriété s'accompagne du fait que G_F est intrinsèquement complexe et est à l'origine du rôle que G_F joue en mécanique quantique tandis que cette fonction n'intervenait pas dans les calculs classiques essentiellement réels. Enfin, une propriété importante de G_F est que sa transformée de Fourier est une fonction analytique (en fait méromorphe) de la variable p^2 .

Les fonctions de Green introduites ici dans le cas scalaire ont naturellement une généralisation dans le cas de spins différents de zéro.

Pour un champ de Dirac l'analogue du propagateur de Feynman $S_F(x)$ satisfait à :

$$\left(\frac{1}{i} \gamma \cdot \partial - m\right) S_F(x) = \delta^4(x) . \quad (15)$$

En transformée de Fourier :

$$(\gamma \cdot p - m) \tilde{S}_F(p) = 1 .$$

Soit en multipliant par $\gamma p + m$ les deux membres :

$$(p^2 - m^2) \tilde{S}_F(p) = \gamma \cdot p + m , \quad (16)$$

et :

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (17)$$

Ce propagateur matriciel possède des propriétés analogues à celles de G_F . Nous remarquons que pour p grand alors que $G_F \sim 1/p^2$, $S_F \sim 1/p$. Ceci illustre un mécanisme général. Lorsque le spin croît le comportement du propagateur à grande valeur du moment p se détériore.

Si au lieu du spin $\frac{1}{2}$ nous discutons le spin 1 on voudra initialement résoudre une équation du type :

$$\square B^\nu - \partial^\nu \partial \cdot B + m^2 B^\nu = j^\nu, \quad (18)$$

avec en particulier :

$$m^2 \partial_\rho B^\nu = \partial_\rho j^\nu.$$

On cherchera donc une solution $G_F^{\nu\sigma}(x)$ de l'équation :

$$- \left[(p^2 - m^2) \delta^\nu_\sigma - p^\nu p_\sigma \right] \tilde{G}_F^{\rho\sigma}(p) = g^{\nu\sigma}. \quad (19)$$

Dans le membre de gauche figure une matrice 4×4 dépendant de p . Elle sera inversible toutes les fois que son déterminant sera non nul. Plutôt que de calculer ce déterminant il est plus simple de multiplier les deux membres de (19) par :

$$\delta^\sigma_\rho - p^\sigma p_\rho / m^2.$$

Le résultat est :

$$- (p^2 - m^2) \tilde{G}_F^{\sigma\nu}(p) = g^{\sigma\nu} - \frac{p^\sigma p^\nu}{m^2}.$$

Par conséquent, la matrice initiale n'est singulière que pour $p^2 = m^2$ et son inverse a un pôle simple en ce point. Donc :

$$G_F^{\nu\sigma}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip \cdot x} \frac{g^{\nu\sigma} - \frac{p^\nu p^\sigma}{m^2}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (20)$$

En raison de la présence des termes $p^\mu p^\nu$ au numérateur, le comportement de $\tilde{G}_F^{\nu\sigma}(p)$ pour p grand est $G_F^{\nu\sigma}(p) \sim$ constante, conformément p grand

à ce que nous indiquions plus haut. Cependant, supposons que le champ vectoriel B^μ satisfasse à une équation du type (18) avec un courant conservé au second membre. Pour des conditions aux limites du type de Feynman on aura ;

$$B^\mu(x) = \int d^4x' G_F^{\mu\nu}(x-x') j_\nu(x')$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \int d^4x' e^{-ip \cdot x'} j_\nu(x')$$

Si on note $\tilde{j}_\nu(p)$ la transformée de Fourier de $j_\nu(x')$,

$$\tilde{j}_\nu(p) = \int d^4x' e^{-ip \cdot x'} j_\nu(x'),$$

en vertu de l'hypothèse de conservation, elle satisfait à $p^\nu \tilde{j}_\nu(p) = 0$.
On voit que $B^\mu(x)$ se réduit à :

$$B^\mu(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{ip \cdot x}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p) = \int d^4x' G_F(x-x') \tilde{j}_\nu(x'). \quad (21)$$

