

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SALENTO

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN FISICA

---

**Studi su anomalie  
di gauge e conformi**

*Relatore:*

Claudio Corianò

*Laureando:*

Luigi Delle Rose

---

ANNO ACCADEMICO 2008 - 2009



*... together we stand,  
divided we fall ...*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Anomalie nelle teorie di gauge</b>	<b>1</b>
1.1 Anomalie globali e di gauge . . . . .	1
1.2 Anomalie in teorie non abeliane . . . . .	7
1.3 Anomalie nel Modello Standard . . . . .	9
<b>2 Il modello A-B</b>	<b>13</b>
2.1 La fase di Higgs-Stückelberg . . . . .	15
2.2 Azione effettiva anomala e interazioni di Wess-Zumino . . . . .	17
2.3 Interazioni di Wess-Zumino nella fase di Higgs-Stückelberg . . . . .	22
<b>3 Il correlatore AVV e l'anomalia chirale</b>	<b>25</b>
3.1 Parametrizzazione di Rosenberg . . . . .	25
3.2 Parametrizzazione L/T . . . . .	29
3.3 Espressioni esplicite del diagramma $AVV$ . . . . .	32
3.3.1 Fermione di massa nulla . . . . .	32
3.3.2 Fermione massivo . . . . .	34
3.4 Particolari configurazioni cinematiche . . . . .	36
3.4.1 Fermione di massa nulla . . . . .	36
3.4.2 Fermione massivo . . . . .	42
3.5 Azione effettiva . . . . .	46
3.6 Ampiezze BIM . . . . .	50
3.7 Urto elastico tra due bosoni di gauge $A$ e fermione di massa nulla . .	51
3.7.1 Limite di unitarietà dalle ampiezze BIM . . . . .	56
3.8 Urto elastico tra due bosoni di gauge $A$ e fermione massivo . . . . .	59
3.9 Urto elastico tra due bosoni di gauge $B$ . . . . .	63

<b>4</b>	<b>Il correlatore <math>TJJ</math> e l'anomalia conforme</b>	<b>67</b>
4.1	L'anomalia conforme . . . . .	68
4.2	Definizione del correlatore $TJJ$ . . . . .	72
4.3	Espansione tensoriale dell'ampiezza $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$ . . . . .	76
4.4	Riorganizzazione dell'ampiezza $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$ . . . . .	81
4.5	Il correlatore $TJJ$ off-shell . . . . .	83
4.5.1	Analogie con il caso chirale . . . . .	91
4.5.2	Limite conforme del correlatore $TJJ$ . . . . .	92
4.6	Il correlatore $TJJ$ on-shell . . . . .	93
4.6.1	Fermione massivo . . . . .	94
4.6.2	Espansione in $1/m$ ed azione effettiva gravitazionale . . . . .	95
4.6.3	Fermione di massa nulla . . . . .	97
4.7	Conclusioni . . . . .	98
<b>A</b>	<b>Lagrangiana del modello A-B nella fase di Higgs-Stückelberg</b>	<b>101</b>
<b>B</b>	<b>Variazione dell'azione effettiva anomala</b>	<b>105</b>
<b>C</b>	<b>Regole di Feynman del modello A-B</b>	<b>107</b>
<b>D</b>	<b>Diagramma <math>AVV</math> nella rappresentazione L/T</b>	<b>109</b>
<b>E</b>	<b>Dettagli sui processi di diffusione</b>	<b>113</b>
<b>F</b>	<b>Dettagli tecnici sul correlatore <math>TJJ</math></b>	<b>117</b>
<b>G</b>	<b>L'ampiezza <math>\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(s; s_1, s_2, 0)</math></b>	<b>119</b>
<b>Letter</b>		<b>125</b>
G.1	Introduction . . . . .	127
G.2	Pole-dominated amplitudes . . . . .	130
G.3	The complete anomalous effective action and its expansions in the chiral case	131
G.4	The conformal anomaly case . . . . .	132
G.5	The $TJJ$ correlator . . . . .	134
G.5.1	$F_1$ in the most generic case . . . . .	137
G.6	Lessons from the $1/m$ expansions . . . . .	137
G.7	Conclusions . . . . .	138
<b>Bibliografia</b>		<b>139</b>

# Introduzione

Lo studio delle interazioni fondamentali nell'ambito della teoria dei campi è fortemente caratterizzato dalla ricerca di eventuali simmetrie, classiche e/o quantistiche e dalle implicazioni che queste hanno sulla natura dello spettro fisico. Infatti, il progresso più significativo in fisica delle alte energie si è avuto con la formulazione delle teorie di gauge, identificate dalla presenza di simmetrie locali nella lagrangiana classica e implementate in gruppi abeliani o non abeliani.

Pertanto lo studio della formulazione quantistica di queste simmetrie e della loro eventuale rottura, che può realizzarsi con meccanismi distinti, è uno degli aspetti cruciali della fisica degli ultimi 40 anni. Inoltre con lo sviluppo della teoria delle stringhe, il significato di queste simmetrie si è ulteriormente ampliato. Ad esempio lo studio degli spettri previsti da modelli più complessi sfrutta in maniera essenziale, oltre alle invarianze negli spazi interni, la presenza di geometrie spazio-temporali e delle loro corrispondenti simmetrie.

Come sottolineavamo, la rottura di queste invarianze può essere attribuita a fenomeni di natura diversa. Ad esempio si possono avere rotture spontanee della simmetria di gauge oppure esplicite, od ancora anomale.

In una rottura spontanea la lagrangiana che definisce il sistema è invariante sotto un certo gruppo di trasformazioni mentre il suo stato fondamentale, cioè lo stato di minima energia, non lo è. Questo fenomeno è previsto dal Modello Standard in cui la simmetria di gauge viene rotta dal campo di Higgs quando questo assume un valore di aspettazione non nullo nello stato di vuoto. La rottura di una simmetria causata dalla presenza di anomalie in una teoria quantistica è probabilmente il caso più sorprendente tra le tre tipologie.

Un'anomalia appare quando una simmetria dell'azione classica viene violata da correzioni radiative quantistiche. Pertanto, la rottura di una simmetria a livello quantistico è legata, in questo caso, alla presenza di alcune interazioni che, in particolari situazioni, mettono in discussione la consistenza stessa della teoria.

Queste anomalie possono essere dovute sia alla rottura di invarianze spazio-temporali che di simmetrie interne. Ad esempio, le anomalie gravitazionali sono riconducibili al primo caso, mentre le anomalie di gauge che compaiono in una teoria in  $3 + 1$  dimensioni sono da attribuire alla presenza di interazioni trilineari che violano le simmetrie interne e si esauriscono ad un loop.

Vedremo, comunque, che lo status delle anomalie chirali di gauge e di quelle conformi, nel caso di una teoria dei campi locale, è ben diverso. In pratica, la presenza di una anomalia conforme è essenzialmente legata al processo di rinormalizzazione, ed è intimamente connessa all'esistenza di una costante di accoppiamento che varia con la scala di rinormalizzazione  $\mu$  (*running coupling*), ma non è un'anomalia che viola la conservazione di una carica di gauge. Nel caso delle anomalie di gauge, invece, la presenza di questo fenomeno pone delle domande ovvie sulla consistenza stessa della teoria. Infatti l'invarianza di gauge esprime l'equivalenza tra molteplici descrizioni fisiche ed è necessaria per rimuovere dallo spettro stati con norma negativa la cui interpretazione probabilistica è priva di significato. In questo caso, se le cariche di gauge dei fermioni vengono scelte appropriatamente allora tali anomalie si cancellano e la simmetria viene ripristinata anche a livello quantistico. Ciò accade nel Modello Standard dove la cancellazione delle anomalie di gauge impone relazioni cubiche tra le cariche dei fermioni, ovvero fissa le loro cariche in modo da avere una teoria priva di anomalie di gauge, rinormalizzabile e dunque anche predittiva.

In questo lavoro di tesi studieremo due diversi tipi di anomalie, cioè quelle di gauge e quelle conformi, partendo da modelli specifici in cui sono evidenti le proprietà delle teorie di campo in cui esse si manifestano. La nostra analisi, come vedremo, è fondata su un approccio puramente perturbativo e consiste nello studio di alcune classi di diagrammi, simili nei due casi, entrambi responsabili della rottura delle simmetrie classiche. La generalizzazione dei nostri risultati al caso di modelli più realistici è ovvia; pertanto le nostre conclusioni rimangono valide anche per teorie di gauge non abeliane e trovano applicazioni al caso di estensioni del Modello Standard.

Il materiale contenuto nella tesi è interamente originale e si fonda su ricerche presentate in tre lavori recenti in collaborazione con Roberta Armillis, Claudio Corianò e Marco Guzzi. In questi lavori si analizzano le proprietà specifiche di alcuni correlatori anomali e si dimostra che sia le anomalie di gauge che quelle conformi sono caratterizzate dalla presenza di *poli anomali* nell'espansione perturbativa dell'azione effettiva. In particolare si prova l'esistenza di tali singolarità dinamiche nello spettro di queste teorie che possono a ragione ritenersi l'impronta comune della presenza di

anomalie conformi e chirali. Le loro implicazioni e la loro interpretazione fisica è stata discussa recentemente da Giannotti e Mottola [1] in un lavoro sull'anomalia conforme e sui gradi di libertà scalari che emergono dallo studio dell'azione effettiva gravitazionale. Gli autori sottolineano che l'azione effettiva gravitazionale, che include i contributi dell'anomalia conforme, può essere descritta mediante l'introduzione di due campi ausiliari che possono essere pensati come nuovi gradi di libertà della teoria effettiva. In altri termini, a causa dell'anomalia conforme, anche il più semplice sistema fisico che accoppi la gravità e l'elettrodinamica quantistica può essere descritto mediante un'azione effettiva che richiede l'esistenza di due campi scalari di massa nulla.

La dimostrazione dell'esistenza di stati scalari, intesi come stati legati di una coppia fermione-antifermione nella teoria effettiva, è vincolata, nel loro lavoro, alla scoperta di poli anomali di natura conforme. Queste strutture dinamiche, ben note nel caso chirale in seguito allo studio di Dolgov e Zakharov [2], e identificate come fenomeni tipici delle interazioni anomale nella regione infrarossa, possono quindi essere individuate anche in presenza di gravità accoppiata all'elettrodinamica (come mostrato in [1]).

Mostriamo nel corso del lavoro di tesi che la comparsa delle singolarità dinamiche non si limita alla regione infrarossa dello spettro, dove risultati derivati dall'analisi dispersiva hanno permesso la loro prima identificazione diretta, ma è universalmente presente nei correlatori anomali e perciò anche nell'azione effettiva. Pertanto il calcolo diretto qui presentato generalizza notevolmente i risultati precedenti e mostra che l'analisi dispersiva non fa giustizia di tutte le possibili singolarità dinamiche indotte dall'espansione perturbativa, poiché esse sono fornite solo da uno studio della teoria effettiva completo e off-shell, finora assente nella letteratura.

Il nostro studio muove i primi passi dall'identificazione di tali singolarità nel caso chirale, realizzata confrontando due diverse parametrizzazioni del correlatore triangolare, di cui la prima è presente in letteratura da lungo tempo ed è espressa in forma parametrica, mentre la seconda, più recente, separa il correlatore in parte longitudinale e trasversa, isolando un polo in qualunque configurazione cinematica. Questa singolarità cinematica, come dimostreremo, si disaccoppia nel regime infrarosso sebbene i suoi effetti rimangano visibili anche nella regione ultravioletta; ad essa corrispondono due gradi di libertà effettivi del sistema secondo l'interpretazione data in [1] che non sono identificabili mediante analisi dispersiva.

La natura ultravioletta del polo emerge dallo studio di una classe di ampiezze, dette

*BIM*, in cui esso domina il comportamento della sezione d'urto ad alta energia violando la condizione di unitarietà. Se il polo fosse eliminato tali ampiezze verrebbero annullate identicamente oppure manifesterebbero un comportamento compatibile con la richiesta di unitarietà della teoria a grandi energie.

Mostreremo che l'azione effettiva di una teoria anomala chirale è caratterizzata da termini non-locali che sono di natura polare e immediatamente derivabili dalla soluzione delle identità di Ward anomale.

I fattori di forma che descrivono il correlatore chirale  $AVV$  sono poi stati espansi in  $1/m$ , con  $m$  massa del fermione di Dirac che circola nel loop, e l'azione effettiva, calcolata a partire da quest'espansione, rappresenta l'estensione della formulazione di Euler-Heisenberg al caso anomalo, che non era mai stata presentata in precedenza in questa forma.

Passando all'elettrodinamica quantistica in presenza della gravità, un calcolo analogo al precedente ma molto più complesso, mostrerà che le conclusioni raggiunte nel contesto delle teorie di gauge anomale sono praticamente analoghe al caso conforme. In modo particolare si vedrà che l'azione effettiva del sistema, che manifesta un'anomalia conforme, ha singolarità dinamiche molto simili che, come accade nel caso chirale, si disaccoppiano nell'infrarosso. Questi nuovi termini non sono identificabili da una semplice analisi dispersiva che rimane, come abbiamo già menzionato, valida solo nel regime infrarosso.

L'espressione esplicita del correlatore  $\langle TJJ \rangle$  ottenuto accoppiando l'elettrodinamica quantistica alla gravità è l'elemento centrale e originale della nostra investigazione. Il calcolo è molto complesso e pertanto in questa trattazione abbiamo riassunto le fasi principali della sua elaborazione evidenziando alcuni passaggi intermedi e i risultati rilevanti.

Il nostro lavoro potrebbe essere soggetto a generalizzazioni. Ad esempio, ulteriori studi permetterebbero di determinare l'azione effettiva che descrive l'accoppiamento dell'anomalia chirale ad un modello supersimmetrico, in cui la rottura della supersimmetria è mediata dall'anomalia.

Il lavoro di tesi si compone di due parti, Parte 1 e Parte 2 e di una serie di appendici. La prima parte è dedicata allo studio delle anomalie chirali ed è sviluppata nei primi 3 capitoli. Specificatamente, nel capitolo 1 introduciamo il concetto di anomalia chirale a livello perturbativo, discutendo la sua origine e il modo in cui essa viene cancellata nel Modello Standard.

Il secondo capitolo illustra un semplice modello abeliano, il *modello A-B*, contenente

due gruppi di gauge abeliani, con un bosone di gauge anomalo  $B$  con accoppiamenti assiali e un bosone simile al fotone, denotato con  $A$ . In questo modello, che è per costruzione anomalo nel suo contenuto fermionico, si utilizza un controtermine di tipo Wess-Zumino, cioè della forma  $bF \wedge F$ , dove  $b$  rappresenta un'azione di Stückelberg, per ripristinare l'invarianza di gauge. In questo modello due meccanismi sono responsabili della generazione della massa del bosone di gauge anomalo, il meccanismo di Stückelberg ed il meccanismo di Higgs. Essi danno due diversi contributi di massa al bosone di gauge anomalo in fasi diverse della teoria; il bosone di gauge non anomalo rimane invece privo di massa in tutte le fasi. Questo modello descrive una tipica teoria effettiva contenente anomalie ed un campo assionico che risulta essenziale per la restaurazione della simmetria di gauge rotta dall'anomalia. Il modello è caratterizzato da una rottura di unitarietà che verrà poi discussa nel capitolo 3.

Il capitolo 3 è completamente originale e discute la struttura polare di una teoria con anomalie chirali, mostrando che i diagrammi anomali contengono singolarità di tipo polare con residuo infrarosso nullo solo in alcune condizioni cinematiche; queste vengono dette di disaccoppiamento del polo. L'analisi di questo capitolo è particolarmente tecnica e sfrutta due rappresentazioni dell'ampiezza anomala, la rappresentazione di Rosenberg [3] e quella longitudinale/trasversa (L/T) mostrando la loro equivalenza. Quest'ultima parametrizzazione, inoltre, presentata in letteratura solo nel caso di fermioni a massa nulla, è stata qui generalizzata al caso massivo. Nello stesso capitolo si deriva l'azione effettiva di tipo Euler-Heisenberg di una teoria anomala, a partire dall'espansione in  $1/m$  dei coefficienti del correlatore triangolare.

Il capitolo 3 inoltre analizza le rotture di unitarietà presenti nei modelli anomali in generale, ed introduce una classe di ampiezze dominate dai poli anomali, dette anche *ampiezze BIM*, che rompono l'unitarietà nell'ultravioletto. Infatti, si dimostra che la rottura di unitarietà di una teoria con controtermini di tipo Wess Zumino ed un'azione di Stückelberg, discussa nel capitolo 2, è un aspetto insanabile di questi modelli ed impone un limite di consistenza. Questo limite viene identificato procedendo con un'espansione in onde parziali delle ampiezze di elicità dei diagrammi BIM. Il capitolo si conclude con la prova che solo la cancellazione del polo anomalo ultravioletto, identificato nel capitolo 3, permette di rimuovere il problema della rottura unitaria di queste teorie.

La parte due è dedicata all'anomalia conforme e comprende il capitolo 4, nel quale si descrive la procedura seguita nel calcolo dei contributi di gauge all'azione effettiva

gravitazionale legata all'anomalia conforme. Anche questo capitolo è completamente originale. Seguono le nostre conclusioni.

Le appendici contengono la discussione di aspetti tecnici che sono utili per la lettura dei vari capitoli. Abbiamo inoltre aggiunto a fine tesi uno dei tre lavori scritti nel corso di questa ricerca, che riassume gran parte del lavoro qui descritto, in forma sinottica. Questa sezione sotto forma di lettera può essere utile per avere uno sguardo rapido sul contenuto generale dei vari capitoli e può essere sufficiente per inquadrare rapidamente l'intero lavoro di tesi.

# Capitolo 1

## Anomalie nelle teorie di gauge

### 1.1 Anomalie globali e di gauge

Una teoria di campo si dice anomala se una sua simmetria classica viene rotta dalle correzioni radiative quantistiche. La cancellazione di queste anomalie è una caratteristica fondamentale del Modello Standard ed è condizione necessaria per avere una teoria rinormalizzabile.

Infatti, la presenza di una simmetria classica che viene preservata a livello quantistico porta alla presenza di identità diagrammatiche, dette Identità di Ward (IW), che sono cruciali per la dimostrazione della rinormalizzabilità di una teoria di gauge. Nel caso invece di una teoria affetta da anomalie, le identità di Ward assumono una forma anomala che porta alla violazione di unitarietà della teoria e anche alla dipendenza dal parametro di gauge fixing degli elementi della matrice  $S$ .

In questo capitolo passiamo brevemente in rassegna l'anomalia chirale in teorie di gauge.

Consideriamo una teoria quantistica con un gruppo di simmetria  $G$  che lascia invariante l'azione classica ( $\delta S_{cl} = 0$ ). Il gruppo  $G$  può essere discreto o continuo e la simmetria essere globale o locale (detta anche di gauge). Nel caso di simmetrie globali che vengono rotte a livello quantistico non si crea alcuna inconsistenza teorica, l'esempio più importante è il decadimento  $\pi \rightarrow \gamma\gamma$  osservato sperimentalmente e giustificato da un'anomalia della corrente vettoriale-assiale. Come abbiamo sopra accennato, nel caso di simmetrie di gauge, invece, la presenza di anomalie indica un'inconsistenza fondamentale della teoria e pertanto si deve procedere alla loro cancellazione. Vediamo brevemente, a livello perturbativo, come questo accade.

Consideriamo una teoria di campo libera descritta dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \quad (1.1)$$

invariante per trasformazione del campo fermionico  $\psi(x)$  a massa nulla tale che

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x); \quad (1.2)$$

la corrente di Noether  $j^\mu$  associata a tale trasformazione è detta corrente vettoriale e assume la forma

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi; \quad (1.3)$$

essa risulta conservata, si ha cioè  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , assumendo che il campo  $\psi(x)$  soddisfi l'equazione di Dirac.

Non è difficile provare che la lagrangiana in eq.(1.1) risulta invariante anche sotto la trasformazione del campo  $\psi(x)$  tale che

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x) \quad (1.4)$$

cui è associata la corrente vettoriale-assiale

$$j^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi; \quad (1.5)$$

essa risulta conservata a livello classico,  $\partial_\mu j^{\mu 5} = 0$ , nel caso di un fermione non massivo.

La formulazione quantistica di queste proprietà porta alla violazione della sua conservazione nell'ambito della funzione di correlazione

$$\langle 0|T J_5^\lambda(0) J^\mu(x_1) J^\nu(x_2)|0\rangle, \quad (1.6)$$

dove compare il prodotto temporalmente ordinato di tre correnti  $J$  sullo stato di vuoto  $|0\rangle$ . La corrente  $J_5^\lambda(0)$  è assiale,  $J^\mu(x_1)$  e  $J^\nu(x_2)$  sono di tipo vettoriale e  $\{\lambda, \mu, \nu\}$  sono i rispettivi indici di Lorentz.

In Fig.(1.1) mostriamo i due diagrammi ottenuti dalla funzione di correlazione in eq. (1.6) nello spazio degli impulsi, con le relative convenzioni adottate per i momenti.

La trasformata di Fourier dell'ampiezza in eq.(1.6) è

$$\Delta^{\lambda\mu\nu} = (-1)(-i)^3 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\lambda \gamma^5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}} \right] + \text{exch.}, \quad (1.7)$$

dove *exch.* indica il contributo del triangolo a destra in Fig.(1.1).

Le simmetrie classiche che davano la conservazione delle due correnti  $j^\mu$  e  $j^{\mu 5}$ ,

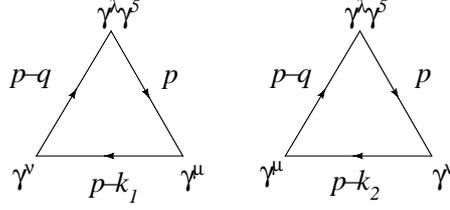


Figura 1.1: Triangoli nello spazio degli impulsi:  $p$  è il momento interno al loop,  $k_1$  e  $k_2$  i due momenti esterni,  $q = k_1 + k_2$ .  $\gamma^\mu$  e  $\gamma^\nu$  indicano vertici con correnti vettoriali,  $\gamma^\lambda \gamma^5$  una corrente assiale. Il diagramma a destra si ottiene da quello a sinistra per scambio  $\mu \rightarrow \nu$ ,  $k_1 \rightarrow k_2$ .

a livello quantistico dovrebbero essere recuperate nelle tre identità di Ward  $k_{1\mu} \Delta^{\lambda\mu\nu} = 0$ ,  $k_{2\nu} \Delta^{\lambda\mu\nu} = 0$  e  $q_\lambda \Delta^{\lambda\mu\nu} = 0$ , mentre invece si ottiene un risultato non nullo dal calcolo diretto a partire dall'espressione dei diagrammi nello spazio dei momenti. Infatti da

$$k_{1\mu} \Delta^{\lambda\mu\nu} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\lambda \gamma^5 \frac{1}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1} - \gamma^\lambda \gamma^5 \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}} \right] \quad (1.8)$$

segue l'identità di Ward  $k_{1\mu} \Delta^{\lambda\mu\nu} = 0$  solo per una specifica parametrizzazione del momento nel loop. Ad esempio, se si esegue un cambio di variabili ( $p \rightarrow p - k_1$ ) nel secondo integrale, cioè uno shift del momento interno al loop, i due contributi si cancellano e si ristabilisce la relazione  $k_{1\mu} \Delta^{\lambda\mu\nu} = 0$ . In realtà però il diagramma in questione è divergente nell'ultravioletto, risulta pertanto mal definito e lo shift nel momento di integrazione non lascia invariato il correlatore.

Se infatti operiamo una generica traslazione del momento nel loop ( $p \rightarrow p + a$ ) otteniamo una nuova ampiezza riparametrizzata e dipendente da  $a$ , indicata con  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(a, k_1, k_2)$ , tale che

$$\Delta^{\lambda\mu\nu}(a, k_1, k_2) = \Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) - \frac{\beta}{4\pi^2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} (k_1 - k_2)_\sigma, \quad (1.9)$$

dove  $\beta$  compare nell'espansione del quadrivettore  $a^\mu$  in termini dei momenti esterni  $k_1$  e  $k_2$  come

$$a^\mu = \alpha(k_1 + k_2)^\mu + \beta(k_1 - k_2)^\mu. \quad (1.10)$$

Si osserva pertanto che una riparametrizzazione generica del diagramma porta ad un risultato per questo correlatore tensoriale che dipende dalla scelta di  $\beta$ .

Le IW sul vecchio correlatore assumevano la forma

$$k_{1\mu} \Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = a_1 \varepsilon^{\lambda\nu\tau\sigma} k_{1\tau} k_{2\sigma}, \quad (1.11)$$

$$k_{2\nu} \Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = a_2 \varepsilon^{\lambda\mu\tau\sigma} k_{1\tau} k_{2\sigma}, \quad (1.12)$$

$$q_\lambda \Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = a_3 \varepsilon^{\mu\nu\tau\sigma} k_{1\tau} k_{2\sigma}, \quad (1.13)$$

dove

$$a_1 = a_2 = -\frac{1}{8\pi^2}, \quad (1.14)$$

come ci si aspetta per la simmetria di Bose sui due vertici di tipo  $V$  e

$$a_3 = -\frac{1}{4\pi^2}. \quad (1.15)$$

La somma dei tre coefficienti  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) rappresenta l'anomalia totale ed è una quantità indipendente dallo schema di regolarizzazione

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_n = -\frac{1}{2\pi^2}. \quad (1.16)$$

Le due identità di Ward per le correnti vettoriali sulla funzione a 3 punti riparametrizzata  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(a, k_1, k_2)$  possono essere ripristinate mediante un'opportuna scelta del coefficiente  $\beta$  usando le eq. (1.9,1.11,1.12).

In corrispondenza della scelta  $\beta = -\frac{1}{2}$  si ha infatti

$$k_{1\mu} \Delta^{\lambda\mu\nu}(a, k_1, k_2) = 0, \quad (1.17)$$

$$k_{2\nu} \Delta^{\lambda\mu\nu}(a, k_1, k_2) = 0 \quad (1.18)$$

e quindi  $a_1 = a_2 = 0$  da cui segue per l'eq.(1.16) che

$$a_3 = -\frac{1}{2\pi^2}; \quad (1.19)$$

l'anomalia totale è quindi solo sul vertice assiale e la corrispondente IW risulta

$$q_\lambda \Delta^{\lambda\mu\nu}(a, k_1, k_2) = -\frac{1}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\tau\sigma} k_{1\tau} k_{2\sigma}. \quad (1.20)$$

Dall'eq.(1.9) notiamo che l'ampiezza  $\langle 0|T J_5^\lambda(0) J^\mu(x_1) J^\nu(x_2)|0 \rangle$  non è definita dalle sole regole di Feynman, in quanto la dipendenza del risultato dalla specifica scelta del momento che corre nel loop è esplicita. Una condizione addizionale sul correlatore è necessaria al fine di eliminare ogni sua possibile ambiguità; la richiesta di conservazione delle correnti vettoriali per esempio fissa la distribuzione dell'anomalia totale sui 3 vertici per un'opportuna scelta del parametro  $\beta$ . Non esiste però

un valore di  $\beta$  tale da soddisfare contemporaneamente le identità di Ward per le correnti assiali e vettoriali. Dalla scelta  $\beta = -\frac{1}{2}$ , come abbiamo visto, segue infatti la conservazione delle due correnti vettoriali, ma non la conservazione della corrente assiale. In questo caso dunque a livello quantistico ad un loop, anche in presenza di un fermione di massa nulla nel correlatore, siamo in presenza di anomalia chirale. Il diagramma responsabile della rottura di questa simmetria è l'oggetto di studio della prima parte di questo lavoro di tesi, a partire dalla sua parametrizzazione più generale e meglio conosciuta, dovuta a Rosenberg [3] e introdotta nell'ambito dello studio delle interazioni elettromagnetiche coinvolte in un processo di diffusione di neutrini da nuclei.

L'ampiezza  $\Delta_{\lambda\mu\nu}$  per un singolo triangolo di tipo  $AVV$  con una corrente di tipo assiale e due di tipo vettoriale, indicata con  $\overline{\Delta}_{\lambda\mu\nu}^{(AVV)}$ , è espressa in [3] come la somma di sei strutture tensoriali ben definite moltiplicate per coefficienti  $\hat{a}_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  chiamati *ampiezze invarianti* o *fattori di forma*

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_{\lambda\mu\nu} = & \hat{a}_1 \varepsilon[k_1, \mu, \nu, \lambda] + \hat{a}_2 \varepsilon[k_2, \mu, \nu, \lambda] + \hat{a}_3 \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] k_{1\nu} \\ & + \hat{a}_4 \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] k_{2\nu} + \hat{a}_5 \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] k_{1\mu} + \hat{a}_6 \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] k_{2\mu}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

con  $\mu$  e  $\nu$  indici di correnti vettoriali e  $\lambda$  di corrente assiale<sup>1</sup>. L'analisi dimensionale dell'espressione precedente mostra che i due fattori di forma  $\hat{a}_1$  ed  $\hat{a}_2$  sono divergenti poiché di dimensione 1, mentre i restanti quattro  $\hat{a}_i$  con  $i = 3, \dots, 6$  hanno dimensione negativa e pertanto sono finiti; queste considerazioni seguono dal fatto che l'ampiezza totale  $\overline{\Delta}_{\lambda\mu\nu}$  ha dimensione pari a 2. In questo caso l'ambiguità del correlatore è contenuta nelle due ampiezze divergenti e la richiesta di avere correnti vettoriali conservate si traduce nell'imposizione di una relazione che riesprime i due fattori di forma divergenti in termini degli altri due, in modo che l'ampiezza totale risulti convergente e ben definita.

La parametrizzazione relativa alla somma del diagramma diretto e del diagramma

---

<sup>1</sup>Usiamo la notazione  $\varepsilon[a, b, \mu, \nu] \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} a^\alpha b^\beta$ .

scambiato è data da

$$\begin{aligned}
\Delta_{\underline{\lambda}\mu\nu} + \Delta_{\underline{\lambda}\nu\mu} &= (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)\epsilon[k_1, \mu, \nu, \lambda] + (\hat{a}_2 - \hat{a}_1)\epsilon[k_2, \mu, \nu, \lambda] \\
&+ (\hat{a}_3 - \hat{a}_6)\epsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda]k_1\nu + (\hat{a}_4 - \hat{a}_5)\epsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda]k_2\nu \\
&+ (\hat{a}_5 - \hat{a}_4)\epsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]k_1\mu + (\hat{a}_6 - \hat{a}_3)\epsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]k_2\mu \\
&= \underline{a}_1\epsilon[k_1, \mu, \nu, \lambda] + \underline{a}_2\epsilon[k_2, \mu, \nu, \lambda] + \underline{a}_3\epsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda]k_1\nu \\
&+ \underline{a}_4\epsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda]k_2\nu + \underline{a}_5\epsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]k_1\mu + \underline{a}_6\epsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]k_2\mu,
\end{aligned} \tag{1.22}$$

dove  $\underline{\lambda}$  indica l'indice con corrente assiale e valgono le relazioni  $\underline{a}_2(k_1, k_2) = -\underline{a}_1(k_2, k_1)$ ,  $\underline{a}_3(k_1, k_2) = -\underline{a}_6(k_2, k_1)$ ,  $\underline{a}_4(k_1, k_2) = -\underline{a}_5(k_2, k_1)$ . I termini di CS sono i due contributi lineari nei momenti esterni  $k_1$  e  $k_2$ . Nel lavoro di Rosenberg i primi due termini nell'eq.(1.22) sono riespressi in funzione dei restanti quattro, richiedendo la conservazione delle correnti vettoriali; noi assumeremo soltanto che la distribuzione dell'anomalia fra i tre vertici presenti in tutti i diagrammi anomali della teoria sia consistente con la simmetria di Bose.

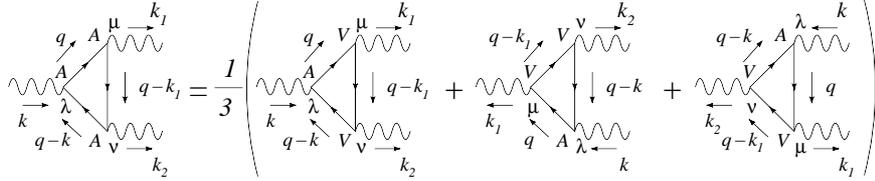


Figura 1.2: Distribuzione dell'anomalia totale in un diagramma di tipo AAA con tre correnti di tipo assiale. Un diagramma AAA si esprime come somma di tre contributi di tipo AVV richiedendo che l'anomalia sia distribuita tra i tre vertici secondo la simmetria di Bose.

La regolarizzazione di un diagramma AAA con tre correnti di tipo assiale rispetta la simmetria di Bose richiedendo che l'anomalia totale  $a_n$  sia egualmente distribuita tra i tre vertici, cioè

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{a_n}{3}. \tag{1.23}$$

La decomposizione del diagramma AAA mostrata in Fig.1.2 è descritta dall'espressione simmetrica

$$\Delta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{1}{3}[\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + \Delta^{\mu\nu\lambda}(k_2, -k) + \Delta^{\nu\lambda\mu}(-k, k_1)], \tag{1.24}$$

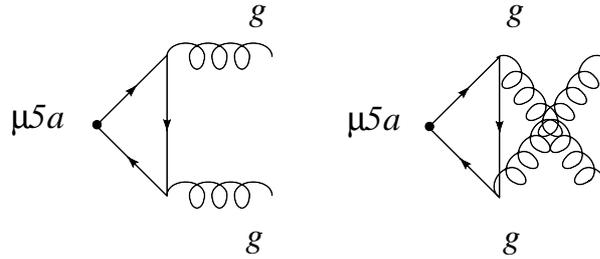


Figura 1.3: Diagrammi che contribuiscono all'anomalia assiale per una corrente chirale di QCD

in cui per convenzione i momenti uscenti sono di segno positivo e quelli entranti di segno negativo. Questo tipo di parametrizzazione simmetrica è indipendente dallo shift del momento interno. Si ha infatti

$$\Delta_3^{\lambda\mu\nu}(\beta, k_1, k_2) = \Delta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \quad (1.25)$$

Ovviamente c'è da chiedersi quale sia la formulazione operatoriale delle IW scritte sopra. Si può dimostrare in modo diretto che nel caso più semplice in cui  $a_3 = a_n$  ed  $a_1 = a_2 = 0$  l'equazione operatoriale soddisfatta dalla corrente anomala diventa

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} , \quad (1.26)$$

dove abbiamo rimosso le costanti di accoppiamento delle tre correnti, qui considerate unitarie. Se reinserissimo tutte le costanti si osserverebbe che, ovviamente, un contributo anomalo è proporzionale alle costanti di accoppiamento delle tre correnti, quindi sarebbe cubico in queste. Un'altra osservazione importante è che questo correlatore (e non solo l'anomalia) non prende correzioni radiative. Mentre l'assenza di correzioni radiative è un fatto noto da tempo ed al quale ci si riferisce come al *teorema di Adler-Bardeen*, la prova che tutto il correlatore non venga corretto radiativamente è recente e si basa su alcune considerazioni di Vainshtein [4], corroborate da uno studio perturbativo da parte di Jegerlehner e Tarasov [5].

## 1.2 Anomalie in teorie non abeliane

La prima correzione alle leggi di conservazione delle correnti assiali è dovuta in QCD all'accoppiamento dei campi fermionici di massa nulla ai campi gluonici, mediante diagrammi a triangolo come mostrato in Fig.1.3. La modifica da apportare all'anomalia di Adler-Bell-Jackiw in eq.(1.26) riguarda la costante di accoppiamento e

la natura non abeliana dell'interazione. La carica elettrica  $e$  considerata in QED diventa la carica  $g$  di  $SU(3)$ , la field strength abeliana del campo elettromagnetico è sostituita dalla field strength non abeliana completa dei termini non lineari e un appropriato fattore contenente le tracce dei generatori dei gruppi coinvolti deve essere incluso. Con riferimento alla Fig(1.3) notiamo che nel vertice con accoppiamento di tipo assiale può comparire soltanto un bosone di gauge del gruppo  $SU(2)$ , in quanto i gluoni hanno solo accoppiamenti con correnti vettoriali.

Per il tripletto di isospin di correnti assiali l'anomalia di Adler-Bell-Jackiw è

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\sigma}^c \text{Tr}[\tau^a t^b t^c], \quad (1.27)$$

con  $F_{\mu\nu}^b = \partial_\mu G_\nu^b - \partial_\nu G_\mu^b + f^{bac} G_\mu^a G_\nu^c$  field strength non abeliana del campo gluonico  $G$  e  $f^{abc}$  costanti di struttura di  $SU(3)$ ,  $\tau^a$  matrice di isospin,  $t^b$  e  $t^c$  matrici di colore. La traccia si intende su tutti i colori e i sapori dei fermioni nel loop. Il fattore di gruppo

$$\text{Tr}[\tau^a t^b t^c] = \text{Tr}[\tau^a] \text{Tr}[t^b t^c] = 0 \quad (1.28)$$

annulla l'anomalia in eq.(1.27) poiché  $\text{Tr}[\tau^a] = 0$  e assicura la conservazione anche a livello quantistico del tripletto di correnti assiali.

Nel caso della corrente assiale di singoletto di isospin la situazione è diversa e l'anomalia rimane. Infatti

$$\text{Tr}[t^b t^c] = \frac{1}{2} n_f \delta^{bc} \quad (1.29)$$

e

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{g^2 n_f}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\lambda\sigma}^b, \quad (1.30)$$

con  $n_f$  numero di sapori (qui  $n_f = 2$ ).

In QCD quindi la simmetria assiale relativa al tripletto di isospin esiste e la sua rottura porta alla comparsa del tripletto di pioni come bosoni di Nambu-Goldstone. La simmetria assiale associata al singoletto di isospin non è presente in QCD e con essa nemmeno un mesone pseudoscalare in singoletto di isospin di massa comparabile a quella dei pioni.

Consideriamo ora il caso in cui i quarks in Fig.1.3 si accoppiano a fotoni nello stato finale invece che a gluoni. L'anomalia elettromagnetica presenta la carica elettrica  $e$ , la field strength abeliana  $F_{\mu\nu}$  e il generatore  $Q$  del gruppo  $U(1)_{em}$  proporzionale all'unità, secondo

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \text{Tr}[\tau^a Q^2]. \quad (1.31)$$

La traccia somma su tutti i sapori e i colori dei fermioni nel loop;  $\tau^a$  e  $Q$  sono indipendenti dal colore, quindi la somma sui colori fornisce un fattore moltiplicativo 3 e la somma sui sapori è non nulla solo per  $a = 3$ .

L'anomalia elettromagnetica è dunque

$$\partial_\mu j^{\mu 5 3} = -\frac{e^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}. \quad (1.32)$$

Lo stato finale con due fotoni è elettricamente neutro quindi per conservazione della carica lo stato iniziale annichilato dalla corrente assiale  $j^{\mu 5 3}$  è un  $\pi^0$  appartenente al tripletto di isospin formato da  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$

### 1.3 Anomalie nel Modello Standard

Finora non sono stati considerati accoppiamenti chirali dei fermioni nel loop ai campi di gauge. Se ci concentriamo su una teoria con fermioni non massivi le due componenti di chiralità definita dello spinore di Dirac  $\psi$  si disaccoppiano in modo naturale, poiché solo i termini di massa mescolano parti L e R.

In questo contesto è possibile assegnare i campi left-handed e right-handed a due diverse rappresentazioni dello stesso gruppo di gauge  $G$ , o, come nel MS, si assegnano i campi left-handed ad una rappresentazione  $r$  di  $G$  e si considerano i campi right-handed invarianti sotto lo stesso  $G$ .

Nella teoria delle interazioni deboli infatti è fondamentale che le componenti L di quarks e leptoni appartengano a doppietti di una simmetria di gauge  $SU(2)$  e che i bosoni di gauge  $W$  siano i campi di gauge che si accoppiano al gruppo  $SU(2)$ . Una teoria chirale che preservi l'invarianza di gauge inoltre non ammette termini di massa presenti esplicitamente nella lagrangiana.

A livello classico non ci sono restrizioni sulla rappresentazione  $r$  di  $G$  cui assegnare i campi left-handed, ma nel considerare le correzioni ad un loop molte delle scelte prima possibili diventano inconsistenti a causa dell'anomalia sulla corrente assiale.

Il calcolo dei diagrammi in Fig.1.4 per una teoria di gauge con fermioni left-handed di massa nulla e bosoni di gauge non abeliani sulle linee esterne conduce alla corrente

$$j^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) t^a \psi. \quad (1.33)$$

I proiettori  $P_L$  presenti anche nei vertici con i bosoni di gauge possono essere spostati per dare un unico fattore con la matrice  $\gamma^5$ .

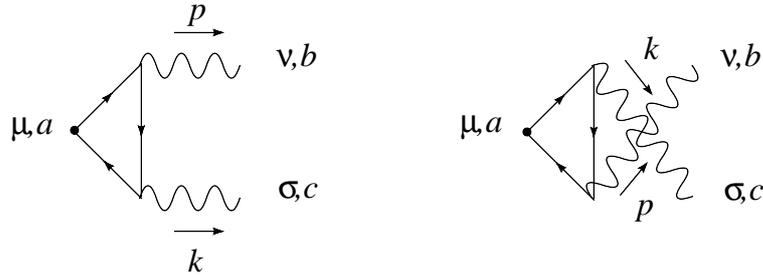


Figura 1.4: Diagrammi che contribuiscono all'anomalia di una corrente associata ad una simmetria di gauge in una teoria chirale

Si verifica che l'ampiezza di transizione fra lo stato di vuoto e lo stato finale con i due bosoni di gauge di impulso  $p$  e  $k$  è

$$\langle p, \nu, b; k, \sigma, c | \partial_\mu j^{\mu a} | 0 \rangle = \frac{g^2}{8\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_\mu k_\lambda \mathcal{A}^{abc}, \quad (1.34)$$

con  $\mathcal{A}^{abc}$  traccia sulle matrici del gruppo nella rappresentazione  $r$ , cioè

$$\mathcal{A}^{abc} = \text{Tr}[t_r^a \{t_r^b, t_r^c\}]. \quad (1.35)$$

L'eq.(1.34) mostra che la conservazione della corrente  $j^{\mu a}$  è legata all'annullarsi della quantità  $\mathcal{A}^{abc}$ . La violazione della conservazione di  $j^{\mu a}$  intacca la rinormalizzabilità della teoria, poiché la richiesta di invarianza di gauge locale si basa sull'esistenza di una simmetria globale esatta.

L'imposizione  $\mathcal{A}^{abc} = 0$  rende consistente una teoria di gauge chirale.

Illustriamo ora la cancellazione delle anomalie nel settore elettrodebole del MS. I bosoni di gauge si accoppiano con correnti assiali e vettoriali; possiamo disegnare diagrammi a triangolo con tre bosoni di gauge fra  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z$  e  $\gamma$  sulle linee esterne. Ciascun diagramma con una corrente assiale ( $A$ ) e due correnti vettoriali ( $V$ ) (indicato nel seguito come triangolo AVV) genera una rottura della simmetria di gauge a livello quantistico. Tuttavia la teoria non perde di significato se invece di considerare il contributo del singolo diagramma di Feynman, consideriamo la somma di tutti i possibili contributi.

L'anomalia generata dalla somma di tutti i diagrammi a triangolo che connettono tre bosoni di gauge  $G^a$ ,  $G^b$  e  $G^c$  in una teoria chirale è proporzionale ad  $\mathcal{A}^{abc}$ , con la traccia che somma su tutti i possibili fermioni left e right che girano nel loop.

Nel caso elettrodebole si ha  $t^a = \sigma^a/2$  per  $SU(2)$  e  $t^a = Q$  per  $U(1)_Y$ . Con tre

bosoni di gauge di  $SU(2)$  sulle linee esterne si ha

$$\mathcal{A}^{abc} = Tr[t^a \{t^b, t^c\}] = \frac{1}{8} Tr[\sigma^a \cdot 2\delta^{bc}] = 0. \quad (1.36)$$

Se i fermioni carichi nel loop si accoppiano a fotoni sulle linee esterne il fattore  $\mathcal{A}^{abc}$  diventa

$$Tr[Q\{\tau^b, \tau^c\}] = \frac{1}{2} Tr[Q] \delta^{bc}, \quad (1.37)$$

con  $Q$  matrice delle cariche elettriche dei fermioni nel loop, cioè

$$\begin{aligned} Tr Q = \sum_i Q_i &= N_C(Q_u + Q_d) + Q_e + Q_\nu \\ &= N_C\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 1 + 0 = 0 \Leftrightarrow N_C = 3. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Abbiamo indicato con  $Q_u$ ,  $Q_d$ ,  $Q_e$  e  $Q_\nu$  le cariche dei quark up, down, dell'elettrone e del neutrino, e abbiamo ottenuto perfetta cancellazione dell'anomalia per un numero di colori  $N_C$  pari a 3; anche le evidenze sperimentali connesse alle interazioni forti convergono verso  $N_C = 3$ .

Notiamo che questo meccanismo di cancellazione guidato dall'assegnazione delle cariche dei fermioni sotto i diversi gruppi di gauge del MS rende la teoria accettabile solo se si considera un'intera generazione di quarks e leptoni.



## Capitolo 2

# Il modello A-B

La teoria affetta da anomalie di gauge richiede come già detto un appropriato meccanismo di cancellazione che la renda consistente. La cancellazione delle anomalie mediante un controtermine di Wess-Zumino è valida nel contesto di una teoria effettiva e quindi non può essere estesa a qualunque scala fisica. Infatti come nota Adler in [6] non esiste un controtermine locale e polinomiale che permetta la cancellazione dell'anomalia per ogni scala fisica. In questo contesto l'uso di un controtermine locale porta alla costruzione di una lagrangiana effettiva invariante di gauge e consistente entro una certa scala di energia. Questa scala è identicabile nelle teorie anomale corrette da tale controtermine attraverso lo studio di una particolare classe di ampiezze che rompono l'unitarietà della teoria nell'ultravioletto, limitando la consistenza del meccanismo di cancellazione a scale appropriate.

Il controtermine di Wess Zumino è infatti un operatore di dimensione 5 soppresso da una scala  $M$ , quindi la consistenza dell'intera teoria in presenza di quest'interazione rimane limitata in regioni cinematiche con  $E < M$ ; per energie maggiori si ha violazione di unitarietà della teoria.

Ovviamente in una teoria completa ci si aspetta di disporre di un meccanismo di cancellazione delle anomalie valido su qualunque scala; questa richiesta porta ad un completamento non-locale della teoria che, sostanzialmente, elimina i poli anomali che saranno messi in evidenza nell'ambito dello studio di una teoria anomala e della sua azione effettiva off-shell.

Il problema della cancellazione dei poli sarà affrontato nella parte centrale della nostra analisi, quella in cui vengono presentati i risultati originali, mentre in questo capitolo desciveremo un modello effettivo nel quale l'uso di controtermini di Wess Zumino rende gauge invariante una teoria anomala entro un certo range cinematico.

co. Questo serve a chiarire il ruolo dei tre meccanismi fondamentali per eliminare gli effetti indesiderati dell'anomalia. Essi sono 1) il meccanismo di cancellazione (identica) dei vertici anomali mediante opportuna assegnazione di carica (come si realizza nell'ambito del Modello Standard); 2) l'introduzione di controtermini di Wess Zumino per ottenere una teoria effettiva consistente entro una certa scala dinamica; 3) il completamento non-locale della teoria che dovrebbe -queste sono le nostre conclusioni- necessariamente agire sui poli anomali della teoria e rimuoverli mediante una procedura non-locale.

In questo capitolo discuteremo un semplice modello abeliano effettivo qui chiamato *modello A-B* dal nome dei suoi due bosoni di gauge: un bosone di gauge anomalo  $B$  ed uno non anomalo  $A$ . Esso ha lo scopo di illustrare l'esistenza di anomalie e la loro cancellazione tramite un termine di interazione di Wess-Zumino (WZ) con uno stato asintotico detto *assione di Stückelberg*; le sue principali caratteristiche si ritrovano poi anche in modelli più complessi, come per esempio un'estensione completa del Modello Standard.

Il gruppo di simmetria del modello A-B è  $U(1)_A \times U(1)_B$ , dove  $A$  e  $B$  sono i corrispondenti bosoni di gauge abeliani. Il primo si comporta come un fotone poiché ha accoppiamenti vettoriali non anomali e resta di massa nulla in tutte le fasi della teoria; il secondo, invece, è un bosone di gauge massivo con interazioni assiali e anomale. La massa del campo  $B$  è acquisita dall'azione combinata dei meccanismi di Stückelberg e di Higgs in modo da preservare l'invarianza di gauge della lagrangiana.

