

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN FISICA

TESI DI LAUREA IN FISICA TEORICA

Fisica del Mesone B_s nel Modello Standard
ed in una Estensione con Extra-Dimensioni

Relatori:

Chiar.mo Prof. Leonardo ANGELINI

Dr. Pietro COLANGELO

Laureanda:

Dr.ssa Maria Valentina CARLUCCI

ANNO ACCADEMICO 2008/2009

a Marco

Indice

Introduzione	1
1 Il Settore del Flavour nel MS	5
1.1 La Lagrangiana elettrodebole	5
1.1.1 Il gruppo di gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$	5
1.1.2 Rottura spontanea della simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$	9
1.2 La matrice di massa	13
1.2.1 L'interazione elettrodebole nel settore dei quark	13
1.2.2 La matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa	15
1.3 Fenomenologia della matrice CKM	19
1.3.1 Violazione di CP	19
1.3.2 Forma canonica	21
1.3.3 Parametrizzazione di Wolfenstein	23
1.3.4 I triangoli di unitarietà	24
2 Il Modello ACD con una Singola UED	29
2.1 I modelli con dimensioni extra	29
2.1.1 Motivazioni	29
2.1.2 Compattificazione	30
2.1.3 Segno delle dimensioni extra	31
2.1.4 Eccitazioni di Kaluza-Klein	32
2.2 I campi quantistici nel Modello ACD	33
2.2.1 Ipotesi del Modello ACD con una singola UED	33
2.2.2 Campi scalari	35
2.2.3 Campi spinoriali	35
2.2.4 Campi vettoriali e interazioni di gauge	37
2.3 Estensione del MS mediante il Modello ACD	38
2.3.1 Il settore elettrodebole nel Modello ACD	38
2.3.2 Regole di Feynman del Modello ACD	41
3 Oscillazioni del B_s nel MS e nel Modello ACD	46
3.1 Fenomenologia del B_s	46
3.1.1 Dati anagrafici	46
3.1.2 Equazione di evoluzione: mixing $B_s^0 - \bar{B}_s^0$	46
3.1.3 Violazione di CP	52
3.2 Teoria delle oscillazioni del B_s nel MS	56

3.2.1	Approssimazione di Wigner-Weisskopf	56
3.2.2	Calcolo dell'Hamiltoniana efficace	58
3.3	Teoria delle oscillazioni del B_s nel Modello ACD	63
3.3.1	Contributo dei modi di Kaluza-Klein	63
3.3.2	Calcolo della serie di Kaluza-Klein	65
4	Decadimenti $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell \bar{\ell}$ e $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \psi$ nel MS e nel Modello ACD	71
4.1	Aspetti generali	71
4.1.1	I mesoni η ed η'	71
4.1.2	Hamiltoniana efficace della transizione $b \rightarrow s$	72
4.1.3	Coefficienti di Wilson nel Modello ACD	75
4.1.4	Fattori di forma	78
4.2	I decadimenti rari $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell \bar{\ell}$	82
4.2.1	Decadimenti $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} e^+ e^-$ e $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \mu^+ \mu^-$	82
4.2.2	Decadimento $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \tau^+ \tau^-$	87
4.2.3	Decadimento $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \nu \bar{\nu}$	90
4.3	Il decadimento $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} J/\psi$	94
4.3.1	Calcolo del branching ratio	94
4.3.2	Analisi della violazione di CP	96
	Conclusioni	100
	A Operator Product Expansion	102
A.1	Teoria generale	102
A.2	Applicazione all'interazione elettrodebole	105
A.2.1	Hamiltoniana efficace	105
A.2.2	Calcolo dei coefficienti di Wilson	107
	Bibliografia	110
	Ringraziamenti	116

Introduzione

Oggi, a distanza di secoli dall'inizio della ricerca dei costituenti fondamentali di tutta la complessità e la bellezza del mondo, la più sofisticata e completa teoria delle particelle e delle loro interazioni è nota come Modello Standard (MS).

Il MS è la sintesi di contributi sviluppatasi nell'arco di un ventennio ad opera di più scienziati e su diversi fronti. Da un lato si colloca il percorso verso l'interazione elettrodebole: nel 1963 Sheldon Glashow riuscì ad unificare interazione elettromagnetica e debole; nel 1967, Steven Weinberg e Abdus Salam utilizzarono i risultati di Peter Higgs per risolvere i problemi che le masse delle particelle causavano nell'interazione elettrodebole. Sul fronte dell'interazione forte, la base è stata gettata da Murray Gell-Mann e George Zweig quando nel 1964 proposero l'ipotesi dei quark; da allora, è bastato poco tempo per rendersi conto del fatto che i quark necessitavano di un numero quantico aggiuntivo rispetto a quelli fino ad allora noti: l'ipotesi del colore, di Moo-Young Han, Yoichiro Nambu e Oscar Greenberg, è del 1965; nasce così la Cromodinamica Quantistica, il cui complesso trattamento matematico ha richiesto gli sforzi di scienziati del calibro di Richard Feynman e James Bjorken per l'interpretazione degli esperimenti ad alte energie (1969), di David Gross, David Politzer and Frank Wilczek per lo studio della libertà asintotica (1973); resta invece ancora aperto il problema del confinamento.

I due fronti non sono però indipendenti: l'interazione elettrodebole e l'interazione forte sono accomunate dal fatto di essere generate dal *principio di gauge*, che quindi si pone come principio regolatore del MS stesso. D'altra parte, il fatto che il MS sia una teoria di gauge è una caratteristica ben accolta anche dal punto di vista filosofico, in quanto esclude l'esistenza di un riferimento privilegiato anche per quanto riguarda le simmetrie interne.

Lo sviluppo del MS nel tentativo di includere i fenomeni osservati sperimentalmente riguardanti particelle e interazioni si è svolto parallelamente allo sviluppo del formalismo matematico su cui esso è fondato, ovvero la teoria quantistica dei campi. La teoria quantistica dei campi possedeva già un solido background nella QED perfezionata di Bethe, Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dyson; essa è stata generalizzata alle teorie non abeliane di Yang e Mills a partire dagli anni Sessanta per adattarsi alle esigenze delle interazioni del MS, e perfezionata negli anni Settanta da Stueckelberg, Kadanoff, Fisher, Wilson mediante lo sviluppo dei metodi del gruppo di rinormalizzazione.

Alla prova degli esperimenti, il MS continua a dimostrarsi impeccabile. Dal punto di vista qualitativo, esso ha previsto l'esistenza dei bosoni W e Z e dei quark charm e top prima della loro osservazione sperimentale; d'altra parte, lo sviluppo

tecnologico della fisica di precisione è arrivato a testare le previsioni quantitative del MS al livello del per mille.

Nonostante il suo successo sperimentale privo smentite (se si esclude il fenomeno dell'oscillazione dei neutrini, che può essere comunque accomodato in una modifica del MS originale), è opinione comune che il MS non sia la teoria ultima dei costituenti fondamentali del mondo. Le ragioni di questa idea sono di diverso tipo.

In primo luogo, il MS presenta ancora un difetto sperimentale e un problema teorico, entrambi legati al bosone di Higgs. Affinchè nel MS le particelle abbiano massa senza violare il principio di gauge, rendendo la teoria non rinormalizzabile, è necessaria la presenza di almeno un campo di Higgs. Ad oggi esso non è ancora stato osservato: il range di massa fino a circa 110 GeV è stato escluso dai dati raccolti presso il collider LEP di Ginevra; d'altra parte, esiste un limite superiore teorico di circa 1.4 TeV per la massa del bosone di Higgs, dettato dalla richiesta di unitarietà per alcuni processi di scattering. Il range di energia tra 110 GeV e 1.4 TeV è in fase di intensa esplorazione da parte del collider Tevatron di Chicago, e lo sarà ancora maggiormente con la partenza degli esperimenti presso il collider LHC di Ginevra. Per stabilire se l'esistenza del bosone di Higgs sia o meno un problema sperimentale del MS, dobbiamo quindi attendere i risultati degli esperimenti citati; d'altra parte è attualmente un problema teorico aperto il cosiddetto *problema di gerarchia*, che riguarda le correzioni perturbative alla massa del bosone di Higgs per cui non si riesce a stabilizzare tale massa alla scala elettrodebole.

Se i problemi appena citati riguardano una particella che il MS deve necessariamente includere, una seconda categoria di problemi riguarda ciò che il MS *non* include. Infatti, ci sono almeno due fenomeni fisici che il MS non descrive e non può descrivere: l'interazione gravitazionale e la materia oscura. Il MS è attualmente non compatibile con la Relatività Generale nel senso che non si è ancora riusciti a formulare una teoria quantistica della gravità soddisfacente: la gravità non può essere trattata come interazione di gauge quantistica allo stesso modo con cui il MS descrive le altre interazioni. D'altra parte, la materia oscura è chiamata tale proprio perché sappiamo che nell'Universo deve esserci dell'altra materia oltre a quella che vediamo, ovvero quella che è costituita e interagisce come la materia descritta dal MS.

L'ultimo ordine di problemi del MS è di natura filosofica, e quindi scientificamente può anche non essere considerato un problema. Si tratta del fatto che il MS presenta ben 28 parametri fondamentali, e questo non è gradito se si aspira ad una teoria ultima della natura che sia semplice ed elegante. In realtà, queste caratteristiche hanno da sempre guidato l'uomo nel tentativo di costruire una teoria dei costituenti elementari (si pensi ai quattro elementi di Aristossene) ed hanno spesso stimolato progressi effettivi nella loro ricerca (ad esempio, basta citare la tavola periodica di Mendeleev o i quark di Gell-Mann). L'esperienza induce a pensare che anche in questo momento la proliferazione di parametri che riteniamo fondamentali possa essere un indizio dell'esistenza di una struttura sottostante.

I problemi discussi rendono evidente la necessità di costruire modelli di Nuova Fisica oltre il MS che tentino di risolverli. La libertà di inventiva nell'ideare questi

modelli è però vincolata dall'evidenza del successo finora indiscusso delle predizioni del MS; questo significa che il MS, anche se non fosse la teoria ultima della natura, ne dovrebbe essere comunque almeno un'eccellente approssimazione alle energie finora esplorate. Di conseguenza, qualsiasi modello di Nuova Fisica, per avere possibilità di successo, deve contenere il MS come suo limite per basse energie.

Da quanto detto emergono in sintesi due esigenze per la ricerca di fisica teorica delle particelle: da un lato, cercare di estendere il MS mediante un modello che ne colmi le lacune; ma dall'altro ricavare dal MS delle previsioni sempre più accurate da confrontare con gli esperimenti, in modo da capire se e dove il MS fallisca e quale dei modelli di Nuova Fisica faccia invece le previsioni corrette. È proprio di questo che si occupa la fenomenologia del MS e dei modelli di Nuova Fisica, settore di ricerca in cui questa Tesi è inquadrata. In particolare, ci occuperemo di quantità che secondo il MS sono soppresse: se alle scale energetiche sperimentalmente in esame cominciasse ad emergere qualche segnale di Nuova Fisica, esso sarebbe piccolo e quindi più facilmente osservabile in quantità soppresse.

Allo studio della fisica del B_s è ampiamente riconosciuto un ruolo fondamentale nella ricerca di Nuova Fisica. Infatti, se da un lato esso va a completare lo studio della fisica dei mesoni neutri K , D , B , dall'altro lato esso dà accesso ad un settore inesplorato della fisica del flavour: infatti, nella fisica del B_s non è coinvolto il triangolo di unitarietà studiato intensamente finora, ma l'angolo β_s appartenente ad un altro triangolo di unitarietà. A questo elemento si aggiunge il fatto che l'angolo β_s è molto più piccolo di quelli analizzati finora, e quindi alcuni processi risultano ulteriormente soppressi e quindi possibilmente ancora più adatti alla ricerca di effetti di Nuova Fisica. Nel corso della Tesi ci occuperemo di diversi aspetti relativi alla fisica del B_s , come la differenza di massa nell'oscillazione $B_s - \bar{B}_s$, e i processi che coinvolgono la transizione $b \rightarrow s$, che è una Flavour Changing Neutral Current e quindi soppressa nel MS.

Il modello di Nuova Fisica di cui studieremo gli effetti è il Modello di Appelquist, Cheng e Dobrescu (ACD) con una singola Dimensione Universale Extra (UED). L'idea della possibile esistenza di dimensioni extra oltre alle quattro ordinarie risale agli anni Venti, ad opera di Theodor Kaluza e Oskar Klein, ma poiché essa era stata avanzata allo scopo di unificare elettromagnetismo e gravità, è stata abbandonata in seguito ai successivi sviluppi circa l'interazione elettromagnetica. L'ipotesi è stata riconsiderata a partire dagli anni Settanta, con l'introduzione delle teorie delle stringhe. Da allora sono state formulate diverse teorie che contengono dimensioni extra, le quali presentano una varietà di scenari ampia e molto diversificata, e soprattutto riescono a risolvere alcuni dei problemi del MS elencati; per citare qualche esempio: la Teoria delle Superstringhe è attualmente l'unica teoria coerente di gravità quantistica; il Modello di Randall-Sundrum fornisce una spiegazione geometrica ai problemi di gerarchia, i modelli con UED presentano candidati di materia oscura. I modelli con dimensioni extra sono inoltre di elevato interesse in questo momento storico in quanto è stato stimato che i loro effetti potrebbero cominciare a manifestarsi alla scala delle centinaia di GeV, cioè proprio alle energie sperimentalmente in esame oggi e nei prossimi anni. Risulta quindi evidente l'importanza dello studio

della fenomenologia di questi modelli, in quanto è finalmente possibile il confronto con i dati sperimentali in modo da poterli mettere alla prova per escluderne alcuni e perfezionarne altri. Il lavoro di ricerca contenuto in questa Tesi è proprio mirato ad ottenere delle previsioni sia del MS sia del Modello ACD riguardo eventi di cui attualmente non sono ancora disponibili dati sperimentali ma che saranno studiati intensamente nei prossimi anni dagli esperimenti CDF e D0 presso TeVatron e LHCb presso LHC, o in una nuova B-factory.

La Tesi è strutturata nel modo seguente.

Nel Capitolo 1 sono contenute le nozioni di fisica del MS utilizzate nella Fisica del Flavour. In particolare, nel Paragrafo 1.1 abbiamo richiamato la costruzione della Lagrangiana Elettrodebole mediante il principio di gauge e la rottura spontanea della simmetria; nel Paragrafo 1.2, ci siamo soffermati sulla parte dell'interazione di Yukawa di tale Lagrangiana, che è la parte più interessante dal punto di vista fenomenologico in quanto contiene la maggior parte dei parametri liberi del MS, ovvero le masse dei fermioni e gli elementi della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa; lo studio puramente fenomenologico della matrice CKM è presentato nel Paragrafo 1.3, mediante l'introduzione e lo studio dei Triangoli di Unitarietà e una rassegna sullo stato dell'arte in proposito.

Se il Capitolo 1 riguarda interamente il MS, il Capitolo 2 è dedicato allo studio del modello di Nuova Fisica in esame. Nel Paragrafo 2.1 sono presentate le caratteristiche comuni dei modelli con dimensioni extra, mentre il Paragrafo 2.2 e il Paragrafo 2.3 sono riservati al Modello ACD con una singola UED. In particolare, nel Paragrafo 2.2 è descritto il comportamento dei campi quantistici in tale modello, mentre nel Paragrafo 2.3 è analizzato come questi campi siano inseriti nella teoria di gauge che estende il MS.

La trattazione della fenomenologia del mesone B_s comincia con il Capitolo 3. Il Paragrafo 2.1 è appunto dedicato alla descrizione e al formalismo delle principali caratteristiche della fenomenologia del B_s , dal mixing alla violazione di CP; la spiegazione teorica e i calcoli del MS alla base di questi fenomeni sono esposti nel Paragrafo 3.2. Nel Paragrafo 3.3 è invece presentato il lavoro originale di fenomenologia del B_s nel Modello ACD, con lo studio teorico svolto e la presentazione dei risultati ottenuti circa la deviazione dei parametri del mixing rispetto al MS.

La presentazione dei risultati ottenuti prosegue nel Capitolo 4, che contiene lo studio di alcuni decadimenti del B_s in stati finali che contengono i mesoni η o η' ; tali decadimenti sono particolarmente interessanti per la possibilità di estrarre dai dati delle informazioni molto chiare circa la violazione di CP in questo settore. Nel Paragrafo 4.1 sono presentati gli strumenti teorici utilizzati per lo studio di questi decadimenti; i risultati ottenuti per i singoli decadimenti sono discussi nei due paragrafi successivi: nel Paragrafo 4.2 i decadimenti semileptonici, nel paragrafo 4.3 i decadimenti adronici.

In Appendice abbiamo riportato una breve introduzione alla Operator Product Expansion (OPE), uno strumento teorico indispensabile per lo studio di determinate transizioni e ampiamente utilizzato nel corso di tutta la Tesi.

Capitolo 1

Il Settore del Flavour nel MS

1.1 La Lagrangiana elettrodebole

1.1.1 Il gruppo di gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Cominciamo trattando il settore leptonic, e per semplicità soffermiamoci inizialmente solo sulla prima famiglia di leptoni: elettrone e neutrino elettronico. Fin dagli studi di Lee e Yang del 1956 è noto che l'interazione elettrodebole viola massimamente la parità [1]: solo il neutrino left-handed è coinvolto nei processi di questo tipo. Questo implica che, detti $\nu(x)$ e $e(x)$ i campi di neutrino ed elettrone, la corrente debole carica (ad esempio di innalzamento di carica) deve avere una struttura del tipo

$$J^\mu(x) = \frac{1}{2}\bar{\nu}(x)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)e(x) \quad (1.1)$$

in modo da selezionare solo la parte left-handed del neutrino (e right-handed dell'antineutrino); questa struttura seleziona però anche la parte left-handed dell'elettrone, e quindi il neutrino si accoppia solo a quest'ultima, mentre la parte right-handed dell'elettrone non interagisce. Conviene quindi scrivere il campo elettronico come

$$e(x) = e_L(x) + e_R(x) \quad (1.2)$$

con

$$e_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)e(x) \quad (1.3a)$$

$$e_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)e(x) \quad (1.3b)$$

In questo modo, le correnti cariche possono essere scritte in modo compatto se si costruisce

$$\mathcal{L}(x) = \begin{pmatrix} \nu_L(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

con cui

$$J_+^\mu(x) = \bar{\mathcal{L}}(x)\gamma^\mu\sigma_+\mathcal{L}(x) \quad (1.5a)$$

$$J_-^\mu(x) = \bar{\mathcal{L}}(x)\gamma^\mu\sigma_-\mathcal{L}(x) \quad (1.5b)$$

dove $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$ sono gli operatori di innalzamento e abbassamento di $SU(2)$, mentre

$$\mathcal{R}(x) = e_R(x) \quad (1.6)$$

non compare in nessuna corrente carica. I campi $e_L(x)$ e $e_R(x)$ non sono singolarmente soluzioni dell'equazione di Dirac, a causa della presenza del termine di massa dell'elettrone. Per il momento però trascuriamo la massa dell'elettrone (questa è comunque una buona approssimazione ad energie moderatamente alte), e spegnamo le interazioni; possiamo quindi scrivere la parte cinetica della Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_0(x) = (\bar{\nu}_L(x) \quad \bar{e}_L(x)) i\not{\partial} \begin{pmatrix} \nu_L(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} + \bar{e}_R(x) i\not{\partial} e_R(x) \quad (1.7)$$

La forma di questa Lagrangiana mostra una completa simmetria tra i campi $\nu_L(x)$ e $e_L(x)$, ovvero un'invarianza per rotazioni globali del gruppo $SU(2)$ nello spazio $\nu_L(x) - e_L(x)$; il numero quantico associato ad essa è l'*isospin debole* I_W (Tab. 1.1).

	Q	I_W	I_W^3	Y_W
$\nu_L^{(e,\nu,\tau)}$	0	1/2	1/2	-1
e_L, μ_L, τ_L	-1	1/2	-1/2	-1
e_R, μ_R, τ_R	-1	0	0	-2
ϕ^+	1	1/2	1/2	1
ϕ^0	0	1/2	-1/2	1

Tabella 1.1: Numeri quantici elettrodeboli per i campi leptonici e di Higgs.

A questo punto possiamo applicare il *principio di gauge* [2], che se da un lato è fisicamente auspicabile in quanto elimina la presenza di una scelta assoluta nello spazio e nel tempo dello stato dovuto alla simmetria globale, dall'altro lato prescrive come i campi fermionici si accoppiano ai campi vettoriali e quindi come interagiscono. Applicare il principio di gauge consiste nell'imporre che la simmetria globale diventi locale; la Lagrangiana non sarà però simmetrica per la stessa trasformazione resa locale, e per ripristinare la simmetria bisognerà introdurre dei campi vettoriali che si trasformino in un determinato modo sotto l'azione del gruppo. Nel nostro caso, vogliamo imporre l'invarianza locale per trasformazioni $U(x)$ di $SU(2)_L$

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow U(x)\mathcal{L}(x) \quad (1.8a)$$

$$\mathcal{R}(x) \rightarrow \mathcal{R}(x) \quad (1.8b)$$

per ripristinare l'invarianza della Lagrangiana dobbiamo introdurre tre campi vettoriali reali $W_\mu^a(x)$ con $a = 1, 2, 3$ (quanti i generatori del gruppo) e costruiamo

$$W_\mu(x) = W_\mu^a(x) \frac{\sigma_a}{2} \quad (1.9)$$

che si trasforma secondo

$$W_\mu(x) \rightarrow U(x)W_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) \quad (1.10)$$

dove g è una costante, e il tensore

$$W_{\mu\nu}(x) = W_{\mu\nu}^a(x) \frac{\sigma_a}{2} \quad (1.11)$$

con

$$W_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu W_\nu^a(x) - \partial_\nu W_\mu^a(x) - g\epsilon_{abc} W_\mu^b(x) W_\nu^c(x) \quad (1.12)$$

con ϵ_{abc} costanti di struttura di $SU(2)$, tale che la combinazione

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(W_{\mu\nu}(x) W^{\mu\nu}(x)) \quad (1.13)$$

che nella Lagrangiana rappresenta il termine cinetico per i campi $W_\mu^a(x)$, sia invariante. Nella Lagrangiana, sostituiamo la derivata ordinaria con la *derivata covariante*

$$D_\mu = \partial_\mu + igI_W W_\mu(x) \quad (1.14)$$

e poniamo infine

$$W_\mu^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1(x) \pm W_\mu^2(x)) \quad (1.15)$$

in modo da diagonalizzare le correnti cariche. Includendo quindi i campi di gauge, la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L}_1(x) = \mathcal{L}(x) i \not{D} \mathcal{L}(x) + \mathcal{R}(x) i \not{D} \mathcal{R}(x) - \frac{1}{2} \text{Tr}(W_{\mu\nu}(x) W^{\mu\nu}(x)) \quad (1.16)$$

Sviluppando i calcoli, si vede che nella parte di interazione si ottengono due termini di corrente carica esattamente del tipo di quelli osservati sperimentalmente, e un termine di corrente neutra totalmente left-handed, che quindi non può descrivere le correnti neutre osservate sperimentalmente che possiedono una componente right-handed [3]. Una componente right-handed compare invece nella corrente elettromagnetica, e da qui nasce l'idea di incorporare in questa descrizione anche l'interazione elettromagnetica [4].

Notiamo un'altra simmetria nella Lagrangiana (1.7): l'invarianza di fase globale $U(1)$ del doppietto left-handed e del singoletto right-handed; il numero quantico associato è l'*iper carica debole* Y_W (Tab. 1.1) definita da

$$Q = I_W^3 + \frac{Y_W}{2} \quad (1.17)$$

Questa definizione di iper carica garantirà di ottenere la corrente elettromagnetica puramente vettoriale. Applichiamo quindi nuovamente il principio di gauge imponendo che questa invarianza sia locale; introduciamo quindi il campo vettoriale reale $B_\mu(x)$, che si trasforma secondo

$$B_\mu(x) \rightarrow U(x) B_\mu(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g'} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x) \quad (1.18)$$

il relativo tensore

$$B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) \quad (1.19)$$

e la derivata covariante per il nuovo gruppo $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$D_\mu = \partial_\mu + igI_W W_\mu(x) + ig'Y_W B_\mu(x) \quad (1.20)$$

Infine, mescoliamo i due campi $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$, che non hanno corrispondente fisico e che sono entrambi neutri e a massa nulla, in modo da ottenere i campi fisici di interazione neutra ed elettromagnetica; possiamo infatti costruire i campi ortogonali

$$Z_\mu(x) = \cos \theta_W W_\mu^3(x) - \sin \theta_W B_\mu(x) \quad (1.21a)$$

$$A_\mu(x) = \sin \theta_W W_\mu^3(x) + \cos \theta_W B_\mu(x) \quad (1.21b)$$

con

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (1.22)$$

θ_W è detto *angolo di Weinberg*. Per costruzione, $A_\mu(x)$ non si accoppia con il neutrino; lo identifichiamo quindi con il campo elettromagnetico e quindi poniamo

$$\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = e \quad (1.23)$$

In conclusione, la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L}_e(x) = \bar{\mathcal{L}}(x)i\not{D}\mathcal{L}(x) + \bar{\mathcal{R}}(x)i\not{D}\mathcal{R}(x) - \frac{1}{2}\text{Tr}(W_{\mu\nu}(x)W^{\mu\nu}(x)) - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x)) \quad (1.24)$$

ovvero, sviluppando,

$$\mathcal{L}_e(x) = \mathcal{L}_e^{\text{kin}}(x) + \mathcal{L}_e^{\text{int}}(x) \quad (1.25)$$

con

$$\mathcal{L}_e^{\text{kin}}(x) = \underbrace{\bar{\nu}_L(x)i\not{\partial}\nu_L(x) + \bar{e}(x)i\not{\partial}e(x)}_{\text{termini cinetici di elettrone e neutrino}} - \underbrace{\frac{1}{2}\text{Tr}(W_{\mu\nu}(x)W^{\mu\nu}(x)) - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x))}_{\text{termini cinetici di } W^\pm, Z, A} \quad (1.26a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e^{\text{int}}(x) = & \underbrace{-\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}W_\mu^+(x)J_+^\mu(x) + \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}W_\mu^-(x)J_-^\mu(x)}_{\text{interazioni di corrente carica}} - \\ & - \underbrace{\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}Z_\mu(x)J_{\text{NC}}^\mu(x)}_{\text{interazione di corrente neutra}} - \underbrace{eA_\mu(x)J_{\text{em}}^\mu(x)}_{\text{interazione elettromagnetica}} \end{aligned} \quad (1.26b)$$

dove le correnti sono

$$J_+^\mu(x) = \bar{\nu}_L(x)\gamma^\mu e_L(x) \quad (1.27a)$$

$$J_-^\mu(x) = \bar{e}_L(x)\gamma^\mu \nu_L(x) \quad (1.27b)$$

$$J_{\text{NC}}^\mu(x) = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L(x)\gamma^\mu \nu_L(x)) + \left(\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}\right)(\bar{e}_L(x)\gamma^\mu e_L(x)) + \sin^2\theta_W(\bar{e}_R(x)\gamma^\mu e_R(x)) \quad (1.27c)$$

$$J_{\text{em}}^\mu(x) = -\bar{e}_L(x)\gamma^\mu e_L(x) - \bar{e}_R(x)\gamma^\mu e_R(x) = -\bar{e}(x)\gamma^\mu e(x) \quad (1.27d)$$

Applicando il principio di gauge per il gruppo di simmetria della Lagrangiana libera $SU(2)_L \times U(1)_Y$, abbiamo ottenuto la forma dell'accoppiamento tra campi fermionici di materia e campi vettoriali di interazione, che riproduce le interazioni osservate di correnti cariche e correnti neutre e include le interazioni elettromagnetiche. È però totalmente assente qualsiasi termine di massa, sia dei fermioni che dei bosoni vettori; e mentre per i fermioni possiamo anche trascurare la massa ad energie non troppo basse, questo non è possibile per i bosoni W e Z che sappiamo fin dai primi esperimenti avere massa molto grande, dell'ordine di parecchie decine di GeV. Un termine di massa per questi campi viola l'invarianza di gauge; ma se anche non volessimo preservare questa simmetria e aggiungessimo a mano i termini di massa, si può dimostrare che otterremmo una teoria non rinormalizzabile [5]. Questo problema si può risolvere aggiungendo dei nuovi campi, rompendo la simmetria in modo opportuno e scegliendo un gauge particolare.

1.1.2 Rottura spontanea della simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$

Si parla di *rottura spontanea di simmetria* per un sistema quando le sue equazioni fondamentali (e quindi ad esempio la Lagrangiana o l'Hamiltoniana) presentano una certa simmetria, mentre lo stato fondamentale no; quello che succede è che sono presenti degli stati fondamentali degeneri (la simmetria delle equazioni si *nasconde* nella degenerazione dello stato fondamentale), ed il sistema è costretto a sceglierne uno, rompendo la simmetria.

L'esempio più semplice è una Lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad \text{con } \mu^2 < 0, \quad \lambda > 0 \quad (1.28)$$

(osserviamo che il termine in ϕ^2 non è un termine di massa a causa del suo segno). Essa è simmetrica per scambio $\phi \leftrightarrow -\phi$; la parte di potenziale (Fig. 1.1) però ha due minimi simmetrici (a livello ad albero) in

$$\phi = \pm v \quad \text{con } v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (1.29)$$

Se vogliamo applicare la teoria perturbativa, dobbiamo considerare le piccole perturbazioni del campo vicino al vuoto; questo ci induce a scegliere un minimo, ad esempio $+v$, e a sviluppare il campo intorno ad esso:

$$\phi(x) = v + \eta(x) \quad (1.30)$$

la Lagrangiana si riscrive

$$\mathcal{L}(\eta) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) + \mu^2\eta^2 + \text{termini in } \eta^3, \eta^4 \text{ e costanti} \quad (1.31)$$

ovvero il campo η è un campo massivo (e autointeragente); questo ci fa intuire che la rottura spontanea di simmetria possa essere utile per il nostro scopo di rendere

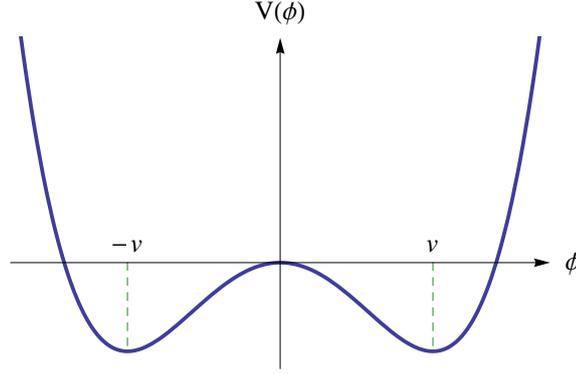


Figura 1.1: Potenziale della Lagrangiana (1.29). Osserviamo che i due minimi sono tra loro simmetrici per scambio $v \leftrightarrow -v$ come la Lagrangiana, ma che quindi non sono connessi da una trasformazione di simmetria continua.

massivi dei campi. Nel nostro caso però, a differenza dell'esempio precedente bisogna rompere un gruppo di simmetria continuo; si applica perciò il *teorema di Goldstone* che afferma che se una simmetria continua è rotta spontaneamente, applicando il procedimento precedente si ottiene una particella scalare di massa nulla per ogni generatore della simmetria che è rotta; quindi non solo non riusciamo a dare massa ai nostri bosoni ma addirittura possiamo ottenere delle nuove particelle indesiderate. Il problema può essere risolto però nelle teorie di gauge, applicando il *meccanismo di Higgs* [6], ossia scegliendo tra gli infiniti vuoti degeneri un vuoto particolare (ovvero scegliendo un opportuno *pattern* di rottura di simmetria) e sfruttando la libertà di gauge per scegliendo un gauge opportuno che permette di dare massa al campo desiderato ed eliminare i campi indesiderati.

La scelta più semplice [7] consiste nel considerare un doppietto di campi scalari complessi

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1(x) + i\phi_2(x) \\ \phi_3(x) + i\phi_4(x) \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

che obbedisce alla Lagrangiana

$$\mathcal{L}_3 = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \text{con } \mu^2 < 0, \quad \lambda > 0 \quad (1.33)$$

che è simmetrica per trasformazioni di $SU(2)_L \times U(1)_Y$ e permette quindi di assegnare a $\phi(x)$ i relativi numeri quantici (Tab. 1.1) e di applicare il principio di gauge sostituendo alla derivata ordinaria la derivata covariante (1.20). Il vuoto di questa Lagrangiana si ha per

$$\sqrt{\langle \phi^\dagger \phi \rangle_0} = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{con } v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (1.34)$$

ovvero

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = v^2 \quad (1.35)$$

cioè esistono infiniti vuoti degeneri, sulla superficie di un'ipersfera quadridimensionale (Fig. 1.2). Il primo passo consiste nello scegliere un opportuno pattern di rottura

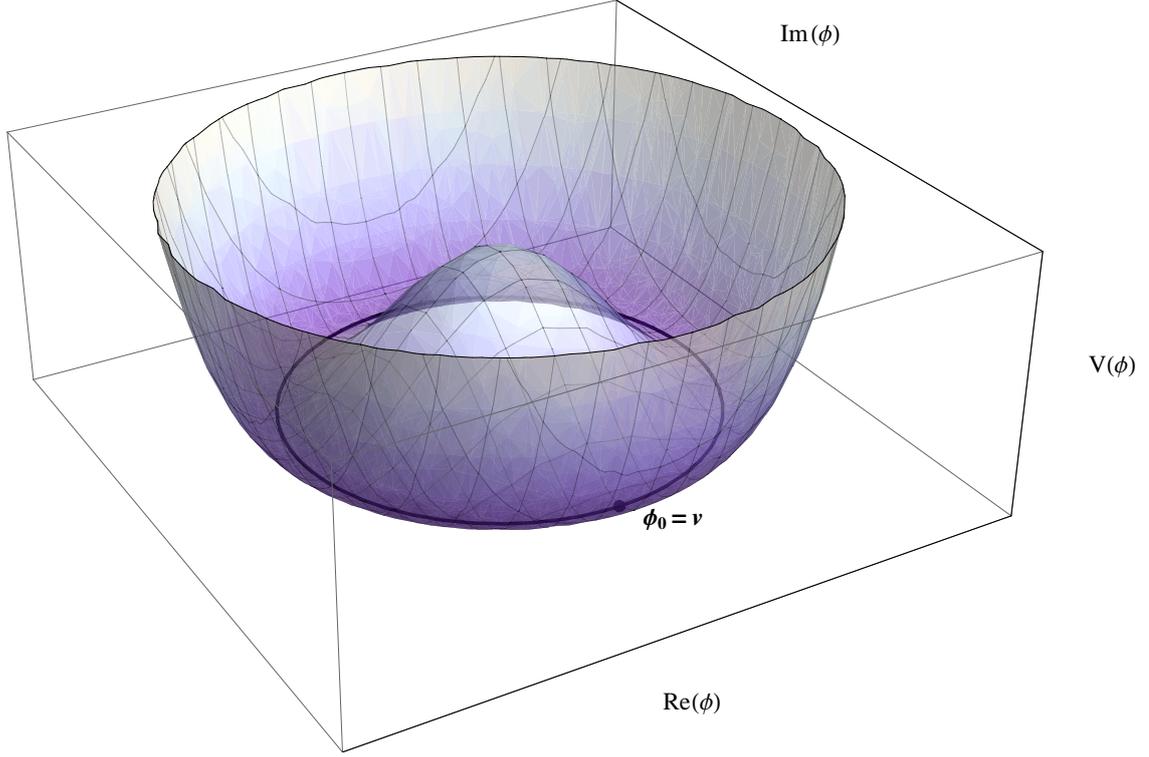


Figura 1.2: Parte di potenziale della Lagrangiana (1.33), semplificato nel caso di un solo campo complesso invece che un doppietto per renderlo visualizzabile. Si vede come gli infiniti vuoti degeneri giacciono su una circonferenza (la superficie di una sfera bidimensionale) collegati tra loro da una trasformazione continua di $U(1)$ che è anche la simmetria della Lagrangiana ($SU(2)_L \times U(1)_Y$ nel nostro caso quadridimensionale). Scegliendo il vuoto ϕ_0 si rompe spontaneamente questa simmetria.

di simmetria; poiché fisicamente la simmetria preservata è quella elettromagnetica, scegliamo un vuoto invariante solo per $U(1)_{\text{em}}$:

$$\phi_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Possiamo parametrizzare le fluttuazioni intorno a questo vuoto in modo più conveniente, sostituendo ai quattro campi reali $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ altrettanti nuovi campi reali $h, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ tali che

$$h = \phi_3 - v \quad \theta_1 = \phi_2 \quad \theta_2 = \phi_1 \quad \theta_3 = \phi_4 \quad (1.37)$$

in modo che vicino al vuoto si possa sviluppare

$$\phi(x) = e^{i\frac{\sigma \cdot \theta(x)}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Se sostituiamo questi nuovi campi nella Lagrangiana, troviamo che $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sono privi di massa: sono infatti i tre bosoni di Goldstone generati dalla rottura (da

parte del vuoto) di tre dei quattro generatori della simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Ma la Lagrangiana è ancora localmente gauge invariante per $SU(2)$, e questo ci permette di fissare il gauge punto per punto; se scegliamo il *gauge unitario*

$$\theta_1(x) = \theta_2(x) = \theta_3(x) = 0 \quad \forall x \quad (1.39)$$

possiamo eliminare i campi di Goldstone. Il doppietto si riduce a

$$\phi_H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

e il campo scalare neutro $h(x)$ si chiama *campo di Higgs*. La Lagrangiana (1.33) diventa perciò

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \phi_H)^\dagger (D^\mu \phi_H) + \lambda v^2 \phi_H^\dagger \phi_H - \lambda (\phi_H^\dagger \phi_H)^2 \quad (1.41)$$

ovvero, sviluppando,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu h(x))(\partial^\mu h(x))}_{\text{termine cinetico del campo di Higgs}} - \underbrace{\frac{1}{2}(\sqrt{2\lambda}v)^2 h(x)^2}_{\text{termine di massa del campo di Higgs}} + \\ & + \underbrace{\left(\frac{1}{2}gv\right)^2 W_\mu^+(x)W^{\mu-}(x)}_{\text{termine di massa delle } W^\pm} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}\right)^2 Z_\mu(x)Z^\mu(x)}_{\text{termine di massa della } Z} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}g^2vW_\mu^+(x)W^{\mu-}(x)h(x) + \frac{1}{4}v(g^2 + g'^2)Z_\mu(x)Z^\mu(x)h(x)}_{\text{vertici di interazione a tre linee del tipo } VVh} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{4}g^2W_\mu^+(x)W^{\mu-}(x)h(x)^2 + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)Z_\mu(x)Z^\mu(x)h(x)^2}_{\text{vertici di interazione a quattro linee del tipo } VVhh} - \\ & \underbrace{-\lambda v h(x)^3 - \frac{\lambda}{4}h(x)^4}_{\text{vertici di autointerazione a tre e a quattro linee di } h} + \underbrace{\frac{\lambda v^4}{4}}_{\text{costante}} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Siamo quindi riusciti ad ottenere per i bosoni vettori delle masse

$$m_W = \frac{1}{2}gv \quad m_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2} \quad (1.43)$$

mentre non compare un termine di massa per il campo elettromagnetico, proprio grazie al pattern di rottura di simmetria scelto; il bosone di Higgs risulta a sua volta essere massivo con massa

$$m_h = \sqrt{2\lambda}v \quad (1.44)$$

Osserviamo che le masse dei bosoni W , Z e h sono tutte proporzionali a v ; di conseguenza, ci aspettiamo che esse siano tutte della stessa scala, detta appunto *scala elettrodebole*.

L'introduzione del campo di Higgs fornisce un metodo semplice per dare massa anche ai fermioni. Se infatti facciamo interagire il campo di Higgs con una Lagrangiana gauge invariante di tipo Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = -G_e \bar{\mathcal{L}}(x)\phi(x)\mathcal{R}(x) + \text{h.c.} \quad (1.45)$$

con la rottura di simmetria ($\phi \rightarrow \phi_H$) questa diventa, sviluppando,

$$\mathcal{L}_Y = - \underbrace{\frac{G_e v}{\sqrt{2}} \bar{e}(x)e(x)}_{\text{termine di massa per } e} - \underbrace{\frac{G_e}{\sqrt{2}} \bar{e}(x)e(x)h(x)}_{\text{vertice di interazione a tre linee del tipo } f\bar{f}h} \quad (1.46)$$

che da all'elettrone una massa

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}} \quad (1.47)$$

e (per costruzione) lascia il neutrino senza massa.

Riassumendo quanto detto fin qui, abbiamo costruito la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y \quad (1.48)$$

In primo luogo abbiamo osservato che la Lagrangiana libera e massless della prima famiglia di leptoni gode di invarianza $SU(2)_L \times U(1)_Y$, quindi abbiamo applicato il principio di gauge e mescolato in modo opportuno i campi di gauge per ottenere la forma dell'interazione elettromagnetica, debole carica e debole neutra (\mathcal{L}_e); in seguito abbiamo introdotto il campo scalare di Higgs, il cui ground state rompe spontaneamente la simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ in $U(1)_{\text{em}}$, e abbiamo fissato un gauge in cui esso, interagendo con i bosoni vettori, genera per questi un termine di massa (\mathcal{L}_H); infine abbiamo prescritto un'interazione del bosone di Higgs con i leptoni in modo da generare un termine di massa anche per l'elettrone (\mathcal{L}_Y). Questa teoria ha come parametri liberi l'accoppiamento elettromagnetico e , l'angolo di mixing tra isospin debole e ipercarica debole θ_W , le masse della W^\pm , del bosone di Higgs e di tutti i fermioni; alcune delle sue predizioni sono invece l'esistenza dei bosoni vettori, l'esistenza di correnti neutre, la massa della Z (e del fotone).

Se si assume l'*universalità* dell'interazione elettrodebole, il formalismo si estende banalmente alle altre due famiglie di leptoni, aggiungendo gli analoghi termini muonici e tauonici nella Lagrangiana libera e di interazione elettrodebole e nella Lagrangiana di Yukawa.

1.2 La matrice di massa

1.2.1 L'interazione elettrodebole nel settore dei quark

Anche i quark, oltre ai leptoni, sono soggetti all'interazione elettrodebole; infatti, fin dagli anni Quaranta è noto sperimentalmente che alcuni processi adronici, quali il decadimento β o il decadimento del π , hanno tempi tipici dei processi deboli, o coinvolgono neutrini (che possono interagire solo debolmente). In seguito, sia

l'osservazione della violazione massimale della parità, sia il fatto che misurando la costante di Fermi dal decadimento del μ e dal decadimento β si ottengano risultati molto vicini hanno fatto ipotizzare che l'interazione debole dei quark avesse una struttura analoga a quella dei leptoni.

I due quark all'interno della stessa famiglia hanno differenza di carica pari a 1, proprio come il leptone carico e il suo neutrino, quindi possiamo costruire in modo analogo i doppietti left-handed che danno origine alle correnti cariche. Tuttavia, a differenza del neutrino, il quark con carica maggiore è massivo e ha anche una componente right-handed; questa non è coinvolta nell'interazione debole ed è quindi un singoletto di $SU(2)_L$; ad esempio per la prima generazione

$$\mathcal{L}_q(x) = \begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_u(x) = u_R(x) \quad \mathcal{R}_d(x) = d_R(x) \quad (1.49)$$

e così per le altre generazioni, in cui pedici u, d indicano all'interno della famiglia i quark con carica maggiore e minore. I numeri quantici elettrodeboli dei quark sono elencati in Tab. 1.2.

	Q	I_W	I_W^3	Y_W
u_L, c_L, t_L	2/3	1/2	1/2	1/3
d_L, s_L, b_L	-1/3	1/2	-1/2	1/3
u_R, c_R, t_R	2/3	0	0	4/3
d_R, s_R, b_R	-1/3	0	0	-2/3

Tabella 1.2: Numeri quantici elettrodeboli per i quark.