Autrement dit le terme $p^\mu p^\nu / m^2$ dans le numérateur du propagateur vectoriel peut être omis. Dans l'estimation du comportement asymptotique de $\tilde{G}_F^{\mu\nu}(p)$ on retrouve la propriété du cas scalaire en $1/p^2$. Le cas $m^2 = 0$ présente, comme nous y sommes coutumiers, des difficultés. Il ne faut considérer que des courants (des seconds membres) conservés. Nous savons qu'il est alors impossible de déterminer entièrement le champ vectoriel - noté A_μ - sans condition supplémentaire pour éliminer l'arbitraire de jauge. La matrice du membre de gauche de l'équation analogue à (18) ou $m^2 = 0$, à savoir :

$$p^2 \delta^\nu_\rho - p^\nu p_\rho \equiv L^\nu_\rho$$

n'est pas inversible, son déterminant est identiquement nul. Il s'agit au fait d'un projecteur :

$$L^2 = p^2 L.$$

Pour sortir de cette difficulté on peut, soit considérer le champ A_μ comme la limite d'un champ massif couplé à un courant conservé, soit procéder comme dans la section 2, en ajoutant un terme $\lambda/2 (\partial A)^2$ au lagrangien. Dans ce dernier cas, les équations du mouvement prennent la forme $(\square g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu (\lambda - 1)) A_\nu = j^\mu$, et l'expression du propagateur devient :

$$-\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \ e^{ip \cdot x} \frac{g^{\mu\nu} - \frac{\lambda-1}{\lambda} p^\mu p^\nu}{p^2 + i\epsilon}$$

La singularité apparente du numérateur ne joue pas si on l'applique à un courant conservé et le choix $\lambda = 1$ fait apparaître le propagateur de Feynman $g^{\mu\nu} G_F$. D'ailleurs on peut combiner les deux méthodes.

La situation se complique dans le cas où le courant dépend des champs couplés à A_μ (et éventuellement de A lui-même). Il faut alors s'assurer par exemple que la modification apportée aux équations en remplaçant le champ A_μ par un champ vectoriel massif (de masse tendant vers zéro) - substitution qui brise l'invariance de jauge - ne détruit pas la propriété de conservation du courant.

En transformée de Fourier, si on examine le numérateur du propagateur vectoriel :

$$N(p, m^2)^\mu{}_\rho = \delta^\mu{}_\rho - \frac{p^\mu p_\rho}{m^2} = (\mathbb{I} - p \otimes p)^\mu{}_\rho,$$

on constate que :

$$N^2 = N + \frac{p \otimes p}{m^2} \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right)$$

De ce fait pour $p^2 = m^2$ il se réduit à un projecteur sur l'espace orthogonal au quadrivecteur p . Si nous choisissons un système de coordonnées où p est le long de l'axe des temps (supposant que $p^0 > 0$, $p^2 = m^2 > 0$, p est un vecteur du genre temps positif) cette propriété est reliée au fait que l'ensemble des polarisations permises pour une solution de l'équation (18) homogène à p fixe décrit le sous-espace orthogonal à p .

Le lecteur peut-il à l'aide de cette remarque en déduire les formes possibles du propagateur d'un champ de spin plus élevé ? Le comportement général d'un propagateur en transformée de Fourier est-il pour p grand en p^{2s-2} , où s est le spin ?

Comme exercice élémentaire illustrant les considérations qui précèdent, examinons une situation où l'on veut connaître le champ de radiation émis par une particule chargée (de charge e) brutalement accélérée.

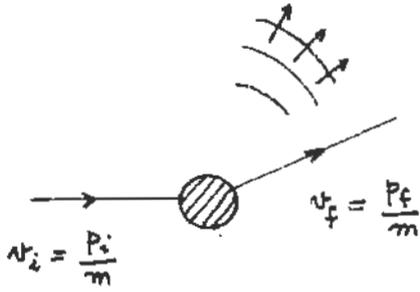


Fig. 4 - Une particule chargée est instantanément accélérée (dans la boule noire) passant de la vitesse v_i à la vitesse v_f .

