

Seltene semileptonische Zerfälle schwerer Mesonen im QCD-Faktorisierungsansatz

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
M.Sc. Bastian Müller

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen

Siegen
Februar 2018

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. Thorsten Feldmann

Prof. Dr. Thomas Mannel

Datum der Disputation: 17.04.2018

Prüfungskommission: Prof. Dr. Thorsten Feldmann

Prof. Dr. Thomas Mannel

Prof. Dr. Alexander Khodjamirian

Prof. Dr. Markus Risse

Für meine Eltern

ABSTRACT

Rare decays of heavy mesons provide an excellent test of the quark flavour sector of the standard model of particle physics. Moreover, precise measurements of corresponding observables in combination with reliable predictions are an important tool to constrain the parameter space of so-called new physics models. In the light of this fact, we analyze in this dissertation the rare semileptonic decays $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ and $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$ in the framework of QCD factorization in a suitable region of phase space.

The main body of this thesis consists of three parts. Object of the first part are the $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Wilson coefficients. We present a consistent two-step running of the coefficients for mass dimension-6 operators from the scale $\mu = M_W$ to the scale $\mu = m_c$. The running involves an intermediary scale $\mu = m_b$ (with $M_W > m_b > m_c$), at which the bottom quark is integrated out. The matching coefficients and the anomalous dimensions are taken to the required order by generalizing and extending results from $b \rightarrow s$ or $s \rightarrow d$ transitions available in the literature.

In the second part of the thesis we consider the rare semileptonic decay $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ in the framework of QCD factorization, where we use our results for the Wilson coefficients from the first part. Our procedure is performed in analogy to the corresponding B decays. Since the decay rate is dominated by non-factorizable effects, e.g. through annihilation topologies, which are especially sensitive to long-distance resonance effects, we pay particular attention to the thorough estimate of the uncertainties connected with these contributions.

The third part of the thesis deals with the rare semileptonic decay $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$ at large invariant meson mass. Here it is our goal to make a rough estimate for the decay rates of all possible decay modes in a suitable region of phase space. Therefore we neglect higher-order gluonic corrections and concentrate on the contribution of leading twist of the light cone distribution amplitudes of the light mesons. The numerical analysis reveals a strong suppression of the partially integrated branching fraction compared to the resonant decay $B \rightarrow K^*(\rightarrow K \pi) \ell^+ \ell^-$ for all decay modes in the considered region of phase space. Still this decay might be important in order to gain additional insight about the decay $B \rightarrow K^*(\rightarrow K \pi) \ell^+ \ell^-$ from a proper interpolation between different kinematical regimes.

ZUSAMMENFASSUNG

Seltene Zerfälle von schweren Mesonen bieten einen hervorragenden Test des Quark-flavoursektors des Standardmodells der Teilchenphysik. Präzise Messungen von entsprechenden Observablen in Kombination mit verlässlichen theoretischen Vorhersagen sind darüber hinaus ein wichtiges Hilfsmittel, den Parameterraum von Modellen sogenannter neuer Physik einzuschränken. Vor diesem Hintergrund analysieren wir in dieser Dissertation die seltenen semileptonischen Zerfälle $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ und $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$ mithilfe des QCD-Faktorisierungsansatzes in einem geeigneten Phasenraumbereich.

Der Kern dieser Arbeit besteht aus drei Teilen. Gegenstand des ersten Teils sind die $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Wilsonkoeffizienten. Wir präsentieren eine konsistente zweistufige Evolution der Koeffizienten für Operatoren der Massendimension 6, von der Skala $\mu = M_W$ zu der Skala $\mu = m_c$. Die Evolution involviert eine intermediäre Skala $\mu = m_b$ (mit $M_W > m_b > m_c$), an welcher das Bottom-Quark ausintegriert wird. Die Matchingkoeffizienten und die anomalen Dimensionen können bis zur benötigten Ordnung, durch Verallgemeinerung und Erweiterung der in der Literatur befindlichen Ergebnisse für $b \rightarrow s$ oder $s \rightarrow d$ Übergänge, gewonnen werden.

In dem zweiten Teil der Arbeit betrachten wir den seltenen semileptonischen Zerfall $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ mithilfe des QCD-Faktorisierungsansatzes, wobei wir unsere Ergebnisse für die Wilsonkoeffizienten aus dem ersten Teil verwenden. Unser Vorgehen erfolgt analog zu den entsprechenden B -Zerfällen. Weil die Zerfallsbreite von nichtfaktorisierten Effekten, z. B. durch Annihilationstopologien, welche insbesondere auf langreichweitige Resonanzeffekte sensitiv sind, dominiert wird, schenken wir der sorgfältigen Abschätzung der mit diesen Beiträgen verbundenen Unsicherheiten eine erhöhte Aufmerksamkeit.