Noti i numeri quantici, applicando il principio di gauge si introduce ancora la derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + igI_W W_\mu(x) + ig'Y_W B_\mu(x) \quad (1.50)$$

e quindi si può scrivere la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_q(x) = \bar{\mathcal{L}}_q(x) i \not{D} \mathcal{L}_q(x) + \bar{\mathcal{R}}_u(x) i \not{D} \mathcal{R}_u(x) + \bar{\mathcal{R}}_d(x) i \not{D} \mathcal{R}_d(x) \quad (1.51)$$

(e analogamente per le altre famiglie), che una volta sviluppata diventa

$$\mathcal{L}_q(x) = \mathcal{L}_q^{\text{kin}}(x) + \mathcal{L}_q^{\text{int}}(x) \quad (1.52)$$

con

$$\mathcal{L}_q^{\text{kin}}(x) = \underbrace{\bar{u}(x) i \not{D} u(x)}_{\text{termine cinetico del quark di tipo } u} + \underbrace{\bar{d}(x) i \not{D} d(x)}_{\text{termine cinetico del quark di tipo } d} \quad (1.53a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e^{\text{int}}(x) = & \underbrace{-\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^+(x) J_+^\mu(x) + \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^-(x) J_-^\mu(x)}_{\text{interazioni di corrente carica}} - \\ & - \underbrace{\frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} Z_\mu(x) J_{\text{NC}}^\mu(x)}_{\text{interazione di corrente neutra}} - \underbrace{e A_\mu(x) J_{\text{em } u}^\mu(x) - e A_\mu(x) J_{\text{em } d}^\mu(x)}_{\text{interazione elettromagnetica}} \end{aligned} \quad (1.53b)$$

dove le correnti sono

$$J_+^\mu(x) = \bar{u}_L(x)\gamma^\mu d_L(x) \quad (1.54a)$$

$$J_-^\mu(x) = \bar{d}_L(x)\gamma^\mu u_L(x) \quad (1.54b)$$

$$J_{\text{NC}}^\mu(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) (\bar{u}_L(x)\gamma^\mu u_L(x)) - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right) (\bar{d}_L(x)\gamma^\mu d_L(x)) - \frac{1}{3}\sin^2\theta_W (\bar{u}_R(x)\gamma^\mu u_R(x)) + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W (\bar{d}_R(x)\gamma^\mu d_R(x)) \quad (1.54c)$$

$$J_{\text{em } u}^\mu(x) = \frac{2}{3}\bar{u}(x)\gamma^\mu u(x) \quad (1.54d)$$

$$J_{\text{em } d}^\mu(x) = -\frac{1}{3}\bar{d}(x)\gamma^\mu d(x) \quad (1.54e)$$

L'estensione ai quark dell'accoppiamento di Yukawa per generarne le masse è invece meno banale, a causa del fatto che entrambi i membri delle famiglie sono massivi.

1.2.2 La matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

Vogliamo costruire il più generale accoppiamento di Yukawa tra fermioni e campo di Higgs, ossia il più generale accoppiamento in grado di generare un termine di massa che sia invariante rispetto a $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Siano

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

un doppietto fermionico left-handed e il campo di Higgs. Da queste possiamo costruire due combinazioni invarianti per isospin:

$$\phi^\dagger \psi = \phi_1^* \psi_{1L} + \phi_2^* \psi_{2L} \quad (1.56a)$$

$$\phi^T \epsilon \psi = \phi_1 \psi_{1L} - \phi_2 \psi_{2L} \quad \text{con} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.56b)$$

Questi devono essere combinati in tutti i modi possibili con i singoletti right-handed, con il vincolo di conservare l'ipercarica; ne risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & - (\bar{e}_R \quad \bar{\mu}_R \quad \bar{\tau}_R) C_\ell \begin{pmatrix} \phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ \phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \\ \phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (\bar{u}_R \quad \bar{c}_R \quad \bar{t}_R) C'_q \begin{pmatrix} \phi^T \epsilon \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \epsilon \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \epsilon \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \\ & - (\bar{d}'_R \quad \bar{s}'_R \quad \bar{b}'_R) C_q \begin{pmatrix} \phi^T \epsilon \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \epsilon \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \phi^T \epsilon \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (1.57)$$

in cui C_ℓ, C'_q, C_q sono matrici complesse 3×3 arbitrarie; il motivo della presenza dell'apice ai quark di tipo down sarà chiaro in seguito.

Ora osserviamo che le matrici C_ℓ, C'_q, C_q non sono totalmente arbitrarie. Infatti, se per un qualsiasi vettore riga o colonna di (1.57) cambiamo base, ovvero applichiamo una trasformazione unitaria (costante), è immediato vedere che le Lagrangiane di gauge di tipo \mathcal{L}_e e \mathcal{L}_q non cambiano, mentre per lasciare \mathcal{L}_Y invariata bisogna modificare le matrici C ; per esempio, se effettuiamo il cambio di base

$$\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \rightarrow U_1 \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

con $U_1 \in U(3)$, allora si trasformerà anche

$$C_\ell \rightarrow U_1^\dagger C_\ell \quad (1.59)$$

Di conseguenza, possiamo cambiare a piacere la base di ogni tripletto purché effettuiamo le corrispondenti trasformazioni

$$C_\ell \rightarrow U_1^\dagger C_\ell V_1 \quad (1.60a)$$

$$C'_q \rightarrow U_2^\dagger C'_q V_2 \quad (1.60b)$$

$$C_q \rightarrow U_3^\dagger C_q V_2 \quad (1.60c)$$

Le precedenti indicano che sia su C_ℓ che su C_q abbiamo libertà di operare trasformazioni biunitarie; quindi esse possono essere diagonalizzate, in quanto qualsiasi matrice complessa può essere diagonalizzata mediante un'opportuna trasformazione biunitaria; pertanto possiamo scrivere:

$$C_\ell = \begin{pmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_\mu & 0 \\ 0 & 0 & c_\tau \end{pmatrix} \quad C'_q = \begin{pmatrix} c_u & 0 & 0 \\ 0 & c_c & 0 \\ 0 & 0 & c_t \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Questo non vale per C_q , in quanto la trasformazione unitaria a destra in (1.60c) è fissata una volta diagonalizzata C'_q . Possiamo sfruttare solo la libertà di scegliere U_3 ; lo facciamo osservando che, presa C_q in forma iniziale qualsiasi, la matrice $C_q C_q^\dagger$ è hermitiana e quindi può essere diagonalizzata con una trasformazione unitaria; quindi scegliamo U_3 in modo che $U_3^\dagger C_q C_q^\dagger U_3 = U_3^\dagger C_q V_2 V_2^\dagger C_q^\dagger U_3$, e pertanto, ridefinendo $U_3^\dagger C_q V_2 \rightarrow C_q$, abbiamo

$$C_q C_q^\dagger = \begin{pmatrix} c_d^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_t^2 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Da quest'ultima relazione possiamo dire che esiste una matrice $V \in U(3)$ tale che ridefinendo $U_3^\dagger C_q V_2 \rightarrow C_q$, abbiamo

$$C_q = \begin{pmatrix} c_d & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & b_t \end{pmatrix} V^\dagger \quad (1.63)$$

ma, poiché non abbiamo la libertà di moltiplicare C_q per una matrice unitaria a sinistra, essa non può essere diagonalizzata. Invece, in virtù delle proprietà gruppali di $U(3)$ possiamo moltiplicare C_q a destra un numero arbitrario di volte, e per questo possiamo ridefinire ancora

$$C_q = V \begin{pmatrix} c_d & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & b_t \end{pmatrix} V^\dagger \quad (1.64)$$

La matrice unitaria V è detta *matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa* (CKM) [8].

Una volta fissata la forma di C'_q e C_q , le (1.60b) e (1.60b) lasciano ancora delle libertà residue; infatti possiamo ridefinire C'_q e C_q moltiplicandole a destra e a sinistra per una matrice unitaria diagonale arbitraria

$$U_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_3} \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

ottenendo

$$C'_q \rightarrow U_\phi^\dagger C'_q U_\phi = C'_q \quad (1.66a)$$

$$C_q \rightarrow U_\phi^\dagger C_q U_\phi = V' \begin{pmatrix} c_d & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & b_t \end{pmatrix} V'^\dagger \quad \text{con } V' = U_\phi V \quad (1.66b)$$

Inoltre, detta

$$U_\chi = \begin{pmatrix} e^{i\chi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\chi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\chi_3} \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

si ha

$$U_\chi \begin{pmatrix} c_d & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & b_t \end{pmatrix} U_\chi^\dagger = \begin{pmatrix} c_d & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & b_t \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

Pertanto, la matrice CKM è definita a meno di una trasformazione

$$V \rightarrow U_\phi^\dagger V U_\chi \quad (1.69)$$

Ora, una matrice complessa unitaria $N \times N$ dipende da $2N^2$ parametri – N^2 condizioni di unitarietà = N^2 parametri indipendenti. È noto che una matrice di questo tipo può essere parametrizzata al più con $\frac{1}{2}N(N-1)$ angoli, quindi restano $N^2 - \frac{1}{2}N(N-1) = \frac{1}{2}N(N+1)$ fasi. La (1.69) ci permette di scegliere $2N$ fasi, e poiché ne compariranno le differenze solo $2N-1$ saranno indipendenti, quindi resteranno $\frac{1}{2}N(N+1) - (2N-1) = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ fasi complesse ineliminabili. Di conseguenza, la matrice CKM, che è 3×3 , ha degli elementi complessi; invece, se ci fossero solo due generazioni di quark, la matrice di massa sarebbe 2×2 e potrebbe essere completamente reale; questa caratteristica è di grande importanza in quanto vedremo che si genera violazione di CP se e solo se la matrice di massa è complessa.

Se ora sostituiamo questa forma delle matrici C_ℓ, C'_q, C_q nella (1.57) e rompiamo la simmetria utilizzando la (1.40), ponendo

$$m_x = c_x \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (1.70)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \left\{ - (\bar{e} \quad \bar{\mu} \quad \bar{\tau}) \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} - (\bar{u} \quad \bar{c} \quad \bar{t}) \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - (\bar{d}' \quad \bar{s}' \quad \bar{b}') V \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} V^\dagger \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \right\} \left(1 + \frac{h(x)}{v} \right) \end{aligned} \quad (1.71)$$

in cui identifichiamo naturalmente le m_x con le masse dei fermioni. Osserviamo che però i campi d', s', b' , che abbiamo introdotto come partner di isospin debole dei campi u, d, s , non sono in generale autostati di massa; l'interazione invece si diagonalizza per i campi d, s, b ruotati con la matrice CKM:

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = V^\dagger \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \underbrace{-m_e \bar{e}e - m_\mu \bar{\mu}\mu - m_\tau \bar{\tau}\tau - m_u \bar{u}u - m_c \bar{c}c - m_t \bar{t}t - m_d \bar{d}d - m_s \bar{s}s - m_b \bar{b}b}_{\text{termini di massa dei fermioni}} - \\ & \underbrace{-\frac{m_e}{v} \bar{e}eh - \frac{m_\mu}{v} \bar{\mu}\mu h - \frac{m_\tau}{v} \bar{\tau}\tau h - \frac{m_u}{v} \bar{u}uh - \frac{m_c}{v} \bar{c}ch - \frac{m_t}{v} \bar{t}th - \frac{m_d}{v} \bar{d}dh - \frac{m_s}{v} \bar{s}sh - \frac{m_b}{v} \bar{b}bh}_{\text{termini di interazione dei fermioni con l'Higgs}} \end{aligned} \quad (1.73)$$

La presenza della matrice CKM ha effetti importanti nelle interazioni elettrodeboli nel settore dei quark. Infatti, le correnti cariche dei quark, ad esempio di innalzamento, estendendo la (1.54a), sono

$$J_\mu^+ = (\bar{u}_L \quad \bar{c}_L \quad \bar{t}_L) \gamma_\mu \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix} = (\bar{u}_L \quad \bar{c}_L \quad \bar{t}_L) \gamma_\mu V \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

e quindi nei vertici di interazione della (1.53b) se esplicitiamo i quark fisici (cioè con massa definita) compaiono gli elementi della matrice CKM; in pratica questo comporta che le correnti cariche coinvolgono non solo un quark di tipo up e il relativo partner di tipo down, ma un quark di tipo up e tutti gli stati fisici di tipo down, con accoppiamento proporzionale al relativo elemento di matrice CKM:

$$\begin{aligned} W^{+\mu} J_\mu^+ = & V_{11} W^{+\mu} \bar{u}_L \gamma_\mu d_L + V_{12} W^{+\mu} \bar{u}_L \gamma_\mu s_L + V_{13} W^{+\mu} \bar{u}_L \gamma_\mu b_L + \\ & + V_{21} W^{+\mu} \bar{c}_L \gamma_\mu d_L + V_{22} W^{+\mu} \bar{c}_L \gamma_\mu s_L + V_{23} W^{+\mu} \bar{c}_L \gamma_\mu b_L + \\ & + V_{31} W^{+\mu} \bar{t}_L \gamma_\mu d_L + V_{32} W^{+\mu} \bar{t}_L \gamma_\mu s_L + V_{33} W^{+\mu} \bar{t}_L \gamma_\mu b_L \end{aligned} \quad (1.75)$$

Da questa espressione è chiaro perché si indicano gli elementi della matrice CKM come

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

Invece, in virtù dell'unitarietà della matrice CKM, è immediato vedere che essa non compare nelle correnti neutre. Di conseguenza, mentre le correnti cariche cambiano il flavour, quelle neutre lo lasciano invariato, ovvero il meccanismo CKM non prevede l'esistenza delle cosiddette *flavour changing neutral currents* a livello ad albero [9].

Poiché sperimentalmente nella matrice CKM gli elementi diagonali sono prossimi all'unità mentre tutti gli altri sono più o meno piccoli, l'accoppiamento dei quark di tipo up con il relativo partner (fisico) di tipo down è favorito, mentre gli altri sono detti *Cabibbo-soppressi*.

1.3 Fenomenologia della matrice CKM

1.3.1 Violazione di CP

Fino agli anni Cinquanta si credeva che tutte le interazioni dovessero obbedire a simmetrie che nel mondo macroscopico sono chiaramente valide, anche se non c'era alcuna prova matematica a garantirlo. La prima di queste simmetrie a rivelarsi non valida è stata, come abbiamo visto, la trasformazione di parità P. Fino agli anni Settanta sembrava però che fosse conservata la combinazione di parità P e coniugazione di carica C, ovvero che ci fosse invarianza per trasformazioni di CP.

Vogliamo quindi vedere se il settore elettrodebole del MS gode di simmetria CP. Per trasformazioni di CP i campi in esame si trasformano secondo

$$\nu(x) \rightarrow e^{i\phi_\nu} \gamma_0 C \bar{\nu}_L^T(x') \quad (1.77a)$$

$$\ell(x) \rightarrow e^{i\phi_\ell} \gamma_0 C \bar{\ell}_L^T(x') \quad (1.77b)$$

$$q(x) \rightarrow e^{i\phi_q} \gamma_0 C \bar{q}_L^T(x') \quad (1.77c)$$

$$\vec{W}^\mu(x) \rightarrow -\vec{W}_\mu^T(x') \quad (1.77d)$$

$$B^\mu(x) \rightarrow -B_\mu(x') \quad (1.77e)$$

$$h(x) \rightarrow h(x') \quad (1.77f)$$

con $x' = (t \ -\vec{x})$ e $C = i\gamma^2\gamma^0$ matrice di coniugazione di carica, e dove $\phi_\nu, \phi_\ell, \phi_q$ sono fasi. Applicando queste trasformazioni alla Lagrangiana completa, è immediato verificare che sia i termini cinetici che i termini di massa sono invarianti per CP; per esaminare i termini di interazione, sostituiamo le trasformazioni nelle correnti, ottenendo

$$J_{\text{em}}^\mu(x) \rightarrow -J_{\text{em} \ \mu}(x') \quad (1.78a)$$

$$J_{\text{NC}}^\mu(x) \rightarrow -J_{\text{NC} \ \mu}(x') \quad (1.78b)$$

mentre per le correnti cariche

$$\begin{aligned}
J_{\text{CC}}^\mu(x) &= (\bar{\nu}_{eL}(x) \quad \bar{\nu}_{\mu L}(x) \quad \bar{\nu}_{\tau L}(x)) \gamma^\mu \begin{pmatrix} e_L(x) \\ \mu_L(x) \\ \tau_L(x) \end{pmatrix} + (\bar{u}_L(x) \quad \bar{c}_L(x) \quad \bar{t}_L(x)) \gamma^\mu V \begin{pmatrix} d_L(x) \\ s_L(x) \\ b_L(x) \end{pmatrix} \\
&\rightarrow - (e^{i\phi_e} \bar{e}_L(x') \quad e^{i\phi_\mu} \bar{\mu}_L(x') \quad e^{i\phi_\tau} \bar{\tau}_L(x')) \gamma_\mu \begin{pmatrix} e^{i\phi_{\nu_e}} \nu_{eL}(x') \\ e^{i\phi_{\nu_\mu}} \nu_{\mu L}(x') \\ e^{i\phi_{\nu_\tau}} \nu_{\tau L}(x') \end{pmatrix} - \\
&\quad - (e^{i\phi_d} \bar{d}_L(x') \quad e^{i\phi_s} \bar{s}_L(x') \quad e^{i\phi_b} \bar{b}_L(x')) \gamma_\mu V^\dagger \begin{pmatrix} e^{i\phi_u} u_L(x') \\ e^{i\phi_c} c_L(x') \\ e^{i\phi_t} t_L(x') \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Ora, CP è una simmetria per la nostra Lagrangiana se le correnti trasformate per CP o sono presenti nella Lagrangiana o sono equivalenti a correnti presenti nella Lagrangiana. Evidentemente le correnti elettromagnetica e neutra trasformate sono esse stesse presenti nella Lagrangiana non trasformata, e quindi l'interazione elettromagnetica e di corrente neutra conserva CP. Invece, osservando la (1.79), deduciamo che l'unica possibilità affinché CP sia conservata anche dall'interazione di corrente carica è che la trasformazione sia del tipo

$$J_{\text{CC}}^\mu(x) \rightarrow -e^{i\chi} J_{\text{CC}}^\mu(x') \tag{1.80}$$

Ci chiediamo quindi se possiamo mettere la (1.79) nella forma (1.80) scegliendo opportunamente le fasi ϕ_x . Confrontando a questo scopo le (1.79) e (1.80), otteniamo le condizioni

$$\phi_e - \phi_{\nu_e} = \chi \quad \phi_\mu - \phi_{\nu_\mu} = \chi \quad \phi_\tau - \phi_{\nu_\tau} = \chi \tag{1.81a}$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi_d} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_b} \end{pmatrix} V^T \begin{pmatrix} e^{-i\phi_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_t} \end{pmatrix} = e^{i\chi} V^\dagger \tag{1.81b}$$

La (1.81b) si riscrive

$$\begin{pmatrix} e^{-i\phi_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_t} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} e^{i(\phi_d - \chi)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\phi_s - \chi)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\phi_b - \chi)} \end{pmatrix} = V^* \tag{1.82}$$

Ma questa è una trasformazione del tipo (1.69), che abbiamo sempre possibilità di operare sulla matrice CKM e che ci consente di ridefinirla. Di conseguenza, possiamo concludere che l'interazione di corrente carica è simmetrica per CP se e solo se possiamo mettere la matrice CKM in una forma tale che

$$V = V^* \tag{1.83}$$

ovvero se possiamo rendere completamente reale la matrice CKM. Come abbiamo visto, una matrice unitaria 3×3 ha necessariamente degli elementi complessi, mentre una matrice unitaria 2×2 è reale. Poiché la violazione di CP è stata verificata

sperimentalmente [10], e abbiamo mostrato che l'unica possibile sorgente di violazione di CP nel MS è nelle correnti elettrodeboli cariche, questo implica che devono esistere almeno tre generazioni di quark.

Un modo di quantificare la violazione di CP consiste nel considerare le matrici di massa dei quark

$$M_u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad M_d = V \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} V^\dagger \quad (1.84)$$

e il commutatore

$$C = [M_u M_u^\dagger, M_d M_d^\dagger] \quad (1.85)$$

Dopo una serie di manipolazioni algebriche, si ottiene

$$\det C = -2i F_u F_d J \quad (1.86)$$

con

$$F_u = (m_u^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_t^2)(m_t^2 - m_u^2) \quad (1.87a)$$

$$F_d = (m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2) \quad (1.87b)$$

$$J = \text{Im}[V_{11} V_{21}^* V_{22} V_{12}^*] \quad (1.87c)$$

Questa quantità riassume le caratteristiche della violazione di CP mediante il meccanismo CKM, ovvero che CP è conservata se due quark dello stesso tipo hanno massa uguale o se la matrice CKM è reale; inoltre, l'*invariante di Jarlskog J* [11] non dipende dalla parametrizzazione scelta per la matrice CKM.

1.3.2 Forma canonica

La libertà di operare trasformazioni del tipo della (1.69) permette di trasformare

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i(\phi_1 - \chi_1)} V_{11} & e^{-i(\phi_1 - \chi_2)} V_{12} & e^{-i(\phi_1 - \chi_3)} V_{13} \\ e^{-i(\phi_2 - \chi_1)} V_{21} & e^{-i(\phi_2 - \chi_2)} V_{22} & e^{-i(\phi_2 - \chi_3)} V_{23} \\ e^{-i(\phi_3 - \chi_1)} V_{31} & e^{-i(\phi_3 - \chi_2)} V_{32} & e^{-i(\phi_3 - \chi_3)} V_{33} \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

Potendo scegliere sei angoli, solo cinque differenze sono indipendenti, e quindi possiamo fissare la fase di cinque elementi, che in forma canonica sono [34]

$$V_{11} \geq 0 \quad V_{12} \geq 0 \quad V_{13} \geq 0 \quad V_{21} \leq 0 \quad V_{31} \leq 0 \quad (1.89)$$

(e naturalmente reali). Ora sfruttiamo le condizioni di unitarietà di V . Le

$$(V_{11})^2 + (V_{12})^2 + (V_{13})^2 = 1 \quad (1.90a)$$

$$(V_{11})^2 + (V_{21})^2 + (V_{31})^2 = 1 \quad (1.90b)$$

e le (1.89) sono soddisfatte se introduciamo tre angoli $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tutti compresi tra 0 e $\pi/2$ e poniamo

$$V_{11} = c_1 \quad V_{12} = s_1 c_3 \quad V_{13} = s_1 s_3 \quad V_{21} = -s_1 c_2 \quad V_{31} = -s_1 s_1 \quad (1.91)$$

dove $c_i \equiv \cos \theta_i$ e $s_i \equiv \sin \theta_i$. Consideriamo altre due condizioni di unitarietà:

$$V_{11}V_{21} + V_{12}V_{22} + V_{13}V_{23} = 0 \quad (1.92a)$$

$$(V_{21})^2 + |V_{22}|^2 + |V_{23}|^2 = 1 \quad (1.92b)$$

Dalla prima segue

$$c_3V_{22} + s_3V_{23} = c_1c_2 \quad (1.93)$$

che ha soluzioni della forma

$$V_{22} = c_1c_2c_3 + \lambda s_2s_3 \quad (1.94a)$$

$$V_{23} = c_1c_2s_3 - \lambda s_2c_3 \quad (1.94b)$$

con λ numero complesso arbitrario. Sostituendo nella seconda, si ottiene

$$|\lambda| = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -e^{i\delta} \quad \text{con } 0 \leq \delta \leq 2\pi \quad (1.95)$$

Altre due relazioni di unitarietà sono

$$V_{11}V_{31} + V_{12}V_{32} + V_{13}V_{33} = 0 \quad (1.96a)$$

$$(V_{31})^2 + |V_{32}|^2 + |V_{33}|^2 = 1 \quad (1.96b)$$

da cui segue analogamente

$$V_{32} = c_1s_2c_3 - \lambda'c_2s_3 \quad (1.97a)$$

$$V_{33} = c_1s_2s_3 + \lambda'c_2c_3 \quad (1.97b)$$

$$|\lambda| = 1 \quad (1.97c)$$

e infine dalla condizione

$$V_{21}^*V_{31} + V_{22}^*V_{32} + V_{23}^*V_{33} = 0 \quad (1.98)$$

si ottiene

$$\lambda' = \lambda \quad (1.99)$$

In conclusione, abbiamo ottenuto una forma canonica

$$V = \begin{pmatrix} c_1 & s_1c_3 & s_1s_3 \\ -s_1c_2 & c_1c_2c_3 - e^{i\delta}s_2s_3 & c_1c_2s_3 + e^{i\delta}s_2c_3 \\ -s_1s_2 & c_1s_2c_3 + e^{i\delta}c_2s_3 & c_1s_2s_3 - e^{i\delta}c_2c_3 \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

con

$$0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, 3 \quad 0 \leq \delta \leq 2\pi \quad (1.101)$$

In modo analogo si ricava la forma simile consigliata dal Particle Data Group [12]:

$$V = \begin{pmatrix} c_1c_3 & s_1c_3 & s_3e^{-i\delta} \\ -s_1c_2 - c_1s_2s_3e^{-i\delta} & c_1c_2 - s_1s_2s_3e^{i\delta} & s_2c_3 \\ s_1s_2 - c_1c_2s_3e^{i\delta} & -c_1s_2 - s_1c_2s_3e^{i\delta} & c_2c_3 \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

In questa parametrizzazione l'invariante di Jarlskog si scrive

$$J = c_1c_2c_3^2s_1s_2s_3 \sin \delta \quad (1.103)$$

1.3.3 Parametrizzazione di Wolfenstein

La parametrizzazione di Wolfenstein è una forma comoda dal punto di vista fenomenologico in quanto si tratta di uno sviluppo in serie rispetto a un parametro piccolo λ , suggerita dal fatto che sperimentalmente si trova una certa gerarchia tra gli elementi della matrice CKM [13]. Ad esempio, a partire dalle misure sperimentali

$$V_{us} \approx 0.22 \quad |V_{cb}| \approx 0.04 \quad (1.104)$$

ha senso pensare che rispetto ad un parametro piccolo V_{us} sia del prim'ordine e $|V_{cb}|$ sia del second'ordine; poniamo quindi

$$V_{us} = \lambda \quad |V_{cb}| = A\lambda^2 \quad (1.105)$$

Al second'ordine in λ le condizioni di unitarietà sono soddisfatte scrivendo la matrice CKM come

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & 0 \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ 0 & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.106)$$

Osserviamo che a quest'ordine la matrice è reale.

Vogliamo quindi procedere con il terz'ordine in λ . Convenzionalmente si scelgono le fasi in modo che i termini complessi siano quelli in λ^3 e si assume che s_2 e s_3 siano di ordine λ^2 . Introduciamo due nuovi parametri ρ e η , e poniamo

$$\lambda = s_1 \quad A\lambda^2 = \sqrt{s_2^2 + s_3^2 + 2s_2s_3 \cos \delta} \quad A^2\lambda^4\eta = s_2s_3 \sin \delta \quad A\lambda^2\sqrt{\eta^2 + \rho^2} = s_3 \quad (1.107)$$

da cui la matrice CKM diventa

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

Sottolineamo che sia la forma canonica (1.100) sia la forma di Wolfenstein (1.108) della matrice CKM presentano quattro parametri liberi, ma mentre la prima è una parametrizzazione esatta, quella di Wolfenstein è uno sviluppo troncato ad un certo ordine.

Procedendo con l'ordine superiore, la definizione esatta dei parametri di espansione non è unica. Un modo possibile per procedere consiste nel definire i nuovi parametri in modo simile alle (1.107) ma con valore per tutti gli ordini in λ . Ad esempio partendo dalla forma esatta (1.102) e definendo [15]

$$\lambda = s_1 \quad A\lambda^2 = s_2 \quad \rho = \frac{s_3}{s_1s_2} \cos \delta \quad \eta = \frac{s_3}{s_1s_2} \sin \delta \quad (1.109)$$

troviamo anche che la matrice CKM in funzione di questi parametri di Wolfenstein soddisfa esattamente l'unitarietà. Basta poi espandere ogni elemento in serie di λ

per ottenere la parametrizzazione in (λ, A, ρ, η) a qualsiasi ordine. Ad esempio al quart'ordine

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{8} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda + \frac{1}{2}A^2\lambda^5[1 - 2(\rho + i\eta)] & 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{8}(1 + 4A^2) & A\lambda^2 \\ A\lambda^3 \left[1 - (\rho + i\eta) \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) \right] & -A\lambda^2 + \frac{1}{2}A(1 - 2\rho)\lambda^4 - i\eta A\lambda^4 & 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^4 \end{pmatrix} \quad (1.110)$$

A quest'ordine è consuetudine scrivere con ottima approssimazione

$$V_{td} = A\lambda^3(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) \quad (1.111)$$

con

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) \quad \bar{\eta} = \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) \quad (1.112)$$

1.3.4 I triangoli di unitarietà

Come abbiamo visto, il MS prescrive molte condizioni sugli elementi della matrice CKM

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

in quanto stabilisce che essa è unitaria. Esse sono relazioni di normalizzazione (la somma dei moduli quadri degli elementi di ciascuna riga o colonna deve essere uguale a uno) e di ortogonalità (i prodotti scalari delle righe tra loro e delle colonne tra loro deve essere nullo). Se si ricavano sperimentalmente i valori degli elementi della matrice CKM, la verifica di queste relazioni costituisce un test del MS.

Le relazioni di ortogonalità hanno un'immediata interpretazione geometrica. Se ad esempio prendiamo la prima e la terza colonna, otteniamo la relazione

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (1.114)$$

che dice che i tre addendi tracciano un triangolo nel piano complesso. Le relazioni di ortogonalità sono sei, e poiché valgono se e solo se la matrice CKM è unitaria, i sei triangoli che esse disegnano sono chiamati *triangoli di unitarietà* (Fig. 1.3). Gli angoli e i lati di questi triangoli non dipendono dalla scelta della fase e sono quindi fisicamente misurabili; l'area è la stessa per tutti e sei i triangoli e vale $\frac{1}{2}|J|$. Se misurando queste quantità non si ottenessero dei triangoli di questo tipo (ad esempio se non si ottiene la somma degli angoli interni pari a 180° , se le misure dei lati non sono coerenti con quelle degli angoli, se vincoli ottenuti da processi indipendenti non sono compatibili, ecc.), si avrebbero prove dell'esistenza di Nuova Fisica.

In particolare, la relazione (1.114) coinvolge elementi di matrice CKM attualmente di particolare interesse, e talvolta quando si parla di triangolo di unitarietà ci si riferisce solo a questo triangolo (Fig. 1.4). Riferendosi alla parametrizzazione (1.111)-(1.110), troviamo che al quart'ordine i lati sono

$$V_{cd}V_{cb}^* = -A\lambda^3 \quad V_{ud}V_{ub}^* = A\lambda^3(\bar{\rho} + i\bar{\eta}) \quad V_{td}V_{tb}^* = A\lambda^3(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) \quad (1.115)$$

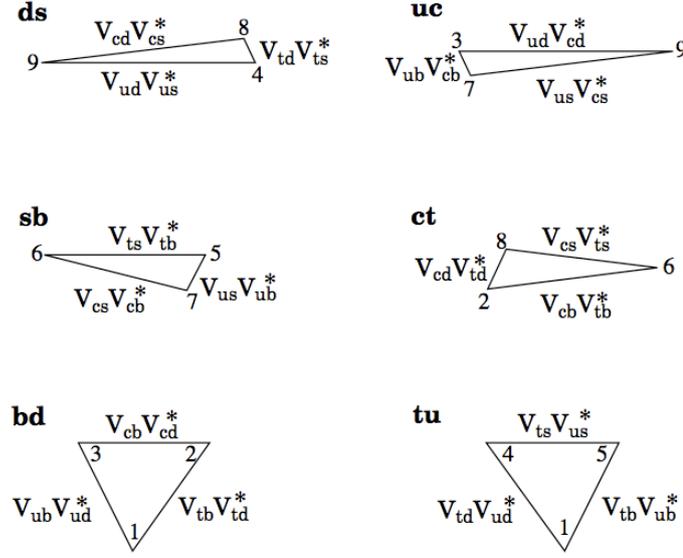


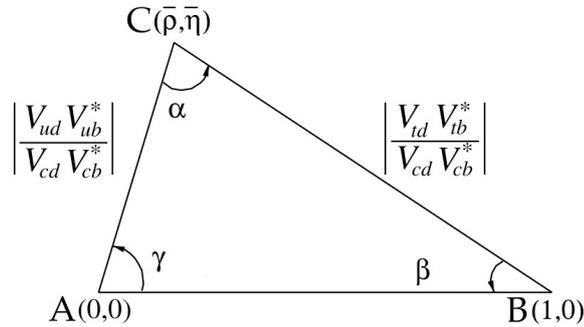
Figura 1.3: I sei triangoli di unitarietà.

Solo due dei sei triangoli hanno i tre lati tutti dello stesso ordine, ma questo è l'unico dei due attualmente accessibile sperimentalmente; gli altri triangoli sono lunghi e stretti. Poiché il parametro λ è noto con maggiore precisione rispetto ai parametri ρ ed η , si preferisce riscaldare il triangolo del fattore $A\lambda^3$ in modo che il vertice superiore abbia proprio coordinate $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$; sono sufficienti pochi calcoli trigonometrici per ricavare i valori degli angoli in funzione di $\bar{\rho}$ ed $\bar{\eta}$. Infine, le lunghezze dei lati sono

$$\overline{AC} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \frac{1}{\lambda} \frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \quad \overline{BC} = \frac{1}{\lambda} \frac{|V_{td}|}{|V_{cb}|} \quad (1.116)$$

Di conseguenza, la conoscenza di questo triangolo di unitarietà più gli elementi $|V_{us}|$ e $|V_{cb}|$ contiene tutte le informazioni sulla matrice CKM (se questa è unitaria).

Nel caso della fisica del B_s , invece, il triangolo di unitarietà rilevante è quello


 Figura 1.4: Il triangolo di unitarietà per eccellenza, riscaldato per il fine-tuning dei parametri $\bar{\rho}$ ed $\bar{\eta}$.

dato dalla condizione

$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0 \quad (1.117)$$

ovvero quella che nella precedente sostituisce il quark s al quark d . In questo caso, i lati sono

$$V_{us}V_{ub}^* = A\lambda^4(\rho - i\eta) \quad V_{cs}V_{cb}^* = A\lambda^2 \quad V_{ts}V_{tb}^* = -A\lambda^2 \quad (1.118)$$

e come abbiamo anticipato il primo è molto più corto degli altri due; soprattutto, è piccolo l'angolo

$$\beta_s = \arg \left[-\frac{V_{us}V_{ub}^*}{V_{cs}V_{cb}^*} \right] = \lambda^2\eta \quad (1.119)$$

che interviene nella violazione di CP nei decadimenti e nel mixing del B_s . Quindi questi processi sono Cabibbo-soppressi, e quindi eventuali segnature di nuova fisica sono rivelabili più facilmente. Di conseguenza, la misura di β_s rappresenta a breve termine una ricerca di nuova fisica e a lungo termine una verifica del meccanismo CKM.

Attualmente varie collaborazioni operano al fine di raccogliere i dati di tutti i processi che coinvolgono transizioni elettrodeboli dei quark per effettuare dei fit completi dei triangoli di unitarietà e della matrice CKM [16] (Fig. 1.5). Citiamo qui alcuni dati salienti per inquadrare lo stato dell'arte [12]. Sono noti con buona precisione gli elementi

- $|V_{ud}| = 0.97418 \pm 0.00027$ (da alcuni decadimenti β);
- $|V_{us}| = 0.2255 \pm 0.0019$ (da decadimenti semileptonici dei K);
- $|V_{ub}| = (3.93 \pm 0.36) \times 10^{-3}$ (da decadimenti semileptonici dei B);
- $|V_{cd}| = 0.230 \pm 0.011$ (da interazioni con neutrini e antineutrini);
- $|V_{cs}| = 1.04 \pm 0.06$ (da decadimenti leptonici e semileptonici dei D);
- $|V_{cb}| = (41.2 \pm 1.1) \times 10^{-3}$ (da decadimenti semileptonici dei B);

mentre è più difficile determinare

- $|V_{td}| = (8.1 \pm 0.6) \times 10^{-3}$ e $|V_{ts}| = (38.7 \pm 2.3) \times 10^{-3}$: attualmente non possono essere determinati al livello ad albero dal decadimento del top, si determinano da processi con loop quali le oscillazioni $B - \bar{B}$ o decadimenti rari dei K e B ;
- $|V_{tb}| > 0.74$: c'è solo un limite superiore dalla produzione del quark top singolo.

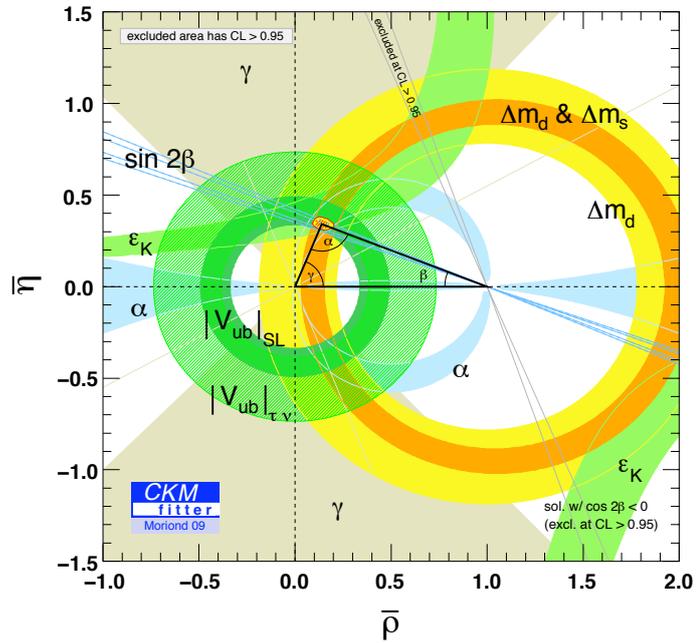
Più incerta e in continua evoluzione è la determinazione degli angoli del triangolo di unitarietà:

- $\alpha = (88_{-5}^{+6})^\circ$;
- $\sin 2\beta = 0.681 \pm 0.025$;
- $\gamma = (77_{-32}^{+30})^\circ$.

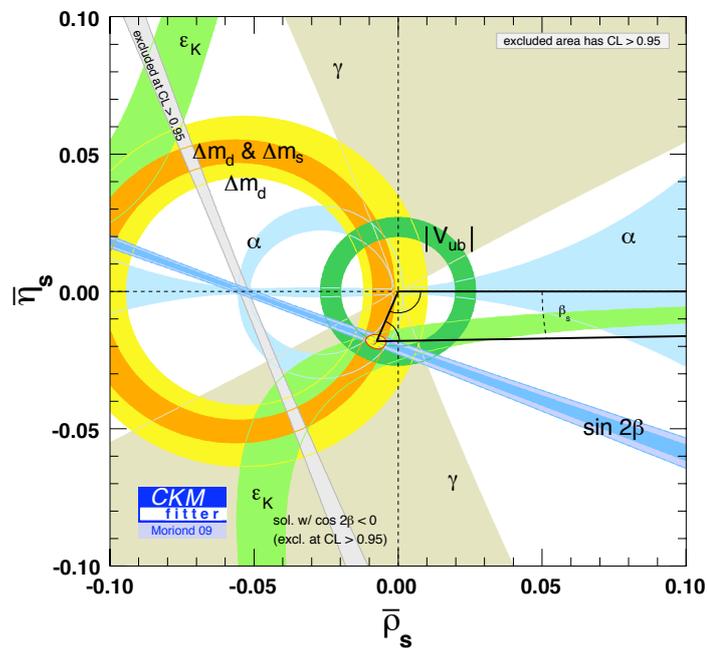
Mettendo insieme questi dati indipendenti, si possono verificare le condizioni di unitarietà; ad esempio si trova

- $|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 0.9999 \pm 0.0011$;
- $|V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 = 1.136 \pm 0.125$;
- $|V_{ud}|^2 + |V_{cd}|^2 + |V_{td}|^2 = 1.002 \pm 0.005$;
- $|V_{us}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{ts}|^2 = 1.134 \pm 0.125$;
- $\alpha + \beta + \gamma = (186_{-32}^{+31})^\circ$;

ed altre relazioni, meno accurate ma comunque attualmente tutte compatibili con il MS e che quindi impongono stretti vincoli sui modelli di Nuova Fisica.



(a)



(b)

Figura 1.5: [17] (a): fit attuale del triangolo di unitarietà per eccellenza. (b): fit attuale del triangolo di unitarietà rilevante nella fisica del B_s . Si vede come per entrambi i triangoli tutte le indicazioni sperimentali indipendenti siano compatibili.

Capitolo 2

Il Modello ACD con una Singola UED

2.1 I modelli con dimensioni extra

2.1.1 Motivazioni

L'idea delle dimensioni extra è stata proposta per le prime volte quando lo scenario della fisica delle particelle era molto più incompleto di quanto lo sia oggi: Gunnar Nordstrom nel 1916, Theodor Kaluza nel 1921, Oskar Klein nel 1926 [18] tentarono con le dimensioni extra di unificare interazione elettromagnetica e interazione gravitazionale.

Superato il loro scopo iniziale, quello della possibile esistenza di dimensioni extra è diventato un paradigma sul quale sono state sviluppate diverse teorie, le quali fanno ipotesi differenti sulle caratteristiche delle dimensioni extra; esse si propongono come possibili estensioni del MS allo scopo di risolvere alcuni problemi (per il momento non di natura sperimentale, ma solo concettuale) che il MS presenta; infatti, nei vari modelli con dimensioni extra si è riusciti a [19]:

- risolvere il problema della gerarchia tra massa dell'Higgs e massa di Planck [20], [21];
- risolvere i problemi di gerarchia delle masse e della matrice CKM [22];
- generare rottura spontanea di simmetria senza introdurre il campo di Higgs [23];
- costruire una grande unificazione sopprimendo il decadimento del protone [24];
- ottenere dei buoni candidati di materia oscura [25], [35], [27];
- aprire delle vie sperimentali per la gravità quantistica [28].

Di conseguenza, le teorie con dimensioni extra sono di grande interesse in un momento in cui si stanno effettuando test di precisione del MS, e quindi si cercano segnali di Nuova Fisica che indichino in quale direzione tentare di includere i fenomeni non descritti e possibilmente come risolvere i problemi concettuali.

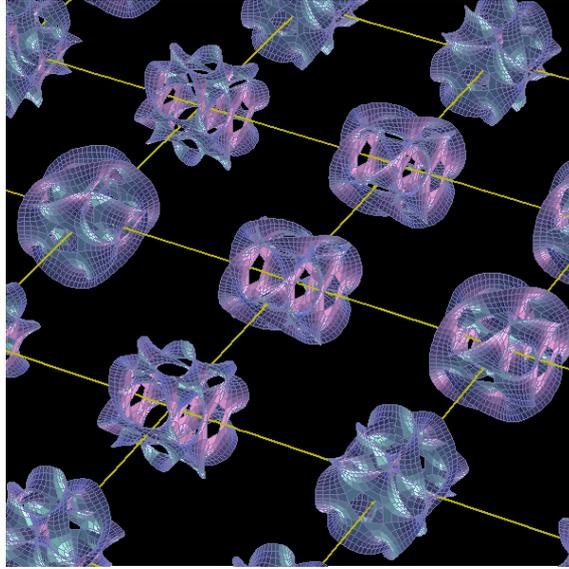


Figura 2.1: Rappresentazione grafica semplificata di una varietà con $D = 4 + \delta$ dimensioni: ad ogni punto dello spazio-tempo ordinario a 4 dimensioni (bidimensionale nell'immagine) è associata una varietà compatta a δ dimensioni.

Un secondo motivo di interesse per queste teorie in questo momento è che, come vedremo in seguito, se le dimensioni extra esistono, esse possono cominciare a manifestarsi alla scala del TeV, ovvero alle energie che saranno fittamente esplorate nei prossimi anni dai nuovi collisionatori.

Le teorie con dimensioni extra propongono scenari molto diversi tra loro. In primo luogo, esse differiscono per il numero di dimensioni extra che postulano e per le varie metriche che propongono per lo spazio-tempo n -dimensionale. Inoltre, in alcuni modelli i campi ordinari possono propagarsi nelle dimensioni extra, mentre in altri essi sono vincolati a restare nelle dimensioni ordinarie e solo il campo gravitazionale può propagarsi nelle dimensioni extra. Tuttavia, nonostante queste profonde differenze, ci sono delle caratteristiche comuni a tutti i modelli con dimensioni extra motivate da esigenze fisiche, che andiamo ora ad analizzare.