Soient $v_i = p_i/m$ et $v_f = p_f/m$ ses quadri-vitesses initiales et finales. Si l'origine des temps et des coordonnées est choisie au moment et à l'emplacement de la collision, et si τ désigne le temps propre, sa trajectoire est décrite paramétriquement par :

$$x(\tau) = \begin{cases} \tau < 0 & \frac{p_i}{m} \tau \\ \tau > 0 & \frac{p_f}{m} \tau \end{cases}$$

Le courant associé est :

$$j^\mu(x) = e \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - x(\tau)) = \frac{ie}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ib \cdot x} \left(\frac{p_i^\mu}{k \cdot p_i} - \frac{p_f^\mu}{k \cdot p_f} \right) \quad (22)$$

Nous avons directement évalué la transformée de Fourier :

$$\tilde{j}^\mu(k) = ie \left(\frac{p_i^\mu}{k \cdot p_i} - \frac{p_f^\mu}{k \cdot p_f} \right) = \tilde{j}^\mu(-k)^*$$

L'équation déterminant le champ électromagnétique est :

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial A = j^\mu$$

Le courant est bien conservé et nous choisissons la jauge de Lorentz $\partial \cdot A = 0$. De plus, on exige que lorsque $t \rightarrow -\infty$, le champ électromagnétique se réduise au champ coulombien de la particule incidente (c'est-à-dire s'annule si on pouvait faire $j^\mu \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, ce qui rigoureusement est impossible en raison de la conservation de la charge). Dans ce cas la solution à retenir est la solution retardée :

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int d^4x' G_{ret}(x-x') j^\mu(x') \\ &= \int d^4x' (G_{ret}(x-x') - G_{av}(x-x')) j^\mu(x') \\ &\quad + \int d^4x' G_{av}(x-x') j^\mu(x') \end{aligned}$$

La seconde forme exhibe la décomposition du champ A^μ pour des temps très grands positifs comme somme d'un champ de rayonnement (satisfaisant à l'équation homogène) et d'un champ coulombien attaché à la particule. Comme :

$$G_{ret} - G_{av} = G^{(-)},$$

$$A_{ray}^\mu(x) = \int d^4x' G^{(-)}(x-x') j^\mu(x').$$

Utilisant les représentations intégrales (11) et (22) :

$$\begin{aligned} A_{ray}^\mu(x) &= \frac{1}{i(2\pi)^3} \int d^4k e^{ikx} \epsilon(k_0) \delta(k^2) \tilde{j}^\mu(k) \\ &= \frac{1}{i(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} \left(e^{i|\vec{k}|x_0 - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{j}^\mu(k, \vec{k}) - c.c \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Le champ électromagnétique lui-même est :

$$\begin{aligned} F_{\nu\mu, ray} &= \partial_\nu A_{\mu, ray} - \partial_\mu A_{\nu, ray} = \\ &= \frac{1}{i(2\pi)^3} \int d^4k \epsilon(k_0) \delta(k^2) e^{ikx} (k_\nu \tilde{j}_\mu(k) - k_\mu \tilde{j}_\nu(k)). \end{aligned}$$

Or, la densité d'énergie rayonnée est donnée par la composante zéro-zéro du tenseur $T_{\mu\nu}$ qui, d'après la section 4, s'écrit :

$$T^{00} = F^{0\mu} F_{\mu}{}^0 - \frac{1}{4} g^{00} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Pour un quadrivecteur k du genre lumière : $k^0 = |\vec{k}|$, nous définissons deux quadrivecteurs du genre espace, orthogonaux entre eux et à k ,

$$\epsilon_1, \epsilon_2 : \epsilon_\alpha \cdot k = 0, \quad \epsilon_\alpha^2 = -1, \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0.$$

Utilisant la fait que $k \cdot \tilde{j}(k) = 0$ et notant $k_0 = |\vec{k}|$, on trouve aisément que l'énergie émise E à un temps positif, est donnée par :

$$E = \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2k_0} k_0 \sum_{\alpha=1,2} |\epsilon_\alpha \cdot \tilde{j}(k)|^2.$$