La lagrangiana che definisce il modello A-B è data da

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yuk} + \mathcal{L}_{St} \quad (2.1)$$

con

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_A^2 - \frac{1}{4}F_B^2 + \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + g_A A_\mu + g_B \gamma^5 B_\mu)\psi, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = |(\partial_\mu + ig_B q_B B_\mu)\phi|^2 - V(\phi), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{Yuk} = -\lambda_1 \bar{\psi}_L \phi \psi_R - \lambda_1 \bar{\psi}_R \phi^* \psi_L, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{St} = \frac{1}{2}(\partial_\mu b + M_1 B_\mu)^2. \quad (2.5)$$

Il termine  $\mathcal{L}_0$  contiene la parte cinetica dei due campi di gauge abeliani, del fermione  $\psi$  e le interazioni tra di essi, delle quali solo l'accoppiamento con  $B$  è anomalo in virtù della corrente assiale. Seguono la lagrangiana del campo di Higgs  $\phi$ , per il quale abbiamo assunto che sia carico solo sotto il gruppo  $U(1)_B$ , e le interazioni di Yukawa  $\mathcal{L}_{Yuk}$  che forniscono dinamicamente massa al fermione e al tempo stesso conservano

l'invarianza di gauge del modello. Infine compare la lagrangiana di Stückelberg che introduce il campo scalare  $b$  e il termine di massa per il bosone  $B$ .

Il meccanismo di Stückelberg permette di dare massa ad un campo di gauge abeliano senza romperne la simmetria a condizione che l'assione  $b$  e  $B$  trasformino nel modo seguente

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \theta \quad (2.6)$$

$$b \rightarrow b' = b - M_1 \theta, \quad (2.7)$$

dove  $\theta$  è il parametro della trasformazione. Inoltre gli altri contributi alla lagrangiana risultano invarianti se si assume che il fermione e il campo di Higgs trasformino sotto variazione di  $U(1)_B$  come

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ig_B \theta \gamma^5} \psi, \quad (2.8)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ig_B q_B \theta} \phi, \quad (2.9)$$

dove  $g_B$  è la costante di accoppiamento relativa al gruppo abeliano  $U(1)_B$  e la carica del campo di Higgs è  $q_B = 2$ . La presenza di due meccanismi di rottura di simmetria, mediati da  $\mathcal{L}_{St}$  e dal potenziale dell'Higgs  $V(\phi)$ , permette di identificare due fasi della teoria: la fase di Stückelberg e quella di Higgs-Stückelberg. Nella prima la simmetria  $U(1)_B$  è già rotta a causa del termine di massa  $M_1$  e la presenza dell'accoppiamento  $\partial_\mu B^\mu$  è una chiara indicazione che l'assione  $b$  è un bosone di Nambu-Goldstone e non un campo fisico. Nella fase di Higgs-Stückelberg, o fase rotta, interviene anche il meccanismo di Higgs che introduce la massa del fermione tramite gli accoppiamenti di Yukawa e un contributo aggiuntivo a quella del campo  $B$ . In quest'ultima situazione l'assione diventa invece uno stato fisico di massa nulla oppure diversa da zero se esso fa parte del potenziale degli scalari.

## 2.1 La fase di Higgs-Stückelberg

In seguito alla rottura spontanea di simmetria il modello A-B evidenzia quindi nuove caratteristiche: lo spettro del modello si arricchisce di una nuova particella fisica, l'assione di Stückelberg o axi-Higgs, e il bosone di gauge anomalo acquisisce un contributo di massa dal valore di aspettazione dell'Higgs sul vuoto. Il potenziale dell'Higgs che interviene nella rottura della simmetria è costruito con un termine di autointerazione quartico

$$V(\phi) = -\lambda \left( |\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad (2.10)$$

dove con  $v$  abbiamo indicato il valore di aspettazione di  $\phi$  sul vuoto.

Espandendo il campo attorno al nuovo minimo

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \phi_1 + i\phi_2) \quad (2.11)$$

e sostituendo l'espressione (2.11) nella lagrangiana del modello possiamo estrarre i contributi quadratici che individuano i termini cinetici e di massa dei campi fisici e dei bosoni di Goldstone. In modo particolare ci limitiamo a studiare  $\mathcal{L}_{Higgs}$  e  $\mathcal{L}_{St}$  dalle quali otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu b)^2 + \frac{1}{2} (M_1^2 + (q_B g_B v)^2) B_\mu B^\mu \\ & - \frac{1}{2} v \sqrt{2\lambda} \phi_1^2 + B_\mu \partial^\mu (M_1 b + v g_B q_B \phi_2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

La presenza dell'ultimo termine, un accoppiamento derivativo tra il bosone di gauge  $B$  e gli scalari  $b$  e  $\phi_2$ , ci suggerisce di riesprimere la lagrangiana in funzione di nuovi campi fisici imponendo che la matrice di massa sia diagonale. Si ottengono le combinazioni lineari

$$\chi_B = \frac{1}{M_B} (-M_1 \phi_2 + q_B g_B v b), \quad (2.13)$$

$$G_B = \frac{1}{M_B} (q_B g_B v \phi_2 + M_1 b) \quad (2.14)$$

che definiscono una particella fisica di massa nulla, l'axi-Higgs  $\chi_B$  e un bosone di Goldstone  $G_B$ .

Il cambiamento di base è ottenuto con l'applicazione della matrice di rotazione  $U$

$$\begin{pmatrix} \chi_B \\ G_B \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \phi_2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_B & \sin \theta_B \\ \sin \theta_B & \cos \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ b \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

parametrizzata dall'unico angolo  $\theta_B = \arccos(M_1/M_B) = \arcsin(q_B g_B v/M_B)$ .

Inoltre invertendo la relazione (2.15) si possono esprimere la parte immaginaria dell'Higgs  $\phi_2$  e l'assione  $b$  come combinazioni lineari dei nuovi campi fisici

$$\phi_2 = -\alpha_2 \chi_B + \alpha_1 G_B = -\frac{M_1}{M_B} \chi_B + \frac{q_B g_B v}{M_B} G_B, \quad (2.16)$$

$$b = \alpha_1 \chi_B + \alpha_2 G_B = \frac{q_B g_B v}{M_B} \chi_B + \frac{M_1}{M_B} G_B. \quad (2.17)$$

Dopo la diagonalizzazione della matrice di massa la lagrangiana (2.12) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_B)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu G_B)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu h_1)^2 + \frac{1}{2} M_B^2 B_\mu B^\mu \\ & - \frac{1}{2} m_1^2 h_1^2 + M_B B^\mu \partial_\mu G_B, \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove abbiamo ridefinito il campo di Higgs come  $h = \phi_1$  ed  $m_1 = v\sqrt{2\lambda}$  è la sua massa. Invece  $M_B$  individua la massa del bosone di gauge  $B$  dopo la rottura spontanea di simmetria. Come abbiamo già discusso essa prende un contributo dal meccanismo di Stückelberg e una correzione dal meccanismo di Higgs, fornendo complessivamente

$$M_B = \sqrt{M_1^2 + (q_B g_B v)^2}. \quad (2.19)$$

Ricordiamo ancora che l'accoppiamento tra il campo di gauge anomalo e il bosone di goldstone  $G_B$  si può eliminare introducendo un opportuno termine di gauge-fixing

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi_B} (\partial_\mu B^\mu - \xi_B M_B G_B)^2. \quad (2.20)$$

Infine riportiamo la lagrangiana di Yukawa nella fase di Higgs-Stückelberg

$$\mathcal{L}_{Yuk} = -m\bar{\psi}\psi - \frac{m}{v}\bar{\psi}\psi h + \frac{m}{v}\frac{M_1}{M_B}i\bar{\psi}\gamma^5\psi\chi_B - m\frac{g_B q_B}{M_B}\bar{\psi}\gamma^5\psi G_B, \quad (2.21)$$

dove compaiono, nell'ordine, il termine di massa del fermione  $m = \frac{\lambda_1 v}{\sqrt{2}}$ , gli accoppiamenti con il campo di Higgs  $h$ , con l'assione fisico  $\chi_B$  e con il bosone di Goldstone  $G_B$ .

Sottolineamo ancora una volta che in questa fase della teoria il campo scalare  $b$  proietta su uno stato fisico  $\chi_B$  di massa nulla. Correzioni di massa all'assione possono essere generate modificando opportunamente la forma del potenziale di Higgs. Una breve descrizione di questa nuova situazione è fornita in App.A dove riportiamo anche la lagrangiana completa nella fase rotta della teoria.

## 2.2 Azione effettiva anomala e interazioni di Wess-Zumino

Il modello che abbiamo appena presentato possiede un'interessante caratteristica: esso è affetto da un'anomalia, ossia l'invarianza dell'azione classica sotto certe trasformazioni di simmetria non sopravvive nella transizione alla teoria quantistica. Le correzioni radiative responsabili dell'anomalia derivano dai diagrammi ad un loop con tre correnti sulle linee esterne, precisamente sono dovute ai correlatori con una o tre correnti assiali che indichiamo rispettivamente con la notazione  $AVV$  ed  $AAA$ . Dato che l'accoppiamento assiale con il fermione coinvolge il solo bosone di gauge  $B$ , ( $A$  ha interazioni puramente vettoriali) è immediato identificare in  $U(1)_B$  il gruppo di simmetria anomalo.

Inoltre i diagrammi a triangolo  $VVV$  e  $AAV$  sono nulli per il teorema di Furry, mentre i correlatori con topologie diverse e con un numero di correnti assiali superiore

a tre risultano ben definiti se l'anomalia totale è distribuita in modo opportuno sulle funzioni a tre punti.

In questo paragrafo introduciamo l'azione effettiva, la sua variazione anomala sotto trasformazioni di gauge  $U(1)_B$  e la lagrangiana di Wess-Zumino necessaria per ripristinare la simmetria. I controtermini adoperati, della forma  $b F \wedge F$ , sono operatori di dimensione cinque che rendono la teoria non rinormalizzabile ma ben definita nell'ambito delle teorie effettive. Faremo vedere come l'azione  $b$  giochi un ruolo fondamentale in questo contesto in quanto la sua proprietà di trasformazione realizza l'invarianza dell'azione quantistica ad un loop.

Infine elaboreremo sulle interazioni di Chern-Simons (CS) e sul loro legame con le diverse parametrizzazioni dei diagrammi a triangolo. Infatti un termine di tipo CS permette di distribuire in modo opportuno l'anomalia totale sui vertici del diagramma realizzando, per esempio, la conservazione della corrente di gauge vettoriale e l'assegnazione di tutta l'anomalia sulla corrente assiale.

La nostra discussione si basa sul formalismo dell'azione effettiva che è il funzionale generatore dei correlatori irriducibili. Questo è particolarmente utile per tenere conto delle correzioni quantistiche ed estrarre agevolmente le identità di Ward anomale.

Consideriamo il contributo anomalo all'azione effettiva fornito dai diagrammi a triangolo AVV e AAA

$$\mathcal{S}_{an} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_3 \quad (2.22)$$

con

$$\mathcal{S}_1 = \int dx dy dz \left( i^3 \frac{g_B g_A^2}{2!} T_{\mathbf{AVV}}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z) B_\lambda(z) A_\mu(x) A_\nu(y) \right) \quad (2.23)$$

$$\mathcal{S}_3 = \int dx dy dz \left( i^3 \frac{g_B^3}{3!} T_{\mathbf{AAA}}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z) B_\lambda(z) B_\mu(x) B_\nu(y) \right). \quad (2.24)$$

I correlatori con una e tre correnti assiali sono rispettivamente

$$T_{\lambda\mu\nu}^{(\mathbf{AVV})}(z, x, y) = \langle 0 | T (J_\lambda^5(z) J_\mu(x) J_\nu(y)) | 0 \rangle, \quad (2.25)$$

$$T_{\lambda\mu\nu}^{(\mathbf{AAA})}(z, x, y) = \langle 0 | T (J_\lambda^5(z) J_\mu^5(x) J_\nu^5(y)) | 0 \rangle \quad (2.26)$$

con  $J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  corrente vettoriale e  $J_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi$  corrente assiale.

Definiamo inoltre i corrispondenti diagrammi nello spazio dei momenti tramite tra-

sformata di Fourier

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta(k - k_1 - k_2) \Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) &= \int dx dy dz e^{ik_1 \cdot x + ik_2 \cdot y - ik \cdot z} T_{(\mathbf{AVV})}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z), \\ (2\pi)^4 \delta(k - k_1 - k_2) \Delta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) &= \int dx dy dz e^{ik_1 \cdot x + ik_2 \cdot y - ik \cdot z} T_{(\mathbf{AAA})}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.27)$$

dove i momenti entranti (uscenti) hanno segno negativo (positivo) nell'esponentiale. Riportiamo le equazioni delle anomalie nello spazio delle configurazioni per le due classi di triangoli

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\mathbf{AVV}}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z) = ia_1(\beta) \epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} (\delta^4(x-z) \delta^4(y-z)), \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} T_{\mathbf{AVV}}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z) = ia_2(\beta) \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\delta^4(x-z) \delta^4(y-z)), \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda} T_{\mathbf{AVV}}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z) = -ia_3(\beta) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} (\delta^4(x-z) \delta^4(y-z)), \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\mathbf{AAA}}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z) = i \frac{a_n}{3} \epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} (\delta^4(x-z) \delta^4(y-z)), \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} T_{\mathbf{AAA}}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z) = i \frac{a_n}{3} \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\delta^4(x-z) \delta^4(y-z)), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda} T_{\mathbf{AAA}}^{\lambda\mu\nu}(x, y, z) = -i \frac{a_n}{3} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} (\delta^4(x-z) \delta^4(y-z)), \quad (2.33)$$

e le variazioni dei contributi anomali dell'azione effettiva sotto trasformazioni di gauge  $U(1)_A$  e  $U(1)_B$

$$\frac{1}{2!} \delta_A \langle T_{\mathbf{AVV}} BAA \rangle = -\frac{1}{2!} a_1(\beta) \frac{2}{4} \langle \theta_A F_B \wedge F_A \rangle, \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{2!} \delta_B \langle T_{\mathbf{AVV}} BAA \rangle = -\frac{1}{2!} a_3(\beta) \frac{1}{4} \langle \theta_B F_A \wedge F_A \rangle, \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{3!} \delta_B \langle T_{\mathbf{AAA}} BBB \rangle = \frac{1}{3!} \frac{a_n}{3} - \frac{3}{4} \langle \theta_B F_B \wedge F_B \rangle. \quad (2.36)$$

I campi  $F$  sono definiti a partire dai potenziali vettori nel modo usuale  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e la notazione compatta  $F \wedge F$  è usata per indicare la contrazione dei due campi con il tensore di Levi-Civita  $F \wedge F = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ . Naturalmente la variazione sotto A coinvolge solo il correlatore  $AVV$ .

La derivazione delle equazioni (2.34), (2.35) e (2.36) è riportata in App.B.

Utilizzando i risultati precedentemente esposti è possibile costruire la variazione complessiva dell'azione effettiva anomala ad un loop

$$\delta_A \mathcal{S}_{an} = -\frac{g_B g_A^2}{2!} a_1(\beta) \frac{2}{4} \langle \theta_A F_B \wedge F_A \rangle, \quad (2.37)$$

$$\delta_B \mathcal{S}_{an} = -\frac{g_B g_A^2}{2!} a_3(\beta) \frac{1}{4} \langle \theta_B F_A \wedge F_A \rangle - \frac{g_B^3}{3!} \frac{a_n}{3} \frac{3}{4} \langle \theta_B F_B \wedge F_B \rangle. \quad (2.38)$$

La richiesta di invarianza sotto trasformazioni di gauge vincola la distribuzione dell'anomalia sui vertici dei diagrammi a triangolo e necessita l'introduzione di opportuni controtermini; in modo particolare dobbiamo soddisfare le relazioni

$$\delta_A \mathcal{S}_{an} = 0, \quad (2.39)$$

$$\delta_B \mathcal{S}_{an} = 0. \quad (2.40)$$

La condizione (2.39) implica necessariamente  $a_1(\beta) = 0$ , impone una particolare parametrizzazione del correlatore AVV, ovvero la richiesta di conservazione della corrente vettoriale sotto trasformazioni di gauge  $U(1)_A$ .

La realizzazione del secondo vincolo in equazione (2.40) invece è completamente diversa poiché

$$a_1(\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3(\beta) = a_n \neq 0, \quad (2.41)$$

che traduce l'impossibilità di avere un triangolo con tutte le correnti vettoriali e assiali prive di anomalie. L'invarianza di gauge sotto il gruppo  $U(1)_B$  può essere ristabilita introducendo degli opportuni controtermini di Wess-Zumino, caratterizzati dalla stessa struttura della (2.38), in cui la variazione dell'assione di Stückelberg  $b$  compensa la variazione dell'azione effettiva anomala a un loop.

La lagrangiana di WZ è della forma

$$\mathcal{L}_{WZ} = \frac{C_{AA}}{M} b F_A \wedge F_A + \frac{C_{BB}}{M} b F_B \wedge F_B \quad (2.42)$$

e la richiesta di invarianza si traduce con l'equazione

$$\delta_B(\mathcal{S}_{an} + \mathcal{S}_{WZ}) = 0. \quad (2.43)$$

Quest'ultima può essere realizzata con una particolare scelta dei coefficienti  $C_{AA}$  e  $C_{BB}$  nella definizione (2.42) e infatti la simmetria di gauge è ripristinata dalle condizioni

$$\frac{C_{AA}}{M} = -\frac{g_B g_A^2}{2} \frac{1}{4} a_n \frac{1}{M_1}, \quad \frac{C_{BB}}{M} = -\frac{g_B^3}{3!} \frac{1}{4} a_n \frac{1}{M_1}. \quad (2.44)$$

Enfatizziamo ancora una volta l'importanza dell'assione  $b$  nella cancellazione della variazione anomala della lagrangiana quantistica e notiamo come questo meccanismo intervenga in concomitanza con la trasformazione di gauge di  $B$ . Invece il bosone di gauge  $A$  non è accompagnato da nessuno scalare poiché la simmetria  $U(1)_A$  rimane esatta in tutte le fasi della teoria.

Discutiamo infine come si modifica la dimostrazione precedente nel caso in cui siano presenti interazioni di Chern-Simons. Fissata una parametrizzazione del diagramma  $AVV$ , ossia, determinati i coefficienti delle anomalie  $a_1(\beta)$ ,  $a_2(\beta)$  e  $a_3(\beta)$ , un'interazione di CS della forma  $BA \wedge F_A$  ridistribuisce in modo diverso l'anomalia totale sui vertici del triangolo. Perciò aggiungere un termine di CS equivale a scegliere una diversa parametrizzazione del diagramma e quindi esso può essere semplicemente assorbito in una ridefinizione del vertice.

Introduciamo nella lagrangiana del modello A-B i controtermini di Wess-Zumino e le interazioni di Chern-Simons

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WZ} + \mathcal{L}_{CS} \quad (2.45)$$

con

$$\mathcal{L}_{CS} = d_1 B^\mu A^\nu F_A^{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv d_1 BA \wedge F_A. \quad (2.46)$$

Per una variazione del campo di gauge  $A$  l'azione effettiva anomala e i controtermini trasformano come

$$\delta_A S = \frac{d_1}{2} \langle \theta_A F_B \wedge F_A \rangle - \frac{g_B g_A^2}{2!} a_1(\beta) \frac{2}{4} \langle \theta_A F_B \wedge F_A \rangle \quad (2.47)$$

e la richiesta di invarianza della teoria,  $\delta_A S = 0$ , fissa univocamente il coefficiente  $d_1$  in funzione dell'anomalia sul vertice vettoriale

$$d_1 = \frac{g_B g_A^2}{2} a_1(\beta). \quad (2.48)$$

La precedente condizione determina il termine di Chern-Simons nella lagrangiana ma, come abbiamo già accennato, equivale a ridefinire il vertice  $AVV$  in modo che la corrente vettoriale sia conservata.

Analogamente la trasformazione di gauge del campo  $B$  induce la variazione

$$\begin{aligned} \delta_B S = & -\frac{d_1}{2} \langle \theta_B F_A \wedge F_A \rangle - \frac{g_B g_A^2}{2!} a_3(\beta) \frac{1}{4} \langle \theta_B F_A \wedge F_A \rangle - \frac{g_B^3}{3!} \frac{a_n}{3} \frac{3}{4} \langle \theta_B F_B \wedge F_B \rangle \\ & - \frac{C_{AA}}{M} M_1 \langle \theta_B F_A \wedge F_A \rangle - \frac{C_{BB}}{M} M_1 \langle \theta_B F_B \wedge F_B \rangle \end{aligned} \quad (2.49)$$

e la particolare scelta

$$\frac{C_{AA}}{M} = \left( -\frac{d_1}{2} - \frac{g_B g_A^2}{2} \frac{1}{4} a_3(\beta) \right) \frac{1}{M_1}, \quad \frac{C_{BB}}{M} = -\frac{g_B^3}{3!} \frac{1}{4} a_n \frac{1}{M_1} \quad (2.50)$$

ripristina l'invarianza di gauge a livello quantistico.

Osserviamo infine che il valore del coefficiente  $C_{AA}$  non è diverso da quello ricavato

nella (2.44) poiché

$$\begin{aligned}\frac{C_{AA}}{M} &= \left( -\frac{d_1}{2} - \frac{g_B g_A^2}{2} \frac{1}{4} a_n \right) \frac{1}{M_1} = -\frac{g_B g_A^2}{2} \frac{1}{4} (2a_1(\beta) + a_3(\beta)) \frac{1}{M_1} \\ &= -\frac{g_B g_A^2}{2} \frac{1}{4} a_n \frac{1}{M_1}.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Concludiamo osservando che i due approcci sono equivalenti, ma risulta più semplice fissare la parametrizzazione del diagramma AVV richiedendo le identità di Ward sui vertici vettoriali, piuttosto che introdurre nuove interazioni nella lagrangiana del modello.

### 2.3 Interazioni di Wess-Zumino nella fase di Higgs-Stückelberg

Come abbiamo discusso nel paragrafo precedente la presenza di un'interazione assiale tra il fermione  $\psi$  e il bosone di gauge  $B$  è responsabile della variazione anomala dell'azione effettiva ed è necessario introdurre opportuni controtermini per compensarla e ripristinare l'invarianza di gauge del modello. La lagrangiana di Wess-Zumino introdotta nell'equazione (2.42) ha realizzato la cancellazione richiesta, ma la nostra analisi ha coinvolto solo l'assione  $b$  nella fase di Stückelberg senza tenere conto dell'azione dell'Higgs.

In seguito alla rottura spontanea di simmetria la massa del campo di gauge  $B$  ha ricevuto un contributo proporzionale al valore di aspettazione sul vuoto dell'Higgs e i campi scalari  $b$  e  $\phi_2$  sono stati ruotati nella base degli autostati fisici. Diagonalizzando la matrice di massa abbiamo individuato le combinazioni lineari (2.17) e (2.16) che definiscono il l'axi-Higgs  $\chi_B$  e il bosone di goldstone  $G_B$ .

Le stesse relazioni possono essere usate per esprimere la lagrangiana di Wess-Zumino nella fase rotta della teoria

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WZ} &= \frac{C_{AA}}{M} \alpha_1 \chi_B F_A \wedge F_A + \frac{C_{AA}}{M} \alpha_2 G_B F_A \wedge F_A \\ &+ \frac{C_{BB}}{M} \alpha_1 \chi_B F_B \wedge F_B + \frac{C_{BB}}{M} \alpha_2 G_B F_B \wedge F_B\end{aligned}\quad (2.52)$$

dove i coefficienti  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  definiscono le proiezioni di  $b$  su  $\chi_B$  e  $G_B$  e sono dati da

$$\alpha_1 = \frac{q_B g_B v}{M_B} \quad \alpha_2 = \frac{M_1}{M_B} \quad (2.53)$$

mentre  $C_{AA}$  e  $C_{BB}$  sono stati già fissati dall'invarianza di gauge e sono riportati nell'equazione (2.44).

Presentiamo in App.C alcune delle regole di Feynman per il modello A-B nella fase di Higgs-Stückelberg necessarie al completamento dell'analisi del modello nella fase ultravioletta.

In questo capitolo è stato presentato un semplice modello anomalo con gruppo di simmetria abeliano  $U(1)_A \times U(1)_B$  e sono state descritte le caratteristiche principali nelle due fasi che lo contraddistinguono: quella di Stückelberg e la fase di Higgs. Successivamente abbiamo analizzato la variazione dell'azione effettiva anomala e i controtermini di Wess-Zumino necessari per ripristinare la simmetria di gauge. La richiesta di invarianza è realizzata da un campo assionico  $b$ . Come abbiamo visto, nella fase di Stückelberg questo campo è un bosone di Nambu-Goldstone, ma in seguito alla rottura spontanea della simmetria una sua componente diventa fisica e descrive uno stato asintotico denominato axi-Higgs.

Il modello è particolarmente significativo poiché riassume le problematiche della rottura di una simmetria locale evitando le complicazioni dei gruppi di gauge non abeliani. Inoltre esso introduce l'assione di gauge, cioè una particella con massa e costante d'accoppiamento tra loro indipendenti generalizzando l'omonimo campo di Peccei-Quinn e presentando un possibile candidato per la materia oscura.



## Capitolo 3

# Il correlatore $AVV$ e l'anomalia chirale

In questo capitolo presentiamo la prima parte relativa ai risultati originali ottenuti nello studio dei correlatori trilineari affetti da anomalie chirali. Avendo chiarito nell'ambito del modello A-B che i diagrammi ad un loop di interesse sono i triangoli  $AVV$  e  $AAA$ , procediamo con il loro calcolo diretto attraverso le regole di Feynman e le tecniche di riduzione tensoriale per gli integrali a un loop. I risultati così ottenuti ci hanno permesso di confrontare due parametrizzazioni esistenti in letteratura e di generalizzare una di queste al caso di un fermione massivo all'interno del loop.

I primi studi del diagramma  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  risalgono infatti al lavoro di Rosenberg [3] riguardo i processi di diffusione di neutrini da nuclei mediati da interazioni trilineari. Nel suo lavoro il calcolo delle sezioni d'urto di interesse è stato condotto utilizzando una forma parametrica per  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  espansa su 6 ampiezze invarianti e altrettante strutture tensoriali. Questi 6 fattori di forma ottenibili numericamente mediante integrazione non sono utili per condurre analisi generali sulle teorie anomale, né a derivare l'azione effettiva offshell, pertanto abbiamo ritenuto opportuno procedere in modo indipendente con un calcolo diretto e in forma analitica per estrapolare dal correlatore tutte le informazioni necessarie al successivo confronto tra il caso chirale e quello conforme.

### 3.1 Parametrizzazione di Rosenberg

Nel seguito di questo capitolo deriveremo la forma analitica dell'ampiezza tensoriale  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  con virtualità dei momenti esterni generiche e ci soffermeremo su alcuni

limiti cinematici rilevanti per le elaborazioni successive; al momento rivediamo le due parametrizzazioni già esistenti.

Come già anticipato, il correlatore triangolare  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  si può esprimere come una somma di sei ampiezze invarianti  $A_1, \dots, A_6$  moltiplicate per altrettante strutture tensoriali. Rosenberg presenta i fattori di forma  $A_i$  in [3] come integrali parametrici facilmente calcolabili solo in pochi casi, per esempio quando i momenti esterni sulle linee vettoriali sono on-shell.

L'ampiezza AVV con linee esterne off-shell è definita come

$$\Delta^{\lambda\mu\nu} = c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\lambda \gamma^5 (\not{q} - \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{q} - \not{k}_1 + m) \gamma^\mu (\not{q} + m) \right] + \text{exch.}, \quad (3.1)$$

dove  $c = (-1)(-ig_A)^2(-ig_B)i^3 = -g_A^2 g_B$  con  $g_A, g_B$  costanti d'accoppiamento dei due bosoni di gauge con i fermioni e  $k = k_1 + k_2$ . Nel seguito sceglieremo per comodità  $g_A = g_B = 1$  e reintrodurremo gli accoppiamenti solo quando sarà strettamente necessario.

Il diagramma (3.1) può essere espanso su una base di sei strutture tensoriali e organizzato nella forma

$$\begin{aligned} \Delta^{\lambda\mu\nu} &= A_1(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, \mu, \nu, \lambda] + A_2(k_1, k_2) \varepsilon[k_2, \mu, \nu, \lambda] \\ &+ A_3(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] k_1^\nu + A_4(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] k_2^\nu \\ &+ A_5(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] k_1^\mu + A_6(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] k_2^\mu. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Gli indici  $\{\mu\nu\}$  individuano le correnti vettoriali mentre  $\lambda$  è l'indice della corrente assiale. La simmetria di Bose per lo scambio  $\{k_1, \mu\} \leftrightarrow \{k_2, \nu\}$  vincola le ampiezze  $A_i$  a soddisfare le relazioni

$$A_2(k_1, k_2) = -A_1(k_2, k_1), \quad (3.3)$$

$$A_6(k_1, k_2) = -A_3(k_2, k_1), \quad (3.4)$$

$$A_4(k_1, k_2) = -A_5(k_2, k_1). \quad (3.5)$$

Dalla semplice analisi dimensionale si evince che le ampiezze  $A_1$  e  $A_2$  sono divergenti, mentre le restanti quattro,  $A_3, \dots, A_6$ , sono finite. Queste ultime, infatti, nella prima formulazione riportata in [3] sono date in forma di integrali parametrici

$$A_3(k_1, k_2) = -A_6(k_2, k_1) = -16\pi^2 I_{11}(k_1, k_2), \quad (3.6)$$

$$A_4(k_1, k_2) = -A_5(k_2, k_1) = 16\pi^2 [I_{20}(k_1, k_2) - I_{10}(k_1, k_2)], \quad (3.7)$$

dove l'integrale  $I_{st}$  è definito dalla relazione

$$I_{st}(k_1, k_2) = \int_0^1 dw \int_0^{1-w} dz \frac{w^s z^t}{z(1-z)k_1^2 + w(1-w)k_2^2 + 2wz(k_1 k_2) - m^2}. \quad (3.8)$$

Invece  $A_1$  e  $A_2$  sono rappresentate da integrali mal definiti e possono essere rese convergenti soltanto imponendo opportune condizioni supplementari. Infatti richiedendo che siano soddisfatte le identità di Ward sulle correnti vettoriali, cioè

$$\begin{aligned} k_{1\mu} \Delta^{\lambda\mu\nu} &= A_2(k_1, k_2) \varepsilon[k_2, k_1, \nu, \lambda] + A_5(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] k_1^2 \\ &+ A_6(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] k_1 \cdot k_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} k_{2\nu} \Delta^{\lambda\mu\nu} &= A_1(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, \mu, k_2, \lambda] + A_3(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] k_1 \cdot k_2 \\ &+ A_4(k_1, k_2) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] k_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

si sposta tutta l'anomalia sul vertice assiale e si ottengono le relazioni definenti per i primi due fattori di forma

$$A_1(k_1, k_2) = k_1 \cdot k_2 A_3(k_1, k_2) + k_2^2 A_4(k_1, k_2) \quad (3.11)$$

$$A_2(k_1, k_2) = k_1^2 A_5(k_1, k_2) + k_1 \cdot k_2 A_6(k_1, k_2); \quad (3.12)$$

esse permettono di riesprimere le ampiezze divergenti in termini di quelle convergenti. In questo modo il vertice  $AVV$  risulta ben definito e soddisfa le identità di Ward

$$k_{1\mu} \Delta^{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (3.13)$$

$$k_{2\nu} \Delta^{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} k_\lambda \Delta^{\lambda\mu\nu} &= (A_1 - A_2) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \\ &= (k_1 \cdot k_2 A_3 + k_2^2 A_4 - k_1^2 A_5 - k_1 \cdot k_2 A_6) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu], \end{aligned} \quad (3.15)$$

dove nell'ultima equazione abbiamo imposto la conservazione delle correnti vettoriali espressa dalle (3.11) e (3.12).

Per derivare il numero minimo di ampiezze invarianti indipendenti è necessario analizzare la struttura tensoriale del diagramma. L'insieme dei tensori che compaiono nell'espansione del correlatore  $AVV$  può essere individuato considerando tutti i possibili tensori di rango tre che si possono costruire saturando i 3 indici di Lorentz del diagramma sul tensore di Levi-Civita  $\varepsilon$  e sui momenti esterni  $k_1$  e  $k_2$ ; in questo modo si perviene alle otto strutture tensoriali elencate nella Tab.3.1.

$\varepsilon[k_1, \lambda, \mu, \nu]$	$\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] k_1^\nu$	$\varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] k_1^\mu$	$\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] k_1^\lambda$
$\varepsilon[k_2, \lambda, \mu, \nu]$	$\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] k_2^\nu$	$\varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] k_2^\mu$	$\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] k_2^\lambda$

Tabella 3.1: Gli otto pseudotensori su cui può essere espansa l'ampiezza  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  relativa ad un diagramma AVV con  $\lambda$  indice assiale,  $\mu, \nu$  indici vettoriali e  $k_1, k_2$  momenti esterni.

Di queste otto strutture solo le sei nelle prime tre colonne compaiono nella parametrizzazione di Rosenberg e inoltre possono essere ridotte a quattro richiedendo la conservazione delle correnti vettoriali. Infatti se imponiamo le identità di Ward vettoriali sulle due linee esterne e fissiamo i coefficienti divergenti del diagramma in termini delle restanti ampiezze finite, le 6 strutture tensoriali iniziali si organizzano in quattro combinazioni lineari indicate con  $\eta_i$  ( $i = 3, \dots, 6$ ) e riportate in Tab.3.2.

$\eta_1$	$\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] k_1^\lambda$
$\eta_2$	$\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] k_2^\lambda$
$\eta_3$	$k_1 \cdot k_2 \varepsilon[k_1, \lambda, \mu, \nu] + k_1^\nu \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda]$
$\eta_4$	$k_2^2 \varepsilon[k_1, \lambda, \mu, \nu] + k_2^\nu \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda]$
$\eta_5$	$k_1^2 \varepsilon[k_2, \lambda, \mu, \nu] + k_1^\mu \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]$
$\eta_6$	$k_1 \cdot k_2 \varepsilon[k_2, \lambda, \mu, \nu] + k_2^\mu \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]$

Tabella 3.2: I sei pseudotensori necessari nell'espansione dell'ampiezza  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  con la conservazione delle correnti vettoriali.

In conclusione possiamo esprimere il generico vertice anomalo AVV usando le equazioni (3.11) e (3.12) nella forma

$$\begin{aligned}
\Delta_{WI}^{\lambda\mu\nu} &= A_3(k_1 \cdot k_2 \varepsilon[k_1, \lambda, \mu, \nu] + k_1^\nu \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda]) + A_4(k_2^2 \varepsilon[k_1, \lambda, \mu, \nu] \\
&+ k_2^\nu \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda]) + A_5(k_1^2 \varepsilon[k_2, \lambda, \mu, \nu] + k_1^\mu \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]) \\
&+ A_6(k_1 \cdot k_2 \varepsilon[k_2, \lambda, \mu, \nu] + k_2^\mu \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]) \\
&= A_3 \eta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + A_4 \eta_4^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + A_5 \eta_5^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + A_6 \eta_6^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

dove il pedice  $WI$  chiarisce che  $\Delta^{\lambda\mu\nu}$  è corredato della condizione aggiuntiva di conservazione delle correnti vettoriali.

I restanti pseudotensori di grado tre in  $k_1$  e  $k_2$ , denotati con  $\eta_1$  e  $\eta_2$  in Tab.3.2

$$\eta_1^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = k_1^\lambda \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu], \quad \eta_2^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = k_2^\lambda \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu], \quad (3.17)$$

non sono presenti nella parametrizzazione di Rosenberg, nonostante appaiano nella parametrizzazione L/T dello stesso diagramma che presenteremo successivamente. La riduzione di questi due tensori sugli altri quattro, usati come base, è ottenuta con le seguenti relazioni di Schouten

$$\begin{aligned} k_1^\lambda \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] &= k_1^\mu \varepsilon[k_1, k_2, \lambda, \nu] - k_1^\nu \varepsilon[k_1, k_2, \lambda, \mu] - k_1^2 \varepsilon[k_2, \lambda, \mu, \nu] \\ &+ k_1 \cdot k_2 \varepsilon[k_1, \lambda, \mu, \nu], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} k_2^\lambda \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] &= k_2^\mu \varepsilon[k_1, k_2, \lambda, \nu] - k_2^\nu \varepsilon[k_1, k_2, \lambda, \mu] - k_1 \cdot k_2 \varepsilon[k_2, \lambda, \mu, \nu] \\ &+ k_2^2 \varepsilon[k_1, \lambda, \mu, \nu], \end{aligned} \quad (3.19)$$

da cui si ricava

$$\eta_1^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = \eta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) - \eta_5^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2), \quad (3.20)$$

$$\eta_2^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = \eta_4^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) - \eta_6^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2). \quad (3.21)$$

In questo modo ogni struttura tensoriale che non compare tra gli elementi della base individuata dai quattro tensori  $\eta_3, \dots, \eta_6$  può essere riespressa come combinazione degli stessi usando opportune identità di Schouten.

## 3.2 Parametrizzazione L/T

Un'altra parametrizzazione della funzione di correlazione a tre punti è quella presentata in [7] nell'ambito dello studio di teoremi di non rinormalizzazione del correlatore  $AVV$  e denominata in questo elaborato con la sigla L/T (Longitudinale/Trasversa). Una delle sue caratteristiche è, appunto, la separazione del contributo longitudinale, il cui coefficiente è vincolato unicamente dall'identità di Ward assiale e da cui è sempre possibile estrarre una struttura polare legata esclusivamente all'anomalia, dal contributo trasverso che non contribuisce all'identità di Ward.

In questa nuova formulazione il vertice  $AVV$ <sup>1</sup> si esprime quindi come

$$W^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ W_L^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) - W_T^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \right], \quad (3.22)$$

<sup>1</sup>A livello diagrammatico  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \equiv W^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$ , quindi i due correlatori rappresentano lo stesso diagramma di Feynman; la diversa notazione evidenzia il tipo di parametrizzazione usata nel contesto.

dove la componente longitudinale è definita dalla relazione

$$W_L^{\lambda\mu\nu} = w_L k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2] \quad (3.23)$$

con  $w_L = -4/s$  nel limite chirale, mentre il contributo trasverso è dato da

$$\begin{aligned} W_T^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) &= w_T^{(+)}(k^2, k_1^2, k_2^2) t^{(+)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \\ &+ w_T^{(-)}(k^2, k_1^2, k_2^2) t^{(-)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \\ &+ \tilde{w}_T^{(-)}(k^2, k_1^2, k_2^2) \tilde{t}^{(-)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

con

$$\begin{aligned} t^{(+)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) &= k_1^\nu \varepsilon[\mu, \lambda, k_1, k_2] - k_2^\mu \varepsilon[\nu, \lambda, k_1, k_2] \\ &- (k_1 \cdot k_2) \varepsilon[\mu, \nu, \lambda, (k_1 - k_2)] + \frac{k_1^2 + k_2^2 - k^2}{k^2} k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$t^{(-)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = \left[ (k_1 - k_2)^\lambda - \frac{k_1^2 - k_2^2}{k^2} k^\lambda \right] \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2], \quad (3.26)$$

$$\tilde{t}^{(-)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = k_1^\nu \varepsilon[\mu, \lambda, k_1, k_2] + k_2^\mu \varepsilon[\nu, \lambda, k_1, k_2] - (k_1 \cdot k_2) \varepsilon[\mu, \nu, \lambda, k]. \quad (3.27)$$

La denominazione dei due contributi è giustificata considerando che

$$k_\lambda W_T^{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (3.28)$$

cioè la parte trasversa è tutta quella che non contribuisce all'anomalia mentre  $k_\lambda W_L^{\lambda\mu\nu} \neq 0$  prende contributi dalla parte puramente anomala in  $1/s$  e dalle correzioni di massa.

Inoltre la simmetria di Bose che caratterizza il diagramma vincola la struttura delle ampiezze invarianti appena definite e impone sulle stesse le seguenti relazioni

$$w_T^{(+)}(k^2, k_1^2, k_2^2) = w_T^{(+)}(k^2, k_2^2, k_1^2), \quad (3.29)$$

$$w_T^{(-)}(k^2, k_1^2, k_2^2) = -w_T^{(-)}(k^2, k_2^2, k_1^2), \quad (3.30)$$

$$\tilde{w}_T^{(-)}(k^2, k_1^2, k_2^2) = -\tilde{w}_T^{(-)}(k^2, k_2^2, k_1^2). \quad (3.31)$$

Nonostante le due rappresentazioni presentate, quella di Rosenberg e quella L/T, risultano molto diverse tra loro per le differenti strutture tensoriali su cui sono espresse le rispettive ampiezze  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  e  $W^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$ , si può dimostrare facilmente la loro equivalenza. Infatti se si usano le identità di Schouten sulla parametrizzazione L/T per eliminare i tensori  $\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] k_1^\lambda$  e  $\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] k_2^\lambda$  e si uguagliano

i coefficienti dei quattro tensori  $\eta_3, \dots, \eta_6$  (nei quali è ora possibile riorganizzare il vertice) si ottiene un sistema lineare la cui soluzione realizza la corrispondenza tra le ampiezze invarianti

$$A_3(k_1, k_2) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ w_L - \tilde{w}_T^{(-)} - \frac{k_1^2 + k_2^2}{(k_1 + k_2)^2} w_T^{(+)} - 2 \frac{k_1 \cdot k_2 - k_2^2}{k^2} w_T^{(-)} \right], \quad (3.32)$$

$$A_4(k_1, k_2) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ w_L + 2 \frac{k_1 \cdot k_2}{k^2} w_T^{(+)} - 2 \frac{k_1 \cdot k_2 + k_2^2}{k^2} w_T^{(-)} \right], \quad (3.33)$$

$$A_5(k_1, k_2) = -A_4(k_2, k_1), \quad (3.34)$$

$$A_6(k_1, k_2) = -A_3(k_2, k_1), \quad (3.35)$$

dove le dipendenze dai momenti omesse risultano  $w \equiv w(k^2, k_1^2, k_2^2)$  sia per la parte L che per quella T, e viceversa

$$\begin{aligned} w_L(k^2, k_1^2, k_2^2) &= \frac{8\pi^2}{k^2} [A_1 - A_2] \\ &= \frac{8\pi^2}{k^2} [(A_3 - A_6)k_1 \cdot k_2 + A_4 k_2^2 - A_5 k_1^2], \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$w_T^{(+)}(k^2, k_1^2, k_2^2) = -4\pi^2 (A_3 - A_4 + A_5 - A_6), \quad (3.37)$$

$$w_T^{(-)}(k^2, k_1^2, k_2^2) = 4\pi^2 (A_4 + A_5), \quad (3.38)$$

$$\tilde{w}_T^{(-)}(k^2, k_1^2, k_2^2) = -4\pi^2 (A_3 + A_4 + A_5 + A_6), \quad (3.39)$$

dove  $A_i \equiv A_i(k_1, k_2)$ . Le relazioni ottenute in questa corrispondenza sono generiche e valgono sia nel caso massivo che in quello in cui il fermione del correlatore ha massa zero. Questo ci ha permesso di generalizzare la parametrizzazione L/T al caso massivo, partendo dalla forma esplicita dei coefficienti  $A_i$  derivanti dal nostro calcolo diretto e ottenendo i nuovi  $w \equiv w(k^2, k_1^2, k_2^2, m)$  da (3.36-3.39).

È importante sottolineare che nella parte longitudinale  $w_L$  della rappresentazione L/T sembra comparire esplicitamente un polo di massa nulla in *ogni* configurazione cinematica, piuttosto che solo nel particolare limite in cui i fotoni sono on-shell e la massa del fermione che circola nel loop è nulla [2]; una seconda osservazione concerne la presenza di un'altra singolarità polare nella strutture tensoriali trasverse in eq.(3.25) e (3.26). Poiché nessuno di questi poli è chiaramente identificabile nella rappresentazione di Rosenberg, il comportamento  $1/k^2$  per  $k^2 \rightarrow 0$  dell'intera ampiezza deve essere esaminato con accuratezza, tenendo conto delle forme esplicite dei tensori, poiché le singolarità nella componente longitudinale e in quelle trasverse potrebbero compensarsi mutualmente.

La situazione è infatti quella appena descritta: l'intero vertice  $AVV$  esibisce una struttura polare per  $k^2 \rightarrow 0$  solo con linee esterne on-shell a massa nulla  $k_1^2 = k_2^2 =$

0 e un fermione privo di massa nel loop,  $m = 0$ ; in tutte le altre configurazioni le diverse singolarità cinematiche subiscono una riorganizzazione tale da rendere l'intero diagramma non polare in  $1/k^2$ . L'ambiguità che consiste nella presenza di un polo visibile nella parametrizzazione L/T e non in quella di Rosenberg è dovuta alle diverse strutture tensoriali scelte nelle due espansioni e può essere eliminata utilizzando le relazioni di Schouten che legano le due diverse basi pseudotensoriali.

### 3.3 Espressioni esplicite del diagramma AVV

In questo paragrafo presentiamo la forma esplicita delle ampiezze invarianti  $A_i$  che definiscono il vertice triangolare  $\Delta^{\lambda\mu\nu}$  in equazione (3.1). I nostri risultati sono stati ottenuti calcolando direttamente l'intero vertice AVV in regolarizzazione dimensionale. Inoltre l'integrale parametrico  $I_{11}$  e la combinazione  $I_{20} - I_{10}$  nelle equazioni (3.6) e (3.7), definiti nell'articolo originale di Rosenberg, possono essere identificati banalmente alla fine del calcolo.

Gli integrali tensoriali che emergono dopo aver sviluppato la traccia nella (3.1) sono espansi su una base di funzioni scalari usando la riduzione tensoriale e dopo si identificano le  $A_i$  individuando il coefficiente della corrispondente struttura tensoriale.

#### 3.3.1 Fermione di massa nulla

Presentiamo i risultati ottenuti per i fattori di forma  $A_i$  nel caso in cui il fermione che circola nel loop sia di massa nulla. Questi sono espressi in termini di funzioni elementari ad eccezione della  $\Phi(x, y)$  che è legata al triangolo scalare  $C_0$ , uno dei due integrali scalari della decomposizione. Per virtualità generiche delle linee esterne otteniamo

$$A_1(s, s_1, s_2) = -\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{8\pi^2\sigma} \left\{ s_1 (s_2 - s_{12}) \log \left[ \frac{s_1}{s} \right] - s_2 (s_1 - s_{12}) \log \left[ \frac{s_2}{s} \right] + \Phi \left( \frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s} \right) \frac{s_1 s_2 (s_2 - s_1)}{s} \right\}, \quad (3.40)$$

$$A_3(s, s_1, s_2) = \frac{1}{8\pi^2 s \sigma^2} \left\{ -s_1 s_2 [4s_{12}^2 + 3(s_1 + s_2) s_{12} + 2s_1 s_2] \Phi \left( \frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s} \right) - 2s s_{12} \sigma - s s_1 [2s_1 s_2 + s_{12} (3s_2 + s_{12})] \log \left[ \frac{s_1}{s} \right] - s s_2 [s_{12}^2 + s_1 (2s_2 + 3s_{12})] \log \left[ \frac{s_2}{s} \right] \right\}, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
A_4(s, s_1, s_2) = & \frac{1}{8\pi^2 s \sigma^2} \left\{ 2s s_1 \sigma + s_1 [4s_{12}^3 + 2(s_1 + 2s_2) s_{12}^2 + 2s_1 s_2 s_{12} \right. \\
& + s_1 (s_1 - s_2) s_2] \Phi\left(\frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s}\right) + s (s_1 + s_{12}) (2s_{12}^2 + s_1 s_2) \log\left[\frac{s_2}{s}\right] \\
& \left. + s s_1 [4s_{12}^2 - s_1 (s_2 - 3s_{12})] \log\left[\frac{s_1}{s}\right] \right\}, \quad (3.42)
\end{aligned}$$

con le restanti ampiezze invarianti legate alle precedenti dalla simmetria di Bose

$$A_2(s, s_1, s_2) = -A_1(s, s_2, s_1), \quad (3.43)$$

$$A_5(s, s_1, s_2) = -A_4(s, s_2, s_1), \quad (3.44)$$

$$A_6(s, s_1, s_2) = -A_3(s, s_2, s_1). \quad (3.45)$$

Sono state usate le seguenti convenzioni:  $s = k^2 = (k_1 + k_2)^2$ ,  $s_1 = k_1^2$ ,  $s_2 = k_2^2$ ,  $s_{12} = k_1 \cdot k_2$ ,  $\sigma = s_{12}^2 - s_1 s_2$ .