2.1.2 Compattificazione

In tutti i modelli, le dimensioni extra sono compatte: le coordinate delle dimensioni extra non possono estendersi fino a $\pm\infty$ come per le coordinate delle quattro dimensioni ordinarie. La ragione di questa scelta è evidente: serve a giustificare il fatto che noi non percepiamo le dimensioni extra. Ovviamente non si tratta solo della nostra percezione cognitiva, ma anche e soprattutto delle misure sperimentali, che finora sono in ottimo accordo con le previsioni di un modello a quattro dimensioni. Di conseguenza, le extra dimensioni devono essere non solo limitate, ma anche molto piccole, in modo da non modificare le previsioni alle energie finora esplorate: le teorie devono contenere il MS come limite in cui le dimensioni extra hanno lunghezza tendente a zero; è proprio in questo senso che si parla di *estensioni* del MS.

2.1.3 Segno delle dimensioni extra

Bastano delle considerazioni di tipo classico per rendersi conto che le dimensioni extra devono essere di tipo spazio, cioè devono avere lo stesso segno delle dimensioni spaziali dello spazio di Minkowski. (Nel seguito, assumeremo che come al solito gli indici latini assumano valori 1, 2, 3 e gli indici greci 0, 1, 2, 3, mentre gli indici latini maiuscoli assumeranno i valori 0, 1, 2, 3, 5; indicheremo la quinta coordinata come x_5 o y).

Consideriamo una particella priva di massa che si muove in uno spazio piatto a 5 dimensioni, con una metrica che estende la metrica di Minkowski

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

e assumiamo che anche in 5D valga l'invarianza di Lorentz. Allora il quadrato del 5-impulso sarà

$$p^2 = 0 \Rightarrow p^2 = g_{AB}p^A p^B = p_0^2 - |\vec{p}|^2 \pm p_5^2 = 0 \quad (2.2)$$

dove (p_0, \vec{p}) è l'usuale quadrimpulso e p_5 è l'impulso lungo la quinta dimensione. Da questa relazione notiamo che se una particella è priva di massa in 5D, il quadrato del suo quadrimpulso è

$$p_0^2 - |\vec{p}|^2 = \mp p_5^2 \quad (2.3)$$

e quindi, poiché la particella deve soddisfare anche l'invarianza di Lorentz in 4D

$$p_\mu p^\mu = p_0^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \quad (2.4)$$

essa su una ipersuperficie quadridimensionale apparirà come una particella massiva con massa quadra

$$m^2 = \mp p_5^2 \quad (2.5)$$

Di conseguenza, se la dimensione extra fosse di tipo tempo, essa avrebbe una massa quadra negativa, cioè sarebbe un *tachione*. In tutti i modelli si preferisce evitare la presenza di tachioni, in quanto questi generano importanti problemi di causalità. Quindi sceglieremo una metrica con la quinta dimensione di tipo spazio:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Questo è un risultato generale: qualunque sia il numero di dimensioni extra, e anche se la metrica non è diagonale o piatta, per evitare la presenza di tachioni bisogna assumere che tutte le dimensioni extra siano di tipo spaziale.

2.1.4 Eccitazioni di Kaluza-Klein

Nelle teorie con dimensioni extra, come conseguenza dell'esistenza stessa delle dimensioni extra e della loro compattificazione, si verifica la presenza delle *eccitazioni di Kaluza-Klein*: ad ogni particella sono associati infiniti stati eccitati di massa.

Consideriamo ancora uno spazio piatto a cinque dimensioni con la metrica (2.6) e quinta dimensione con estensione $y_1 \leq y \leq y_2$, e un campo scalare privo di massa $\Phi(x^\mu, y)$. La Lagrangiana per questo campo è

$$\mathcal{L}^{5D} = \frac{1}{2} \partial_A \Phi \partial^A \Phi \quad (2.7)$$

e quindi l'azione è

$$S = \int d^4x \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{1}{2} \partial_A \Phi \partial^A \Phi \quad (2.8)$$

Sotto determinate condizioni di regolarità, che assumiamo essere soddisfatte, possiamo separare le variabili espandendo

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_n \phi_n(x^\mu) \chi_n(y) \quad (2.9)$$

in cui trattiamo n come un indice discreto (vedremo in seguito il perché), ma in generale potremmo anche considerarlo continuo e sostituire alla sommatoria un'integrale; questa ipotesi è soddisfatta in tutti i modelli in virtù delle geometrie proposte per le dimensioni extra. Ora se per χ_n valgono:

- ortonormalizzazione:

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \chi_n \chi_m = \delta_{mn} \quad (2.10a)$$

- condizioni al contorno:

$$\chi_n \partial_y \chi_m \Big|_{y_1}^{y_2} = 0 \quad (2.10b)$$

- equazione da soddisfare:

$$(\partial_y^2 + m_n^2) \chi_n = 0 \quad (2.10c)$$

diventa possibile integrare la (2.8) sulla quinta dimensione, ottenendo

$$S = \int d^4x \sum_n \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - m_n^2 \phi_n^2] \quad (2.11)$$

e quindi una Lagrangiana per una teoria effettiva quadridimensionale

$$\mathcal{L}^{4D} = \int_{y_1}^{y_2} dy \mathcal{L}^{5D} = \sum_n \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - m_n^2 \phi_n^2] \quad (2.12)$$

che è la Lagrangiana per n campi scalari ϕ_n di massa m_n : in quattro dimensioni per ogni campo “vero” 5D vediamo infiniti campi “effettivi” 4D, ovvero le sue eccitazioni di Kaluza-Klein.

Mostriamo ora che le ipotesi (2.10) sono ragionevoli. Infatti, l'equazione per il campo scalare è

$$\partial_A \partial^A \Phi = 0 \quad (2.13)$$

la quale, se assumiamo si possano separare le variabili, diventa

$$\sum_n [\chi_n \partial_\mu \partial^\mu \phi_n - \phi_n \partial_y^2 \chi_n] = 0 \quad (2.14)$$

che è soddisfatta se

$$\partial_y^2 \chi_n = C_n \chi_n \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi_n = C_n \phi_n \quad (2.15)$$

dove C_n è negativo per evitare la presenza di tachioni:

$$C_n = -m_n^2 \quad (2.16)$$

Le (2.15) sono coerenti con l'ipotesi (2.10c) e con il risultato (2.12). Ora, la (2.10c) ha come soluzione generale

$$\chi_n = A_n e^{im_n y} + B_n e^{-im_n y} \quad (2.17)$$

dove A_n e B_n dipendono dalle condizioni al contorno per $y = y_1$ e $y = y_2$. Queste condizioni al contorno sono fissate dal modello col solo vincolo di soddisfare l'ipotesi (2.10b); ad esempio si può scegliere che la funzione d'onda si annulli ai bordi, o si possono scegliere condizioni al contorno periodiche. Se imponiamo ad esempio che χ_n si annulli al contorno, posto $L = y_2 - y_1$, otteniamo

$$\chi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi L}} \sin(m_n y) \quad \text{con} \quad m_n = \frac{n}{L} \quad (2.18)$$

ovvero la compattificazione della dimensione extra implica che le eccitazioni di Kaluza-Klein sono quantizzate (il problema è analogo a quello della particella nella scatola). Notiamo infine che le soluzioni sono ortonormali, come richiesto dall'ipotesi (2.10a).

2.2 I campi quantistici nel Modello ACD

2.2.1 Ipotesi del Modello ACD con una singola UED

Il modello proposto da Appelquist, Cheng e Dobrescu [25] (Fig. 2.2), nella sua versione più semplice, assume che:

- esista una singola dimensione extra;
- questa dimensione extra sia *universale*, ovvero tutti i campi possano propagarsi in essa;

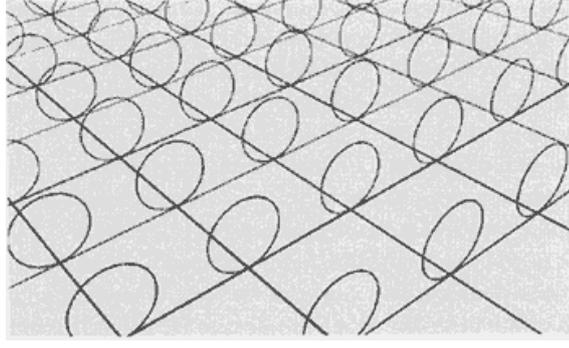


Figura 2.2: Rappresentazione grafica semplificata della varietà proposta dal Modello ACD: ad ogni punto dello spazio-tempo di Minkowski M è associata l'orbifold S_R^1/Z_2 .

- lo spazio-tempo sia la varietà $M \times (S_R^1/Z_2)$, ovvero le quattro dimensioni ordinarie abbiano la struttura di spazio di Minkowski, mentre la quinta dimensione sia “arrotolata”. S_R^1/Z_2 è una *orbifold*, cioè una varietà in cui dei punti sono identificati da un gruppo di simmetria finito: S_R^1 indica che la quinta dimensione è compattificata in una circonferenza di raggio R (che equivale ad imporre condizioni al contorno periodiche), mentre il quoziente rispetto al gruppo Z_2 indica che su questa circonferenza i punti y e $-y$ sono identificati. Quest'ultima condizione significa che i valori che i campi assumono in questi punti sono legati da una relazione del tipo

$$\Phi(-y) = U\Phi(y) \quad (2.19)$$

dove U è una trasformazione unitaria che è una simmetria per il sistema. I punti $y = 0$ e $y = \pi R$ sono punti fissi per trasformazioni di Z_2 combinate con la proprietà di periodicità. Tornando all'esempio del campo scalare, le condizioni al contorno periodiche implicano che la soluzione generale (2.17) assuma la forma

$$\chi_n = A_n \cos(m_n y) + B_n \sin(m_n y) \quad (2.20)$$

Dobbiamo però implementare la condizione (2.19); notiamo che per un campo scalare l'unica possibilità affinché U sia unitaria è che $U \in U(1)$, quindi $|U|^2 = 1$ e pertanto a meno di una fase $U = \pm 1$, ovvero i campi devono essere autostati della parità P_5 . Ci saranno quindi due possibili soluzioni:

$$\chi_n^{\text{even}} \propto \cos(m_n y) \quad \chi_n^{\text{odd}} \propto \sin(m_n y) \quad (2.21)$$

La scelta dell'orbifold S_R^1/Z_2 piuttosto che della semplice varietà S_R^1 è dettata, come vedremo, dalla necessità di ottenere degli spinori chirali e una opportuna riduzione quadridimensionale dei vettori.

In questa varietà ogni campo regolare può essere espanso in serie di Fourier lungo la quinta dimensione; ad esempio per un campo scalare

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i \frac{n}{R} y} \phi_n(x^\mu) \quad (2.22)$$

e di conseguenza per ogni campo è possibile la separazione delle variabili (2.9).

Questo modello aggiunge un solo parametro libero, il raggio di compattificazione della quinta dimensione, ai parametri del MS. Il reciproco del raggio $1/R$ è una scala di energia al di sopra della quale gli effetti della dimensione extra cominciano a diventare rilevanti, mentre il MS deve ritrovarsi come limite per $R \rightarrow 0$. Ci aspettiamo quindi che, non avendo finora trovato discrepanze con le previsioni del MS, questa scala sia almeno dell'ordine di alcune centinaia di GeV.

2.2.2 Campi scalari

Per quanto visto finora negli esempi, le condizioni al contorno per i campi scalari sono

$$\partial_5 \Phi^+(x, y)|_{y=0} = \partial_5 \Phi^+(x, y)|_{y=\pi R} = 0 \quad (\text{campo pari}) \quad (2.23a)$$

$$\Phi^-(x, 0) = \Phi^-(x, \pi R) = 0 \quad (\text{campo dispari}) \quad (2.23b)$$

da cui le rispettive espansioni di Kaluza-Klein sono

$$\Phi^+(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi_{(0)}^+(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{(n)}^+(x) \cos(m_n y) \quad (2.24a)$$

$$\Phi^-(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{(n)}^-(x) \sin(m_n y) \quad (2.24b)$$

con $m_n = \frac{n}{R}$. Notiamo che il modo zero è presente solo nei campi pari. Le particelle scalari del MS sono identificate con il modo zero dei campi pari, mentre il fatto che i modi eccitati di Kaluza Klein non siano stati osservati direttamente è motivato dal fatto che essi hanno massa di ordine almeno $1/R$; invece, come vedremo, essi possono entrare nei processi con loop e modificare le predizioni del MS per le particelle osservate.

2.2.3 Campi spinoriali

In cinque dimensioni, uno spinore può ancora essere un oggetto a quattro componenti; invece devono essere cinque le matrici di Dirac, in quanto ciascuna di esse deve essere associata ad una derivata direzionale. Le matrici gamma saranno ancora 4×4 e dovranno soddisfare l'algebra di Clifford

$$\{\Gamma_A, \Gamma_B\} = 2g_{AB}I \quad (2.25)$$

che è verificata dalla scelta

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \quad \Gamma_5 = i\gamma_5 \quad (2.26)$$

L'equazione di Dirac in cinque dimensioni è quindi

$$(i\Gamma_A \partial^A - m) \Psi = 0 \quad (2.27)$$

A questo punto possiamo vedere che ci sono dei problemi per ottenere degli spinori chirali, quali sono quelli del MS (le basi del gruppo $SU(2)_L$). Nel MS, uno spinore ψ si dice chirale se soddisfa simultaneamente le equazioni

$$\gamma_5\psi = \pm\psi \quad i\cancel{\partial}\psi = 0 \quad (2.28)$$

Questo può essere realizzato in quanto in quattro dimensioni, se ψ soddisfa l'equazione di Dirac a massa nulla (la massa rompe la chiralità, infatti i fermioni acquistano massa solo dopo la rottura spontanea della simmetria elettrodebole), anche $\gamma_5\psi$ la soddisfa, in quanto γ_5 anticommute con tutte e quattro le matrici gamma. Questo non vale invece in cinque dimensioni, in quanto abbiamo appena visto che γ_5 diventa una delle matrici di Dirac e quindi non anticommute con tutte le matrici di Dirac come avviene in quattro dimensioni; di conseguenza, le (2.28) in cinque dimensioni non possono essere più soddisfatte simultaneamente; infatti, se Ψ soddisfa l'equazione di Dirac in cinque dimensioni, non ne consegue che anche $\gamma_5\Psi$ la soddisfa:

$$i\Gamma_A\partial^A\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_5 i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + \partial_y\Psi = 0 \quad (2.29a)$$

$$i\Gamma_A\partial^A(\gamma_5\Psi) = -\gamma_5 i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + \partial_y\Psi \neq 0 \quad (2.29b)$$

Questa proprietà può però essere ripristinata se all'azione di γ_5 si associa la trasformazione $y \leftrightarrow -y$ che restituisce il segno corretto nella (2.29b). Diventa quindi cruciale il ruolo della simmetria dell'orbifold S^1_R/Z_2 . Infatti, dovendo soddisfare la condizione (2.19), possiamo scegliere $U = \pm\gamma_5$ e quindi

$$\gamma_5\Psi(y) = \pm\Psi(-y) \quad (2.30)$$

che è proprio la condizione che ci serve per ottenere degli spinori chirali in cinque dimensioni.

Le condizioni al contorno che ne derivano sono

$$\partial_5\Psi_R^+(x, y)|_{y=0} = \partial_5\Psi_R^+(x, y)|_{y=\pi R} = 0 \quad \text{e} \quad \Psi_L^+(x, 0) = \Psi_L^+(x, \pi R) = 0 \quad (2.31a)$$

oppure

$$\partial_5\Psi_L^-(x, y)|_{y=0} = \partial_5\Psi_L^-(x, y)|_{y=\pi R} = 0 \quad \text{e} \quad \Psi_R^-(x, 0) = \Psi_R^-(x, \pi R) = 0 \quad (2.31b)$$

e quindi le espansioni dei campi spinoriali sono

$$\Psi^+(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\psi_{R(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty} [\psi_{R(n)}(x)\cos(m_n y) + \psi_{L(n)}(x)\sin(m_n y)] \quad (2.32a)$$

$$\Psi^-(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\psi_{L(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty} [\psi_{L(n)}(x)\cos(m_n y) + \psi_{R(n)}(x)\sin(m_n y)] \quad (2.32b)$$

Possiamo quindi identificare i modi zero, che sono left-handed o right-handed, con i fermioni del MS (prima della rottura spontanea della simmetria); le eccitazioni di Kaluza-Klein invece sono massive e si presentano in coppie left-handed e right-handed.

2.2.4 Campi vettoriali e interazioni di gauge

Un campo vettoriale V_A in cinque dimensioni deve avere cinque componenti. Per poter identificare con esso un campo vettoriale V_μ (a quattro componenti) del MS, dobbiamo imporre che a basse energie la quinta componente non compaia. Questo può essere fatto nella topologia della orbifold; infatti, possiamo imporre che le prime quattro componenti V_μ siano pari rispetto a Z_2 , mentre la quinta componente V_5 sia dispari. Di conseguenza, le condizioni al contorno da imporre sono

$$\partial_5 V^\mu|_{y=0} = \partial_5 V^\mu|_{y=\pi R} = 0 \quad \text{e} \quad V^5(0) = V^5(\pi R) = 0 \quad (2.33)$$

e quindi l'espansione di Kaluza-Klein è

$$V^\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} V_{(0)}^\mu(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} V_{(n)}^\mu(x) \cos(m_n y) \quad (2.34a)$$

$$V^5(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} V_{(n)}^5(x) \sin(m_n y) \quad (2.34b)$$

Nel MS i campi vettoriali compaiono come conseguenza dell'applicazione del principio di gauge. Consideriamo un esempio semplice del tipo di una QED in cinque dimensioni, ovvero una teoria con un solo fermione chirale e una lagrangiana invariante rispetto ad $U(1)$. Applicando il principio di gauge, la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L}^{5D} = \bar{\Psi} i \not{D} \Psi - \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \quad \text{con} \quad D_M = \partial_M - i\tilde{e} A_M, \quad F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M \quad (2.35)$$

La Lagrangiana per la teoria efficace in quattro dimensioni è $\mathcal{L}^{4D} = \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \mathcal{L}^{5D}$; la parte cinetica è costituita dai termini cinetici dei modi zero del fermione e del campo di gauge e dai termini cinetici delle loro eccitazioni di Kaluza-Klein, mentre la parte di interazione è

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^0 + \mathcal{L}_I^{0K} + \mathcal{L}_I^K \quad (2.36)$$

dove

$$\mathcal{L}_I^0 = e \bar{\psi}_L^{(0)} A^{(0)} \psi_L^{(0)} \quad (2.37a)$$

$$\mathcal{L}_I^{0K} = e \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}^{(n)} A^{(0)} \psi^{(n)} + e \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{\psi}_L^{(0)} A^{(n)} \psi_L^{(n)} + i \bar{\psi}_L^{(0)} A_5^{(n)} \psi_R^{(n)} + \text{h.c.} \right] \quad (2.37b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^K &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\bar{\psi}^{(n+m)} A^{(m)} \psi^{(n)} - i \bar{\psi}^{(n+m)} A_5^{(m)} \psi^{(n)} \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\bar{\psi}^{(m)} A^{(n+m)} \gamma_5 \psi^{(n)} + i \bar{\psi}^{(m)} A_5^{(n+m)} \gamma_5 \psi^{(n)} \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.37c)$$

con

$$e = \frac{\tilde{e}}{\sqrt{\pi R}} \quad (2.38)$$

Abbiamo costruito una teoria di gauge in cinque dimensioni il cui limite per basse energie corrisponde all'ordinaria QED. La teoria completa mostra inoltre che ai vertici vale la conservazione della *parità* KK $(-1)^j$, dove j è il numero che identifica il modo di Kaluza-Klein [35], ovvero i modi di Kaluza Klein devono essere creati in coppie dal modo zero.

2.3 Estensione del MS mediante il Modello ACD

2.3.1 Il settore elettrodebole nel Modello ACD

Mostriamo come le considerazioni precedenti ci permettono di costruire un modello a cinque dimensioni che abbia il MS come limite per le basse energie [29], [30]. Estendiamo la Lagrangiana elettrodebole a cinque dimensioni seguendo le indicazioni che abbiamo ricavato nel paragrafo precedente:

$$\mathcal{L}^{5D} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y \quad (2.39)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & \bar{\mathcal{L}}_\ell (i\Gamma_A D^A) \mathcal{L}_\ell + \bar{\mathcal{R}}_\ell (i\Gamma_A D^A) \mathcal{R}_\ell + \\ & + \bar{\mathcal{L}}_q (i\Gamma_A D^A) \mathcal{L}_q + \bar{\mathcal{R}}_u (i\Gamma_A D^A) \mathcal{R}_u + \bar{\mathcal{R}}_d (i\Gamma_A D^A) \mathcal{R}_d \end{aligned} \quad (2.40a)$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} W_{MN} W^{MN} - \frac{1}{4} B_{MN} B^{MN} \quad (2.40b)$$

$$\mathcal{L}_H = (D_A H)^\dagger (D^A H) - \left[-\mu^2 H^\dagger H + \frac{\tilde{\lambda}}{4!} (H^\dagger H)^2 \right] \quad (2.40c)$$

$$\mathcal{L}_Y = -\bar{\mathcal{L}}_\ell \tilde{Y}_\ell H \mathcal{R}_\ell - \bar{\mathcal{L}}_q \tilde{Y}_u (i\sigma^2 H^*) \mathcal{R}_u - \bar{\mathcal{L}}_q \tilde{Y}_d H \mathcal{R}_d + \text{h.c.} \quad (2.40d)$$

dove la derivata covariante è $D_A = \partial_A + i\tilde{g}I_W W_A + i\tilde{g}'Y_W B_A$; $\tilde{Y}_\ell, \tilde{Y}_u, \tilde{Y}_d$ sono le matrici degli accoppiamenti di Yukawa; i campi che compaiono nella (2.39) sono campi in cinque dimensioni che quindi hanno gli sviluppi di Kaluza-Klein ricavati nel paragrafo precedente: per i campi fermionici sono

$$\mathcal{L}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \mathcal{L}_{L(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{L}_{L(n)}(x) \cos(m_n y) + \mathcal{L}_{R(n)}(x) \sin(m_n y)] \quad (2.41a)$$

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \mathcal{R}_{R(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{R}_{R(n)}(x) \cos(m_n y) + \mathcal{R}_{L(n)}(x) \sin(m_n y)] \quad (2.41b)$$

e per i bosoni di gauge sono

$$G^\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} G_{(0)}^\mu(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} G_{(n)}^\mu(x) \cos(m_n y) \quad (2.41c)$$

$$G^5(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} G_{(n)}^5(x) \sin(m_n y) \quad (2.41d)$$

Con queste scelte di parità, si vede che dal modo zero di $\mathcal{L}_\ell, \mathcal{L}_q$ si ottengono i doppietti left-handed di leptoni e quark, da $\mathcal{R}_\ell, \mathcal{R}_u, \mathcal{R}_d$ i singoletti right-handed (in tutti i casi è sottintesa la somma sulle tre generazioni di leptoni o quark); la loro interazione con il modo zero dei bosoni vettori è quella del MS se poniamo

$$g = \frac{\tilde{g}}{\sqrt{2\pi R}} \quad g' = \frac{\tilde{g}'}{\sqrt{2\pi R}} \quad (2.42)$$

Inoltre, il campo di Higgs a cinque dimensioni è

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i(\phi_1 - i\phi_2) \\ \phi_0 + i\phi_3 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

in cui ogni campo scalare reale ha la sua espansione di Kaluza-Klein. Integrando sulla quinta dimensione (utilizzando le condizioni al contorno del paragrafo precedente) per ottenere la teoria efficace in quattro dimensioni, si ricava

$$\begin{aligned} V(H) &= -\mu^2 H^\dagger H + \frac{\tilde{\lambda}}{4!} (H^\dagger H)^2 = \\ &= -\mu^2 H^{(0)\dagger} H^{(0)} + \frac{\lambda}{4!} (H^{(0)\dagger} H^{(0)})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\mu^2 + m_n^2) H^{(n)\dagger} H^{(n)} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{4!} \left[(H^{(0)\dagger} H^{(0)}) (H^{(n)\dagger} H^{(n)}) + (H^{(0)\dagger} H^{(n)})^2 + \right. \\ &\left. + (H^{(0)\dagger} H^{(n)}) (H^{(n)\dagger} H^{(0)}) + \text{h.c.} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

con

$$\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2\pi R}} \quad (2.45)$$

Identifichiamo quindi il modo zero con il campo di Higgs ordinario, che quindi sarà soggetto a rottura spontanea della simmetria e scelta del gauge unitario:

$$\phi_0^{(0)}(x) = v + h(x) \quad \langle H^{(0)} \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Invece, le eccitazioni di Kaluza-Klein del campo di Higgs hanno termine di massa con segno opposto, in quanto pur non conoscendo i valori esatti ci aspettiamo comunque $m_n^2 > \mu^2$; di conseguenza, il valore di aspettazione nel vuoto è zero e quindi non c'è rottura spontanea di simmetria. Le masse che si ottengono per i campi reali sono:

$$m^2(h) = 2\mu^2 \equiv m_h^2 \quad m^2(\phi_0^{(n)}) = m_h^2 + m_n^2 \quad (2.47a)$$

$$m^2(\phi_1^{(0)}) = m^2(\phi_2^{(0)}) = m^2(\phi_3^{(0)}) = 0 \quad m^2(\phi_1^{(n)}) = m^2(\phi_2^{(n)}) = m^2(\phi_3^{(n)}) = m_n^2 \quad (2.47b)$$

Essendo a massa nulla, i campi $\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)}, \phi_3^{(0)}$ possono essere quindi identificati con i bosoni di Goldstone necessari affinché scegliendo il gauge unitario i campi W^\pm, Z acquistino massa. Applicando pertanto il meccanismo di Higgs, troviamo per le masse dei bosoni vettori che quella del modo zero è uguale a quella del MS, mentre le loro eccitazioni di Kaluza-Klein hanno massa aumentata di un termine n/R ; poiché quindi alla matrice di massa del MS si aggiunge una matrice diagonale, l'angolo di mixing elettrodebole è lo stesso per tutti i modi di Kaluza-Klein ed è uguale all'angolo di Weinberg. Possiamo quindi implementare il mixing in modo analogo al MS

$$W_M^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_M^1 \pm W_M^2) \quad (2.48a)$$

$$Z_M = \cos \theta_W W_M^3 - \sin \theta_W B_M \quad (2.48b)$$

$$A_M = \sin \theta_W W_M^3 + \cos \theta_W B_M \quad (2.48c)$$

e identificare con i loro modi zero le analoghe particelle del MS.

Abbiamo quindi ritrovato tutte le particelle del MS (i fermioni, i bosoni di gauge e il bosone di Higgs) e la corretta forma per le loro interazione. Abbiamo però ottenuto molti altri stati non presenti nel MS: le eccitazioni di Kaluza-Klein di tutte le particelle del MS, le quinte componenti dei bosoni vettori $W_5^{\pm(n)}$, $A_5^{(n)}$, $Z_5^{(n)}$, le eccitazioni dei bosoni di Goldstone $\phi^{\pm(n)} = (\phi^{1(n)} \pm \phi^{2(n)}) / \sqrt{2}$, $\phi^{3(n)}$. Queste ultime sono mescolate tra loro:

$$G^{0(n)} = \frac{m_n Z_5^{(n)} + im_Z \phi^{3(n)}}{\sqrt{m_Z^2 + m_n^2}} \quad G^{\pm(n)} = \frac{m_n W_5^{\pm(n)} + im_W \phi^{\pm(n)}}{\sqrt{m_W^2 + m_n^2}} \quad (2.49a)$$

$$a^{0(n)} = \frac{im_Z Z_5^{(n)} + m_n \phi^{3(n)}}{\sqrt{m_Z^2 + m_n^2}} \quad a^{\pm(n)} = \frac{im_W W_5^{\pm(n)} + m_n \phi^{\pm(n)}}{\sqrt{m_W^2 + m_n^2}} \quad (2.49b)$$

Gli stati $A_5^{(n)}$, $G^{0(n)}$, $G^{\pm(n)}$ si comportano come bosoni di Goldstone dando massa rispettivamente a $A_\mu^{(n)}$, $Z_\mu^{(n)}$, $W_\mu^{\pm(n)}$; invece, $a^{0(n)}$ e $a^{\pm(n)}$ sono eccitazioni di Kaluza-Klein per particelle stabili non presenti nel MS (e quindi possibili candidati di materia oscura).

Per quanto riguarda le masse dei fermioni, esse sono generate sia dall'accoppiamento di Yukawa con $H^{(0)}$, sia integrando sulla quinta dimensione le eccitazioni di Kaluza-Klein. Nel settore dei quark, i termini rilevanti nella Lagrangiana di Yukawa sono

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= -Y_u \bar{\mathcal{L}}_q^{(0)} H^{(0)} \mathcal{R}_u^{(0)} - Y_u \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{L}}_q^{(n)} H^{(0)} \mathcal{R}_u^{(n)} - \\ &\quad - Y_d \bar{\mathcal{L}}_q^{(0)} H^{(0)} \mathcal{R}_d^{(0)} - Y_d \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{L}}_q^{(n)} H^{(0)} \mathcal{R}_d^{(n)} + \text{h.c.} + \dots \\ &= -\frac{Y_u v}{\sqrt{2}} \bar{\mathcal{L}}_q^{(0)} \mathcal{R}_u^{(0)} - \frac{Y_u v}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{L}}_q^{(n)} \mathcal{R}_u^{(n)} - \frac{Y_d v}{\sqrt{2}} \bar{\mathcal{L}}_q^{(0)} \mathcal{R}_d^{(0)} - \frac{Y_d v}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{L}}_q^{(n)} \mathcal{R}_d^{(n)} + \text{h.c.} + \dots \end{aligned} \quad (2.50)$$

con

$$Y_u = \frac{\tilde{Y}_u}{\sqrt{2\pi R}} \quad Y_d = \frac{\tilde{Y}_d}{\sqrt{2\pi R}} \quad (2.51)$$

Poiché identifichiamo i modi zero dei fermioni con i quark, per costruzione Y_u, Y_d sono le stesse del MS. Come nel MS, possiamo diagonalizzare le matrici di massa di Yukawa mediante una trasformazione biunitaria

$$M_u = -\frac{v}{\sqrt{2}} S_u^\dagger Y_u T_u \quad M_d = -\frac{v}{\sqrt{2}} S_d^\dagger Y_d T_d \quad (2.52)$$

e quindi introdurre la matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

$$V_{CKM} = S_u^\dagger T_d \quad (2.53)$$

che è la stessa per tutti i modi di Kaluza-Klein ed è la stessa del MS: il Modello ACD non modifica la matrice CKM nè le masse dei fermioni. Applicando ad ogni flavour $f = u, c, t, d, s, b$ la trasformazione unitaria

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}'_{f(n)} \\ \mathcal{L}'_{f(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_5 \cos \alpha_{f(n)} & \sin \alpha_{f(n)} \\ \gamma_5 \sin \alpha_{f(n)} & \cos \alpha_{f(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}''_{f(n)} \\ \mathcal{L}''_{f(n)} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

con angoli di mixing

$$\tan(2\alpha_{f(n)}) = \frac{m_f}{n/R} \quad (2.55)$$

si ottengono gli autostati di massa dei modi eccitati di Kaluza-Klein, che hanno masse

$$m_{f(n)} = \sqrt{m_f^2 + m_n^2} \quad (2.56)$$

L'estensione a cinque dimensioni della QCD si effettua in modo analogo, ma non la esplicitiamo in questo contesto.

2.3.2 Regole di Feynman del Modello ACD

Parametri

Dalla Lagrangiana elettrodebole del Modello ACD con una singola UED

$$\mathcal{L}^{5D} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y \quad (2.57)$$

esplicitata nel paragrafo precedente, integrando sulla quinta dimensione (*riduzione dimensionale*) si ottiene la teoria effettiva quadridimensionale che ha il MS come limite a basse energie.

Abbiamo visto come il procedimento di riduzione dimensionale implica che alcuni dei parametri che compaiono nella teoria effettiva siano riscaldati rispetto a quelli della teoria fondamentale in funzione del raggio di compattificazione della quinta dimensione:

$$g = \frac{\tilde{g}}{\sqrt{2\pi R}} \quad g' = \frac{\tilde{g}'}{\sqrt{2\pi R}} \quad \lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2\pi R}} \quad Y_{u/d} = \frac{\tilde{Y}_{u/d}}{\sqrt{2\pi R}} \quad (2.58)$$

Poiché per il momento non possiamo vedere direttamente eventuali eccitazioni di Kaluza-Klein in quanto troppo massive, nei diagrammi che consideriamo i campi in entrata e in uscita sono di modo zero; la conservazione della parità KK impone quindi che nei processi a un loop gli altri due campi abbiano la stessa eccitazione; di conseguenza, possiamo evitare di esplicitare questo numero. Le regole di Feynman per i modi zero dei fermioni (che sono naturalmente le stesse del MS) sono diverse da quelle per i loro modi eccitati. Utilizziamo quindi la seguente notazione per i fermioni:

- u, d, e, ν per i modi zero, ovvero per gli stati del MS;
- $\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_d, \mathcal{R}_u, \mathcal{R}_d, \mathcal{L}_e, \mathcal{R}_e, \mathcal{L}_\nu$ per le loro eccitazioni ($n \geq 1$);

- gli indici $i = u, c, t$ e $j = d, s, b$ per le generazioni di quark, $i, j = e, \mu, \tau$ per le generazioni di leptoni.

Posto $m_n = \frac{n}{R}$, le masse delle particelle sono

$$\begin{aligned}
 m_{f(n)}^2 &= m_f^2 + m_n^2 & m_{H(n)}^2 &= 2\mu^2 + m_n^2 \\
 m_{A(n)}^2 &= m_n^2 & m_{W(n)}^2 &= m_W^2 + m_n^2 & m_{Z(n)}^2 &= m_Z^2 + m_n^2
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Inoltre, posto $s_{i(n)} = \sin \alpha_{i(n)}$ e $c_{i(n)} = \cos \alpha_{i(n)}$, definiamo i parametri di massa che intervengono nell'accoppiamento fermione-Higgs:

$$\begin{aligned}
 m_1^{(i)} &= m_i s_{i(n)} + m_n c_{i(n)} & M_1^{(i,j)} &= m_j c_{i(n)} \\
 m_2^{(i)} &= m_i c_{i(n)} - m_n s_{i(n)} & M_1^{(i,j)} &= m_j s_{i(n)} \\
 m_3^{(i)} &= m_i \frac{m_n}{m_W} s_{i(n)} - m_W c_{i(n)} & M_1^{(i,j)} &= m_j \frac{m_n}{m_W} c_{i(n)} \\
 m_4^{(i)} &= m_i \frac{m_n}{m_W} c_{i(n)} + m_W s_{i(n)} & M_1^{(i,j)} &= m_j \frac{m_n}{m_W} s_{i(n)}
 \end{aligned}$$

dove m_i e m_j sono le masse dei modi zero dei quark rispettivamente di tipo up e di tipo down.

Propagatori

- Campi scalari

$$S \bullet \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \bullet S = \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}$$

S	$ $	$H(n)$	$A_{5(n)}$	$G_{(n)}^0$	$G_{(n)}^\pm$	$a_{(n)}^0$	$a_{(n)}^\pm$
M	$ $	$m_{H(n)}$	$\sqrt{\xi} m_{A(n)}$	$\sqrt{\xi} m_{Z(n)}$	$\sqrt{\xi} m_{W(n)}$	$m_{Z(n)}$	$m_{W(n)}$

- Campi spinoriali

$$F \bullet \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \bullet \bar{F} = \frac{i(\not{k} + M)}{k^2 - M^2 + i\epsilon}$$

F	$ $	e	ν	u	d	$\mathcal{L}_{e(n)}$	$\mathcal{R}_{e(n)}$	$\mathcal{L}_{\nu(n)}$	$\mathcal{L}_{u(n)}$	$\mathcal{L}_{d(n)}$	$\mathcal{R}_{u(n)}$	$\mathcal{R}_{d(n)}$
M	$ $	m_e	0	m_u	m_d	$m_{e(n)}$	$m_{e(n)}$	$m_{\nu(n)}$	$m_{u(n)}$	$m_{d(n)}$	$m_{u(n)}$	$m_{d(n)}$

- Campi vettoriali

$$V_\mu \bullet \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \bullet V_\nu = -\frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi M^2 + i\epsilon} \right]$$

V	$ $	$A(n)$	$W_{(n)}^\pm$	$Z(n)$
M	$ $	$m_{A(n)}$	$m_{W(n)}$	$m_{Z(n)}$

Vertici

$$\bullet \quad \begin{array}{c} W_\nu^\pm \\ \text{wavy line} \\ \text{---} \bullet \text{---} S^\mp \\ \text{wavy line} \\ Z_{(0)\mu} \end{array} = \frac{g}{c_W m_{W(n)}} g_{\mu\nu} C$$

$$ZW^+G^- : C = -s_W^2 m_W^2 + c_W^2 m_n^2$$

$$ZW^-G^+ : C = s_W^2 m_W^2 - c_W^2 m_n^2$$

$$ZW^+a^- : C = -m_W m_n$$

$$ZW^-a^+ : C = m_W m_n$$

$$\bullet \quad \begin{array}{c} S_1^\pm, k_1 \\ \text{dashed line} \\ \text{---} \bullet \text{---} S_2^\mp, k_2 \\ \text{dashed line} \\ \text{wavy line} \\ Z_{(0)\mu} \end{array} = \frac{ig}{2c_W m_{W(n)}^2} (k_2 - k_1)_\mu C$$

$$ZG^+G^- : C = -(c_W^2 - s_W^2) - 2c_W^2 m_n^2$$

$$Za^+a^- : C = -2c_W m_W^2 - (c_W^2 - s_W^2) m_n^2$$

$$ZG^+a^- : C = m_W m_n$$

$$ZG^-a^+ : C = -m_W m_n$$

$$\bullet \quad \begin{array}{c} W_\nu^+, k_2 \\ \text{wavy line} \\ \text{---} \bullet \text{---} W_\lambda^-, k_3 \\ \text{wavy line} \\ \text{wavy line} \\ Z_{(0)\mu}, k_1 \end{array} = igc_W [g_{\nu\mu} (k_2 - k_1)_\lambda + g_{\mu\lambda} (k_1 - k_3)_\nu + g_{\lambda\nu} (k_3 - k_2)_\mu]$$

$$\bullet \quad \begin{array}{c} F_2 \quad \swarrow \quad \searrow \quad \bar{F}_1 \\ \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \text{wavy line} \\ \quad \quad Z_{(0)\mu} \end{array} = \frac{ig}{6c_W} \gamma_\mu (P_L C_L + P_R C_R)$$

$$Z \bar{u}^i u^i : \begin{cases} C_L = 3 - 4s_W^2 \\ C_R = -4s_W^2 \end{cases}$$

$$Z \bar{d}^j d^j : \begin{cases} C_L = -3 + 4s_W^2 \\ C_R = 2s_W^2 \end{cases}$$

$$Z \bar{\nu}^i \nu^i : \begin{cases} C_L = 3 \\ C_R = 0 \end{cases}$$

$$Z \bar{e}^j e^j : \begin{cases} C_L = -3 + 6s_W^2 \\ C_R = 6s_W^2 \end{cases}$$

$$Z \bar{\mathcal{L}}_u^i \mathcal{L}_u^i : \begin{cases} C_L = -4s_W^2 + 3c_{i(n)}^2 \\ C_R = -4s_W^2 + 3c_{i(n)}^2 \end{cases}$$

$$Z \bar{\mathcal{R}}_u^i \mathcal{R}_u^i : \begin{cases} C_L = -4s_W^2 + 3s_{i(n)}^2 \\ C_R = -4s_W^2 + 3s_{i(n)}^2 \end{cases}$$

$$Z \bar{\mathcal{L}}_u^i \mathcal{R}_u^i : \begin{cases} C_L = -3s_{i(n)} c_{i(n)} \\ C_R = 3s_{i(n)} c_{i(n)} \end{cases}$$

$$Z \bar{\mathcal{R}}_u^i \mathcal{L}_u^i : \begin{cases} C_L = -3s_{i(n)} c_{i(n)} \\ C_R = 3s_{i(n)} c_{i(n)} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{array}{c} F_2 \quad \swarrow \quad \searrow \quad \bar{F}_1 \\ \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \text{wavy line} \\ \quad \quad W_\mu^\pm \end{array} = \frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma_\mu P_L C_L$$

$$W^+ \bar{u}^i d^j : C_L = V_{ij}$$

$$W^- \bar{d}^j u^i : C_L = V_{ij}^*$$

$$W^+ \bar{\mathcal{L}}_u^i d^j : C_L = c_{i(n)} V_{ij}$$

$$W^- \bar{d}^j \mathcal{L}_u^i : C_L = c_{i(n)} V_{ij}^*$$

$$W^+ \bar{\mathcal{R}}_u^i d^j : C_L = -s_{i(n)} V_{ij}$$

$$W^- \bar{d}^j \mathcal{R}_u^i : C_L = -s_{i(n)} V_{ij}^*$$

$$W^+ \bar{\nu}^i e^j : C_L = \delta_{ij}$$

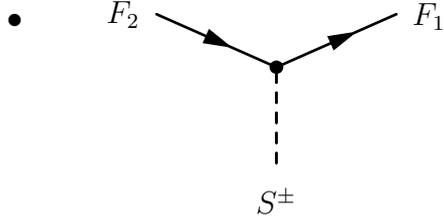
$$W^- \bar{e}^j \nu^i : C_L = \delta_{ij}$$

$$W^+ \bar{\nu}^i \mathcal{L}_e^j : C_L = \delta_{ij}$$

$$W^- \bar{\mathcal{L}}_e^j \nu^i : C_L = \delta_{ij}$$

$$W^+ \bar{\nu}^i \mathcal{R}_e^j : C_L = \delta_{ij}$$

$$W^- \bar{\mathcal{R}}_e^j \nu^i : C_L = \delta_{ij}$$



$$= \frac{g}{\sqrt{2}m_{W(n)}} (P_L C_L + P_R C_R)$$

$$G^+ \bar{u}^i d^j : \begin{cases} C_L = -m_i V_{ij} \\ C_R = m_j V_{ij} \end{cases}$$

$$G^- \bar{d}^j u^i : \begin{cases} C_L = -m_j V_{ij}^* \\ C_R = m_i V_{ij}^* \end{cases}$$

$$G^+ \bar{\mathcal{L}}_u^i d^j : \begin{cases} C_L = -m_1^{(i)} V_{ij} \\ C_R = M_1^{(i,j)} V_{ij} \end{cases}$$

$$G^- \bar{d}^j \mathcal{L}_u^i : \begin{cases} C_L = -M_1^{(i,j)} V_{ij}^* \\ C_R = m_1^{(i)} V_{ij}^* \end{cases}$$

$$G^+ \bar{\mathcal{R}}_u^i d^j : \begin{cases} C_L = m_2^{(i)} V_{ij} \\ C_R = -M_2^{(i,j)} V_{ij} \end{cases}$$

$$G^- \bar{d}^j \mathcal{R}_u^i : \begin{cases} C_L = M_2^{(i,j)} V_{ij}^* \\ C_R = -m_2^{(i)} V_{ij}^* \end{cases}$$

$$G^+ \bar{\nu}^i e^j : \begin{cases} C_L = 0 \\ C_R = m_j \delta_{ij} \end{cases}$$

$$G^- \bar{e}^j \nu^i : \begin{cases} C_L = -m_j \delta_{ij} \\ C_R = 0 \end{cases}$$

$$G^+ \bar{\nu}^i \bar{\mathcal{L}}_e^j : \begin{cases} C_L = 0 \\ C_R = m_1^{(j)} \delta_{ij} \end{cases}$$

$$G^- \bar{\mathcal{L}}_e^j \nu^i : \begin{cases} C_L = -m_1^{(j)} \delta_{ij} \\ C_R = 0 \end{cases}$$

$$G^+ \bar{\nu}^i \bar{\mathcal{R}}_e^j : \begin{cases} C_L = 0 \\ C_R = -m_2^{(j)} \delta_{ij} \end{cases}$$

$$G^- \bar{\mathcal{R}}_e^j \nu^i : \begin{cases} C_L = m_2^{(j)} \delta_{ij} \\ C_R = 0 \end{cases}$$

$$a^+ \bar{\mathcal{L}}_u^i d^j : \begin{cases} C_L = -m_3^{(i)} V_{ij} \\ C_R = M_3^{(i,j)} V_{ij} \end{cases}$$

$$a^- \bar{d}^j \mathcal{L}_u^i : \begin{cases} C_L = -M_3^{(i,j)} V_{ij}^* \\ C_R = m_3^{(i)} V_{ij}^* \end{cases}$$

$$a^+ \bar{\mathcal{R}}_u^i d^j : \begin{cases} C_L = m_4^{(i)} V_{ij} \\ C_R = -M_4^{(i,j)} V_{ij} \end{cases}$$

$$a^- \bar{d}^j \mathcal{R}_u^i : \begin{cases} C_L = M_4^{(i,j)} V_{ij}^* \\ C_R = -m_4^{(i)} V_{ij}^* \end{cases}$$

$$a^+ \bar{\nu}^i \bar{\mathcal{L}}_e^j : \begin{cases} C_L = 0 \\ C_R = m_3^{(j)} \delta_{ij} \end{cases}$$

$$a^- \bar{\mathcal{L}}_e^j \nu^i : \begin{cases} C_L = -m_3^{(j)} \delta_{ij} \\ C_R = 0 \end{cases}$$

$$a^+ \bar{\nu}^i \bar{\mathcal{R}}_e^j : \begin{cases} C_L = 0 \\ C_R = -m_4^{(j)} \delta_{ij} \end{cases}$$

$$a^- \bar{\mathcal{R}}_e^j \nu^i : \begin{cases} C_L = m_4^{(j)} \delta_{ij} \\ C_R = 0 \end{cases}$$

Capitolo 3

Oscillazioni del B_s nel MS e nel Modello ACD

3.1 Fenomenologia del B_s

3.1.1 Dati anagrafici

Con *mesone* B_s si indicano due particelle neutre previste dal modello a quark, una antiparticella dell'altra; il loro contenuto in quark è

$$B_s^0 \rightarrow s\bar{b} \quad \bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{s}b \quad (3.1)$$

e i numeri quantici previsti sono

$$I(J^P) = 0(0^-) \quad (3.2)$$

Il B_s è stato osservato per la prima volta nel 1993 dall'esperimento ALEPH presso il collider LEP, prodotto dal decadimento della Z (Fig. 3.1) [31]. Attualmente le misure danno [12]

Massa	5.3663 ± 0.0006 GeV
Vita media	$(1.476_{-0.026}^{+0.024}) \times 10^{-12}$ s

3.1.2 Equazione di evoluzione: mixing $B_s^0 - \bar{B}_s^0$

Per il B_s , come per i mesoni neutri dello stesso tipo come K^0 , D^0 e B^0 , è possibile la transizione con $|\Delta B| = 2$ nella sua antiparticella:

$$B_s^0 \leftrightarrow \bar{B}_s^0 \quad (3.3)$$

Analizzeremo in seguito i dettagli dell'interazione che genera questa transizione; ora vogliamo scrivere e risolvere l'equazione che ne governa l'evoluzione.