Si nous anticipons sur l'interprétation de ce rayonnement en termes de quanta d'impulsion \vec{k} et d'énergie $k_0 = |\vec{k}|$ ($\hbar = 1$), on aura donc une énergie émise dans l'élément de l'espace des phases d^3k :

$$dE = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{2k_0} k_0 e^2 \sum_{\alpha} \left| \frac{\epsilon_{\alpha} \cdot p_i}{k \cdot p_i} - \frac{\epsilon_{\alpha} \cdot p_f}{k \cdot p_f} \right|^2.$$

Tenant compte, en outre, du fait que chaque photon transporte l'énergie k_0 , nous voyons que notre calcul (semi-classique) conduit à l'expression suivante pour le nombre de photons de polarisation ϵ émis dans l'élément d^3k autour de \vec{k} :

$$dN = \frac{dE(\epsilon)}{k_0} = e^2 \left| \frac{\epsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} - \frac{\epsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} \right|^2 \frac{d^3k}{2k_0 (2\pi)^3}. \quad (24)$$

C'est ce qu'un calcul quantique à l'ordre le plus bas en e fournit aussi, fondé sur les diagrammes de Feynman (qui ne vont tarder à émerger) de la figure 5.

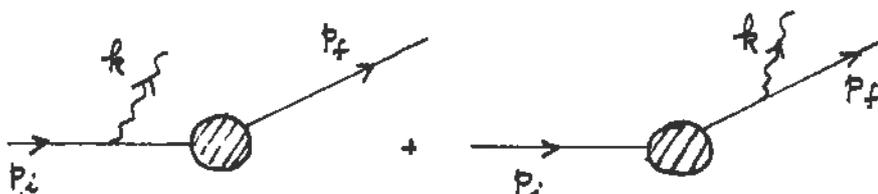


Fig. 5 - Diagrammes de Feynman pour le bremsstrahlung, à l'ordre le plus bas.

Le processus en question est appelé le rayonnement de freinage ou bremsstrahlung. On notera que l'énergie totale émise est finie mais que le nombre total de photons ne l'est pas.

Jusqu'ici nous n'avons pas discuté explicitement le cas où le membre de droite de l'équation (1) dépend explicitement des inconnues, à savoir les champs ϕ_{α} . S'il en est ainsi la connaissance du propagateur libre est insuffisante pour obtenir une solution. Nous allons esquisser la méthode d'approche perturbative permettant de traiter ce problème. Considérons un modèle simple, un champ scalaire auto-couplé satisfaisant à l'équation

$$(\square + m^2) \phi = - V'(\phi) \equiv j(\phi) \quad (25)$$

où V est une fonction (ce pourrait être $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$) qui ne dépend des coordonnées x que par l'intermédiaire de ϕ .

Afin de donner un sens précis aux manipulations qui vont suivre, nous imaginons V multiplié par un coefficient $g(x)$ de branchement adiabatique, c'est-à-dire qui s'annule pour $|x^0| \rightarrow \infty$ de manière très douce. Dans ces conditions ϕ tend vers un champ libre à des temps très grands. Ultérieurement on peut passer à la limite $g = \text{cte}$ (l'unité par exemple).

Formellement :

$$\phi(x) = \psi(x) + \int d^4x' G(x-x') j(\phi(x')) \quad , \quad (26)$$

où ψ est un champ libre : $(\square + m^2)\psi = 0$; le choix de la fonction de Green et de ψ dépend des conditions aux limites exigées. Par exemple avec $G \equiv G_F$ le propagateur de Feynman, les parties de fréquences positives de ϕ et ψ coïncideront pour $x_0 \rightarrow -\infty$ et celles de fréquence négative pour $x_0 \rightarrow \infty$. Si donc on impose ces conditions pour $|x_0| \rightarrow \infty$, on pourra reconstruire ψ et on prendra pour propagateur G_F . C'est le choix que nous ferons. On notera que, au sens strict, ceci n'est valable que grâce à l'hypothèse du branchement adiabatique.