La funzione  $\Phi(x, y)$  è definita in [8]

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y) = & \frac{1}{\lambda} \left\{ 2[Li_2(-\rho x) + Li_2(-\rho y)] + \ln \frac{y}{x} \ln \frac{1 + \rho y}{1 + \rho x} \right. \\
& \left. + \ln(\rho x) \ln(\rho y) + \frac{\pi^2}{3} \right\}, \quad (3.46)
\end{aligned}$$

con

$$\lambda = \sqrt{\Delta}, \quad (3.47)$$

$$\Delta = (1 - x - y)^2 - 4xy, \quad (3.48)$$

$$\rho = 2(1 - x - y + \lambda)^{-1}, \quad (3.49)$$

in cui compare la funzione speciale dilogaritmo data da

$$Li_2(x) = \int_0^x dt \frac{\log(1-t)}{t} \quad x \leq 1. \quad (3.50)$$

La funzione  $\Phi(x, y)$  è legata all'integrale scalare a tre punti  $C_0(s, s_1, s_2)$  che compare nella riduzione tensoriale degli integrali con tre denominatori

$$C_0(s, s_1, s_2) = \frac{1}{s} \Phi\left(\frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s}\right). \quad (3.51)$$

Ogni termine nella funzione  $\Phi(x, y)$  e i logaritmi nelle ampiezze invarianti  $A_i$  sono reali solo se una delle seguenti condizioni è soddisfatta. Se i quadrivettori  $k$ ,  $k_1$  e  $k_2$  sono di tipo spazio

$$\bullet \quad s, s_1, s_2 < 0 \quad \text{e} \quad s < -(\sqrt{-s_1} + \sqrt{-s_2})^2$$

oppure, se gli invarianti cinematici sono positivi

$$\bullet \quad s, s_1, s_2 > 0 \quad \text{e} \quad s > (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2.$$

Nelle altre regioni le funzioni devono essere continuate analiticamente aggiungendo agli invarianti una parte immaginaria infinitesima  $\eta$  ( $\eta > 0$ ) secondo la prescrizione  $s_i \rightarrow s_i + i\eta$ . In modo particolare restringiamo l'argomento delle funzioni elementari sul primo foglio di Riemann e la fase delle variabili complesse nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$  in modo che il taglio sia situato sull'asse reale negativo. Con queste convenzioni la fase  $\theta = \pi$  ( $\theta = -\pi$ ) corrisponde ad un punto del piano complesso situato sopra (sotto) il taglio. Le continuazioni analitiche usate nell'elaborato sono

$$\log[-x \pm i\eta] = \log x \pm i\pi \quad x > 0, \quad (3.52)$$

$$Li_2(x \pm i\eta) = -Li_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \log^2 x + \frac{\pi^2}{3} \pm i\pi \log x \quad x > 1. \quad (3.53)$$

La scelta tra i due segni che compaiono nelle equazioni (3.52) e (3.53) è legata al segno della parte immaginaria dell'argomento della funzione dopo averla espansa in serie di  $\eta$  nel punto  $\eta = 0$ .

La correttezza dei risultati per le ampiezze invarianti  $A_i$  nelle equazioni (3.40 - 3.42) è stata verificata numericamente in configurazioni cinematiche generali utilizzando gli integrali parametrici di Rosenberg (3.6) e (3.7).

### 3.3.2 Fermione massivo

Nel caso in cui il fermione del modello ha massa diversa da zero le differenze con la situazione precedente si ripercuotono solo nella definizione delle ampiezze invarianti poiché la decomposizione in strutture tensoriali (3.2) del diagramma AVV è indipendente dalla massa del fermione. In questo caso intervengono nella riduzione tensoriale integrali scalari massivi a due e a tre punti, rispettivamente la self-energia scalare  $B_0$  e il triangolo  $C_0$ . Per le nuove ampiezze invarianti massive ricaviamo i seguenti risultati

$$A_1(s, s_1, s_2, m^2) = -\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{8\pi^2\sigma} \left\{ [s_1 s_2 (s_2 - s_1) - 4\sigma m^2] C_0(s_1, s_2, s, m^2) + s_1 (s_2 - s_{12}) D_1(s_1, s, m^2) - s_2 (s_1 - s_{12}) D_2(s_2, s, m^2) \right\}, \quad (3.54)$$

$$A_3(s, s_1, s_2, m^2) = -\frac{s_{12}}{4\pi^2\sigma} - \frac{1}{8\pi^2\sigma^2} \left\{ s_1 [2s_1 s_2 + s_{12} (3s_2 + s_{12})] D_1(s_1, s, m^2) + s_2 [2s_1 s_2 + s_{12} (3s_1 + s_{12})] D_2(s_2, s, m^2) + [4s_{12}\sigma m^2 + s_1 s_2 (4s_{12}^2 + 3(s_1 + s_2) s_{12} + 2s_1 s_2)] C_0(s_1, s_2, s, m^2) \right\}, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
A_5(s, s_1, s_2, m^2) &= -\frac{s_2}{4\pi^2\sigma} - \frac{1}{8\pi^2\sigma^2} \left\{ (s_2 + s_{12}) (2s_{12}^2 + s_1s_2) D_1(s_1, s, m^2) \right. \\
&+ s_2 [s_{12} (3s_2 + 4s_{12}) - s_1s_2] D_2(s_2, s, m^2) \\
&+ [4s_2\sigma m^2 + s_2 (-s_2s_1^2 + (s_2^2 + 2s_{12}s_2 + 4s_{12}^2) s_1 \\
&\left. + 2s_{12}^2 (s_2 + 2s_{12})) \right] C_0(s_1, s_2, s, m^2) \left. \right\}, \tag{3.56}
\end{aligned}$$

con  $s = k^2 = (k_1 + k_2)^2$ ,  $s_1 = k_1^2$ ,  $s_2 = k_2^2$ ,  $s_{12} = k_1 \cdot k_2$ ,  $\sigma = s_{12}^2 - s_1s_2$ . Le restanti ampiezze invarianti sono vincolate dalla simmetria di Bose

$$A_2(s, s_1, s_2, m^2) = -A_1(s, s_2, s_1, m^2), \tag{3.57}$$

$$A_6(s, s_1, s_2, m^2) = -A_3(s, s_2, s_1, m^2), \tag{3.58}$$

$$A_4(s, s_1, s_2, m^2) = -A_5(s, s_2, s_1, m^2). \tag{3.59}$$

La differenza principale tra il triangolo con un fermione massivo e il caso precedente con massa nulla è negli integrali scalari coinvolti nella riduzione tensoriale. Infatti  $D_1$  e  $D_2$  sono definiti come combinazione tra due funzioni scalari massive  $B_0$  a due punti con diversi momenti

$$D_i(s, s_i, m^2) = B_0(s, m^2) - B_0(s_i, m^2) = a_i \log \frac{a_i + 1}{a_i - 1} - a_3 \log \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1}, \tag{3.60}$$

con  $i = 1, 2$ , in cui la dipendenza dallo schema di regolarizzazione è cancellata nella differenza. La funzione scalare a tre punti  $C_0$  è definita come in [9]

$$\begin{aligned}
C_0(s, s_1, s_2, m^2) &= -\frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \sum_{i=1}^3 \left[ Li_2 \frac{b_i - 1}{a_i + b_i} - Li_2 \frac{-b_i - 1}{a_i - b_i} + Li_2 \frac{-b_i + 1}{a_i - b_i} \right. \\
&\left. - Li_2 \frac{b_i + 1}{a_i + b_i} \right], \tag{3.61}
\end{aligned}$$

con

$$a_i = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s_i}}, \quad b_i = \frac{-s_i + s_j + s_k}{2\sqrt{\sigma}}, \tag{3.62}$$

dove  $s_3 = s$  e nell'ultima equazione  $i = 1, 2, 3$  e  $j, k \neq i$ . Un'altra rappresentazione di  $C_0$ , più indicata per l'implementazione numerica, è fornita in [10].

Le regioni in cui queste funzioni non necessitano di continuazione analitica sono state già discusse nel paragrafo 3.3.1.

Se invece si vogliono esprimere i risultati nella rappresentazione L/T è sufficiente sfruttare il sistema di equazioni (3.36) - (3.39) per ricavare le ampiezze invarianti  $w_L$ ,  $w_T^{(+)}$ ,  $w_T^{(-)}$  e  $\tilde{w}_T^{(+)}$  in funzione delle  $A_i$  massive già calcolate. Riportiamo le espressioni esplicite in App.D.

### 3.4 Particolari configurazioni cinematiche

In questa sezione presentiamo le ampiezze invarianti che definiscono il diagramma AVV in particolari configurazioni cinematiche. Inoltre analizziamo il comportamento delle stesse nel limite infrarosso  $k^2 \rightarrow 0$ , partendo dai risultati generali ottenuti nei paragrafi precedenti. Lo studio è stato svolto sia nel limite chirale che con un fermione massivo.

#### 3.4.1 Fermione di massa nulla

La prima analisi coinvolge tre particolari limiti sui fattori di forma  $A_i$  con massa del fermione nulla presentati nel paragrafo 3.3.1 e definiti nelle equazioni (3.40) - (3.42). Nel seguito omettiamo di specificare, per semplicità,  $m = 0$  negli argomenti delle funzioni  $A_i$ .

I limiti specifici che abbiamo studiato sono individuati dalle seguenti condizioni sugli invarianti cinematici

- a)  $s_1 = 0 \quad s_2 \neq 0 \quad s \neq 0 \quad m = 0$
- b)  $s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s \neq 0 \quad m = 0$
- c)  $s_1 = M^2 \quad s_2 = M^2 \quad s \neq 0 \quad m = 0.$

Nel caso *a*) imponiamo che solo un fotone sia on-shell mentre l'altra linea vettoriale non è caratterizzata da nessuna virtualità particolare

- a)  $s_1 = 0 \quad s_2 \neq 0 \quad s \neq 0 \quad m = 0.$

In questa configurazione le ampiezze invarianti assumono una forma molto semplificata

$$A_1(s, 0, s_2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{s_2}{s - s_2} \log \frac{s_2}{s} - 1 \right], \quad (3.63)$$

$$A_2(s, 0, s_2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{s_2}{s - s_2} \log \frac{s_2}{s} + 1 \right], \quad (3.64)$$

$$A_3(s, 0, s_2) = -A_6(0, s_2, s) = -\frac{1}{2\pi^2(s - s_2)} \left[ \frac{s_2}{s - s_2} \log \frac{s_2}{s} + 1 \right], \quad (3.65)$$

$$A_4(s, 0, s_2) = \frac{1}{2\pi^2(s - s_2)} \log \frac{s_2}{s}, \quad (3.66)$$

mentre  $A_5(s, 0, s_2)$  diverge nel limite  $s_1 \rightarrow 0$ . Questo comportamento non è comunque problematico poiché non contribuisce all'ampiezza complessiva in un calcolo

fisico. Infatti il vertice  $\Delta^{\lambda\mu\nu}$  deve essere contratto con il vettore di polarizzazione relativo al fotone on-shell con momento  $k_1^\mu$  e dato che  $A_5$  moltiplica la struttura tensoriale  $\varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda]k_1^\mu$  si avrebbe  $\epsilon_\mu(k_1)k_1^\mu = 0$  per la trasversalità del polarizzatore. In conclusione il contributo di  $A_5$  scompare nel calcolo delle osservabili fisiche. Si verifica immediatamente che le ampiezze soddisfano le identità di Ward (3.11), (3.12) e quindi possono essere organizzate nella forma

$$\begin{aligned}\Delta^{\lambda\mu\nu}(s, 0, s_2) &= A_3(s, 0, s_2)\eta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + A_4(s, 0, s_2)\eta_4^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \\ &+ A_6(s, 0, s_2)\eta_6^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2),\end{aligned}\quad (3.67)$$

dove i tensori  $\eta_i(k_1, k_2)$  sono definiti in Tab.3.2. Inoltre è evidente che le ampiezze non manifestano nessun comportamento polare per  $s \rightarrow 0$  e infatti i residui delle stesse e del vertice complessivo sono nulli

$$\lim_{s \rightarrow 0} s A_3(s, 0, s_2) = \lim_{s \rightarrow 0} s A_4(s, 0, s_2) = \lim_{s \rightarrow 0} s A_6(s, 0, s_2) = 0, \quad (3.68)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Delta^{\lambda\mu\nu}(s, 0, s_2) = 0. \quad (3.69)$$

Invece per i fattori di forma della parametrizzazione L/T otteniamo

$$w_L(s, 0, s_2) = -\frac{4}{s}, \quad (3.70)$$

$$w_T^{(+)}(s, 0, s_2) = \frac{2}{s - s_2} \left[ \frac{s + s_2}{s - s_2} \log \frac{s_2}{s} + 2 \right], \quad (3.71)$$

$$w_T^{(-)}(s, 0, s_2) = -\tilde{w}_T^{(-)}(s, 0, s_2) = \frac{2}{s - s_2} \log \frac{s_2}{s}, \quad (3.72)$$

dove compare il polo in  $s = 0$  nell'ampiezza invariante  $w_L$ . Questo comportamento polare non si manifesta nell'intero diagramma poiché la struttura tensoriale  $t^{(+)}$  è singolare anch'essa nello stesso limite e cancella banalmente il contributo di  $w_L$ . Infatti possiamo calcolare i residui e verificare esplicitamente la sottrazione tra i due termini

$$\lim_{s \rightarrow 0} s w_L(s, 0, s_2) k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2] = -4 k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2], \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} s \left[ w_T^{(+)}(s, 0, s_2) t^{(+)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + w_T^{(-)}(k_1^2, k_2^2, k^2) t^{(-)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \right] \\ = -4 k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2],\end{aligned}\quad (3.74)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{w}_T^{(-)}(s, 0, s_2) \tilde{t}^{(-)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = 0, \quad (3.75)$$

che forniscono in conclusione

$$\lim_{s \rightarrow 0} s W^{\lambda\mu\nu}(s, 0, s_2) = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ W_L^{\lambda\mu\nu} - W_T^{\lambda\mu\nu} \right] = 0, \quad (3.76)$$

in accordo con il risultato già ottenuto nell'eq.(3.69).

Nel caso in cui la configurazione cinematica è definita da un solo fotone su una linea esterna on-shell l'intera ampiezza AVV non presenta nessun comportamento polare per  $s \rightarrow 0$ ; nella parametrizzazione di Rosenberg questo risultato può essere ottenuto direttamente dalle ampiezze invarianti  $A_i$  poiché le strutture tensoriali sono regolari nello stesso limite. Al contrario la medesima analisi sulla parametrizzazione L/T del diagramma coinvolge sia le ampiezze invarianti longitudinale e trasversa che i tensori da queste moltiplicati in modo che, nel limite infrarosso, si ottiene lo stesso risultato in entrambe le parametrizzazioni, ossia l'assenza del polo.

La successiva configurazione cinematica che analizziamo è caratterizzata da entrambi i fotoni on-shell, ossia è individuata dai seguenti valori degli invarianti

$$b) \quad s_1 = s_2 = 0 \quad s \neq 0 \quad m = 0.$$

In questo caso il vertice AVV esibisce una struttura polare in  $s = 0$  individuata per la prima volta da Dolgov e Zakharov in [2] che ci aspettiamo di verificare. I fattori di forma che otteniamo nel limite  $s_1 = s_2 = 0$  sono particolarmente semplici

$$A_1(s, 0, 0) = -A_2(s, 0, 0) = -\frac{1}{4\pi^2}, \quad (3.77)$$

$$A_3(s, 0, 0) = -A_6(s, 0, 0) = -\frac{1}{2\pi^2 s} \quad (3.78)$$

e manifestano immediatamente la simmetria di Bose. Inoltre le ampiezze invarianti  $A_4$  e  $A_5$  non contribuiscono alle osservabili fisiche poiché sono moltiplicate rispettivamente dai quadrivettori  $k_2^\nu$  e  $k_1^\mu$  nel vertice complessivo  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  che, contratti con i vettori di polarizzazione dei fotoni, si annullano per la trasversalità degli stessi.

Il diagramma  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  soddisfa le identità di Ward delle eq.(3.11) e (3.12) che nel caso particolare dei due fotoni on-shell diventano

$$A_1(s, 0, 0) = \frac{s}{2} A_3(s, 0, 0), \quad A_2(s, 0, 0) = \frac{s}{2} A_6(s, 0, 0). \quad (3.79)$$

In questa configurazione l'intero correlatore è definito in termini dei due soli fattori di forma  $A_3$  e  $A_6$

$$\begin{aligned} \Delta^{\lambda\mu\nu}(s, 0, 0) &= A_3(s, 0, 0) \eta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + A_6(s, 0, 0) \eta_6^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 s} \left[ k_2^\mu \varepsilon[k_1, k_2, \nu, \lambda] - k_1^\nu \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \lambda] \right] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \varepsilon[(k_1 - k_2), \lambda, \mu, \nu]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Quest'espressione può essere ridotta nella forma polare di Dolgov e Zakharov dopo aver usato le identità di Schouten nelle equazioni (3.18) e (3.19)

$$\Delta^{\lambda\mu\nu}(s, 0, 0) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{k^\lambda}{s} \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu]. \quad (3.81)$$

Nella parametrizzazione L/T ci aspettiamo lo stesso andamento polare dopo aver sommato entrambi i contributi provenienti dalle strutture tensoriali longitudinale e trasversa. In questo caso i soli coefficienti non nulli sono  $w_L$  e  $w_T^{(+)}$

$$w_L(s, 0, 0) = w_T^{(+)}(s, 0, 0) = -\frac{4}{s}, \quad (3.82)$$

$$w_T^{(-)}(s, 0, 0) = \tilde{w}_T^{(-)}(s, 0, 0) = 0 \quad (3.83)$$

e il residuo deve essere calcolato moltiplicandoli per i loro corrispondenti tensori. È importante osservare che la struttura trasversa  $t_{\lambda\mu\nu}^{(+)}(k_1, k_2)$  è identicamente nulla per  $s_1 = s_2 = 0$  come si può facilmente verificare utilizzando la definizione data in equazione (3.25) e le identità di Schouten (3.18) e (3.19) che nel caso specifico si riducono a

$$k_1^\lambda \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] = -k_1^\nu \varepsilon[k_1, k_2, \lambda, \mu] + \frac{s}{2} \varepsilon[k_1, \lambda, \mu, \nu], \quad (3.84)$$

$$k_2^\lambda \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] = k_2^\mu \varepsilon[k_1, k_2, \lambda, \nu] - \frac{s}{2} \varepsilon[k_2, \lambda, \mu, \nu]. \quad (3.85)$$

In questo modo l'unico contributo al residuo per  $s \rightarrow 0$  proviene dalla parte longitudinale

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s W^{\mu\nu\lambda}(s, 0, 0) &= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{s \rightarrow 0} s W_L^{\lambda\mu\nu} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{s \rightarrow 0} s w_L(s, 0, 0) k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2] \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} k^\lambda \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu]. \end{aligned} \quad (3.86)$$

In conclusione è possibile verificare la struttura polare del diagramma  $AVV$  nella particolare configurazione cinematica con due fotoni on-shell e fermione di massa nulla in entrambe le rappresentazioni ottenendo il semplice risultato

$$\Delta^{\lambda\mu\nu}(s, 0, 0) = W^{\mu\nu\lambda}(s, 0, 0) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{k^\lambda}{s} \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu]. \quad (3.87)$$

Un altro caso interessante è rappresentato da una configurazione simmetrica in cui le particelle esterne sulle linee vettoriali sono bosoni di gauge di massa  $M$ . Questa particolare condizione risulterà utile nei capitoli successivi quando discuteremo il comportamento ad alte energie di alcune ampiezze costruite con il correlatore triangolare  $AVV$ . Quindi analizziamo il limite

$$c) \quad s_1 = s_2 = M^2 \quad s \neq 0 \quad m = 0.$$

In questa configurazione le semplificazioni nelle espressioni complete delle ampiezze  $A_i$  sono minime in quanto nessun invariante cinematico è nullo e l'unica simmetria che può intervenire è quella tra  $s_1$  e  $s_2$ . I fattori di forma sono dati da

$$A_1(s, M^2, M^2) = -\frac{1}{4\pi^2} \quad (3.88)$$

$$A_3(s, M^2, M^2) = -\frac{2M^4}{\pi^2 s^2 (s - 4M^2)^2} \Phi_M(s - M^2) - \frac{1}{2\pi^2 s (s - 4M^2)^2} \left[ s^2 - 6sM^2 + 2(2M^2 + s) \log \left[ \frac{M^2}{s} \right] M^2 + 8M^4 \right] \quad (3.89)$$

$$A_4(s, M^2, M^2) = \frac{M^2}{\pi^2 s^2 (s - 4M^2)^2} \Phi_M(s^2 - 3sM^2 + 2M^4) + \frac{1}{2\pi^2 s (s - 4M^2)^2} \left[ 2sM^2 + (s^2 - 4M^4) \log \left( \frac{M^2}{s} \right) - 8M^4 \right], \quad (3.90)$$

con le funzioni  $\Phi(x, y)$  e  $\lambda(x, y)$  definite in questo particolare limite da

$$\Phi_M \equiv \Phi\left(\frac{M^2}{s}, \frac{M^2}{s}\right) = \frac{1}{\lambda_M} \left[ \log^2(-\Omega) + 4\text{Li}_2(\Omega) + \frac{\pi^2}{3} \right], \quad (3.91)$$

$$\Omega = \frac{2M^2}{2M^2 - s(\lambda_M + 1)} \quad (3.92)$$

$$\lambda_M \equiv \lambda(M^2/s, M^2/s) = \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}}, \quad (3.93)$$

come nelle equazioni (3.46) e (3.47) con  $x = y = M^2/s$ .

La simmetria di Bose e la particolare configurazione cinematica  $s_1 = s_2 = M^2$  vincolano i fattori di forma  $A_i$  a soddisfare le seguenti relazioni

$$A_2(s, M^2, M^2) = -A_1(s, M^2, M^2), \quad (3.94)$$

$$A_5(s, M^2, M^2) = -A_4(s, M^2, M^2), \quad (3.95)$$

$$A_6(s, M^2, M^2) = -A_3(s, M^2, M^2) \quad (3.96)$$

mentre l'ampiezza complessiva assume la forma

$$\Delta^{\lambda\mu\nu}(s, M^2, M^2) = A_3(s, M^2, M^2) \eta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + A_4(s, M^2, M^2) \eta_4^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + A_5(s, M^2, M^2) \eta_5^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + A_6(s, M^2, M^2) \eta_6^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2). \quad (3.97)$$

L'analisi del comportamento del correlatore AVV per  $s \rightarrow 0$  richiede la continuazione analitica della funzione  $\Phi_M$  nella regione fisica  $0 < s < 4M^2$ . In modo particolare

l'argomento della radice quadrata che definisce la funzione  $\lambda_M$  è negativo e, in accordo con la prescrizione  $s \rightarrow s + i\eta$ ,  $M^2 \rightarrow M^2 + i\eta$ , è necessario adoperare la sostituzione

$$\lambda_M = \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \quad \rightarrow \quad i \sqrt{\frac{4M^2}{s} - 1}. \quad (3.98)$$

Gli argomenti del logaritmo e del dilogaritmo nella funzione  $\Phi_M$  diventano delle pure fasi, in particolare  $\Omega = e^{i\theta}$  con

$$\theta = \arctan \left( \frac{s \sqrt{\frac{4M^2}{s} - 1}}{2M^2 - s} \right) \quad (3.99)$$

e le continuazioni analitiche da sfruttare sono

$$\log(-e^{i\theta}) = -i\pi + i\theta, \quad (3.100)$$

$$\text{Li}_2(e^{i\theta}) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\theta^2 - 2\pi|\theta|}{4} + i\text{Cl}_2(\theta) \quad -2\pi \leq \theta \leq 2\pi, \quad (3.101)$$

dove  $\text{Cl}_2$  è la funzione di Clausen data da

$$\text{Cl}_2(\theta) = - \int_0^\theta dt \log \left( 2 \sin \frac{t}{2} \right). \quad (3.102)$$

Per valutare il limite delle ampiezze invarianti per  $s \rightarrow 0$  è conveniente utilizzare una delle espansioni in serie della funzione di Clausen, in particolare poiché  $\theta \rightarrow 0$  usiamo una rappresentazione in serie di potenze di  $\theta$

$$\text{Cl}_2(\theta) = \theta \left( 1 - \log \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \theta^{2n}}{2n(2n+1)(2n)!} \right) \quad -2\pi \leq \theta \leq 2\pi, \quad (3.103)$$

dove  $B_n$  sono i numeri di Bernoulli.

Sostituendo le precedenti espressioni nelle ampiezze invarianti  $A_3(s, M^2, M^2)$  e  $A_4(s, M^2, M^2)$  possiamo infine calcolare il limite cercato. Otteniamo quindi i residui

$$\lim_{s \rightarrow 0} s A_i(s, M^2, M^2) = 0 \quad i = 3, \dots, 6 \quad (3.104)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Delta^{\lambda\mu\nu}(s, M^2, M^2) = 0, \quad (3.105)$$

verificando che in presenza di bosoni di gauge massivi sulle linee esterne vettoriali l'ampiezza triangolare  $\Delta^{\lambda\mu\nu}$  non esibisce alcun comportamento polare per  $s \rightarrow 0$ . Questo risultato può essere confermato da un'analisi parallela basata sulla parame-

trizzazione L/T i cui coefficienti sono

$$w_L(s, M^2, M^2) = -\frac{4}{s}, \quad (3.106)$$

$$w_T^{(+)}(s, M^2, M^2) = \frac{4}{(s - 4M^2)^2} \left[ (s + 2M^2) \log \left[ \frac{M^2}{s} \right] + \frac{2M^2(s - M^2)}{s} \Phi_M \right],$$

$$+ \frac{4}{s - 4M^2} \quad (3.107)$$

$$w_T^{(-)}(s, M^2, M^2) = \tilde{w}_T^{(-)}(s, M^2, M^2) = 0. \quad (3.108)$$

Combinando i fattori di forma con le rispettive strutture tensoriali l'ampiezza completa diventa

$$W^{\lambda\mu\nu}(s, M^2, M^2) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ w_L(s, M^2, M^2) k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2] \right. \\ \left. - w_T^{(+)}(s, M^2, M^2) t^{(+)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) \right] \quad (3.109)$$

ed è possibile valutare il residuo in  $s = 0$  dopo aver sfruttato le continuazioni analitiche già discusse nelle equazioni (3.100) e (3.101). Abbiamo

$$\lim_{s \rightarrow 0} s w_L(s, M^2, M^2) = -4, \quad (3.110)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s w_T^{(+)}(s, M^2, M^2) t^{(+)\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = -4 \quad (3.111)$$

e combinando i due risultati parziali si ottiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} s W^{\lambda\mu\nu}(s, M^2, M^2) = 0, \quad (3.112)$$

cioè la conferma dell'assenza del polo infrarosso nelle due parametrizzazioni.

### 3.4.2 Fermione massivo

Le configurazioni cinematiche analizzate nel paragrafo precedente sono state studiate anche nel caso in cui il fermione che circola nel loop del diagramma AVV sia massivo. I vari limiti, calcolati sulle ampiezze invarianti definite nelle equazioni (3.54) - (3.56), sono elencati di seguito

$$\text{d) } s_1 = 0 \quad s_2 \neq 0 \quad s \neq 0 \quad m \neq 0$$

$$\text{e) } s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s \neq 0 \quad m \neq 0$$

$$\text{f) } s_1 = M^2 \quad s_2 = M^2 \quad s \neq 0 \quad m \neq 0.$$

I risultati ottenuti per i fattori di forma che definiscono il diagramma con fermione massivo presentano un comportamento ben diverso nel limite  $s \rightarrow 0$  rispetto a quelli caratterizzati da  $m = 0$ . Infatti la presenza della massa rimuove il polo in  $s$  in ogni configurazione cinematica, anche in quella in cui i due fotoni sulle linee esterne sono on-shell. Nel seguito presentiamo le ampiezze invarianti per differenti virtualità.

Se richiediamo che un fotone sia reale con

$$d) \quad s_1 = 0 \quad s_2 \neq 0 \quad s \neq 0 \quad m \neq 0$$

le ampiezze invarianti assumono la forma

$$A_1(s, 0, s_2, m^2) = -\frac{1}{4\pi^2} + \frac{s_2}{4\pi^2(s-s_2)} D_2 - \frac{m^2}{2\pi^2} \bar{C}_0, \quad (3.113)$$

$$A_2(s, 0, s_2, m^2) = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{s_2}{4\pi^2(s-s_2)} D_2 + \frac{m^2}{2\pi^2} \bar{C}_0, \quad (3.114)$$

$$A_3(s, 0, s_2, m^2) = -A_6(s, 0, s_2, m^2) = \\ -\frac{1}{2\pi^2(s-s_2)} - \frac{s_2}{2\pi^2(s-s_2)^2} D_2 - \frac{m^2}{\pi^2(s-s_2)} \bar{C}_0, \quad (3.115)$$

$$A_4(s, 0, s_2, m^2) = \frac{1}{2\pi^2(s-s_2)} D_2, \quad (3.116)$$

dove la funzione  $D_2$  è definita in equazione (3.60), mentre  $\bar{D}_1$  e  $\bar{C}_0$  rappresentano il limite di  $D_1$  e  $C_0$  rispettivamente per  $s_1 \rightarrow 0$ , ossia

$$\bar{D}_1 \equiv \lim_{s_1 \rightarrow 0} D_1(s, s_1, m^2) = 2 - a_3 \log \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1}, \quad (3.117)$$

$$\bar{C}_0 \equiv \lim_{s_1 \rightarrow 0} C_0(s, s_1, s_2, m^2) = -\frac{1}{2(s-s_2)} \left[ \log^2 \frac{a_2 + 1}{a_2 - 1} - \log^2 \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right]. \quad (3.118)$$

Il fattore di forma  $A_5(s, 0, s_2, m^2)$  non contribuisce ai calcoli di processi di scattering poiché moltiplica una struttura tensoriale che si annulla quando è contratta con il polarizzatore del fotone.

Anche in questo caso, dopo aver opportunamente sostituito le funzioni scalari con le loro continuazioni analitiche nella regione  $0 < s < 4m^2$  è possibile verificare l'assenza del residuo nel limite  $s \rightarrow 0$ . In modo particolare si sfruttano le relazioni

$$a_3 = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \rightarrow i\sqrt{\frac{4m^2}{s} - 1} \quad 0 < s < 4m^2, \quad (3.119)$$

$$\log \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \rightarrow -2i \arctan \frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{s} - 1}} \quad 0 < s < 4m^2 \quad (3.120)$$

e si dimostra l'assenza del polo infrarosso in  $s = 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Delta^{\lambda\mu\nu}(s, 0, s_2, m^2) = 0. \quad (3.121)$$

I coefficienti della parametrizzazione L/T in questo limite cinematico sono riportati in App. D.

Nel caso in cui il correlatore massivo abbia entrambi i fotoni on-shell sulle linee vettoriali esterne

$$e) \quad s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s \neq 0 \quad m \neq 0$$

le ampiezze invarianti della rappresentazione di Rosenberg si semplificano notevolmente

$$A_1(s, 0, 0, m^2) = -\frac{1}{4\pi^2} \left( 1 + \frac{m^2}{s} \log^2 \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right), \quad (3.122)$$

$$A_3(s, 0, 0, m^2) = -A_6(s, 0, 0, m^2) = -\frac{1}{2\pi^2 s} \left( 1 + \frac{m^2}{s} \log^2 \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right), \quad (3.123)$$

dove  $a_3$  è definita come di consueto

$$a_3 = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}. \quad (3.124)$$

Analogamente al caso  $m = 0$  le strutture tensoriali che definiscono il diagramma si possono riscrivere in una forma più compatta se si utilizzano le identità di Schouten riportate nelle equazioni (3.84) e (3.85) e specializzate al caso  $s_1 = s_2 = 0$ . In questo modo si ottiene per il vertice AVV

$$\Delta^{\lambda\mu\nu}(s, 0, 0, m^2) = A_3(s, 0, 0, m^2) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] k^\lambda. \quad (3.125)$$

Lo stesso risultato può essere ricavato direttamente nella parametrizzazione L/T in cui si trova

$$w_L(s, 0, 0, m^2) = -\frac{4}{s} \left[ 1 + \frac{m^2}{s} \log^2 \left( \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right) \right], \quad (3.126)$$

$$w_T^{(-)}(s, 0, 0, m^2) = \tilde{w}_T^{(-)}(s, 0, 0, m^2) = 0, \quad (3.127)$$

mentre  $w_T^{(+)}(s, 0, 0, m^2)$ , benché sia diverso da zero, non contribuisce all'ampiezza totale in quanto la struttura tensoriale  $t^{(+)\lambda\mu\nu}$  che moltiplica è identicamente nulla come abbiamo già commentato nel paragrafo precedente. Per questo motivo il diagramma AVV è definito univocamente dalla componente longitudinale.

Dall'eq.(3.125) si può già vedere che il correlatore con due linee on-shell e un fermione di massa non nulla non evidenzia il comportamento polare mostrato nel caso del fermione senza massa, quindi banalmente il residuo in  $s = 0$  risulta

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Delta^{\lambda\mu\nu}(s, 0, 0, m^2) = 0. \quad (3.128)$$

La massa del fermione gioca in questo caso il ruolo di regolatore della teoria nel regime infrarosso e il fenomeno di disaccoppiamento del polo è facilmente spiegabile. Il limite qui preso in considerazione,  $s \rightarrow 0$ , o anche  $s/m^2 \rightarrow 0$  poiché  $m$  è finita, equivale al limite  $m \rightarrow \infty$  con  $s$  fissato, se si considera che la teoria dispone soltanto di queste due scale; è intuitivo a questo punto pensare che nel limite di un fermione infinitamente massivo, l'intero diagramma ad un loop responsabile delle correzioni quantistiche non contribuisca nell'infrarosso in quanto l'energia non è sufficiente per risolvere le fluttuazioni.

Il polo a massa nulla di natura pseudoscalare compare quindi solo nella cinematica  $s_1 = s_2 = 0$  con un fermione nel loop di massa zero.

Infine, nel caso in cui entrambe le particelle sulle linee vettoriali siano on-shell con massa  $M$ ,

$$f) \quad s_1 = M^2 \quad s_2 = M^2 \quad s \neq 0 \quad m \neq 0$$

otteniamo le ampiezze invarianti

$$A_1(s, M^2, M^2, m^2) = -\frac{1}{4\pi^2} - \frac{m^2}{2\pi^2} C_M, \quad (3.129)$$

$$A_3(s, M^2, M^2, m^2) = \frac{1}{\pi^2 s (s - 4M^2)} \left[ \frac{1}{2} (2M^2 - s) - \frac{(2M^2 + s) M^2}{s - 4M^2} D_M \right. \\ \left. + \left( \frac{2M^4(M^2 - s)}{s - 4M^2} - m^2(s - 2M^2) \right) C_M \right], \quad (3.130)$$

$$A_4(s, M^2, M^2, m^2) = \frac{1}{\pi^2 s (s - 4M^2)} \left[ M^2 + \frac{s^2 - 4M^4}{2(s - 4M^2)} D_M \right. \\ \left. + \left( \frac{M^2(2M^4 - 3M^2s + s^2)}{s - 4M^2} + 2m^2 M^2 \right) C_M \right]. \quad (3.131)$$

Nelle espressioni precedenti abbiamo indicato con  $C_M$  l'integrale scalare massivo  $C_0(s, s_1, s_2, m^2)$  definito in equazione (3.61) e valutato per  $s_1 = s_2 = M^2$ . Inoltre abbiamo definito

$$D_M(s, M^2, m^2) \equiv B_0(k^2, m^2) - B_0(M^2, m^2) \\ = a_M \log \frac{a_M + 1}{a_M - 1} - a_3 \log \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1}, \quad (3.132)$$

con

$$a_M = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}, \quad a_3 = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}. \quad (3.133)$$

Le espressioni per i coefficienti  $w$  della parametrizzazione L/T sono riportati in App. D.

### 3.5 Azione effettiva

In meccanica classica le equazioni del moto possono essere derivate dal principio di stazionarietà dell'azione. In meccanica quantistica, invece, le ampiezze di tutti i possibili moti del sistema vengono sommate in un ente matematico che è l'integrale funzionale. Ma se l'azione classica  $S_0$  è sostituita dall'azione effettiva  $S_{eff}$  allora possiamo ottenere dallo stesso principio variazionale le equazioni per i valori di aspettazione sul vuoto dei campi quantistici  $\langle \phi \rangle$ . Quindi l'azione effettiva, espansa perturbativamente,

$$S_{eff} = S_0 + \hbar \mathcal{S} + \hbar^2 \mathcal{S}_2 + \dots \quad (3.134)$$

descrive le correzioni quantistiche delle equazioni del moto classiche ad un certo ordine  $\hbar$ .

In applicazioni pratiche, l'azione effettiva può essere pensata come il funzionale generatore dei diagrammi connessi irriducibili ed ha una semplice formulazione perturbativa in termini dell'azione fondamentale  $S_0$  alla quale vengono sommate le funzioni di Green moltiplicate da campi esterni classici. Nel caso di un modello del tipo A-B, descritto nel secondo capitolo, la struttura dell'azione effettiva prende la forma

$$\Gamma[A, B] = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{i^{n_1+n_2}}{n_1!n_2!} \int dx_1 \dots dx_{n_1} dy_1 \dots dy_{n_2} T^{\lambda_1 \dots \lambda_{n_1} \mu_1 \dots \mu_{n_2}}(x_1 \dots x_{n_1}, y_1 \dots y_{n_2}) \\ B^{\lambda_1}(x_1) \dots B^{\lambda_{n_1}}(x_{n_1}) A_{\mu_1}(y_1) \dots A_{\mu_{n_2}}(y_{n_2}), \quad (3.135)$$

rappresentata graficamente in Fig. 3.1. Ogni vertice che compare in questa figura può essere calcolato in teoria perturbativa. Naturalmente, la parte anomala dell'azione effettiva si esaurisce all'inclusione dei diagrammi anomali (i triangoli), con campi esterni  $A$  e  $B$ . Nel caso del modello A-B tali contributi sono dati dai vertici  $AVV$  e  $AAA$ , rispettivamente con uno e tre campi esterni con accoppiamenti assiali.

Sia nel caso di anomalie di gauge che conformi la non località della teoria, ossia la presenza dei poli anomali non è automaticamente evidente in ogni formulazione

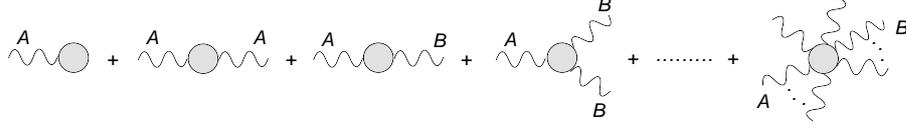


Figura 3.1: Espansione dell'azione effettiva.

dell'azione effettiva. Illustreremo questo punto nel caso dell'anomalia di gauge e lo generalizzeremo all'anomalia conforme.

In questa sezione discuteremo la formulazione dell'azione effettiva, generalizzando quella di Euler-Heisenberg [11] al caso anomalo appunto. La differenza introdotta consiste nell'aggiunta dei termini di gauge trilineari, caratteristici dei modelli anomali, come abbiamo già notato più volte.

Consideriamo per esempio un semplice modello di elettrodinamica assiale con un bosone di gauge  $B$  anomalo la cui lagrangiana è

$$\mathcal{L}_{BBB} \equiv -\frac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 B_\mu\psi \quad (3.136)$$

con  $F_{B\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ . L'azione effettiva di questo modello presenta correlatori trilineari anomali del tipo  $AAA$  in presenza di tre bosoni di gauge identici  $B$ . Il vertice anomalo  $\Delta_{AAA}$  è ottenuto simmetrizzando sui 3 indici di Lorentz il diagramma  $\Delta_{AVV}$  in equazione (3.2) come

$$\Delta_{AAA}^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{3} \left( \Delta_{AVV}^{\lambda\mu\nu} + \Delta_{VAV}^{\lambda\mu\nu} + \Delta_{VVA}^{\lambda\mu\nu} \right), \quad (3.137)$$

dove il triangolo con 3 correnti di tipo assiale è decomposto nella somma di 3 triangoli di tipo  $AVV$ , ciascuno con una sola corrente assiale sull'indice in corrispondenza della  $A$  in basso.

È doveroso sottolineare comunque che un'anomalia di gauge deve essere cancellata per ripristinare la consistenza stessa della teoria mentre ciò non è necessario nel caso conforme. La variazione di gauge dell'azione anomala risulta

$$\delta\Gamma_B = -\frac{e^3 a_n}{24} \int d^4x \theta_B(x) F_B \wedge F_B, \quad (3.138)$$

dove  $\delta B_\mu = \partial_\mu \theta_B$ , e può essere riprodotta dall'azione non locale (con il simbolo  $\langle \rangle$  denotiamo l'integrazione spaziale)

$$\Gamma_{pole} = \frac{e^3}{48\pi^2} \langle \partial B(x) \square^{-1}(x-y) F_B(y) \wedge F_B(y) \rangle, \quad (3.139)$$

che è la soluzione variazionale dell'eq.(3.138). L'azione effettiva espansa in  $1/m$ , dove  $m$  è la massa del fermione di Dirac nel loop, richiede il calcolo dell'espansione dei coefficienti del correlatore triangolare nella forma di Rosenberg

$$A_1(s, 0, 0, m^2) = -A_2(s, 0, 0, m^2) = \frac{s}{48\pi^2} \frac{1}{m^2} + \frac{s^2}{360\pi^2} \frac{1}{m^4} + O\left(\frac{1}{m^6}\right), \quad (3.140)$$

$$A_3(s, 0, 0, m^2) = -A_6(s, 0, 0, m^2) = \frac{1}{24\pi^2} \frac{1}{m^2} + \frac{s}{180\pi^2} \frac{1}{m^4} + O\left(\frac{1}{m^6}\right), \quad (3.141)$$

$$A_4(s, 0, 0, m^2) = -A_5(s, 0, 0, m^2) = \frac{1}{12\pi^2} \frac{1}{m^2} + \frac{s}{120\pi^2} \frac{1}{m^4} + O\left(\frac{1}{m^6}\right). \quad (3.142)$$

Il contributo del vertice anomalo è dato da

$$\Gamma_{AVV}^{(3)} = \int d^4x d^4y d^4z T^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) B_\lambda(z) B_\mu(x) B_\nu(y), \quad (3.143)$$

dove  $T^{\lambda\mu\nu}(z, x, y)$  è il correlatore con linee esterne amputate legato da trasformata di Fourier al correlatore di Rosenberg  $\Delta_{AVV}^{\lambda\mu\nu}(k, k_1, k_2)$  secondo

$$\delta^4(k - k_1 - k_2)(2\pi)^4 \Delta_{AVV}^{\lambda\mu\nu}(k, k_1, k_2) = \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1 \cdot x + ik_2 \cdot y - ik \cdot z} T^{\lambda\mu\nu}(z, x, y), \quad (3.144)$$

dove  $k$  è il momento entrante nel vertice assiale con indice  $\lambda$  e  $k_1, k_2$  sono i momenti uscenti relativi alle correnti vettoriali con indici  $\mu$  e  $\nu$ . A questo punto la forma esplicita dei contributi anomali aggiuntivi si ottiene facilmente utilizzando l'espressione dei fattori di forma in eq. (3.140)-(3.142) e le relazioni in eq. (3.143),(3.144)

$$\begin{aligned} \Gamma_{AVV}^{(3)} &= \frac{1}{48\pi^2 m^2} \epsilon^{\alpha\mu\nu\lambda} (\langle \square B_\lambda \partial_\alpha B_\mu B_\nu \rangle - \langle \square B_\lambda B_\mu \partial_\alpha B_\nu \rangle) \\ &- \frac{1}{360\pi^2 m^4} \epsilon^{\alpha\mu\nu\lambda} (\langle \square^2 B_\lambda \partial_\alpha B_\mu B_\nu \rangle - \langle \square^2 B_\lambda B_\mu \partial_\alpha B_\nu \rangle) \\ &+ \frac{1}{24\pi^2 m^2} (\epsilon^{\alpha\beta\mu\lambda} \langle \partial_\alpha \partial_\nu B_\mu B_\lambda \partial_\beta B^\nu \rangle - \epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda} \langle \partial_\alpha B_\mu B_\lambda \partial_\beta \partial^\mu B_\nu \rangle) \\ &- \frac{1}{180\pi^2 m^4} (\epsilon^{\alpha\beta\mu\lambda} \langle \partial_\alpha \partial_\nu B_\mu \square B_\lambda \partial_\beta B^\nu \rangle - \epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda} \langle \partial_\alpha B_\mu \square B_\lambda \partial_\beta \partial^\mu B_\nu \rangle) \\ &+ \frac{1}{12\pi^2 m^2} (\epsilon^{\alpha\beta\mu\lambda} \langle \partial_\alpha B_\mu \partial_\beta \partial_\nu B^\nu B_\lambda \rangle - \epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda} \langle \partial_\alpha \partial_\mu B^\mu B_\lambda \partial_\beta B_\nu \rangle) \\ &- \frac{1}{120\pi^2 m^4} (\epsilon^{\alpha\beta\mu\lambda} \langle \partial_\alpha B_\mu \partial_\beta \partial_\nu \square B_\lambda \rangle - \epsilon^{\alpha\beta\nu\lambda} \langle \partial_\alpha \partial_\mu B^\mu \square B_\lambda \partial_\beta B_\nu \rangle) \end{aligned} \quad (3.145)$$

L'azione anomala calcolata ora si riferisce ad un correlatore di tipo AVV e può essere espressa all'ordine  $O(p^2/m^4)$  per il correlatore AAA simmettizzando il risultato

precedente sugli indici  $\lambda, \mu$ , e  $\nu$  secondo

$$\Gamma^{(3)} = \frac{1}{3} \left( \Gamma_{AVV}^{(3)} + \Gamma_{VAV}^{(3)} + \Gamma_{VVA}^{(3)} \right), \quad (3.146)$$

come già visto per il correlatore  $AAA$ . Osserviamo che l'espansione in  $1/m$  nasconde i contributi non locali dovuti al polo che sono tuttavia visibili nell'espressione dei fattori di forma  $A_i$  per linee esterne on-shell.

Questi possono essere identificati invece con un'espansione in  $m$  intorno a  $m = 0$  eseguita a partire dall'espressione off-shell del vertice anomalo scritto nella parametrizzazione L/T, cioè

$$W^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{8\pi^2} \left[ W_L^{\lambda\mu\nu} - W_T^{\lambda\mu\nu} \right], \quad (3.147)$$

dove la componente longitudinale è costituita da un contributo polare in  $1/s$  e da un termine che comprende le correzioni di massa

$$W_L^{\lambda\mu\nu} = (w_L - \mathcal{F}(m, s, s_1, s_2)) k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2] \quad (3.148)$$

con  $w_L = -4/s$  e

$$\mathcal{F}(m, s, s_1, s_2) = \frac{8m^2}{s} C_0(s, s_1, s_2, m^2) \quad (3.149)$$

e  $C_0(s, s_1, s_2, m^2)$  definito in eq.(3.61) è l'integrale scalare a 3 punti massivo con generiche virtualità delle linee esterne. I fattori di forma trasversi inclusi in  $W_T^{\lambda\mu\nu}$  sono stati definiti nei paragrafi precedenti e non contribuiscono all'anomalia, che è interamente descritta da  $w_L$ . Nell'azione effettiva si può quindi separare il termine anomalo che rende conto della presenza dei diagrammi  $AAA$  in due parti

$$\Gamma^{(3)} = \Gamma_{pole}^{(3)} + \tilde{\Gamma}^{(3)}, \quad (3.150)$$

dove la parte polare

$$\Gamma_{pole}^{(3)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int d^4x d^4y \partial \cdot B(x) \square_{x,y}^{-1} F \wedge F(y) \quad (3.151)$$

si riferisce al solo contributo anomalo fornito dal polo in  $w_L$ , mentre la restante parte  $\tilde{\Gamma}^{(3)}$  è data da un'espressione non locale molto complicata

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(3)} = & - \int d^4x d^4y d^4z \partial \cdot B(z) F(x) \wedge F(y) \int \frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^8} e^{-ik_1 \cdot (x-z) - ik_2 \cdot (y-z)} \mathcal{F}(m, k, k_1, k_2) \\ & - \int d^4x d^4y d^4z \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^8} d^4k_2 W_T^{\lambda\mu\nu}(k, k_1, k_2, m) B_\lambda(k) B_\mu(k_1) B_\nu(k_2) \end{aligned} \quad (3.152)$$

che tiene conto delle correzioni di massa alla parte longitudinale descritte da  $\mathcal{F}(m, k, k_1, k_2)$  e del contributo delle componenti trasverse presenti in  $W_T^{\lambda\mu\nu}(k, k_1, k_2, m)$ .