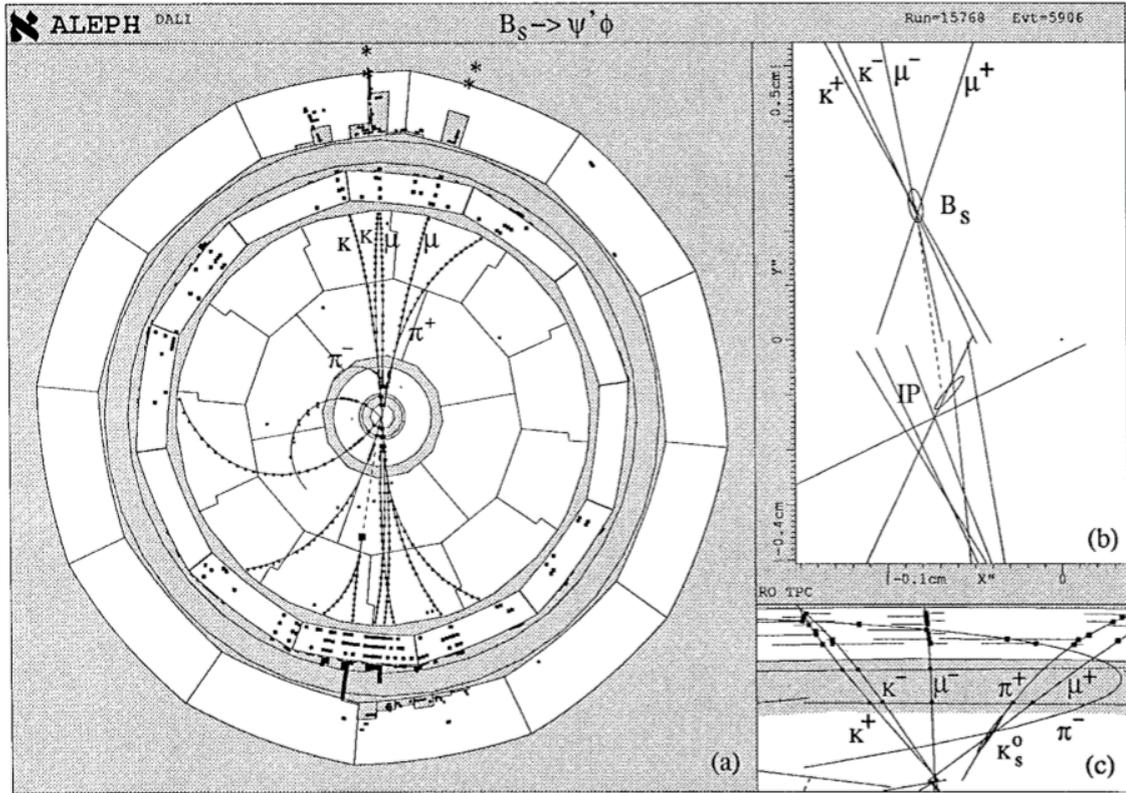


Figura 3.1: Visione “ad occhio di pesce” dell’evento $B_s \rightarrow \psi' \phi$ e due suoi dettagli, uno dei canali che hanno permesso alla Collaborazione ALEPH di osservare il mesone B_s .

È facile vedere che l’equazione di Schroedinger non può funzionare con questo sistema, in quanto essa è ottenuta per corrispondenza dalla meccanica non relativistica, in cui non è presente l’energia di massa e quindi una particella non può decadere. Infatti, risolvendo formalmente l’equazione di Schrodinger

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (3.4)$$

troviamo soluzioni del tipo

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iEt} |\psi_0\rangle \quad (3.5)$$

se ψ_0 è autostato dell’energia; quindi la probabilità di trovare il sistema nello stato iniziale è pari a 1. Questo è dovuto al fatto che l’Hamiltoniana è hermitiana. Se però vogliamo costruire una teoria efficace e modifichiamo “a mano” l’Hamiltoniana aggiungendo un termine immaginario $-i\Gamma$, l’equazione diventa

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H - i\Gamma) |\psi(t)\rangle \quad (3.6)$$

che ha soluzioni

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iEt} e^{-\Gamma t} |\psi_0\rangle \quad (3.7)$$

e quindi descrive il decadimento esponenziale del sistema, in quanto

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = e^{-2\Gamma t} \quad (3.8)$$

Utilizziamo quindi questo tipo di equazione. Nel prossimo paragrafo mostreremo che questi non sono solo argomenti di plausibilità ma derivano da un approccio matematicamente rigoroso al problema.

Il fatto che il B_s e il \bar{B}_s possano evolvere l'uno nell'altro ci suggerisce di trattarli come un sistema a due stati:

$$|B_s\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\bar{B}_s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

per cui un generico stato di B_s sarà del tipo

$$|\psi(t)\rangle = a(t) |B_s\rangle + b(t) |\bar{B}_s\rangle \quad (3.10)$$

Per quanto visto, l'Hamiltoniana efficace sarà la matrice 2×2

$$\mathbf{H} = \mathbf{M} - \frac{i}{2}\mathbf{\Gamma} \quad (3.11)$$

con $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\dagger$ e $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^\dagger$. Inoltre, l'invarianza CPT garantisce che una particella e la sua antiparticella debbano avere la stessa massa e larghezza di decadimento, e questo implica $M_{11} = M_{22} \equiv M_1$ e $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} \equiv \Gamma_1$. L'equazione è pertanto

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1 & M_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2 \\ M_2^* - \frac{i}{2}\Gamma_2^* & M_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

con M_1 e Γ_1 reali. Poiché \mathbf{H} non è hermitiana, perdono validità alcuni teoremi che valgono per l'equazione di Schroedinger, ad esempio gli autostati dell'Hamiltoniana non saranno necessariamente ortogonali, o l'hamiltoniana non si potrà diagonalizzare necessariamente con una trasformazione unitaria; dovremo prestare quindi particolare attenzione nel risolvere l'equazione per evitare di applicare proprietà non valide.

Per semplicità di notazione, chiamiamo

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} M_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1 & M_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2 \\ M_2^* - \frac{i}{2}\Gamma_2^* & M_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

I suoi autostati e autovalori sono

$$|B_s^L\rangle = p |B_s\rangle + q |\bar{B}_s\rangle \quad \text{con autovalore } \mu_L = \alpha + \sqrt{\beta\gamma} \quad (3.14a)$$

$$|B_s^H\rangle = p |B_s\rangle - q |\bar{B}_s\rangle \quad \text{con autovalore } \mu_H = \alpha - \sqrt{\beta\gamma} \quad (3.14b)$$

con

$$p = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{|\beta| + |\gamma|}} \quad q = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{|\beta| + |\gamma|}} \quad \text{tali che } |p|^2 + |q|^2 = 1 \quad (3.15)$$

Notiamo che gli autostati sono normalizzati ma *non* sono ortogonali. Ora, posto

$$\mathbf{V} = \left(|B_s^L\rangle^T \quad |B_s^H\rangle^T \right) = \frac{1}{\sqrt{|\beta| + |\gamma|}} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \\ \sqrt{\gamma} & -\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

(notiamo che \mathbf{V} *non* è unitaria) possiamo diagonalizzare l'Hamiltoniana efficace mediante la trasformazione

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mu_L & 0 \\ 0 & \mu_H \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Possiamo quindi diagonalizzare la nostra equazione, sfruttando il fatto che \mathbf{V} non dipende dal tempo:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} &= \mathbf{H} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} &= \mathbf{V} [\mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{V}] \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow i \frac{d}{dt} \left[\mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \right] &= [\mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{V}] \left[\mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

e se cambiamo base secondo

$$\begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

otteniamo l'equazione diagonale

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_L & 0 \\ 0 & \mu_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Essa ha soluzione

$$\begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\mu_L t} c(0) \\ e^{-i\mu_H t} d(0) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Possiamo ora tornare nella base iniziale:

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|\beta| + |\gamma|}} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} [e^{-i\mu_L t} c(0) + e^{-i\mu_H t} d(0)] \\ \sqrt{\gamma} [e^{-i\mu_L t} c(0) - e^{-i\mu_H t} d(0)] \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

e quindi la soluzione finale è

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{|\beta| + |\gamma|}} [e^{-i\mu_L t} c(0) + e^{-i\mu_H t} d(0)] |B_s\rangle + \\ &+ \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{|\beta| + |\gamma|}} [e^{-i\mu_L t} c(0) - e^{-i\mu_H t} d(0)] |\bar{B}_s\rangle \\ &= e^{-i\mu_L t} c(0) |\bar{B}_s^L\rangle + e^{-i\mu_H t} d(0) |\bar{B}_s^H\rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sottolineamo che, poiché μ_L e μ_H sono quantità complesse, il termine esponenziale comprende sia una parte di oscillazione che una parte di decadimento:

$$\mu_{L,H} = \left(M_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1 \right) \pm \sqrt{\left(M_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2 \right) \left(M_2^* - \frac{i}{2}\Gamma_2^* \right)} \quad (3.24)$$

Esplicitiamo quindi formalmente le parti reali e complesse

$$\mu_{L,H} = m_{L,H} - \frac{i}{2}\Gamma_{L,H} \quad (3.25)$$

e introduciamo le quantità

$$\begin{aligned} \Delta\mu = \mu_H - \mu_L &= \Delta m + \frac{i}{2}\Delta\Gamma & \Delta m &= m_H - m_L & \Delta\Gamma &= \Gamma_L - \Gamma_H \\ m &= \frac{m_H + m_L}{2} & \Gamma &= \frac{\Gamma_H + \Gamma_L}{2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

È chiaro anche che, mentre $|B_s\rangle$ e $|\bar{B}_s^H\rangle$ sono autostati di flavour, $|B_s^L\rangle$ e $|\bar{B}_s^H\rangle$ sono autostati di massa (\mathbf{M}) e larghezza ($\mathbf{\Gamma}$):

$$|B_s^{L,R}(t)\rangle = e^{-im_{L,H}t} e^{-\frac{\Gamma_{L,R}t}{2}} |B_s^{L,R}\rangle \quad (3.27)$$

Esplicitiamo anche

$$\frac{p}{q} = \sqrt{\frac{M_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2}{M_2^* - \frac{i}{2}\Gamma_2^*}} = -\frac{\Delta m + \frac{i}{2}\Delta\Gamma}{2M_2 - i\Gamma_2} = -\frac{2M_2^* - i\Gamma_2^*}{\Delta m + \frac{i}{2}\Delta\Gamma} \quad (3.28)$$

Consideriamo ora i due stati iniziali interessanti dal punto di vista sperimentale: chiamiamo $|B_s^{phys}(t)\rangle$ lo stato che inizialmente è puro $|B_s\rangle$ ($|B_s^{phys}(0)\rangle = |B_s\rangle$), e analogamente $|\bar{B}_s^{phys}(t)\rangle$ lo stato che inizialmente è puro $|\bar{B}_s\rangle$ ($|\bar{B}_s^{phys}(0)\rangle = |\bar{B}_s\rangle$). Per questi l'evoluzione temporale è data da

$$|B_s^{phys}(t)\rangle = g_+(t) |B_s\rangle + \frac{q}{p} g_-(t) |\bar{B}_s\rangle \quad (3.29a)$$

$$|\bar{B}_s^{phys}(t)\rangle = \frac{p}{q} g_+(t) |B_s\rangle + g_-(t) |\bar{B}_s\rangle \quad (3.29b)$$

dove

$$\begin{aligned} g_+(t) &= \frac{1}{2} \left[e^{-im_L t} e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t} + e^{-im_H t} e^{-\frac{\Gamma_H}{2}t} \right] \\ &= e^{-imt} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[\cosh \frac{\Delta\Gamma}{4} t \cos \frac{\Delta m}{4} t - i \sinh \frac{\Delta\Gamma}{4} t \sin \frac{\Delta m}{4} t \right] \end{aligned} \quad (3.30a)$$

$$\begin{aligned} g_-(t) &= \frac{1}{2} \left[e^{-im_L t} e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t} - e^{-im_H t} e^{-\frac{\Gamma_H}{2}t} \right] \\ &= e^{-imt} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[\cosh \frac{\Delta\Gamma}{4} t \cos \frac{\Delta m}{4} t + i \sinh \frac{\Delta\Gamma}{4} t \sin \frac{\Delta m}{4} t \right] \end{aligned} \quad (3.30b)$$

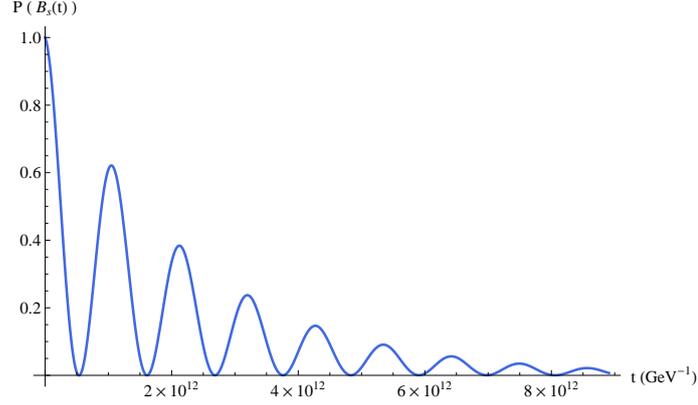


Figura 3.2: Andamento nel tempo della probabilità $P(B_s(t)) = |\langle B_s(t) | B_s(t) \rangle|^2$ di trovare un B_s in un campione che a $t = 0$ è costituito da soli B_s .

Quello che avviene è evidente: lasciando evolvere nel tempo uno stato iniziale di puro B_s (\bar{B}_s), esso autointeragisce ed effettua transizioni in \bar{B}_s (B_s) in modo oscillatorio, e contemporaneamente B_s e \bar{B}_s , ora mescolati, decadono esponenzialmente (Fig. 3.2). Osserviamo però che ancora non conosciamo i parametri fondamentali di questo comportamento $m_{L,H}$ e $\Gamma_{L,H}$, in quanto è difficile esplicitare analiticamente la loro dipendenza dai parametri dell'Hamiltoniana efficace $M_{1,2}$ e $\Gamma_{1,2}$.

Quanto detto finora si applica a tutti i sistemi di mesoni neutri citati: $K^0 - \bar{K}^0$, $D^0 - \bar{D}^0$, $B^0 - \bar{B}^0$, $B_s^0 - \bar{B}_s^0$. Solo per i sistemi $B^0 - \bar{B}^0$ e $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ possiamo però applicare una proprietà che ci permette di effettuare delle utili approssimazioni. Infatti, si vede empiricamente che per questi sistemi si ha

$$|\Gamma_2| \ll |M_2| \quad (3.31)$$

Come vedremo, questo è dovuto alla gerarchia tra gli elementi della matrice CKM. Questo ci permette di sviluppare in serie di $|\Gamma_2|$

$$\begin{aligned} \mu_{L,H} &= \left(M_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1 \right) \pm \sqrt{\left(M_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2 \right) \left(M_2^* - \frac{i}{2}\Gamma_2^* \right)} \simeq \\ &\simeq \left[M_1 \pm \left(|M_2| - \frac{|\Gamma_2|^2}{8|M_2|^2} \right) \right] - \frac{i}{2} \left[\Gamma_1 \pm \frac{\text{Re}(M_2\Gamma_2^*)}{|M_2|} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

e quindi di esplicitare

$$m_{L,H} \simeq \left[M_1 \pm \left(|M_2| - \frac{|\Gamma_2|^2}{8|M_2|^2} \right) \right] \quad \Gamma_{L,H} \simeq [\Gamma_1 \mp |\Gamma_2| \cos \phi] \quad (3.33)$$

dove abbiamo introdotto

$$\phi = \text{Arg} \left(-\frac{M_2}{\Gamma_2} \right) \quad (3.34)$$

che è una quantità che compare in molte osservabili legate all'oscillazione di questi mesoni. Otteniamo quindi

$$m \simeq M_1 \quad \Gamma \simeq \Gamma_1 \quad (3.35a)$$

$$\Delta m = 2 |M_2| \left[1 + \mathcal{O} \left(\left| \frac{M_2}{\Gamma_2} \right|^2 \right) \right] \quad \Delta \Gamma = 2 |\Gamma_2| \cos \phi \left[1 + \mathcal{O} \left(\left| \frac{M_2}{\Gamma_2} \right|^2 \right) \right] \quad (3.35b)$$

Inoltre, introducendo la fase $\phi_M = \text{Arg}(M_2)$, e il parametro piccolo

$$a = \text{Im} \left(\frac{\Gamma_2}{M_2} \right) = \left| \frac{\Gamma_2}{M_2} \right| \sin \phi \quad (3.36)$$

possiamo esplicitare anche

$$\begin{aligned} |p| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{a}{4} \right) + \mathcal{O} \left(\left| \frac{M_2}{\Gamma_2} \right|^2 \right) & |q| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{a}{4} \right) + \mathcal{O} \left(\left| \frac{M_2}{\Gamma_2} \right|^2 \right) \\ \frac{q}{p} &= -e^{-i\phi_M} \left(1 - \frac{a}{2} \right) + \mathcal{O} \left(\left| \frac{M_2}{\Gamma_2} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.1.3 Violazione di CP

Adottiamo la convenzione di fase

$$CP |B_s^0(P^\rho)\rangle = -|\bar{B}_s^0(P_\rho)\rangle \quad (3.38)$$

Possiamo costruire delle combinazioni che siano autostati di CP pari (E) o dispari (O):

$$|B_s^E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|B_s\rangle - |\bar{B}_s\rangle) \quad \text{tale che} \quad CP |B_s^E\rangle = +|B_s^E\rangle \quad (3.39a)$$

$$|B_s^O\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|B_s\rangle + |\bar{B}_s\rangle) \quad \text{tale che} \quad CP |B_s^O\rangle = -|B_s^O\rangle \quad (3.39b)$$

Ora consideriamo uno stato finale f e il suo coniugato per CP \bar{f} con la convenzione di fase

$$CP |f\rangle = +|\bar{f}\rangle \quad (3.40)$$

Vogliamo calcolare le ampiezze di transizione per $B_s^0, \bar{B}_s^0 \rightarrow f, \bar{f}$. Si ha

$$\Gamma(B_s(t) \rightarrow f) = \mathcal{N}_f |\langle f | B_s(t) \rangle|^2 \quad \Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow f) = \mathcal{N}_f |\langle f | \bar{B}_s(t) \rangle|^2 \quad (3.41a)$$

$$\Gamma(B_s(t) \rightarrow \bar{f}) = \mathcal{N}_{\bar{f}} |\langle \bar{f} | B_s(t) \rangle|^2 \quad \Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow \bar{f}) = \mathcal{N}_{\bar{f}} |\langle \bar{f} | \bar{B}_s(t) \rangle|^2 \quad (3.41b)$$

dove $\mathcal{N}_{f,\bar{f}}$ sono i fattori di normalizzazione e spazio delle fasi; poiché essi sono cinematici, si ha $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_{\bar{f}}$ (per $B_s(t), \bar{B}_s(t)$ naturalmente intendiamo per brevità gli stati che in precedenza abbiamo chiamato $B_s^{phys}(t), \bar{B}_s^{phys}(t)$). Introduciamo le quantità

$$\begin{aligned} A_f &= \langle f | B_s \rangle & \bar{A}_f &= \langle f | \bar{B}_s \rangle \\ A_{\bar{f}} &= \langle \bar{f} | B_s \rangle & \bar{A}_{\bar{f}} &= \langle \bar{f} | \bar{B}_s \rangle \\ \lambda_f &= \frac{q \bar{A}_f}{p A_f} \simeq -e^{-i\phi_M} \left(1 - \frac{a}{2} \right) \frac{\bar{A}_f}{A_f} & \lambda_{\bar{f}} &= \frac{p A_{\bar{f}}}{q \bar{A}_{\bar{f}}} \simeq -e^{i\phi_M} \left(1 + \frac{a}{2} \right) \frac{A_{\bar{f}}}{\bar{A}_{\bar{f}}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Sappiamo che la trasformazione di CP è definita a meno di una fase in virtù della possibilità di ridefinire la fase delle particelle. Questo implica che anche le quantità introdotte sopra contengano delle parti ridefinibili e quindi non osservabili. Si può però provare che le quantità

$$\Delta m \quad \Delta\Gamma \quad a \quad \phi \quad \left| \frac{q}{p} \right| \quad \left| \frac{\bar{A}_f}{A_f} \right| \quad \lambda_f \quad (3.43)$$

sono indipendenti dalle scelte di fase [32]; in particolare, è osservabile la fase di λ_f che è l'unica quantità complessa.

Si vede immediatamente che in queste ampiezze le funzioni $g_+(t)$ e $g_-(t)$ entrano solo nelle combinazioni

$$\begin{aligned} |g_{\pm}(t)|^2 &= \frac{1}{4} [e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_H t} \pm 2e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m t)] = \\ &= \frac{e^{-\Gamma t}}{2} \left[\cosh \frac{\Delta\Gamma t}{2} \pm \cos(\Delta m t) \right] \end{aligned} \quad (3.44a)$$

$$\begin{aligned} g_+(t)g_-^*(t) &= \frac{1}{4} [e^{-\Gamma_L t} - e^{-\Gamma_H t} + 2ie^{-\Gamma t} \sin(\Delta m t)] = \\ &= \frac{e^{-\Gamma t}}{2} \left[-\sinh \frac{\Delta\Gamma t}{2} + i \sin(\Delta m t) \right] \end{aligned} \quad (3.44b)$$

Esplicitando, si ottiene

$$\begin{aligned} \Gamma(B_s(t) \rightarrow f) &= \mathcal{N}_f |\langle f | B_s \rangle|^2 \{ |g_+(t)|^2 + |\lambda_f|^2 |g_-(t)|^2 + 2\text{Re} [\lambda_f g_+^*(t) g_-(t)] \} = \\ &= \mathcal{N}_f |A_f|^2 e^{-\Gamma t} \left\{ \frac{1 + |\lambda_f|^2}{2} \cosh \frac{\Delta\Gamma t}{2} + \frac{1 - |\lambda_f|^2}{2} \cos(\Delta m t) \right. \\ &\quad \left. - \text{Re} \lambda_f \sinh \frac{\Delta\Gamma t}{2} - \text{Im} \lambda_f \sin(\Delta m t) \right\} \end{aligned} \quad (3.45a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow f) &= \mathcal{N}_f |\langle f | \bar{B}_s \rangle|^2 \left| \frac{p}{q} \right|^2 \{ |g_-(t)|^2 + |\lambda_f|^2 |g_+(t)|^2 + 2\text{Re} [\lambda_f g_+(t) g_-^*(t)] \} = \\ &= \mathcal{N}_f |A_f|^2 (1 + a) e^{-\Gamma t} \left\{ \frac{1 + |\lambda_f|^2}{2} \cosh \frac{\Delta\Gamma t}{2} - \frac{1 - |\lambda_f|^2}{2} \cos(\Delta m t) \right. \\ &\quad \left. - \text{Re} \lambda_f \sinh \frac{\Delta\Gamma t}{2} + \text{Im} \lambda_f \sin(\Delta m t) \right\} \end{aligned} \quad (3.45b)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(B_s(t) \rightarrow \bar{f}) &= \mathcal{N}_f |\langle \bar{f} | B_s \rangle|^2 \left| \frac{q}{p} \right|^2 \{ |g_-(t)|^2 + |\lambda_{\bar{f}}|^2 |g_+(t)|^2 + 2\text{Re} [\lambda_{\bar{f}} g_+(t) g_-^*(t)] \} = \\ &= \mathcal{N}_f |\bar{A}_{\bar{f}}|^2 (1 - a) e^{-\Gamma t} \left\{ \frac{1 + |\lambda_{\bar{f}}|^{-2}}{2} \cosh \frac{\Delta\Gamma t}{2} - \frac{1 - |\lambda_{\bar{f}}|^{-2}}{2} \cos(\Delta m t) \right. \\ &\quad \left. - \text{Re} \frac{1}{\lambda_{\bar{f}}} \sinh \frac{\Delta\Gamma t}{2} + \text{Im} \frac{1}{\lambda_{\bar{f}}} \sin(\Delta m t) \right\} \end{aligned} \quad (3.45c)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow \bar{f}) &= \mathcal{N}_f |\langle \bar{f} | \bar{B}_s \rangle|^2 \left\{ |g_+(t)|^2 + |\lambda_{\bar{f}}|^2 |g_-(t)|^2 + 2\text{Re} [\lambda_{\bar{f}} g_+^*(t) g_-(t)] \right\} = \\
&= \mathcal{N}_f |\bar{A}_{\bar{f}}|^2 e^{-\Gamma t} \left\{ \frac{1 + |\lambda_{\bar{f}}|^2}{2} \cosh \frac{\Delta\Gamma t}{2} + \frac{1 - |\lambda_{\bar{f}}|^2}{2} \cos(\Delta m t) \right. \\
&\quad \left. - \text{Re} \frac{1}{\lambda_{\bar{f}}} \sinh \frac{\Delta\Gamma t}{2} - \text{Im} \frac{1}{\lambda_{\bar{f}}} \sin(\Delta m t) \right\}
\end{aligned} \tag{3.45d}$$

Mostriamo ora che ci sono tre osservabili indipendenti dalle scelte di fase che caratterizzano la violazione di CP:

$$\left| \frac{q}{p} \right| \quad \left| \frac{\bar{A}_{\bar{f}}}{A_f} \right| \quad \lambda_f = \frac{q \bar{A}_{\bar{f}}}{p A_f} \tag{3.46}$$

- **Violazione di CP nel mixing:** $|q/p| \neq 1$

Se CP fosse conservata, non sarebbero possibili transizioni tra gli autostati di CP $|B_s^E\rangle$ e $|B_s^O\rangle$: il loro decadimento dovrebbe essere puramente esponenziale senza generare mixing tra essi. Noi però conosciamo già gli stati che soddisfano questi requisiti: si tratta degli autostati di massa e larghezza $|B_s^L\rangle$ e $|B_s^H\rangle$. Pertanto, se CP è una simmetria per i sistemi di mesoni neutri, gli autostati di CP devono coincidere con gli autostati di massa. Poiché abbiamo visto

$$|B_s^E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|B_s\rangle - |\bar{B}_s\rangle) \quad |B_s^O\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|B_s\rangle + |\bar{B}_s\rangle) \tag{3.47a}$$

$$|B_s^L\rangle = p |B_s\rangle + q |\bar{B}_s\rangle \quad |B_s^H\rangle = p |B_s\rangle - q |\bar{B}_s\rangle \tag{3.47b}$$

è chiaro che questo è verificato se e solo se

$$\left| \frac{q}{p} \right| = 1 \tag{3.48}$$

in quanto le fasi di $|B_s\rangle$ e $|\bar{B}_s\rangle$ sono ridefinibili. Questa segnatura di violazione di CP è chiamata violazione di CP nel mixing appunto perché dipende da come $|B_s\rangle$ e $|\bar{B}_s\rangle$ sono mescolati per formare gli autostati di massa e di CP.

Poiché abbiamo visto

$$\frac{p}{q} = \sqrt{\frac{M_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2}{M_2^* - \frac{i}{2}\Gamma_2^*}} \tag{3.49}$$

ne deriva che CP è violata se M_2 e Γ_2 hanno tra loro una fase relativa non nulla.

- **Violazione di CP nel decadimento:** $|\bar{A}_{\bar{f}}/A_f| \neq 1$

È evidente che poiché i processi $B_s \rightarrow f$ e $\bar{B}_s \rightarrow \bar{f}$ sono tra loro coniugati per CP, se CP è una simmetria per la Lagrangiana essi devono avere la stessa probabilità, e quindi deve essere

$$\left| \frac{\bar{A}_{\bar{f}}}{A_f} \right| = 1 \tag{3.50}$$

Se si osservasse per tale quantità un valore diverso da 1, si avrebbe una segnatura di violazione di CP, chiamata quindi violazione di CP nel decadimento.

Ora, in un'ampiezza di transizione possono apparire due tipi di fasi non eliminabili. Le prime sono le fasi degli elementi della matrice CKM; esse sono chiamate *fasi deboli* e compaiono in un processo e nel suo coniugato con segno opposto. Le seconde possono comparire anche se la Lagrangiana è reale, dalle parti di assorbimento dell'ampiezza di decadimento; esse sono dominate dall'interazione forte e sono quindi chiamate *fasi forti*; compaiono con lo stesso segno in un processo e nel suo coniugato e quindi conservano CP. Queste considerazioni ci consentono di scrivere

$$A_f = \sum_k A_k e^{i(\delta_k + \phi_k)} \quad \bar{A}_{\bar{f}} = \sum_k A_k e^{i(\delta_k - \phi_k)} \quad (3.51)$$

da cui deduciamo che in un processo per avere violazione di CP nel decadimento è necessario che il processo abbia almeno due contributi e che almeno due di essi differiscano sia nella fase debole che nella fase forte.

- **Violazione di CP nell'interferenza tra mixing e decadimento:** $\lambda_f \neq \pm 1$

Per alcuni stati finali f è possibile sia la transizione $B_s \rightarrow f$ che la transizione $\bar{B}_s \rightarrow f$; per questa ragione e a causa del mixing $B_s - \bar{B}_s$, la transizione $B_s \rightarrow f$ ha due contributi:

$$B_s \rightarrow f \quad \text{e} \quad B_s \rightarrow \bar{B}_s \rightarrow f \quad (3.52)$$

che possono interferire tra loro. Nell'interferenza può comparire una fase che viola CP; questa segnatura è pertanto chiamata violazione di CP nell'interazione tra mixing e decadimento. Essa si realizza nella presenza di una fase relativa non nulla tra q/p e $\bar{A}_{\bar{f}}/A_f$.

Consideriamo ora uno di questi stati finali che sia anche autostato di CP:

$$|\bar{f}_{CP}\rangle = \pm |f_{CP}\rangle \quad (3.53)$$

In questo caso possiamo scrivere

$$\lambda_f = \frac{q}{p} \frac{\bar{A}_{\bar{f}}}{A_f} = \pm \frac{q}{p} \frac{\bar{A}_{\bar{f}}}{A_f} \quad (3.54)$$

Ne deriva che, anche se non ci fosse violazione di CP né nel mixing né nel decadimento, avremmo $|\lambda_f| = 1$ ma, se ci fosse violazione di CP nella loro interferenza, risulterebbe comunque $\lambda_f \neq \pm 1$.

Vogliamo ora costruire delle quantità legate immediatamente ai dati sperimentali che mostrino se c'è o meno qualche tipo di violazione di CP [32]. Introduciamo a questo scopo la *asimmetria dipendente dal tempo* per gli autostati di CP $f = f_{CP}$

$$a_f(t) = \frac{\Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow f) - \Gamma(B_s(t) \rightarrow f)}{\Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow f) + \Gamma(B_s(t) \rightarrow f)} \quad (3.55)$$

ed esplicitiamo come essa contiene i vari tipi di violazione di CP:

$$\begin{aligned} a_f(t) &= -\frac{(1 - |\lambda_f|^2) \cos(\Delta m t) - 2 \operatorname{Im} \lambda_f \sin(\Delta m t)}{(1 + |\lambda_f|^2) \cosh\left(\frac{\Delta \Gamma t}{2}\right) - 2 \operatorname{Re} \lambda_f \sinh\left(\frac{\Delta \Gamma t}{2}\right)} \\ &= -\frac{A_{\text{dir}} \cos(\Delta m t) + A_{\text{mix}} \sin(\Delta m t)}{\cosh\left(\frac{\Delta \Gamma t}{2}\right) + A_{\Delta \Gamma} \sinh\left(\frac{\Delta \Gamma t}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.56)$$

dove

$$A_{\text{dir}} = \frac{1 - |\lambda_f|^2}{1 + |\lambda_f|^2} \quad A_{\text{mix}} = -\frac{2 \operatorname{Im} \lambda_f}{1 + |\lambda_f|^2} \quad (3.57)$$

sono nulle rispettivamente se è nulla la violazione di CP diretta (mixing e decadimento) e se è nulla la violazione di CP nell'interferenza; mentre $A_{\Delta \Gamma}$ vale

$$A_{\Delta \Gamma} = -\frac{2 \operatorname{Re} \lambda_f}{1 + |\lambda_f|^2} \quad (3.58)$$

Un'altra quantità, utile soprattutto se non si dispone di un'adeguata risoluzione temporale, è la *asimmetria integrata*

$$a_f = \frac{\int_0^\infty dt [\Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow f) - \Gamma(B_s(t) \rightarrow f)]}{\int_0^\infty dt [\Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow f) + \Gamma(B_s(t) \rightarrow f)]} \quad (3.59)$$

che vale

$$a_f = \frac{1 + y^2}{1 + x^2} \frac{A_{\text{dir}} + A_{\text{mix}}}{1 + A_{\Delta \Gamma} y} \quad (3.60)$$

dove

$$x = \frac{\Delta m}{\Gamma} \quad y = \frac{\Delta \Gamma}{2\Gamma} \quad (3.61)$$

3.2 Teoria delle oscillazioni del B_s nel MS

3.2.1 Approssimazione di Wigner-Weisskopf

Nei paragrafi precedenti abbiamo sviluppato un modello efficace per descrivere il comportamento del mesone B_s . Ora vogliamo legare i parametri di questo modello ai parametri del MS, in modo da poter fare delle previsioni o determinare dei vincoli.

Il formalismo per trattare il problema di mesoni mescolati e al tempo stesso instabili è stato sviluppato da Weisskopf e Wigner [33]. In esso sono presenti tre approssimazioni:

- sviluppo perturbativo arrestato al second'ordine;
- non interazione tra gli stati finali;
- un'approssimazione di calcolo che consiste nel sostituire ad una funzione solo il contributo dominante del suo polo [34].

Supponiamo che l'Hamiltoniana sia del tipo

$$H = H_0 + H' \quad (3.62)$$

dove H_0 è il contributo dominante e H' è una piccola perturbazione. Supponiamo che lo spettro di H_0 consista di n autostati discreti $|i\rangle$ e di uno spettro continuo di autostati $|x\rangle$:

$$H_0 |i\rangle = E_0 |i\rangle \quad i = 1 \dots n \quad (3.63a)$$

$$H_0 |x\rangle = E_x |x\rangle \quad (3.63b)$$

Uno stato generico può essere quindi espanso in questa base:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) |i\rangle + \sum_x \beta_x(t) |x\rangle \quad (3.64)$$

Esso obbedisce all'equazione di Schroedinger

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (3.65)$$

che è un'equazione per $\alpha_i(t)$ e $\beta_x(t)$. La soluzione di questa equazione richiede passaggi non banali di analisi complessa, quali la trasformazione di Laplace e la teoria dei residui; ci limitiamo qui a dare il risultato. Posto

$$W_{ij} = \langle i | H' | j \rangle + \sum_x \frac{\langle i | H' | x \rangle \langle x | H' | j \rangle}{(E_0 - E_x)_{PV}} - i\pi \sum_x \delta(E_0 - E_x) \langle i | H' | x \rangle \langle x | H' | j \rangle \quad (3.66a)$$

$$\mathcal{M} = E_0 \mathbf{I} + \mathbf{W} \quad (3.66b)$$

troviamo che la soluzione è

$$\alpha(t) = e^{-i\mathcal{M}t} \alpha_0 \quad (3.67a)$$

$$\beta(t) = \dots \quad (3.67b)$$

Non riportiamo $\beta(t)$ perché *non ci interessa*; invece, notiamo che per la sua forma $\alpha(t)$ è soluzione dell'equazione

$$i \frac{d}{dt} \alpha(t) = \mathcal{M} \alpha(t) \quad (3.68)$$

che ha la forma di un'equazione di Schroedinger, ma al posto di una Hamiltoniana (hermitiana) troviamo un operatore *non hermitiano*.

Comincia quindi ad essere chiaro il collegamento di questo modello con il sistema di mesoni neutri. Lo spettro discreto degenere è costituito dai due autostati di flavour, mentre lo spettro continuo da tutti gli stati intermedi e finali in cui essi possono decadere. Se consideriamo sia i mesoni che gli stati finali, essi obbediscono ad un'equazione di Schroedinger ordinaria; se invece ci limitiamo a considerare solo i mesoni, troviamo che questi obbediscono ad un'equazione con la stessa forma di

quella di Schroedinger ma governata da un operatore non hermitiano che noi abbiamo chiamato *Hamiltoniana efficace*. Con un procedimento rigoroso abbiamo quindi mostrato che il comportamento del sistema di mesoni neutri è proprio quello che avevamo ipotizzato con argomenti di plausibilità: essi effettuano transizioni l'uno nell'altro e contemporaneamente decadono esponenzialmente.

Riscriviamo quindi le relazioni precedenti per il sistema $B_s - \bar{B}_s$. H_0 è l'Hamiltoniana di interazione forte; il suo spettro è composto dalla parte discreta

$$H_0 |B_s\rangle = m |B_s\rangle \quad H_0 |\bar{B}_s\rangle = m |\bar{B}_s\rangle \quad (3.69)$$

e da una parte continua; H' è l'Hamiltoniana di interazione debole. I due mesoni evolvono secondo l'equazione

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} B_s \\ \bar{B}_s \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\text{eff}} \begin{pmatrix} B_s \\ \bar{B}_s \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

con

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = m\mathbf{I} + \mathbf{W} \quad (3.71a)$$

$$W_{ij} = \langle i | H' | j \rangle + \sum_x \frac{\langle i | H' | x \rangle \langle x | H' | j \rangle}{(E_0 - E_x)_{PV}} - i\pi \sum_x \delta(E_0 - E_x) \langle i | H' | x \rangle \langle x | H' | j \rangle \quad (3.71b)$$

dove $i, j = B_s, \bar{B}_s$. Come ogni matrice, \mathbf{H}_{eff} può essere scomposta nella sua parte hermitiana $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\dagger$ e nella sua parte non hermitiana $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^\dagger$:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_{\text{eff}} + \mathbf{H}_{\text{eff}}^\dagger) \quad \mathbf{\Gamma} = i (\mathbf{H}_{\text{eff}} - \mathbf{H}_{\text{eff}}^\dagger) \quad (3.72)$$

in modo che

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{M} - \frac{i}{2} \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} M_1 - \frac{i}{2} \Gamma_1 & M_2 - \frac{i}{2} \Gamma_2 \\ M_2^* - \frac{i}{2} \Gamma_2^* & M_1 - \frac{i}{2} \Gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

in cui abbiamo implementato anche l'invarianza CPT come spiegato in precedenza. Abbiamo quindi ottenuto rigorosamente l'equazione di evoluzione per il sistema di mesoni neutri utilizzata in precedenza.

3.2.2 Calcolo dell'Hamiltoniana efficace

Dal calcolo del paragrafo precedente segue che i parametri dell'Hamiltoniana efficace valgono

$$M_1 = m + \langle B_s | H' | B_s \rangle + \sum_x \frac{|\langle B_s | H' | x \rangle|^2}{(m - E_x)_{PV}} \quad (3.74a)$$

$$\Gamma_1 = 2\pi \sum_x \delta(m - E_x) |\langle B_s | H' | x \rangle|^2 \quad (3.74b)$$

$$M_2 = \langle B_s | H' | \bar{B}_s \rangle + \sum_x \frac{\langle B_s | H' | x \rangle \langle x | H' | \bar{B}_s \rangle}{(m - E_x)_{PV}} \quad (3.74c)$$

$$\Gamma_2 = 2\pi \sum_x \delta(m - E_x) \langle B_s | H' | x \rangle \langle x | H' | \bar{B}_s \rangle \quad (3.74d)$$

Le relazioni precedenti sono proprio quelle che cercavamo, in quanto esprimono i parametri che compaiono nella descrizione fenomenologica del B_s , e quindi negli esperimenti, alle quantità del MS (m , H' e tutte le ampiezze di transizione). Analizziamole quindi singolarmente in dettaglio.