Explicitons ces choix :

$$\phi(x) = \psi(x) + \int d^4x' G_F(x-x') g(x') j(x') \quad . \quad (26')$$

On peut se proposer, questions de convergence mises à part, de trouver un développement en série pour ϕ de la forme :

$$\phi(x) = \psi(x) + \int d^4x_1 A_2(x; x_1) g(x_1) + \dots + \int d^4x_1 \dots d^4x_n A_{n+1}(x; x_1 \dots x_n) g(x_1) \dots g(x_n) + \dots \quad (27)$$

Les noyaux qui figurent dans ces intégrales seront schématisés par des diagrammes en arbres, appellation qui va être justifiée dans ce qui suit.

Tout d'abord, pour calculer les différents noyaux A_n , il suffit d'itérer l'équation. Le premier itéré :

$$\phi(x) = \psi(x) + \int d^4x' G_F(x-x') g(x') j\left(\psi(x') + \int d^4x'' G_F(x-x'') g(x'') j(\phi(x''))\right) \quad ,$$

nous fournit :

$$\begin{aligned} A_2(x; x_1) &= G_F(x-x_1) j(\psi(x_1)) \\ A_3(x; x_1, x_2) &= G_F(x-x_1) j'(\psi(x_1)) G_F(x_1-x_2) j(\psi(x_2)) \quad , \quad (28) \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Pour faire la comptabilité de ces termes dont la complexité va croissant il est commode de leur associer biunivoquement des diagrammes qui dans le cas présent ont une structure topologique simple et constituent un premier exemple de diagrammes de Feynman.

Rappelons que :

$$j(\phi) \equiv - \frac{d}{d\phi} V(\phi) = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi},$$

avec :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad , \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad , \quad \mathcal{L}_{int} = -V(\phi).$$

Convenons alors d'associer un segment joignant deux vertex marqués x_i, x_j , à chaque propagateur $G_F(x_i - x_j)$. Il n'y a pas de problème d'orientation puisque G_F est une fonction symétrique de ses arguments. Nous représentons par un vertex (une boule) chaque terme :

$$\frac{1}{0!} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \psi} \quad , \quad \frac{1}{1!} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{int}}{\partial \psi^2} \quad , \dots \quad \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^p \mathcal{L}_{int}}{\partial \psi^p} \quad ,$$

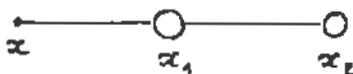
le nombre de dérivées étant égal au nombre de lignes de propagateurs issues du vertex et l'argument étant le champ ψ libre. Enfin un propagateur se termine au point x .

Ainsi :

$$A_2(x; x_1) :$$



$$A_3(x; x_1, x_2) :$$



Le lecteur vérifiera sans peine que la représentation graphique de $A_{n+1}(x; x_1, \dots, x_n)$ est constituée par l'ensemble des diagrammes connexes, en arbre (c'est-à-dire sans cycle), topologiquement distincts, à n vertex, une ligne se terminant au point x externe. La notation $x_1 \dots x_n$ des vertex est arbitraire. Comme A_{n+1} figure comme noyau intégrant dans $\int A_{n+1}(x; x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n)$, et que le produit $g(x_1) \dots g(x_n)$ est symétrique, on peut sans dommage le symétriser. Ainsi appliquant la règle précédente au calcul de A_4 on trouve graphiquement :

$$A_4 : \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \quad + \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ x \quad x \end{array}$$

Soit algébriquement :

$$\begin{aligned}
 A_4(x; x_1, x_2, x_3) = & G_F(x-x_1) j'(\psi(x_1)) G_F(x_1-x_2) j'(\psi(x_2)) G_F(x_2-x_3) j'(\psi(x_3)) \\
 & + G_F(x-x_1) \frac{1}{2!} j''(\psi(x_1)) G_F(x_1-x_2) j'(\psi(x_2)) \times \\
 & \times G_F(x_1-x_3) j'(\psi(x_3)) .
 \end{aligned} \tag{29}$$

Une seconde itération de l'équation (26) fournit bien entendu le même résultat. Si le lagrangien d'interaction est un polynome fini de degré N , les dérivées par rapport à ψ s'annuleront à partir de l'ordre $N + 1$, c'est-à-dire qu'on n'aura pas à considérer les vertex dont sont issus plus de N propagateurs. Ainsi si $\mathcal{L}_{int} = \lambda \phi^4/4!$ (avec $\lambda < 0$ classiquement) on pourra faire jouer à $\lambda \rightarrow \lambda(x)$ le rôle que nous faisons jouer à $g(x)$ et un vertex sera relié à d'autres par au plus quatre lignes de propagateurs. S'il y a $p < 4$ propagateurs issus de ce vertex, il restera un facteur proportionnel à ψ^{4-p} .