Procediamo ora con l'espansione in  $m$  dei due soli fattori di forma che descrivono il correlatore on-shell e precisamente

$$w_L(s, 0, 0, m^2) = -\frac{4}{s} - \frac{4m^2}{s^2} \log\left(-\frac{s}{m^2}\right) + O(m^4), \quad (3.153)$$

$$w_T^{(+)}(s, 0, 0, m^2) = \frac{12}{s} - \frac{4}{s} \log\left(-\frac{s}{m^2}\right) + \frac{4m^2}{s^2} \left[ 2 + \log\left(-\frac{s}{m^2}\right) - \log^2\left(-\frac{s}{m^2}\right) \right] + O(m^4), \quad (3.154)$$

in cui i contributi polari in  $1/s$  sono espliciti. Questa seconda espansione infatti permette di separare chiaramente il termine polare dalle correzioni di massa, diversamente da quanto accadeva nell'espansione in  $1/m$ .

La natura infrarossa di questo polo è stata spesso messa in evidenza, sebbene la sua natura ultravioletta abbia ricevuto poca attenzione. Analizziamo quindi nel prossimo capitolo il ruolo del polo anomalo, ovvero il contributo in  $1/s$  della parte longitudinale, nell'ambito di una certa classe di ampiezze per evidenziare come la sua presenza sia responsabile della rottura di unitarietà, ovvero una crescita eccessiva della sezione d'urto espansa in onde parziali.

### 3.6 Ampiezze BIM

Avendo calcolato esplicitamente il diagramma a triangolo è possibile studiare il comportamento di alcune classi di ampiezze costruite a partire dallo stesso e confrontare modelli in cui l'invarianza di gauge è ripristinata nell'azione effettiva da un controtermine di Wess-Zumino (come nel modello A-B che abbiamo presentato nel capitolo 2) con altri in cui la cancellazione dell'anomalia è ottenuta dalla sottrazione polare sul vertice.

I processi fisici considerati sono quelli che coinvolgono la produzione e il decadimento di bosoni di gauge in ampiezze che chiameremo BIM studiate per la prima volta nel 1972 da Bouchiat, Iliopoulos e Meyer in [12] e realizzate a partire da due correlatori triangolari con lo scambio di un altro bosone di gauge. Una tipica ampiezza BIM è rappresentata in Fig. 3.2.

Dall'attenta analisi di questi elementi di matrice S emerge una crescita eccessiva della sezione d'urto per grandi energie che viola il limite superiore di Froissart e segnala, quindi, una rottura di unitarietà nell'ultravioletto. Faremo vedere inoltre che il comportamento a grandi energie è dettato completamente dal polo anomalo e una sua sottrazione, oltre a ristabilire l'identità di Ward sul vertice assiale, è in grado di correggere il cattivo andamento con il crescere dell'energia.

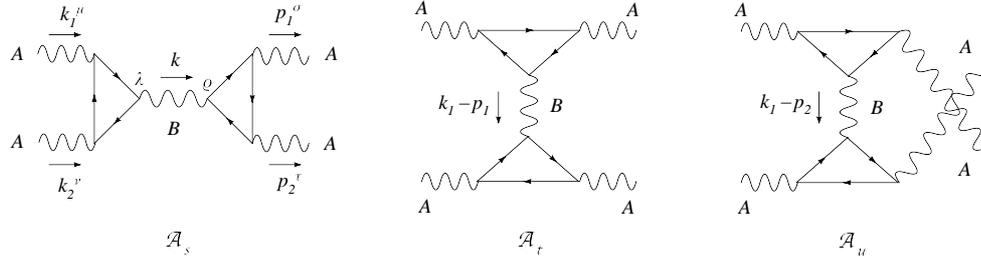


Figura 3.2: Il processo di scattering  $AA \rightarrow AA$  mediato da un'ampiezza BIM nei tre canali indicati dai pedici  $s, t, u$ . Il bosone di gauge scambiato  $B$  è diverso da quelli presenti sulle linee esterne ed è massivo.

### 3.7 Urto elastico tra due bosoni di gauge $A$ e fermione di massa nulla

Il primo processo esaminato descrive la diffusione elastica di due bosoni di gauge  $A$  di massa nulla (con accoppiamento vettoriale con i fermioni) mediato da una ampiezza BIM come in Fig. 3.2. Nei tre canali  $s, t$  e  $u$  sono scambiati solo bosoni di gauge  $B$  massivi con accoppiamenti puramente assiali. Infatti lo scambio di un bosone  $A$  è proibito in quanto un vertice triangolare VVV con tre correnti vettoriali è identicamente nullo per il teorema di Furry. Ora descriviamo la cinematica dello scattering: i momenti entranti nello stato iniziale sono  $k_1^\mu, k_2^\nu$  mentre  $p_1^\sigma$  e  $p_2^\tau$  sono gli impulsi delle particelle nello stato finale. Le variabili di Mandelstam sono definite come di consueto

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad (3.155)$$

$$t = (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2, \quad (3.156)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2 \quad (3.157)$$

e soddisfano la relazione

$$s + t + u = 0 \quad (3.158)$$

poiché le masse delle particelle coinvolte nel processo sono tutte nulle. Inoltre denotiamo con  $\theta$  l'angolo di diffusione come raffigurato in Fig. 3.3. Nel caso semplice in cui il fermione della teoria è privo di massa e i bosoni di gauge sulle linee esterne sono anch'essi di massa nulla e on-shell i diagrammi triangolari si riducono alla forma polare di Dolgov e Zakharov come è stato descritto nel precedente capitolo. Per

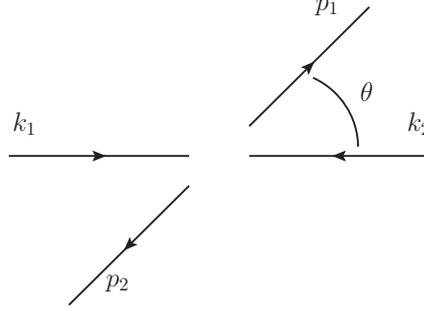


Figura 3.3: Processo di diffusione  $2 \rightarrow 2$  nel sistema di riferimento del centro di massa.

esempio se consideriamo il processo d'urto mediato dal bosone di gauge massivo  $B$  nel canale  $s$  l'ampiezza di scattering è

$$i\mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau} = g_A^4 g_B^2 \Delta^{\lambda\mu\nu}(-k, -k_1, -k_2) \frac{-i}{s - M_B^2} \left( g^{\lambda\rho} - \frac{k^\lambda k^\rho}{M_B^2} \right) \Delta^{\rho\sigma\tau}(k, p_1, p_2) \quad (3.159)$$

che diventa, dopo aver inserito la forma esplicita del diagramma AVV indicata in equazione (3.81),

$$\mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau} = -g_A^4 g_B^2 \frac{a_n}{M_B} \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2] \frac{1}{s} \frac{a_n}{M_B} \varepsilon[\sigma, \tau, p_1, p_2], \quad (3.160)$$

dove abbiamo indicato con  $a_n$  l'anomalia totale e con  $M_B$  la massa del bosone di gauge  $B$ .

Come dimostreremo successivamente questa classe di ampiezze è responsabile di una crescita della sezione d'urto oltre il limite di Froissart [13] e tale andamento deve essere in qualche modo corretto se si vuole ristabilire l'unitarietà della teoria nell'ultravioletto.

Osserviamo che la struttura tensoriale dell'ampiezza BIM in eq.(3.160) è identica a quella che si otterrebbe unendo insieme due vertici di Wess-Zumino con uno scambio di un assione fisico. Infatti questi contributi sono presenti nel modello A-B che abbiamo discusso e si potrebbe sperare in una cancellazione fra le due classi di ampiezze con una conseguente soluzione del cattivo comportamento ad alte energie. Purtroppo i controtermini di Wess-Zumino non si sottraggono dalle ampiezze BIM nel modo auspicato, ma si sommano a queste lasciando irrisolto il problema nell'UV. L'ampiezza complessiva con lo scambio del bosone di gauge  $B$  nei tre canali  $s$ ,  $t$  e  $u$

è raffigurata in Fig. 3.2 ed è data da

$$\mathcal{M}_{AA \rightarrow AA}^{\mu\nu\sigma\tau} = (\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u)^{\mu\nu\sigma\tau}, \quad (3.161)$$

dove i pedici nel secondo membro indicano il canale in cui è scambiato il bosone  $B$ . Ogni contributo nell'equazione precedente è costruito contraendo due correlatori triangolari con un propagatore di Proca

$$i\mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau} = g_A^4 g_B^2 \Delta^{\mu\nu\lambda}(-k, -k_1, -k_2) P^{\lambda\rho}(k_1 + k_2) \Delta^{\rho\sigma\tau}(k_1 + k_2, p_1, p_2), \quad (3.162)$$

$$i\mathcal{M}_t^{\mu\nu\sigma\tau} = g_A^4 g_B^2 \Delta^{\mu\sigma\lambda}(-(k_1 - p_1), -k_1, p_1) P^{\lambda\rho}(k_1 - p_1) \Delta^{\rho\tau\nu}(k_1 - p_1, p_2, -k_2), \quad (3.163)$$

$$i\mathcal{M}_u^{\mu\nu\sigma\tau} = g_A^4 g_B^2 \Delta^{\lambda\mu\tau}(-(k_1 - p_2), -k_1, p_2) P^{\lambda\rho}(k_1 - p_2) \Delta^{\rho\sigma\nu}(k_1 - p_2, p_1, -k_2). \quad (3.164)$$

In queste espressioni le ampiezze  $\Delta$  rappresentano i diagrammi AVV con le due linee esterne vettoriali on-shell ( $k_1^2 = k_2^2 = p_1^2 = p_2^2 = 0$ ) e assumono la forma polare

$$\Delta^{\lambda\mu\nu}(k, k_1, k_2) = a_n \frac{k^\lambda}{s} \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu], \quad a_n = -\frac{1}{2\pi^2}, \quad (3.165)$$

mentre il propagatore di Proca per il bosone di gauge  $B$  con massa  $M_B$  è dato da

$$P^{\lambda\rho}(k) = -\frac{i}{k^2 - M_B^2} \left[ g^{\lambda\rho} - \frac{k^\lambda k^\rho}{M_B^2} \right]. \quad (3.166)$$

Dopo aver inserito le equazioni (3.165) e (3.166) nelle espressioni (3.162 - 3.164) possiamo ricavare i moduli quadri delle singole ampiezze e le interferenze

$$|\mathcal{M}_s|^2 = 2\hat{a}s^2 \quad |\mathcal{M}_t|^2 = 2\hat{a}t^2 \quad |\mathcal{M}_u|^2 = 2\hat{a}(s+t)^2 \quad (3.167)$$

$$\mathcal{M}_s\mathcal{M}_t^* = \hat{a}st \quad \mathcal{M}_s\mathcal{M}_u^* = -\hat{a}s(s+t) \quad \mathcal{M}_t\mathcal{M}_u^* = -\hat{a}t(s+t) \quad (3.168)$$

con

$$\hat{a} = g_A^8 g_B^4 \frac{a_n^4}{8M_B^4}. \quad (3.169)$$

La sezione d'urto non polarizzata è ottenuta mediando su tutti gli stati iniziali e sommando su quelli finali

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|}_{AA \rightarrow AA}^2(s, \theta) &= \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}^{\mu\nu\sigma\tau}|^2 \\ &= g_A^8 g_B^4 \frac{a_n^4}{4M_B^4} (s^2 + st + t^2) = g_A^8 g_B^4 \frac{a_n^4}{64} \frac{s^2}{M_B^4} (\cos^2 \theta + 3), \end{aligned} \quad (3.170)$$

dove il fattore  $1/4$  divide per il numero di stati di polarizzazione nello stato iniziale del processo di diffusione,  $2$  per ogni bosone di gauge.

Il risultato finale dipende dall'anomalia totale  $a_n$  e dalla massa  $M_B$  del bosone di gauge scambiato ed assume la forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2(s, \theta)}{s}, \quad (3.171)$$

dalla quale è immediato osservare la violazione del limite di unitarietà di Froissart

$$\sigma_T \lesssim (\log s)^2 \quad \text{per} \quad s \rightarrow \infty \quad (3.172)$$

poiché la sezione d'urto differenziale in equazione (3.171) cresce come  $s$  per  $s$  che va all'infinito.

Questo risultato mette in luce il ruolo del polo anomalo legato alla rottura dell'identità di Ward assiale nella regione UV. In effetti una sua sottrazione oltre a ripristinare l'invarianza di gauge sul vertice preserverebbe l'unitarietà a grandi energie. Questo comportamento non è legato alla particolare configurazione cinematica che abbiamo appena analizzato (limite chirale con bosoni di gauge di massa nulla sulle linee esterne), ma è una caratteristica generale della teoria imputabile esclusivamente all'anomalia. Come dimostreremo successivamente le ampiezze anomale dominano nell'UV indipendentemente dalla massa del fermione e dalle virtualità dei momenti sulle linee esterne.

Consideriamo ora lo stesso processo nell'ambito del modello A-B introdotto nel capitolo 2. Oltre all'ampiezza BIM dobbiamo includere un secondo contributo allo scattering  $AA \rightarrow AA$  ottenuto con i controtermini di Wess-Zumino. Analizziamo il processo nella fase rotta della teoria in cui il bosone di gauge  $B$  ha acquisito massa per l'azione combinata del meccanismo di Stückelberg e di Higgs

$$M_B = \sqrt{M_1^2 + (q_B g_B v)^2}, \quad (3.173)$$

dove abbiamo indicato con  $M_1$  la massa di Stückelberg del bosone di gauge  $B$  prima della rottura spontanea di simmetria e con  $v$  il valore di aspettazione dell'Higgs sul vuoto. Come abbiamo discusso nei paragrafi 2.1 e 2.3 i campi scalari  $b$  e  $\phi_2$  vengono ruotati sull'assione fisico  $\chi_B$  e sul bosone di Goldstone  $G_B$ , ma nella gauge unitaria sopravvive solo il contributo dell'axi-Higgs fisico  $\chi_B$ .

Il diagramma che descrive l'interazione tra i bosoni di gauge  $A$  tramite i vertici di Wess-Zumino è rappresentato in Fig. 3.4. Nel caso semplice in cui il fermione è privo di massa non esistono altri contributi come per esempio quello mostrato in

Fig. 3.5 che si ottiene scambiando un assione tra un vertice di WZ e un diagramma a triangolo con due linee vettoriali e una pseudoscalare. Infatti il campo  $\chi_B$  si accoppia ai fermioni solo proporzionalmente alla loro massa e quest'interazione è banalmente assente se  $m_f = 0$ .

Utilizzando le regole di Feynman per il modello A-B elencate in App. C è possibile

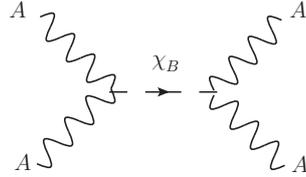


Figura 3.4: Interazione di Wess-Zumino con lo scambio di un assione fisico  $\chi_B$ .

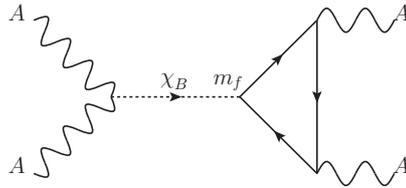


Figura 3.5: Interazione tra due bosoni di gauge con lo scambio di un assione fisico  $\chi_B$  tra un vertice di Wess-Zumino e un diagramma a triangolo. L'axi-Higgs si accoppia al fermione proporzionalmente alla sua massa  $m_f$ .

calcolare i contributi di WZ che si sommano all'ampiezza BIM. Per esempio nel canale  $s$  si ha

$$i\mathcal{M}_{s\ WZ}^{\mu\nu\sigma\tau} = 8i\frac{C_{AA}}{M}\alpha_1\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu]\frac{i}{k^2 - M_\chi^2}8i\frac{C_{AA}}{M}\alpha_1\varepsilon[p_1, p_2, \sigma, \tau], \quad (3.174)$$

dove  $M_\chi$  è la massa dell'axi-Higgs che può essere eventualmente nulla. Inserendo le espressioni esplicite dei coefficienti  $C_{AA}$  e  $\alpha_1$  si ottiene l'elemento di matrice

$$\mathcal{M}_{s\ WZ}^{\mu\nu\sigma\tau} = -\frac{1}{s - M_\chi^2}\left(\frac{q_B^2 g_A^4 g_B^4 \alpha_n^2 v^2}{M_1^2 M_B^2}\right)\varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu]\varepsilon[p_1, p_2, \sigma, \tau]. \quad (3.175)$$

Osserviamo che la struttura tensoriale dell'ampiezza di scattering  $\mathcal{M}_{s\ WZ}$  è della stessa forma di quella dell'ampiezza BIM in equazione (3.160), inoltre i loro segni sono concordi per cui i due contributi non si sottraggono e non rimuovono l'andamento della sezione d'urto differenziale  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim s$  a grandi  $s$ .

In conclusione il contributo del controtermine di Wess-Zumino, benché ripristini l'invarianza di gauge dell'azione effettiva a un loop, non è in grado di controllare il comportamento non unitario della teoria ad alte energie.

In seguito riportiamo il risultato del calcolo completo del processo  $AA \rightarrow AA$  nei tre canali. Consideriamo per semplicità il canale  $s$ : l'ampiezza totale si ottiene sommando gli elementi di matrice definiti nelle equazioni (3.162) e (3.174)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau} &= \mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau}{}_{BIM} + \mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau}{}_{WZ} \\ &= -g_A^4 g_B^2 \frac{a_n^2}{M_B^2} \left( \frac{1}{s} + \frac{q_B^2 g_B^2 v^2}{M_1^2} \frac{1}{s - M_\chi^2} \right) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \varepsilon[p_1, p_2, \sigma, \tau], \end{aligned} \quad (3.176)$$

mentre per il modulo quadro si ha

$$|\mathcal{M}_s|^2 = g_A^8 g_B^4 \frac{a_n^4}{4M_B^2} \left( 1 + \frac{q_B^2 g_B^2 v^2}{M_1^2} \frac{s}{s - M_\chi^2} \right)^2 s^2. \quad (3.177)$$

Le ampiezze di scattering negli altri canali si ricavano in modo analogo e riportiamo in App. E i risultati finali. Presentiamo solo l'espansione in  $s$  per grandi energie del modulo quadro dell'ampiezza di scattering non polarizzata

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|_{AA \rightarrow AA}^2(s, \theta) &= \frac{a_n^4 (C^2 + 1)^2 (\cos(2\theta) + 7) g_A^8 g_B^4}{128M_B^4} s^2 \\ &+ \frac{3a_n^4 C^2 g_A^8 g_B^4 (3C^2 + 1) M_\chi^4}{16M_B^4} + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{per } s \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.178)$$

dove

$$C = \frac{q_B g_B v}{M_1}. \quad (3.179)$$

Dall'espansione in  $s$  vediamo che la sezione d'urto differenziale cresce come  $s$  con un termine che dipende dall'anomalia  $a_n$ , ma è indipendente dalla massa dell'axi-Higgs. Invece tutti gli altri contributi con potenze più piccole di  $s$  sono proporzionali a  $M_\chi$  e sono banalmente nulli nel caso in cui l'assione fisico sia di massa zero. Il contributo che domina l'intero processo e che al tempo stesso viola il limite di Froissart non può essere eliminato per nessuna particolare scelta dei parametri poiché il fattore  $(1 + C^2)$  è sempre diverso da zero.

### 3.7.1 Limite di unitarietà dalle ampiezze BIM

È ovvio che una formulazione completa e autoconsistente di un modello anomalo non può in nessun modo essere ottenuta richiedendo esclusivamente l'invarianza

dell'azione effettiva. Infatti il problema nella regione UV rimarrebbe comunque irrisolto e la teoria richiederebbe un completamento che non può essere realizzato da un controtermine di Wess-Zumino. Nonostante ciò i modelli anomali con termini di WZ possono essere ugualmente adoperati nell'ambito delle teorie effettive, fermo restando che la loro predittività rimane limitata ad un certo intervallo di energie. Dall'analisi delle ampiezze BIM per lo scattering  $AA \rightarrow AA$  nel modello A-B è possibile determinare esplicitamente un limite superiore di unitarietà per le energie coinvolte nel processo. A tale scopo è conveniente sviluppare l'elemento di matrice  $\mathcal{M}$  nell'espansione in onde parziali di Jacob e Wick [14]

$$\mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}(s, \Omega) = 16\pi \sum_J (2J+1) \mathcal{D}_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4}^{J*}(\phi, \theta, -\phi) \mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}^J, \quad (3.180)$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  rappresentano le elicità delle particelle nel processo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ ,  $\mathcal{M}^J$  costituiscono le onde parziali  $J$ -esime dell'ampiezza di scattering nella base degli autostati di elicità,  $D_{\alpha\beta}^J(\phi, \theta, \gamma)$  sono le funzioni di Wigner e la sommatoria corre sui valori interi positivi di  $J$ .

Sfruttando l'ortogonalità delle funzioni di Wigner è possibile invertire l'equazione (3.180) ed esprimere le onde parziali in funzione dell'ampiezza di scattering

$$\mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}^J = \frac{1}{16\pi} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathcal{D}_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4}^J(\phi, \theta, -\phi) \mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}(s, \Omega) \quad (3.181)$$

per poi sfruttare il limite indotto dall'unitarietà della matrice  $S$  nel limite di alte energie

$$|\mathcal{M}^J| \leq 1. \quad (3.182)$$

Per calcolare le ampiezze di elicità del processo  $AA \rightarrow AA$  è necessario contrarre l'elemento di matrice tensoriale  $\mathcal{M}^{\mu\nu\sigma\tau} = \mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau} + \mathcal{M}_t^{\mu\nu\sigma\tau} + \mathcal{M}_u^{\mu\nu\sigma\tau}$ , riportato in App. E, con un opportuno insieme di polarizzatori

$$\mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}^J = \epsilon_\mu^{\lambda_1}(k_1) \epsilon_\nu^{\lambda_2}(k_2) \epsilon_\sigma^{\lambda_3*}(p_1) \epsilon_\tau^{\lambda_4*}(p_2) \mathcal{M}^{\mu\nu\sigma\tau}. \quad (3.183)$$

Inoltre poiché siamo interessati al limite di alte energie è possibile trascurare la massa  $M_\chi$  dell'assione scambiato nei diversi canali. Studiamo il problema nel sistema di

riferimento del centro di massa e scegliamo la seguente base di elicità

$$k_1^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1) \quad k_2^\nu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1) \quad (3.184)$$

$$p_1^\sigma = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \sin \theta, 0, \cos \theta) \quad p_2^\tau = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\sin \theta, 0, -\cos \theta) \quad (3.185)$$

$$\epsilon_\mu^+(k_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad \epsilon_\mu^-(k_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad (3.186)$$

$$\epsilon_\nu^+(k_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad \epsilon_\nu^-(k_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad (3.187)$$

$$\epsilon_\sigma^+(p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad \epsilon_\sigma^-(p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cos \theta, -i, -\sin \theta) \quad (3.188)$$

$$\epsilon_\tau^+(p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cos \theta, -i, -\sin \theta) \quad \epsilon_\tau^-(p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad (3.189)$$

dove con + e - abbiamo indicato la polarizzazione circolare destrorsa e sinistrorsa del fotone. Dal calcolo esplicito ricaviamo che le uniche ampiezze di elicità non nulle sono

$$\mathcal{M}_{++++} = \mathcal{M}_{----}, \quad (3.190)$$

$$\mathcal{M}_{+--+} = \mathcal{M}_{-++-}, \quad (3.191)$$

$$\mathcal{M}_{+---} = \mathcal{M}_{-++-} \quad (3.192)$$

e dalle prime due è possibile ricavare il vincolo più restrittivo.

Per elicità uguali negli stati iniziale e finale, ossia per  $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_4 = 0$  le funzioni di Wigner si riducono ai più semplici polinomi di Legendre  $\mathcal{D}_{0,0}^J = \mathcal{P}_J(\cos \theta)$  e in particolare per  $J = 0$  la relazione (3.181) fornisce l'ampiezza di scattering in onda s

$$\mathcal{M}_{++++}^0 = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \mathcal{M}_{++++}(s, \theta) = -g_A^4 g_B^2 \frac{a_n^2}{64\pi M_B^2} (1 + C^2) s, \quad (3.193)$$

dove il coefficiente  $C$  è stato definito in (3.179).

Imponendo la condizione (3.182) e sfruttando la relazione fra la massa del bosone di gauge prima e dopo la rottura spontanea di simmetria otteniamo il limite superiore

$$s < 256\pi^3 \frac{M_1^2}{g_A^4 g_B^2}. \quad (3.194)$$

Uno studio numerico completo sulla violazione dell'unitarietà in un'estensione anomala realistica del Modello Standard è presentato in [15].

### 3.8 Urto elastico tra due bosoni di gauge $A$ e fermione massivo

Consideriamo il processo di diffusione elastico  $AA \rightarrow AA$  tra due bosoni di gauge vettoriali con un fermione massivo che circola nel loop. A differenza del caso precedente i correlatori triangolari che costruiscono l'ampiezza BIM contengono delle correzioni proporzionali alla massa del fermione. Nonostante ciò le conclusioni che possiamo trarre dallo studio del comportamento ultravioletto della sezione d'urto non sono diverse da quelle dedotte nei paragrafi precedenti per l'analogo processo con  $m = 0$ .

Poiché i fotoni sulle linee vettoriali esterne sono on-shell il correlatore triangolare si riduce ad una forma molto semplice e si scrive come in equazione (3.125), mentre per l'elemento di matrice nel canale  $s$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a^{\mu\nu\sigma\tau} &= g_A^4 g_B^2 \Delta^{\lambda\mu\nu}(-k, -k_1, -k_2) \frac{-1}{k^2 - M_B^2} \left( g^{\lambda\rho} - \frac{k^\lambda k^\rho}{M_B^2} \right) \Delta^{\rho\sigma\tau}(k, p_1, p_2) \\ &= -g_A^4 g_B^2 \frac{k^2}{M_B^2} A_3(s, 0, 0, m^2)^2 \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \varepsilon[p_1, p_2, \sigma, \tau], \end{aligned} \quad (3.195)$$

dove l'ampiezza invariante  $A_3(s, 0, 0, m^2)$  è definita in equazione (3.123).

Inoltre se si considerano le ampiezze nei canali  $t$  ed  $u$  è possibile calcolare il modulo quadro dell'elemento di matrice per la sezione d'urto non polarizzata

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|_{AA \rightarrow AA}^2(s, m, \theta) &= -g_A^8 g_B^4 a_n^4 \frac{\cos^4 \theta + 46 \cos^2 \theta - 15}{16 M_B^4 \sin^4 \theta} s^2 \\ &\quad - g_A^8 g_B^4 \frac{m^2}{M_B^4} \mathcal{K}(s, \theta) s + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad s \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.196)$$

dove  $\mathcal{K}(s, \theta)$  cresce al più come il quadrato del logaritmo di  $\frac{s}{m^2}$ .

Si osserva che il contributo dominante a grandi energie è guidato dal termine proporzionale alla seconda potenza di  $s$  mentre gli altri, proporzionali alla massa del fermione, sono compatibili con il limite di unitarietà. Risulta chiaro che, anche in questo caso, l'andamento della sezione d'urto nell'UV è determinato dal polo anomalo nel correlatore triangolare ed una sua sottrazione elimina l'anomalia assiale dal vertice AVV e il cattivo comportamento ultravioletto.

Come avevamo anticipato è evidente che la rottura di unitarietà è una caratteristica della teoria anomala e non dipende dalla massa del fermione che introduce solo delle correzioni compatibili con il limite di Froissart. Analogamente al processo

$AA \rightarrow AA$  con  $m = 0$  la situazione non migliora se l'invarianza di gauge è ripristinata, invece che con una sottrazione del polo, dai controtermini di Wess-Zumino come nel modello A-B.

A differenza del caso precedente la massa del fermione induce l'accoppiamento dello stesso con l'assione  $\chi_B$  e con il bosone di Higgs  $h$  introducendo nuovi contributi all'elemento di matrice S. I diagrammi coinvolti nel calcolo dell'ampiezza di scattering sono elencati in Fig. 3.6 e possono essere calcolati agevolmente usando le regole di Feynman in App. C. Studieremo gli effetti delle correzioni di massa nell'espansione asintotica a grandi energie e osserveremo che essi non alterano il comportamento della sezione d'urto nella regione ultravioletta ancora dominata dal polo anomalo.

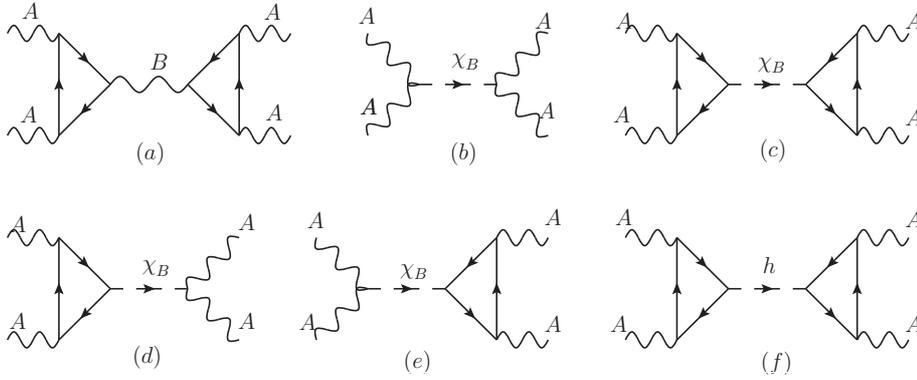


Figura 3.6: Contributi nel canale  $s$  al processo di diffusione  $AA \rightarrow AA$  nel modello AB con un fermione massivo. In Fig. (a) e (b) sono riportati rispettivamente l'ampiezza BIM e il tipico diagramma con i due controtermini di Wess-Zumino. Nelle Fig. (c), (d) ed (e) è raffigurato lo scambio dell'axi-Higgs, mentre in Fig. (f) è riportato il contributo dell'Higgs.

Il primo contributo è fornito dall'ampiezza BIM (Fig. 3.6a) ottenuta scambiando un bosone di gauge  $B$  tra due vertici triangolari del tipo AVV con un fermione di massa  $m$  all'interno del loop. Il diagramma è riportato in equazione (3.195). L'integrazione con i due vertici di Wess-Zumino e con lo scambio dell'assione è raffigurata in Fig. 3.6b ed è stata già calcolata in equazione (3.175)

$$\mathcal{M}_b^{\mu\nu\sigma\tau} = -\frac{1}{s - M_\chi^2} \left( \frac{q_B^2 g_A^4 g_B^4 a_n^2 v^2}{M_1^2 M_B^2} \right) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \varepsilon[p_1, p_2, \sigma, \tau]. \quad (3.197)$$

Di seguito discutiamo i nuovi contributi previsti da un modello con un fermione

massivo. Il diagramma in Fig. 3.6c rappresenta lo scambio di un assione accoppiato con un vertice pseudoscalare ai fermioni

$$\mathcal{M}_c^{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{m}{v} \left( -\frac{M_1}{M_B} \right) g_A^2 i \Delta_5^{\mu\nu}(-k_1, -k_2) \frac{1}{k^2 - M_\chi^2} \frac{m}{v} \left( -\frac{M_1}{M_B} \right) g_A^2 i \Delta_5^{\sigma\tau}(p_1, p_2), \quad (3.198)$$

dove abbiamo indicato con  $\Delta_5^{\mu\nu}$  il diagramma a triangolo con due correnti vettoriali  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  e una pseudoscalare  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$

$$\Delta_5^{\mu\nu}(k_1, k_2) = - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{Tr [\gamma^5(\not{q} - \not{k} + m)\gamma^\nu(\not{q} - \not{k}_1 + m)\gamma^\mu(\not{q} + m)]}{(q^2 - m^2)((q - k)^2 - m^2)((q - k_1)^2 - m^2)} + \text{exch.} \quad (3.199)$$

Ricordiamo che il tensore a due indici  $\Delta_5^{\mu\nu}$  interviene nell'identità di Ward massiva del triangolo AVV sul vertice assiale

$$k_\lambda \Delta^{\lambda\mu\nu}(k, k_1, k_2) = 2m \Delta_5^{\mu\nu}(k_1, k_2) + a_n \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu]. \quad (3.200)$$

Si può evitare di calcolare direttamente l'ampiezza  $\Delta_5^{\mu\nu}$  sfruttando proprio questa relazione e l'espressione esplicita del diagramma a triangolo che abbiamo già calcolato. Nella particolare configurazione cinematica in cui  $k_1^2 = k_2^2 = 0$  si ha

$$\Delta_5^{\mu\nu}(k_1, k_2) = -\frac{m}{4\pi^2 s} \log^2 \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \equiv f(s, m) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \quad (3.201)$$

con  $a_3 = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$ . In conclusione l'elemento di matrice  $\mathcal{M}_c$  diventa

$$\mathcal{M}_c^{\mu\nu\sigma\tau} = - \left( \frac{m}{v} \frac{M_1}{M_B} g_A^2 \right)^2 \frac{1}{k^2 - M_\chi^2} f(s, m)^2 \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \varepsilon[p_1, p_2, \sigma, \tau]. \quad (3.202)$$

I diagrammi (d) ed (e) in Fig. 3.6 illustrano invece lo scambio dell'axi-Higgs  $\chi_B$  che si accoppia da un lato al fermione e dall'altro direttamente ai campi di gauge

$$\mathcal{M}_d^{\mu\nu\sigma\tau} = \mathcal{M}_e^{\mu\nu\sigma\tau} = \left( \frac{m}{v} \frac{M_1}{M_B} g_A^2 \right) \left( 8 \frac{C_{AA}}{M} \alpha_1 \right) \frac{f(s, m)}{k^2 - m_\chi^2} \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \varepsilon[p_1, p_2, \sigma, \tau]. \quad (3.203)$$

Infine resta da determinare il contributo dell'Higgs come in Fig. 3.6f. A differenza dell'axi-Higgs  $\chi_B$  il campo  $h$  si accoppia con i fermioni mediante una corrente scalare perciò l'interazione  $hAA$  è descritta da un nuovo diagramma a due indici che indichiamo con  $\Delta^{\mu\nu}$ . Per l'ampiezza di diffusione  $\mathcal{M}_f$  si ottiene

$$\mathcal{M}_f^{\mu\nu\sigma\tau} = \left( -i \frac{m}{v} \right) g_A^2 \Delta^{\mu\nu}(-k_1, -k_2) \frac{1}{k^2 - m_h^2} \left( -i \frac{m}{v} \right) g_A^2 \Delta^{\sigma\tau}(p_1, p_2), \quad (3.204)$$

dove il triangolo con due linee vettoriali ed una linea scalare che accoppia l'Higgs con i bosoni di gauge  $A$  è dato da

$$\Delta^{\mu\nu}(k_1, k_2) = (-i)^2(-1)i^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{Tr[(\not{q} - \not{k} + m)\gamma^\nu(\not{q} - \not{k}_1 + m)\gamma^\mu(\not{q} + m)]}{(q^2 - m^2)((q - k)^2 - m^2)((q - k_1)^2 - m^2)} + \text{exch.}, \quad (3.205)$$

e nel caso particolare in cui  $k_1^2 = k_2^2 = 0$  si ha

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}(k_1, k_2) &= \frac{m}{4\pi^2 s} (2 - (s - 4m^2)C_0(s, 0, 0, m^2)) [s g^{\mu\nu} - 2 k_2^\mu k_1^\nu] \\ &\equiv g(s, m) (s g^{\mu\nu} - 2 k_2^\mu k_1^\nu) \end{aligned} \quad (3.206)$$

con  $C_0(s, 0, 0, m^2)$  integrale scalare massivo a tre punti

$$C_0(s, 0, 0, m^2) = \frac{1}{2s} \log^2 \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1}. \quad (3.207)$$

Utilizzando l'espressione esplicita di  $\Delta^{\mu\nu}$  si ricava infine

$$\mathcal{M}_f^{\mu\nu\sigma\tau} = -g_A^2 \left(\frac{m}{v}\right)^2 \frac{1}{k^2 - m_h^2} g(s, m)^2 (s g^{\mu\nu} - 2 k_2^\mu k_1^\nu) (s g^{\sigma\tau} - 2 p_2^\sigma p_1^\tau). \quad (3.208)$$

Le medesime classi di ampiezze nei restanti canali  $t$  ed  $u$  sono riportate in App. E. Analogamente a quanto discusso nel paragrafo 3.7.1 possiamo studiare il comportamento ad alte energie di una particolare ampiezza di elicità contraendo con gli opportuni polarizzatori. Per esempio utilizzando la base di elicità definita nelle equazioni (3.184 - 3.189) è possibile esplicitare l'elemento di matrice  $S$  tra fotoni con polarizzazione destrorsa

$$\mathcal{M}^{++++} = \epsilon_\mu^+(k_1) \epsilon_\nu^+(k_2) \epsilon_\sigma^{+*}(p_1) \epsilon_\tau^{+*}(p_2) \mathcal{M}^{\mu\nu\sigma\tau}. \quad (3.209)$$

Inoltre consideriamo solo lo sviluppo asintotico fino all'ordine  $O(s^0)$  nel limite  $s \rightarrow \infty$ , ottenuto dopo aver continuato analiticamente le funzioni  $A_3(s, 0, 0, m^2)$ ,  $f(s, m)$  e  $g(s, m)$  nella regione fisica  $s > 4m^2$ . Per la somma dei primi due contributi si ricava

$$\mathcal{M}_a^{++++} + \mathcal{M}_b^{++++} = -g_A^4 g_B^2 \frac{a_n^2}{M_B^2} (1 + C^2) s + \frac{1}{M_B^2} (M_\chi^2 c_a + m^2 c_b) + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad (3.210)$$

dove  $C$  è definito in (3.179) mentre  $c_a$  e  $c_b$  sono dei coefficienti adimensionali che determinano l'espansione asintotica per  $s \rightarrow \infty$ . In modo particolare il primo è

costante e negativo mentre l'altro è positivo e cresce come la seconda potenza del logaritmo di  $\frac{s}{m^2}$ . È evidente che le correzioni introdotte dalla massa dell'axi-Higgs  $M_\chi$  e da quella del fermione  $m$  non contribuiscono all'ordine  $s$  ancora completamente dominato dall'anomalia.

Invece lo scambio dell'assione tra un correlatore triangolare ed un vertice di Wess-Zumino introduce una correzione proporzionale alla massa del fermione e ad un coefficiente  $c_d$  il cui andamento per  $s \rightarrow \infty$  è identico, a parte un fattore moltiplicativo, a quello di  $c_b$

$$\mathcal{M}_d^{++++} = \mathcal{M}_e^{++++} = m^2 \frac{M_1}{vM_B^2} c_d. \quad (3.211)$$

Quando lo pseudoscalare  $\chi_B$  e lo scalare  $h$  sono scambiati tra due correlatori triangolari i diagrammi che ne risultano contribuiscono allo sviluppo asintotico dell'ampiezza complessiva solo all'ordine  $\frac{1}{s}$

$$\mathcal{M}_c^{++++} = O\left(\frac{1}{s}\right) \quad \mathcal{M}_f^{++++} = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad (3.212)$$

e proporzionalmente alla massa  $m$  del fermione, infatti sono assenti nel limite chirale del modello.

In conclusione il calcolo degli elementi di matrice relativi ai diagrammi in Fig.3.6 mostra che i due contributi dominanti nel limite di alta energia sono  $\mathcal{M}_a$  ed  $\mathcal{M}_b$ , come nel caso del fermione a massa nulla analizzato nella sezione precedente.

### 3.9 Urto elastico tra due bosoni di gauge $B$

Nel paragrafo precedente abbiamo osservato che la presenza del polo anomalo nella regione ultravioletta della teoria è una caratteristica che prescinde dalla massa del fermione. Quest'ultima infatti contribuisce solo con delle correzioni che modificano l'espansione asintotica dell'elemento di matrice  $S$  per il processo di diffusione  $AA \rightarrow AA$  all'ordine costante in  $s$  lasciando inalterato il termine dominante quadratico nell'energia dell'urto. Quest'ultimo è esattamente l'unico contributo che sopravvive nel limite chirale ed è saturato completamente dall'anomalia assiale. Inoltre faremo vedere che l'andamento a grandi energie della sezione d'urto mediato dal polo è anche indipendente dalla virtualità delle particelle sulle linee esterne, ossia la violazione dell'unitarietà è pure presente in ampiezze di diffusione tra bosoni di gauge massivi. A questo scopo studieremo l'interazione elastica tra due bosoni vettoriali anomali  $B$  tramite un diagramma di tipo BIM come in Fig. 3.7. Poiché i campi di

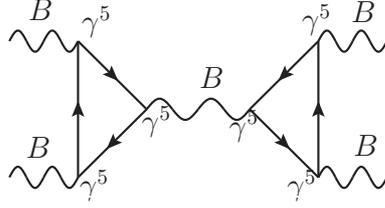


Figura 3.7: Ampiezza BIM nel canale  $s$  tra bosoni di gauge massivi anomali. Il correlatore triangolare che costruisce il diagramma è realizzato con tre correnti assiali.

gauge coinvolti nel processo sono tutti anomali il diagramma a triangolo è costruito con tre correnti assiali in cui l'anomalia totale  $a_n$  si ripartisce simmetricamente, come richiesto dalla simmetria di Bose, sui tre vertici e rompendo su ognuno di essi le rispettive identità di Ward. La forma esplicita del correlatore AAA si può esprimere come somma di tre contributi di tipo AVV

$$\Delta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{1}{3} \left( \Delta_3^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) + \Delta^{\mu\nu\lambda}(k_2, -k) + \Delta^{\nu\lambda\mu}(-k, k_1) \right) \quad (3.213)$$

con  $k = k_1 + k_2$ . La decomposizione del diagramma AAA è riportata in Fig. 3.8. Per calcolare l'ampiezza BIM è necessario contrarre due diagrammi AAA con un propagatore di Proca che descrive lo scambio nel bosone  $B$ , per esempio nel canale  $s$  si ha

$$i\mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau} = g_B^6 \Delta_3^{\mu\nu\lambda}(-k, -k_1, -k_2) P^{\lambda\rho}(k_1 + k_2) \Delta_3^{\rho\sigma\tau}(k, p_1, p_2) \quad (3.214)$$

dove il propagatore  $P^{\lambda\rho}$  è stato definito in equazione (3.166).

Anche per questo processo di diffusione ci limiteremo ad analizzare il comportamento a grandi energie dell'ampiezza invariante in una particolare configurazione di elicità. Poiché i bosoni di gauge sulle linee esterne hanno spin 1 e sono massivi possiamo descriverli con tre stati di polarizzazione indipendenti, due trasversi e uno longitudinale. Nel limite di alte energie il quadrivettore di polarizzazione longitudinale si comporta asintoticamente come

$$\epsilon_L^\mu(k) = \frac{k^\mu}{M_B} + O\left(\frac{M_B}{E}\right) \quad (3.215)$$

dove  $E$  è l'energia della particella, perciò la regione UV dovrebbe essere dominata dal processo  $B_L B_L \rightarrow B_L B_L$  così come accade nel Modello Standard per la diffusione di bosoni di gauge  $W$  polarizzati longitudinalmente. In questo caso però la

struttura tensoriale che determina il diagramma a triangolo AAA è tale da sopprimere l'ampiezza  $\mathcal{M}_{LLLL}$  nel limite  $s \rightarrow \infty$  rispetto ai soliti contributi trasversali. La situazione attuale è radicalmente diversa da quanto si verifica nel settore elettrodebole del Modello Standard: in quest'ultimo sono i processi del tipo  $W_L^+ W_L^- \rightarrow W_L^+ W_L^-$  a realizzare la divergenza nel limite di alte energie e tale andamento è curato dallo scambio dell'Higgs. Invece nell'urto  $BB \rightarrow BB$  la crescita nell'UV è di natura totalmente diversa poiché è legata all'anomalia di gauge e si manifesta invece nelle ampiezze di diffusione con bosoni di gauge polarizzati trasversalmente. Per esempio si ottiene

$$\mathcal{M}_{++++} = -\frac{g_B^6}{36} \frac{a_n^2}{M_B^2} s + O(s^0) \quad s \rightarrow \infty \quad (3.216)$$

che manifesta una crescita lineare in  $s$  come nel caso  $AA \rightarrow AA$ .

Anche in questa situazione un'ampiezza costruita con due controtermini di Wess-Zumino ed un propagatore assionico, come quella presente nel modello A-B, si somma all'elemento di matrice appena discusso senza modificarne il suo andamento caratteristico nell'energia.

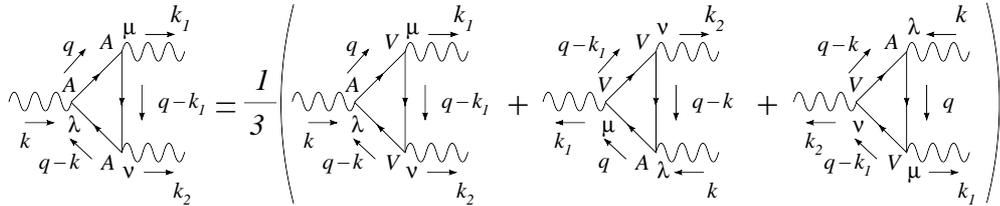


Figura 3.8: Decomposizione del triangolo AAA in tre correlatori AVV ottenuta imponendo la ripartizione simmetrica dell'anomalia.

Riassumiamo i risultati ottenuti nelle ultime sezioni evidenziando le somiglianze tra i diversi casi che qui elenchiamo per maggiore chiarezza:

- a)  $AA \rightarrow AA$  con  $m = 0$ ;
- b)  $AA \rightarrow AA$  con  $m \neq 0$ ;
- c)  $BB \rightarrow BB$  con  $m = 0$ .

Nel caso a) l'ampiezza BIM si riduce alla contrazione di due correlatori AVV in forma polare, poiché le linee esterne sono on-shell di massa nulla e anche il fermione ha massa zero. La sezione d'urto differenziale non polarizzata di questo processo

viola il limite di unitarietà perché cresce come  $s$  per  $s \rightarrow \infty$ . Questo andamento è imputabile alla presenza del polo anomalo. Eliminare il polo dall'ampiezza triangolare equivale a soddisfare l'identità di Ward assiale, altrimenti violata, e a ridimensionare la crescita di  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  entro la soglia richiesta. In questo caso, poiché il correlatore  $AVV$  è completamente polare, la rimozione dell'anomalia annulla identicamente l'ampiezza BIM.

Nel caso *b*) il fermione è massivo e i vertici  $AVV$  che costruiscono l'ampiezza BIM presentano un polo anomalo e delle correzioni di massa. Benché il polo sia disaccoppiato nell'infrarosso, cioè ha residuo nullo per  $s \rightarrow 0$ , esso è comunque responsabile della rottura di unitarietà ad alte energie. Anche in questo caso la sua sottrazione permette di eliminare l'anomalia chirale e recuperare la consistenza del modello nella regione UV poiché in assenza del polo le ampiezze BIM contengono solo contributi proporzionali alla massa del fermione con un andamento consentito dal limite di Froissart.

Nel caso *c*) sono stati analizzati gli effetti dovuti a virtualità non nulle sulle linee esterne. A tale proposito è stata calcolata l'ampiezza di diffusione elastica tra due bosoni di gauge massivi. I risultati ottenuti sono analoghi a quelli già discussi nei punti precedenti: l'ampiezza BIM rompe l'unitarietà nell'ultravioletto a causa dell'anomalia assiale. La rimozione del polo ad essa associato cura il comportamento della sezione d'urto a grandi energie.

## Capitolo 4

# Il correlatore $TJJ$ e l'anomalia conforme

Questo capitolo racchiude la seconda parte del lavoro di tesi, quella dedicata al correlatore triangolare  $\langle T^{\mu\nu} J^\alpha J^\beta \rangle$ , dove  $T^{\mu\nu}$  indica il tensore energia-impulso e  $J$  sono due correnti vettoriali. Questo correlatore è coinvolto nello studio dell'*anomalia conforme*, legata alla rottura di invarianza di scala nelle teorie quantistiche.

L'anomalia conforme si manifesta come un contributo addizionale alla traccia del tensore energia-impulso, dovuto, come nel caso dell'anomalia chirale, agli effetti quantistici. Abbiamo visto infatti come il correlatore  $AVV$  di una corrente assiale e due vettoriali sia un oggetto intrinsecamente mal definito e necessiti di condizioni aggiuntive per risultare finito; le condizioni riguardano la conservazione della corrente vettoriale e assiale e non possono essere soddisfatte simultaneamente a livello quantistico, dando quindi origine all'anomalia chirale. Analogamente il nuovo correlatore a 3 punti  ${}^1\langle TJJ \rangle$  è responsabile della comparsa dell'anomalia conforme se su di esso si impone una relazione di conservazione per  $T^{\mu\nu}$ ; queste due condizioni sono le corrispondenti della conservazione della corrente vettoriale e assiale del caso chirale e il parallelismo tra i due casi è evidente.