Osserviamo che M_1 è l'unica quantità che contiene un termine di ordine zero: m è la massa del B_s (e \bar{B}_s) se questo fosse stabile, e H' è l'Hamiltoniana di interazione debole che causa la transizione $B_s - \bar{B}_s$ e i decadimenti negli altri stati finali. Il secondo e il terzo termine sono quindi molto più piccoli della massa del B_s , e quindi possiamo porre con ottima approssimazione

$$M_1 = m \quad (3.75)$$

Passiamo ora ad analizzare Γ_1 . $|\langle B_s | H' | x \rangle|^2$ è la probabilità della transizione $B_s \rightarrow x$; la delta di Dirac $\delta(m - E_x)$ implementa la conservazione dell'energia; Γ_1 è poi ottenuta da questi sommando su tutti gli stati finali e moltiplicando per 2π che in questo caso è proprio il fattore di proporzionalità tra la sezione d'urto e la larghezza di decadimento. Di conseguenza, per definizione di larghezza di decadimento, Γ_1 è proprio la larghezza di decadimento Γ del B_s :

$$\Gamma_1 = \Gamma \quad (3.76)$$

Per quanto riguarda M_2 e Γ_2 , essi sono presenti negli elementi non diagonali dell'Hamiltoniana effettiva, quindi ci aspettiamo che regolino la transizione $B_s \leftrightarrow \bar{B}_s$. Consideriamo quindi il processo $B_s \leftrightarrow \bar{B}_s$, che è governata dall'Hamiltoniana H' , ed effettuiamo lo sviluppo perturbativo della sua matrice di transizione:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(B_s \rightarrow \bar{B}_s) &= \langle B_s | H' | \bar{B}_s \rangle + \sum_{x: E_x \neq m} \frac{\langle B_s | H' | x \rangle \langle x | H' | \bar{B}_s \rangle}{(m - E_x)} + \\ &+ \sum_{x: E_x \neq m} \sum_{y: E_y \neq m} \frac{\langle B_s | H' | x \rangle \langle x | H' | y \rangle \langle y | H' | \bar{B}_s \rangle}{(m - E_x)(m - E_y)} + \dots \end{aligned} \quad (3.77)$$

La prescrizione $E_x \neq m$ è equivalente a quella del valor principale; notiamo quindi che M_2 coincide con i primi due termini dello sviluppo perturbativo della transizione $B_s \rightarrow \bar{B}_s$. Di conseguenza, possiamo identificare

$$M_2 = \mathcal{M}(B_s \rightarrow \bar{B}_s) \quad (3.78)$$

Osserviamo ora che

$$\sum_x \dots \langle B_s | H' | x \rangle \langle x | H' | \bar{B}_s \rangle \quad (3.79)$$

è presente sia in M_2 che in Γ_2 ; essa rappresenta l'ampiezza di probabilità per la transizione $B_s \rightarrow x \rightarrow \bar{B}_s$ (e viceversa), sommata per tutti gli stati intermedi che lo consentono (ad esempio quelli con $S = B = 0$). La differenza è che mentre in M_1 non compaiono gli stati intermedi con $E_x = m$ (ovvero gli stato intermedi sono *off mass shell*), in Γ_2 la presenza della delta di Dirac indica che gli stati intermedi

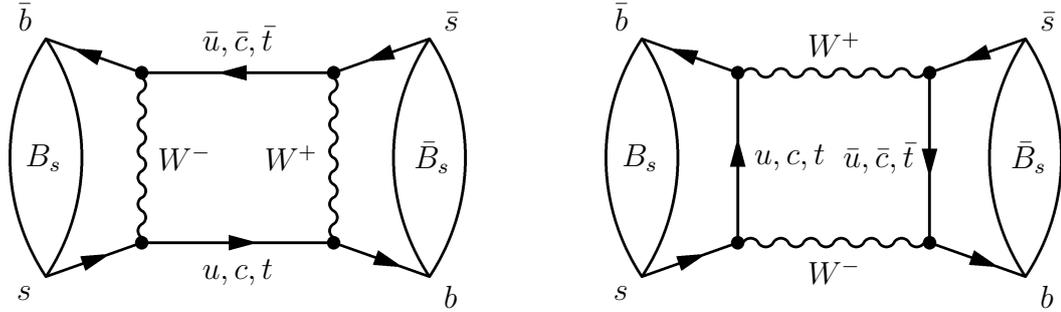
sono tutti e soli quelli *on mass shell*. Di conseguenza, Γ_1 aggiunge all'ampiezza della transizione $B_s \rightarrow \bar{B}_s$, che contiene solo gli stati intermedi off shell, il contributo degli stati intermedi on shell:

$$\Gamma_2 = \mathcal{M}^{\text{on shell}} (B_s \rightarrow \bar{B}_s) \quad (3.80)$$

Calcolare $\mathcal{M} (B_s \rightarrow \bar{B}_s)$, sia off shell che on shell, è un'impresa ardua, in quanto la somma sugli stati intermedi implica che bisogna calcolare tutti i canali di decadimento comuni a B_s e \bar{B}_s :

$$B_s \rightarrow D_s^+ D_s^-, \quad B_s \rightarrow J/\psi \phi, \quad B_s \rightarrow J/\psi \eta, \quad B_s \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^0, \quad B_s \rightarrow \pi^0 \pi^0, \quad \dots \quad (3.81)$$

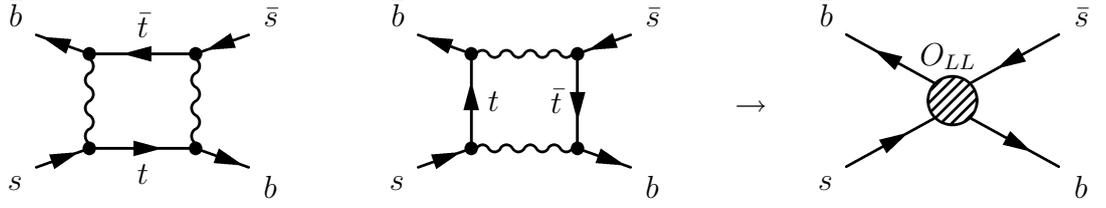
Per rendere il problema trattabile, si fa l'assunzione che la somma su tutto lo spazio delle fasi adronico possa essere approssimato dalla somma su tutto lo spazio delle fasi dei singoli quark [35]. Questa ipotesi riduce drasticamente il numero di processi da calcolare. Infatti, la transizione $B_s \leftrightarrow \bar{B}_s$ può avvenire solo tramite i seguenti diagrammi a box:



• Calcolo di M_2

Di tutte le combinazioni di flavour dei quark virtuali dei diagrammi a box mostrati, il contributo dominante a M_2 deriva dai grafici in cui viene scambiato solo il quark top [36]. Infatti, detti i e j i flavour dei quark scambiati, la sezione d'urto è proporzionale a $|V_{ib}V_{is}^*|^2|V_{js}V_{jb}^*|^2$; a causa della gerarchia tra gli elementi della matrice CKM, le combinazioni dominanti sono $|V_{cb}V_{cs}^*|^2|V_{cs}V_{cb}^*|^2$ e $|V_{tb}V_{ts}^*|^2|V_{ts}V_{tb}^*|^2$, che sono dello stesso ordine. D'altra parte, il meccanismo GIM prevede che la sezione d'urto sia proporzionale alle masse dei quark scambiati; di conseguenza, il contributo con i due charm è soppresso come m_c^2/m_t^2 .

I diagrammi a box possono essere calcolati con l'ausilio della OPE (cfr. Appendice A). A corte distanze, i quattro punti di interazione possono essere sovrapposti in un unico punto, ovvero il diagramma a box si riduce ad un diagramma effettivo a quattro fermioni.



L'Hamiltoniana efficace a quattro fermioni è

$$H^{|\Delta F|=2} = \frac{G_F^2}{8\pi^2} (V_{tb}V_{ts}^*)^2 C(m_t, m_w, \mu) O_{LL}(\mu) \quad (3.82)$$

dove il coefficiente di Wilson $C(m_t, m_w, \mu)$ e l'operatore a quattro fermioni $O_{LL}(\mu)$ sono rispettivamente

$$C(m_t, m_w, \mu) = m_W^2 S_0(x_t) \hat{\eta}_b \quad (3.83a)$$

$$O_{LL}(\mu) = \bar{s}\gamma_\nu (1 - \gamma^5) b \bar{s}\gamma^\nu (1 - \gamma^5) b \quad (3.83b)$$

$S_0(x_t)$ è la funzione di Inami-Lim [37], che si ottiene calcolando il box:

$$S_0(x_t) = \frac{4x_t - 11x_t^2 + x_t^3}{4(1-x_t)^2} - \frac{3x_t^3 \ln x_t}{2(1-x_t)^3} \quad (3.84)$$

il parametro $\hat{\eta}_b$ contiene le correzioni dovute all'interazione forte, e poiché il processo avviene a piccole distanze, è calcolabile perturbativamente [38]. Dato che i quark \bar{b}, s, b, \bar{s} sono confinati all'interno degli adroni, siamo interessati a $\langle B_s | H^{|\Delta F|=2} | \bar{B}_s \rangle$; a questo scopo poniamo

$$\langle B_s | O_{LL} | \bar{B}_s \rangle = \frac{2}{3} m_{B_s}^2 f_{B_s}^2 B_{B_s} \quad (3.85)$$

dove f_{B_s} è la costante di decadimento del B_s , e dove viene definita la quantità non perturbativa B_{B_s} . Otteniamo quindi infine

$$M_2 = \langle B_s | H^{|\Delta F|=2} | \bar{B}_s \rangle = \frac{G_F^2}{12\pi^2} (V_{tb}V_{ts}^*)^2 m_{B_s} m_W^2 S_0(x_t) \hat{\eta}_b f_{B_s}^2 B_{B_s} \quad (3.86)$$

Il parametro $\hat{\eta}_b$ si calcola con metodi perturbativi; attualmente è stato calcolato al next-to-leading order in α_s . Per i parametri f_{B_s} e B_{B_s} sono noti i valori dalle simulazioni su reticolo [39]:

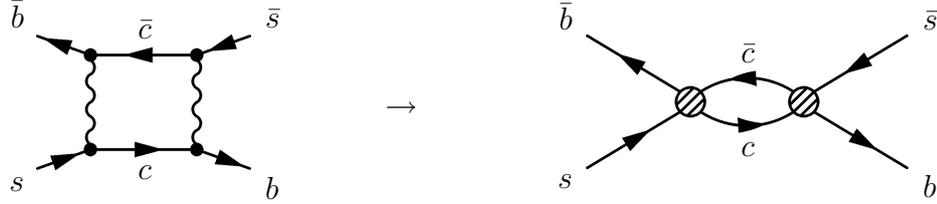
$\hat{\eta}_b$	0.55 ± 0.01
f_{B_s}	$231 \pm 15 \text{ MeV}$
B_{B_s}	0.86 ± 0.06

Come abbiamo mostrato nel paragrafo precedente, il valore di M_2 è legato ad una quantità sperimentalmente accessibile, Δm ; la previsione del MS è dunque

$$\Delta m \simeq 2|M_2| = 19.30 \pm 6.68 \text{ ps}^{-1} \quad (3.87)$$

• Calcolo di Γ_2

Nel caso di Γ_2 , poiché gli stati intermedi devono essere on shell, lo scambio del quark top non è energeticamente consentito, pertanto il contributo dominante deriva dallo scambio di due charm. Inoltre, poiché gli stati intermedi sono reali, non possiamo integrarli in un operatore effettivo; possiamo però integrare le due W , ottenendo



L'Hamiltoniana efficace per questo diagramma è

$$H^{\text{on shell}} = \frac{G_F^2}{24\pi} (V_{cb}V_{cs}^*)^2 \frac{m_b^2}{m_{B_s}} [-F(\mu)Q + F_S(\mu)Q_S] \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) \right] \quad (3.88)$$

dove gli operatori effettivi sono

$$Q = \bar{s}\gamma_\nu(1-\gamma^5)b\bar{c}\gamma^\nu(1-\gamma^5)c \quad (3.89a)$$

$$Q_S = \bar{s}\gamma_\nu(1+\gamma^5)b\bar{c}\gamma^\nu(1+\gamma^5)c \quad (3.89b)$$

Scriviamo i loro elementi di matrice come

$$\langle B_s | Q | \bar{B}_s \rangle = \frac{2}{3} m_{B_s}^2 f_{B_s}^2 B_{B_s} \quad (3.90a)$$

$$\langle B_s | Q_S | \bar{B}_s \rangle = \frac{5}{12} m_{B_s}^2 f_{B_s}^2 \frac{m_{B_s}^2}{(m_b + m_s)^2} B_{B_s}^S \quad (3.90b)$$

Le funzioni $F(\mu)$ e $F_S(\mu)$ sono funzioni dei coefficienti di Wilson $C_1(\mu)$ e $C_2(\mu)$ (cfr. Appendice A). Otteniamo quindi [40]

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \langle B_s | H^{\text{on shell}} | \bar{B}_s \rangle \simeq \\ &\simeq \frac{G_F^2}{6\pi} (V_{cb}V_{cs}^*)^2 m_b^2 m_{B_s} f_{B_s}^2 \left[-\frac{2}{3} B_{B_s} F(\mu) + \frac{5}{12} \frac{m_{B_s}^2}{(m_b + m_s)^2} B_{B_s}^S F_S(\mu) \right] \simeq \\ &\simeq \left(\frac{f_{B_s}}{245 \text{ MeV}} \right)^2 [(0.234 \pm 0.035) B_{B_s}^S - (0.080 \pm 0.020)] \frac{\Gamma}{2} + \\ &\quad + \text{una piccola parte immaginaria} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Abbiamo visto che anche Γ_2 è legato ad una quantità sperimentalmente accessibile, $\Delta\Gamma$; il MS prevede quindi

$$\Delta\Gamma \simeq 2|\Gamma_2| \sin\phi = 0.070 \pm 0.0042 \text{ ps}^{-1} \quad (3.92)$$

- **Calcolo di ϕ**

Abbiamo visto che, anche se M_2 e Γ_2 assumono valori complessi, solo tre delle quattro quantità che li costituiscono sono indipendenti dalle scelte di fase e quindi osservabili:

$$|M_2| \quad |\Gamma_2| \quad \phi = \text{Arg} \left(-\frac{M_2}{\Gamma_2} \right) \quad (3.93)$$

Quindi $|M_2|$ e $|\Gamma_2|$ sono i moduli delle quantità appena calcolate, mentre ϕ dipende dalla loro fase relativa. Poiché abbiamo visto

$$\text{Arg}(M_2) = \text{Arg} [(V_{tb}V_{ts}^*)^2] = 2\text{Arg}(V_{tb}V_{ts}^*) \quad (3.94a)$$

$$\text{Arg}(-\Gamma_2) = \text{Arg} [(V_{cb}V_{cs}^*)^2] = 2\text{Arg}(V_{cb}V_{cs}^*) \quad (3.94b)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \phi &= \text{Arg} \left(-\frac{M_2}{\Gamma_2} \right) = \text{Arg}(M_2) - \text{Arg}(-\Gamma_2) \simeq \\ &\simeq 2[\text{Arg}(V_{tb}V_{ts}^*) - \text{Arg}(V_{cb}V_{cs}^*)] = 2\text{Arg} \left(-\frac{V_{tb}V_{ts}^*}{V_{cb}V_{cs}^*} \right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ma l'angolo

$$\beta_s = \text{Arg} \left(-\frac{V_{tb}V_{ts}^*}{V_{cb}V_{cs}^*} \right) \quad (3.96)$$

è proprio uno degli angoli di uno dei triangoli di unitarietà (appunto quello che nel Capitolo 1 abbiamo presentato come il triangolo di unitarietà coinvolto nel settore del B_s). Di conseguenza, la determinazione di ϕ , che è un parametro fondamentale del mixing del B_s , ci fornisce direttamente informazioni su quest'angolo:

$$\phi = 2\beta_s \quad (3.97)$$

Attualmente, si stima

$$\beta_s \simeq 0.02 \quad (3.98)$$

3.3 Teoria delle oscillazioni del B_s nel Modello ACD

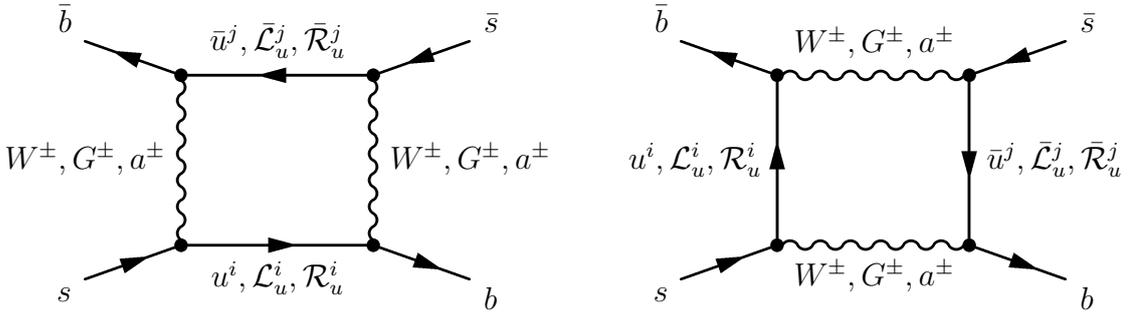
3.3.1 Contributo dei modi di Kaluza-Klein

Abbiamo visto che l'esistenza di una singola UED compattificata nell'orbifold S_R^1/Z_2 dà luogo nelle quattro dimensioni ordinarie ad una teoria effettiva in cui ad ogni particella sono associate delle eccitazioni di massa molto pesanti, che si accoppiano secondo le regole di Feynman che abbiamo elencato. In accordo al modello, questi nuovi stati non sono stati osservati direttamente perché troppo massivi per le attuali scale di energia degli esperimenti; però essi possono comunque contribuire come particelle virtuali nei processi a loop, generando delle deviazioni dalle predizioni del MS e quindi fornendo una prova indiretta della loro esistenza. Poiché, come abbiamo

spiegato, il mixing del B_s è generato da processi a loop, esso è un processo adatto per studiare eventuali deviazioni dovute alla presenza di dimensioni extra.

In analogia con quello che abbiamo fatto nel paragrafo precedente, dobbiamo ricavare i parametri dell'Hamiltoniana efficace mediante le prescrizioni del Modello ACD. Cominciamo quindi con l'osservare che M_1 e Γ_1 vengono modificati dal Modello ACD, in quanto abbiamo identificato M_1 con la massa del B_s e Γ_1 con la sua larghezza, e questi sono parametri che in questo contesto stiamo assumendo essere liberi. Invece, sia M_2 che Γ_2 sono determinati dalle ampiezze di processi a loop; per quanto riguarda Γ_2 però, abbiamo visto che esso coinvolge solo stati intermedi on shell, e quindi ancora i modi eccitati di Kaluza-Klein non contribuiscono perché troppo pesanti e quindi non permessi energeticamente; essi possono invece contribuire in M_2 perché in esso gli stati intermedi sono off shell. Osserviamo infine che, poiché la fase relativa tra M_2 e Γ_2 dipende solo dagli elementi di matrice CKM, e come abbiamo visto il Modello ACD non modifica la matrice CKM, anche ϕ è lo stesso del MS. In conclusione, nel mixing del B_s il Modello ACD prevede eventuali deviazioni solo per $|M_2|$.

Consideriamo quindi i processi che contribuiscono a $M_2 = \langle B_s | H_{ACD}^{|\Delta F|=2} | \bar{B}_s \rangle$: dobbiamo stabilire quali delle eccitazioni di Kaluza-Klein compaiono come particelle virtuali, oltre al quark top e alle W^\pm del MS. Per quanto abbiamo visto dalle regole di Feynman del Modello ACD, esse sono (omettendo il numero di eccitazione n) [29]:



Nel MS, il calcolo del box è incluso nella funzione di Inami-Lim $S_0(x_t)$; analogamente, chiamiamo il risultato del calcolo del box per ogni eccitazione n

$$S_n(x_t, x_n) \quad \text{con} \quad x_n = \frac{m_n^2}{m_W^2} \quad m_n = \frac{n}{R} \quad (3.99)$$

Dobbiamo infine sommare i contributi di tutti i diagrammi. Posto

$$S(x_t, R) = S_0(x_t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x_t, x_n) \quad (3.100)$$

otteniamo che l'Hamiltoniana a quattro fermioni nel modello ACD diventa

$$H_{ACD}^{|\Delta F|=2} = \frac{G_F^2}{16\pi^2} (V_{tb}V_{ts}^*)^2 m_W^2 \hat{\eta}_b S(x_t, R) O_{LL} \quad (3.101)$$

e quindi M_2 vale

$$M_2(R) = \langle B_s | H_{ACD}^{|\Delta F|=2} | \bar{B}_s \rangle = \frac{G_F^2}{12\pi^2} (V_{tb}V_{ts}^*)^2 m_{B_s} m_W^2 S(x_t, x_n) \hat{\eta}_b f_{B_s}^2 B_{B_s} \quad (3.102)$$

che dipende dal raggio di compattificazione dell'orbita. Di conseguenza, una misura di un valore di M_2 diverso da quello previsto dal MS può dare informazioni non solo sull'eventuale esistenza di dimensioni extra, ma anche sulla loro compattificazione.

3.3.2 Calcolo della serie di Kaluza-Klein

Abbiamo definito $S_n(x_y, x_n)$ come il contributo dei diagrammi che coinvolgono particelle di modo n (per la conservazione della parità KK, le coppie hanno tutte lo stesso numero n). Chiamiamo $F(x_{i(n)}, x_{j(n)})$ il contributo a $S_n(x_y, x_n)$ dei diagrammi in cui sono presenti i quark virtuali (i, j) con tutti i possibili bosoni. $S_n(x_y, x_n)$ è quindi dato dalla somma per $i, j = u, c, t$ delle $F(x_{i(n)}, x_{j(n)})$, ma l'unitarietà della matrice CKM ci consente di scrivere

$$S_n(x_y, x_n) = F(x_{t(n)}, x_{t(n)}) + F(x_{u(n)}, x_{u(n)}) - 2F(x_{t(n)}, x_{u(n)}) \quad (3.103)$$

Notiamo che al crescere di n le masse dei diversi flavour si avvicinano tra loro, e $x_{t(n)} \rightarrow x_{u(n)} \rightarrow 1$; di conseguenza, in accordo al meccanismo GIM i modi con alto n vengono soppressi (Fig. 3.3), e questo determina la convergenza della serie di Kaluza-Klein.

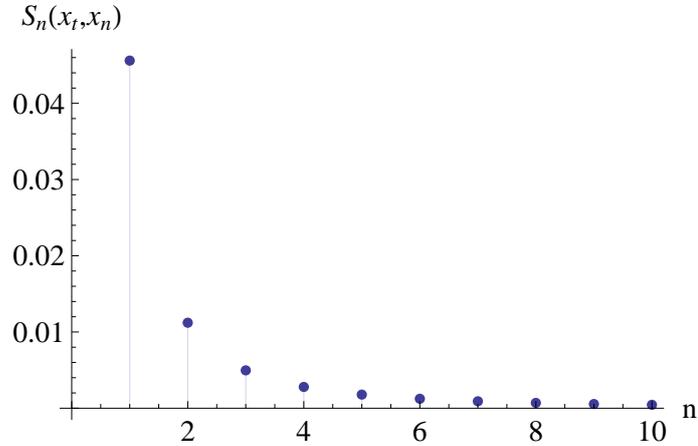


Figura 3.3: Contributi $S_n(x_y, x_n)$ dei diagrammi con stati virtuali di modi n al variare di n , calcolati per $R = 1/500 \text{ GeV}^{-1}$. Si vede come i contributi dominanti provengano solo dai primissimi termini, mentre al crescere di n i contributi sono sempre maggiormente soppressi.

I contributi dei diversi diagrammi alle $F(x_t, x_n)$ sono i seguenti [29]:

$$F_{WW(n)} = \frac{M_W^2}{M_{W(n)}^2} U(x_{t(n)}, x_{u(n)}) \quad (3.104a)$$

$$F_{WG(n)} = -2 \frac{M_W^2 m_{t(n)} m_{u(n)}}{M_{W(n)}^6} \left[m_1^{(t)} c_{t(n)} + m_2^{(t)} s_{t(n)} \right] \left[m_1^{(u)} c_{u(n)} + m_2^{(u)} s_{u(n)} \right] \tilde{U}(x_{t(n)}, x_{u(n)}) \quad (3.104b)$$

$$F_{Wa(n)} = -2 \frac{M_W^2 m_{t(n)} m_{u(n)}}{M_{W(n)}^6} \left[m_3^{(t)} c_{t(n)} + m_4^{(t)} s_{t(n)} \right] \left[m_3^{(u)} c_{u(n)} + m_4^{(u)} s_{u(n)} \right] \tilde{U}(x_{t(n)}, x_{u(n)}) \quad (3.104c)$$

$$F_{Ga(n)} = \frac{1}{2} \frac{M_W^2}{M_{W(n)}^6} \left[m_1^{(t)} m_3^{(t)} + m_2^{(t)} m_4^{(t)} \right] \left[m_1^{(u)} m_3^{(u)} + m_2^{(u)} m_4^{(u)} \right] U(x_{t(n)}, x_{u(n)}) \quad (3.104d)$$

$$F_{GG(n)} = \frac{1}{4} \frac{M_W^2}{M_{W(n)}^6} \left[(m_1^{(t)})^2 + (m_2^{(t)})^2 \right] \left[(m_1^{(u)})^2 + (m_2^{(u)})^2 \right] U(x_{t(n)}, x_{u(n)}) \quad (3.104e)$$

$$F_{aa(n)} = \frac{1}{4} \frac{M_W^2}{M_{W(n)}^6} \left[(m_3^{(t)})^2 + (m_4^{(t)})^2 \right] \left[(m_3^{(u)})^2 + (m_4^{(u)})^2 \right] U(x_{t(n)}, x_{u(n)}). \quad (3.104f)$$

dove le funzioni U and \tilde{U} sono

$$U(x_t, x_u) = \frac{x_t^2 \log x_t}{(x_t - x_u)(1 - x_t)^2} + \frac{x_u^2 \log x_u}{(x_u - x_t)(1 - x_u)^2} + \frac{1}{(1 - x_u)(1 - x_t)} \quad (3.105a)$$

$$U(x_t, x_t) = \frac{2x_t \log x_t}{(1 - x_t)^3} + \frac{1 + x_t}{(1 - x_t)^2} \quad (3.105b)$$

$$\tilde{U}(x_t, x_u) = \frac{x_t \log x_t}{(x_t - x_u)(1 - x_t)^2} + \frac{x_u \log x_u}{(x_u - x_t)(1 - x_u)^2} + \frac{1}{(1 - x_u)(1 - x_t)} \quad (3.105c)$$

$$\tilde{U}(x_t, x_t) = \frac{(1 + x_t) \log x_t}{(1 - x_t)^3} + \frac{2}{(1 - x_t)^2} \quad (3.105d)$$

Da queste, si ottiene

$$\begin{aligned} S_n(x_t, x_n) = & \frac{1}{4(x_t - 1)^3 x_t} \left[6x_n x_t - 5x_t^2 - 12x_n x_t^2 + 15x_t^3 + 10x_n x_t^3 - 11x_t^4 - 4x_n x_t^4 + x_t^5 \right. \\ & - 2x_n (x_t - 1)^3 (3x_n + 3x_n x_t - x_t) \ln \frac{x_n}{1 + x_n} + \left(-6x_n^2 + 2x_n x_t + 12x_n^2 x_t \right. \\ & \left. \left. - 6x_n x_t^2 - 2x_t^3 + 14x_n x_t^3 - 2x_n^2 x_t^3 + 6x_t^4 - 2x_n x_t^4 \right) \ln \frac{x_t + x_n}{1 + x_n} \right] \end{aligned} \quad (3.106)$$

che manipolata diventa

$$\begin{aligned}
S_n(x_t, x_n) = \frac{1}{4(x_t - 1)^3 x_t} & \left\{ (-5x_t^2 + 15x_t^3 - 11x_t^4 + x_t^5) + \right. \\
& + 2(3x_t - 6x_t^2 + 5x_t^3 - 2x_t^4)x_n + \\
& + (2x_t)(x_t - 1)^3 \left[x_n \ln \left(\frac{x_n}{1 + x_n} \right) \right] - \\
& - 6(1 + x_t)(x_t - 1)^3 \left[x_n^2 \ln \left(\frac{x_n}{1 + x_n} \right) \right] + \\
& + 2(-x_t^3 + 3x_t^4) \left[\ln \left(\frac{x_t + x_n}{1 + x_n} \right) \right] + \\
& + 2(x_t - 3x_t^2 + 7x_t^3 - x_t^4) \left[x_n \ln \left(\frac{x_t + x_n}{1 + x_n} \right) \right] + \\
& \left. + 2(-3 + 6x_t - x_t^3) \left[x_n^2 \ln \left(\frac{x_t + x_n}{1 + x_n} \right) \right] \right\} \quad (3.107)
\end{aligned}$$

Per sommare la serie delle S_n , introduciamo i seguenti integrali:

$$I_1(a) = a \int_0^1 dy \frac{1}{ay + x_n} = \ln(a + x_n) - \ln(x_n) \quad (3.108a)$$

$$I_2(a) = a^2 \int_0^1 dy \frac{y}{ay + x_n} = a + x_n \ln(x_n) - x_n \ln(a + x_n) \quad (3.108b)$$

$$I_3(a) = a^3 \int_0^1 dy \frac{y^2}{ay + x_n} = \frac{a^2}{2} - ax_n - x_n^2 \ln(x_n) + x_n^2 \ln(a + x_n) \quad (3.108c)$$

che ci consentono di riscrivere i diversi termini logaritmici che compaiono in $S_n(x_t, x_n)$:

$$\ln \left(\frac{x_t + x_n}{1 + x_n} \right) = I_1(x_t) - I_1(1) \quad (3.109a)$$

$$x_n \ln \left(\frac{x_n}{1 + x_n} \right) = I_2(1) - 1 \quad (3.109b)$$

$$x_n \ln \left(\frac{x_t + x_n}{1 + x_n} \right) = I_2(1) - I_2(x_t) - 1 + x_t \quad (3.109c)$$

$$x_n^2 \ln \left(\frac{x_n}{1 + x_n} \right) = -I_3(1) + \frac{1}{2} - x_n \quad (3.109d)$$

$$x_n^2 \ln \left(\frac{x_t + x_n}{1 + x_n} \right) = I_3(x_t) - I_3(1) + \frac{1}{2}(1 - x_t^2) + x_n(x_t - 1) \quad (3.109e)$$

Ora possiamo scambiare la sommatoria e l'integrale, e utilizzando la relazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c + n^2} = \frac{1}{2c} [\sqrt{c}\pi \coth(\sqrt{c}\pi) - 1] \quad (3.110)$$

possiamo sommare gli integrandi degli $I_n(a)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_1(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 dy \frac{1}{y} [\pi m_W R \sqrt{y} \coth(\pi m_W R \sqrt{y}) - 1] \quad (3.111a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_2(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 dy [\pi m_W R \sqrt{y} \coth(\pi m_W R \sqrt{y}) - 1] \quad (3.111b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_3(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 dy y [\pi m_W R \sqrt{y} \coth(\pi m_W R \sqrt{y}) - 1] \quad (3.111c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_1(x_t) = \frac{1}{2} \int_0^1 dy \frac{1}{y} [\pi m_t R \sqrt{y} \coth(\pi m_t R \sqrt{y}) - 1] \quad (3.111d)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_2(x_t) = \frac{x_t}{2} \int_0^1 dy [\pi m_t R \sqrt{y} \coth(\pi m_t R \sqrt{y}) - 1] \quad (3.111e)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_3(x_t) = \frac{x_t^2}{2} \int_0^1 dy y [\pi m_t R \sqrt{y} \coth(\pi m_t R \sqrt{y}) - 1] \quad (3.111f)$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n \left(\frac{M^2}{m_W^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{m_W^2} \right)^{n-1} J_{(n-2),M}(R) \quad (3.112)$$

con

$$J_{\alpha,M}(R) = \int_0^1 dy y^\alpha [\pi M R \sqrt{y} \coth(\pi M R \sqrt{y}) - 1] \quad (3.113)$$

Sostituendo e semplificando, troviamo infine

$$\begin{aligned} S(x_t, R) &= S_0(x_t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x_t, x_n) = \\ &= \frac{4x_t - 11x_t^2 + x_t^3}{4(1-x_t)^2} - \frac{3x_t^3 \ln x_t}{2(1-x_t)^3} + \\ &+ \frac{1}{4(x_t-1)^3 x_t} \left[x_t^3 (3x_t-1) J_{-1,m_t}(R) + (-1+3x_t-7x_t^2+x_t^3) J_{0,m_t}(R) + \right. \\ &+ (-3+6x_t-x_t^3) J_{1,m_t}(R) + x_t(1-3x_t) J_{-1,m_W}(R) + (4x_t) J_{0,m_W}(R) + \\ &\left. + x_t(-5+3x_t) J_{1,m_W}(R) \right] \end{aligned} \quad (3.114)$$

In Fig. 3.4 è mostrato l'andamento di $S(x_t, R)$ in funzione di R , mentre in Tab. 3.1 sono elencati i valori che essa assume per alcuni valori di R . Come ci aspettiamo, per $R = 0$ ritroviamo il valore del MS, ovvero il valore della funzione di Inami-Lim; la deviazione dal MS aumenta all'aumentare del raggio di compattificazione del MS. Osserviamo però che questa deviazione è ad esempio del 3% per $R = 1/500 \text{ GeV}^{-1}$ e del 18% per $R = 1/200 \text{ GeV}^{-1}$, da confrontare con gli errori del 6-7% da cui è affetto ciascuno dei due parametri non perturbativi f_{B_s} e B_{B_s} .

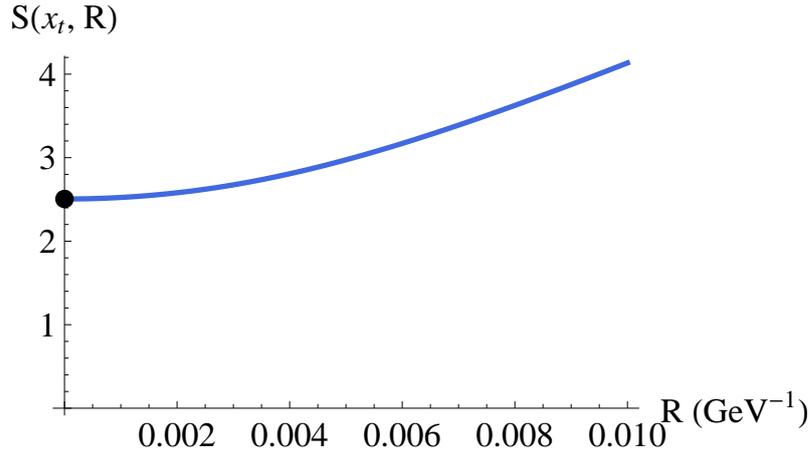


Figura 3.4: Andamento di $S(x_t, R)$ al variare del raggio di compattificazione della quinta dimensione R . Per $R = 0$ si trova il valore della funzione di Inami-Lim.

$S(x_t, 0)$ (SM)	2.50516
$S(x_t, 1/1000 \text{ GeV}^{-1})$	2.52356
$S(x_t, 1/500 \text{ GeV}^{-1})$	2.57959
$S(x_t, 1/200 \text{ GeV}^{-1})$	2.97423
$S(x_t, 1/100 \text{ GeV}^{-1})$	4.13387

Tabella 3.1: Valori numerici di $S(x_t, R)$ per alcuni valori di R .

La quantità accessibile Δm è direttamente proporzionale a $S(x_t, R)$, e quindi nel Modello ACD aumenta del 3% o del 18%, ma è anche proporzionale alla combinazione $f_{B_s}^2 B_{B_s}$, che porta un errore di quasi il 20% e che quindi può nascondere gli eventuali effetti di dimensioni extra (Fig. 3.5).

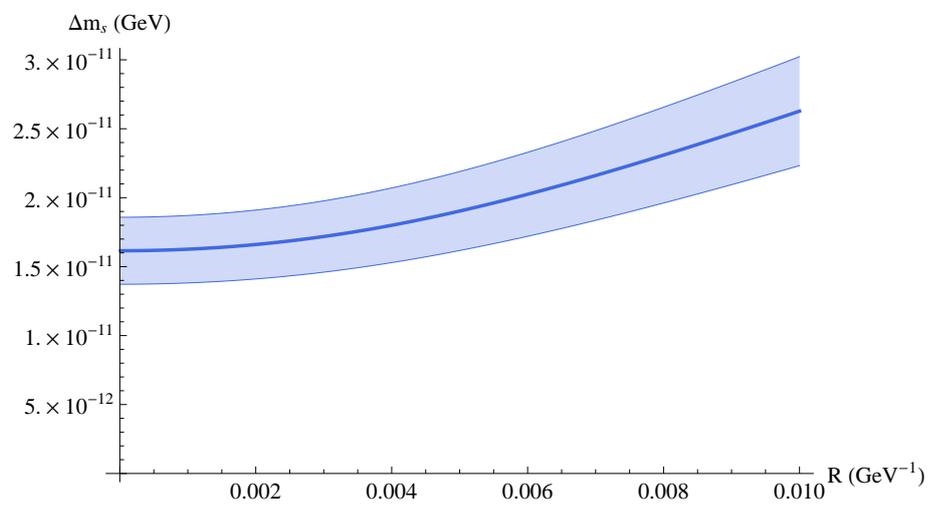


Figura 3.5: Andamento di Δm al variare di R . Si vede come per R piccolo la crescita di Δm è comunque compresa all'interno dell'errore della previsione del MS.

Capitolo 4

Decadimenti $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell \bar{\ell}$ e $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \psi$ nel MS e nel Modello ACD

4.1 Aspetti generali

4.1.1 I mesoni η ed η'

Nell'ambito del modello a quark, i mesoni sono descritti dagli elementi delle basi delle rappresentazioni irriducibili ottenute dal prodotto tensoriale della rappresentazione fondamentale e della rappresentazione coniugata del gruppo di flavour. Se consideriamo solo i quark up, down e strange, il gruppo è $SU(3)_f$ e le rappresentazioni irriducibili sono date da $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$; combinando due quark con spin opposto si ottengono quindi nove mesoni pseudoscalari. Di questi, ci sono tre stati con gli stessi numeri quantici per la terza componente dell'isospin e l'ipercarica, $I_3 = 0$, $Y = 0$:

- il singoletto:

$$|\eta^1\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} \quad (4.1)$$

- lo stato appartenente al tripletto di isospin ottenuto dal prodotto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ cui appartengono il π^+ e il π^- , che viene quindi identificato con il π^0 :

$$|\pi^0\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.2)$$

- lo stato ortonormale ai primi due:

$$|\eta^8\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle}{\sqrt{6}} \quad (4.3)$$

Oltre al π^0 , si osservano altri due stati con questi numeri quantici, noti come η e η' . Tuttavia essi non possono essere identificati con gli stati η^1 e η^8 di $SU(3)_f$, in quanto le loro masse violano fortemente le formule di massa. Pertanto, gli stati osservati devono essere combinazioni lineari di quelli di $SU(3)_f$.

Sono stati formulati due diversi schemi per descrivere il sistema $\eta - \eta'$: lo schema singoletto-ottetto (SO) e lo schema quark-flavour (QF); noi utilizziamo quest'ultimo, in quanto, a meno di un piccolo contributo che viola la regola di Zweig, è possibile descrivere la sovrapposizione degli stati mediante un solo parametro [41]. Nell'ambito dello schema quark-flavour, si definiscono i due stati

$$|\eta^q\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.4a)$$

$$|\eta^s\rangle = |s\bar{s}\rangle \quad (4.4b)$$

e il mixing è descritto dalla rotazione

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^q \\ \eta^s \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

In conclusione, il contenuto in quark della η e della η' è

$$|\eta\rangle = \cos \phi \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} - \sin \phi |s\bar{s}\rangle \quad (4.6a)$$

$$|\eta'\rangle = \sin \phi \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} + \cos \phi |s\bar{s}\rangle \quad (4.6b)$$

Secondo le ultime analisi sperimentali, il valore di ϕ , estratto dal processo $\phi(1029) \rightarrow \eta^{(\prime)}\gamma$, è $\phi = (40.4 \pm 0.9)^\circ$ [42].

4.1.2 Hamiltoniana efficace della transizione $b \rightarrow s$

Nel seguito, andremo a studiare alcuni processi del B_s che coinvolgono la transizione $b \rightarrow s$. Il MS proibisce le FCNC al prim'ordine, e di conseguenza questa transizione è ottenuta solo mediante diagrammi di ordine superiore. Poiché tali processi sono fortemente soppressi, essi sono particolarmente adatti alla ricerca di effetti di Nuova Fisica che come sappiamo devono essere piccoli alle scale energetiche attuali.

Preliminarmente, osserviamo che la transizione $b \rightarrow s$ può essere mediata da un qualsiasi quark virtuale di tipo up. Nel limite in cui questi quark sono massless, la somma dei tre contributi è nulla in virtù dell'unitarietà della matrice CKM. Se quindi consideriamo le masse dei quark, i contributi non si cancellano e dipendono dalle tre differenze di massa tra esse; poiché il quark top è molto più massivo degli altri due, il suo contributo è dominante. Di conseguenza, nel seguito considereremo con ottima approssimazione solo i contributi derivanti dalla presenza nel loop del quark top.