Si l'on veut des noyaux symétriques, on posera :

$$a_{n+1}(x; x_1, \dots, x_n) = \sum_{\text{Permutations}} A_{n+1}(x; x_{p_1}, \dots, x_{p_n}) , \tag{30}$$

et :

$$\phi(x) = \psi(x) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n a_{n+1}(x; x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n), \tag{31}$$

avec

$$a_{n+1}(x; x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^{(n)}}{\delta g(x_1) \dots \delta g(x_n)} \phi(x; g) \Big|_{g=0} . \tag{32}$$

Les règles de Feynman des diagrammes en arbres ont été établies ci-dessus dans les variables d'espace-temps. On peut aussi bien utiliser des expressions transformées de Fourier. L'un des casse-tête continuel de la théorie a trait aux conventions de facteurs i , $(2\pi)^4 \dots$. On conviendra ici d'affecter d'un \sim la transformée de Fourier définie par :

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik \cdot x} \tilde{\phi}(k)$$

$$G_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik \cdot x} \tilde{G}_F(k)$$

etc ...

Ainsi

$$\tilde{G}_F(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Pour expliciter les calculs prenons $\mathcal{L}_{int} = \lambda \phi^r / r!$. Dans la dérivation de la série perturbative, nous branchons cette interaction de manière adiabatique $\lambda \rightarrow \lambda(x)$, puis nous passons à nouveau à la limite invariante par translation $\lambda(x) \rightarrow \lambda$. On aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^p}{\partial \psi^p} \mathcal{L}_{int}(\psi(x)) &= \frac{\lambda}{(p-1)!(r-p)!} \psi^{r-p}(x) = \\ &= \frac{\lambda}{(p-1)!(r-p)!} \int \frac{1}{\pi^1} \frac{d^4k_j}{(2\pi)^4} e^{i \sum_1^{r-p} k_j \cdot x} \frac{1}{\pi^1} \tilde{\psi}(k_j). \end{aligned}$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(p) &= \int d^4x e^{-ip \cdot x} \phi(x) = \tilde{\Psi}(p) + \sum_1^{\infty} \int d^4x \prod_1^m d^4x_j e^{-ip \cdot x} A_{m+1}(x; x_1, \dots, x_m) \\ &= \tilde{\Phi}_0(p) + \tilde{\Phi}_1(p) + \dots + \tilde{\Phi}_m(p) + \dots \end{aligned}$$

Les termes d'ordre zéro et un sont :

$$\tilde{\Phi}_0(p) = \tilde{\Psi}(p)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(p) &= \int d^4x d^4x_1 e^{-ip \cdot x} A_2(x, x_1) = \lambda \int d^4x d^4x_1 e^{-ip \cdot x} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-1) e^{ik(x-x_1)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &\quad \times \frac{1}{(r-1)!} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4k_{r-1}}{(2\pi)^4} e^{i(k_1 + \dots + k_{r-1}) \cdot x_1} \tilde{\psi}(k_1) \dots \tilde{\psi}(k_{r-1}). \end{aligned}$$

L'intégration sur x et x_1 est immédiate et permet d'intégrer sur k . On note que ces intégrations expriment la conservation de l'impulsion-énergie aux vertex si on tient compte de celle emportée par les champs $\tilde{\psi}$. Il vient ici :

$$\tilde{\Phi}_1(p) = \lambda \frac{(-1)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(r-1)!} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_{r-1}}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta\left(\sum_1^{r-1} k_j - p\right) \tilde{\psi}(k_1) \dots \tilde{\psi}(k_{r-1}). \quad (33)$$

Le même mécanisme va évidemment jouer pour les diagrammes (en arbres) plus complexes des ordres plus élevés.