La traccia di  $T^{\mu\nu}$  è zero a livello classico in una teoria con fermioni di massa nulla; ad essa corrisponde la simmetria sotto trasformazioni di scala che non può essere mantenuta anche a livello quantistico senza violare la legge di conservazione per  $T^{\mu\nu}$  che analizzeremo nel seguito.

Si sceglie quindi di utilizzare la conservazione di  $T^{\mu\nu}$  come condizione definente

---

<sup>1</sup>Si può dimostrare [16] infatti che in presenza di sole funzioni a due punti l'anomalia conforme è assente.

per l'intero diagramma  $\langle TJJ \rangle$  e di derivare la corrispondente anomalia di traccia, piuttosto che imporre che la teoria rimanga invariante conforme anche a livello quantistico; in quest'ultimo caso infatti la non conservazione del tensore energia-impulso genererebbe un'anomalia di Einstein, cioè la perdita di invarianza per trasformazioni generali di coordinate della teoria.

Il calcolo dell'azione effettiva gravitazionale ha inizio dalla determinazione dell'intero correlatore  $\langle TJJ \rangle$  off-shell, per qualunque virtualità delle linee esterne, e con una generica massa per il fermione all'interno del loop. Esso presenta una struttura tensoriale a 4 indici di Lorentz la cui riduzione sulla base degli integrali scalari ha richiesto la scrittura di un codice in ambiente *Mathematica* molto più complesso di quello utilizzato per il calcolo del correlatore a 3 indici  $AVV$ .

In questo capitolo presentiamo alcune generalità sull'anomalia conforme nel caso di interesse, definiamo i diagrammi che intervengono nell'ampiezza ad un loop corrispondente a  $\langle TJJ \rangle$  e descriviamo il modo in cui essa è stata espansa su una base di tensori a 4 indici per poi essere ridotta ad integrali scalari a uno, due e tre punti.

La parte principale di questo capitolo di derivazione originale consiste infatti nei risultati espliciti per l'intero correlatore di cui poi sono stati esaminati diversi limiti cinematici; mostriamo che nel caso di un fermione privo di massa l'ampiezza è dominata interamente dal polo in  $1/k^2$  come nel caso dell'anomalia chirale, mentre per fermioni massivi la nuova scala introdotta nella teoria porta al fenomeno del disaccoppiamento nell'infrarosso, come già discusso.

Queste osservazioni ci portano a concludere che la traccia comune della presenza di anomalie chirali o conformi in una teoria è l'esistenza di ampiezze che si riducono alla loro forma polare per linee esterne on-shell e fermioni privi di massa.

## 4.1 L'anomalia conforme

Tra tutte le possibili trasformazioni di coordinate  $x \rightarrow x'$  che lasciano l'intervallo  $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$  invariante ne esistono alcune che corrispondono ad una trasformazione di scala sulla metrica

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (4.1)$$

Tali mappe si chiamano conformi e, per definizione, preservano gli angoli tra i quadri-vettori. L'insieme di queste trasformazioni costituisce il gruppo conforme che contiene, come sottogruppo, il gruppo di Poincaré. Infatti le traslazioni e le rotazioni di Lorentz non cambiano la metrica e corrispondono al limite  $\Omega(x) = 1$ . Altri

esempi di trasformazioni conformi sono dati dalle dilatazioni, dalle inversioni

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu, \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}, \quad (4.2)$$

e dalle trasformazioni conformi speciali che corrispondono a traslazioni precedute e seguite da un'inversione

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a \cdot x + a^2 x^2}. \quad (4.3)$$

Una teoria di campo classica è invariante conforme se è possibile introdurre un tensore energia-impulso conservato, simmetrico e con traccia nulla. Ma come spesso accade le simmetrie classiche possono essere rotte dalle correzioni quantistiche e nel caso specifico parleremo di anomalia conforme. Inoltre poiché in alcune teorie è sufficiente richiedere la simmetria di Poincaré e l'invarianza per dilatazioni per ottenere come conseguenza la simmetria sotto l'intero gruppo conforme, e in effetti questo è il caso per l'elettrodinamica, useremo equivalentemente le espressioni *anomalia conforme* e *anomalia di traccia* per indicare la rottura quantistica.

I 15 generatori del gruppo conforme possono essere espressi in funzione di un tensore energia-impulso  $\Theta^{\mu\nu}$  ottenuto dal quello canonico  $T^{\mu\nu}$  imponendo la simmetria negli indici  $\{\mu, \nu\}$  e l'annullarsi della traccia. La possibilità di realizzare queste richieste è intimamente legata alla simmetria conforme della teoria. A tale scopo consideriamo una generica lagrangiana  $\mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x))$  che dipende dal campo  $\Phi(x)$  e dalle sue derivate prime. È noto che l'invarianza dell'azione per traslazioni spazio-temporali implica che la corrente di Noether associata a tale simmetria sia conservata, nel caso particolare il tensore energia-impulso canonico deve avere divergenza nulla (avendo usato le equazioni del moto)

$$T^{\mu\nu} = \Pi^\mu \partial^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.4)$$

dove  $\Pi^\mu$  è definito da

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi}. \quad (4.5)$$

Invece la simmetria dell'azione per trasformazioni di Lorentz comporta la conservazione del tensore momento angolare generalizzato

$$J^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} - \Pi^\mu \Sigma^{\alpha\beta} \Phi \quad (4.6)$$

dove  $\Sigma$  è legato allo spin e dipende ovviamente dalla rappresentazione interna del campo. Dalla conservazione di  $J^{\mu\alpha\beta}$  è evidente che il tensore energia-impulso canonico non gode di nessuna particolare simmetria nei suoi due indici, ad eccezione del

caso in cui il campo  $\Phi$  sia scalare. Nonostante ciò è possibile aggiungere a  $T$  la divergenza di un tensore a tre indici  $B^{\lambda\mu\nu}$ , antisimmetrico nei primi due ( $B^{\lambda\mu\nu} = -B^{\mu\lambda\nu}$ ), per costruire una nuova corrente conservata simmetrica

$$T_B^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda B^{\lambda\mu\nu} \quad T_B^{\mu\nu} = T_B^{\nu\mu} \quad \partial_\mu T_B^{\mu\nu} = 0, \quad (4.7)$$

dove  $B$  è detto tensore di Belinfante ed è dato da

$$B^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \Pi^\lambda \Sigma^{\mu\nu} \Phi - \Pi^\mu \Sigma^{\lambda\nu} \Phi - \Pi^\nu \Sigma^{\lambda\mu} \Phi \right). \quad (4.8)$$

Inoltre, con questa definizione, la densità di momento angolare assume la forma molto semplice

$$J^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T_B^{\mu\beta} - x^\beta T_B^{\mu\alpha}. \quad (4.9)$$

Notiamo infine che la ridefinizione del tensore energia-impulso non si riflette sulle cariche che restano così immutate.

Ora consideriamo una trasformazione di scala  $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$  con  $\Phi(x) \rightarrow \lambda^{-l} \Phi(\lambda x)$  dove  $l$  è la dimensione di scala del campo e coincide con la sua dimensione in massa. L'azione risulta invariante se la lagrangiana trasforma come  $\mathcal{L} \rightarrow \lambda^{-d} \mathcal{L}$  dove  $d$  è la dimensione dello spazio-tempo. Tale condizione si verifica solo se tutti gli accoppiamenti della teoria sono adimensionali e ciò esclude anche termini di massa per i campi. In generale la variazione dell'azione per una trasformazione di scala infinitesima è

$$\delta S = \int d^d x \epsilon (-\partial_\mu D^\mu + \Delta_D(x)) \quad (4.10)$$

dove abbiamo definito la corrente di Noether

$$D^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} + l \Pi^\mu \Phi \quad (4.11)$$

e

$$\Delta_D(x) = (l+1) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \partial_\mu \Phi + l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - d \mathcal{L} \quad (4.12)$$

che si annulla se l'azione è invariante per dilatazioni.

Infine possiamo considerare la variazione dell'azione sotto trasformazioni conformi speciali e infinitesime

$$\delta S = \int d^d x \epsilon (-\partial_\mu K^{\alpha\mu} + 2x^\alpha \Delta_D(x) + \Delta_K^\alpha(x)) \quad (4.13)$$

con

$$K^{\alpha\mu} = (2x^\alpha x^\mu - \delta_\nu^\alpha x^\nu)T^{\mu\nu} + 2x_\nu \Pi^\mu (lg^{\nu\alpha} - \Sigma^{\nu\alpha})\Phi \quad (4.14)$$

dove  $\Delta_D(x)$  è stato già definito nell'equazione (4.12) mentre

$$\Delta_K^\alpha(x) = 2\Pi_\nu (lg^{\alpha\nu} + \Sigma^{\alpha\nu})\Phi. \quad (4.15)$$

Se l'azione è invariante per trasformazioni conformi speciali allora  $\Delta_D = 0$  mentre  $\Delta_K^\alpha$  deve essere una quadridivergenza totale  $\Delta_K^\alpha(x) = 2\partial_\nu \sigma^{\alpha\nu}$ . In tal caso la corrente di Noether è

$$J_K^{\mu\alpha} = K^{\alpha\mu} - 2\sigma^{\alpha\mu}. \quad (4.16)$$

Se il campo  $\Phi$  ha spin 1 o 1/2 si trova dal calcolo diretto che  $\sigma^{\alpha\nu} = 0$  e l'invarianza di scala, assieme a quella di Poincaré, implica l'invarianza sotto tutto il gruppo conforme. In questa situazione è possibile ridefinire nuovamente il tensore energia-impulso per annullarne la traccia e preservare al tempo stesso l'equazione di conservazione e la sua simmetria

$$\Theta^{\mu\nu} = T_B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda \partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu}, \quad (4.17)$$

con

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad \Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \quad \Theta^\mu = 0. \quad (4.18)$$

In modo particolare il tensore  $X$  deve soddisfare la condizione

$$g_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu} = 2\partial_\alpha \partial_\lambda \sigma^{\alpha\lambda} = -2g_{\mu\nu} T_B^{\mu\nu} \quad (4.19)$$

che evidenzia come il tensore energia-impulso di Belinfante  $T_B^{\mu\nu}$  abbia già traccia nulla nel caso particolare in cui  $\sigma^{\alpha\lambda}$  sia identicamente nullo.

Infine riportiamo le correnti conservate associate all'invarianza per dilatazioni e trasformazioni conformi speciali in funzione del nuovo tensore energia-impulso  $\Theta^{\mu\nu}$

$$J_D^\mu = x_\nu \Theta^{\mu\nu} \quad J_K^{\mu\alpha} = (2x_\nu x_\alpha - x^2 g_{\nu\alpha})\Theta^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

In una teoria quantistica con una costante d'accoppiamento che varia con il parametro di rinormalizzazione non è possibile preservare contemporaneamente le tre proprietà di  $\Theta^{\mu\nu}$  qui elencate poiché la procedura di regolarizzazione, benché non violi la simmetria di Poincaré, introduce inevitabilmente una scala di massa  $\mu$  che

rompe l'invarianza conforme. Quindi la teoria possiede un tensore energia-impulso conservato e simmetrico ma con una traccia diversa da zero. In conseguenza la corrente di Noether associata alle dilatazioni sviluppa un'anomalia e la sua equazione di conservazione è modificata da un termine proporzionale alla funzione  $\beta$  che descrive l'evoluzione della costante d'accoppiamento  $g$

$$\partial_\mu J_D^\mu = g_{\mu\nu}\Theta^{\mu\nu} = \frac{\beta(g)}{2g} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

La ridefinizione della teoria con l'introduzione della scala di rinormalizzazione  $\mu$  è indispensabile per controllare le divergenze ultraviolette che appaiono nell'espansione perturbativa. Questa procedura induce nella costante d'accoppiamento una dipendenza dal parametro  $\mu$  e quindi determina una funzione  $\beta(g)$  non nulla definita come

$$\beta(g) = \frac{dg}{d \ln \mu}. \quad (4.22)$$

In generale tale funzione, calcolabile perturbativamente, può anche annullarsi. Le regioni cinematiche in cui ciò avviene sono dette *finestre conformi*. Queste sono estremamente importanti perché mostrano che in tali situazioni le correzioni quantistiche si annullano. È questo il caso, ad esempio, di teorie contenenti un numero speciale di supersimmetrie.

## 4.2 Definizione del correlatore $TJJ$

In questa sezione introduciamo il correlatore  $\langle TJJ \rangle$  che descrive l'accoppiamento tra due correnti vettoriali elettromagnetiche e il tensore energia-impulso e ne presentiamo l'espansione perturbativa all'ordine  $e^2$  in elettrodinamica quantistica. Infine riportiamo una delle identità di Ward, legata all'invarianza per traslazioni della teoria, necessaria per definirlo correttamente. Il calcolo esplicito sarà esaminato nei successivi paragrafi.

Consideriamo ora la lagrangiana di QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (4.23)$$

e il tensore energia-impulso simmetrico suddiviso nel contributo fermionico libero  $T_{Dirac}$ , nella parte di interazione fermione-fotone  $T_{int}$  e nel contributo del campo

elettromagnetico  $T_{e.m.}$ . I tre tensori sono definiti nelle equazioni seguenti

$$T_{Dirac}^{\mu\nu} = -i\bar{\psi}\gamma^{(\mu}\overleftrightarrow{\partial}^{\nu)}\psi + g^{\mu\nu}(i\bar{\psi}\gamma^\lambda\overleftrightarrow{\partial}_\lambda\psi - m\bar{\psi}\psi), \quad (4.24)$$

$$T_{int}^{\mu\nu} = -eJ^{(\mu}A^{\nu)} + eg^{\mu\nu}J^\lambda A_\lambda, \quad (4.25)$$

$$T_{e.m.}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}, \quad (4.26)$$

dove la corrente elettromagnetica  $J^\mu$  è data da

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (4.27)$$

Nelle equazioni (4.24 - 4.26) abbiamo introdotto la notazione standard per la simmetrizzazione degli indici di un tensore e per le derivate a destra e a sinistra:  $H^{(\mu\nu)} \equiv (H^{\mu\nu} + H^{\nu\mu})/2$  e  $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv (\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)/2$ .

Il tensore energia-impulso complessivo è ottenuto sommando i tre contributi prima definiti

$$T^{\mu\nu} \equiv T_{Dirac}^{\mu\nu} + T_{int}^{\mu\nu} + T_{e.m.}^{\mu\nu}, \quad (4.28)$$

ma è anche conveniente introdurre un tensore parziale  $T_p$  che corrisponde soltanto alla somma del termine di Dirac e di interazione

$$T_p^{\mu\nu} \equiv T_{Dirac}^{\mu\nu} + T_{int}^{\mu\nu}. \quad (4.29)$$

Esso soddisfa l'equazione di conservazione parziale

$$\partial_\nu T_p^{\mu\nu} = -\partial_\nu T_{e.m.}^{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

che, con l'uso dell'equazione del moto per il campo elettromagnetico  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$ , diventa

$$\partial_\nu T_p^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}J_\lambda. \quad (4.31)$$

Sfruttando le equazioni del moto per il campo di Dirac è possibile esprimere la traccia del tensore energia-impulso  $T_p^{\mu\nu}$  nella forma

$$g_{\mu\nu}T_p^{\mu\nu} = -m\bar{\psi}\psi \quad (4.32)$$

che mette in evidenza l'invarianza conforme della teoria se  $m = 0$ . Questa relazione è valida solo a livello classico poiché, come abbiamo già discusso, manifesta un'anomalia a causa delle correzioni quantistiche, ossia la traccia  $T_{p\mu}^\mu$  è diversa da zero anche con fermioni di massa nulla

$$g_{\mu\nu}\langle T_p^{\mu\nu} \rangle|_{m=0} = -\frac{\beta(e)}{2e}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.33)$$

dove  $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$  è la  $\beta$  function dell'elettrodinamica quantistica.

Il correlatore  $\langle T_p J J \rangle$ , che nel seguito indicheremo con  $\langle TJJ \rangle$ , può essere estratto dall'integrale funzionale definente

$$\begin{aligned} \langle T_p^{\mu\nu}(z) \rangle_A &\equiv \int D\psi D\bar{\psi} T_p^{\mu\nu}(z) e^{i \int d^4x \mathcal{L} + \int J \cdot A(x) d^4x} \\ &= \langle T_p^{\mu\nu} e^{i \int d^4x J \cdot A(x)} \rangle \end{aligned} \quad (4.34)$$

in teoria perturbativa al secondo ordine nel campo esterno  $A$ . I termini rilevanti nell'espansione sono esplicitamente dati da

$$\langle T_p^{\mu\nu}(z) \rangle_A = \frac{1}{2!} \langle T_{Dirac}^{\mu\nu}(z) (J \cdot A)(J \cdot A) \rangle + \langle T_{int}^{\mu\nu}(J \cdot A) \rangle + \dots \quad (4.35)$$

con  $(J \cdot A) \equiv \int d^4x J \cdot A(x)$ .

Il correlatore, rappresentato dall'ampiezza  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(z; x, y)$ , è ottenuto derivando funzionalmente due volte rispetto al campo esterno  $A$

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(z; x, y) \equiv \left. \frac{\delta^2 \langle T_p^{\mu\nu}(z) \rangle_A}{\delta A_\alpha(x) \delta A_\beta(y)} \right|_{A=0} = V^{\mu\nu\alpha\beta} + W^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (4.36)$$

dove abbiamo definito

$$V^{\mu\nu\alpha\beta} = (ie)^2 \langle T_{Dirac}^{\mu\nu}(z) J^\alpha(x) J^\beta(y) \rangle|_{A=0}, \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu\alpha\beta} &= \left. \frac{\delta^2 \langle T_{int}^{\mu\nu}(z) (J \cdot A) \rangle}{\delta A_\alpha(x) \delta A_\beta(y)} \right|_{A=0} \\ &= \delta^4(x-z) g^{\alpha(\mu} \Pi^{\nu)\beta}(z, y) + \delta^4(y-z) g^{\beta(\mu} \Pi^{\nu)\alpha}(z, x) \\ &\quad - g^{\mu\nu} [\delta^4(x-z) - \delta^4(y-z)] \Pi^{\alpha\beta}(x, y). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Questi due contributi sono di ordine  $e^2$  e sono riportati in Fig.4.1; inoltre  $\Pi^{\alpha\beta}(x, y)$  rappresenta il tensore di polarizzazione del fotone ed è stato definito in equazione (4.47). Il diagramma triangolare (b) è generato da  $V^{\mu\nu\alpha\beta}$ , mentre il diagramma (c), con il suo simmetrico di Bose (ottenuto scambiato gli indici  $\alpha$  e  $\beta$  e i momenti  $p$  e  $q$ ), è realizzato dal termine  $W^{\mu\nu\alpha\beta}$ . L'anomalia conforme appare nell'espansione perturbativa di  $T_p$  e coinvolge solo questi diagrammi.

I vertici nello spazio dei momenti che costruiscono i diagrammi  $V^{\mu\nu\alpha\beta}$  e  $W^{\mu\nu\alpha\beta}$  all'ordine  $e^2$  sono dati da

$$V^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{1}{4} [\gamma^\mu (k_1 + k_2)^\nu + \gamma^\nu (k_1 + k_2)^\mu] - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\gamma^\lambda (k_1 + k_2)_\lambda + 2m], \quad (4.39)$$

$$W^{\mu\nu\alpha} = -\frac{1}{2} (\gamma^\mu g^{\nu\alpha} + \gamma^\nu g^{\mu\alpha}) + g^{\mu\nu} \gamma^\alpha. \quad (4.40)$$

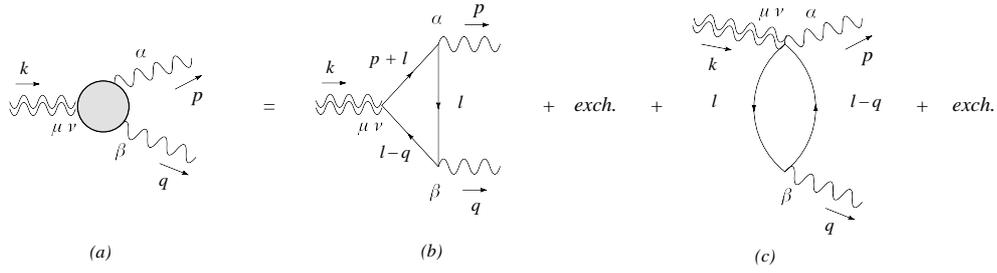


Figura 4.1: Il vertice  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$  ad un loop ottenuto sommando i contributi 1PI  $V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$  e  $W^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$ .

Usando le due definizioni precedenti per  $V^{\prime\mu\nu}(k_1, k_2)$  e  $W^{\prime\mu\nu\alpha}$  otteniamo rispettivamente le espressioni per i diagrammi (b) e (c) in Fig.4.1

$$V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = c \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}\{V^{\prime\mu\nu}(l+p, l-q)(l-\not{q}+m)\gamma^\beta(l+m)\gamma^\alpha(l+\not{p}+m)\}}{[l^2-m^2][(l-q)^2-m^2][(l+p)^2-m^2]}, \quad (4.41)$$

con  $c = -(-ie)^2 i^3$ , e

$$W^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = -(-ie)^2 i^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}\{W^{\prime\mu\nu\alpha}(l+m)\gamma^\beta(l-\not{q}+m)\}}{[l^2-m^2][(l-q)^2-m^2]}. \quad (4.42)$$

Quindi l'ampiezza completa ad un loop è ottenuta sommando i diagrammi precedenti e i loro simmetrici di Bose

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = V^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) + V^{\mu\nu\beta\alpha}(q, p) + W^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) + W^{\mu\nu\beta\alpha}(q, p). \quad (4.43)$$

Dall'analisi dimensionale è evidente che l'ampiezza tensoriale  $\Gamma$  è divergente nell'ultravioletto e necessita di alcune condizioni addizionali per essere definita in modo non ambiguo. Una delle identità di Ward che ci permettono di ridefinire le ampiezze divergenti che contribuiscono al correlatore  $\langle TJJ \rangle$  in termini delle rimanenti finite è ottenuta riscrivendo la conservazione del tensore energia-impulso in un'equazione per  $\Gamma$ . A tale scopo è necessario riesprimere l'equazione del moto classica

$$\partial_\nu T_{e.m.}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} J_\nu \quad (4.44)$$

in una condizione sull'integrale funzionale

$$\partial_\nu \langle T_{e.m.}^{\mu\nu} \rangle_A = -F^{\mu\nu} \langle J_\nu \rangle_A \quad (4.45)$$

che può essere espansa perturbativamente come

$$\partial_\nu \langle T_{e.m.}^{\mu\nu} \rangle_A = -F^{\mu\nu} \langle J_\nu \int d^4w (ie) J \cdot A(w) \rangle_{+\dots} \quad (4.46)$$

Nell'equazione (4.46) abbiamo ommesso il primo termine della serie di Dyson di  $\langle J_\nu \rangle_A$  poiché  $\langle J_\nu \rangle = 0$ .

Quindi l'identità di Ward cercata può essere ottenuta derivando funzionalmente due volte rispetto ad  $A$  l'eq. (4.45)

$$\partial_\nu \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\delta^2 (\partial_\nu \langle T_p^{\mu\nu} \rangle_A)}{\delta A_\alpha(x) \delta A_\beta(y)} \Big|_{A=0} = - \frac{\delta^2 (\partial_\nu \langle T_{e.m.}^{\mu\nu} \rangle_A)}{\delta A_\alpha(x) \delta A_\beta(y)} \Big|_{A=0} = \frac{\delta^2 (F^{\mu\lambda}(z) \langle J_\lambda(z) \rangle_A)}{\delta A_\alpha(x) \delta A_\beta(y)} \Big|_{A=0}.$$

Infine usando l'espressione del tensore di polarizzazione del fotone

$$\Pi^{\alpha\beta}(x, y) \equiv -ie^2 \langle J_\alpha(x) J_\beta(y) \rangle, \quad (4.47)$$

riscritta nello spazio dei momenti come

$$\Pi^{\alpha\beta}(p) = (p^2 g^{\alpha\beta} - p^\alpha p^\beta) \Pi(p^2, m^2), \quad (4.48)$$

$$\Pi(p^2, m^2) = \frac{e^2}{36\pi^2 p^2} \left[ 6A_0(m^2) - 6m^2 + p^2 - 3B_0(p^2, m^2) (2m^2 + p^2) \right], \quad (4.49)$$

l'identità di Ward non rinormalizzata nello spazio dei momenti diventa

$$\begin{aligned} k_\nu \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) &= \left( q^\mu p^\alpha p^\beta - q^\mu g^{\alpha\beta} p^2 + g^{\mu\beta} q^\alpha p^2 - g^{\mu\beta} p^\alpha p \cdot q \right) \Pi(p^2) \\ &+ \left( p^\mu q^\alpha q^\beta - p^\mu g^{\alpha\beta} q^2 + g^{\mu\alpha} p^\beta q^2 - g^{\mu\alpha} q^\beta p \cdot q \right) \Pi(q^2). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Questa condizione deve essere usata per definire univocamente il correlatore  $\langle TJJ \rangle$ .

### 4.3 Espansione tensoriale dell'ampiezza $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$

L'ampiezza completa ad un loop  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$  può essere espansa su una base tensoriale costruita con i 43 monomi elencati in Tab. 4.1

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = \sum_{i=1}^{43} A_i(k^2, p^2, q^2) l_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q). \quad (4.51)$$

Poiché l'ampiezza  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$  ha dimensione in massa pari a 2 è ovvio che non tutti i coefficienti  $A_i$  sono convergenti. Infatti essi possono essere suddivisi in 3 gruppi:

- a)  $A_1 \leq A_i \leq A_{16}$  - moltiplicati da un prodotto di quattro momenti, hanno dimensione in massa  $-2$  e quindi sono convergenti nell'UV;

$p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta$	$p^\mu p^\nu p^\alpha q^\beta$	$p^\mu p^\nu q^\alpha q^\beta$	$p^\mu q^\nu q^\alpha p^\beta$	$p^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta$	$g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}$
$q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta$	$p^\mu p^\nu q^\alpha p^\beta$	$p^\mu q^\nu p^\alpha q^\beta$	$q^\mu p^\nu q^\alpha p^\beta$	$q^\mu p^\nu q^\alpha q^\beta$	$g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$
	$p^\mu q^\nu p^\alpha p^\beta$	$q^\mu p^\nu p^\alpha q^\beta$	$q^\mu q^\nu p^\alpha p^\beta$	$q^\mu q^\nu p^\alpha q^\beta$	$g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}$
	$q^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta$			$q^\mu q^\nu q^\alpha p^\beta$	
$p^\mu p^\nu g^{\alpha\beta}$	$p^\beta p^\nu g^{\alpha\mu}$	$p^\beta p^\mu g^{\alpha\nu}$	$p^\alpha p^\nu g^{\beta\mu}$	$p^\mu p^\alpha g^{\beta\nu}$	$p^\alpha p^\beta g^{\mu\nu}$
$p^\mu q^\nu g^{\alpha\beta}$	$p^\beta q^\nu g^{\alpha\mu}$	$p^\beta q^\mu g^{\alpha\nu}$	$p^\alpha q^\nu g^{\beta\mu}$	$p^\mu q^\alpha g^{\beta\nu}$	$p^\alpha q^\beta g^{\mu\nu}$
$q^\mu p^\nu g^{\alpha\beta}$	$q^\beta p^\nu g^{\alpha\mu}$	$q^\beta p^\mu g^{\alpha\nu}$	$q^\alpha p^\nu g^{\beta\mu}$	$q^\mu p^\alpha g^{\beta\nu}$	$q^\alpha p^\beta g^{\mu\nu}$
$q^\mu q^\nu g^{\alpha\beta}$	$q^\beta q^\nu g^{\alpha\mu}$	$q^\beta q^\mu g^{\alpha\nu}$	$q^\alpha q^\nu g^{\beta\mu}$	$q^\mu q^\alpha g^{\beta\nu}$	$q^\alpha q^\beta g^{\mu\nu}$

Tabella 4.1: I 43 monomi tensoriali costruiti con il tensore della metrica e con i due momenti indipendenti  $p$  e  $q$  sui quali si può espandere un generico tensore di rango quattro.

- b)  $A_{17} \leq A_i \leq A_{19}$  - hanno dimensione in massa 2 poiché i quattro indici di Lorentz dell'ampiezza appartengono ai due tensori della metrica: sono divergenti;
- c)  $A_{20} \leq A_i \leq A_{43}$  - moltiplicano monomi costruiti con due momenti e un tensore metrico, hanno dimensione 0 e quindi divergono nell'UV.

Le 43 ampiezze invarianti possono essere ridotte significativamente a soli 13 coefficienti, chiamati  $F_i(k^2, p^2, q^2)$ . La riduzione consiste in 4 punti successivi caratterizzati dall'imposizione di alcune condizioni necessarie per rimuovere le divergenze dai fattori di forma elencati nei punti b) e c) e per ridefinirli in termini di quelli convergenti. Infatti richiediamo

- a) la simmetria negli indici  $\{\mu, \nu\}$  legata a quella del tensore energia-impulso  $T^{\mu\nu}$ ;
- b) la conservazione delle due correnti vettoriali su  $p^\alpha$  e  $q^\beta$ ;
- c) l'identità di Ward sul vertice con momento entrante  $k$  definita in eq. (4.50).

La condizione a) consiste in

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = \Gamma^{\nu\mu\alpha\beta}(p, q) \quad (4.52)$$

e permette di costruire un sistema lineare di 43 equazioni; alcune di esse sono identicamente soddisfatte poiché derivano da strutture tensoriali già simmetriche nello

scambio di  $\mu$  e  $\nu$ , mentre le rimanenti 14 condizioni sono

$$\begin{aligned}
A_5 &= A_6, & A_8 &= A_9, & A_{10} &= A_{11}, & A_{13} &= A_{14}, \\
A_{21} &= A_{22}, & A_{24} &= A_{28}, & A_{25} &= A_{29}, & A_{26} &= A_{30}, \\
A_{32} &= A_{36}, & A_{34} &= A_{37}, & A_{33} &= A_{38}, & A_{35} &= A_{39}, \\
A_{18} &= A_{19}, & A_{27} &= A_{31}, & & & & 
\end{aligned} \tag{4.53}$$

dove tutti i coefficienti  $A_i$  dipendono dagli invarianti  $k^2, p^2, q^2$ .

Dopo aver imposto i vincoli (4.53) in  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$ , i 43 tensori della decomposizione sono moltiplicati solo da 29 ampiezze invarianti.

La condizione b)

$$p_\alpha \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = q_\beta \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = 0 \tag{4.54}$$

richiede la conservazione della corrente vettoriale sui due vertici con indici  $\alpha, \beta$  e ci permette di riesprimere alcuni coefficienti divergenti in funzione di altri finiti. Dalla contrazione dei momenti  $p_\alpha$  e  $q_\beta$  sull'ampiezza  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$  emergono due insiemi di 14 strutture tensoriali indipendenti, quindi, per soddisfare le condizioni (4.54), è necessario che ogni loro coefficiente si annulli separatamente. La prima identità di Ward genera un sistema lineare composto da 10 equazioni

$$p_\alpha \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
A_{19} + A_{36} p^2 + A_{37} p \cdot q = 0, \\
A_{38} p^2 + A_{39} p \cdot q = 0, \\
A_{17} + A_{40} p^2 + A_{42} p \cdot q = 0, \\
A_{41} p^2 + A_{43} p \cdot q = 0, \\
A_{20} + 2A_{28} + A_1 p^2 + A_4 p \cdot q = 0, \\
2A_{30} + A_3 p^2 + A_7 p \cdot q = 0, \\
A_{22} + A_{29} + A_6 p^2 + A_{11} p \cdot q = 0, \\
A_{31} + A_9 p^2 + A_{14} p \cdot q = 0, \\
A_{23} + A_{12} p^2 + A_{16} p \cdot q = 0, \\
A_{15} p^2 + A_2 p \cdot q = 0,
\end{array} \right. \tag{4.55}$$

che scegliamo di risolvere per i coefficienti

$\{A_{15}, A_{17}, A_{19}, A_{23}, A_{28}, A_{29}, A_{30}, A_{31}, A_{39}, A_{43}\}$  dei quali solo il primo è convergente mentre tutti gli altri sono divergenti nell'ultravioletto.

In seguito a questa particolare scelta otteniamo

$$A_{15} = -A_2 \frac{p \cdot q}{p^2}, \quad A_{17} = -A_{40} p^2 - A_{42} p \cdot q, \quad (4.56)$$

$$A_{19} = -A_{36} p^2 - A_{37} p \cdot q, \quad A_{23} = -A_{12} p^2 - A_{16} p \cdot q, \quad (4.57)$$

$$A_{28} = \frac{1}{2} \left[ -A_{20} - A_1 p^2 - A_4 p \cdot q \right], \quad A_{29} = -A_{22} - A_6 p^2 - A_{11} p \cdot q, \quad (4.58)$$

$$A_{30} = -\frac{1}{2} \left[ A_3 p^2 + A_7 p \cdot q \right], \quad A_{31} = -A_9 p^2 - A_{14} p \cdot q, \quad (4.59)$$

$$A_{39} = -A_{38} \frac{p^2}{p \cdot q}, \quad A_{43} = -A_{41} \frac{p^2}{p \cdot q}. \quad (4.60)$$

In modo analogo imponiamo la seconda identità di Ward dopo aver sostituito la soluzione del precedente sistema nell'ampiezza originale. Denotiamo la nuova ampiezza con  $\Gamma_b^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$  dove il pedice  $b$  indica che la prima identità di Ward è stata soddisfatta. I nuovi vincoli forniscono le equazioni

$$q_\beta \Gamma_b^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_{40} p \cdot q + A_{41} q^2 = 0, \\ A_1 p \cdot q + A_3 q^2 = 0, \\ A_{20} + A_4 p \cdot q + A_7 q^2 = 0, \\ A_{36} + A_6 p \cdot q + A_9 q^2 = 0, \\ A_{22} + A_{37} + A_{11} p \cdot q + A_{14} q^2 = 0, \\ 2A_{38} + A_{12} p \cdot q - A_2 \frac{p \cdot q q^2}{p^2} = 0. \end{cases} \quad (4.61)$$

Scegliamo di risolvere questo sistema per le ampiezze  $\{A_1, A_{20}, A_{22}, A_{36}, A_{38}, A_{40}\}$  in termini delle restanti e otteniamo

$$A_{38} = -\frac{A_{12} p^2 p \cdot q - A_2 p \cdot q q^2}{2 p^2}, \quad A_{40} = -\frac{A_{41} q^2}{p \cdot q}, \quad (4.62)$$

$$A_1 = -\frac{A_3 q^2}{p \cdot q}, \quad A_{20} = -A_4 p \cdot q - A_7 q^2, \quad (4.63)$$

$$A_{22} = -A_{37} - A_{11} p \cdot q - A_{14} q^2, \quad A_{36} = -A_6 p \cdot q - A_9 q^2. \quad (4.64)$$

Le manipolazioni realizzate finora hanno permesso di ridurre il numero di ampiezze invarianti da 43 a 13 dopo aver richiesto la simmetria in  $\{\mu, \nu\}$  (14 equazioni), la prima identità di Ward su  $p_\alpha$  (10 equazioni) e la seconda su  $q_\beta$  (6 equazioni). I fattori di forma che sopravvivono in  $\Gamma_c^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$  dopo la riduzione sono

$\{A_2, A_3, A_4, A_6, A_7, A_9, A_{11}, A_{12}, A_{14}, A_{16}, A_{37}, A_{41}, A_{42}\}$ , ma possiamo osservare facilmente che in questo insieme compaiono ancora 3 coefficienti divergenti ( $A_{37}, A_{41}, A_{42}$ ). L'ampiezza  $\Gamma_c^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$  non è ancora completamente definita e richiede l'applicazione del vincolo indicato nella condizione c), ossia l'equazione (4.50). Questa nuova

relazione si traduce nelle equazioni

$$\text{Eq.(4.50)} \Rightarrow \begin{cases} -A_3 \left[ 1 + \frac{p \cdot p}{2p \cdot q} \right] + A_6 + \frac{1}{2} A_7 - A_9 - \frac{A_{41}}{p \cdot q} = 0, \\ A_{37} + A_{42} + A_4 [p \cdot p + p \cdot q] + A_{11} p \cdot q + \frac{1}{2} A_7 q \cdot q + \\ \quad + A_{11} q \cdot q + \frac{1}{2} A_3 \frac{p \cdot p \cdot q \cdot q}{p \cdot q} = 0, \\ \frac{1}{2} A_2 \frac{p \cdot q \cdot q \cdot q}{p \cdot p} - A_{41} \frac{p \cdot p + q \cdot q}{p \cdot q} - \frac{1}{2} A_3 p \cdot p + A_7 (p \cdot p + \frac{1}{2} p \cdot q) + A_6 p \cdot q \\ \quad + A_{12} (\frac{1}{2} p \cdot q + q \cdot q) + A_{14} (p \cdot q + 2 q \cdot q) + 2A_{37} \\ -\Pi(p^2) - \Pi(q^2) = 0 \end{cases}$$

Dalla soluzione del sistema ricaviamo

$$\begin{aligned} A_{37} = & -\frac{A_2}{4} \frac{p \cdot q \cdot q \cdot q}{p \cdot p} + \frac{1}{4} A_3 p \cdot p - \frac{1}{4} A_7 (2p \cdot p + p \cdot q) + \frac{1}{2} A_{41} \left( \frac{p \cdot p + q \cdot q}{p \cdot q} \right) \\ & - \frac{1}{2} A_6 p \cdot q - \frac{1}{4} A_{12} (p \cdot q + 2q \cdot q) - \frac{1}{2} A_{14} (p \cdot q + 2q \cdot q) \\ & + \frac{1}{2} [\Pi(p^2) + \Pi(q^2)], \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$A_{41} = -\frac{A_3}{2} p^2 - (A_3 - A_6 - A_7 + A_9) p \cdot q, \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} A_{42} = & \frac{A_3}{2} p^2 \left( \frac{p^2}{p \cdot q} + 1 - \frac{q^2}{p \cdot q} \right) + \frac{1}{2} A_7 (p^2 + p \cdot q - q^2) - A_4 (p^2 + p \cdot q) \\ & - (A_6 - A_9) p^2 + (A_{14} - A_{11})(q^2 + p \cdot q). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Dopo aver imposto tutti i vincoli elencati nelle condizioni a), b) e c) otteniamo un'espressione per  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$  in termini di sole 10 ampiezze invarianti che costituiscono l'insieme  $\mathcal{X} \equiv \{A_2, A_3, A_4, A_6, A_7, A_9, A_{11}, A_{12}, A_{14}, A_{16}\}$ , significativamente ridotto rispetto alle originali 43. Successive riduzioni sono possibili sfruttando la simmetria di Bose del diagramma (fino a 8 fattori di forma indipendenti), comunque, poiché non si otterrebbe altro che una complessità maggiore nelle strutture tensoriali che moltiplicano i coefficienti, è conveniente scegliere un insieme appropriato di componenti finite, seppur riducibili, caratterizzate da una struttura tensoriale più semplice.

L'insieme  $\mathcal{X}$  è molto comodo per il calcolo diretto del correlatore  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$  e per la riduzione degli integrali tensoriali che lo definiscono. Inoltre per confrontare i nostri risultati con quelli ottenuti in uno studio precedente [1] abbiamo ridefinito le  $A_i$  in funzione di 13 nuove ampiezze invarianti (non irriducibili),  $F_i$ , a cui corrispondono altrettante strutture tensoriali. Esse sono combinate in Tab.4.1 e sono riportate in Tab.4.2. La corrispondenza tra i due insiemi di fattori di forma è presentata in App.F.

## 4.4 Riorganizzazione dell'ampiezza $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$

Prima di fornire le espressioni analitiche per le ampiezze invarianti  $F_i$ , descriviamo brevemente la decomposizione tensoriale che definisce le 13 strutture introdotte in [1]. Definiamo due tensori di rango 2

$$u^{\alpha\beta}(p, q) \equiv (p \cdot q)g^{\alpha\beta} - q^\alpha p^\beta, \quad (4.68)$$

$$w^{\alpha\beta}(p, q) \equiv p^2 q^2 g^{\alpha\beta} + (p \cdot q)p^\alpha q^\beta - q^2 p^\alpha p^\beta - p^2 q^\alpha q^\beta, \quad (4.69)$$

che soddisfano la simmetria di Bose

$$u^{\alpha\beta}(p, q) = u^{\beta\alpha}(q, p), \quad (4.70)$$

$$w^{\alpha\beta}(p, q) = w^{\beta\alpha}(q, p), \quad (4.71)$$

e la conservazione della corrente vettoriale

$$p_\alpha u^{\alpha\beta}(p, q) = 0 = q_\beta u^{\alpha\beta}(p, q), \quad (4.72)$$

$$p_\alpha w^{\alpha\beta}(p, q) = 0 = q_\beta w^{\alpha\beta}(p, q). \quad (4.73)$$

I tensori  $u^{\alpha\beta}(p, q)$  e  $w^{\alpha\beta}(p, q)$  sono utilizzati per costruire i 13 elencati in Tab. 4.2. Cinque di questi sono simmetrici di Bose

$$t_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = t_i^{\mu\nu\beta\alpha}(q, p), \quad i = 1, 2, 7, 8, 13, \quad (4.74)$$

mentre gli altri otto costituiscono quattro coppie legate insieme dalla stessa simmetria

$$t_3^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = t_5^{\mu\nu\beta\alpha}(q, p), \quad (4.75)$$

$$t_4^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = t_6^{\mu\nu\beta\alpha}(q, p), \quad (4.76)$$

$$t_9^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = t_{10}^{\mu\nu\beta\alpha}(q, p), \quad (4.77)$$

$$t_{11}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = t_{12}^{\mu\nu\beta\alpha}(q, p). \quad (4.78)$$

L'ampiezza definita in (4.43) può essere espansa su questa base come

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = \sum_{i=1}^{13} F_i(s; s_1, s_2, m^2) t_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q), \quad (4.79)$$

dove le ampiezze  $F_i$  sono funzioni degli invarianti cinematici  $s = k^2 = (p + q)^2$ ,  $s_1 = p^2$ ,  $s_2 = q^2$  e della massa del fermione  $m$ .

I tensori  $t_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$  che compaiono nella decomposizione del correlatore  $\langle TJJ \rangle$  sono

$i$	$t_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$
1	$(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) u^{\alpha\beta}(p, q)$
2	$(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) w^{\alpha\beta}(p, q)$
3	$(p^2 g^{\mu\nu} - 4p^\mu p^\nu) u^{\alpha\beta}(p, q)$
4	$(p^2 g^{\mu\nu} - 4p^\mu p^\nu) w^{\alpha\beta}(p, q)$
5	$(q^2 g^{\mu\nu} - 4q^\mu q^\nu) u^{\alpha\beta}(p, q)$
6	$(q^2 g^{\mu\nu} - 4q^\mu q^\nu) w^{\alpha\beta}(p, q)$
7	$[p \cdot q g^{\mu\nu} - 2(q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu)] u^{\alpha\beta}(p, q)$
8	$[p \cdot q g^{\mu\nu} - 2(q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu)] w^{\alpha\beta}(p, q)$
9	$(p \cdot q p^\alpha - p^2 q^\alpha) [p^\beta (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) - p \cdot q (g^{\beta\nu} p^\mu + g^{\beta\mu} p^\nu)]$
10	$(p \cdot q q^\beta - q^2 p^\beta) [q^\alpha (q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu) - p \cdot q (g^{\alpha\nu} q^\mu + g^{\alpha\mu} q^\nu)]$
11	$(p \cdot q p^\alpha - p^2 q^\alpha) [2 q^\beta q^\mu q^\nu - q^2 (g^{\beta\nu} q^\mu + g^{\beta\mu} q^\nu)]$
12	$(p \cdot q q^\beta - q^2 p^\beta) [2 p^\alpha p^\mu p^\nu - p^2 (g^{\alpha\nu} p^\mu + g^{\alpha\mu} p^\nu)]$
13	$(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) g^{\alpha\beta} + p \cdot q (g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) - g^{\mu\nu} u^{\alpha\beta} - (g^{\beta\nu} p^\mu + g^{\beta\mu} p^\nu) q^\alpha - (g^{\alpha\nu} q^\mu + g^{\alpha\mu} q^\nu) p^\beta$

Tabella 4.2: Una base di 13 tensori di rango quattro che soddisfa la conservazione della corrente vettoriale sulle linee esterne con momenti  $p$  e  $q$ .

particolarmente comodi per determinare la contrazione  $g_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$  e quindi l'effetto delle correzioni quantistiche sulla traccia del tensore energia-impulso. Infatti solo le prime due strutture tensoriali,  $t_1^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$  e  $t_2^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$ , possiedono una traccia non nulla

$$g_{\mu\nu} t_1^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = 3k^2 u^{\alpha\beta}(p, q), \quad (4.80)$$

$$g_{\mu\nu} t_2^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = 3k^2 w^{\alpha\beta}(p, q), \quad (4.81)$$

conferendo, pertanto, un ruolo particolare alle ampiezze invarianti  $F_1$  e  $F_2$ . Esse infatti sono le uniche che contribuiscono alla traccia del correlatore  $\langle TJJ \rangle$

$$g_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = 3k^2 F_1(k^2; p^2, q^2) u^{\alpha\beta}(p, q) + 3k^2 F_2(k^2; p^2, q^2) w^{\alpha\beta}(p, q). \quad (4.82)$$

Questa si può scrivere come

$$g_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = \Lambda^{\alpha\beta}(p, q) - \frac{e^2}{6\pi^2} u^{\alpha\beta}(p, q), \quad (4.83)$$

dove abbiamo separato le correzioni di massa  $\Lambda^{\alpha\beta}(p, q)$  dal contributo anomalo. Il primo termine nella eq.(4.83) è definito come

$$\begin{aligned}\Lambda^{\alpha\beta}(p, q) &= -m(ie)^2 \int d^4x d^4y e^{ip\cdot x + iq\cdot y} \langle \bar{\psi} \psi J^\alpha(x) J^\beta(y) \rangle \\ &= -e^2 m \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{i}{\not{l} + \not{p} - m} \gamma^\alpha \frac{i}{\not{l} - m} \gamma^\beta \frac{i}{\not{l} - \not{q} - m} \right\} + \text{exch.}\end{aligned}\quad (4.84)$$

e si può espandere sui due tensori  $u^{\alpha\beta}(p, q)$  e  $w^{\alpha\beta}(p, q)$

$$\Lambda^{\alpha\beta}(p, q) = G_1(k^2; p^2, q^2) u^{\alpha\beta}(p, q) + G_2(k^2; p^2, q^2) w^{\alpha\beta}(p, q), \quad (4.85)$$

dove  $G_1(k^2; p^2, q^2)$  e  $G_2(k^2; p^2, q^2)$  sono proporzionali a  $m^2$ .

Confrontando le equazioni (4.82), (4.85) con (4.82) possiamo stabilire le seguenti relazioni

$$3k^2 F_1(k^2; p^2, q^2) = G_1(k^2; p^2, q^2) - \frac{e^2}{6\pi^2}, \quad (4.86)$$

$$3k^2 F_2(k^2; p^2, q^2) = G_2(k^2; p^2, q^2), \quad (4.87)$$

dalle quali osserviamo che solo  $F_1$  è responsabile dell'anomalia conforme. Le espressioni esplicite dei coefficienti  $G_1$  e  $G_2$  si ricavano facilmente a partire dai fattori di forma  $F_i$  che presenteremo nel paragrafo successivo.

In [1] le  $F_i$  sono state identificate in termini di integrali parametrici usando la parametrizzazione di Feynman, approccio simile a quello seguito da Rosenberg per costruire le 6 ampiezze invarianti del diagramma anomalo  $AVV$ . L'elemento centrale e originale del nostro lavoro consiste, invece, nel calcolo esplicito ad un loop dell'intero correlatore  $\langle TJJ \rangle$  in configurazioni cinematiche completamente generali.

## 4.5 Il correlatore $TJJ$ off-shell

Nella prima parte della tesi gli integrali parametrici di Rosenberg sono stati espressi in forma analitica ricalcolando il diagramma triangolare con la tecnica della riduzione dimensionale e usando la decomposizione degli integrali tensoriali in funzioni scalari. Riapplicando lo stesso metodo al correlatore  $\langle TJJ \rangle$  siamo in grado di fornire l'espressione esplicita dei coefficienti parametrici usati in [1]. Infine abbiamo verificato un perfetto accordo numerico tra i nostri risultati e le forme parametriche.

In questo paragrafo presentiamo i fattori di forma  $F_i$  con virtualità generiche sulle linee esterne e con un fermione di massa  $m$ . Successivamente questi risultati

verranno specializzati in particolari configurazioni cinematiche di interesse, come ad esempio il limite on-shell  $s_1 = s_2 = 0$  usato per descrivere la propagazione di fotoni in un campo gravitazionale.