La transizione $b \rightarrow s$ può essere trattata mediante la OPE (Appendice A). Essa ci permette di esprimere l'Hamiltoniana $\Delta B = -1$, $\Delta S = 1$ in modo efficace mediante degli operatori locali O_i pesati dai coefficienti di Wilson C_i :

$$H = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{tb} V_{ts}^* \sum_{i=1}^{10} C_i(\mu) O_i(\mu) \quad (4.7)$$

in cui gli operatori locali sono

$$O_1 = (\bar{c}_{L\alpha}\gamma^\mu b_{L\beta}) (\bar{s}_{L\beta}\gamma_\mu c_{L\alpha}) \quad (4.8a)$$

$$O_2 = (\bar{c}_{L\alpha}\gamma^\mu b_{L\alpha}) (\bar{s}_{L\beta}\gamma_\mu c_{L\beta}) \quad (4.8b)$$

$$O_3 = (\bar{s}_{L\alpha}\gamma^\mu b_{L\alpha}) [(\bar{u}_{L\beta}\gamma_\mu u_{L\beta}) + \dots + (\bar{b}_{L\beta}\gamma_\mu b_{L\beta})] \quad (4.8c)$$

$$O_4 = (\bar{s}_{L\alpha}\gamma^\mu b_{L\beta}) [(\bar{u}_{L\beta}\gamma_\mu u_{L\alpha}) + \dots + (\bar{b}_{L\beta}\gamma_\mu b_{L\alpha})] \quad (4.8d)$$

$$O_5 = (\bar{s}_{L\alpha}\gamma^\mu b_{L\alpha}) [(\bar{u}_{R\beta}\gamma_\mu u_{R\beta}) + \dots + (\bar{b}_{R\beta}\gamma_\mu b_{R\beta})] \quad (4.8e)$$

$$O_6 = (\bar{s}_{L\alpha}\gamma^\mu b_{L\beta}) [(\bar{u}_{R\beta}\gamma_\mu u_{R\alpha}) + \dots + (\bar{b}_{R\beta}\gamma_\mu b_{R\alpha})] \quad (4.8f)$$

$$O_7 = \frac{e}{16\pi^2} m_b (\bar{s}_{L\alpha}\sigma^{\mu\nu} b_{R\alpha}) F_{\mu\nu} \quad (4.8g)$$

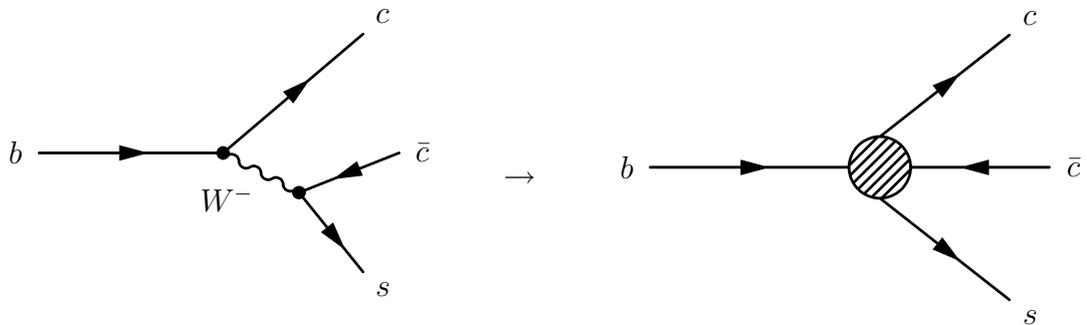
$$O_8 = \frac{g_s}{16\pi^2} m_b [\bar{s}_{L\alpha}\sigma^{\mu\nu} (\lambda^a/2)_{\alpha\beta} b_{R\beta}] G_{\mu\nu}^a \quad (4.8h)$$

$$O_9 = \frac{e^2}{16\pi^2} (\bar{s}_{L\alpha}\gamma^\mu b_{L\alpha}) \ell\gamma_\mu\bar{\ell} \quad (4.8i)$$

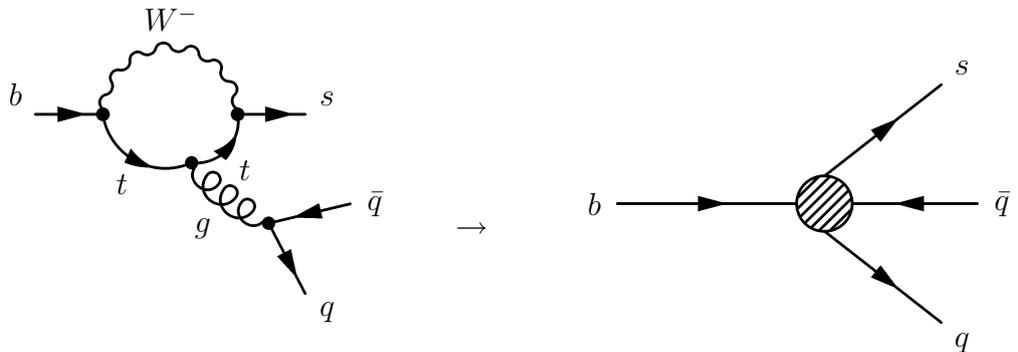
$$O_{10} = \frac{e^2}{16\pi^2} (\bar{s}_{L\alpha}\gamma^\mu b_{L\alpha}) \ell\gamma_\mu\bar{\ell} \quad (4.8j)$$

dove α, β sono indici di colore, $F_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu}^a$ sono i tensori dei campi elettromagnetico e gluonico. Gli operatori locali derivano dai seguenti processi:

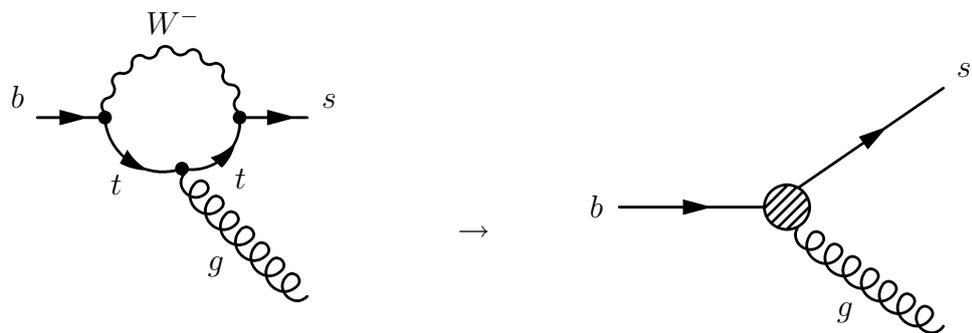
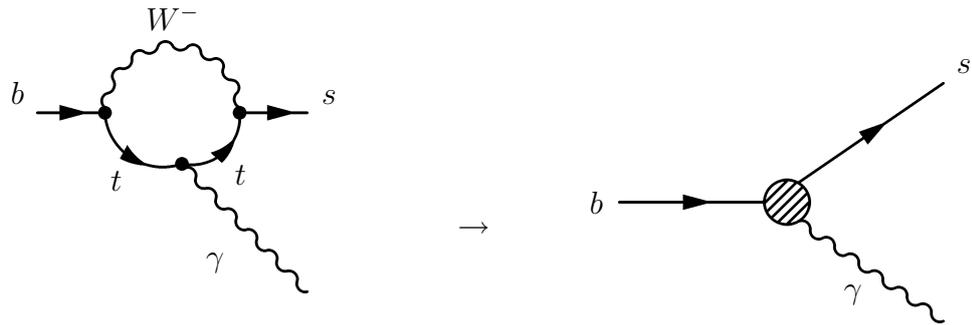
- O_1 e O_2 sono operatori a quattro fermioni che derivano dallo scambio di una W , con diverse combinazioni di colore:



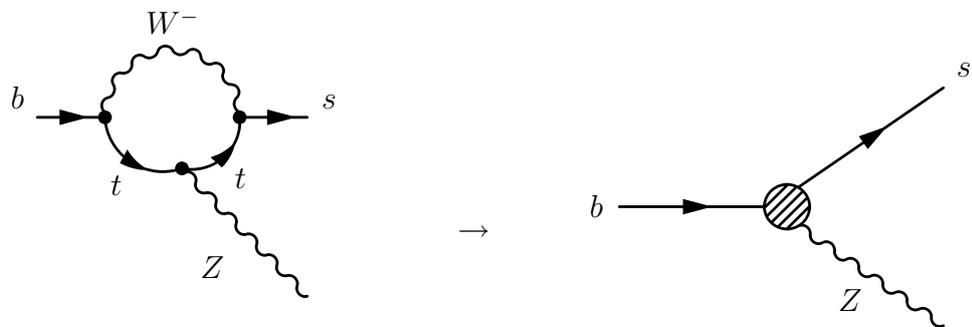
- $O_3 \dots O_6$ sono i “pinguini” di QCD:



- O_7 e O_8 sono i “pinguini” magnetici:



- O_9 e O_{10} sono i “pinguini” deboli neutri:



I coefficienti di Wilson $C_1 \dots C_{10}$ sono stati calcolati all'ordine next-to-next-to-leading [43]; poiché però le deviazioni nel Modello ACD sono state calcolate al leading order, in questo contesto ci limitiamo ad esso. Riportiamo i risultati di cui faremo uso in seguito.

- $$C_1(\mu) = -3 \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{\mu^2}$$
- $$C_2(\mu) = 1 + \frac{3}{N} \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{\mu^2}$$

- $$C_7(\mu) = \eta^{\frac{16}{23}} C_7^{(0)}(m_W) + \frac{8}{3} \left(\eta^{\frac{14}{23}} - \eta^{\frac{16}{23}} \right) C_8^{(0)}(\mu_W) + C_2^{(0)}(m_W) \sum_{i=1}^8 h_i \eta^{\alpha_i}$$

dove $\eta = \eta(\mu) = \alpha_s(m_W)/\alpha_s(\mu)$,

$$C_2^{(0)}(m_W) = 1 \quad C_7^{(0)}(m_W) = -\frac{1}{2}D(x_t), \quad C_8^{(0)}(m_W) = -\frac{1}{2}E(x_t)$$

$$\begin{array}{cccc} a_1 = \frac{14}{23} & a_2 = \frac{16}{23} & a_3 = \frac{6}{23} & a_4 = -\frac{12}{23} \\ a_5 = 0.4086 & a_6 = -0.4230 & a_7 = -0.8994 & a_8 = 0.1456 \\ h_1 = 2.2996 & h_2 = -1.0880 & h_3 = -\frac{3}{7} & h_4 = -\frac{1}{14} \\ h_5 = -0.6494 & h_6 = -0.0380 & h_7 = -0.0185 & h_8 = -0.0057 \end{array}$$

$$D(x_t) = -\frac{(8x_t^3 + 5x_t^2 - 7x_t)}{12(1-x_t)^3} + \frac{x_t^2(2-3x_t)}{2(1-x_t)^4} \ln x_t$$

$$E(x_t) = -\frac{x_t(x_t^2 - 5x_t - 2)}{4(1-x_t)^3} + \frac{3x_t^2}{2(1-x_t)^4} \ln x_t$$

- $$C_9(\mu) = P_0^{NDR} + \frac{Y(x_t)}{\sin^2 \theta_W} - 4Z(x_t) + P_E E(x_t)$$

dove $P_0^{NDR} = 2.60 \pm 0.25$, l'ultimo addendo è trascurabile, e

$$Y(x_t) = \frac{x_t}{8} \left[\frac{x_t - 4}{x_t - 1} + \frac{3x_t}{(x_t - 1)^2} \ln x_t \right]$$

$$Z(x_t) = \frac{18x_t^4 - 163x_t^3 + 259x_t^2 - 108x_t}{144(x_t - 1)^3} + \left[\frac{32x_t^4 - 38x_t^3 - 15x_t^2 + 18x_t}{72(x_t - 1)^4} - \frac{1}{9} \right] \ln x_t$$

- $$C_{10}(\mu) = C_{10} = -\frac{Y(x_t)}{\sin^2 \theta_W}$$

Osserviamo inoltre che all'ordine leading ($\alpha_s = 0$) $C_1, C_3 \dots C_6, C_8$ sono nulli, e $C_2 = 1$.

Per i processi in esame, scegliamo come scala di rinormalizzazione $\mu = m_b = 4.8$ GeV. In Tab. 4.1 sono mostrati i valori numerici che i coefficienti di Wilson $C_1, C_2, C_7, C_9, C_{10}$ assumono nel MS, utilizzando i valori $m_t = 172.7$ GeV, $m_W = 80.4$ GeV, $\sin^2 \theta_W = 0.2312$ [12].

4.1.3 Coefficienti di Wilson nel Modello ACD

Abbiamo visto che il Modello ACD prevede deviazioni dal MS dovute al fatto che nei processi a loop contribuiscono anche tutte le eccitazioni di Kaluza-Klein delle particelle virtuali. Poiché mediante la OPE le particelle virtuali vengono integrate, ne deriva che nel Modello ACD gli operatori locali restano gli stessi, mentre vengono

$C_1(m_b)$	-0.273
$C_2(m_b)$	1.091
$C_7(m_b)$	-0.301
$C_9(m_b)$	4.170
C_{10}	-4.464

Tabella 4.1: Valori di alcuni coefficienti di Wilson nel MS alla scala di rinormalizzazione m_b .

modificati i loro coefficienti di Wilson. È questa una caratteristica che accomuna il Modello ACD ad una serie di altri modelli detti di Minimal Flavour Violation. Non tutte le estensioni del MS hanno questa caratteristica: ad esempio, modelli con correnti deboli right-handed possono produrre operatori nell'Hamiltoniana efficace diversi dagli operatori $O_1 \dots O_{10}$ elencati.

Per calcolare i coefficienti di Wilson, bisogna seguire una procedura analoga a quella svolta nel capitolo precedente: prima bisogna calcolare il diagramma contenente i modi n , poi sommare i diagrammi su tutti i modi. Si trova ancora che le funzioni che contengono i risultati del calcolo dei diagrammi vengono modificate nel modo seguente:

$$F(x_t) \rightarrow F'(x_t, R) = F(x_t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x_t, x_n) \quad (4.9)$$

Nel nostro caso saranno modificate in questo modo le funzioni $D(x_t)$, $E(x_t)$, $Y(x_t)$, $Z(x_t)$ precedentemente introdotte nei coefficienti di Wilson.

Il calcolo è stato effettuato al leading order [29]. Il calcolo dei diagrammi con i modi n restituisce le funzioni

$$\begin{aligned} D_n(x_t, x_n) = & \frac{x_t(-37 + 44x_t + 17x_t^2 + 6x_n^2(10 - 9x_t + 3x_t^2) - 3x_n(21 - 54x_t + 17x_t^2))}{36(x_t - 1)^3} + \\ & + \frac{x_n(2 - 7x_n + 3x_n^2)}{6} \ln \frac{x_n}{1 + x_n} - \\ & - \frac{(-2 + x_n + 3x_t)(x_t + 3x_t^2 + x_n^2(3 + x_t) - x_n(1 + (-10 + x_t)x_t))}{6(x_t - 1)^4} \ln \frac{x_n + x_t}{1 + x_n} \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} E_n(x_t, x_n) = & \frac{x_t(-17 - 8x_t + x_t^2 - 3x_n(21 - 6x_t + x_t^2) - 6x_n^2(10 - 9x_t + 3x_t^2))}{12(x_t - 1)^3} - \\ & - \frac{1}{2}x_n(1 + x_n)(-1 + 3x_n) \ln \frac{x_n}{1 + x_n} + \\ & + \frac{(1 + x_n)(x_t + 3x_t^2 + x_n^2(3 + x_t) - x_n(1 + (-10 + x_t)x_t))}{2(x_t - 1)^4} \ln \frac{x_n + x_t}{1 + x_n} \end{aligned} \quad (4.10b)$$

$$\begin{aligned}
Y_n(x_t, x_n) &= Z_n(x_t, x_n) = \\
&= \frac{x_t}{8(x_t - 1)^2} \left[x_t^2 - 8x_t + 7 + (3 + 3x_t + 7x_n - x_t x_n) \ln \frac{x_t + x_n}{1 + x_n} \right] \quad (4.10c)
\end{aligned}$$

Per sommare la serie di questi contributi si fa uso di relazioni simili a quelle utilizzate nel capitolo precedente, che permettono di invertire la sommatoria con l'integrale e di sommare l'integrando. Posto

$$J(R, \alpha) = \int_0^1 dy y^\alpha [\coth(\pi M_W R \sqrt{y}) - x_t^{1+\alpha} \coth(\pi m_t R \sqrt{y})] \quad (4.11)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} D_n(x_t, x_n) &= - \frac{x_t(-37 + x_t(44 + 17x_t))}{72(x_t - 1)^3} \\
&+ \frac{\pi M_W R}{2} \left[\int_0^1 dy \frac{(2y^{1/2} + 7y^{3/2} + 3y^{5/2})}{6} \coth(\pi M_W R \sqrt{y}) \right. \\
&+ \frac{(-2 + 3x_t)x_t(1 + 3x_t)}{6(x_t - 1)^4} J(R, -1/2) \\
&- \frac{1}{6(x_t - 1)^4} [x_t(1 + 3x_t) - (-2 + 3x_t)(1 + (-10 + x_t)x_t)] J(R, 1/2) \\
&+ \frac{1}{6(x_t - 1)^4} [(-2 + 3x_t)(3 + x_t) - (1 + (-10 + x_t)x_t)] J(R, 3/2) \\
&\left. - \frac{(3 + x_t)}{6(x_t - 1)^4} J(R, 5/2) \right] \quad (4.12a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} E_n(x_t, x_n) &= - \frac{x_t(-17 + (-8 + x_t)x_t)}{24(x_t - 1)^3} \\
&+ \frac{\pi M_W R}{4} \left[\int_0^1 dy (y^{1/2} + 2y^{3/2} - 3y^{5/2}) \coth(\pi M_W R \sqrt{y}) \right. \\
&- \frac{x_t(1 + 3x_t)}{(x_t - 1)^4} J(R, -1/2) \\
&+ \frac{1}{(x_t - 1)^4} [x_t(1 + 3x_t) - (1 + (-10 + x_t)x_t)] J(R, 1/2) \\
&- \frac{1}{(x_t - 1)^4} [(3 + x_t) - (1 + (-10 + x_t)x_t)] J(R, 3/2) \\
&\left. + \frac{(3 + x_t)}{(x_t - 1)^4} J(R, 5/2) \right]
\end{aligned}$$

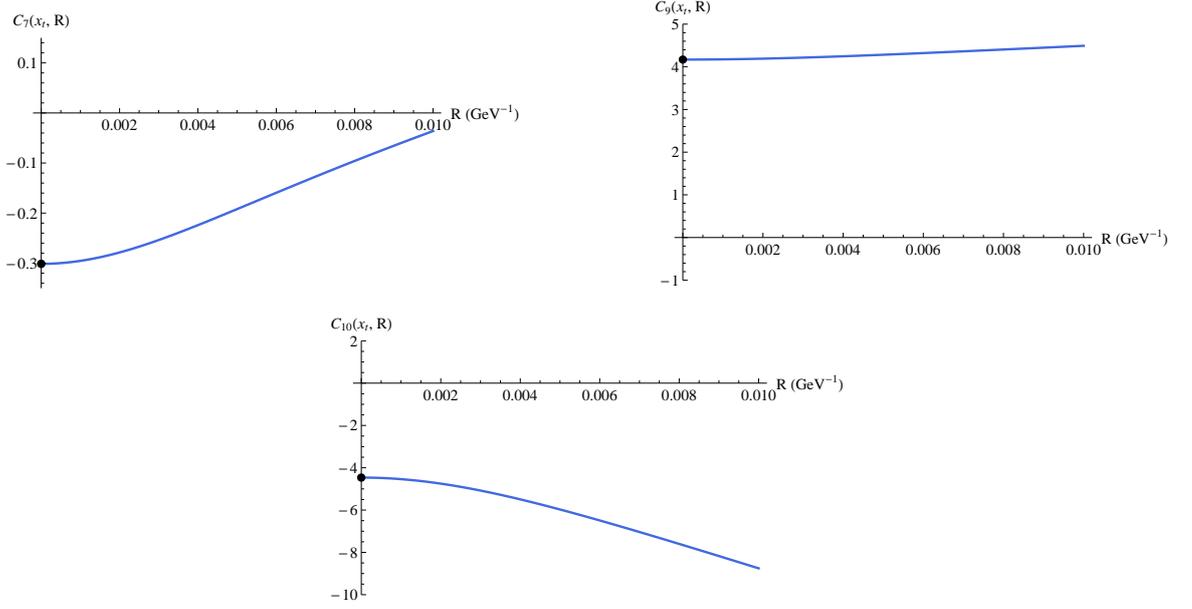


Figura 4.1: Deviazione rispetto al MS dei coefficienti di Wilson C_7 , C_9 , C_{10} nel Modello ACD al variare del raggio di compattificazione R .

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x_t, x_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x_t, x_n) = \\
 &= \frac{x_t(7-x_t)}{16(x_t-1)} - \frac{\pi M_W R x_t}{16(x_t-1)^2} [3(1+x_t)J(R, -1/2) + (x_t-7)J(R, 1/2)]
 \end{aligned}
 \tag{4.12b}$$

L'andamento dei coefficienti $C'_7(x_t, R)$, $C'_8(x_t, R)$, $C'_{10}(x_t, R)$ al variare del raggio di compattificazione della quinta dimensione è mostrato in Fig. 4.1; per $R = 0$ si ritrova il valore del MS (Tab. 4.1). Osserviamo che l'effetto della dimensione extra consiste in una soppressione del contributo della corrente elettromagnetica rispetto a quello di corrente neutra che invece è esaltato.

4.1.4 Fattori di forma

La transizione $b \rightarrow s$ avviene tra quark confinati all'interno degli adroni; in particolare, nei casi che andremo ad analizzare, il quark b è confinato nel B_s e il quark s nella η . Di conseguenza, i quark b e s non sono descritti dagli spinori di Dirac e quindi non possiamo applicare le proprietà che si utilizzano di solito per calcolare le transizioni tra particelle asintoticamente libere (ad esempio, le relazioni di completezza degli spinori).

In generale, l'ampiezza di transizione tra uno stato iniziale i e uno stato finale f è data da

$$\mathcal{M} = \langle f | H | i \rangle
 \tag{4.13}$$

Se, come nel nostro caso, non è banale esplicitare il legame tra gli stati iniziale e finale e gli stati coinvolti nella transizione, è necessario parametrizzare opportunamente

questo elemento di matrice mediante funzioni che, almeno in linea di principio, possono essere calcolate; queste funzioni prendono il nome di *fattori di forma*.

Nel caso di nostro interesse, ovvero la transizione $b \rightarrow s$ tra i due mesoni pseudoscalari B_s e η , la parametrizzazione standard è la seguente:

$$\langle \eta(p_\eta) | \bar{s} \gamma_\mu b | B_s(p_{B_s}) \rangle = \left[(p_{B_s} + p_\eta)_\mu - \frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} q_\mu \right] F_1^\eta(q^2) - \left[\frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} q_\mu \right] F_0^\eta(q^2) \quad (4.14a)$$

$$\langle \eta(p_\eta) | \bar{s} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu b | B_s(p_{B_s}) \rangle = \left[(p_{B_s} + p_\eta)_\mu q^2 - (m_{B_s}^2 - m_\eta^2) q_\mu \right] \frac{F_T^\eta(q^2)}{m_{B_s} + m_\eta} \quad (4.14b)$$

dove $q_\mu = (p_{B_s} - p_\eta)_\mu$. Essa è determinata combinando nel modo più generale possibile i vettori indipendenti che si possono costruire con le quantità caratteristiche del sistema, compatibilmente con i vincoli imposti dalle caratteristiche del sistema stesso.

Poiché i fattori di forma parametrizzano il confinamento dei due quark all'interno dei rispettivi adroni, e quindi le loro interazioni sia con il quark spettatore sia con i quark del mare e i gluoni, essi sono quantità non perturbative. I fattori di forma sono calcolabili con vari metodi non perturbativi, ma in ogni caso portano un errore piuttosto elevato. Nel seguito, utilizzeremo e confronteremo i fattori di forma calcolati con tre diversi approcci. In nessuno dei tre è però disponibile il risultato per la transizione $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)}$; utilizzeremo il risultato che essi forniscono per la transizione $B^0 \rightarrow K^0$, che differisce solo per il quark spettatore (d piuttosto che s), assumendo quindi che i fattori di forma siano invarianti rispetto a $SU(3)_f$ almeno per il flavour del quark spettatore. In questa approssimazione, si ha

$$\langle K | \bar{s} \Gamma b | B \rangle = \langle s \bar{q} | \bar{s} \Gamma b | b \bar{q} \rangle \equiv \langle s \bar{s} | \bar{s} \Gamma b | b \bar{s} \rangle = -\frac{1}{\sin \phi} \langle \eta | \bar{s} \Gamma b | B_s \rangle \quad (4.15)$$

in cui ϕ è l'angolo di mixing tra η e η' nello schema QF. Pertanto, i fattori di forma per $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)}$ si ricavano da quelli per $B^0 \rightarrow K^0$ utilizzando le relazioni

$$F^{B_s \rightarrow \eta}(q^2) \simeq -F^{B \rightarrow K}(q^2) \sin \phi \quad (4.16a)$$

$$F^{B_s \rightarrow \eta'}(q^2) \simeq F^{B \rightarrow K}(q^2) \cos \phi \quad (4.16b)$$

- **Set I:** ottenuto mediante le three-point function QCD sum rules [44].

I risultati possono essere scritti nel modo seguente:

$$F_0(q^2) = \frac{F_0(0)}{\left(1 - \frac{q^2}{m_0^2}\right)} \quad (4.17a)$$

$$F_1(q^2) = \frac{F_1(0)}{\left(1 - \frac{q^2}{m_1^2}\right)} \quad (4.17b)$$

$$F_T(q^2) = -\frac{F_T(0)}{\left(1 - \frac{q^2}{m_0^2}\right) \left(1 - \frac{q^2}{m_1^2}\right)} \quad (4.17c)$$

dove i parametri valgono

$F_0(0)$	0.25 ± 0.03
$F_1(0)$	0.25 ± 0.03
$F_T(0)$	0.28 ± 0.06
m_0	7 GeV
m_1	5 GeV

- **Set II:** ottenuto mediante le Light-Cone Sum Rules (LCSRs) [45].

Anche in questo caso risultati possono essere scritti in un modo simile:

$$F_0(q^2) = \frac{r^{(0)}}{1 - \frac{q^2}{m_0^2}} \quad (4.18a)$$

$$F_1(q^2) = \frac{r_1^{(1)}}{1 - \frac{q^2}{m_1^2}} + \frac{r_2^{(1)}}{\left(1 - \frac{q^2}{m_1^2}\right)^2} \quad (4.18b)$$

$$F_T(q^2) = - \left[\frac{r_1^{(T)}}{1 - \frac{q^2}{m_1^2}} + \frac{r_2^{(T)}}{\left(1 - \frac{q^2}{m_1^2}\right)^2} \right] \quad (4.18c)$$

dove i parametri valgono

$r^{(0)}$	$0.3302 \pm 13\%$
$r_1^{(1)}$	$0.1616 \pm 13\%$
$r_2^{(1)}$	$0.1730 \pm 13\%$
$r_1^{(T)}$	$0.1614 \pm 13\%$
$r_2^{(T)}$	$0.1981 \pm 13\%$
m_0	6.12 GeV
m_1	5.41 GeV

- **Set III:** ottenuto mediante le LCSRs nell'approssimazione di Soft-Collinear Effective Theory (SCET) [46].

In questa approssimazione, si assume che il quark pesante dello stato iniziale interagisca con gli altri gradi di libertà con scambi di energia molto minori della sua massa, in modo da poter scrivere il suo impulso come

$$p_Q^\mu \simeq m_Q v^\mu \quad (4.19)$$

Inoltre, se il mesone leggero è emesso con alta energia, e cioè se $q^2 \ll M^2$, allora si può trascurare la massa e assumere che tutto il momento sia portato dal quark emesso, che quindi è

$$p'_q{}^\mu \simeq E' n_-^\mu \quad (4.20)$$

dove $n_- = (1, 0, 0, 1)$. In questa approssimazione, le Lagrangiane di QCD dei due quark assumono una forma semplificata

$$\mathcal{L}_Q \simeq \bar{Q}_v (i v \cdot D) Q_v \quad (4.21a)$$

$$\mathcal{L}_q \simeq \bar{q}_n \frac{\not{n}_+}{2} (i n_- \cdot D) q_n \quad (4.21b)$$

dove $n_+ = (1, 0, 0, -1)$ e nel rest frame del B_s $n_+ = 2v - n_-$, $D^\mu = \partial^\mu - i g_s A^\mu$ è la derivata covariante della QCD, $Q_v(x) = e^{im_{Qv} \cdot x} \frac{1+\not{v}}{2} Q(x)$ e $q_n(x) = e^{iE_q n_- \cdot x} \frac{\not{n}_- \not{n}_+}{4} q(x)$ sono le componenti dominanti degli spinori dei quark pesante e leggero. Poiché queste Lagrangiane non contengono matrici di Dirac, gli elementi di matrice tra stato iniziale e finale non dipenderanno dalla struttura della corrente, e quindi i fattori di forma non saranno tra loro indipendenti; in particolare, si trova che sono legati ad un'unica funzione $\xi(q^2)$ secondo

$$F_0(q^2) = \frac{n_+ \cdot p'}{m_{B_s}} \xi(q^2) \quad (4.22a)$$

$$F_1(q^2) = \xi(q^2) \quad (4.22b)$$

$$F_T(q^2) = -\frac{m_{B_s} + m_\eta}{m_{B_s}} \xi(q^2) \quad (4.22c)$$

dove $n_+ \cdot p'$ si può scrivere

$$n_+ \cdot p' = m_{B_s} \left(1 - \frac{q^2}{m_{B_s}^2} \right) + \frac{m_\eta^2}{m_{B_s}} - \frac{m_\eta^2}{m_{B_s}} \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{m_{B_s}^2} \right)} \quad (4.23)$$

La funzione $\xi^{B_s \rightarrow \eta}$ si ottiene da quella $\xi^{B \rightarrow K}$ come è stato mostrato; il risultato per $\xi^{B \rightarrow K}(q^2)$ si calcola mediante le SCET-LCSRs e può essere parametrizzato nel modo seguente

$$\xi(q^2) = \xi(m_B) \left[-a + \frac{b}{(n_+ \cdot p')} + c (n_+ \cdot p') \right] \quad (4.24)$$

dove i parametri valgono

$\xi(m_B)$	0.335 ± 0.09
a	2.418
b	13.765
c	0.154

In Fig. 4.2 è mostrato l'andamento di ciascun fattore di forma in funzione di q^2 per ogni set di calcolo.

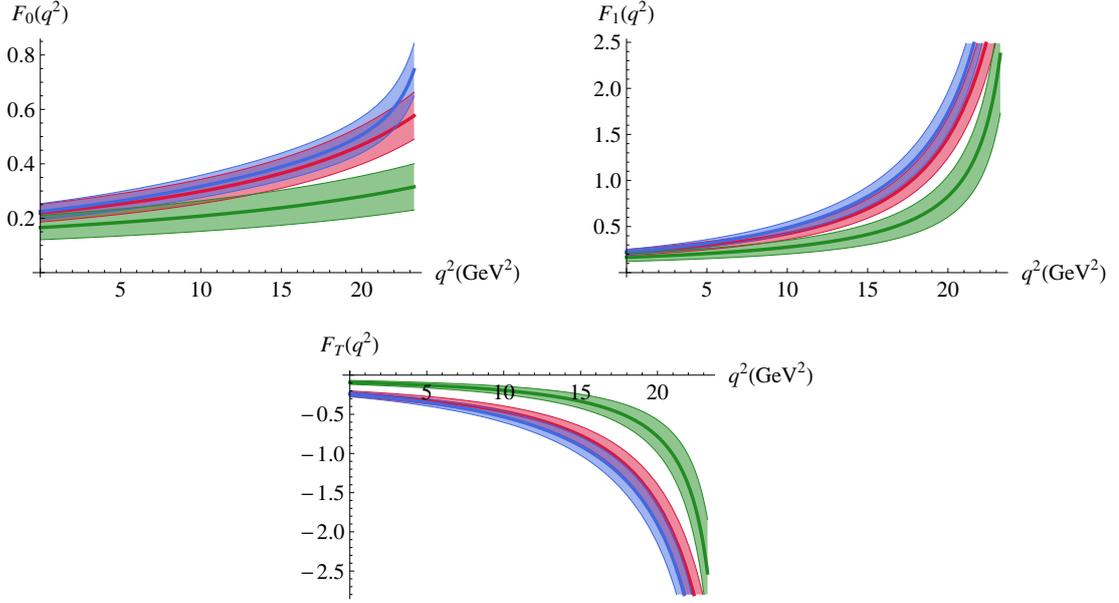


Figura 4.2: Fattori di forma $F_0(q^2)$, $F_1(q^2)$, $F_T(q^2)$ per la transizione $B_s \rightarrow \eta$: set I in rosso, set II in azzurro, set III in verde.

4.2 I decadimenti rari $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell \bar{\ell}$

In questa sezione descriviamo l'analisi dei canali $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell \bar{\ell}$, dove ℓ può essere un leptone carico o un neutrino. I risultati riportati nel seguito sono stati da noi ricavati in [47].

4.2.1 Decadimenti $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} e^+ e^-$ e $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \mu^+ \mu^-$

Consideriamo il decadimento che coinvolge due leptoni carichi: $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell^+ \ell^-$. Abbiamo elencato e analizzato gli operatori locali che contribuiscono alla transizione $b \rightarrow s$; di questi, $O_3 \dots O_6$ e O_8 non portano alla formazione di leptoni; O_1 e O_2 descrivono la formazione di risonanze $c\bar{c}$ che possono essere facilmente identificate e tagliate dallo spettro sperimentale; di conseguenza, al processo in esame contribuiscono solo gli operatori O_7 , O_9 , O_{10} . Negli operatori O_9 e O_{10} la coppia $\ell^+ \ell^-$ è generata dal decadimento di una Z integrata negli operatori stessi; invece, in O_7 essa è prodotta dal campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$. Scritto questo campo in funzione del potenziale A_μ , notiamo che, poiché sia $\sigma^{\mu\nu}$ che $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ sono antisimmetrici negli indici μ e ν , il loro prodotto può essere scritto come

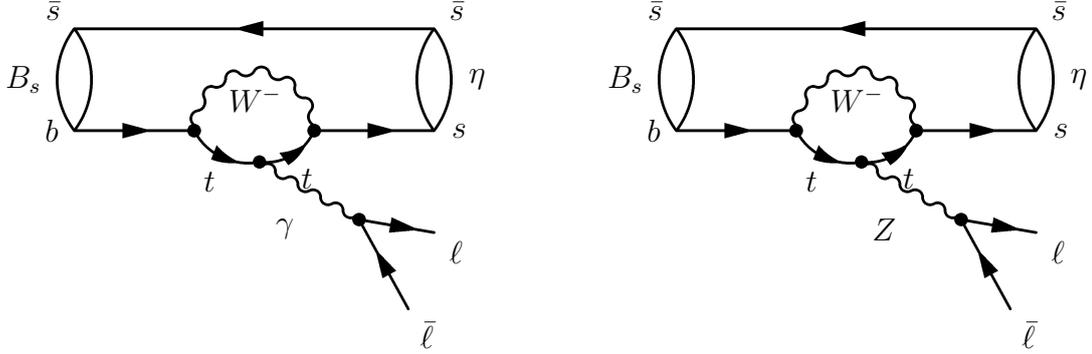
$$\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\sigma^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \quad (4.25)$$

Ora se consideriamo la trasformata di Fourier dei potenziali, si ha

$$\partial_\mu A_\nu \rightarrow i q_\mu A_\nu \quad (4.26)$$

$$\square A_\mu = j_\mu u \rightarrow A_\mu = -\frac{1}{q^2} j_\mu = -\frac{1}{q^2} e \bar{\ell} \gamma_\mu \ell \quad (4.27)$$

I contributi a questo processo sono quindi



L'Hamiltoniana efficace della transizione $b \rightarrow s \bar{\ell} \ell$ è pertanto

$$H = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{tb} V_{ts}^* \frac{e^2}{8\pi^2} \left[-C_7 m_b (\bar{s}_L i \sigma^{\mu\nu} q_\nu b_R) \frac{1}{q^2} \bar{\ell} \gamma_\mu \ell + \frac{1}{2} (\bar{s}_L \gamma^\mu b_L) \bar{\ell} \gamma_\mu (C_9 + C_{10} \gamma^5) \ell \right] \quad (4.28)$$

Come abbiamo anticipato, l'ampiezza invariante è data dell'elemento di matrice tra gli stati adronici della precedente hamiltoniana:

$$\mathcal{M} = \langle \eta(p') | H | B_s(p) \rangle \quad (4.29)$$

Utilizzando quindi le parametrizzazioni mediante i fattori di forma, e osservando che

$$\langle \eta(p_\eta) | \bar{s}_L \gamma_\mu b_L | B_s(p_{B_s}) \rangle = \frac{1}{2} \langle \eta(p_\eta) | \bar{s} \gamma_\mu b | B_s(p_{B_s}) \rangle \quad (4.30a)$$

$$\langle \eta(p_\eta) | \bar{s}_L i \sigma_{\mu\nu} q^\nu b_L | B_s(p_{B_s}) \rangle = \frac{1}{2} \langle \eta(p_\eta) | \bar{s} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu b | B_s(p_{B_s}) \rangle \quad (4.30b)$$

essa diventa

$$\mathcal{M} = \frac{G_F V_{tb} V_{ts}^* e^2}{4\sqrt{2}\pi^2} \left\{ -C_7 m_b \left[(p+p')^\mu q^2 - (m_{B_s}^2 - m_\eta^2) q^\mu \right] \frac{F_T(q^2)}{m_{B_s} + m_\eta} \frac{1}{q^2} \bar{\ell}(k) \gamma_\mu \ell(k') \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(p+p')_\mu F_1(q^2) + \frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} (F_0(q^2) - F_1(q^2)) \right] \bar{\ell} \gamma_\mu (C_9 + C_{10} \gamma^5) \ell \right\} \quad (4.31)$$

Fin qui il discorso è valido per tutti e tre i flavour delle coppie di leptoni carichi. Se però ci limitiamo ai leptoni molto più leggeri del B_s e della η (e e μ), possiamo trascurarne le masse e quindi utilizzare l'equazione di Dirac massless per semplificare la (4.31), che diventa

$$\mathcal{M} = \frac{G_F e^2 V_{tb} V_{ts}^*}{4\sqrt{2}\pi^2} \left\{ \frac{2C_7 m_b F_T(q^2)}{m_{B_s} + m_\eta} \bar{u}(k) \not{p} v(k') + F_1(q^2) \bar{u}(k) \not{p} (C_9 + C_{10} \gamma^5) v(k') \right\} \quad (4.32)$$

Nel sistema di riposo del B_s , la massa invariante dei due leptoni, che sono carichi e quindi sono rivelabili direttamente, è $M_{\ell^+ \ell^-}^2 = q^2$ e può variare tra 0 e $(m_{B_s} - m_\eta)^2$;

pertanto è utile calcolare l'ampiezza di decadimento differenziale in funzione di q^2 . Essa vale

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dq^2} \left(B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell^+ \ell^- \right) = \frac{G_F^2 |V_{tb} V_{ts}^*|^2 \alpha^2}{1536 \pi^5 m_{B_s}^3} \left\{ \left| -\frac{2C_7 m_b}{m_{B_s} + m_\eta} F_T(q^2) + C_9 F_1(q^2) \right|^2 + \right. \\ \left. + |C_{10} F_1(q^2)|^2 \right\} \lambda^{3/2} (m_{B_s}^2, m_\eta^2, q^2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

e, come ci aspettiamo per un decadimento a tre corpi di questo tipo, dipende dalla funzione triangolare

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \quad (4.34)$$

Dall'ampiezza di decadimento differenziale si ottiene quella integrale, che per definizione è

$$\Gamma = \int_0^{(m_{B_s} - m_\eta)^2} \frac{d\Gamma}{dq^2} dq^2 \quad (4.35)$$

In Fig. 4.3 e in Fig. 4.4 sono mostrati i branching ratios (calcolati utilizzando come vita media del B_s il valore $\tau_{B_s} = 1.470 \times 10^{-12}$ s [12]) rispettivamente per i decadimenti $B_s \rightarrow \eta \ell^+ \ell^-$ e $B_s \rightarrow \eta' \ell^+ \ell^-$, per tutti e tre i set di fattori di forma, mettendo in evidenza le deviazioni del Modello ACD dal MS. Osserviamo che in tutti i casi il Modello ACD prevede una larghezza di decadimento maggiore rispetto al MS.

In Tab. 4.2 sono elencati i risultati numerici del branching ratio integrale nel MS per ogni set di fattori di forma. Nè per questi decadimenti, nè per i due successivi decadimenti rari che andremo ad analizzare, sono disponibili al momento dati sperimentali.

	set I	set II	set III
$BR(B_s \rightarrow \eta \ell^+ \ell^-) \times 10^7$	1.1 ± 0.3	2.5 ± 0.7	3.2 ± 1.7
$BR(B_s \rightarrow \eta' \ell^+ \ell^-) \times 10^7$	1.1 ± 0.3	2.3 ± 0.6	2.9 ± 1.5

Tabella 4.2: Branching ratio integrali per $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell^+ \ell^-$ per ogni set di fattori di forma, calcolati nel MS.

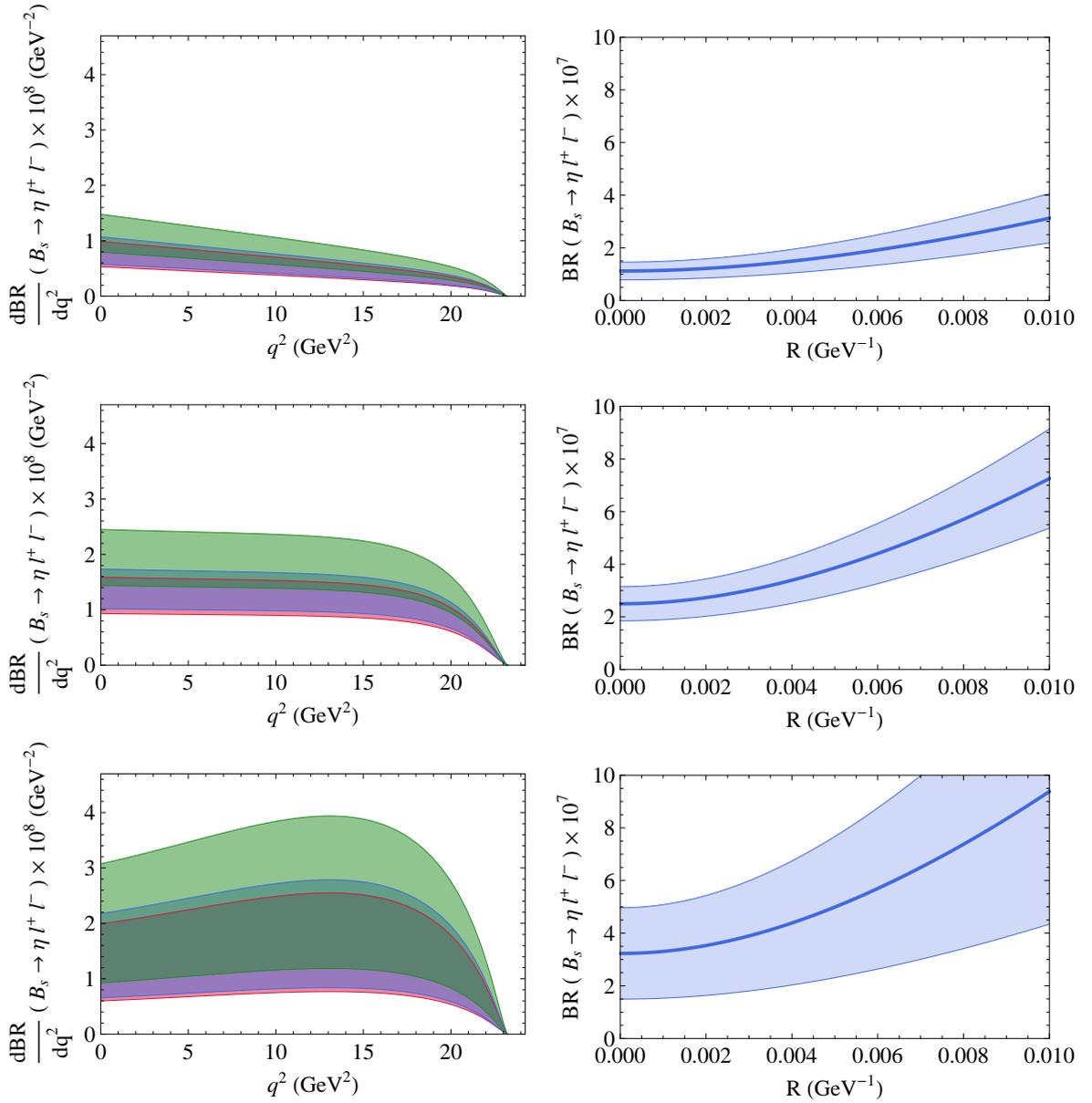


Figura 4.3: Branching ratio differenziale (a sinistra) e integrale (a destra) della transizione $B_s \rightarrow \eta l^+ l^-$, ottenuti utilizzando il set I (prima riga), il set II (seconda riga) e il set III (terza riga) di fattori di forma. I branching ratio differenziali sono ottenuti nel MS (in rosso), nel Modello ACD con $R = 1/500$ GeV $^{-1}$ (in azzurro), nel Modello ACD con $R = 1/200$ GeV $^{-1}$ (in verde).

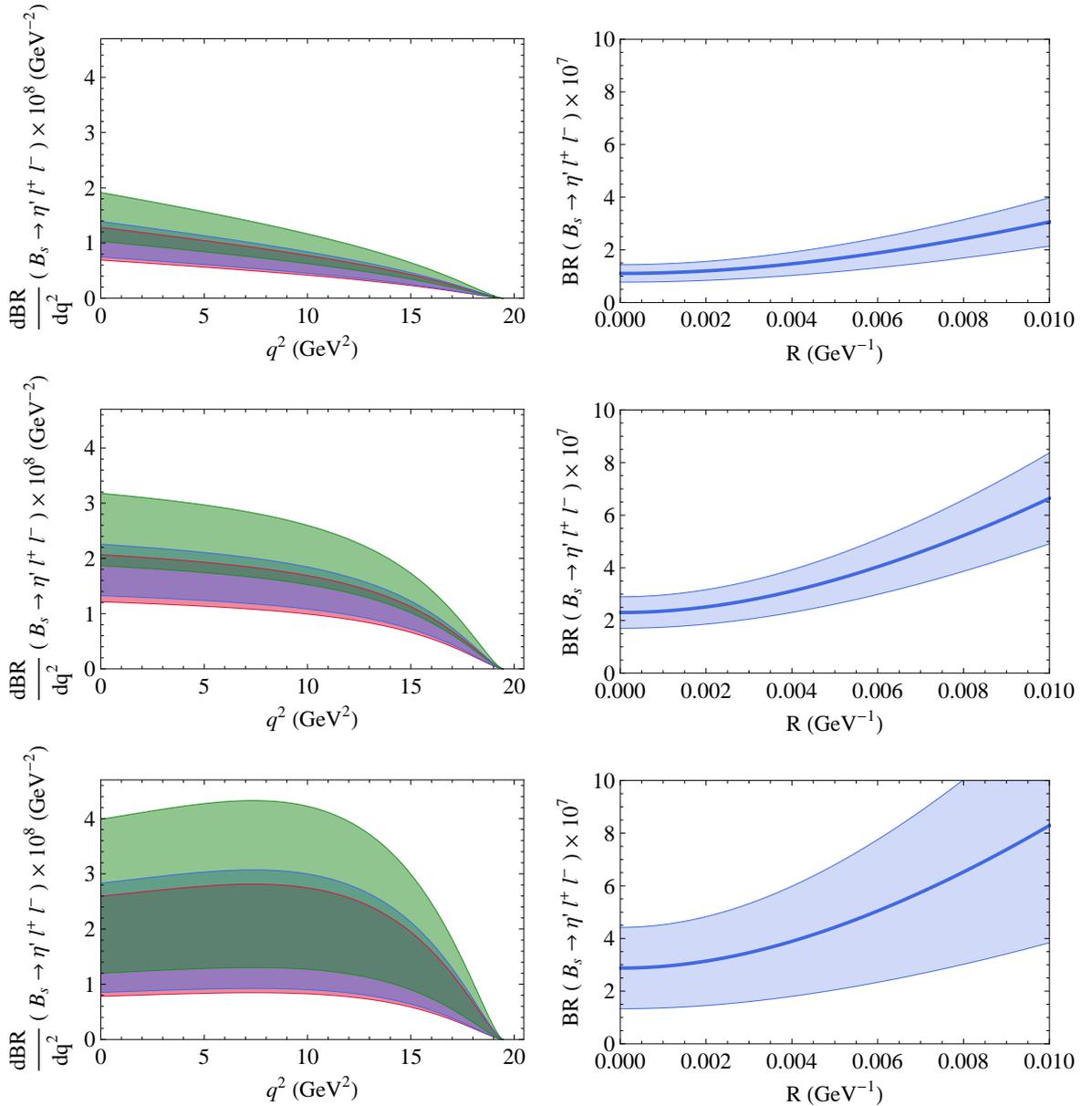


Figura 4.4: Branching ratio differenziale (a sinistra) e integrale (a destra) della transizione $B_s \rightarrow \eta' \ell^+ \ell^-$, ottenuti utilizzando il set I (prima riga), il set II (seconda riga) e il set III (terza riga) di fattori di forma. I branching ratio differenziali sono ottenuti nel MS (in rosso), nel Modello ACD con $R = 1/500$ GeV $^{-1}$ (in azzurro), nel Modello ACD con $R = 1/200$ GeV $^{-1}$ (in verde).