L'expression ci-dessus suggère d'ajouter aux vertex dont se détachent $p < r$ propagateurs, $r-p$ lignes les connectant à des champs $\tilde{\psi}(k_1) \dots \tilde{\psi}(k_{r-p})$; l'expression est à intégrer avec la mesure :

$$\int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_{r-p}}{(2\pi)^{4(r-p)}} \tilde{\psi}(k_1) \dots \tilde{\psi}(k_{r-p}) .$$

A chaque vertex dont les r impulsions entrantes sont portées par des propagateurs, soit par des lignes externes, on satisfait à la conservation du quadri-moment. Comme le diagramme est sans boucles ces règles de conservation sont suffisantes pour déterminer les moments attachés aux propagateurs en fonction des lignes externes. Un facteur $(2\pi)^4$ reste attaché à chaque vertex compensé par un facteur $1/(2\pi)^4$ par propagateur. Pour les diagrammes en arbres en effet un terme à n vertex possède aussi n propagateurs. L'intégration sur la variable x laisse un facteur global $(2\pi)^4 \delta(\sum_p \text{externes})$ de conservation globale du quadrimoment.

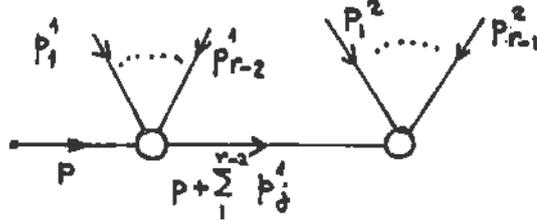
Les règles pour écrire $\tilde{\phi}(p)$ au n -ième ordre sont donc les suivantes :

- 1) dessiner tous les diagrammes en arbre à n vertex, connexes, topologiquement inéquivalents, une des lignes externes portant l'impulsion (entrante) p . De chaque vertex sont issues $s < r$ lignes externes et $r-s$ lignes internes de propagateurs;
- 2) aux lignes externes éventuellement issues du vertex (α) , attacher les impulsions $k_1^\alpha \dots k_s^\alpha$ et multiplier par un facteur

$$\frac{1}{s!} \int \frac{d^4 k_1^\alpha \dots d^4 k_s^\alpha}{(2\pi)^{4s}} \tilde{\psi}(k_1^\alpha) \dots \tilde{\psi}(k_s^\alpha)$$
- 3) aux lignes internes d'impulsion k , attacher un propagateur $\frac{(-1)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$
- 4) Multiplier par un facteur de symétrie attaché à chaque vertex égal au nombre de lignes internes qui s'y attachent diminué d'une unité. On vérifiera que le produit de ces facteurs augmenté des factorielles du point 2 n'est autre que

l'ordre du groupe des transformations du diagramme qui le laissent invariant si on le considère comme une structure articulée aux vertex.

- 5) Afin de faire l'intégration sur les moments externes, tenir compte de la conservation de l'impulsion-énergie totale en insérant le facteur $(2\pi)^4 \delta(\Sigma p_{\text{externes}})$.
- 6) Enfin, pour un diagramme à n vertex, il y aura un facteur λ^n . Ainsi le terme du second ordre $\tilde{\phi}_2(p)$ correspond au seul diagramme :



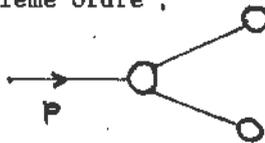
et s'écrit explicitement :

$$\tilde{\phi}_2(p) = \lambda^2 \int_{(r-2)!} \prod_{j=1}^{r-2} \frac{d^4 p_j^1 \tilde{\psi}(p_j^1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{(r-1)!} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{d^4 p_j^2 \tilde{\psi}(p_j^2)}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p + \sum_{j=1}^{r-2} p_j^1) \times \frac{(-1)}{(p + \sum_{j=1}^{r-2} p_j^1)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (34)$$

On voit que, une fois la brume dissipée, le seul facteur intéressant mis à part la mesure et la conservation de l'impulsion-énergie est le propagateur

$$\frac{(-1)}{(p + \sum_{j=1}^{r-2} p_j^1)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Dans des diagrammes d'ordre plus élevé, il ne faudra pas oublier le facteur de symétrie. Ainsi ce facteur est $1/2!$ en ce qui concerne les lignes internes pour la diagramme du troisième ordre :



Le lecteur est invité à vérifier pour lui-même si les règles précédentes le satisfont et se déduisent de ce qui précédait, l'expérience montrant qu'il est quasiment impossible de se servir de conventions établies par autrui. Néanmoins, la démarche générale est claire si certains détails peuvent paraître un peu obscurs.