Gli integrali scalari coinvolti nella riduzione tensoriale sono tutti massivi con massa  $m$  e con valori arbitrari degli invarianti cinematici. In particolare la funzione ad un punto, *tadpole massivo*, è indicata con  $\mathcal{A}_0(m^2)$ ,  $\mathcal{B}_0(s, m^2)$  è l'integrale scalare a due punti e  $\mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2)$  è la funzione a tre punti massiva. Essi sono definiti come

$$\mathcal{A}_0(m^2) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^n l \frac{1}{l^2 - m^2} = m^2 \left[ \frac{1}{\bar{\epsilon}} + 1 - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(k^2, m^2) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^n l \frac{1}{(l^2 - m^2)((l - k)^2 - m^2)} \\ &= \frac{1}{\bar{\epsilon}} + 2 - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) - a_3 \log \left( \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right), \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$(4.90)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) &= -\frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \sum_{i=1}^3 \left[ Li_2 \frac{b_i - 1}{a_i + b_i} - Li_2 \frac{-b_i - 1}{a_i - b_i} + Li_2 \frac{-b_i + 1}{a_i - b_i} \right. \\ &\quad \left. - Li_2 \frac{b_i + 1}{a_i + b_i} \right], \end{aligned} \quad (4.91)$$

con

$$a_i = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s_i}} \quad b_i = \frac{-s_i + s_j + s_k}{\sqrt{\sigma}}, \quad (4.92)$$

dove  $s_3 = s$  e nell'ultima equazione  $i = 1, 2, 3$  con  $j, k \neq i$ .

Le funzioni ad un punto e a due punti sono divergenti ed è possibile estrarre, in regolarizzazione dimensionale con  $n = 4 - 2\epsilon$  dimensioni, le loro parti singolari

$$\mathcal{A}_0(m^2)^{sing.} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} m^2, \quad \mathcal{B}_0(s, m^2)^{sing.} \rightarrow \frac{1}{\epsilon}. \quad (4.93)$$

Per esprimere i fattori di forma useremo due combinazioni finite ottenute dalle precedenti funzioni scalari, ossia

$$\mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2) = m^2 \left[ 1 - a_3 \log \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right], \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i \equiv \mathcal{D}_i(s, s_i, m^2) &= \mathcal{B}_0(s, m^2) - \mathcal{B}_0(s_i, m^2) = \left[ a_i \log \frac{a_i + 1}{a_i - 1} - a_3 \log \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right] \\ i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Di seguito riportiamo le ampiezze invarianti  $F_i(s; s_1, s_2, m^2)$  con  $i = 1, \dots, 13$  nella loro forma più generale. Per semplificare le espressioni abbiamo usato le convenzioni  $\gamma \equiv s - s_1 - s_2$ ,  $\sigma \equiv s^2 - 2(s_1 + s_2)s + (s_1 - s_2)^2$  ed evidenziato i fattori di forma per renderne più agevole l'identificazione.

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_1(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= -\frac{e^2}{18\pi^2 s} + \frac{e^2 \gamma m^2}{3\pi^2 s \sigma} \\
&- \frac{e^2 \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) s_1 [-(s - s_1)^2 + 5s_2^2 - 4(s + s_1)s_2] m^2}{3\pi^2 s \sigma^2} \\
&+ \frac{e^2 \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) s_2 [s^2 + 4s_1 s - 2s_2 s - 5s_1^2 + s_2^2 + 4s_1 s_2] m^2}{3\pi^2 s \sigma^2} \\
&- e^2 \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left[ -\frac{2m^4 \gamma}{3\pi^2 s \sigma} \right. \\
&\left. + \frac{m^2 \gamma [(s - s_1)^3 - s_2^3 + (3s + s_1)s_2^2 + (-3s^2 - 10s_1 s + s_1^2)s_2]}{6\pi^2 s \sigma^2} \right], \tag{4.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_2(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= -\frac{2e^2 m^2}{3\pi^2 s \sigma} \\
&- \frac{2e^2 \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) [(s - s_1)^2 - 2s_2^2 + (s + s_1)s_2] m^2}{3\pi^2 s \sigma^2} \\
&- \frac{2e^2 \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) m^2}{3\pi^2 s \sigma^2} [s^2 + (s_1 - 2s_2)s - 2s_1^2 + s_2^2 + s_1 s_2] \\
&- e^2 \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left[ \frac{4m^4}{3\pi^2 s \sigma} + \frac{m^2}{3\pi^2 s \sigma^2} [s^3 - (s_1 + s_2)s^2 - (s_1^2 - 6s_2 s_1 + s_2^2)s \right. \\
&\quad \left. + (s_1 - s_2)^2 (s_1 + s_2)] \right], \tag{4.97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_3(s; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= \underline{\mathbf{F}_5(s; \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{m}^2)} = -\frac{e^2}{144\pi^2 s \sigma^3} \left[ s^6 - 3(s_1 - 4s_2) s^5 + 6(3s_1 - 7s_2) s_2 s^4 \right. \\
&+ 2(5s_1^3 - 69s_2 s_1^2 + 117s_2^2 s_1 + 23s_2^3) s^3 - 3(5s_1^4 - 62s_2 s_1^3 + 72s_2^2 s_1^2 + 50s_2^3 s_1 + 7s_2^4) s^2 \\
&+ 3(s_1 - s_2)^2 (3s_1^3 - 24s_2 s_1^2 - 33s_2^2 s_1 + 2s_2^3) s - 2(s_1 - s_2)^6 \left. \right] \\
&- \frac{e^2 \gamma m^2}{6\pi^2 s \sigma^2} \left[ s^2 - 2(s_1 - 3s_2) s + (s_1 - s_2)^2 \right] \\
&- \frac{e^2 \gamma}{12\pi^2 s \sigma^2} \left[ s^2 + (5s_2 - 2s_1) s + (s_1 - s_2)^2 \right] [\mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2)] \\
&- \frac{e^2 m^2}{12\pi^2 s \sigma^3} \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) \left[ (2s + s_1)(s - s_1)^4 - 12(s + s_1) s_2^2 (s - s_1)^2 \right. \\
&\quad \left. + s_1(41s + 2s_1) s_2 (s - s_1)^2 - (6s + 5s_1) s_2^4 + (16s^2 - 41s_1 s + 14s_1^2) s_2^3 \right] \\
&- \frac{e^2 s_1}{48\pi^2 \sigma^4} \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) \left[ (s - s_1)^6 + 2(14s + 11s_1) s_2 (s - s_1)^4 \right. \\
&\quad - (23s^2 - 214s_1 s + 19s_1^2) s_2^2 (s - s_1)^2 + 2 - 21s_2^6 + (5s_1 - 2s) s_2^5 \\
&\quad \left. + (107s^2 - 318s_1 s + 71s_1^2) s_2^4 + 8(-11s^3 + 18s_1 s^2 + 17s_1^2 s - 8s_1^3) s_2^3 \right] \\
&- \frac{e^2 s_2 m^2}{12\pi^2 s \sigma^3} \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) \left[ s_2^4 + (19s + 2s_1) s_2^3 - 2(12s^2 - 23s_1 s + 6s_1^2) s_2^2 \right. \\
&\quad \left. - (s - s_1)(13s^2 - 49s_1 s + 14s_1^2) s_2 + (s - s_1)^3 (17s + 5s_1) \right] \\
&- \frac{e^2 s_2}{48\pi^2 \sigma^4} \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) \left[ s_2^6 - 2(s - 14s_1) s_2^5 + (s^2 + 120s_1 s - 37s_1^2) s_2^4 \right. \\
&\quad - 4(s^3 + 49s_1 s^2 - 69s_1^2 s + 13s_1^3) s_2^3 + (s - s_1)(11s^3 - 69s_1 s^2 + 309s_1^2 s - 83s_1^3) s_2^2 \\
&\quad - 2(s - s_1)^3 (5s^2 - 49s_1 s - 4s_1^2) s_2 + 3(s - s_1)^5 (s + 5s_1) \left. \right] \\
&- e^2 \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left[ \frac{\gamma m^4}{3\pi^2 s \sigma^2} [s^2 + (7s_2 - 2s_1) s + (s_1 - s_2)^2] \right. \\
&\quad + \frac{m^2}{24\pi^2 s \sigma^3} [-s_2^6 + (2s_1 - 9s) s_2^5 + (12s^2 - 65s_1 s + s_1^2) s_2^4 \\
&\quad + 2(13s^3 - 54s_1 s^2 + 55s_1^2 s - 2s_1^3) s_2^3 - (s - s_1)(45s^3 - 133s_1 s^2 + 15s_1^2 s + s_1^3) s_2^2 \\
&\quad \left. + (s - s_1)^3 (15s^2 + 47s_1 s - 2s_1^2) s_2 + (s - s_1)^5 (2s + s_1) \right] \\
&\quad + \frac{s_1 s_2}{8\pi^2 \sigma^4} [2s^6 + 3(s_2 - 3s_1) s^5 + (15s_1^2 + 6s_2 s_1 - 13s_2^2) s^4 \\
&\quad + 2(-5s_1^3 - 19s_2 s_1^2 + 29s_2^2 s_1 + s_2^3) s^3 + 12s_2(4s_1^3 - 4s_2 s_1^2 - 3s_2^2 s_1 + s_2^3) s^2 \\
&\quad \left. + (s_1 - s_2)^2 (3s_1^3 - 15s_2 s_1^2 - 31s_2^2 s_1 - 5s_2^3) s - (s_1 - s_2)^4 (s_1 + s_2)^2 \right],
\end{aligned} \tag{4.98}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_4(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= \underline{\mathbf{F}_6(\mathbf{s}; \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{m}^2)} = \\
&\frac{e^2 m^2}{6\pi^2 s \sigma^2 s_1} \left[ 3s^3 - 2(2s_1 + 3s_2) s^2 + (-s_1^2 + 6s_2 s_1 + 3s_2^2) s + 2s_1 (s_1 - s_2)^2 \right] \\
&+ \frac{e^2}{12\pi^2 s \sigma^2 s_1} [\mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2)] \left[ 3s^3 - 2(2s_1 + 3s_2) s^2 + \right. \\
&\quad \left. (-s_1^2 + 4s_2 s_1 + 3s_2^2) s + 2s_1 (s_1 - s_2)^2 \right] \\
&+ \frac{e^2}{24\pi^2 \sigma^3 s_1} \left[ -s_2^5 + (6s + 11s_1) s_2^4 - (14s^2 + s_1 s + 5s_1^2) s_2^3 + (16s^3 - 35s_1 s^2 + 46s_1^2 s - 15s_1^3) s_2^2 \right. \\
&\quad \left. - (s - s_1)^2 (9s^2 - 11s_1 s - 6s_1^2) s_2 + 2(s - s_1)^4 (s + 2s_1) \right] \\
&- e^2 \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) \left[ \frac{m^2}{12\pi^2 s \sigma^3 s_1} \left( -2(2s + s_1) (s - s_1)^4 + (3s^2 - 43s_1 s + 2s_1^2) s_2 (s - s_1)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (9s + 4s_1) s_2^4 + (-23s^2 + 29s_1 s - 10s_1^2) s_2^3 + (15s^3 + 2s_1 s^2 + 5s_1^2 s + 6s_1^3) s_2^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{48\pi^2 \sigma^4 s_1} \left( 3(s + s_1) (s - s_1)^6 - 4(4s^2 - 14s_1 s - 5s_1^2) s_2 (s - s_1)^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (35s^3 - 119s_1 s^2 + 169s_1^2 s - 13s_1^3) s_2^2 (s - s_1)^2 + (s - 3s_1) s_2^6 - 8(s^2 + 9s_1 s + 7s_1^2) s_2^5 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (25s^3 + 159s_1 s^2 - 197s_1^2 s + 157s_1^3) s_2^4 + 4(-10s^4 + 21s_1^2 s^2 + 28s_1^3 s - 27s_1^4) s_2^3 \right) \right] \\
&+ e^2 \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) \left[ \frac{m^2}{12\pi^2 s \sigma^3 s_1} \left( 2s^5 + (15s_1 - 8s_2) s^4 + (-53s_1^2 - 5s_2 s_1 + 12s_2^2) s^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (49s_1^3 + 46s_2 s_1^2 - 33s_2^2 s_1 - 8s_2^3) s^2 - (s_1 - s_2) (9s_1^3 + 52s_2 s_1^2 + 23s_2^2 s_1 + 2s_2^3) s \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2s_1 (s_1 - s_2)^3 (2s_1 + s_2) \right) + \frac{1}{48\pi^2 \sigma^4} \left( s_2^6 + 4(6s + 11s_1) s_2^5 + (-87s^2 + 106s_1 s - 91s_1^2) s_2^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4(22s^3 - 69s_1 s^2 + 40s_1^2 s + s_1^3) s_2^3 + (s - s_1) (3s^3 - 29s_1 s^2 + 209s_1^2 s - 79s_1^3) s_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 8(s - s_1)^3 (6s^2 - 13s_1 s - 4s_1^2) s_2 + (s - s_1)^5 (19s + 5s_1) \right) \right] \\
&+ e^2 \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left\{ \frac{m^4}{6\pi^2 \sigma^2} \left[ \frac{\sigma(3s + 2s_1)}{s s_1} + 18s_2 \right] - \frac{m^2}{24\pi^2 \sigma^3} \left[ -\frac{\sigma^2}{s s_1} (9s^2 + (59s_1 + 3s_2) s \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2s_1 (s_1 + s_2)) + 12(3s^2 - 3(22s_1 + 7s_2) s + s_1 (3s_1 - 17s_2)) \sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 720 s s_1 ((s - s_1)^2 - 2(s + s_1) s_2) \right] - \frac{1}{16\pi^2 \sigma^4} \left[ -2s (s - s_1)^6 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(s^2 + 7s_1 s + 2s_1^2) s_2 (s - s_1)^4 + 2(7s^3 + 6s_1 s^2 + 11s_1^2 s - 4s_1^3) s_2^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 12(2s^3 - 3s_1 s^2 - 2s_1^2 s + s_1^3) s_2^2 (s - s_1)^2 - 4(s + s_1) s_2^6 + 6(s^2 - 5s_1 s + 2s_1^2) s_2^5 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4(9s^4 - 25s_1 s^3 + 33s_1^2 s^2 - 15s_1^3 s + 2s_1^4) s_2^3 \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_7(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= \frac{e^2 m^2}{3\pi^2 s \sigma^2} \left[ (s^2 + 12s_2 s - s_2^2) s_1 + s_1^3 - (2s + s_2) s_1^2 + (s - s_2)^2 s_2 \right] \\
&+ \frac{e^2}{72\pi^2} \left[ \frac{840s(2(s+s_1)s_2 - (s-s_1)^2) s_1^2}{\sigma^3} + \frac{6(-13s^2 + 166s_1 s - 13s_1^2 + 39(s+s_1)s_2) s_1}{\sigma^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3(-s + 27s_1 + s_2)}{\sigma} + \frac{2}{s} + \frac{9s}{\gamma^2} - \frac{6}{\gamma} \right] \\
&+ \frac{e^2}{6\pi^2} [\mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2)] \left[ \frac{14s_1 s_2}{\sigma^2} + \frac{s + s_1 + s_2}{s\sigma} - \frac{3}{\gamma^2} \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left\{ m^4 \left[ \frac{16\gamma}{3s\sigma} - \frac{96s_1 s_2}{\sigma^2} - \frac{16}{\gamma^2} \right] + m^2 \left[ \frac{960s((s-s_1)^2 - 2(s+s_1)s_2) s_1^2}{\sigma^3} - \frac{4}{3s} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4}{\gamma} + \frac{16(7s_1^2 - (74s + 21s_2)s_1 + s(7s - 19s_2)) s_1}{\sigma^2} - \frac{4(3s(2s + s_2) + s_1(87s + 4s_2))}{3s\sigma} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{4s_1 s_2}{\gamma^2 \sigma^4} \left[ (-9s^2 + 22s_2 s - 4s_2^2) s_1^6 + 2s(20s^2 - 39s_2 s + 21s_2^2) s_1^5 + (s - s_2)^6 s_2(4s + s_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2s(s - s_2)^4(2s^2 + 5s_2 s + 11s_2^2) s_1 + (-65s^4 + 96s_2 s^3 + 33s_2^2 s^2 - 62s_2^3 s + 6s_2^4) s_1^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2s(27s^4 - 22s_2 s^3 - 108s_2^2 s^2 + 102s_2^3 s - 31s_2^4) s_1^3 - (s - s_2)^2(23s^4 + 40s_2 s^3 - 105s_2^2 s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 34s_2^3 s + 4s_2^4) s_1^2 + s_1^8 - 2s s_1^7 \right] \right\} \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) \left[ \frac{2}{3} m^2 \left( \frac{3}{\gamma^2} \left( 1 - \frac{3s_2}{s - s_1} \right) + \frac{20s_1^2 - 37s s_1 + s(9s_2 - 19s)}{\sigma s (s - s_1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{8s_1(3s_1^2 - (61s + 3s_2)s_1 + s(3s - 19s_2))}{\sigma^2 s} + \frac{440s_1^2((s - s_1)^2 - (3s + s_1)s_2)}{\sigma^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2s_1}{3\gamma^2 \sigma^4} \left( -(317s^2 + 227s_1 s + 64s_1^2) s_2^6 + (s_1 - s)^5 (-7s^2 + 39s_1 s + 32s_1^2) s_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (397s^3 + 846s_1 s^2 - 539s_1^2 s + 312s_1^3) s_2^5 - (s - s_1)^3 (23s^3 + 114s_1 s^2 + 463s_1^2 s - 16s_1^3) s_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (275s^4 + s_1(1181s^3 + s_1(3s_1(93s + 94s_1) - 1441s^2))) s_2^4 + (s - s_1)(103s^4 + 767s_1 s^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 79s_1^2 s^2 - 563s_1^3 s - 36s_1^4) s_2^3 - 23s_2^8 + (133s + 4s_1) s_2^7 + (s_1 - s)^7 (2s + s_1) \right) \right] \\
&- e^2 \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) \left[ \frac{m^2}{6\pi^2 s \gamma^2 \sigma^3} \left( (-6s^2 + 49s_1 s - 7s_1^2) s_2^5 + (s - s_1)^4 (16s^2 - 5s_1(s + s_1)) s_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + s_2^7 - (s - 4s_1) s_2^6 - 4s(s - s_1)^6 + 2(5s^3 - 87s_1 s^2 + 56s_1^2 s - 4s_1^3) s_2^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (s - s_1)^2 (21s^3 + 40s_1 s^2 + 147s_1^2 s - 4s_1^3) s_2^2 + (5s^4 + 164s_1 s^3 - 68s_1^2 s^2 - 16s_1^3 s + 11s_1^4) s_2^3 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{s_2}{24\pi^2 \gamma^2 \sigma^4} \left( -23s_1^8 + (133s + 4s_2) s_1^7 - (317s^2 + 227s_2 s + 64s_2^2) s_1^6 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s - s_2)^5 (7s^2 - 39s_2 s - 32s_2^2) s_1 - (s - s_2)^7 (2s + s_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (397s^3 + 846s_2 s^2 - 539s_2^2 s + 312s_2^3) s_1^5 - (s - s_2)^3 (23s^3 + 114s_2 s^2 + 463s_2^2 s - 16s_2^3) s_1^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (275s^4 + s_2(1181s^3 + s_2(3s_2(93s + 94s_2) - 1441s^2))) s_1^4 + (s - s_2)(103s^4 + 767s_2 s^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 79s_2^2 s^2 - 563s_2^3 s - 36s_2^4) s_1^3 \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_8(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= -\frac{e^2 m^2}{6\pi^2 s \sigma^2} \left[ 3s^2 - 2(s_1 + s_2)s - (s_1 - s_2)^2 \right] \\
&- \frac{e^2}{3\pi^2 s \gamma \sigma^2} \left( \mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2) \right) \left[ 4s^3 - 7(s_1 + s_2)s^2 + 2(s_1^2 + s_2 s_1 + s_2^2)s \right. \\
&\quad \left. + (s_1 - s_2)^2 (s_1 + s_2) \right] - \frac{e^2}{12\pi^2 \gamma \sigma^3} \left[ 4s_2^5 + (14s_1 - 11s)s_2^4 + 2(s - s_1)(2s + 9s_1)s_2^3 \right. \\
&\quad \left. + 2(7s^3 - 43s_1 s^2 + 33s_1^2 s - 9s_1^3)s_2^2 - 2(s - s_1)^2(8s^2 - 21s_1 s - 7s_1^2)s_2 \right. \\
&\quad \left. + (s - s_1)^4(5s + 4s_1) \right] - e^2 \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) \left[ \frac{m^2}{3\pi^2 s \gamma \sigma^3} \left( -2s_2^5 + (3s_1 - 10s)s_2^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (39s^2 - 33s_1 s + 2s_1^2)s_2^3 + 7s(s - s_1)^2(s + 5s_1)s_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-37s^3 + 20s_1 s^2 + 9s_1^2 s - 4s_1^3)s_2^2 + (s - s_1)^4(3s + s_1) \right) + \frac{1}{24\pi^2 \gamma \sigma^4} \left( -5s_2^7 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3(s - 13s_1)s_2^6 + (57s^2 - 128s_1 s + 43s_1^2)s_2^5 + (-155s^3 + 567s_1 s^2 - 341s_1^2 s + 121s_1^3)s_2^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3(55s^4 - 176s_1 s^3 + 86s_1^2 s^2 + 56s_1^3 s - 53s_1^4)s_2^3 + 3(s - s_1)^6(s + s_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (s - s_1)^2(75s^3 + 103s_1 s^2 - 311s_1^2 s - 11s_1^3)s_2^2 + (s - s_1)^4(7s^2 + 124s_1 s + 25s_1^2)s_2 \right) \right] \\
&- e^2 \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) \left[ \frac{m^2}{3\pi^2 s \gamma \sigma^3} \left( s_2^5 - s s_2^4 + (-6s^2 + 35s_1 s - 4s_1^2)s_2^3 + (14s^3 - 63s_1 s^2 + 9s_1^2 s + 2s_1^3)s_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-11s^4 + 21s_1 s^3 + 20s_1^2 s^2 - 33s_1^3 s + 3s_1^4)s_2 + (s - s_1)^3(3s^2 + 16s_1 s + 2s_1^2) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24\pi^2 \gamma \sigma^4} \left( 3s_2^7 + 5(5s_1 - 3s)s_2^6 + (27s^2 + 24s_1 s + 11s_1^2)s_2^5 - (15s^3 + 339s_1 s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 289s_1^2 s + 159s_1^3)s_2^4 + (-15s^4 + 616s_1 s^3 - 714s_1^2 s^2 + 168s_1^3 s + 121s_1^4)s_2^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s - s_1)(27s^4 - 402s_1 s^3 + 40s_1^2 s^2 + 298s_1^3 s - 43s_1^4)s_2^2 - (s - s_1)^3(15s^3 - 51s_1 s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 245s_1^2 s - 39s_1^3)s_2 + (s - s_1)^5(3s^2 + 22s_1 s + 5s_1^2) \right) \right] \\
&- e^2 \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left[ \frac{2m^4}{3\pi^2 s \gamma \sigma^2} \left( 2s^3 - 3(s_1 + s_2)s^2 + 10s_1 s_2 s + (s_1 - s_2)^2 (s_1 + s_2) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{6\pi^2 s \sigma^3} \left( 11s^5 - 18(s_1 + s_2)s^4 + (-11s_1^2 + 94s_2 s_1 - 11s_2^2)s^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s_1 + s_2)(31s_1^2 - 90s_2 s_1 + 31s_2^2)s^2 - 4(s_1 - s_2)^2(3s_1^2 + 11s_2 s_1 + 3s_2^2)s \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (s_1 - s_2)^4 (s_1 + s_2) \right) + \frac{1}{4\pi^2 \gamma \sigma^4} \left( (s_1 + s_2)s^7 - 6(s_1^2 - s_2 s_1 + s_2^2)s^6 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3(s_1 + s_2)(5s_1^2 - 12s_2 s_1 + 5s_2^2)s^5 + 2(-10s_1^4 + 3s_2 s_1^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 54s_2^2 s_1^2 + 3s_2^3 s_1 - 10s_2^4)s^4 + (s_1 + s_2)(15s_1^4 + 16s_2 s_1^3 - 126s_2^2 s_1^2 + 16s_2^3 s_1 + 15s_2^4)s^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 6(s_1^6 + 5s_2 s_1^5 - s_2^2 s_1^4 - 18s_2^3 s_1^3 - s_2^4 s_1^2 + 5s_2^5 s_1 + s_2^6)s^2 + (s_1 - s_2)^2 (s_1 + s_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (s_1^4 + 6s_2 s_1^3 + 34s_2^2 s_1^2 + 6s_2^3 s_1 + s_2^4)s + 2s_1(s_1 - s_2)^4 s_2 (s_1 + s_2)^2 \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_9(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= \underline{\mathbf{F}_{10}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{m}^2)} = -\frac{2e^2m^2}{3\pi^2\sigma s_1} - \frac{e^2}{6\pi^2 s_1} \left[ \mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2) \right] \left( \frac{3}{\gamma^2} + \frac{1}{\sigma} \right) \\
&+ \frac{e^2}{12\pi^2\gamma^2\sigma^2} \left[ (s-s_1)^4 - 4(4s+s_1)s_2(s-s_1)^2 - 3s_2^4 + 4(s_1-2s)s_2^3 + 2(13s^2-2s_1s+s_1^2)s_2^2 \right] \\
&- e^2\mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left[ \frac{4s_2m^4}{\pi^2\gamma^2\sigma} + \frac{m^2}{2\pi^2\gamma\sigma^2} \left( (s-s_1)^3 + (7s+s_1)s_2(s-s_1) - 3s_2^3 + 5(s_1-s)s_2^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{8ss_2}{\gamma^2\sigma^3} \left( s_2^5 + (2s_1-3s)s_2^4 + 2(s-s_1)(s+2s_1)s_2^3 + 2(s^3-7s_1s^2+3s_1^2s-s_1^3)s_2^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - (s-3s_1)(s-s_1)^2(3s+s_1)s_2 + s(s-s_1)^4 \right] \\
&- e^2\mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) \left[ \frac{2s_2m^2}{3\pi^2\gamma^2\sigma^2} \left( 8(s-s_1)^2 - 5s_2^2 - 3(s+s_1)s_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{s_2}{12\pi^2\gamma^2\sigma^3} \left( s_2^5 - (35s+11s_1)s_2^4 + 30(3s^2+s_1^2)s_2^3 + 2(-35s^3+17s_1s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 11s_1^2s-17s_1^3)s_2^2 + (s-s_1)^2(5s^2+26s_1s+17s_1^2)s_2 + 3(s-s_1)^4(3s-s_1) \right) \right] \\
&- e^2\mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) \left[ \frac{2m^2}{3\pi^2\gamma^2\sigma^2s_1} \left( -s_2^4 + 2(2s+3s_1)s_2^3 + (-6s^2-6s_1s+s_1^2)s_2^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + (s-s_1)(4s^2-2s_1s+3s_1^2)s_2 - (s-3s_1)(s-s_1)^3 \right] + \frac{1}{12\pi^2\gamma^2\sigma^3} \left( -s_2^6 + (18s+11s_1)s_2^5 \right. \\
&\quad \left. - 3(21s^2-3s_1s+10s_1^2)s_2^4 + 2(46s^3-37s_1s^2+2s_1^2s+17s_1^3)s_2^3 \right. \\
&\quad \left. - (63s^4-82s_1s^3+2s_1^3s+17s_1^4)s_2^2 + 3(s-s_1)^3(6s^2+7s_1s-s_1^2)s_2 - s(s-s_1)^5 \right) \Big], \tag{4.102}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_{11}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= \underline{\mathbf{F}_{12}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{m}^2)} = \frac{2e^2m^2}{3\pi^2\sigma s_2} + \frac{e^2}{6\pi^2\sigma s_2} [\mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2)] \\
&+ \frac{e^2}{12\pi^2\sigma^2s_2} \left[ 2s^3 - (5s_1+2s_2)s^2 + (4s_1^2+4s_2s_1-2s_2^2)s - (s_1-2s_2)(s_1-s_2)^2 \right] \\
&- e^2\mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left[ \frac{m^4}{\pi^2\sigma s_2} + \frac{m^2}{4\pi^2\sigma^2s_2} \left( 3s^3 - (5s_1+3s_2)s^2 + (s_1^2+10s_2s_1-3s_2^2)s \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s_1-s_2)^2(s_1+3s_2) \right) + \frac{s}{4\pi^2\sigma^3} \left( s^4 + (s_1-4s_2)s^3 - (s_1-s_2)(5s_1+6s_2)s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s_1+s_2)(3s_1^2+3s_2s_1-4s_2^2)s + (s_1-s_2)^2s_2(3s_1+s_2) \right) \right] \\
&- e^2\mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) \left[ \frac{m^2}{6\pi^2\sigma^2s_2} \left( -4(s-s_1)^2 + 9s_2^2 - 5(s+s_1)s_2 \right) + \frac{1}{24\pi^2\sigma^3} \left( -17s^4 + (26s_1+48s_2)s^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 42s_2(s_1+s_2)s^2 - 2(s_1-s_2)(5s_1^2+17s_2s_1+4s_2^2)s + (s_1-3s_2)(s_1-s_2)^3 \right) \right] \\
&+ e^2\mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) \left[ \frac{m^2}{6\pi^2\sigma^2s_2} \left( 4s^2 + 5s_1s - 8s_2s - 9s_1^2 + 4s_2^2 + 5s_1s_2 \right) - \frac{2}{3\sigma^3s_2} \left( 3s^5 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (10s_1+9s_2)s^4 + 2(6s_1^2+26s_2s_1+3s_2^2)s^3 - 6(s_1^3+4s_2s_1^2+14s_2^2s_1-s_2^3)s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s_1-s_2)(s_1^3-19s_2s_1^2-43s_2^2s_1+9s_2^3)s + (s_1-3s_2)(s_1-s_2)^3s_2 \right) \right], \tag{4.103}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_{13,\mathbf{R}}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{m}^2)} &= -\frac{e^2 m^2 (s_1 + s_2)}{12\pi^2 s_1 s_2} + \frac{e^2}{48\pi^2} \left( \frac{s\gamma}{\sigma} + \frac{3s}{\gamma} + 1 \right) - \frac{1}{2} [\Pi_R(s_1, m^2) + \Pi_R(s_2, m^2)] \\
&\quad - \frac{e^2}{12\pi^2} [\mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2)] \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{3}{\gamma} \right) \\
&\quad + e^2 \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left[ \frac{m^4}{2\pi^2 \gamma} + \frac{m^2 s \gamma}{4\pi^2 \sigma} + \frac{s^2 s_1 s_2 (s^2 - 2(s_1 + s_2)s + s_1^2 + s_2^2)}{4\pi^2 \gamma \sigma^2} \right] \\
&\quad - e^2 \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) \left[ \frac{1}{24\pi^2} m^2 \left( -\frac{5(s + s_1 - s_2)}{\sigma} - \frac{2}{s_1} - \frac{3}{\gamma} \right) + \frac{1}{24\pi^2 \gamma \sigma^2} \left( (s - s_1)(5s^3 + s_1^2 s - 4s_1^3) s_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (10s^2 + 5s_1 s + 7s_1^2) s_2^3 - (s - s_1)^3 (s^2 + 2s_1 s - s_1^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-10s^3 + 3s_1 s^2 - 7s_1^3) s_2^2 + s_2^5 - (5s + 4s_1) s_2^4 \right) \right] \\
&\quad - e^2 \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) \left[ \frac{1}{24\pi^2} m^2 \left( -\frac{5(s - s_1 + s_2)}{\sigma} - \frac{2}{s_2} - \frac{3}{\gamma} \right) + \frac{1}{24\pi^2 \gamma \sigma^2} \left( (4s^3 + s_1 s^2 + 7s_1^3) s_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (8s^2 + 5s_1 s + 7s_1^2) s_2^3 - (s - s_1)^5 + (s - 4s_1)(s + s_1) s_2 (s - s_1)^2 - s_2^5 + (5s + 4s_1) s_2^4 \right) \right];
\end{aligned} \tag{4.104}$$

L'ultimo fattore di forma contiene due diagrammi di polarizzazione  $\Pi$ , con differenti momenti sulle linee esterne, rinormalizzati come di consueto

$$\Pi_R(s, m^2) \equiv \Pi(s, m^2) - \Pi(0, m^2), \tag{4.105}$$

dove  $\Pi(s, m^2)$  è definito in eq.(4.49) e

$$\Pi(0, m^2) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \mathcal{B}_0(0, m^2) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right]. \tag{4.106}$$

### 4.5.1 Analogie con il caso chirale

Dall'analisi del correlatore  $\langle TJJ \rangle$  emergono alcune analogie nell'azione effettiva, legate alla presenza di poli di massa nulla, tra il caso con anomalia di gauge chirale e quello conforme. Nella prima parte di questo elaborato abbiamo osservato che l'anomalia chirale è interamente saturata da un polo anomalo presente nella componente longitudinale nel correlatore  $AVV$ ,  $w_L$ , in qualunque configurazione cinematica. Ciò non è ovvio poiché, come già sottolineato più volte, il calcolo diretto dimostra l'esistenza di un residuo non nullo per  $s \rightarrow 0$  solo se il fermione è privo di massa e i fotoni sulle linee vettoriali sono on-shell. L'identificazione del polo risulta immediata nella parametrizzazione L/T, poiché esso viene isolato esplicitamente, ma non è altrettanto banale nella rappresentazione di Rosenberg in cui le identità di Schouten lo *nascondono* nelle 6 ampiezze invarianti.

Per illustrare che anche il caso conforme è caratterizzato dallo stesso comportamento è sufficiente notare nell'espressione di  $F_1$  in eq. (4.96) la presenza di un

contributo isolato  $F_{1\text{pole}} \equiv -e^2/(18\pi^2 s)$ . Esso è l'unico a sopravvivere in  $F_1$  nel limite conforme. Questa componente genera l'anomalia di traccia in ogni configurazione cinematica, anche nella situazione in cui la massa del fermione rompe esplicitamente l'invarianza conforme. Dal calcolo esplicito sui fattori di forma  $F_i$  si deduce che, in analogia a quanto osservato nel caso chirale, il polo in  $F_1$  si disaccoppia nell'infrarosso per virtualità generiche dei momenti esterni e compare solo nel limite in cui  $s_1 = s_2 = 0$ ,  $m = 0$ . Per questo motivo è opportuno separare il termine polare che descrive l'anomalia conforme dal resto dell'ampiezza invariante

$$F_1 = F_{1\text{pole}} + \tilde{F}_1, \quad (4.107)$$

e quindi estrapolare dall'azione effettiva il contributo non locale dell'anomalia conforme

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{pole}} + \tilde{\mathcal{S}}. \quad (4.108)$$

Nella precedente equazione  $\tilde{\mathcal{S}}$  include il contributo di  $\tilde{F}_1$  e di tutti i restanti fattori di forma, mentre la parte polare, che satura l'anomalia, è data da

$$\mathcal{S}_{\text{pole}} = -\frac{e^2}{36\pi^2} \int d^4x d^4y (\square h(x) - \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu}(x)) \square^{-1}(x-y) F_{\alpha\beta}(y) F^{\alpha\beta}(y). \quad (4.109)$$

#### 4.5.2 Limite conforme del correlatore $TJJ$

Nel limite in cui la massa del fermione è nulla il fattore di forma  $F_1$  esibisce unicamente il contributo polare anomalo in  $s$  ma, come abbiamo già discusso precedentemente, dimostreremo con un calcolo diretto che il polo si disaccoppia nell'infrarosso dall'intero correlatore.

Denotiamo con  $F_i(s; s_1, s_2, 0)$  le ampiezze invarianti che definiscono il correlatore  $\langle TJJ \rangle$ . Nell'argomento dei fattori di forma abbiamo indicato esplicitamente, per maggiore chiarezza, che la massa del fermione è nulla. Queste nuove funzioni sono state determinate a partire da quelle massive calcolando il limite  $m \rightarrow 0$  con  $\mathcal{A}_0(m^2) \rightarrow 0$ , cioè rimuovendo le correzioni di massa e le funzioni scalari ad un punto che risultano identicamente nulle se  $m = 0$ .

La base di funzioni scalari su cui sono stati espansi gli integrali tensoriali è ridefinita in questo caso come

$$\mathcal{B}_0(s, 0) = \left[ \frac{1}{\bar{\epsilon}} - \log \left( -\frac{s}{\mu^2} \right) + 2 \right], \quad (4.110)$$

$$D_i(s, s_i, 0) = \mathcal{B}_0(s, 0) - \mathcal{B}_0(s_i, 0) = \log \left( \frac{s_i}{s} \right), \quad i = 1, 2 \quad (4.111)$$

$$\mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, 0) = \frac{1}{s} \Phi \left( \frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s} \right), \quad (4.112)$$

dove  $\mu$  è la scala di rinormalizzazione. La parte singolare  $1/\bar{\epsilon}$  è data da

$$\frac{1}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \pi, \quad (4.113)$$

mentre la funzione  $\Phi(x, y)$  è stata già definita in (3.46).

Le singolarità in  $1/\bar{\epsilon}$  e la dipendenza dalla scala di rinormalizzazione  $\mu$  si cancellano nella differenza tra le due funzioni scalari a due punti  $\mathcal{B}_0$  in modo che le  $\mathcal{D}_i$  risultino bene definite; invece l'integrale scalare a tre punti è già convergente. Le ampiezze invarianti  $F_i(s; s_1, s_2, 0)$  sono espresse in questa nuova base e sono riportate in App.G. Qui presentiamo solo le prime due

$$F_1(s; s_1, s_2, 0) = -\frac{e^2}{18\pi^2 s}, \quad (4.114)$$

$$F_2(s; s_1, s_2, 0) = 0. \quad (4.115)$$

Osserviamo che  $F_1$  descrive unicamente l'anomalia di traccia, mentre  $F_2$ , che è proporzionale alla massa del fermione, è identicamente nulla.

Per dimostrare l'assenza del polo infrarosso calcoliamo i residui in  $s = 0$  dei 13 termini che realizzano l'ampiezza complessiva  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(s; s_1, s_2, 0)$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F_1(s; s_1, s_2, 0) t_1^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{e^2}{18\pi^2} t_1^{\mu\nu\alpha\beta} \Big|_{s=0}, \quad (4.116)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F_3(s; s_1, s_2, 0) t_3^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{e^2}{72\pi^2} t_3^{\mu\nu\alpha\beta} \Big|_{s=0}, \quad (4.117)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F_5(s; s_1, s_2, 0) t_5^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{e^2}{72\pi^2} t_5^{\mu\nu\alpha\beta} \Big|_{s=0}, \quad (4.118)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F_7(s; s_1, s_2, 0) t_7^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{e^2}{36\pi^2} t_7^{\mu\nu\alpha\beta} \Big|_{s=0}. \quad (4.119)$$

Tutti gli altri limiti che non compaiono in quelli appena elencati sono nulli. Si può osservare che il polo in  $F_1$  non è l'unico contributo al residuo dell'intero correlatore poiché esso è determinato anche dalle altre ampiezze invarianti (benché non anomale). Infatti, combinando i risultati parziali nelle equazioni (4.116) - (4.119), si ottiene che  $\langle TJJ \rangle$  è privo di poli

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(s; s_1, s_2, 0) = 0 \quad (4.120)$$

se le virtualità sulle linee esterne sono generiche, in analogia con il caso chirale.

## 4.6 Il correlatore $TJJ$ on-shell

In questo paragrafo forniamo i risultati per il correlatore  $\langle TJJ \rangle$  in diverse configurazioni cinematiche. Inizialmente presenteremo le espressioni nel caso in cui

$s_1 = s_2 = 0$ ,  $m \neq 0$  e successivamente calcoleremo l'espansione in  $1/m$  che verrà usata in seguito per estrarre la corrispondente azione effettiva. In conclusione introdurremo le ampiezze invarianti nel limite conforme.

#### 4.6.1 Fermione massivo

Analizziamo in questo paragrafo una configurazione particolare del correlatore  $\langle TJJ \rangle$  in cui le due linee vettoriali esterne sono on-shell,  $s_1 = s_2 = 0$ , e il fermione che circola del loop ha massa diversa da zero. Se contraiamo le strutture tensoriali  $u^{\alpha\beta}(p, q)$  e  $w^{\alpha\beta}(p, q)$  che definiscono l'ampiezza complessiva con i vettori di polarizzazione  $\epsilon_\alpha(p)$  e  $\epsilon_\beta(q)$ , e richiediamo la trasversalità degli stessi  $\epsilon_\alpha(p) p^\alpha = 0$ ,  $\epsilon_\beta(q) q^\beta = 0$ , osserviamo che il primo tensore resta inalterato mentre  $w^{\alpha\beta}(p, q)$  diventa  $\tilde{w}^{\alpha\beta}(p, q) = s_1 s_2 g^{\alpha\beta}$ . Quest'ultima relazione deve essere tenuta in conto nel calcolo dei limiti per  $s_1 \rightarrow 0$ ,  $s_2 \rightarrow 0$  del prodotto delle ampiezze invarianti  $F_i$  con i corrispondenti tensori  $t_i^{\mu\nu\alpha\beta}$  ( $i = 1, \dots, 13$ ).

I fattori di forma nel limite suddetto sono riportati di seguito

$$\begin{aligned}
F_1(s; 0, 0, m^2) &= -\frac{e^2}{18\pi^2 s} - \frac{e^2 m^2}{3\pi^2 s^2} - e^2 \mathcal{C}_0(s, 0, 0, m^2) \left[ \frac{8m^2}{6\pi^2 s} - \frac{2m^4}{3\pi^2 s^2} \right], \\
F_3(s; 0, 0, m^2) &= -\frac{e^2}{144\pi^2 s} - \frac{e^2 m^2}{6\pi^2 s^2} - \frac{e^2}{12\pi^2 s^2} [\mathcal{B}_0(s, m^2) m^2 - \mathcal{A}_0(m^2)] \\
&\quad - e^2 \mathcal{C}_0(s, 0, 0, m^2) \left[ \frac{m^4}{6\pi^2 s^2} + \frac{m^2}{12\pi^2 s} \right] - e^2 \mathcal{D}(s, 0, 0, m^2) \frac{m^2}{6\pi^2 s^2}, \\
F_5(s; 0, 0, m^2) &= F_3(s; 0, 0, m^2), \\
F_7(s; 0, 0, m^2) &= -4 F_3(s; 0, 0, m^2) \\
F_{13R}(s; 0, 0, m^2) &= \frac{11e^2}{144\pi^2} + \frac{e^2 m^2}{4\pi^2 s} + e^2 \mathcal{C}_0(s, 0, 0, m^2) \left[ \frac{m^4}{2\pi^2 s} + \frac{m^2}{4\pi^2} \right] \\
&\quad + e^2 \mathcal{D}(s, 0, 0, m^2) \left[ \frac{5m^2}{12\pi^2 s} + \frac{1}{12} \right], \tag{4.121}
\end{aligned}$$

dove  $F_{13R}$  denota l'ampiezza rinormalizzata, ottenuta in regolarizzazione dimensionale rimuovendo il polo UV presente nella funzione a due punti del fotone. Le restanti ampiezze invarianti  $F_i(s, 0, 0, m^2)$  sono nulle oppure moltiplicano tensori nulli in questo particolare limite e non contribuiscono al correlatore.

Usando i risultati precedenti l'ampiezza complessiva massiva e on-shell si scrive come

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(s; 0, 0, m^2) &= F_1(s; 0, 0, m^2) \tilde{t}_1^{\mu\nu\alpha\beta} + F_3(s; 0, 0, m^2) (\tilde{t}_3^{\mu\nu\alpha\beta} + \tilde{t}_5^{\mu\nu\alpha\beta} \\
&\quad - 4\tilde{t}_7^{\mu\nu\alpha\beta}) + F_{13,R}(s; 0, 0, m^2) \tilde{t}_{13}^{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.122}
\end{aligned}$$

dove le funzioni  $F_i$  coinvolte si riducono da 13 a 3 e le tre combinazioni lineari dei tensori costituiscono una nuova base su cui espandere il correlatore

$$\tilde{t}_1^{\mu\nu\alpha\beta} = \lim_{s_1, s_2 \rightarrow 0} t_1^{\mu\nu\alpha\beta} = (s g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) u^{\alpha\beta}(p, q), \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_3^{\mu\nu\alpha\beta} + \tilde{t}_5^{\mu\nu\alpha\beta} - 4\tilde{t}_7^{\mu\nu\alpha\beta} &= \lim_{s_1, s_2 \rightarrow 0} (t_3^{\mu\nu\alpha\beta} + t_5^{\mu\nu\alpha\beta} - 4t_7^{\mu\nu\alpha\beta}) = \\ &= -2 u^{\alpha\beta}(p, q) (s g^{\mu\nu} + 2(p^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu) - 4(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)), \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{13}^{\mu\nu\alpha\beta} &= \lim_{s_1, s_2 \rightarrow 0} t_{13}^{\mu\nu\alpha\beta} = (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) g^{\alpha\beta} + \frac{s}{2} (g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) \\ &\quad - g^{\mu\nu} \left( \frac{s}{2} g^{\alpha\beta} - q^\alpha p^\beta \right) - (g^{\beta\nu} p^\mu + g^{\beta\mu} p^\nu) q^\alpha - (g^{\alpha\nu} q^\mu + g^{\alpha\mu} q^\nu) p^\beta, \end{aligned} \quad (4.125)$$

in accordo con i risultati già ottenuti in letteratura [17].

Se determiniamo il residuo dell'ampiezza complessiva possiamo renderci conto che anche se alcune funzioni  $F_i(s, 0, 0, m^2)$  possiedono singolarità cinematiche in  $1/s$  questa struttura polare non compare nel correlatore massivo, infatti

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \quad (4.126)$$

Questo dimostra che nel caso di un fermione massivo il correlatore  $\langle TJJ \rangle$  non esibisce alcun polo infrarosso, proprio come accade per il diagramma triangolare  $AVV$  nel caso dell'anomalia chirale.

#### 4.6.2 Espansione in $1/m$ ed azione effettiva gravitazionale

L'espansione delle ampiezze invarianti in  $\frac{1}{m}$  è utile per derivare una forma semplificata del contributo del correlatore  $\langle TJJ \rangle$  all'azione effettiva. Per virtualità dei momenti esterni  $k_1^2 = k_2^2 = 0$  il risultato diventa particolarmente semplice; otteniamo infatti

$$F_1(s, 0, 0, m^2) = \frac{7e^2}{2160\pi^2} \frac{1}{m^2} + \frac{e^2 s}{3024\pi^2} \frac{1}{m^4} + O\left(\frac{1}{m^6}\right), \quad (4.127)$$

$$F_3(s, 0, 0, m^2) = F_5(s, 0, 0, m^2) = \frac{e^2}{4320\pi^2} \frac{1}{m^2} + \frac{e^2 s}{60480\pi^2} \frac{1}{m^4} + O\left(\frac{1}{m^6}\right), \quad (4.128)$$

$$F_7(s, 0, 0, m^2) = -4 F_3(s, 0, 0, m^2), \quad (4.129)$$

$$F_{13,R}(s, 0, 0, m^2) = \frac{11e^2 s}{1440\pi^2} \frac{1}{m^2} + \frac{11e^2 s^2}{20160\pi^2} \frac{1}{m^4} + O\left(\frac{1}{m^6}\right). \quad (4.130)$$

La presenza di 6 ampiezze invarianti in questa configurazione richiede alcuni commenti. Infatti è possibile organizzare le strutture tensoriali in una base di soli 3 elementi come è stato già esposto nel paragrafo precedente.