4.2.2 Decadimento $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)}\tau^+\tau^-$

Abbiamo visto che l'elemento di matrice invariante per i processi $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)}\ell^+\ell^-$ è la (4.31). Il leptone τ , però, ha massa $m_\tau = 1.777$ GeV che naturalmente non può essere trascurata; quindi dobbiamo rimanicolare la (4.31) utilizzando questa volta l'equazione di Dirac con massa non nulla. Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{G_F \alpha V_{tb} V_{ts}^*}{2\sqrt{2}\pi} \left\{ \left[C_9 F_1 - 2C_7 (m_b m_s) \frac{F_T}{m_{B_s} + m_\eta} \right] \bar{u}(k) \not{p} v(k') + \right. \\ & + 2 \left[C_{10} F_1 \right] \bar{u}(k) \left[\not{p} - m_\tau \left(\frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} + 1 \right) \right] \gamma^5 v(k') + \\ & \left. + 2m_\tau \left(\frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} + 1 \right) \left[C_{10} F_0 \right] \bar{u}(k) \gamma^5 v(k') \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Da quest'ultima ricaviamo la larghezza di decadimento differenziale, che vale

$$\frac{d\Gamma}{dq^2} \left(B_s \rightarrow \eta^{(\prime)}\tau^+\tau^- \right) = \frac{G_F^2 |V_{tb} V_{ts}^*|^2 \alpha^2 \lambda^{1/2} (m_{B_s}^2, m_\eta^2, q^2)}{2^9 \pi^5 m_{B_s}^3} \sqrt{1 - \frac{4m_\tau^2}{q^2}} \frac{1}{3q^2} p(q^2) \quad (4.37)$$

dove

$$p(q^2) = 6m_\tau^2 (m_{B_s}^2 - m_\eta^2)^2 |b(q^2)|^2 + \lambda(m_{B_s}^2, m_\eta^2, q^2) [(2m_\tau^2 + sq^2)|c(q^2)|^2 - (4m_\tau^2 - q^2)|a(q^2)|^2] \quad (4.38a)$$

$$a(q^2) = C_{10} F_1(q^2) \quad (4.38b)$$

$$b(q^2) = C_{10} F_0(q^2) \quad (4.38c)$$

$$c(q^2) = C_9 F_1(q^2) - 2(m_b + m_q) C_7 \frac{F_T(q^2)}{m_{B_s} + m_\eta} \quad (4.38d)$$

e in cui questa volta q^2 varia nell'intervallo $4m_\tau^2 \leq q^2 \leq (m_{B_s} - m_{\eta^{(\prime)}})^2$.

In Fig. 4.5 e in Fig. 4.6 sono mostrati i branching ratio rispettivamente per i decadimenti $B_s \rightarrow \eta\tau^+\tau^-$ e $B_s \rightarrow \eta'\tau^+\tau^-$ per i tre set di fattori di forma e la loro dipendenza dal raggio di compattificazione nel Modello ACD. Anche in questo caso il Modello ACD prevede una larghezza di decadimento maggiore rispetto al MS.

In Tab. 4.3 sono elencati i risultati numerici del branching ratio integrale nel MS per ogni set di fattori di forma.

	set I	set II	set III
$BR(B_s \rightarrow \eta\tau^+\tau^-) \times 10^8$	3.0 ± 0.5	8.0 ± 1.5	10.2 ± 5.6
$BR(B_s \rightarrow \eta'\tau^+\tau^-) \times 10^8$	1.6 ± 0.3	2.3 ± 0.8	4.7 ± 2.5

Tabella 4.3: Branching ratio integrali per $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)}\tau^+\tau^-$ per ogni set di fattori di forma, calcolati nel MS.

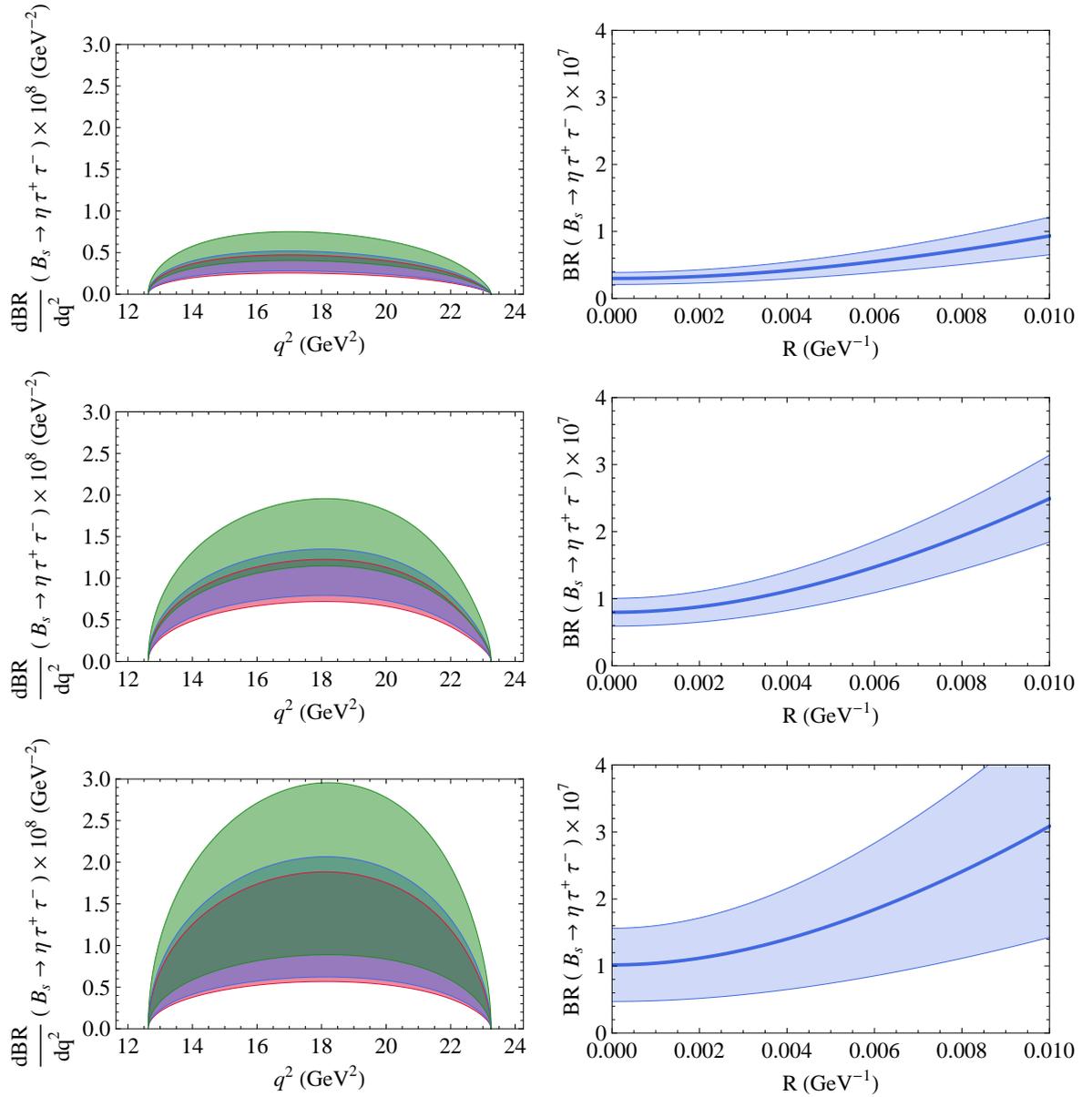


Figura 4.5: Branching ratio differenziale (a sinistra) e integrale (a destra) della transizione $B_s \rightarrow \eta \tau^+ \tau^-$, ottenuti utilizzando il set I (prima riga), il set II (seconda riga) e il set III (terza riga) di fattori di forma. I branching ratio differenziali sono ottenuti nel MS (in rosso), nel Modello ACD con $R = 1/500$ GeV $^{-1}$ (in azzurro), nel Modello ACD con $R = 1/200$ GeV $^{-1}$ (in verde).

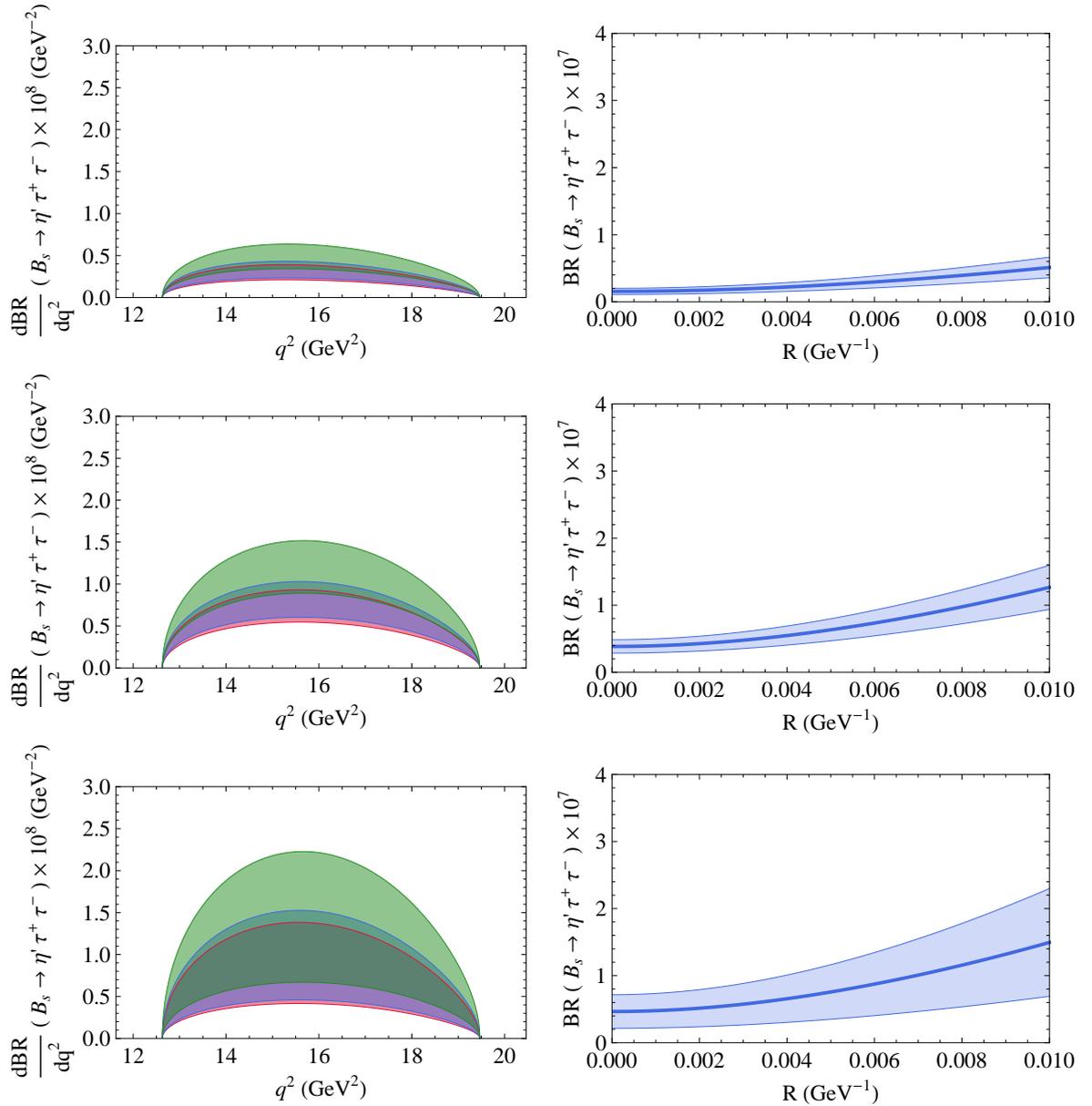


Figura 4.6: Branching ratio differenziale (a sinistra) e integrale (a destra) della transizione $B_s \rightarrow \eta' \tau^+ \tau^-$, ottenuti utilizzando il set I (prima riga), il set II (seconda riga) e il set III (terza riga) di fattori di forma. I branching ratio differenziali sono ottenuti nel MS (in rosso), nel Modello ACD con $R = 1/500 \text{ GeV}^{-1}$ (in azzurro), nel Modello ACD con $R = 1/200 \text{ GeV}^{-1}$ (in verde).

4.2.3 Decadimento $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \nu \bar{\nu}$

Per il decadimento che coinvolge i neutrini vale lo stesso discorso fatto per i leptoni carichi sul ruolo degli operatori locali, eccetto per il fatto che i neutrini non possono essere prodotti dal decadimento di un fotone; pertanto neanche l'operatore O_7 contribuisce.

Possiamo riscrivere quindi l'Hamiltoniana efficace per questo processo come

$$H = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{2\pi \sin^2(\theta_W)} V_{ts} V_{tb}^* (C_L O_L + C_R O_R) \quad (4.39)$$

con

$$O_L = \bar{b} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) s \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu \quad (4.40a)$$

$$O_R = \bar{b} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) s \bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma^5) \nu \quad (4.40b)$$

dove lasciando liberi i coefficienti C_L e C_R teniamo conto anche di possibili violazioni della simmetria elettrodebole $SU(2)_L \times U(1)_Y$; nel MS si ha

$$c_L^{SM} = \eta_X X(x_t) \quad (4.41a)$$

$$c_R^{SM} = 0 \quad (4.41b)$$

in cui si può porre il coefficiente di QCD $\eta_X = 1$ [48]. La funzione $X(x_t)$ deriva dal calcolo del diagramma del processo; nel MS si trova [37]

$$X(x_t) = \frac{x_t}{8} \left[\frac{x_t + 2}{x_t - 1} + \frac{3x_t - 6}{(x_t - 1)^2} \ln x_t \right] \quad (4.42)$$

Come nel caso dei leptoni carichi, questa è la funzione che viene modificata dai contributi delle eccitazioni di Kaluza-Klein nel Modello ACD; essa diventa

$$X'(x_t, R) = X(x_t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_t, x_n) \quad (4.43)$$

con $X_n(x_t, x_n) = Y_n(x_t, x_n) = Z_n(x_t, x_n)$ introdotte e calcolate nel paragrafo precedente. L'andamento del coefficiente di Wilson C_L al variare del raggio di compattificazione R è mostrato in Fig. 4.7.

Dato che i neutrini non possono essere rivelati direttamente, è utile definire E_{miss} l'energia della coppia neutrino-antineutrino nel sistema di riposo del B_s e considerare la variabile adimensionale $x = E_{\text{miss}}/m_{B_s}$, in funzione della quale $q^2 = m_{B_s}^2 (2x - 1) + m_\eta^2$ e che può variare nel range

$$\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{m_\eta}{m_{B_s}} \right)^2 \right] \leq x \leq 1 - \frac{m_\eta}{m_{B_s}} \quad (4.44)$$

In termini di questa variabile, l'ampiezza di decadimento differenziale è

$$\frac{d\Gamma}{dx} \left(B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \bar{\nu} \nu \right) = \frac{(|c_L|^2 + |c_R|^2) |F_1(q^2)|^2}{16\pi^3 m_{B_s}} \lambda^{3/2} (m_{B_s}^2, m_\eta^2, q^2) \quad (4.45)$$

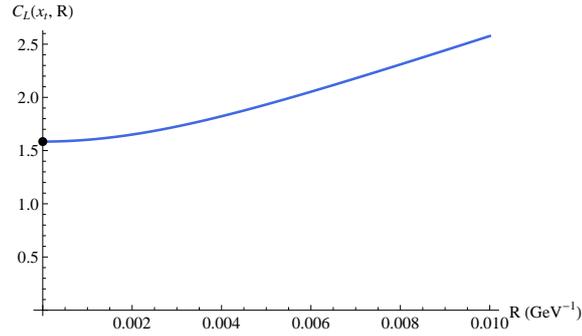


Figura 4.7: Deviazione rispetto al MS del coefficiente di Wilson C_L nel Modello ACD al variare del raggio di compattificazione R .

in cui abbiamo sommato sulle tre specie di neutrini che chiaramente non possono essere distinte.

In Fig. 4.8 e in Fig. 4.9 sono mostrati i branching ratios rispettivamente per i decadimenti in η e in η' ; anche in questo caso nel Modello ACD prevede una larghezza di decadimento maggiore rispetto al MS.

In Tab. 4.4 sono elencati i risultati numerici del branching ratio integrale nel MS.

	set I	set II	set III
$BR(B_s \rightarrow \eta \nu \bar{\nu}) \times 10^6$	0.9 ± 0.2	2.5 ± 0.7	2.7 ± 1.5
$BR(B_s \rightarrow \eta' \nu \bar{\nu}) \times 10^6$	0.9 ± 0.2	2.1 ± 0.5	2.4 ± 1.3

Tabella 4.4: Branching ratio integrali per $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell^+ \ell^-$ per ogni set di fattori di forma, calcolati nel MS.

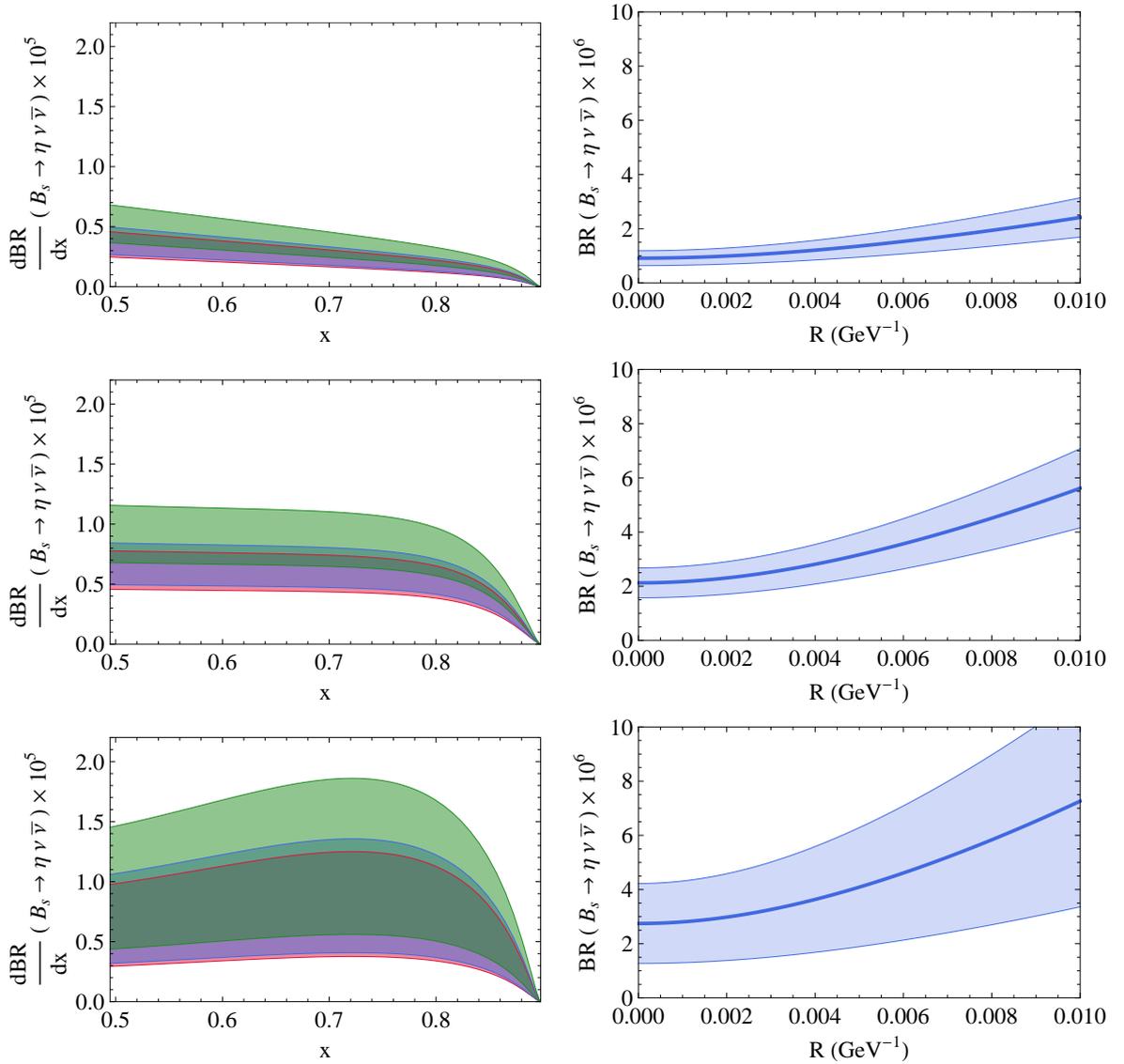


Figura 4.8: Branching ratio differenziale (a sinistra) e integrale (a destra) della transizione $B_s \rightarrow \eta \nu \bar{\nu}$, ottenuti utilizzando il set I (prima riga), il set II (seconda riga) e il set III (terza riga) di fattori di forma. I branching ratio differenziali sono ottenuti nel MS (in rosso), nel Modello ACD con $R = 1/500 \text{ GeV}^{-1}$ (in azzurro), nel Modello ACD con $R = 1/200 \text{ GeV}^{-1}$ (in verde).

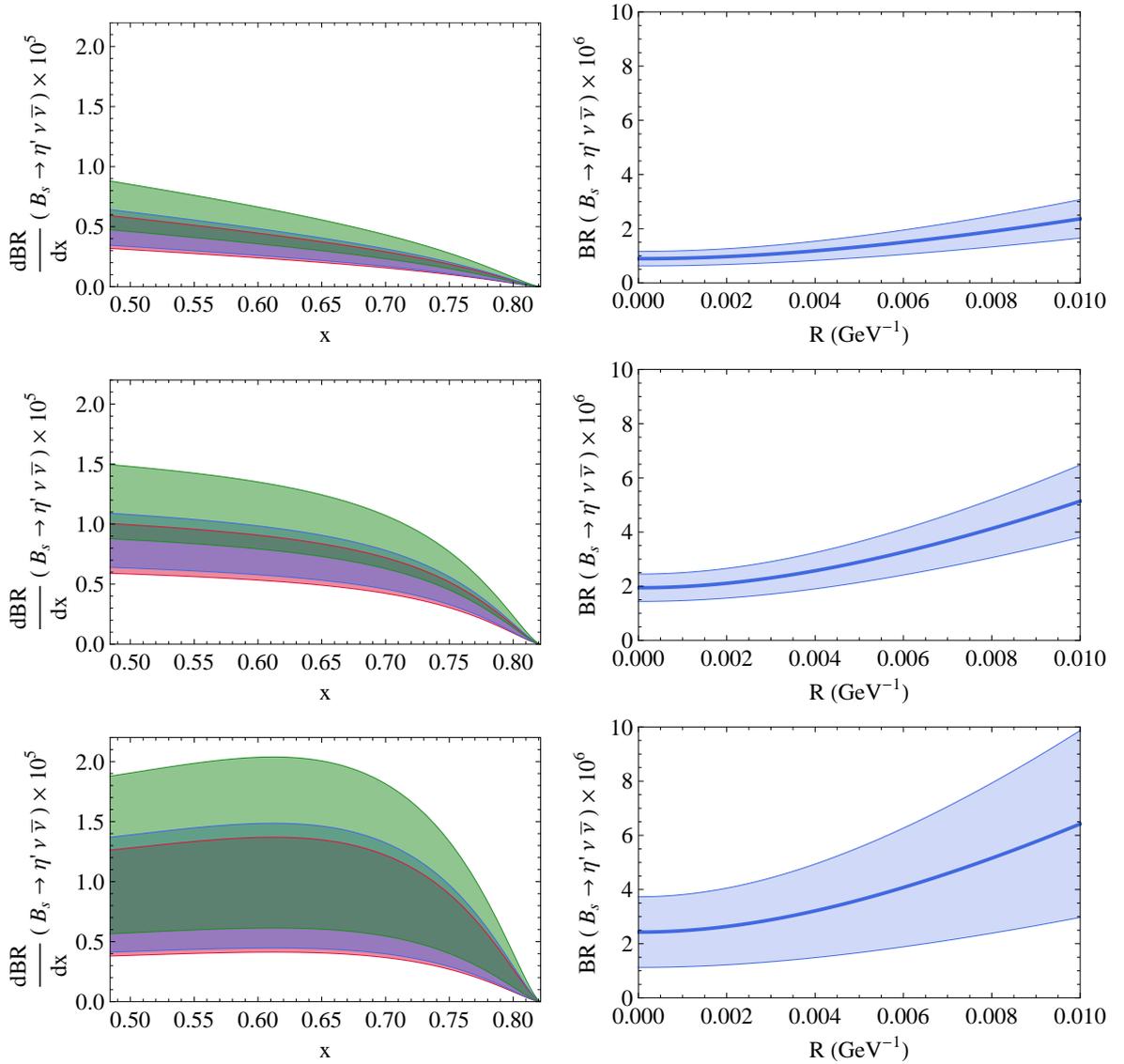


Figura 4.9: Branching ratio differenziale (a sinistra) e integrale (a destra) della transizione $B_s \rightarrow \eta' \nu \bar{\nu}$, ottenuti utilizzando il set I (prima riga), il set II (seconda riga) e il set III (terza riga) di fattori di forma. I branching ratio differenziali sono ottenuti nel MS (in rosso), nel Modello ACD con $R = 1/500 \text{ GeV}^{-1}$ (in azzurro), nel Modello ACD con $R = 1/200 \text{ GeV}^{-1}$ (in verde).

4.3 Il decadimento $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} J/\psi$

4.3.1 Calcolo del branching ratio

Il decadimento $B_s \rightarrow \phi J/\psi$ è stato considerato finora il “golden mode” per lo studio della violazione di CP nel sistema del B_s e per la stima dell’angolo β_s del triangolo di unitarietà; questo perché l’asimmetria di questo decadimento è dominata dalla violazione di CP nell’interferenza e pertanto si può effettuare un’analisi molto chiara dei dati. Questo canale di decadimento presenta però lo svantaggio che lo stato finale è costituito da due particelle vettoriali, e pertanto la sua parità CP dipende dal loro momento angolare relativo.

Questo problema non si presenta per il canale $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} J/\psi$; esso ha gli stessi vantaggi di pulizia in quanto le η hanno lo stesso flavour della ϕ , ma lo stato finale è autostato di CP. D’altra parte, questo processo costituisce una sfida sperimentale, in quanto le η decadono principalmente in due fotoni, che è necessario rivelare ed analizzare per ricostruirle.

Partiamo nuovamente dall’Hamiltoniana della transizione $b \rightarrow s$ ottenuta mediante la OPE:

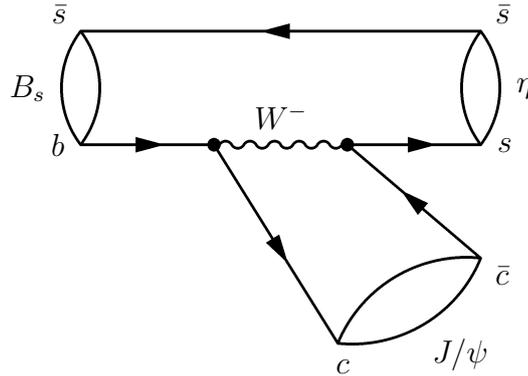
$$H = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{tb} V_{ts}^* \sum_{i=1}^{10} C_i(\mu) O_i(\mu) \quad (4.46)$$

Gli operatori che determinano la produzione dello stato $c\bar{c}$ sono

$$O_1 = (\bar{c}_{L\alpha} \gamma^\mu b_{L\beta}) (\bar{s}_{L\beta} \gamma_\mu c_{L\alpha}) \quad (4.47a)$$

$$O_2 = (\bar{c}_{L\alpha} \gamma^\mu b_{L\alpha}) (\bar{s}_{L\beta} \gamma_\mu c_{L\beta}) \quad (4.47b)$$

I contributi a questo processo sono quindi del tipo



Utilizzando le identità di Fierz, essi possono essere riscritti come

$$O_1 = (\bar{s}_{L\beta} \gamma^\mu b_{L\beta}) (\bar{c}_{L\alpha} \gamma_\mu c_{L\alpha}) \quad (4.48a)$$

$$O_2 = (\bar{s}_{L\beta} \gamma^\mu b_{L\alpha}) (\bar{c}_{L\alpha} \gamma_\mu c_{L\beta}) \quad (4.48b)$$

Ora, poiché i quark sono confinati all'interno degli adroni, dobbiamo calcolare elementi di matrice che saranno del tipo

$$\langle \eta J/\psi | (\bar{s}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{c}_L \gamma_\mu c_L) | B_s \rangle \quad (4.49)$$

Si tratta di un calcolo non banale. Applichiamo l'ipotesi di *fattorizzazione naive* [49]: essa è basata sull'evoluzione spazio-temporale dei prodotti di decadimento, ed è accurata quando nello stato iniziale c'è un quark pesante e nello stato finale solo quark leggeri. A livello dei quark, il processo è $b \rightarrow s(c\bar{c})$; s e $(c\bar{c})$ si allontanano in direzioni opposte con momento elevato; pertanto, quando la coppia $(c\bar{c})$ forma la J/ψ , essa è già lontana dal quark s e quindi dalla η . Di conseguenza, si può assumere che la J/ψ non sia soggetta ad interazioni di colore con la η (*trasparenza al colore*); questo implica che possiamo immaginare che il B_s interagisca solo con la η e che la J/ψ sia creata dal vuoto, ovvero

$$\langle \eta J/\psi | (\bar{s}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{c}_L \gamma_\mu c_L) | B_s \rangle \simeq \langle \eta | (\bar{s}_L \gamma^\mu b_L) | B_s \rangle \langle J/\psi | (\bar{c}_L \gamma_\mu c_L) | 0 \rangle \quad (4.50)$$

Ora il calcolo può essere svolto, in quanto abbiamo già introdotto

$$\langle \eta(p') | \bar{s}_L \gamma_\mu b_L | B_s(p) \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \left[(p + p')_\mu - \frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} q_\mu \right] F_1(q^2) - \left[\frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} q_\mu \right] F_0(q^2) \right\} \quad (4.51)$$

e inoltre possiamo scrivere

$$\langle J/\psi(q, \epsilon) | (\bar{c}_L \gamma_\mu c_L) | 0 \rangle = \frac{1}{2} f_{J/\psi} m_{J/\psi} \epsilon_\mu \quad (4.52)$$

che definisce la *costante di decadimento* della J/ψ $f_{J/\psi}$.

Utilizzando queste definizioni, e tenendo conto del fatto che il diagramma di O_2 è soppresso di colore, ricaviamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{cs}^* \frac{1}{4} \left(C_1 + \frac{C_2}{N_c} \right) f_{J/\psi} m_{J/\psi} \epsilon_\mu \\ &\times \left\{ \left[(p + p')_\mu - \frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} q_\mu \right] F_1(q^2) - \left[\frac{m_{B_s}^2 - m_\eta^2}{q^2} q_\mu \right] F_0(q^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Trattandosi di un decadimento a due corpi, q^2 è fissato a $q^2 = m_{J/\psi}^2$. Calcoliamo quindi la larghezza di decadimento totale, che vale

$$\Gamma(B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} J/\psi) = \frac{G_F^2 |V_{cb} V_{cs}^*|^2}{8\pi m_{B_s}^3} \left(C_1 + \frac{C_2}{N_c} \right)^2 |f_{J/\psi}|^2 (F_1(m_{J/\psi}^2))^2 \lambda^{3/2}(m_{B_s}^2, m_\eta^2, m_{J/\psi}^2) \quad (4.54)$$

Questo calcolo vale anche per la prima eccitazione radiale della J/ψ , la $\psi(2S)$, che è energeticamente permessa, sostituendo massa e costante di decadimento appropriate. Naturalmente, poiché gli operatori O_1 e O_2 descrivono diagrammi ad albero, queste larghezze non sono modificate nel Modello ACD. I risultati numerici sono presentati in Tab. 4.5. Attualmente l'unico dato sperimentale disponibile è il limite superiore per il canale $B_s \rightarrow \eta J/\psi$: $BR(B_s \rightarrow \eta J/\psi) < 3.8 \times 10^{-3}$ [12].

Nell'analisi di questi risultati, sottolineiamo che la fattorizzazione naive è un'approssimazione molto forte; poiché essa è ricavata nel limite in cui il numero di colori tende ad infinito, per migliorarla talvolta si preferisce omettere i contributi soppressi di colore, nel nostro caso C_2/N_c . Se lo facciamo, otteniamo risultati diversi dell'ordine un fattore 10 rispetto a quelli elencati.

	set I	set II	set III
$BR(B_s \rightarrow \eta J/\psi) \times 10^5$	$7.9 \pm 30\%$	$18.3 \pm 26\%$	$21.7 \pm 54\%$
$BR(B_s \rightarrow \eta' J/\psi) \times 10^5$	$9.0 \pm 30\%$	$20.9 \pm 26\%$	$26.2 \pm 54\%$
$BR(B_s \rightarrow \eta \psi(2S)) \times 10^5$	$3.3 \pm 30\%$	$9.0 \pm 26\%$	$11.0 \pm 54\%$
$BR(B_s \rightarrow \eta' \psi(2S)) \times 10^5$	$3.1 \pm 30\%$	$8.3 \pm 26\%$	$11.4 \pm 54\%$

Tabella 4.5: Valori numerici per i branching ratio; essi sono stati calcolati utilizzando $f_{J/\psi} = 208$ MeV, $f_\psi = 149$ MeV, estratti dai branching ratios per $J/\psi(\psi) \rightarrow e^+e^-$.

4.3.2 Analisi della violazione di CP

Abbiamo anticipato che il canale $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} J/\psi$ si presta particolarmente per lo studio qualitativo e quantitativo della violazione di CP nel sistema del B_s . Infatti, esso presenta solo violazione di CP nell'interferenza, in quanto:

- abbiamo visto

$$\left| \frac{q}{p} \right| \simeq 1 - \frac{1}{2} \left| \frac{\Gamma_2}{M_2} \right| \sin \phi \quad \phi = 2\beta_s \quad (4.55)$$

Questo implica che, per quello che sappiamo attualmente su β_s , si ha [32]

$$\left| \frac{q}{p} \right| - 1 < \mathcal{O}(10^{-2}) \quad (4.56)$$

indipendentemente dal modello. Di conseguenza, possiamo porre $|q/p| = 1$ e affermare che per il B_s la violazione di CP nel mixing è praticamente nulla.

- Poiché il decadimento in esame è dominato da una sola fase debole, non c'è violazione di CP nel decadimento.

Queste osservazioni, unite al fatto che lo stato finale $\eta J/\psi$ è autostato (pari) di CP, implicano che la violazione di CP nell'interferenza è caratterizzata da

$$\lambda_f = e^{-i\phi} \equiv \lambda \quad \lambda_{\bar{f}} = e^{i\phi} \equiv \frac{1}{\lambda} \quad (4.57)$$

e che le ampiezze di decadimento dipendenti dal tempo divengono

$$\begin{aligned} \Gamma(B_s(t) \rightarrow \eta J/\psi) &= \Gamma(B_s \rightarrow \eta J/\psi) e^{-\Gamma t} \times \\ &\times \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \cos\phi \sinh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) + \sin\phi \sin(\Delta m t) \right] \end{aligned} \quad (4.58a)$$

$$\Gamma(\bar{B}_s(t) \rightarrow \eta J/\psi) = \Gamma(B_s \rightarrow \eta J/\psi) e^{-\Gamma t} \times \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \cos\phi \sinh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \sin\phi \sin(\Delta m t) \right] \quad (4.58b)$$

Dallo studio di questi decadimenti, caratterizzati dal decadimento esponenziale determinato quasi totalmente da Γ (in quanto $\Delta\Gamma/\Gamma \ll 1$), e dall'oscillazione determinata da Δm , si possono quindi ricavare informazioni sul parametro di mixing Δm . La larghezza di decadimento Γ può essere ricavata con più pulizia dallo studio del decadimento *untagged*, ovvero con lo stato iniziale composto sia da B_s che da \bar{B}_s ; in questo modo si elimina infatti la parte oscillante (Fig. 4.10):

$$\Gamma_{\text{untagged}}(B_s(t) \rightarrow \eta J/\psi) = (B_s(t) \rightarrow \eta J/\psi) + (\bar{B}_s(t) \rightarrow \eta J/\psi) = 2\Gamma(B_s \rightarrow \eta J/\psi) e^{-\Gamma t} \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \cos\phi \sinh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) \right] \quad (4.59)$$

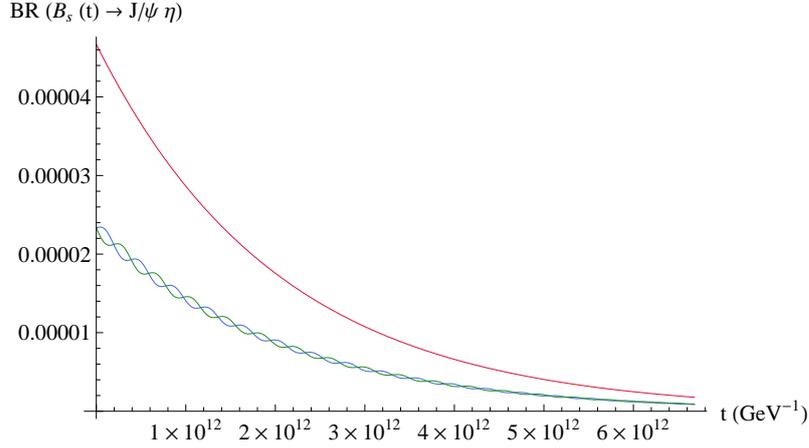


Figura 4.10: Branching ratio dipendente dal tempo per i decadimenti $B_s \rightarrow \eta J/\psi$ tagged (in azzurro e in verde) e untagged (in rosso).

Per estrarre i parametri $\Delta\Gamma$ e ϕ , ricorriamo allo studio delle asimmetrie introdotte nel capitolo precedente. L'asimmetria dipendente dal tempo vale in questo caso

$$a(t) = -\frac{\sin\phi \sin(\Delta m t)}{\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \cos\phi \sinh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right)} \quad (4.60)$$

e presenta quindi una parte oscillante da cui estrarre ancora Δm , e una parte esponenziale che è in pratica l'unico modo per accedere a $\Delta\Gamma$ (Fig. 4.11).

Invece, ϕ può essere ricavato più agevolmente dall'asimmetria integrata:

$$a_{\text{int}} = \frac{1+x^2}{1+y^2} \frac{\sin\phi}{1-\cos\phi} \quad (4.61)$$

che è quindi la quantità più importante per la stima dell'angolo β_s del triangolo di unitarietà. Nel MS, troviamo $a_{\text{int}} = -3.4 \times 10^{-5} \pm 30\%$.

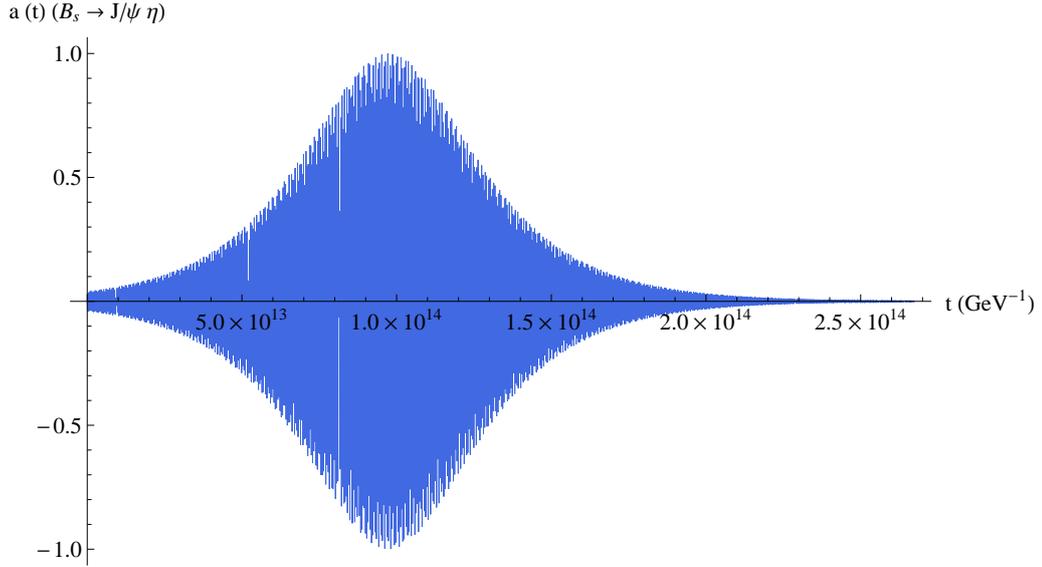


Figura 4.11: Asimmetria dipendente dal tempo per il decadimento $B_s \rightarrow \eta J/\psi$. Si vede come la frequenza di oscillazione sia molto più piccola della scala esponenziale.

Come abbiamo mostrato nel capitolo precedente, l'unica quantità tra quelle coinvolte in questo decadimento che può essere significativamente modificata nel Modello ACD è Δm , della quale abbiamo calcolato la deviazione. Di conseguenza, nel Modello ACD troviamo modificate sia tutte le frequenze delle quantità oscillanti che l'asimmetria integrata, dipendente da $x = \Delta m/\Gamma$. Naturalmente, per poter misurare eventuali deviazioni di Δm dalle frequenze, bisogna poter apprezzare intervalli di tempo molto piccoli, in quanto $\Delta m \sim \mathcal{O}(10^{-11})$ GeV (Fig. 4.12). Di conseguenza, lo studio di deviazioni rispetto al MS è più agevole tramite l'asimmetria integrata, se Γ , $\Delta\Gamma$ e ϕ sono noti con buona precisione (Fig. 4.13).

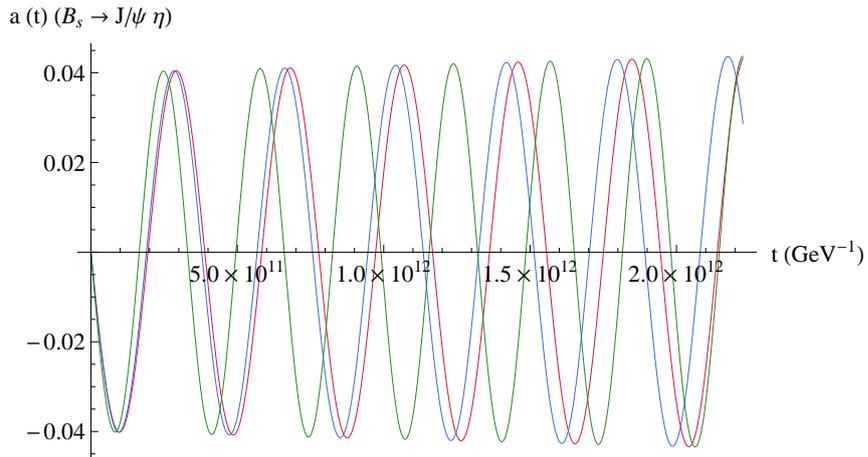


Figura 4.12: Dettaglio della asimmetria dipendente dal tempo nel MS (in rosso), nel Modello ACD con $R = 1/500$ GeV (in azzurro), nel Modello ACD con $R = 1/200$ GeV (in verde).