Der dritte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit dem seltenen semileptonischen Zerfall $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$ bei einer großen invarianten Dimesonmasse. Hier ist es unser Ziel eine grobe Abschätzung für die Zerfallsraten aller möglichen Zerfallsmoden in einem geeigneten Phasenraumbereich vorzunehmen. Daher vernachlässigen wir gluonische Korrekturen höherer Ordnung und konzentrieren uns auf den Beitrag führenden Twists der Lichtkegelverteilungsamplituden der leichten Mesonen. Die numerische Analyse zeigt, dass das partiell integrierte Verzweigungsverhältnis in dem betrachteten Phasenraumbereich für alle Zerfallsmoden, im Vergleich zu dem resonanten Zerfall $B \rightarrow K^*(\rightarrow K \pi) \ell^+ \ell^-$, stark unterdrückt ist. Dennoch könnte dieser Zerfall wichtig sein, um mittels einer geeigneten Interpolation zwischen verschiedenen kinematischen Bereichen, zusätzliche Erkenntnisse über den Zerfall $B \rightarrow K^*(\rightarrow K \pi) \ell^+ \ell^-$ zu erlangen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik	5
2.1.1	Teilcheninhalt und Wechselwirkungen	5
2.1.2	Elemente der Quantenfeldtheorie	7
2.1.3	Elektroschwache Theorie	9
2.1.4	CKM-Matrix	17
2.1.5	Quantenchromodynamik	21
2.2	Von der Lagrangedichte zur Observablen	22
2.2.1	Observablen und Matrixelemente	22
2.2.2	Störungstheorie und Feynmandiagramme	24
2.2.3	Renormierung und asymptotische Freiheit	25
2.2.4	Hadronische Prozesse und Quark-Hadron-Dualität	28
2.2.5	Resonanzen und Dispersionsrelation	30
2.3	Effektive Feldtheorie	33
2.3.1	Was sind effektive Theorien?	34
2.3.2	Konstruktion einer effektiven Feldtheorie	35
2.3.3	Fermitheorie	36
2.3.4	Renormierungsgruppengleichung für die Wilsonkoeffizienten	40
2.4	Hadronische Matrixelemente	42
2.4.1	Formfaktoren	42
2.4.2	Lichtkegelverteilungsamplituden	44
2.4.3	QCD-Faktorisierungsansatz	45
3	Die Wilsonkoeffizienten für $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Übergänge im SM	49
3.1	Anfangsbedingungen bei der Skala M_W	50
3.2	Evolution der Wilsonkoeffizienten	51

3.3	Numerische Ergebnisse	56
3.4	Der effektive Wilsonkoeffizient $C_{9,\text{eff}}$	57
4	$D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfälle im QCD-Faktorisierungsansatz	61
4.1	Notation und theoretisches Grundgerüst	62
4.1.1	Effektive Hamiltondichte	62
4.1.2	Verallgemeinerte Formfaktoren	62
4.1.3	Resonanzeffekte	66
4.2	Detaillierte Analyse der Zerfallstopologien	68
4.2.1	Naive Faktorisierung	68
4.2.2	Quarkschleifentopologien (ohne Spektatoreffekte)	70
4.2.3	Annihilation	74
4.2.4	Nichtfaktorisierbare Spektatorstreuung	77
4.3	Numerische Ergebnisse	79
4.3.1	Detaillierte Aufschlüsselung der Beiträge zu $\mathcal{C}_{9,\perp}$ und $\mathcal{C}_{9,\parallel}$	80
4.3.2	Differentielle Zerfallsraten	84
4.3.3	Verhältnis von transversalen und longitudinalen Raten	89
4.4	Ausblick auf Effekte NP	90
4.5	Wichtige Ergebnisse auf einen Blick	91
5	Der Zerfall $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$	93
5.1	Effektive Hamiltondichte	94
5.2	Kinematik	97
5.3	Amplituden	100
5.3.1	Nicht-lokale Beiträge der Operatoren \mathcal{O}_{1-6}	101
5.3.2	Nicht-lokales Matrixelement	104
5.3.3	Lokale Beiträge der Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$	105
5.4	Differentielle Zerfallsbreite	106
5.5	Numerische Ergebnisse	107
6	Zusammenfassung und Ausblick	113
A	Evolution der Wilsonkoeffizienten	117
A.1	Starke Kopplungskonstante α_s	117
A.2	Skalenabhängigkeit der Masse	118
A.3	Lösung der Renormierungsgruppengleichung	119
A.4	Anomale Dimensionsmatrix	121

Inhaltsverzeichnis	iii
<hr/>	
B Alternative Operatorbasen	125
C Renormierung des Matrixelements $\langle ul^+\ell^- \mathcal{O}_{1,2}^d c \rangle$	127
D Details zu $D \rightarrow \rho\gamma^*$ Matrixelementen	129
E Explizite Formeln für $D \rightarrow \pi\ell^+\ell^-$ Zerfälle	131
F Resonanzmodell	133
F.1 Anwendung auf die Quarkschleifentopologie	136
F.2 Anwendung auf die Annihilationstopologie	140
G Rechnerische Details zum Zerfall $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$	145
G.1 Größen in verschiedenen Bezugssystemen	145
G.2 Farbfaktoren	147
G.3 Kinematische Invarianten	148
H Liste von Akronymen	149
Literaturverzeichnis	151
Liste der eigenen Publikationen	165