Il contributo all'azione effettiva gravitazionale dovuto al correlatore  $\langle TJJ \rangle$  è dato da

$$\mathcal{S} = \int d^4x d^4y d^4z \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(z; x, y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y), \quad (4.131)$$

dove  $h_{\mu\nu}$  costituisce la forma linearizzata del campo gravitazionale. Usando la trasformata di Fourier dell'ampiezza  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(z; x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot z - p \cdot x - iq \cdot y} (2\pi)^4 \delta^4(k - p - q) \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(k; p, q) \quad (4.132)$$

e successive integrazioni per parti, possiamo riscrivere l'azione effettiva nella forma

$$\mathcal{S} = \int d^4x d^4y d^4z \delta^4(x - z) \delta^4(y - z) \hat{\Gamma}^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) \quad (4.133)$$

con

$$\hat{\Gamma}^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) = \sum_{i=1}^{13} \hat{F}_i(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) \hat{t}_i^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y). \quad (4.134)$$

Nelle precedenti equazioni abbiamo introdotto le versioni operatoriali delle strutture tensoriali  $t_i^{\mu\nu\alpha\beta}$  e delle ampiezze invarianti  $F_i$  denotate rispettivamente con  $\hat{t}_i$  e  $\hat{F}_i$  e realizzate con le seguenti definizioni

$$\hat{p}_x^\alpha \equiv i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \hat{q}_y^\alpha \equiv i \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \quad \hat{k}_z^\alpha \equiv -i \frac{\partial}{\partial z_\alpha}. \quad (4.135)$$

Per esempio, se le  $F_i$  non dipendono dai momenti, come per i termini all'ordine  $1/m^2$  negli sviluppi nelle eq.(4.127) - (4.130), è sufficiente considerare solo l'applicazione degli operatori  $\hat{t}_i^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y)$  sui campi gravitazionale ed elettromagnetico. In

questo caso si ottiene

$$\hat{t}_1^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) = \frac{1}{2} (\square_z h(z) - \partial_\mu^z \partial_\nu^z h^{\mu\nu}(z)) F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(y), \quad (4.136)$$

$$\hat{t}_2^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) = (\square_z h(z) - \partial_\mu^z \partial_\nu^z h^{\mu\nu}(z)) \partial_\mu F_\lambda^\mu(x) \partial_\nu F^{\nu\lambda}(y), \quad (4.137)$$

$$\hat{t}_3^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) = \frac{1}{2} h^{\mu\nu}(z) (\square_x g_{\mu\nu} - 4\partial_\mu^x \partial_\nu^x) F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(y), \quad (4.138)$$

$$\hat{t}_4^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) = h^{\mu\nu}(z) (\square_x g_{\mu\nu} - 4\partial_\mu^x \partial_\nu^x) \partial_\mu F_\lambda^\mu(x) \partial_\nu F^{\nu\lambda}(y), \quad (4.139)$$

$$\hat{t}_5^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) = \frac{1}{2} h^{\mu\nu}(z) (\square_y g_{\mu\nu} - 4\partial_\mu^y \partial_\nu^y) F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(y), \quad (4.140)$$

$$\hat{t}_6^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) = h^{\mu\nu}(z) (\square_y g_{\mu\nu} - 4\partial_\mu^y \partial_\nu^y) \partial_\mu F_\lambda^\mu(x) \partial_\nu F^{\nu\lambda}(y), \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}_7^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) &= \frac{1}{2} h^{\mu\nu}(z) \left( \partial^{x\lambda} \partial_\lambda^y g_{\mu\nu} - 2(\partial_\mu^y \partial_\nu^x + \partial_\nu^y \partial_\mu^x) \right) \\ &\times F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(y), \end{aligned} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}_8^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_z, \hat{p}_x, \hat{q}_y) h_{\mu\nu}(z) A_\alpha(x) A_\beta(y) &= h^{\mu\nu}(z) \left( \partial^{x\lambda} \partial_\lambda^y g_{\mu\nu} - 2(\partial_\mu^y \partial_\nu^x + \partial_\nu^y \partial_\mu^x) \right) \\ &\times \partial_\mu F_\lambda^\mu(x) \partial_\nu F^{\nu\lambda}(y) \end{aligned} \quad (4.143)$$

ed espressioni simili per le altre strutture tensoriali.

Il contributo del vertice  $TJJ$  all'azione effettiva gravitazionale linearizzata è riportato di seguito

$$\begin{aligned} S_{TJJ} &= \int d^4x d^4y d^4z \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(x, y, z) A_\alpha(x) A_\beta(y) h_{\mu\nu}(z) \\ &= \frac{7e^2}{4320\pi^2 m^2} \int d^4x (\square h - \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}) F^2 \\ &\quad - \frac{e^2}{4320\pi^2 m^2} \int d^4x \left( \square h F^2 - 8\partial^\mu F^{\alpha\beta} \partial^\nu F_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} + 4(\partial^\mu \partial^\nu F_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} h_{\mu\nu} \right) \\ &\quad + \frac{11e^2}{1440\pi^2 m^2} \int d^4x T_{e.m.}^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.144)$$

dove  $h = h_\mu^\mu$ .

### 4.6.3 Fermione di massa nulla

La struttura non locale dell'azione effettiva non si manifesta nell'espansione in  $1/m$ ; è più istruttivo, in questo contesto, l'analisi del correlatore nel limite conforme e

con  $s_1 = s_2 = 0$  per individuare la struttura polare. A partire dai fattori di forma  $F_i(s; s_1, s_2, 0)$  e dalle corrispondenti strutture tensoriali  $t_i^{\mu\nu\alpha\beta}$  è possibile determinare il limite on-shell dopo aver contratto opportunamente con i polarizzatori fisici. Le uniche ampiezze invarianti non nulle, o che moltiplicano tensori diversi da zero, sono date da

$$F_1(s, 0, 0, 0) = -\frac{e^2}{18\pi^2 s}, \quad (4.145)$$

$$F_3(s, 0, 0, 0) = F_5(s, 0, 0, 0) = -\frac{e^2}{144\pi^2 s}, \quad (4.146)$$

$$F_7(s, 0, 0, 0) = -4 F_3(s, 0, 0, 0), \quad (4.147)$$

$$F_{13,R}(s, 0, 0, 0) = -\frac{e^2}{144\pi^2} \left[ 12 \log \left( -\frac{s}{\mu^2} \right) - 35 \right], \quad (4.148)$$

e quindi l'intero correlatore con  $m = 0$  e fotoni on-shell sulle linee esterne diventa

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(s; 0, 0, 0) &= F_1(s, 0, 0, 0) \tilde{t}_1^{\mu\nu\alpha\beta} + F_3(s, 0, 0, 0) \left( \tilde{t}_3^{\mu\nu\alpha\beta} + \tilde{t}_5^{\mu\nu\alpha\beta} - 4 \tilde{t}_7^{\mu\nu\alpha\beta} \right) \\ &+ F_{13,R} \tilde{t}_{13}^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= -\frac{e^2}{48\pi^2 s} \left[ \left( 2 p^\beta q^\alpha - s g^{\alpha\beta} \right) (2 p^\mu p^\nu + 2 q^\mu q^\nu - s g^{\mu\nu}) \right] \\ &+ F_{13,R} \tilde{t}_{13}^{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.149)$$

dove  $\tilde{t}_i^{\mu\nu\alpha\beta}$  sono stati definiti nelle equazioni (4.123-4.125). La singolarità in  $1/s$  che caratterizza l'ampiezza invariante  $F_1$  gioca un ruolo particolare rispetto alle altre. Infatti essa è l'unica che contribuisce all'anomalia conforme poiché le strutture tensoriali associate alle altre funzioni hanno traccia nulla. Se calcoliamo il residuo dell'intero correlatore on-shell possiamo osservare che i primi 4 fattori di forma e le loro strutture tensoriali si combinano per fornire un risultato diverso da zero

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(s; 0, 0, 0) = -\frac{e^2}{12\pi^2} p^\beta q^\alpha (p^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu), \quad (4.150)$$

in cui le singolarità in  $1/s$ , presenti in  $F_1, F_3, F_5, F_7$ , si sommano, mentre l'andamento logaritmico in  $s$  di  $F_{13}$  viene soppresso dal fattore  $s$  che moltiplica il correlatore completo nel calcolo del limite. Osserviamo che, in analogia al caso chirale, la particolare configurazione  $m = 0, s_1 = s_2 = 0$  dell'ampiezza anomala esibisce un polo accoppiato nell'infrarosso.

## 4.7 Conclusioni

In questo capitolo abbiamo presentato il calcolo esplicito del correlatore  $TJJ$  per qualunque valore degli invarianti cinematici e della massa del fermione all'interno

del loop e anche l'espansione in  $1/m$  del contributo di gauge all'azione effettiva della gravità nel limite di campo gravitazionale debole. La stessa espansione è stata sviluppata nei capitoli precedenti per una teoria di gauge anomala e in entrambi i casi sono emerse strutture polari anomale [1].

Solitamente i poli anomali sono interpretati come contributi infrarossi che si manifestano solo in particolari configurazioni cinematiche, ossia quando i fermioni che circolano nei loop hanno massa nulla e i bosoni di gauge sulle linee esterne sono on-shell. In generale essi sono presenti nella regione ultravioletta anche se disaccoppiati nell'infrarosso. Questa caratteristica si evince sia nel caso di anomalie di gauge che in quello conforme, sebbene i due tipi di anomalie siano intrinsecamente diversi, in quanto la presenza delle prime crea problemi di inconsistenza della teoria stessa e richiede opportuni controtermini, al contrario delle seconde.

I poli anomali sono tra le più interessanti proprietà, a livello perturbativo, dell'anomalia, sia essa conforme o chirale, e possono essere descritti da gradi di libertà effettivi scalari (nel caso gravitazionale) o pseudoscalari (nel caso chirale). Il comportamento polare in  $1/s$  dei correlatori anomali è spesso ottenuto risolvendo semplicemente l'equazione dell'anomalia, ma tale metodo non è in grado di includere anche tutti gli altri contributi del diagramma anomalo che solo l'analisi perturbativa può identificare.

Nel suo lavoro originale che anticipò la scoperta del meccanismo di inflazione nell'universo primitivo, Starobinsky [18] utilizzò l'anomalia conforme per dare una traccia non nulla al tensore energia impulso in gravità, studiando le equazioni del moto del nuovo sistema e dimostrando che la teoria permetteva di risolvere il problema della singolarità iniziale. Recentemente Mottola e Giannotti [1] hanno messo in evidenza che la presenza di campi scalari legata all'azione effettiva dovrebbe avere conseguenze fenomenologiche dirette. In altre parole, rendendo locale l'espressione del contributo non locale presente nell'azione effettiva si ottengono modifiche significative alle equazioni gravitazionali che sono in fase di analisi. Per ragioni di spazio abbiamo deciso di non includere in questo lavoro di tesi questi ulteriori sviluppi che interessano la nostra ricerca corrente. Qui, comunque, abbiamo dimostrato che la presenza di tali nuovi gradi di libertà effettivi è presente in condizioni molto più generali di quelle descritte in [1]. L'espressione dell'azione effettiva per i casi anomalo e gravitazionale (contributo di gauge) può rappresentare un punto di partenza importante per accoppiare il Modello Standard e sue estensioni supersimmetriche alla gravità mediante l'anomalia conforme; in quest'ultimo caso opportune gene-

realizzazioni del nostro calcolo sarebbero necessarie per ricavare l'espressione della lagrangiana effettiva richiesta.

In un articolo che abbiamo allegato a conclusione del lavoro abbiamo riassunto tutti i punti che sono stati analizzati in dettaglio nei capitoli precedenti.

## Appendice A

# Lagrangiana del modello A-B nella fase di Higgs-Stückelberg

In questa appendice riportiamo l'espressione completa della lagrangiana del modello A-B dopo la rottura spontanea della simmetria di gauge  $U(1)_A \times U(1)_B$  nel caso di axi-Higgs con massa nulla. Essa è della forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_A^2 - \frac{1}{4}F_B^2 + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_f, \quad (\text{A.1})$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2\xi_B}(\partial \cdot B)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu G_B)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu h_1)^2 - \frac{1}{2}m_1^2 h_1^2 + \frac{1}{2}M_B^2 B_\mu^2 \\ & - 4\frac{vg_B^2}{M_B} B_\mu G_B \partial^\mu h_1 - \frac{4\lambda v^4 g_B^4}{M_B^4} G_B^4 + \frac{8v^2 g_B^4}{M_B^2} (B_\mu)^2 G_B^2 + \frac{8\lambda M_1 v^3 g_B^3}{M_B^4} \chi_B G_B^3 \\ & - \frac{8M_1 v g_B^3}{M_B^2} (B_\mu)^2 \chi_B G_B - \frac{4g_B^2 \lambda v^3}{M_B^2} G_B^2 h_1 + 4g_B^2 (B_\mu)^2 h_1 v \\ & + 2\frac{g_B^2 M_1^2}{M_B^2} (B_\mu)^2 \chi^2 + 2g_B^2 (B_\mu)^2 h_1^2 \frac{vg_B^2}{M_B} B_\mu h_1 \partial^\mu G_B + \frac{2\lambda M_1 v g_B}{M_B^2} \chi G_B h_1^2 \\ & + \frac{2g_B \lambda M_1^3 v}{M_B^4} G_B \chi^3 + \frac{4g_B \lambda M_1 v^2}{M_B^2} G_B h_1 \chi_B - \frac{2g_B M_1}{M_B} B^\mu \partial_\mu \chi h_1 - \frac{\lambda M_1^4}{4M_B^4} \chi^4 \\ & + \frac{2g_B M_1}{M_B} B^\mu \partial_\mu h_1 \chi_B - \frac{1}{4}\lambda h_1^4 - \lambda v h_1^3 + \frac{3\lambda M_1^4}{2M_B^4} \chi^2 G_B^2 - \frac{3\lambda M_1^2}{2M_B^2} \chi^2 G_B^2 \\ & - \frac{1}{2}\lambda h_1^2 G_B^2 - \frac{1}{2}M_B^2 \xi_B G_B^2 - \frac{\lambda M_1^2}{2M_B^2} \chi^2 h_1^2 + \frac{\lambda M_1^2}{2M_B^2} G_B^2 h_1^2 - \frac{\lambda M_1^2 v}{M_B^2} \chi^2 h_1, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e  $\mathcal{L}_f$  individua il contributo fermionico

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = & \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + g_A A_\mu + g_B \gamma^5 B_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{m}{v}\bar{\psi}\psi h + \frac{m}{v}\frac{M_1}{M_B}i\bar{\psi}\gamma^5\psi\chi_B \\ & - m\frac{g_B q_B}{M_B}\bar{\psi}\gamma^5\psi G_B. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Se si aggiunge il campo  $b$  al settore degli scalari e si modifica il potenziale dell'Higgs aggiungendo delle determinate fasi caratteristiche del potenziale di rottura della simmetria globale  $U(1)$  di Peccei-Quinn si è in grado di fornire dinamicamente massa all'axi-Higgs  $\chi_B$ . La forma del potenziale, invariante di gauge, è

$$V(\phi, b) = V_{PQ} + V_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} \quad (\text{A.4})$$

con

$$\begin{aligned} V_{PQ} &= \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2, \quad (\text{A.5}) \\ V_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} &= b_1\left(\phi e^{-iq_B g_B \frac{b}{M_1}}\right) + \lambda_1\left(\phi e^{-iq_B g_B \frac{b}{M_1}}\right)^2 \\ &\quad + 2\lambda_2(\phi^*\phi)\left(\phi e^{-iq_B g_B \frac{b}{M_1}}\right) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Scegliendo opportunamente il valore del parametro libero  $\mu^2$  in funzione delle altre costanti è possibile richiedere che il minimo del potenziale sia individuato dai valori di aspettazione sul vuoto

$$\langle b \rangle = 0 \quad \langle \phi \rangle = v. \quad (\text{A.7})$$

In tal caso deve essere soddisfatta la relazione

$$\mu^2 = -\frac{b_1}{v} - 2v^2\lambda - 2\lambda_1 - 6v\lambda_2. \quad (\text{A.8})$$

Sostituendo il campo  $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi_1 + i\phi_2)$  espanso sul vuoto  $v$  e diagonalizzando la matrice di massa che mescola i campi  $b$  e  $\phi_2$  attraverso una matrice di rotazione  $O^\chi$  si perviene al risultato

$$\begin{pmatrix} \chi_B & G_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_B \\ G_B \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

dove  $O^\chi$  realizza il cambiamento di base dagli autostati di interazione a quelli fisici

$$\begin{pmatrix} \chi_B \\ G_B \end{pmatrix} = O^\chi \begin{pmatrix} \phi_2 \\ b \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

La matrice di massa possiede un unico autovalore nullo corrispondente al bosone di goldstone  $G_B$  della teoria e un autovalore  $m_\chi^2$  diverso da zero associato all'assione fisico  $\chi_B$

$$m_\chi^2 = -\frac{1}{2}c_\chi v^2 \left[ 1 + \frac{q_B^2 g_B^2 v^2}{M_1^2} \right] = -\frac{1}{2}c_\chi v^2 \frac{M_B^2}{M_1^2}, \quad (\text{A.11})$$

dove il parametro

$$c_\chi = 4 \left( \frac{b_1}{v^3} + \frac{4\lambda_1}{v^2} + \frac{2\lambda_2}{v} \right) \quad (\text{A.12})$$

dipende dalle costanti che caratterizzano il potenziale (A.4) e deve essere necessariamente negativo per la condizione  $m_\chi^2 > 0$ .



## Appendice B

# Variazione dell'azione effettiva anomala

Presentiamo il calcolo della variazione sotto trasformazione di gauge di  $B$  e di  $A$  dei contributi anomali presenti nell'azione effettiva del modello A-B.

Le trasformazioni di gauge per i campi  $B$  e  $A$  sono date da

$$\begin{aligned}\delta_B B^\mu &= \partial^\mu \theta_B \\ \delta_A A^\mu &= \partial^\mu \theta_A.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Otteniamo per la variazione sotto  $B$

$$\begin{aligned}\delta_B \mathcal{S}_{BAA} &= \delta_B \int d^4x d^4y d^4z T_{\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) B^\lambda(z) A^\mu(x) A^\nu(y) \\ &= - \int d^4x d^4y d^4z \partial_{z\lambda} T_{\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) A^\mu(x) A^\nu(y) \theta_B(z) \\ &= ia_3(\beta) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int d^4x d^4y d^4z \partial_{x^\alpha} \partial_{y^\beta} [\delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-z)] \\ &\quad A^\mu(x) A^\nu(y) \theta_B(z) \\ &= ia_3(\beta) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int d^4x \partial_{x^\alpha} A^\mu(x) \partial_{x^\beta} A^\nu(x) \theta_B(x) \\ &= -i \frac{a_3(\beta)}{4} \int d^4x \theta_B F_{\alpha\mu}^A F_{\beta\nu}^A \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= -i \frac{a_3(\beta)}{4} \langle \theta_B F^A \wedge F^A \rangle,\end{aligned}\tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
\delta_B \mathcal{S}_{BBB} &= \delta_B \int d^4x d^4y d^4z T_{\mathbf{AAA}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) B^\mu(x) B^\nu(y) B^\lambda(z) \\
&= - \int d^4x d^4y d^4z \partial_{x^\mu} T_{\mathbf{AAA}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) \theta_B(x) B^\nu(y) B^\lambda(z) \\
&\quad - \int d^4x d^4y d^4z \partial_{y^\nu} T_{\mathbf{AAA}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) B^\mu(x) \theta_B(y) B^\lambda(z) \\
&\quad - \int d^4x d^4y d^4z \partial_{z^\lambda} T_{\mathbf{AAA}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) B^\mu(x) B^\nu(y) \theta_B(z) \\
&= -i \frac{a_n}{3} \varepsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \int d^4x d^4y d^4z \partial_{x^\alpha} \partial_{y^\beta} [\delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-z)] \\
&\quad \theta_B(x) B^\nu(y) B^\lambda(z) \\
&\quad - i \frac{a_n}{3} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \int d^4x d^4y d^4z \partial_{y^\alpha} \partial_{x^\beta} [\delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-z)] \\
&\quad B^\mu(x) \theta_B(y) B^\lambda(z) \\
&\quad + i \frac{a_n}{3} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int d^4x d^4y d^4z \partial_{x^\alpha} \partial_{y^\beta} [\delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-z)] \\
&\quad B^\mu(x) B^\nu(y) \theta_B(z) \\
&= 2i \frac{a_n}{3} \varepsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \int d^4x \theta_B(x) \partial_{x^\beta} B_\nu(x) \partial_{x^\alpha} B_\lambda(x) \\
&\quad + i \frac{a_n}{3} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int d^4x \theta_B(x) \partial_{x^\beta} B_\nu(x) \partial_{x^\alpha} B_\mu(x) \\
&= -i \frac{a_n}{3} \frac{3}{4} \langle \theta_B F^B \wedge F^B \rangle, \tag{B.3}
\end{aligned}$$

e per la variazione sotto  $A$

$$\begin{aligned}
\delta_A \mathcal{S}_{BAA} &= \delta_A \int d^4x d^4y d^4z T_{\mathbf{AVV}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) B^\lambda(z) A^\mu(x) A^\nu(y) \\
&= - \int d^4x d^4y d^4z \partial_{x^\mu} T_{\mathbf{AVV}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) B^\lambda(z) \theta_A(x) A^\nu(y) \\
&\quad - \int d^4x d^4y d^4z \partial_{y^\nu} T_{\mathbf{AVV}}^{\lambda\mu\nu}(z, x, y) B^\lambda(z) A^\mu(x) \theta_A(y) \\
&= -ia_1(\beta) \varepsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \int d^4x d^4y d^4z \partial_{x^\alpha} \partial_{y^\beta} [\delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-z)] B^\lambda(z) \theta_A(x) A^\nu(y) \\
&\quad - ia_2(\beta) \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \int d^4x d^4y d^4z \partial_{y^\alpha} \partial_{x^\beta} [\delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-z)] B^\lambda(z) A^\mu(x) \theta_A(y) \\
&= -2ia_1(\beta) \varepsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \int d^4x d^4y d^4z \partial_{x^\alpha} \partial_{y^\beta} [\delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-z)] B^\lambda(z) \theta_A(x) A^\nu(y) \\
&= 2ia_1(\beta) \varepsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \int d^4x \theta_A(x) \partial_{x^\beta} A_\nu(x) \partial_{x^\alpha} B_\lambda(x) \\
&= -ia_1(\beta) \frac{2}{4} \langle \theta_A F^B \wedge F^A \rangle \tag{B.4}
\end{aligned}$$

## Appendice C

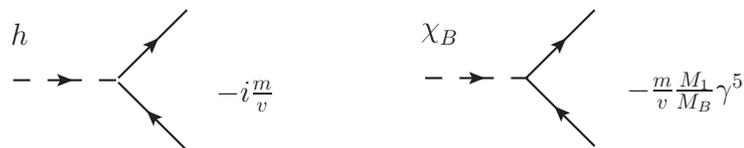
# Regole di Feynman del modello A-B

In questa appendice presentiamo alcune delle regole di Feynman del modello A-B estratte a partire dalla lagrangiana A.1 e 2.52 nella fase di Higgs-Stückelberg della teoria.

L'interazione del fermione con il bosone di gauge  $A$  è puramente vettoriale mentre l'accoppiamento con  $B$  è descritto da una corrente assiale:



Interazione del fermione con con l'Higgs  $h$  e con l'axi-Higgs  $\chi_B$ :



Il primo è un accoppiamento scalare mentre il secondo è pseudoscalare. Entrambi sono proporzionali alla massa del fermione.

Interazioni di Wess-Zumino tra l'assione  $\chi_B$  e i campi di gauge  $A$  e  $B$ :

The top diagram shows an incoming axion line labeled  $\chi_B$  interacting with two outgoing gauge field lines labeled  $A$ . The momenta of the gauge fields are  $k_1^\mu$  and  $k_2^\nu$ . The corresponding mathematical expression is  $8i \frac{C_{AA}}{M} \alpha_1 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}$ .

The bottom diagram shows an incoming axion line labeled  $\chi_B$  interacting with two outgoing gauge field lines labeled  $B$ . The momenta of the gauge fields are  $k_1^\mu$  and  $k_2^\nu$ . The corresponding mathematical expression is  $8i \frac{C_{BB}}{M} \alpha_1 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}$ .

dove i coefficienti che determinano i vertici sono dati da

$$\frac{C_{AA}}{M} = -g_B g_A^2 \frac{a_n}{8} \frac{1}{M_1} \quad \frac{C_{BB}}{M} = -g_B^3 \frac{a_n}{24} \frac{1}{M_1} \quad (\text{C.1})$$

$$\alpha_1 = \frac{q_B g_B v}{M_B}. \quad (\text{C.2})$$

## Appendice D

# Diagramma $AVV$ nella rappresentazione L/T

Riportiamo in questa appendice i coefficienti della parametrizzazione L/T del diagramma triangolare. I seguenti fattori di forma si possono ottenere facilmente a partire dalle ampiezze invarianti  $A_i$  presentate nei paragrafi 3.3.1 e 3.3.2 e utilizzando la corrispondenza (3.36 - 3.39) che collega le due rappresentazioni.

Se il fermione interno è privo di massa si ottiene

$$w_L(s_1, s_2, s) = -\frac{4}{s} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} w_T^{(+)}(s_1, s_2, s) &= \frac{s}{\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2} \left[ (s_{12} + s_2)(3s_1^2 + s_1(6s_{12} + s_2) + 2s_{12}^2) \log \frac{s_1}{s} \right. \\ &+ (s_{12} + s_1)(3s_2^2 + s_2(6s_{12} + s_1) + 2s_{12}^2) \log \frac{s_2}{s} \\ &\left. + s(2s_{12}(s_1 + s_2) + s_1s_2(s_1 + s_2 + 6s_{12}))\Phi\left(\frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s}\right) \right] \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_T^{(-)}(s_1, s_2, s) &= \frac{s_1 - s_2}{\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2} \left[ -(2(s_2 + s_{12})s_{12}^2 - s_1s_{12}(3s_1 + 4s_{12}) \right. \\ &+ s_1s_2(s_1 + s_2 + s_{12})) \log \frac{s_1}{s} + (2(s_1 + s_{12})s_{12}^2 \\ &- s_2s_{12}(3s_2 + 4s_{12}) + s_1s_2(s_1 + s_2 + s_{12})) \log \frac{s_2}{s} \\ &\left. + s(s_1 - s_2)(s_1s_2 + 2s_{12}^2)\Phi\left(\frac{s_1}{s}, \frac{s_2}{s}\right) \right] \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

$$\tilde{w}_T^{(-)}(s_1, s_2, s) = -w_T^{(-)}(s_1, s_2, s) \quad (\text{D.4})$$

dove la funzione  $\Phi$  è stata definita in equazione (3.46).

Nel caso in cui la massa del fermione sia diversa da zero la stessa corrispondenza

fornisce i risultati

$$w_L(s, s_1, s_2, m^2) = -\frac{4}{s} - \frac{8m^2}{s} C_0(s, s_1, s_2, m^2) \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned} w_T^{(+)}(s, s_1, s_2, m^2) = & \\ & + \frac{s}{\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2} [(s_{12} + s_2)(3s_1^2 + s_1(6s_{12} + s_2) + 2s_{12}^2)D_1(s, s_1, m^2) \\ & + (s_{12} + s_1)(3s_2^2 + s_2(6s_{12} + s_1) + 2s_{12}^2)D_2(s, s_2, m^2) \\ & + (4m^2\sigma + s(2s_{12}(s_1 + s_2) + s_1s_2(s_1 + s_2 + 6s_{12})))C_0(s, s_1, s_2, m^2)] \quad (D.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_T^{(-)}(s, s_1, s_2, m^2) = & \frac{s_1 - s_2}{\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2} [-(2(s_2 + s_{12})s_{12}^2 - s_1s_{12}(3s_1 + 4s_{12}) \\ & + s_1s_2(s_1 + s_2 + s_{12}))D_1(s, s_1, m^2) + (2(s_1 + s_{12})s_{12}^2 - s_2s_{12}(3s_2 + 4s_{12}) \\ & + s_1s_2(s_1 + s_2 + s_{12}))D_2(s, s_2, m^2) \\ & + (4m^2\sigma(s_1 - s_2) + s(s_1 - s_2)(s_1s_2 + 2s_{12}^2))C_0(s, s_1, s_2, m^2)] \quad (D.7) \end{aligned}$$

$$\tilde{w}_T^{(-)}(s, s_1, s_2, m^2) = -w_T^{(-)}(s, s_1, s_2, m^2), \quad (D.8)$$

con  $s = k^2 = (k_1 + k_2)^2$ ,  $s_1 = k_1^2$ ,  $s_2 = k_2^2$ ,  $s_{12} = k_1 \cdot k_2$ ,  $\sigma = s_{12}^2 - s_1s_2$ . Le funzioni  $D_i$  e  $C_0$  sono definite rispettivamente in (3.60) e (3.61) e sono combinazioni di funzioni scalari a due punti e del triangolo scalare.

Nel seguito elenchiamo le ampiezze invarianti della parametrizzazione L/T in particolari configurazioni cinematiche

$$1) \quad s_1 = 0 \quad s_2 \neq 0 \quad s \neq 0 \quad m \neq 0$$

$$w_L(s, 0, s_2, m^2) = -\frac{4}{s} - \frac{8m^2}{s} \bar{C}_0 \quad (D.9)$$

$$\begin{aligned} w_T^{(+)}(s, 0, s_2, m^2) = & \frac{1}{(s - s_2)^2} \left[ 4s + 2(s + s_2) \bar{D}_1 + 4s(2m^2 + s_2) \bar{C}_0 \right. \\ & \left. + \frac{2(s^2 + 4s_2s + s_2^2)}{s - s_2} D_2 \right] \quad (D.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_T^{(-)}(s, 0, s_2, m^2) = & -\frac{1}{(s - s_2)^2} \left[ 4s + 2(s + s_2) \bar{D}_1 + 4s_2(2m^2 + s) \bar{C}_0 \right. \\ & \left. + \frac{2(s^2 - 6s_2s - s_2^2)}{s - s_2} D_2 \right] \quad (D.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_T^{(-)}(s, 0, s_2, m^2) = & \frac{1}{(s - s_2)^2} \left[ 4s_2 + 2(s + s_2) \bar{D}_1 + 4s_2(2m^2 + s) \bar{C}_0 \right. \\ & \left. + \frac{2(-s^2 + 6s_2s + s_2^2)}{s - s_2} D_2 \right], \quad (D.12) \end{aligned}$$

dove le funzioni scalari  $D_2$ ,  $\bar{D}_1$  e  $\bar{C}_0$  sono definite rispettivamente nelle equazioni (3.60), (3.117) e (3.118).

$$2) \quad s_1 = M^2 \quad s_2 = M^2 \quad s \neq 0 \quad m \neq 0$$

$$w_L(s, M^2, M^2, m^2) = -\frac{4}{s} - \frac{8m^2}{s} C_M \quad (\text{D.13})$$

$$w_T^{(+)}(s, M^2, M^2, m^2) = \frac{1}{s - 4M^2} \left[ 4 + \frac{4(s + 2M^2)}{s - 4M^2} D_M + \left( 8m^2 + \frac{8M^2(s - M^2)}{s - 4M^2} \right) C_M \right] \quad (\text{D.14})$$

$$w_T^{(-)}(s, M^2, M^2, m^2) = \tilde{w}_T^{(-)}(s, M^2, M^2, m^2) = 0, \quad (\text{D.15})$$

dove  $C_M$  è l'integrale scalare massivo  $C_0(s, M^2, M^2, m^2)$ , mentre  $D_M$  è definita in equazione (3.132).



## Appendice E

# Dettagli sui processi di diffusione

Riportiamo di seguito alcuni risultati ottenuti nello studio del processo di diffusione elastica tra due bosoni di gauge  $A$  di massa nulla nel modello A-B. Se il fermione è privo di massa le ampiezze d'urto nei tre canali, costruite sommando un diagramma di tipo BIM e uno con due vertici di Wess-Zumino, sono date da

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau} &= \mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau}{}_{BIM} + \mathcal{M}_s^{\mu\nu\sigma\tau}{}_{WZ} \\ &= -g_A^4 g_B^2 \frac{a_n^2}{M_B^2} \left( \frac{1}{s} + \frac{q_B^2 g_B^2 v^2}{M_1^2} \frac{1}{s - M_\chi^2} \right) \varepsilon[k_1, k_2, \mu, \nu] \varepsilon[p_1, p_2, \sigma, \tau],\end{aligned}\tag{E.1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t^{\mu\nu\sigma\tau} &= \mathcal{M}_t^{\mu\nu\sigma\tau}{}_{BIM} + \mathcal{M}_t^{\mu\nu\sigma\tau}{}_{WZ} \\ &= -g_A^4 g_B^2 \frac{a_n^2}{M_B^2} \left( \frac{1}{t} + \frac{q_B^2 g_B^2 v^2}{M_1^2} \frac{1}{t - M_\chi^2} \right) \varepsilon[k_1, p_1, \mu, \sigma] \varepsilon[p_2, k_2, \tau, \nu],\end{aligned}\tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_u^{\mu\nu\sigma\tau} &= \mathcal{M}_u^{\mu\nu\sigma\tau}{}_{BIM} + \mathcal{M}_u^{\mu\nu\sigma\tau}{}_{WZ} \\ &= -g_A^4 g_B^2 \frac{a_n^2}{M_B^2} \left( \frac{1}{u} + \frac{q_B^2 g_B^2 v^2}{M_1^2} \frac{1}{u - M_\chi^2} \right) \varepsilon[k_1, p_2, \mu, \tau] \varepsilon[p_1, k_2, \sigma, \nu].\end{aligned}\tag{E.3}$$

Dalle precedenti ampiezze tensoriali è possibile ricavare i moduli quadri e le interferenze per la sezione d'urto non polarizzata. Si ottengono i seguenti risultati

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{s^2 a_n^4 (C^2 s - M_\chi^2 + s)^2}{4M_B^4 (M_\chi^2 - s)^2},\tag{E.4}$$

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{t^2 a_n^4 (C^2 t - M_\chi^2 + t)^2}{4M_B^4 (M_\chi^2 - t)^2},\tag{E.5}$$

$$|\mathcal{M}_u|^2 = \frac{u^2 a_n^4 (C^2 u - M_\chi^2 + u)^2}{4M_B^4 (M_\chi^2 - u)^2}, \quad (\text{E.6})$$

$$\mathcal{M}_s \mathcal{M}_t^* = \frac{a_n^4 (s^4 - 2s^2 u^2 + (t^2 - u^2)^2) (M_\chi^2 - (C^2 + 1)s) (M_\chi^2 - (C^2 + 1)t)}{16stM_B^4 (M_\chi^2 - s) (M_\chi^2 - t)}, \quad (\text{E.7})$$

$$\mathcal{M}_s \mathcal{M}_u^* = \frac{a_n^4 (s^4 - 2s^2 t^2 + (t^2 - u^2)^2) (M_\chi^2 - (C^2 + 1)s) (M_\chi^2 - (C^2 + 1)u)}{16suM_B^4 (M_\chi^2 - s) (M_\chi^2 - u)}, \quad (\text{E.8})$$

$$\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* = \frac{a_n^4 (s^4 - 2s^2(t^2 + u^2) + t^4 + u^4) (M_\chi^2 - (C^2 + 1)t) (M_\chi^2 - (C^2 + 1)u)}{16tuM_B^4 (M_\chi^2 - t) (M_\chi^2 - u)}. \quad (\text{E.9})$$

Lo stesso processo  $AA \rightarrow AA$  è stato studiato anche nel caso in cui il fermione abbia massa  $m$ . Elenchiamo le ampiezze tensoriali nei canali  $t$  ed  $u$  mentre il canale  $s$  è stato già discusso nel paragrafo 3.8. I pedici individuano la tipologia del diagramma come è illustrato in Fig. 3.6.

$$\mathcal{M}_{a,t}^{\mu\nu\sigma\tau} = -g_A^4 g_B^2 \frac{t}{M_B^2} A_3(t, 0, 0, m^2)^2 \varepsilon[k_1, p_1, \mu, \sigma] \varepsilon[p_2, k_2, \tau, \nu], \quad (\text{E.10})$$

$$\mathcal{M}_{a,u}^{\mu\nu\sigma\tau} = -g_A^4 g_B^2 \frac{u}{M_B^2} A_3(u, 0, 0, m^2)^2 \varepsilon[k_1, p_2, \mu, \tau] \varepsilon[p_1, k_2, \sigma, \nu], \quad (\text{E.11})$$

$$\mathcal{M}_{b,t}^{\mu\nu\sigma\tau} = -\frac{1}{t - M_\chi^2} \left( \frac{q_B^2 g_A^4 g_B^4 a_n^2 v^2}{M_1^2 M_B^2} \right) \varepsilon[k_1, p_1, \mu, \sigma] \varepsilon[p_2, k_2, \tau, \nu], \quad (\text{E.12})$$

$$\mathcal{M}_{b,u}^{\mu\nu\sigma\tau} = -\frac{1}{u - M_\chi^2} \left( \frac{q_B^2 g_A^4 g_B^4 a_n^2 v^2}{M_1^2 M_B^2} \right) \varepsilon[k_1, p_2, \mu, \tau] \varepsilon[p_1, k_2, \sigma, \nu], \quad (\text{E.13})$$

$$\mathcal{M}_{c,t}^{\mu\nu\sigma\tau} = -\left( \frac{m}{v} \frac{M_1}{M_B} g_A^2 \right)^2 \frac{1}{t - M_\chi^2} f(t, m)^2 \varepsilon[k_1, p_1, \mu, \sigma] \varepsilon[p_2, k_2, \tau, \nu], \quad (\text{E.14})$$

$$\mathcal{M}_{c,u}^{\mu\nu\sigma\tau} = -\left( \frac{m}{v} \frac{M_1}{M_B} g_A^2 \right)^2 \frac{1}{u - M_\chi^2} f(u, m)^2 \varepsilon[k_1, p_2, \mu, \tau] \varepsilon[p_1, k_2, \sigma, \nu], \quad (\text{E.15})$$

$$\mathcal{M}_{d,t}^{\mu\nu\sigma\tau} = \left( \frac{m}{v} \frac{M_1}{M_B} g_A^2 \right) \left( 8 \frac{C_{AA}}{M} \alpha_1 \right) \frac{f(t, m)}{t - M_\chi^2} \varepsilon[k_1, p_1, \mu, \sigma] \varepsilon[p_2, k_2, \tau, \nu], \quad (\text{E.16})$$

$$\mathcal{M}_{d,u}^{\mu\nu\sigma\tau} = \left( \frac{m}{v} \frac{M_1}{M_B} g_A^2 \right) \left( 8 \frac{C_{AA}}{M} \alpha_1 \right) \frac{f(u, m)}{u - M_\chi^2} \varepsilon[k_1, p_2, \mu, \tau] \varepsilon[p_1, k_2, \sigma, \nu], \quad (\text{E.17})$$

$$\mathcal{M}_{e,t}^{\mu\nu\sigma\tau} = \mathcal{M}_{d,t}^{\mu\nu\sigma\tau}, \quad (\text{E.18})$$

$$\mathcal{M}_{e,u}^{\mu\nu\sigma\tau} = \mathcal{M}_{d,u}^{\mu\nu\sigma\tau}, \quad (\text{E.19})$$

$$\mathcal{M}_{f,t}^{\mu\nu\sigma\tau} = -g_A^2 \left( \frac{m}{v} \right)^2 \frac{1}{t - m_h^2} g(t, m)^2 (t g^{\mu\sigma} + 2 k_1^\sigma p_1^\mu) (t g^{\nu\tau} + 2 p_2^\nu k_2^\tau), \quad (\text{E.20})$$

$$\mathcal{M}_{f,u}^{\mu\nu\sigma\tau} = -g_A^2 \left( \frac{m}{v} \right)^2 \frac{1}{u - m_h^2} g(u, m)^2 (u g^{\mu\tau} + 2 k_1^\tau p_2^\mu) (u g^{\nu\sigma} + 2 p_1^\nu k_2^\sigma). \quad (\text{E.21})$$



## Appendice F

# Dettagli tecnici sul correlatore

## TJJ

Di seguito riportiamo le equazioni che realizzano la corrispondenza fra le ampiezze invarianti  $A_i$  ed  $F_i$ . Le due classi di fattori di forma costruiscono il correlatore  $\langle TJJ \rangle$  in due basi tensoriali distinte definite nelle Tab.4.1 e 4.2.

$$F_1 = \frac{1}{3k^2} \left[ A_4(4p \cdot q + 3p \cdot p) + 2A_{11}(p \cdot q + 2q \cdot q) + 2A_6 p \cdot p + 2A_7 q \cdot q - 2A_{14} q \cdot q - A_{16} q \cdot q + 2A_3 \frac{p \cdot p q \cdot q}{p \cdot q} \right], \quad (\text{F.1})$$

$$F_2 = \frac{1}{3k^2} \left[ -2A_3 \left( \frac{p \cdot p}{p \cdot q} + 2 \right) + 4A_6 + A_7 - 2A_9 - A_{12} \right], \quad (\text{F.2})$$

$$F_3 = \frac{1}{12k^2} \left[ A_4(2p \cdot q + 3q \cdot q) - 2A_{11}(p \cdot q + 2q \cdot q) - 2A_6 p \cdot p - 2A_7 q \cdot q + 2A_{14} q \cdot q + A_{16} q \cdot q - 2A_3 \frac{p \cdot p q \cdot q}{p \cdot q} \right] \quad (\text{F.3})$$

$$F_4 = \frac{A_7}{4p \cdot p} + \frac{1}{12k^2} \left[ 2A_3 \left( \frac{p \cdot p}{p \cdot q} + 2 \right) - 4A_6 - A_7 + 2A_9 + A_{12} \right] \quad (\text{F.4})$$

$$F_5 = \frac{A_{16}}{4} + \frac{1}{12k^2} \left[ -2A_6 p \cdot p - 2A_3 \frac{q \cdot q p \cdot p}{p \cdot q} + A_4(-3p \cdot p - 4p \cdot q) - 2A_{11}(p \cdot q + 2q \cdot q) - 2A_7 q \cdot q + 2A_{14} q \cdot q + A_{16} q \cdot q \right], \quad (\text{F.5})$$

$$F_6 = \frac{A_{12}}{4q \cdot q} + \frac{1}{12k^2} \left[ -4A_6 - A_7 + 2A_9 + A_{12} + 2A_3 \left( \frac{p \cdot p}{p \cdot q} + 2 \right) \right], \quad (\text{F.6})$$

$$F_7 = \frac{A_{11}}{2} + \frac{1}{p \cdot q^2} \left( A_9 q \cdot q p \cdot p + \frac{A_6}{2} p \cdot p p \cdot q + \frac{A_{14}}{2} q \cdot q p \cdot q \right) + \frac{1}{6k^2} \left[ A_4(-4p \cdot q - 3p \cdot p) - 2A_{11}(p \cdot q + 2q \cdot q) - 2A_6 p \cdot p - 2A_7 q \cdot q + 2A_{14} q \cdot q + A_{16} q \cdot q - 2A_3 \frac{p \cdot p q \cdot q}{p \cdot q} \right], \quad (\text{F.7})$$

$$F_8 = \frac{1}{6k^2} \left[ 2A_3 \left( \frac{p \cdot p}{p \cdot q} + 2 \right) - 3 \frac{A_9}{p \cdot q} (p \cdot p + q \cdot q) - 4A_6 - A_7 - 4A_9 + A_{12} \right] \quad (\text{F.8})$$

$$F_9 = \frac{A_6}{p \cdot q} + A_9 \frac{q \cdot q}{p \cdot q^2}, \quad (\text{F.9})$$

$$F_{10} = A_9 \frac{p \cdot p}{p \cdot q^2} + \frac{A_{14}}{p \cdot q}, \quad (\text{F.10})$$

$$F_{11} = \frac{A_{12}}{2q \cdot q} - \frac{A_2}{2p \cdot p}, \quad (\text{F.11})$$

$$F_{12} = \frac{A_3}{2p \cdot q} + \frac{A_7}{2p \cdot p}, \quad (\text{F.12})$$

$$\begin{aligned} F_{13} = & \frac{1}{2}A_6 (p \cdot p + p \cdot q - q \cdot q) + \frac{1}{4}A_7 (p \cdot p + p \cdot q - q \cdot q) + \frac{A_2 p \cdot q q \cdot q}{4p \cdot p} + A_{14} \left( \frac{p \cdot q}{2} + q \cdot q \right) \\ & + \frac{1}{4}A_{12} (p \cdot q + 2q \cdot q) + \frac{A_3}{4p \cdot q} (p \cdot p^2 + (p \cdot q + q \cdot q)p \cdot p + 2p \cdot q q \cdot q) \\ & + \frac{1}{2}A_9 \left[ q \cdot q + p \cdot p \left( \frac{2q \cdot q}{p \cdot q} + 1 \right) \right] - \frac{1}{2} [\Pi(p) + \Pi(q)]. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

## Appendice G

### L'ampiezza $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(s; s_1, s_2, 0)$

In questa appendice riportiamo i risultati analitici per le ampiezze invarianti  $F_i$  che definiscono il correlatore  $TJJ$  per  $m = 0$ . Per semplificare le espressioni abbiamo usato le convenzioni  $\gamma \equiv s - s_1 - s_2$ ,  $\sigma \equiv s^2 - 2(s_1 + s_2)s + (s_1 - s_2)^2$ . Gli integrali scalari che compaiono nelle diverse ampiezze invarianti sono definiti in eq.(4.111) e (4.112).