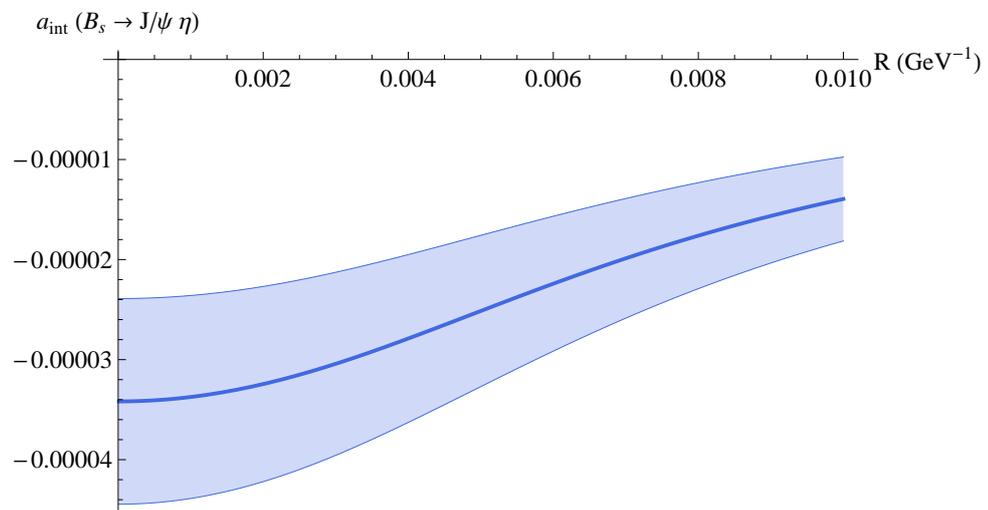


Figura 4.13: Deviazione dal MS dell'asimmetria integrata nel Modello ACD al variare del raggio di compattificazione della quinta dimensione.

Conclusioni

Nonostante il suo successo sperimentale senza smentite, è opinione diffusa che il Modello Standard non sia la teoria ultima della fisica delle particelle, ma solo una teoria efficace per basse energie. Questa opinione è dovuta non solo ai problemi teorici e sperimentali del MS circa il campo di Higgs, ma anche da un lato al fatto obiettivo che esso non include fenomeni quali la gravità o la materia oscura, e dall'altro, in misura relativa, all'idea "estetica" che esso presenti un numero troppo elevato di parametri liberi. Tutto questo indica la necessità sia di formulare modelli di Nuova Fisica oltre il MS, sia in modo ancora più urgente di studiare la fenomenologia del MS in modo da scoprire se e dove esso fallisce.

Questa Tesi si colloca in questo filone di ricerca. Abbiamo considerato un argomento di fisica del beauty, il settore del mesone B_s , e abbiamo ricavato delle previsioni di precisione sia nell'ambito del MS, sia nell'ambito di un modello di Nuova Fisica, il Modello ACD con una singola UED. Attualmente non sono disponibili dati sperimentali per nessuna delle quantità osservabili calcolate, ma lo saranno in un futuro prossimo per mezzo di TeVatron, LHC ed eventualmente Super-B.

Il Modello ACD con una singola UED postula che lo spazio-tempo consti di cinque dimensioni, e che topologicamente sia il prodotto cartesiano tra l'ordinario spazio di Minkowski M_4 e l'orbifold S^1_R/Z_2 , ovvero che per ogni punto dello spazio-tempo quadridimensionale ci sia una quinta dimensione "arrotolata" in una circonferenza di raggio R . I campi si propagano in questa varietà pentadimensionale, ma sotto determinate ipotesi possiamo integrare sulla quinta dimensione ed ottenere una teoria effettiva quadridimensionale, che per $R \rightarrow 0$ si riduce al MS come deve essere. Affinché gli effetti della quinta dimensione siano piccoli abbastanza da non essere stati osservati finora, R deve essere altrettanto piccolo: la scala di energia R^{-1} fissa la scala di energia a cui gli effetti della quinta dimensione cominciano a diventare evidenti. Abbiamo mostrato come l'integrazione della quinta dimensione implichi nella teoria effettiva quadridimensionale l'esistenza per ogni particella di massa m (anche nulla) l'esistenza di infiniti stati eccitati di massa $m_n = m + n/R$ con n intero, chiamati *torri di Kaluza Klein*. Naturalmente, se R è piccolo, la massa di questi stati è troppo elevata perché, almeno per il momento, essi possano essere osservati direttamente; tuttavia, questi modi eccitati possono contribuire come particelle virtuali nei processi a loop, modificandone le ampiezze.

Questo è il motivo per cui ci siamo occupati dell'oscillazione $B_s - \bar{B}_s$, che è generata da diagrammi a box, e dei decadimenti semileptonici del B_s , che coinvolgono diagrammi a pinguino; il confronto della previsioni ottenute con i futuri dati

sperimentali sarà in grado di accettare o rigettare il Modello ACD con queste caratteristiche, ed eventualmente di imporre dei vincoli sul raggio di compattificazione della quinta dimensione. In particolare, abbiamo trovato che:

- La differenza di massa Δm tra gli autostati di massa B_s^H e B_s^L prevista dal Modello ACD è maggiore rispetto a quella prevista dal MS. Questa quantità è osservabile in quanto governa l'oscillazione $B_s - \bar{B}_s$: la frequenza di tale oscillazione è inversamente proporzionale a Δm . La differenza di massa è quindi misurabile o studiando l'evoluzione temporale di un campione inizialmente puro, oppure analizzando le asimmetrie dei decadimenti adronici, come abbiamo mostrato per il decadimento in $J/\psi \eta^{(\prime)}$. Il Modello ACD non modifica invece le altre due osservabili coinvolte nell'oscillazione dei mesoni neutri, ovvero $\Delta\Gamma$ e la fase relativa tra le due differenze.
- La larghezza di decadimento dei processi $B_s \rightarrow \eta^{(\prime)} \ell \bar{\ell}$ è maggiore nel Modello ACD rispetto al MS, qualsiasi sia la coppia di leptoni nello stato finale. Questa differenza può essere osservata sia nella larghezza differenziale che in quella integrale.

Il limite delle previsioni trovate è costituito dalle incertezze dovute alla presenza di quantità non perturbative nella determinazione del valore delle osservabili. Infatti, il Modello ACD predice delle deviazioni rispetto al MS che, a seconda del valore di R , sono di meno del 20% per i valori di R accettabili; le deviazioni quindi sono dell'ordine degli errori portati dalle quantità non perturbative, quali ad esempio i fattori di forma. Di conseguenza, questi risultati saranno maggiormente significativi con la diminuzione dell'errore teorico sui calcoli non perturbativi.

Da tutto il lavoro emerge comunque che, allo scopo di scoprire se e cosa c'è oltre il Modello Standard, è necessario lo sforzo sinergico di vari settori della fisica delle particelle. L'impegno creativo di chi formula modelli capaci di risolvere i problemi che via via si incontrano è basilare, ma è vano senza i calcoli di fenomenologia che determinano le previsioni dei vari modelli; queste sono al loro volta poco predittive se gli errori delle quantità derivanti dallo studio della QCD, mediante metodi non perturbativi o mediante le simulazioni su reticolo, sono troppo elevati. Infine, le previsioni vanno confrontate con i dati sperimentali: è necessario quindi uno strumento che produca eventi, degli esperimenti che rivelino le quantità di interesse, e l'analisi dei dati ottenuti. Solo il lavoro congiunto di fisici di settori diversi può portare all'avanzamento della nostra conoscenza dei costituenti elementari della Natura.

Appendice A

Operator Product Expansion

A.1 Teoria generale

In teoria quantistica dei campi, i prodotti di operatori calcolati nello stesso punto dello spazio-tempo non sono quantità ben definite. Infatti, ogni volta che in teoria quantistica dei campi si trovano quantità di questo tipo, emergono delle divergenze; ad esempio, per il campo scalare:

- la quantità $\phi(x)^2$ che compare nel termine di massa dell'Hamiltoniana genera un'energia del vuoto divergente;
- il propagatore

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi^*(y)]|0\rangle = -i\Delta(x-y) = -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-k)}}{m^2-p^2-i\epsilon} \quad (\text{A.1})$$

è singolare per $x = y$.

La Operator Product Expansion (OPE), congetturata da Wilson nel 1969 [50] e provata da Zimmerman nel 1970 [51], permette di dare un senso ai prodotti di operatori calcolati nello stesso punto.

Consideriamo un processo che coinvolge due operatori \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 separati da una distanza piccola x , e altri n campi $\phi(y_i)$ più lontani; ad esempio, in un processo debole \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 potrebbero essere gli operatori di corrente carica e $i\phi(y_i)$ gli operatori di creazione e distruzione degli stati esterni [52]. L'ampiezza di questo processo viene ricavata dalla funzione di Green

$$G_{12}(x; y_1, \dots, y_n) = \langle \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(0)\phi(y_1 \dots \phi(x_n)) \rangle \quad (\text{A.2})$$

in cui abbiamo ommesso per alleggerire la notazione l'ordinamento temporale del membro a destra. Nel limite $x \rightarrow 0$ il prodotto $\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(0)$ può dare luogo ad una singolarità nell'origine; tuttavia, questa può essere descritta da un solo operatore posizionato nell'origine che abbia gli stessi numeri quantici del prodotto. È utile sviluppare questo operatore su una base standard; i coefficienti di questo sviluppo

potranno dipendere solo da x e alcuni saranno singolari per $x \rightarrow 0$. Combinando queste osservazioni, Wilson ipotizzò che per il limite $x \rightarrow 0$ si potesse espandere

$$\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(0) \rightarrow \sum_N C_N^{12}(x)\mathcal{O}_N(0) \quad (\text{A.3})$$

dove i coefficienti $C_N^{12}(x)$ sono funzioni complesse di x , dette *coefficienti di Wilson*. Di conseguenza, anche la funzione di Green si può espandere secondo

$$G_{12}(x; y_1, \dots, y_n) = \sum_N C_N^{12}(x)G_N(y_1, \dots, y_n) \quad (\text{A.4})$$

dove

$$G_N(y_1, \dots, y_n) = \langle \mathcal{O}_N(0)\phi(y_1) \dots \phi(y_n) \rangle \quad (\text{A.5})$$

sono le funzioni di Green calcolate con gli operatori $\mathcal{O}_N(0)$, e quindi la dipendenza da x e le eventuali singolarità sono interamente contenute nei coefficienti di Wilson.

Se analizziamo dimensionalmente l'espansione

$$A(x)B(y) \sim \sum_C F_C^{AB}(x-y)C(y) \quad (\text{A.6})$$

vediamo che la dimensione di F_C^{AB} è $d_F = d_A + d_B - d_C$, e quindi la singolarità è del tipo $(x-y)^{d_C - d_A - d_B}$; questo implica che più l'operatore C è complicato e quindi ha alta dimensionalità, meno la funzione F_C^{AB} sarà singolare. Questo significa che i contributi più importanti provengono dagli operatori locali più semplici ed è quindi possibile troncare la serie quando essa ancora non presenta troppe difficoltà di calcolo.

Proviamo la validità della OPE, nel caso generale di un numero qualsiasi di operatori [53]. Consideriamo dei punti $x_1, x_2 \dots$ vicini ad un punto x e più lontani rispetto a dei punti $y_1, y_2 \dots$; siano $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots \hat{B}_1, \hat{B}_2 \dots$ degli operatori quantistici e $A_1, A_2, \dots B_1, B_2 \dots$ i loro corrispondenti campi classici. Si ha

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left[\hat{A}_1(x_1)\hat{A}_2(x_2) \dots \hat{B}_1(y_1)\hat{B}_2(y_2) \dots \right] | 0 \rangle = \\ = \int \left[\prod_{\ell, z} d\phi_\ell(z) \right] A_1(x_1)A_2(x_2) \dots B_1(y_1)B_2(y_2) \dots e^{iS[\phi]} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Ora consideriamo una sfera $B_x(R)$ centrata in x e con raggio R molto più grande delle distanze tra gli x_i ma molto più piccolo delle distanze tra gli y_i . Se la Lagrangiana è locale, possiamo separare due contributi per l'azione:

$$S[\phi] = \int_{z \in B_x(R)} d^4z \mathcal{L}(z) + \int_{z \notin B_x(R)} d^4z \mathcal{L}(z) \quad (\text{A.8})$$

ottenendo quindi

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | T \left[\hat{A}_1(x_1) \hat{A}_2(x_2) \dots \hat{B}_1(y_1) \hat{B}_2(y_2) \dots \right] | 0 \rangle = \\
 & = \int \left[\prod_{\ell, z \in B_x(R)} d\phi_\ell(z) \right] A_1(x_1) A_2(x_2) \dots \exp \left(i \int_{z \in B_x(R)} d^4 z \mathcal{L}(z) \right) \times \\
 & \times \int \left[\prod_{\ell, z \notin B_x(R)} d\phi_\ell(z) \right] B_1(y_1) B_2(y_2) \dots \exp \left(i \int_{z \notin B_x(R)} d^4 z \mathcal{L}(z) \right)
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

cui bisogna imporre condizioni di differenziabilità sulla superficie della sfera. A parte queste condizioni al contorno, i campi A_i dentro la sfera sono indipendenti dai campi B_i fuori dalla sfera; di conseguenza, l'integrale all'interno della sfera può essere calcolato, e sarà espresso in termini dei valori dei campi A_i e delle loro derivate sulla superficie della sfera (e che pertanto dipenderanno dal centro x). Pertanto, questo integrale sarà costituito da una serie di operatori (classici) $O(x)$ formati da prodotti di campi classici e loro derivate; i coefficienti di questo sviluppo saranno funzioni complesse dipendenti dalle differenze di coordinate $U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots)$; in sintesi:

$$\begin{aligned}
 & \int \left[\prod_{\ell, z \in B_x(R)} d\phi_\ell(z) \right] A_1(x_1) A_2(x_2) \dots \exp \left(i \int_{z \in B_x(R)} d^4 z \mathcal{L}(z) \right) \sim \\
 & \sim \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) O(x)
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

D'altra parte, i campi B_i al di fuori della sfera non dipendono dall'interno, e quindi l'integrale al di fuori della sfera resta invariato anche per $R \rightarrow 0$, e quindi

$$\begin{aligned}
 & O(x) \int \left[\prod_{\ell, z \notin B_x(R)} d\phi_\ell(z) \right] B_1(y_1) B_2(y_2) \dots \exp \left(i \int_{z \notin B_x(R)} d^4 z \mathcal{L}(z) \right) = \\
 & = \int \left[\prod_{\ell, z} d\phi_\ell(z) \right] O(x) B_1(y_1) B_2(y_2) \dots \exp \left(i \int d^4 z \mathcal{L}(z) \right) = \\
 & = \langle 0 | T \left[\hat{O}(x) \hat{B}_1(y_1) \hat{B}_2(y_2) \dots \right] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Mettendo insieme questi risultati, otteniamo

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | T \left[\hat{A}_1(x_1) \hat{A}_2(x_2) \dots \hat{B}_1(y_1) \hat{B}_2(y_2) \dots \right] | 0 \rangle = \\
 & = \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) \langle 0 | T \left[\hat{O}(x) \hat{B}_1(y_1) \hat{B}_2(y_2) \dots \right] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

che mostra come il prodotto di operatori A_i calcolati in punti x_i vicini ma diversi (che è non locale) possa essere espanso in termini di operatori locali $O(x)$ accoppiati da funzioni singolari $U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots)$ che sono i coefficienti di Wilson.

Un altro aspetto della OPE che la rende utile nei calcoli è che la dipendenza dall'impulso dei coefficienti di Wilson è governata dalle equazioni del gruppo di rinormalizzazione.

A.2 Applicazione all'interazione elettrodebole

A.2.1 Hamiltoniana efficace

Quando si considerano le interazioni deboli dei quark, bisogna tenere sempre conto del fatto che i quark sono confinati all'interno degli adroni; di conseguenza, le interazioni forti cui i quark sono soggetti sono caratterizzate dalle tipiche scale energetiche adroniche di $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$, molto più basse della scala delle interazioni deboli $\mathcal{O}(m_{W,Z})$. Risulta quindi molto utile sviluppare una teoria effettiva a basse energie per descrivere le interazioni deboli dei quark.

Utilizziamo a questo scopo il formalismo dell'integrale funzionale. Il funzionale generatore delle funzioni di Green dei campi soggetti alle interazioni elettrodeboli è

$$Z_W \sim \int [\mathcal{D}W^+] [\mathcal{D}W^-] \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_W \right\} \quad (\text{A.13})$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

con

$$J_\mu^+ = V_{UD} \bar{U} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) D \quad J_\mu^- = (J_\mu^+)^\dagger \quad (\text{A.15a})$$

$$U = (u, c, t) \quad D = (d, s, b) \quad (\text{A.15b})$$

Scegliamo il gauge unitario per il campo W , e introduciamo l'operatore

$$K_{\mu\nu}(x, y) = \delta^{(4)}(x - y) [g_{\mu\nu} [\partial^2 + m_W^2] - \partial_\mu \partial_\nu] \quad (\text{A.16})$$

A meno di una derivata totale, si ha

$$\begin{aligned} Z_W \sim & \int [\mathcal{D}W^+] [\mathcal{D}W^-] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y W_\mu^+(x) K^{\mu\nu}(x, y) W_\nu^-(y) + \right. \\ & \left. + i \frac{g}{2\sqrt{2}} \int d^4x [J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

L'integrale funzionale è gaussiano, e quindi può essere calcolato introducendo l'inverso di $K_{\mu\nu}$, ovvero $\Delta_{\mu\nu}$ tale che

$$\int d^4y K_{\mu\nu}(x, y) \Delta^{\nu\lambda}(y, z) = g_\mu^\lambda \delta^{(4)}(x - z) \quad (\text{A.18})$$

che è il propagatore del campo W nel gauge unitario:

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Delta_{\mu\nu}(k) \quad \text{con} \quad \Delta_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right) \quad (\text{A.19})$$

Svolgendo quindi l'integrale funzionale, a meno di termini costanti si arriva a

$$Z_W \sim \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \frac{g^2}{8} J_\mu^-(x) \Delta^{\mu\nu}(x, y) J_\nu^+(y) \right\} \quad (\text{A.20})$$

Possiamo quindi riscrivere la Lagrangiana come

$$\mathcal{L}_W(x) = \mathcal{L}_{\text{kin}}(x) - \frac{g^2}{8} \int d^4y J_\mu^-(x) \Delta^{\mu\nu}(x, y) J_\nu^+(y) \quad (\text{A.21})$$

in cui il secondo termine contiene la propagazione della W tra due correnti cariche ed è quindi *non locale*.

Fin qui non abbiamo fatto altro che applicare il formalismo del path integral per ricavare le regole di Feynman dell'interazione debole (carica). Ora però utilizziamo il fatto che nel contesto che ci interessa le energie dei quark sono molto più piccole della scala energetica debole, e quindi l'impulso scambiato k in (A.19) è tale che $k^2 \ll m_W^2$. Questo ci permette di effettuare lo sviluppo in serie di k^2/m_W^2 di $\Delta_{\mu\nu}(k)$:

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right) \left[1 + \left(\frac{k^2}{m_W^2} \right) + \left(\frac{k^2}{m_W^2} \right)^2 + \dots \right] \quad (\text{A.22})$$

e di conseguenza $\Delta_{\mu\nu}(x, y)$, che conterrà da trasformate di Fourier di polinomi che restituiscono funzioni delta di Dirac e loro derivate, diventerà la somma di una serie convergente di operatori *locali*, ovvero prodotti di operatori calcolati nello stesso punto dello spazio-tempo.

Se ad esempio arrestiamo la serie all'ordine zero, troviamo

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) \simeq \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2} \delta^{(4)}(x - y) \quad (\text{A.23})$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W^{\text{eff}}(x) &= \mathcal{L}_{\text{kin}}(x) - \frac{g^2}{8m_W^2} J_\mu^-(x) J^{+\mu}(x) = \\ &= \mathcal{L}_{\text{kin}}(x) - \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{UD}^* V_{U'D'} O_L(x) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

con

$$O_L = [\bar{D}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) U(x)] [\bar{U}'(x) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) D'(x)] \quad (\text{A.25})$$

Nella parte di interazione di questa Lagrangiana efficace riconosciamo proprio l'interazione a quattro fermioni "alla Fermi", che già sappiamo essere valida a basse energie; troviamo quindi che questa interazione effettiva è l'ordine zero della OPE per la Lagrangiana elettrodebole. Osserviamo inoltre che se proseguiamo con la serie, troviamo operatori di dimensione maggiore, ma che il contributo dominante deriva dall'operatore con dimensionalità più bassa.

Nel calcolo che abbiamo effettuato abbiamo considerato solo la Lagrangiana elettrodebole; dobbiamo quindi completare il procedimento aggiungendo anche l'interazione forte. Questo implica che dobbiamo aggiungere agli spinori dei quark un

indice di colore, e considerare tutte le possibili interazioni di colore. Possiamo quindi estendere l'Hamiltoniana efficace precedente:

$$H_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{UD}^* V_{U'D'} [C_1(\mu) O_1(x) + C_2(\mu) O_2(x)] \quad (\text{A.26})$$

con

$$O_1 = (\bar{D}_\alpha U_\beta)_{V-A} (\bar{U}'_\beta D'_\alpha)_{V-A} \quad (\text{A.27a})$$

$$O_2 = (\bar{D}_\alpha U_\alpha)_{V-A} (\bar{U}'_\beta D'_\beta)_{V-A} \quad (\text{A.27b})$$

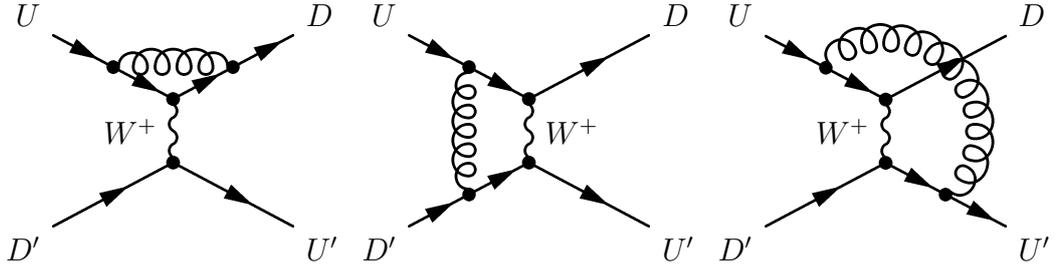
e dove $C_1(\mu)$ e $C_2(\mu)$ sono i coefficienti di Wilson, che contengono la parte non perturbativa dei diagrammi (dovuta alla QCD) che si esplicita nella loro dipendenza dalla scala di rinormalizzazione μ . Come è evidente dall'espressione di H_{eff} , i coefficienti di Wilson hanno la forma di accoppiamenti effettivi per i vertici effettivi descritti dagli operatori locali. Naturalmente, se non ci fossero gli effetti di QCD, avremmo $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$.

A.2.2 Calcolo dei coefficienti di Wilson

I coefficienti di Wilson sono calcolabili mediante una procedura nota come *matching* della teoria completa con la teoria effettiva. Come questa stessa espressione suggerisce, essa consiste nel calcolare le ampiezze invarianti sia nella teoria completa che nella teoria effettiva per poi imporre che esse siano uguali. Calcoliamo quindi queste due ampiezze al leading order, ovvero considerando le correzioni di QCD dovute allo scambio di un gluone [15].

• Ampiezza completa

Lo scambio di un gluone nella transizione $U D' \rightarrow D U'$ può avvenire nei seguenti modi:



Nel secondo e nel terzo diagramma è contenuto il prodotto delle cariche di colore $T_{\alpha\beta}^a$ e $T_{\gamma\delta}^a$, che utilizzando l'algebra di $SU(3)$ vale

$$T_{\alpha\beta}^a T_{\gamma\delta}^a = -\frac{1}{2N_c} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \quad (\text{A.28})$$

Ponendo gli impulsi esterni uguali tra loro e trascurando le masse dei quark, troviamo

$$\mathcal{M}_{\text{full}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{UD}^* V_{U'D'} \left\{ \left[1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) \right] S_2 + \frac{3}{N_c} \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{-p^2} S_2 - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{-p^2} S_1 \right\} \quad (\text{A.29})$$

in cui abbiamo posto

$$S_1 = \langle Q_1 \rangle_{\text{tree}} = (\bar{D}_\alpha U_\beta)_{V-A} (\bar{U}'_\beta D'_\alpha)_{V-A} \quad (\text{A.30a})$$

$$S_2 = \langle Q_2 \rangle_{\text{tree}} = (\bar{D}_\alpha U_\alpha)_{V-A} (\bar{U}'_\beta D'_\beta)_{V-A} \quad (\text{A.30b})$$

e in cui le singolarità $1/\epsilon$ vanno eliminate rinormalizzando i campi dei quark, ottenendo

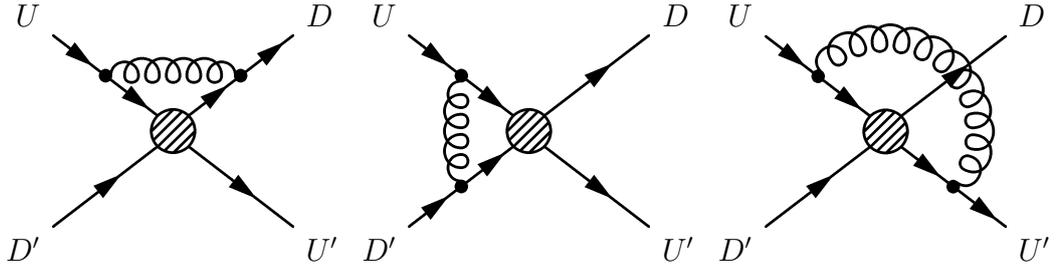
$$\mathcal{M}_{\text{full}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{UD}^* V_{U'D'} \left\{ \left(1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) S_2 + \frac{3}{N_c} \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{-p^2} S_2 - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{-p^2} S_1 \right\} \quad (\text{A.31})$$

• Ampiezza efficace

All'ampiezza efficace

$$\mathcal{M}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{UD}^* V_{U'D'} (C_1(\mu) \langle Q_1 \rangle + C_2(\mu) \langle Q_2 \rangle) \quad (\text{A.32})$$

contribuiscono invece i seguenti diagrammi:



Con le stesse ipotesi del calcolo precedente, si ottiene

$$\langle Q_1 \rangle^{(0)} = \left[1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) \right] S_1 + \frac{3}{N_c} \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{m_W^2}{-p^2} \right) S_1 - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{m_W^2}{-p^2} \right) S_2 \quad (\text{A.33a})$$

$$\begin{aligned} \langle Q_2 \rangle^{(0)} = & \left[1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) \right] S_2 + \frac{3}{N_c} \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{m_W^2}{-p^2} \right) S_2 - \\ & - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{m_W^2}{-p^2} \right) S_1 \end{aligned} \quad (\text{A.33b})$$

Tuttavia, rinormalizzando i campi dei quark, si eliminano solo le divergenze del primo addendo dei due operatori. Per eliminare anche le altre divergenze, si ricorre ad una rinormalizzazione moltiplicativa nota come *rinormalizzazione degli operatori*. Si trova che la relazione tra i precedenti operatori e gli operatori rinormalizzati è

$$\langle Q_i \rangle^{(0)} = Z_q^{-2} Z_{ij} \langle Q_j \rangle \quad (\text{A.34})$$

in cui Z_q^{-2} rimuove le divergenze nei primi addendi e

$$Z = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} \frac{3}{N_c} & -3 \\ -3 & \frac{3}{N_c} \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

rimuove le divergenze nei secondi e terzi addendi. I campi rinormalizzati sono quindi

$$\langle Q_1 \rangle = \left(1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) S_1 + \frac{3}{N_c} \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{-p^2} S_1 - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{-p^2} S_2 \quad (\text{A.36a})$$

$$\langle Q_2 \rangle = \left(1 + 2C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right) S_2 + \frac{3}{N_c} \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{-p^2} S_2 - 3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{-p^2} S_1 \quad (\text{A.36b})$$

Imponendo ora $\mathcal{M}_{\text{full}} = \mathcal{M}_{\text{eff}}$, ricaviamo l'espressione dei coefficienti di Wilson:

$$C_1(\mu) = -3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{\mu^2} \quad (\text{A.37a})$$

$$C_2(\mu) = 1 + \frac{3}{N_c} \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{\mu^2} \quad (\text{A.37b})$$

Poiché nei processi adronici la scala di energia è $\mu \sim \mathcal{O}(1 \text{ GeV})$, mentre $m_W \sim 80 \text{ GeV}$, nei coefficienti di Wilson compaiono logaritmi dal valore elevato, e per sommarli correttamente bisogna adottare le tecniche del gruppo di rinormalizzazione.

Bibliografia

- [1] T. D. Lee and C. N. Yang, *Question of Parity Conservation in Weak Interactions*, Phys. Rev. **104** (1956)
T. D. Lee and C. N. Yang, *Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino*, Phys. Rev. **105** (1957)
C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson *Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*, Phys. Rev. **105** (1957)
- [2] H. Weyl, *Elektron und Gravitation. I*, Z. Phys. **56** (1929)
C. N. Yang and R. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96** (1954)
- [3] Gargamelle Neutrino Collaboration, *Observation of Neutrino Like Interactions Without Muon Or Electron in the Gargamelle Neutrino Experiment*, Phys. Lett. **B46** (1973)
- [4] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961)
- [5] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Regularization And Renormalization Of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44** (1972)
- [6] P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys. Lett. **12**, 132 (1964)
P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett.. **13**, 508 (1964)
P. W. Higgs, *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966)
- [7] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967)
A. Salam, in Proc. 8th Nobel Symposium, ed. by N. Svartholm (Almquist and Wiskell, Stockolm, 1968)
- [8] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*, Phys. Rev. Lett.. **10**, 531 (1963)
M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, Progr. Theor. Phys. **49**, 652 (1973)

- [9] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, *Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry*, Phys. Rev. **D2**, 1285 (1970)
- [10] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay, *Evidence for the 2π Decay of the $k(2)0$ Meson*, Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964)
NA31 Collaboration, *First Evidence for Direct CP Violation*, Phys. Lett. *B206*, 169 (1988)
- [11] C. Jarlskog, *Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation*, Phys. Rev. Lett. **55**, 1039 (1985)
- [12] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Physics Letters **B667**, 1 (2008)
- [13] L. Wolfenstein, *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix*, Phys. Rev. **D17**, 2369 (1978)
- [14] O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics - Concepts and Phenomena*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York 1990
- [15] A. J. Buras, *Weak Hamiltonian, CP Violation and Rare Decays*, da Probing the Standard Model of Particle Interactions, F. David e R. Gupta (1998) Elsevier Science
- [16] CKMfitter: <http://ckmfitter.in2p3.fr/>
HFAG: <http://www.slac.stanford.edu/xorg/hfag/>
UTfit: <http://www.utfit.org/>
- [17] CKMfitter Group, *CP violation and the CKM matrix: assessing the impact of the asymmetric B factories*, Eur. Phys. J. **C41**, 1 (2005)
- [18] T. Kaluza, *On the Problem of Unity in Physics*, Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.) (1921)
O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity*, Z. Phys. **37** (1926)
O. Klein, *The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law*, Nature **118** (1926)
- [19] T. G. Rizzo, *Pedagogical introduction to extra dimensions*, SLAC-PUB-10753, SSI-2004-L013 (2004)
- [20] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity*, Phys. Rev. **D59** (1999)
N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. **B429** (1998)

- I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV*, Phys. Lett. **B436** (1998)
- [21] L. Randall and R. Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999)
- [22] N. Arkani-Hamed and M. Schmaltz, *Hierarchies without symmetries from extra dimensions*, Phys. Rev. **D61** (2000)
- B. Lillie and J. L. Hewett, *Flavor constraints on split fermion models*, Phys. Rev. **D68** (2003)
- [23] C. Csaki, C. Grojean, H. Murayama, L. Pilo and J. Terning, *Gauge theories on an interval: Unitarity without a Higgs*, Phys. Rev. **D69** (2004)
- Y. Nomura, *Higgsless theory of electroweak symmetry breaking from warped space*, JHEP **0311** (2003)
- H. Davoudiasl, J. L. Hewett, B. Lillie and T. G. Rizzo, *Higgsless electroweak symmetry breaking in warped backgrounds: Constraints and signatures*, Phys. Rev. **D70** (2004)
- R. Barbieri, A. Pomarol and R. Rattazzi, *Weakly coupled Higgsless theories and precision electroweak tests*, Phys. Lett. **B591** (2004)
- [24] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, *Extra spacetime dimensions and unification*, Phys. Lett. **B436** (1998)
- L. Randall and M. D. Schwartz, *Quantum field theory and unification in AdS₅*, JHEP **0111** (2001)
- M. Carena, A. Delgado, E. Ponton, T. M. P. Tait and C. E. M. Wagner, *Precision electroweak data and unification of couplings in warped extra dimensions*, Phys. Rev. **D68** (2003)
- [25] T. Appelquist, H. C. Cheng and B. A. Dobrescu, *Bounds on universal extra dimensions*, Phys. Rev. **D64** (2001)
- [26] H. C. Cheng, K. T. Matchev and M. Schmaltz, *Radiative corrections to Kaluza-Klein masses*, Phys. Rev. **D66** (2002)
- [27] G. Servant and T. M. P. Tait, *Is the lightest Kaluza-Klein particle a viable dark matter candidate?*, Nucl. Phys. **B650** (2003)
- Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois, *Non-conventional cosmology from a brane-universe*, Nucl. Phys. **B565** (2000)
- [28] S. Dimopoulos and G. Landsberg, *Black holes at the LHC*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001)
- S. B. Giddings and S. Thomas, *High energy colliders as black hole factories: The end of short distance physics*, Phys. Rev. **D65** (2002)

- [29] A. J. Buras, M. Spranger and A. Weiler, *The Impact of Universal Extra Dimensions on the Unitarity Triangle and Rare K and B Decays*, Nucl. Phys. B **660** (2003)
A. J. Buras, A. Poschenrieder, M. Spranger and A. Weiler, *The impact of universal extra dimensions on $B \rightarrow X/s$ gamma, $B \rightarrow X/s$ gluon, $B \rightarrow X/s$ $\mu^+ \mu^-$, $K(L) \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$, and ϵ'/ϵ* , Nucl. Phys. B **678**, 455 (2004)
- [30] H. Georgi, A. K. Grant and G. Hailu, *Chiral fermions, orbifolds, scalars and fat branes*, Phys. Rev. **D63** (2001)
- [31] ALEPH Collaboration, *First Measurement of the B_s Meson Mass*, Phys. Lett. **B311** (1993)
- [32] K. Anikeev et al, *B Physics at Tevatron: Run II and Beyond*, FERMILAB-PUB-01-197 (2001)
- [33] V. Weisskopf and E. P. Wigner, *Calculation of the natural brightness of spectral lines on the basis of Dirac's theory*, Z. Phys. **63** (1930)
- [34] O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics - Concepts and Phenomena*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York 1990
- [35] H. Y. Cheng, *CP-violating effects in heavy-meson systems*, Phys. Rev. **D26** (1982)
- [36] G. Altarelli, *Three Lectures On Flavor Mixing*, NATO Adv. Study Inst. Ser.B Phys. **173** (1988)
- [37] T. Inami and C. S. Lim, *Effects Of Superheavy Quarks And Leptons In Low-Energy Weak Processes $K(L) \rightarrow \mu$ Anti- μ , $K^+ \rightarrow \pi^+$ Neutrino Anti-Neutrino And K^0 - Anti- K^0* , Prog. Theor. Phys. **65** (1981)
- [38] A. J. Buras, M. Jamin and P. H. Weisz, *Leading and Next-to-Leading QCD corrections to ϵ parameter and $B^0 - \bar{B}^0$ mixing in the presence of a heavy top quark*, Nucl. Phys. **B347** (1990)
- [39] V. Lubicz and C. Tarantino, *Flavour physics and Lattice QCD: averages of lattice inputs for the Unitarity Triangle Analysis*, Nuovo Cim. **123B** (2008)
- [40] A. Lenz and U. Nierste, *Theoretical update of B_s -anti B_s mixing*, JHEP **0706** (2007)
- [41] T. Feldmann, *Quark structure of pseudoscalar mesons*, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000)
F. De Fazio and M. R. Pennington, *Radiative Φ meson decays and η η' mixing: A QCD sum rule analysis* JHEP **0007** (2000)

- [42] B. Di Micco [KLOE Collaboration], *eta, eta-prime mixing angle and eta-prime gluonium content extraction from the KLOE $R(\phi)$ measurement*, Eur. Phys. J. A **38** (2008)
- [43] C. Bobeth, M. Misiak and J. Urban, *Photonic penguins at two loops and $m(t)$ -dependence of $BR(B \rightarrow X(s) l+l-)$* , Nucl. Phys. B **574** (2000)
 H. H. Asatrian, H. M. Asatrian, C. Greub and M. Walker, *Two-loop virtual corrections to $B \rightarrow X/s l+ l-$ in the standard model*, Phys. Lett. B **507** (2001)
 H. M. Asatrian, K. Bieri, C. Greub and A. Hovhannisyan, *NNLL corrections to the angular distribution and to the forward-backward asymmetries in $b \rightarrow X/s l+ l-$* , Phys. Rev. D **66** (2002)
 A. Ghinculov, T. Hurth, G. Isidori and Y. P. Yao, *Forward-backward asymmetry in $B \rightarrow X/s l+ l-$ at the NNLL level*, Nucl. Phys. B **648** (2003);
 A. Ghinculov, T. Hurth, G. Isidori and Y. P. Yao, *The rare decay $B \rightarrow X/s l+ l-$ to NNLL precision for arbitrary dilepton invariant mass*, Nucl. Phys. B **685** (2004)
 C. Bobeth, P. Gambino, M. Gorbahn and U. Haisch, *Complete NNLO QCD analysis of anti- $B \rightarrow X/s l+ l-$ and higher order electroweak effects*, JHEP **0404** (2004)
- [44] P. Colangelo, F. De Fazio, P. Santorelli and E. Scrimieri, *QCD sum rule analysis of the decays $B \rightarrow K l+ l-$ and $B \rightarrow K^* l+ l-$* , Phys. Rev. **D53** (1996)
- [45] P. Ball and R. Zwicky, *New results on $B \rightarrow \pi, K, \eta$ decay form factors from light-cone sum rules*, Phys. Rev. **D71** (2005)
 P. Ball and G. W. Jones, *$B \rightarrow \eta(\prime)$ form factors in QCD*, JHEP **08** (2007)
- [46] M. Beneke and T. Feldmann, Nucl. Phys. B **592**, 3 (2001)
 F. De Fazio, T. Feldmann and T. Hurt, Nucl. Phys. B **733**, 1 (2006)
- [47] M. V. Carlucci, P. Colangelo and F. De Fazio, *Rare B_s decays to η and η' final states*, arXiv:0907.2160v1 [hep-ph]
- [48] G. Buchalla and A. J. Buras, *QCD corrections to rare K and B decays for arbitrary top quark mass*, Nucl. Phys. B **400** (1993)
 G. Buchalla, A. J. Buras and M. E. Lautenbacher, *Weak Decays Beyond Leading Logarithms*, Rev. Mod. Phys. **68** (1996)
 G. Buchalla and A. J. Buras, *The rare decays $K \rightarrow \pi \nu \text{ anti-}\nu$, $B \rightarrow X \nu \text{ anti-}\nu$ and $B \rightarrow l+l-$: An update*, Nucl. Phys. B **548** (1999)
- [49] J. D. Bjorken, *Topics in B-Physics*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **11** (1989)
 M. Neubert and B. Stech, *Non leptonic weak decays of B mesons*, from the Second Edition of HeavyFlavours, edited by A. J. Buras and M. Lindner (WorldScientific, Singapore)

- [50] K. G. Wilson, *Nonlagrangian models of current algebra*, Phys. Rev. **179** (1969)
- [51] W. Zimmermann, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory* - in Proc. 1970 Brandeis Summer Institute in Theor. Phys, (eds. S. Deser, M. Grisaru and H. Pendleton), MIT Press (1971)
- [52] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995)
- [53] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. II, Cambridge University Press (1996)

Ringraziamenti

A conclusione di un'esperienza, è inevitabile scorrere col pensiero i momenti e le persone che ne sono state parte, fare valutazioni e bilanci. Forte di queste riflessioni, sento di poter affermare che mai come negli ultimi due anni tante persone nuove sono entrate nella mia vita, e tante si sono allontanate o se ne sono andate. In questo lavoro di tesi, che si pone a conclusione di un percorso di studi che per me è stato motivante e gratificante, desidero quindi ringraziare alcune di queste persone.

Ringrazio il Dr. Pietro Colangelo, per aver reso tanto stimolante e proficuo il mio lavoro di tesi; egli mi ha guidata in ogni passo, mettendo a mia disposizione la sua grande competenza e concedendomi una disponibilità assoluta rarissima a trovarsi, e al tempo stesso ha creato un clima sereno e collaborativo che mi ha permesso di svolgere il lavoro con grande concentrazione. Allo stesso modo sono stata seguita dalla Dr.ssa Fulvia De Fazio, con la quale ho costruito un rapporto di collaborazione e amicizia che spero proseguirà nel tempo; la ringrazio quindi con stima ma anche con affetto.

Molto di quello che ho imparato e sono capace di fare lo devo al Prof. Beppe Nardulli: egli è stato per me maestro sia di fisica che di vita, e vivrà per sempre in tutto quello che mi ha insegnato.

Un ringraziamento particolare va al Prof. Leonardo Angelini: non è facile districarsi tra le difficoltà di varia natura che emergono durante un intero percorso di studi, ma io ho avuto la fortuna di potermi sempre rivolgere a lui, che mi ha aiutato, consigliato, e soprattutto sopportato. Ringrazio ancora il Dr. Sebino Stramaglia per aver supervisionato la mia attività di tirocinio con il suo immancabile e contagioso entusiasmo.

Ringrazio inoltre tutti gli insegnanti che da quando ero bambina hanno contribuito alla mia formazione e hanno creduto nelle mie potenzialità; in particolare, i maggiori stimoli in campo scientifico mi sono stati dati dal Prof. Bartolomeo Pastore e dalla Prof.ssa Elena Turitto.

Il ringraziamento più grande è per Marco. La sua presenza e collaborazione sono state determinanti sia durante tutto il cammino di lezioni ed esami, sia per lo sviluppo del lavoro di tesi: dalla soluzione di vari problemi computazionali, alle spiegazioni sugli argomenti di cui lui è esperto, alle discussioni per cercare di capire insieme i problemi non chiari ad entrambi; lo ringrazio quindi per avermi dedicato

tempo, impegno, pazienza e comprensione. Ma questo contributo è piccolissimo se confrontato al fatto che è entrato nella mia vita e mi ha fatto uscire a riveder le stelle.

Desidero ringraziare tutta la mia famiglia, ed in particolare i miei genitori: non avrei potuto lavorare serenamente senza la quotidiana sicurezza di tornare a casa e trovare loro, che mi amano e mi sostengono, mi rassicurano e mi rendono serena. Sottolineo che nella mia famiglia sono inclusi Cinzia Falco e famiglia, che ormai ne ritengo parte a tutti gli effetti. Ringrazio Aida, la mia splendida gatta, il mio desiderio d'infanzia che si è finalmente realizzato. Ringrazio i miei amici, proprio perché sono amici di una persona dalle tendenze solitarie come me.

Infine, desidero dedicare un angolino per ringraziare me stessa, che sono riuscita a superare i problemi sia piccoli che grandi, che mi sono impegnata al massimo per realizzare i miei obiettivi, che ho coltivato le mie passioni, che ogni giorno mi dà da fare per essere felice.