On notera encore qu'il n'a jamais été encore question de mécanique quantique (\hbar est déjà caché dans le cas $m^2 \neq 0$ pour des raisons dimensionnelles comme on l'a vu, mais si l'on écrivait $m^2 = \ell^{-2}$, où ℓ est une longueur, alors on n'aurait jamais eu besoin de mentionner la constante de Planck).

D'autre part, on peut envisager des problèmes un peu plus compliqués que celui d'un seul champ scalaire auto couplé, par exemple en introduire plusieurs, se transformant comme des scalaires ou des vecteurs ... et couplés entre eux.

Enfin, la méthode exposée peut aussi s'utiliser dans des problèmes classiques pratiques, où les conditions aux limites peuvent être différentes et les fonctions de Green utilisées aussi. L'idée d'un développement perturbatif représenté diagrammatiquement est fort utile dans les domaines les plus variés. Il faut alors aussi, bien entendu, se préoccuper des propriétés de convergence de la série.

La solution ϕ de l'équation :

$$(\square + m^2)\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \quad , \quad (35)$$

que nous avons écrite :

$$\phi(x) = \psi(x) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_1^n d^4x_i a_{n+1}(x; x_1, \dots, x_n | \psi) \quad (36)$$

apparaît comme une fonctionnelle du champ libre ψ ; mais nous pouvons envisager la série (36) comme une fonctionnelle d'un champ χ arbitraire si nous substituons partout $\psi \rightarrow \chi$. Le champ ϕ ainsi obtenu satisfera bien évidemment à l'équation intégrale :

$$\phi(x) = \chi(x) + \int d^4x' G_F(x-x') \frac{\partial \mathcal{L}_{int}(x')}{\partial \phi} \quad ,$$

ou :

$$(\square + m^2)\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi(x)} + (\square + m^2)\chi(x) \quad .$$

Posons :

$$(\square + m^2)\chi(x) = j_{\chi}(x) \quad ,$$

et choisissons la solution :

$$\chi(x) = \int d^4x' G_F(x-x') j_{\chi}(x') \quad , \quad (37)$$

alors

$$\phi(x) = \int d^4x' G_F(x-x') \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathcal{L}_{int}(x') + j_{\chi}(x') \phi(x')) \quad . \quad (38)$$

Cette équation intégrale précise les conditions aux limites et la série (36) où $\psi(x)$ est remplacé par $\int d^4x' G_F(x-x') j_x(x')$ en est une solution formelle.

On dit qu'on a ajouté un terme de source :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_j = \mathcal{L} + j_x \phi ,$$

et ϕ est une fonctionnelle de la source définie par la condition que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \partial_\mu \phi} = 0 ,$$

et l'usage des propagateurs de Feynman (ou des conditions sur les fréquences positives et négatives à des temps infinis).

Si on calcule l'action :

$$I_j = \int d^4x \mathcal{L}_j(\phi) , \quad (39)$$

évaluée pour la solution ϕ écrite ci-dessus, on observera que sa variation par rapport à j s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_j}{\delta j_x(x)} &= \phi_j(x) + \int d^4x' \left(\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \phi_j(x')} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \partial_\mu \phi_j(x')} \right) \cdot \frac{\delta \phi_j(x')}{\delta j_x(x)} \\ &= \phi_j(x) \end{aligned} \quad (40)$$

Ceci généralise une propriété analogue obtenue dans la section 1, et qui se référerait à des systèmes à un nombre fini de degrés de libertés.

Il est laissé au lecteur le soin de modifier légèrement les règles données plus haut pour tenir compte dans les diagrammes de la substitution $\psi \rightarrow G * j$, qui revient à ajouter des propagateurs sur toutes les lignes externes.