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_3(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})} &= -\frac{e^2}{144\pi^2 s \sigma^3} \left[ s^6 - 3(s_1 - 4s_2)s^5 + 6(3s_1 - 7s_2)s_2 s^4 \right. \\
&\quad + 2(5s_1^3 - 69s_2 s_1^2 + 117s_2^2 s_1 + 23s_2^3)s^3 - 3(5s_1^4 - 62s_2 s_1^3 + 72s_2^2 s_1^2 + 50s_2^3 s_1 + 7s_2^4)s^2 \\
&\quad \left. + 3(s_1 - s_2)^2(3s_1^3 - 24s_2 s_1^2 - 33s_2^2 s_1 + 2s_2^3)s - 2(s_1 - s_2)^6 \right] \\
&\quad - \frac{e^2 s_1}{48\pi^2 \sigma^4} \mathcal{D}_1(s, s_1, 0) \left[ (s - s_1)^6 + 2(14s + 11s_1)s_2(s - s_1)^4 - (23s^2 - 214s_1 s + 19s_1^2)s_2^2(s - s_1)^2 \right. \\
&\quad \left. - 21s_2^6 + 2(5s_1 - 2s)s_2^5 + (107s^2 - 318s_1 s + 71s_1^2)s_2^4 + 8(-11s^3 + 18s_1 s^2 + 17s_1^2 s - 8s_1^3)s_2^3 \right] \\
&\quad - \frac{e^2 s_2}{48\pi^2 \sigma^4} \mathcal{D}_2(s, s_2, 0) \left[ s_2^6 - 2(s - 14s_1)s_2^5 + (s^2 + 120s_1 s - 37s_1^2)s_2^4 \right. \\
&\quad \left. - 4(s^3 + 49s_1 s^2 - 69s_1^2 s + 13s_1^3)s_2^3 + (s - s_1)(11s^3 - 69s_1 s^2 + 309s_1^2 s - 83s_1^3)s_2^2 \right. \\
&\quad \left. - 2(s - s_1)^3(5s^2 - 49s_1 s - 4s_1^2)s_2 + 3(s - s_1)^5(s + 5s_1) \right] \\
&\quad - \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, 0) \left[ \frac{2s_1 s_2}{\sigma^4} [2s^6 + 3(s_2 - 3s_1)s^5 + (15s_1^2 + 6s_2 s_1 - 13s_2^2)s^4 \right. \\
&\quad + 2(-5s_1^3 - 19s_2 s_1^2 + 29s_2^2 s_1 + s_2^3)s^3 + 12s_2(4s_1^3 - 4s_2 s_1^2 - 3s_2^2 s_1 + s_2^3)s^2 \\
&\quad \left. + (s_1 - s_2)^2(3s_1^3 - 15s_2 s_1^2 - 31s_2^2 s_1 - 5s_2^3)s - (s_1 - s_2)^4(s_1 + s_2)^2 \right] \Big], \tag{G.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_4(s; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})} = & \\
& \frac{e^2}{24\pi^2\sigma^3s_1} \left[ -s_2^5 + (6s + 11s_1)s_2^4 - (14s^2 + s_1s + 5s_1^2)s_2^3 + (16s^3 - 35s_1s^2 + 46s_1^2s - 15s_1^3)s_2^2 \right. \\
& \quad \left. - (s - s_1)^2(9s^2 - 11s_1s - 6s_1^2)s_2 + 2(s - s_1)^4(s + 2s_1) \right] \\
& - \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{D}_2(s, s_2, 0) \left[ -\frac{1}{3\sigma^4s_1} \left( 3(s + s_1)(s - s_1)^6 - 4(4s^2 - 14s_1s - 5s_1^2)s_2(s - s_1)^4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (35s^3 - 119s_1s^2 + 169s_1^2s - 13s_1^3)s_2^2(s - s_1)^2 + (s - 3s_1)s_2^6 - 8(s^2 + 9s_1s + 7s_1^2)s_2^5 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (25s^3 + 159s_1s^2 - 197s_1^2s + 157s_1^3)s_2^4 + 4(-10s^4 + 21s_1^2s^2 + 28s_1^3s - 27s_1^4)s_2^3 \right) \right] \\
& - \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{D}_1(s, s_1, 0) \left[ -\frac{1}{3\sigma^4} \left( s_2^6 + 4(6s + 11s_1)s_2^5 + (-87s^2 + 106s_1s - 91s_1^2)s_2^4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 4(22s^3 - 69s_1s^2 + 40s_1^2s + s_1^3)s_2^3 + (s - s_1)(3s^3 - 29s_1s^2 + 209s_1^2s - 79s_1^3)s_2^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 8(s - s_1)^3(6s^2 - 13s_1s - 4s_1^2)s_2 + (s - s_1)^5(19s + 5s_1) \right) \right] \\
& - \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, 0) \left[ \frac{1}{\sigma^4} \left( -2s(s - s_1)^6 - 2(s^2 + 7s_1s + 2s_1^2)s_2(s - s_1)^4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2(7s^3 + 6s_1s^2 + 11s_1^2s - 4s_1^3)s_2^4 + 12(2s^3 - 3s_1s^2 - 2s_1^2s + s_1^3)s_2^2(s - s_1)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 4(s + s_1)s_2^6 + 6(s^2 - 5s_1s + 2s_1^2)s_2^5 - 4(9s^4 - 25s_1s^3 + 33s_1^2s^2 - 15s_1^3s + 2s_1^4)s_2^3 \right) \right], \\
& \tag{G.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_7(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})} &= \frac{e^2}{72\pi^2} \left[ \frac{840s s_1^2}{\sigma^3} (2(s + s_1)s_2 - (s - s_1)^2) \right. \\
&\quad + \frac{6s_1}{\sigma^2} (-13s^2 + 166s_1s - 13s_1^2 + 39(s + s_1)s_2) + \frac{3(-s + 27s_1 + s_2)}{\sigma} + \frac{2}{s} + \frac{9s}{\gamma^2} - \frac{6}{\gamma} \Big] \\
&\quad - \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, 0) \left\{ -\frac{4s_1s_2}{\gamma^2\sigma^4} \left[ (-9s^2 + 22s_2s - 4s_2^2) s_1^6 + 2s(20s^2 - 39s_2s + 21s_2^2) s_1^5 \right. \right. \\
&\quad + (s - s_2)^6 s_2(4s + s_2) + 2s(s - s_2)^4(2s^2 + 5s_2s + 11s_2^2) s_1 \\
&\quad + (-65s^4 + 96s_2s^3 + 33s_2^2s^2 - 62s_2^3s + 6s_2^4) s_1^4 \\
&\quad + 2s(27s^4 - 22s_2s^3 - 108s_2^2s^2 + 102s_2^3s - 31s_2^4) s_1^3 \\
&\quad \left. \left. - (s - s_2)^2(23s^4 + 40s_2s^3 - 105s_2^2s^2 - 34s_2^3s + 4s_2^4) s_1^2 + s_1^8 - 2ss_1^7 \right] \right\} \\
&\quad - \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{D}_1(s, s_1, 0) \left\{ \frac{2s_1}{3\gamma^2\sigma^4} \left[ -(317s^2 + 227s_1s + 64s_1^2) s_2^6 + (s_1 - s)^5 (-7s^2 + 39s_1s + 32s_1^2) s_2 \right. \right. \\
&\quad + (397s^3 + 846s_1s^2 - 539s_1^2s + 312s_1^3) s_2^5 - (s - s_1)^3 (23s^3 + 114s_1s^2 + 463s_1^2s - 16s_1^3) s_2^2 \\
&\quad - (275s^4 + s_1(1181s^3 + s_1(3s_1(93s + 94s_1) - 1441s^2))) s_2^4 + (s - s_1)(103s^4 + 767s_1s^3 \\
&\quad \left. \left. - 79s_1^2s^2 - 563s_1^3s - 36s_1^4) s_2^3 - 23s_2^8 + (133s + 4s_1) s_2^7 + (s_1 - s)^7 (2s + s_1) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{D}_2(s, s_2, 0) \left\{ \frac{2s_2}{3\gamma^2\sigma^4} \left[ -23s_1^8 + (133s + 4s_2) s_1^7 - (317s^2 + 227s_2s + 64s_2^2) s_1^6 \right. \right. \\
&\quad + (s - s_2)^5 (7s^2 - 39s_2s - 32s_2^2) s_1 - (s - s_2)^7 (2s + s_2) \\
&\quad + (397s^3 + 846s_2s^2 - 539s_2^2s + 312s_2^3) s_1^5 - (s - s_2)^3 (23s^3 + 114s_2s^2 + 463s_2^2s - 16s_2^3) s_1^2 \\
&\quad - (275s^4 + s_2(1181s^3 + s_2(3s_2(93s + 94s_2) - 1441s^2))) s_1^4 + (s - s_2)(103s^4 + 767s_2s^3 \\
&\quad \left. \left. - 79s_2^2s^2 - 563s_2^3s - 36s_2^4) s_1^3 \right] \right\},
\end{aligned}$$

(G.3)

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_8}(s; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0}) &= -\frac{e^2}{12\pi^2\gamma\sigma^3} \left[ 4s_2^5 + (14s_1 - 11s) s_2^4 + 2(s - s_1)(2s + 9s_1) s_2^3 \right. \\
&\quad \left. + 2(7s^3 - 43s_1s^2 + 33s_1^2s - 9s_1^3) s_2^2 - 2(s - s_1)^2(8s^2 - 21s_1s - 7s_1^2) s_2 \right. \\
&\quad \left. + (s - s_1)^4(5s + 4s_1) \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{D}_2(s, s_2, 0) \left\{ \frac{2}{3\gamma\sigma^4} \left[ -5s_2^7 + 3(s - 13s_1) s_2^6 + (57s^2 - 128s_1s + 43s_1^2) s_2^5 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-155s^3 + 567s_1s^2 - 341s_1^2s + 121s_1^3) s_2^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3(55s^4 - 176s_1s^3 + 86s_1^2s^2 + 56s_1^3s - 53s_1^4) s_2^3 + 3(s - s_1)^6(s + s_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (s - s_1)^2(75s^3 + 103s_1s^2 - 311s_1^2s - 11s_1^3) s_2^2 + (s - s_1)^4(7s^2 + 124s_1s + 25s_1^2) s_2 \right] \right\} \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{D}_1(s, s_1, 0) \left\{ \frac{2}{3\gamma\sigma^4} \left[ 3s_2^7 + 5(5s_1 - 3s) s_2^6 + (27s^2 + 24s_1s + 11s_1^2) s_2^5 - (15s^3 + 339s_1s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 289s_1^2s + 159s_1^3) s_2^4 + (-15s^4 + 616s_1s^3 - 714s_1^2s^2 + 168s_1^3s + 121s_1^4) s_2^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s - s_1)(27s^4 - 402s_1s^3 + 40s_1^2s^2 + 298s_1^3s - 43s_1^4) s_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (s - s_1)^3(15s^3 - 51s_1s^2 - 245s_1^2s - 39s_1^3) s_2 + (s - s_1)^5(3s^2 + 22s_1s + 5s_1^2) \right] \right\} \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, 0) \left\{ \frac{4}{\gamma\sigma^4} \left[ (s_1 + s_2) s^7 - 6(s_1^2 - s_2s_1 + s_2^2) s^6 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3(s_1 + s_2)(5s_1^2 - 12s_2s_1 + 5s_2^2) s^5 + 2(-10s_1^4 + 3s_2s_1^3 + 54s_2^2s_1^2 + 3s_2^3s_1 - 10s_2^4) s^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s_1 + s_2)(15s_1^4 + 16s_2s_1^3 - 126s_2^2s_1^2 + 16s_2^3s_1 + 15s_2^4) s^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 6(s_1^6 + 5s_2s_1^5 - s_2^2s_1^4 - 18s_2^3s_1^3 - s_2^4s_1^2 + 5s_2^5s_1 + s_2^6) s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s_1 - s_2)^2(s_1 + s_2)(s_1^4 + 6s_2s_1^3 + 34s_2^2s_1^2 + 6s_2^3s_1 + s_2^4) s \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2s_1(s_1 - s_2)^4 s_2(s_1 + s_2)^2 \right] \right\},
\end{aligned}$$

(G.4)

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_9(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})} &= \frac{e^2}{12\pi^2\gamma^2\sigma^2} \left[ (s-s_1)^4 - 4(4s+s_1)s_2(s-s_1)^2 \right. \\
&\quad \left. - 3s_2^4 + 4(s_1-2s)s_2^3 + 2(13s^2-2s_1s+s_1^2)s_2^2 \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, 0) \left[ \frac{8ss_2}{\gamma^2\sigma^3} \left( s_2^5 + (2s_1-3s)s_2^4 + 2(s-s_1)(s+2s_1)s_2^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(s^3-7s_1s^2+3s_1^2s-s_1^3)s_2^2 - (s-3s_1)(s-s_1)^2(3s+s_1)s_2 + s(s-s_1)^4 \right) \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{D}_2(s, s_2, 0) \left[ \frac{4s_2}{3\gamma^2\sigma^3} \left( s_2^5 - (35s+11s_1)s_2^4 + 30(3s^2+s_1^2)s_2^3 + 2(-35s^3+17s_1s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 11s_1^2s-17s_1^3)s_2^2 + (s-s_1)^2(5s^2+26s_1s+17s_1^2)s_2 + 3(s-s_1)^4(3s-s_1) \right) \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{D}_1(s, s_1, 0) \left[ \frac{4}{3\gamma^2\sigma^3} \left( -s_2^6 + (18s+11s_1)s_2^5 - 3(21s^2-3s_1s+10s_1^2)s_2^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(46s^3-37s_1s^2+2s_1^2s+17s_1^3)s_2^3 - (63s^4-82s_1s^3+2s_1^3s+17s_1^4)s_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3(s-s_1)^3(6s^2+7s_1s-s_1^2)s_2 - s(s-s_1)^5 \right) \right], \tag{G.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}_{11}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})} &= \frac{e^2}{12\pi^2\sigma^2s_2} \left[ 2s^3 - (5s_1+2s_2)s^2 + (4s_1^2+4s_2s_1-2s_2^2)s - (s_1-2s_2)(s_1-s_2)^2 \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, 0) \left[ -\frac{4s}{\sigma^3} \left( s^4 + (s_1-4s_2)s^3 - (s_1-s_2)(5s_1+6s_2)s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s_1+s_2)(3s_1^2+3s_2s_1-4s_2^2)s + (s_1-s_2)^2s_2(3s_1+s_2) \right) \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{D}_2(s, s_2, 0) \left[ \frac{2}{3\sigma^3} \left( -17s^4 + (26s_1+48s_2)s^3 - 42s_2(s_1+s_2)s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(s_1-s_2)(5s_1^2+17s_2s_1+4s_2^2)s + (s_1-3s_2)(s_1-s_2)^3 \right) \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2}\mathcal{D}_1(s, s_1, 0) \left[ -\frac{2}{3\sigma^3s_2} \left( 3s^5 - (10s_1+9s_2)s^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(6s_1^2+26s_2s_1+3s_2^2)s^3 - 6(s_1^3+4s_2s_1^2+14s_2^2s_1-s_2^3)s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s_1-s_2)(s_1^3-19s_2s_1^2-43s_2^2s_1+9s_2^3)s + (s_1-3s_2)(s_1-s_2)^3s_2 \right) \right], \tag{G.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{F}_{13,R}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})}} &= -\frac{1}{2} [\Pi_R(s_1, 0) + \Pi_R(s_2, 0)] + \frac{e^2}{48\pi^2} \left( \frac{s\gamma}{\sigma} + \frac{3s}{\gamma} + 1 \right) \\
&+ \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, 0) \left[ \frac{4s^2 s_1 s_2 (s^2 - 2(s_1 + s_2)s + s_1^2 + s_2^2)}{\gamma\sigma^2} \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{D}_1(s, s_1, 0) \left[ \frac{2}{3\gamma\sigma^2} \left( (s - s_1) (5s^3 + s_1^2 s - 4s_1^3) s_2 + (10s^2 + 5s_1 s + 7s_1^2) s_2^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (s - s_1)^3 (s^2 + 2s_1 s - s_1^2) + (-10s^3 + 3s_1 s^2 - 7s_1^3) s_2^2 + s_2^5 - (5s + 4s_1) s_2^4 \right) \right] \\
&- \frac{e^2}{16\pi^2} \mathcal{D}_2(s, s_2, 0) \left[ \frac{2}{3\gamma\sigma^2} \left( (4s^3 + s_1 s^2 + 7s_1^3) s_2^2 - (8s^2 + 5s_1 s + 7s_1^2) s_2^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (s - s_1)^5 + (s - 4s_1) (s + s_1) s_2 (s - s_1)^2 - s_2^5 + (5s + 4s_1) s_2^4 \right) \right]; \quad (\text{G.7})
\end{aligned}$$

mentre le altre ampiezze invarianti sono ottenute sfruttando la simmetria di Bose del correlatore

$$\underline{\underline{\mathbf{F}_5(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})}} = \underline{\underline{\mathbf{F}_3(\mathbf{s}; \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{0})}}, \quad (\text{G.8})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}_6(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})}} = \underline{\underline{\mathbf{F}_4(\mathbf{s}; \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{0})}}, \quad (\text{G.9})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}_{10}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})}} = \underline{\underline{\mathbf{F}_9(\mathbf{s}; \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{0})}}, \quad (\text{G.10})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}_{12}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{0})}} = \underline{\underline{\mathbf{F}_{11}(\mathbf{s}; \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{0})}}. \quad (\text{G.11})$$

Come è stato già osservato per il caso massivo, l'ultimo fattore di forma,  $F_{13,R}(s; s_1, s_2, 0)$ , deve essere rinormalizzato poiché contiene la funzione tensoriale  $\Pi$ , correzione ad un loop del propagatore del fotone. Se il fermione ha massa nulla si definisce

$$\Pi_R(s, 0) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left[ \frac{5}{3} - \log \left( -\frac{s}{\mu^2} \right) \right], \quad (\text{G.12})$$

dove compare esplicitamente la dipendenza dalla scala di rinormalizzazione  $\mu$ .

# Letter

## Anomaly Poles as Common Signatures of Chiral and Conformal Anomalies

<sup>(a)</sup>Roberta Armillis, <sup>(a,b)</sup>Claudio Corianò and <sup>(a)</sup>Luigi Delle Rose <sup>1</sup>

<sup>(a)</sup>*Dipartimento di Fisica, Università del Salento  
and INFN Sezione di Lecce, Via Arnesano 73100 Lecce, Italy*

<sup>(b)</sup>*Department of Physics, University of Crete  
Heraklion, Crete, Greece*

### Abstract

One feature of the chiral anomaly, analyzed in a perturbative framework, is the appearance of massless poles which account for it. They are identified by a spectral analysis of the anomaly graph and are usually interpreted as being of an infrared origin. Recent investigations show that their presence is not just confined in the infrared, but that they appear in the effective action under the most general kinematical conditions, even if they decouple in the infrared. Further studies reveal that they are responsible for the non-unitary behaviour of these theories in the ultraviolet (UV) region. We extend this analysis to the case of the conformal anomaly, showing that the effective action describing the interaction of gauge fields with gravity is characterized by anomaly poles that give the entire anomaly and are decoupled in the infrared (IR), in complete analogy with the chiral case. This complements a related analysis by Giannotti and Mottola on the trace anomaly in gravity, in which an anomaly pole has been identified in the corresponding correlator using dispersion theory in the IR. Our extension is based on an exact computation of the off-shell correlation function involving an energy-momentum tensor and two vector currents (the gauge-gauge-graviton vertex) which is responsible for the appearance of the anomaly.

---

<sup>1</sup>roberta.armillis@le.infn.it, claudio.coriano@le.infn.it, luigi.dellerose@le.infn.it

## G.1 Introduction

In the case of chiral (and anomalous) gauge theories, the corresponding anomalous Ward identities, which are at the core of the quantum formulation of these theories, have a natural and obvious solution, which can be written down quite straightforwardly, in terms of anomaly poles. This takes place even before that any direct computation of the anomaly diagram allows to really identify the presence (or the absence) of such contributions in the explicit expression of an anomalous correlator of the type  $AVV$  (A= Axial-Vector, V=Vector) or  $AAA$ .

To state it simply, the pole appears by solving the anomalous Ward identity for the corresponding amplitude  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  (we use momenta as in Fig. G.1 with  $k = k_1 + k_2$ )

$$k_\lambda \Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = a_n \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \quad (\text{G.13})$$

rather trivially, using the longitudinal tensor structure

$$\Delta^{\lambda\mu\nu} \equiv w_L = a_n \frac{k^\lambda}{k^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}. \quad (\text{G.14})$$

In the expression above  $a_n = -i/2\pi^2$  denotes the anomaly. The presence of this tensor structure with a  $1/k^2$  behaviour is the signature of the anomaly. This result holds for an  $AVV$  graph, but can be trivially generalized to more general anomaly graphs, such as  $AAA$  graphs, by adding poles in the invariants of the remaining lines, i.e.  $1/k_1^2$  and  $1/k_2^2$

$$\Delta_{AAA}^{\lambda\mu\nu}(k, k_1, k_2) = \frac{1}{3} \left( \frac{a_n}{k^2} k^\lambda \epsilon[\mu, \nu, k_1, k_2] + \frac{a_n}{k_1^2} k_1^\mu \epsilon[\lambda, \nu, k, k_2] + \frac{a_n}{k_2^2} k_2^\nu \epsilon[\lambda, \mu, k, k_1] \right), \quad (\text{G.15})$$

imposing an equal distribution of the anomaly on the three axial-vector legs of the graph.

The same Ward identity can be formulated also as a variational equation. The simplest case is that of a theory describing a single anomalous gauge boson  $B$  with a lagrangean

$$\mathcal{L}_B = \bar{\psi} (i \not{\partial} + e \not{B} \gamma_5) \psi - \frac{1}{4} F_B^2, \quad (\text{G.16})$$

whose anomalous gauge variation ( $\delta B_\mu = \partial_\mu \theta_B$ )

$$\delta \Gamma_B = \frac{i e^3 a_n}{24} \int d^4 x \theta_B(x) F_B \wedge F_B \quad (\text{G.17})$$

can be reproduced by the nonlocal action

$$\Gamma_{pole} = \frac{e^3}{48 \pi^2} \langle \partial B(x) \square^{-1}(x-y) F_B(y) \wedge F_B(y) \rangle. \quad (\text{G.18})$$

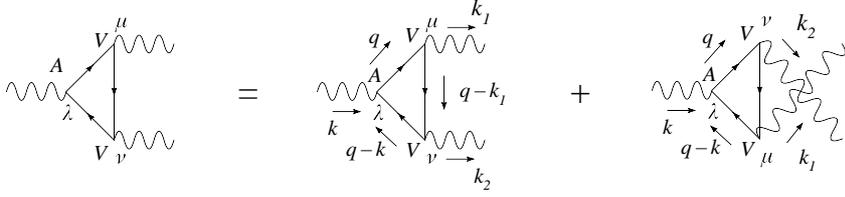


Figura G.1: Triangle diagram and momentum conventions for an AVV correlator.

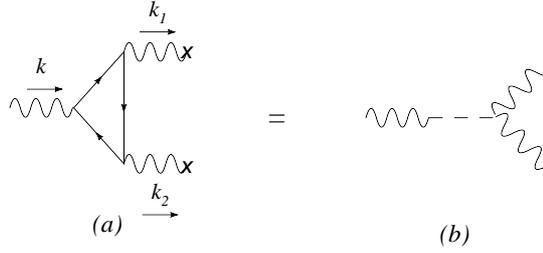


Figura G.2: The amplitude  $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2)$  shown in *a*) for the kinematical configuration  $k_1^2 = k_2^2 = 0$  reduces to the polar form depicted in *b*) and given by Eq. (G.14).

Given a solution of a variational equation, here simplified by Eqs. (G.17) and (G.18), it is mandatory to check whether the  $1/\square$  (nonlocal) solution is indeed justified by a perturbative computation. The analysis shows that the kinematical configuration responsible for the appearance of the pole can be depicted as in Fig. G.2. In this graph containing the mixing of a spin 1 with a spin 0, the anomalous gauge current couples to the two photons via an intermediate massless state which can be interpreted as describing a collinear fermion-antifermion pair (a pseudoscalar composite state) coupled to the two on-shell photons (see also the discussion in [1]). The anomaly graph is characterized, in this limit, by a nonzero spectral density proportional to  $\delta(k^2)$  [2]. This kinematical configuration, in which the two photons are on-shell and the fermions are massless, is entirely described by the anomaly pole, which has a clear IR interpretation [19]. The IR coupling of the pole present in the correlator is, in this case, rather obvious since the limit

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} k^2 \Delta^{\lambda\mu\nu} = k^\lambda a_n \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \quad (\text{G.19})$$

allows to attribute to this amplitude a non-vanishing residue.

The infrared analysis sketched above is well suited for the identification of anomaly poles which have a rather clear interpretation in this region, but does not allow to identify other similar pole terms which might emerge in far more general

kinematical configurations. In [20] we have shown that only a complete and explicit computation of the anomalous effective action allows the identification of the extra anomaly poles present in an  $AVV$  correlator, that otherwise would escape detection. These have been identified<sup>2</sup> using a special representation of the anomaly amplitude developed in [7, 21] (that we have called the “Longitudinal/Transverse or L/T parameterization”), based on the general solution of an anomalous Ward identity. This parameterization takes the form

$$W^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{8\pi^2} \left[ W^L{}^{\lambda\mu\nu} - W^T{}^{\lambda\mu\nu} \right] \quad (\text{G.20})$$

where the longitudinal component ( $W_L$ ) has a pole contribution ( $w_L = -4i/s$ ) plus mass corrections ( $\mathcal{F}$ ) computed in [20]

$$W^L{}^{\lambda\mu\nu} = (w_L - \mathcal{F}(m, s, s_1, s_2)) k^\lambda \varepsilon[\mu, \nu, k_1, k_2] \quad (\text{G.21})$$

with

$$\mathcal{F}(m, s, s_1, s_2) = \frac{8m^2}{\pi^2 s} C_0(s, s_1, s_2, m^2). \quad (\text{G.22})$$

The transverse form factors appearing in  $W_T$  contribute homogeneously to the anomalous Ward identity. They have been given in the most general case in [20].

Obviously, some doubts concerning the correctness of this parameterization may easily arise, especially if one is accustomed to look for anomaly poles using a standard infrared analysis. It is even more so if a pole term of the type shown in Eq. (G.21) is explicitly present for generic virtualities  $s_1$  and  $s_2$  of the photons. For this reason and to dissolve any possible doubt, a direct computation shows that the L/T representation is, indeed, completely equivalent to the Rosenberg parameterization [3] of the anomaly graph, even though no poles come to the surface when using this alternative description of the anomaly graph. In [20] one can find an extension of the same parameterization to the massive fermion case, which is indeed given in Eqs. (G.21) and (G.22). Finally, we have shown that the pole, under general kinematic conditions, is indeed decoupled in the IR. Obviously, at this stage, one needs to worry about the precise meaning of this pole, which is explicitly present in some parameterizations, but it is not generated by some special infrared kinematics and as such it does not have a clear IR interpretation.

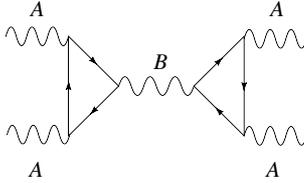


Figura G.3: A “two-triangles anomaly amplitude in the  $s$ -channel which is pole-dominated. In this case we have assumed  $A$  to be a non-anomalous gauge boson while  $B$  is anomalous.

## G.2 Pole-dominated amplitudes

A useful device to investigate the meaning of these new anomaly poles [22] is provided by a class of amplitudes [12] which connect initial and final state via anomaly amplitudes, one example of them being shown in Fig. (G.3). These amplitudes are unitarily unbound in the UV [15]. This property of theirs can be easily derived by considering the scattering of *massless* spin-1 fields coupled via a longitudinal exchange of an anomalous gauge boson. The amplitude in the  $s$ -channel is shown in Fig. G.3. In the case of scattering of massless gauge bosons the (IR) pole of Eq. (G.14) saturates each of the two subamplitudes (i.e. for  $m = s_1 = s_2 = 0$ ). This is an obvious manifestation of the fact that an anomaly pole has dangerous effects in the UV due to the broken Ward identity. This behaviour is retained also under general kinematics, for instance in the scattering of massive gauge bosons, when each of the two triangle subdiagrams of Fig. (G.3) take the more general form given by Eqs. (G.20), (G.21). Interestingly enough, if we subtract the pole component contained in  $w_L$ <sup>3</sup> the quadratic growth of the amplitude disappears [20]. Therefore the manifestation of the anomaly and the breaking of unitarity in the UV, in this special kinematical configuration, is necessarily attributed to the  $w_L$  component, even if it is decoupled in the IR. After the subtraction, the Ward identity used in the computation of the amplitude remains broken, but it is not anomalous. The apparent breaking of unitarity in the UV is not ameliorated by a more complete analysis of this S-matrix amplitude involving the Higgs sector, since a massless fermion in each of the two anomaly loops would not allow the exchange of a Higgs in the  $s$ -channel but the corresponding amplitude would still share the same asymptotic behaviour

<sup>2</sup>A single pole term for an AVV and 3 pole terms for an AAA diagram.

<sup>3</sup>We ignore at this point the meaning of this subtraction in the IR. This point is rather delicate and has been discussed in [20] and brings to open ended conclusions concerning the meaning of a “pole subtraction scheme.

found for a massive fermion.

The only possible conclusion extrapolated from this example is that amplitudes which are dominated by anomaly poles in the UV region demonstrate the inconsistency of an anomalous theory, as expected by common lore. We conclude that unitarity provides a hint on the UV significance of the anomaly poles of the anomaly graphs surfacing in the L/T parameterization, poles which are absent in the usual IR analysis. This does not necessarily exclude a possible (indirect) role played by these contributions in the IR region, nevertheless they do not appear to be artifact generated by the Schouten relation.

The formal solution of the Ward identity [7] that takes to the L/T parameterization and to the isolation of an anomaly pole is indeed in agreement with what found in a direct computation. As shown in [20] one has just to be careful in computing the residue of this parameterization in the IR, where the decoupling of these poles occurs, but it is, for the rest, easy to check. As  $k^2$  is nonzero the separation into longitudinal and transverse contributions is indeed well defined and equivalent to Rosenberg's result [20]. These results, as we are going to show, emerge also from the perturbative analysis of the effective action for the conformal anomaly and are likely to correspond to a generic feature of other manifestations of the anomalies in field theory.

### G.3 The complete anomalous effective action and its expansions in the chiral case

The point made in [20] is that the anomaly is always completely given by  $w_L$ , under *any* kinematical conditions, while the mass corrections (generated, for instance, by spontaneous symmetry breaking) are clearly (and separately) identifiable as extra terms which contribute to the broken anomalous Ward identity satisfied by the correlator. It is important that these two sources of breaking of the gauge symmetry (anomalous and spontaneous) be thought of as having both an independent status. For this reason one can provide several organizations of the effective actions of anomalous theories, with similarities that cover both the case of the chiral anomaly and of the conformal anomaly, as we will discuss next.

The complete effective action, in the chiral case, can be given in several forms. The simplest, valid for any energy range, is the full one

$$\Gamma^{(3)} = \Gamma_{pole}^{(3)} + \tilde{\Gamma}^{(3)} \tag{G.23}$$

with the pole part given by (G.18) and the remainder ( $\tilde{\Gamma}^{(3)}$ ) given by a complicated nonlocal expression which contributes homogeneously to the Ward identity of the anomaly graph

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(3)} = & - \int d^4x d^4y d^4z \partial \cdot B(z) F(x) \wedge F(y) \int \frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^8} \\ & e^{-ik_1 \cdot (x-z) - ik_2 \cdot (y-z)} \mathcal{F}(m, k, k_1, k_2) \\ & - \int d^4x d^4y d^4z \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^8} d^4k_2 W_T^{\lambda\mu\nu}(k, k_1, k_2, m) B_\lambda(k) \cdot B_\mu(k_1) B_\nu(k_2). \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

The expressions of these form factors can be found in [20]. This (rather formal) expression is an exact result, but becomes more manageable if expanded in the fermion mass (in  $1/m$  or in  $m$ ) (see for example [23, 24]).

For instance, let's consider the  $1/m$  case. One of the shortcomings of this expansion, as we are going to argue next, is that it does not do full justice of the presence of massless degrees of freedom in the theory (anomaly poles do not appear explicitly in this expansion) which, as discussed in [1] might instead be of physical significance since they are not connected to any scale.

A second expansion of the effective action Eq. (G.24) can be given for a small mass  $m$  (in  $m^2/s$ ). In this formulation the action is organized in the form of a pole contribution plus  $O(m^2/s)$  corrections. In this case it is not suitable to describe the heavy fermion limit, but the massless pseudoscalar degrees of freedom introduced by the anomaly in the effective theory can be clearly identified from it. As discussed in [20, 15, 25] these are: one axion and one ghost. This expansion gives ( $s < 0$ )

$$w_L = -\frac{4i}{s} - \frac{4im^2}{s^2} \log\left(-\frac{s}{m^2}\right) + O(m^3) \quad (\text{G.25})$$

which has a smooth massless limit. It seems to us that this form of the effective action is the most suitable for the study of the UV behaviour of an anomalous theory, in the search of a possible UV completion. Notice that the massless limit of this action reflects (correctly) the pole-dominance present in the theory in the UV region of  $s \rightarrow \infty$ , since the mass corrections are suppressed by  $m^2/s^2$ .

## G.4 The conformal anomaly case

While this intriguing pattern of pole dominance in the UV and of decoupling in the IR (for massive or off-shell correlators) is uncovered only after a complete perturbative analysis of the general anomaly graph, it is not just a property of the chiral case.

As we are going to show, a similar behaviour is typical of the conformal anomaly. We summarize the results of our analysis, details will be given elsewhere [26].

In a recent work [1] Mottola and Giannotti have shown that the diagrams responsible for the generation of the conformal anomaly contain an anomaly pole. In their analysis they classify the form factors of the correlator which is responsible for the conformal anomaly graph, which is the photon-photon-graviton vertex, or  $TJJ$  correlator, involving the vector current (J) and the energy momentum tensor (T). The authors use a Ward identity that enforces conservation of the energy-momentum tensor to fix the correlator, which can also be fixed by imposing the general form of the trace anomaly in the massive fermion case. Their analysis shows conclusively that anomaly poles can be extracted in the IR using dispersion theory, similarly to the chiral case. This point had also been noticed in [27] in the study of the Ward identity of the correlators describing the trace anomaly at zero momentum transfer.

The identification of these contributions is relevant for establishing the correct expression of the gauge related terms in the gravitational effective action. The spectral analysis of [1] proves that variational solutions of the trace anomaly equation that will be given below in Eq. (G.30), indeed, correctly account at least for some of the contributions to the effective action of these theories. Mass-dependent corrections and other traceless terms which are not part of the anomaly, of course, are not identified by this solution.

We recall that the gravitational trace anomaly in 4 spacetime dimensions generated by quantum effects in a classical gravitational and electromagnetic background is given by the expression

$$T_{\mu}^{\mu} = -\frac{1}{8} \left( 2b C^2 + 2b' \left( E - \frac{2}{3} \square R \right) + 2c F^2 \right), \quad (\text{G.26})$$

where the  $b$  and  $b'$  and  $c$  are parameters.  $C^2$  denotes the Weyl tensor squared and  $E$  is the Euler density given by

$$C^2 = C_{\lambda\mu\nu\rho} C^{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\lambda\mu\nu\rho} R^{\lambda\mu\nu\rho} - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{R^2}{3}, \quad (\text{G.27})$$

$$E = {}^*R_{\lambda\mu\nu\rho} {}^*R^{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\lambda\mu\nu\rho} R^{\lambda\mu\nu\rho} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2. \quad (\text{G.28})$$

For a single fermion in the theory we have that  $b = 1/320\pi^2$ , and  $b' = -11/5760\pi^2$  and  $c = -e^2/24\pi^2$ .

The effective action, in this approach, is identified by solving the variational equation by inspection, similarly to what we have discussed in the previous section

in the case of the chiral anomaly. In this case the equation takes the form

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta\Gamma}{\delta g_{\mu\nu}}=T_{\mu}^{\mu}. \quad (\text{G.29})$$

The solution of this variational equation is well known and is given by the nonlocal expression [28]

$$\begin{aligned} S_{anom}[g, A] = & \frac{1}{8} \int d^4x \sqrt{-g} \int d^4x' \sqrt{-g'} \left( E - \frac{2}{3} \square R \right)_x G_4(x, x') \left[ 2b C^2 \right. \\ & \left. + b' \left( E - \frac{2}{3} \square R \right) + 2c F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]_{x'}. \end{aligned} \quad (\text{G.30})$$

The notation  $G_4(x, x')$  denotes the Green's function of the differential operator defined by

$$\Delta_4 \equiv \nabla_{\mu} \left( \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} + 2R^{\mu\nu} - \frac{2}{3} R g^{\mu\nu} \right) \nabla_{\nu} = \square^2 + 2R^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \frac{1}{3} (\nabla^{\mu} R) \nabla_{\mu} - \frac{2}{3} R \square \quad (\text{G.31})$$

and requires some boundary conditions to be specified. The nonlocal action shows the presence of a massless pole in the linearized limit [1]

$$S_{anom}[g, A] = -\frac{c}{6} \int d^4x \sqrt{-g} \int d^4x' \sqrt{-g'} R_x^{(1)} \square_{x, x'}^{-1} [F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}]_{x'}, \quad (\text{G.32})$$

valid for a weak gravitational field ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ ,  $\kappa^2 = 16\pi G$ ). In this case

$$R_{\mu\nu}^{(1)} \equiv \partial_{\mu}^x \partial_{\nu}^x h^{\mu\nu} - \square h, \quad h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \quad (\text{G.33})$$

Eq. (G.32) can be reproduced by a perturbative analysis.

## G.5 The $TJJ$ correlator

To clarify this point we consider the linearized expression of the gauge contribution to the gravitational effective action which is given by

$$S_{TJJ} = \int d^4x d^4y d^4z \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(x, y, z) A_{\alpha}(x) A_{\beta}(y) h_{\mu\nu}(z), \quad (\text{G.34})$$

with  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(x, y, z)$  being the expression of the correlator of two gauge currents with an extra insertion of the energy momentum tensor (see Fig. G.4) at nonzero momentum transfer. We discuss the QED case. We recall that the coupling to gravity of QED, in the weak field limit, is described by the total energy momentum tensor via an interaction of the form  $h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$  where

$$T_{\mu\nu} \equiv T_{Dirac}^{\mu\nu} + T_{int}^{\mu\nu} + T_{e.m.}^{\mu\nu}. \quad (\text{G.35})$$

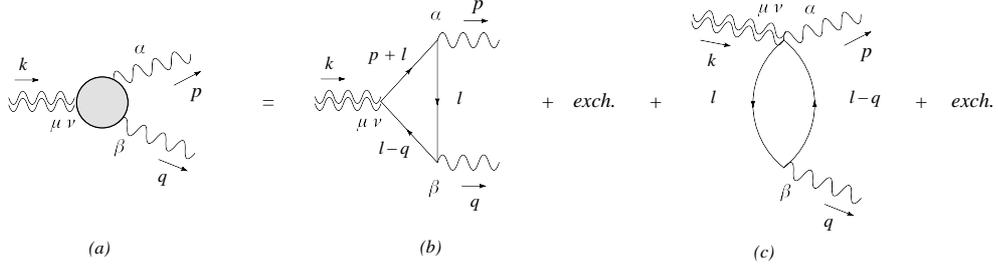


Figure G.4: The complete one-loop vertex  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}$  in a) obtained as the sum of two 1PI contributions in b) and c) and of their Bose symmetric diagrams.

In this case, specifically, one has

$$T_{Dirac}^{\mu\nu} = -i\bar{\psi}\gamma^{(\mu}\overleftrightarrow{\partial}^{\nu)}\psi + g^{\mu\nu}(i\bar{\psi}\gamma^\lambda\overleftrightarrow{\partial}_\lambda\psi - m\bar{\psi}\psi), \quad (\text{G.36})$$

$$T_{int}^{\mu\nu} = -eJ^{(\mu}A^{\nu)} + eg^{\mu\nu}J^\lambda A_\lambda, \quad (\text{G.37})$$

$$T_{e.m.}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}, \quad (\text{G.38})$$

where the current is given by

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (\text{G.39})$$

We have introduced some standard notation for the symmetrization of the tensor indices and left-right derivatives  $H^{(\mu\nu)} \equiv (H^{\mu\nu} + H^{\nu\mu})/2$  and  $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv (\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)/2$ .

The amplitude present in Eq. (G.34) can be expanded in a specific base given by

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q) = \sum_{i=1}^{13} F_i(s; s_1, s_2, m^2) t_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q), \quad (\text{G.40})$$

where the 13 invariant amplitudes  $F_i$  are functions of the kinematical invariants  $s = k^2 = (p + q)^2$ ,  $s_1 = p^2$ ,  $s_2 = q^2$  and of the internal mass  $m$ . In [1] the authors use the Feynman parameterization and momentum shifts in order to identify the expressions of these amplitudes in terms of parametric integrals. This was also the approach followed by Rosenberg in his original identification of the 6 invariant amplitudes of the AVV anomaly diagram<sup>4</sup>. The list of amplitudes  $F_i$  can be found in [1] together with the expressions of the tensors  $t_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$ . The number of these form factors reduces from 13 to 3 in the case of on-shell photons, as shown long ago by Berends and Gastmans [17]. For our purposes, the only amplitudes contributing

<sup>4</sup>The explicit expression of the Rosenberg's integrals have been given in [20]

to the trace anomaly in the massive fermion case come from the tensors  $t_1^{\mu\nu\alpha\beta}$  and  $t_2^{\mu\nu\alpha\beta}$ . They are given by

$$t_1^{\mu\nu\alpha\beta} = (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) u^{\alpha\beta}(p, q), \quad (\text{G.41})$$

$$t_2^{\mu\nu\alpha\beta} = (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) w^{\alpha\beta}(p, q), \quad (\text{G.42})$$

where

$$\begin{aligned} u^{\alpha\beta}(p, q) &\equiv (p \cdot q) g^{\alpha\beta} - q^\alpha p^\beta, \\ w^{\alpha\beta}(p, q) &\equiv p^2 q^2 g^{\alpha\beta} + (p \cdot q) p^\alpha q^\beta - q^2 p^\alpha p^\beta - p^2 q^\alpha q^\beta. \end{aligned} \quad (\text{G.43})$$

The identification of an anomaly pole which is not of clear IR origin requires an explicit computation of the effective action, which is rather involved in perturbation theory, but we omit details and just summarize the relevant results. We perform a computation with the kinematical constraint  $s_1 = s_2 = 0$  (i.e. two on-shell photons) and a massive fermion. We obtain

$$F_1(s; 0, 0, m^2) = F_{1pole} + \frac{e^2 m^2}{3 \pi^2 s^2} + i \frac{e^2}{3 \pi^4} \mathcal{C}_0(s, 0, 0, m^2) \left[ \frac{m^2}{2s} - \frac{2m^4}{s^2} \right],$$

where

$$F_{1pole} = -\frac{e^2}{18 \pi^2 s} \quad (\text{G.44})$$

and the scalar three-point function  $\mathcal{C}_0(s, 0, 0, m^2)$  is given by

$$\mathcal{C}_0(s, 0, 0, m^2) = \frac{i\pi^2}{2s} \log^2 \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1}, \quad (\text{G.45})$$

with  $a_3 = \sqrt{1 - 4m^2/s}$ . The form factor  $F_2$ , which in general gives a nonzero contribution to the trace anomaly in the presence of mass terms, is multiplied by a tensor structure ( $t_2$ ) which vanishes when the two photons are on-shell. It is quite straightforward to figure out that the pole term ( $F_{1pole}$ ) given above corresponds to a contribution to the gravitational effective action of the form (G.32), with a linearized scalar curvature. Therefore, similarly to the case of the chiral anomaly, also in this case the anomaly is entirely given by  $F_{1pole}$ , even in a configuration which is not obtained from a dispersive approach. The presence of mass corrections in (G.44) is not a source of confusion, since there is a clear separation between anomaly and non-conformal breakings of the conformal symmetry.

### G.5.1 $F_1$ in the most generic case

A similar result is found in the most general case. After defining  $\gamma \equiv s - s_1 - s_2$  and  $\sigma \equiv s^2 - 2(s_1 + s_2)s + (s_1 - s_2)^2$  we obtain

$$\begin{aligned}
F_1(s; s_1, s_2, m^2) &= F_{1pole} + \frac{e^2 \gamma m^2}{3\pi^2 s \sigma} \\
&\quad - \frac{i e^2 m^2 s_2}{3\pi^2 s \sigma^2} \mathcal{D}_2(s, s_2, m^2) [s^2 + 4s_1 s - 2s_2 s - 5s_1^2 + s_2^2 + 4s_1 s_2] \\
&\quad - \frac{i e^2 m^2 s_1}{3\pi^2 s \sigma^2} \mathcal{D}_1(s, s_1, m^2) [-(s - s_1)^2 + 5s_2^2 - 4(s + s_1) s_2] \\
&\quad + \frac{i e^2}{6\pi^4} \mathcal{C}_0(s, s_1, s_2, m^2) \left[ \frac{m^2 \gamma}{s \sigma^2} \left[ (s - s_1)^3 - s_2^3 + (3s + s_1) s_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-3s^2 - 10s_1 s + s_1^2) s_2 \right] - \frac{4m^4 \gamma}{s \sigma} \right], \tag{G.46}
\end{aligned}$$

where

$$\mathcal{D}_i \equiv \mathcal{D}_i(s, s_i, m^2) = i\pi^2 \left[ a_i \log \frac{a_i + 1}{a_i - 1} - a_3 \log \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right] \quad i = 1, 2. \tag{G.47}$$

It is quite obvious from the most general expression of  $F_1$  that the massless pole, which accounts for the entire trace anomaly, is indeed part of the spectrum. The pole decouples in the infrared, as one can show after a detailed study of the entire correlation function  $\Gamma^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q)$ .

There is something to learn from perturbation theory: anomaly poles are not just associated to the collinear fermion-antifermion limit of the amplitude, but are also present in other, completely different kinematical domains where the collinear kinematics is not allowed and are not detected using a dispersive approach. They are present in the off-shell effective action as they are in the on-shell ones. Proving their decoupling in the IR requires a complete analysis of the anomalous contributions to the effective action, along the lines of [20].

## G.6 Lessons from the $1/m$ expansions

One obvious question to ask is if the nonlocal structure of the poles, which accounts for the anomaly also in the case of the conformal anomaly, is not clearly visible in a given operatorial expansion in terms of higher dimensional operators. This is indeed the case, for instance, if we decide to expand in  $1/m$  the form factor  $F_1$ . We obtain

$$F_1(s, 0, 0, m^2) = \frac{7e^2}{135 \cdot 16\pi^2} \frac{1}{m^2} + \frac{e^2 s}{189 \cdot 16\pi^2} \frac{1}{m^4} + O\left(\frac{1}{m^6}\right), \tag{G.48}$$

with no signature of the presence of non-decoupling contributions in the UV, which are scaleless and described entirely by the anomaly pole. Of course  $1/m$  expansions are legitimate, but there is no apparent sign left in G.48 of the presence of a massless contribution to the conformal anomaly, due to the universal appearance of a mass term. Another important observation is that the contributions to the trace of the energy momentum tensor, which is relevant in the cosmological context [18, 29], are all dominated by the pole term at high energy, since mass corrections contained in  $F_1$  are clearly suppressed as  $m^2/s$ . Obviously, Eq. (G.48) differs systematically from the result obtained from the small  $m$  expansion, where the nonlocality of the effective action and the presence of a massless pseudoscalar exchange, as a result of the conformal anomaly, is instead quite evident. We obtain in this second case

$$F_1(s, 0, 0, m^2) = -\frac{e^2}{18\pi^2} \frac{1}{s} + \frac{e^2}{3\pi^2} \frac{m^2}{s^2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left[ \log\left(-\frac{s}{m^2}\right) \right]^2 \right] \quad (\text{G.49})$$

where the anomalous form factor shows a massless pole beside some additional mass corrections. This is an expansion, as in the case of the chiral anomaly, which is also useful in the UV limit. It appears to be closer to the complete result even for a large fermion mass, since it keeps the two sources of breaking of the conformal symmetry separated. In this respect it would probably be of interest to see whether the effects of superluminality [30] in a weak (external) gravitational field, found in the  $1/m$  expansion of the effective action of [31], have anything to share with the presence of massless poles in the effective description.

## G.7 Conclusions

The presence of anomaly poles in perturbation theory appears to be an essential property of anomalous theories, even in the most general kinematical configurations of the anomalous correlators. We have reviewed previous work on the study of the anomaly poles of anomalous gauge currents, with the intent to show the similarities between chiral and conformal anomalies. Our explicit computation, in the case of the trace anomaly, shows that pole singularities appear also in non-collinear configurations of the corresponding anomaly graphs. As we have stressed, these poles are not identified by a spectral analysis but their existence should not be matter of controversy. Historically, the signature of the anomaly has been attributed to a pole in the anomalous correlator only in the IR region. Our conclusions, contained in a previous work, were that anomaly poles are instead generic, and not artifacts

of a given parameterization or due to the presence of the Schouten relations. Here, building on more recent studies of the conformal anomaly in perturbation theory, we have shown that the perturbative signature of a conformal anomaly is, again, an anomaly pole and that the correlator responsible for the conformal anomaly has properties which are typical of the gauge anomaly. The pole, also in this case, can be coupled or decoupled in the IR, and raises significant questions concerning the significance and the implications of massless scalar degrees of freedom in gravity, recently addressed in [1]. In the case of anomalous chiral gauge theories similar issues [15] [20] have been raised concerning the significance of massless pseudoscalar degrees of freedom (gauged axions) and their correct interpretation in a simple field theory language.

#### **Acknowledgements**

We thank M. Guzzi for discussions. This work is supported in part by the European Union through the Marie Curie Research and Training Network “Universenet” (MRTN-CT-2006-035863). C.C. thanks the Theory Group at Crete for hospitality and partial financial support by the EU grant INTERREG IIIA (Greece-Cyprus) and FP7-REGPOT-2008-1-CreteHEPCosmo-228644.



# Bibliografia

- [1] M. Giannotti and E. Mottola, Phys. Rev. D79 (2009) 045014, 0812.0351.
- [2] A.D. Dolgov and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B27 (1971) 525.
- [3] L. Rosenberg, Phys. Rev. 129 (1963) 2786.
- [4] A. Vainshtein, Phys. Lett. B 569 (2003) 187.
- [5] F. Jegerlehner and O.V. Tarasov, Phys. Lett. B 639 (2006) 299.
- [6] S.L. Adler, Lectures in Elementary Particle Physics, ed. S Deser, M. Grisaru and H. Pendleton (M.I.T. Press, Cambridge, MA.) (1970).
- [7] M. Knecht et al., JHEP 03 (2004) 035, hep-ph/0311100.
- [8] N.I. Usyukina and A.I. Davydychev, Phys. Lett. B305 (1993) 136.
- [9] B.A. Kniehl and J.H. Kuhn, Nucl. Phys. B329 (1990) 547.
- [10] G.J. van Oldenborgh and J.A.M. Vermaseren, Z. Phys. C46 (1990) 425.
- [11] G.V. Dunne, (2004), hep-th/0406216.
- [12] C. Bouchiat, J. Iliopoulos and P. Meyer, Phys. Lett. B38 (1972) 519.
- [13] M. Froissart, Phys. Rev. 123 (1961) 1053.
- [14] M. Jacob and G.C. Wick, Ann. Phys. 7 (1959) 404.
- [15] C. Coriano, M. Guzzi and S. Morelli, Eur. Phys. J. C55 (2008) 629, 0801.2949.
- [16] J. Horejsi, Phys. Rev. D32 (1985) 1029.
- [17] F.A. Berends and R. Gastmans, Ann. Phys. 98 (1976) 225.
- [18] A.A. Starobinsky, Phys. Lett. B91 (1980) 99.

- [19] S.R. Coleman and B. Grossman, Nucl. Phys. B203 (1982) 205.
- [20] R. Armillis et al., (2009), 0905.0865.
- [21] M. Knecht et al., JHEP 11 (2002) 003, hep-ph/0205102.
- [22] R. Armillis, C. Coriano and M. Guzzi, JHEP 05 (2008) 015, 0711.3424.
- [23] F. Bastianelli et al., JHEP 11 (2007) 099, 0710.5572.
- [24] F. Bastianelli and C. Schubert, JHEP 02 (2005) 069, gr-qc/0412095.
- [25] R. Armillis et al., JHEP 10 (2008) 034, 0808.1882.
- [26] R. Armillis, C. Corianò, L. Delle Rose, in preparation.
- [27] J. Horejsi and M. Schnabl, Z. Phys. C76 (1997) 561, hep-ph/9701397.
- [28] R.J. Riegert, Phys. Lett. B134 (1984) 56.
- [29] I.L. Shapiro, PoS IC2006 (2006) 030, hep-th/0610168.
- [30] G.M. Shore, Contemp. Phys. 44 (2003) 503, gr-qc/0304059.
- [31] I.T. Drummond and S.J. Hathrell, Phys. Rev. D22 (1980) 343.