Kapitel 1

Einleitung¹

Die Frage, was die Welt im Innersten zusammenhält, hat die Menschheit von jeher beschäftigt. Schon die alten Griechen philosophierten über kleine, unteilbare Grundbausteine, aus denen die Materie aufgebaut sein sollte. Diese nannten sie Atome (von griechisch ἄτομος „unteilbar“) [2, 3]. Doch die Entdeckung des ersten nach heutigem Verständnis „wirklichen“ Elementarteilchens ließ lange auf sich warten. Erst im Jahr 1897 entdeckte Joseph John Thomson beim Experimentieren mit Kathodenstrahlen das Elektron [4]. Nur wenige Jahre später stellte Albert Einstein 1905 in seiner Arbeit zum photoelektrischen Effekt die Lichtquantenhypothese auf. Dieser Hypothese zufolge sollte Licht aus Teilchen, welche Photonen genannt wurden, bestehen. Zunächst wurde der Teilchencharakter des Lichtes noch vielfach angezweifelt. Erst Anfang der zwanziger Jahre konnte Arthur Holly Compton durch seine Experimente alle Zweifel ausräumen. Doch inzwischen hatte Rutherford 1919 bei der Untersuchung von Stickstoff das Proton entdeckt. Um das Betaspektrum zu erklären führte Pauli 1930 hypothetisch das (Elektron)-Neutrino ein, dessen Existenz aber erst 1956 nachgewiesen werden sollte. Es folgten die Entdeckung des Neutrons 1932 durch James Chadwick [5] und die Entdeckung des Positrons, des ersten sogenannten Antiteilchens, in demselben Jahr durch Carl D. Anderson. Nur vier Jahre später verkündeten Carl D. Anderson und Seth Neddermeyer 1936 die Entdeckung eines weiteren geladenen Leptons, des Myons. Noch in den 30er Jahren dachten viele Physiker nun die tatsächlichen Grundbausteine der Materie gefunden zu haben. Doch wurde in den 1950er Jahren ein ganzer „Zoo“ von Teilchen, sogenannte Hadronen, entdeckt. Dabei stieß man auch auf einige Teilchen, die aus unverständlichen Gründen eine größere Lebensdauer aufwiesen als andere Teilchen. Um dieses Phänomen zu erklären führten Murray Gell-Mann (1953) und Kazuhiko Nishijima (1955) das Konzept der Seltsamkeit („strangeness“) ein, wo-

¹Vgl. [1].

bei letzterer dieses Konzept „Eta-Ladung“ nannte. Da dieses Erklärungsmodell aber nicht ganz befriedigend war, entwickelten André Petermann, Murray Gell-Mann und George Zweig Anfang der 1960er Jahre das sogenannte, zunächst nur mathematisch motivierte, Quarkmodell [6]. Gemäß diesem Modell sollten diese Hadronen, zu denen insbesondere auch Protonen und Neutronen gehören, eine Substruktur aufweisen. Die Teilchen, welche die Substruktur ausmachen, wurden Quarks getauft. Seltsame Teilchen sollten diesem Modell zufolge ein Strange-Quark involvieren. Bereits Ende der sechziger Jahre konnte die Existenz von Quarks mittels tief-inelastischer Elektron-Nukleon-Streuungen verifiziert werden. Doch sollten wir die Entdeckung des Myon-Neutrinos 1962 nicht übersehen. Damit hatte nun nicht nur das Elektron mit dem Myon, sondern auch das Elektron-Neutrino mit dem Myon-Neutrino ein schwereres Partnerteilchen. In den darauf folgenden Jahren wurden weitere Elementarteilchen entdeckt: 1974 das Charm-Quark, 1975 das Tau-Lepton, 1977 das Bottom-Quark, 1979 das Gluon, 1983 die W -Bosonen sowie das Z -Boson, 1995 das Top-Quark [7, 8] und schließlich 2000 das Tau-Neutrino [9], von denen jedes Teilchen seine eigene Geschichte besitzt, auf welche wir hier aber nicht weiter eingehen wollen.

Nach unserem gegenwärtigen Wissen ist die Materie also aus Quarks und Leptonen dreier verschiedener Familien aufgebaut, die auf verschiedene Arten miteinander wechselwirken können. Dieses gegenwärtige Wissen ist in dem sogenannten Standardmodell (SM) zusammengefasst. Dieses Modell liefert eine konsistente theoretische Beschreibung der Grundbausteine der Materie und deren Wechselwirkungen, und es besteht weitgehend eine Übereinstimmung zwischen theoretischen Vorhersagen und experimentellen Messungen.

Die sechs verschiedenen Quarksorten werden auch „Flavour“ (von englisch „Geschmack“) genannt. Das Teilgebiet der Elementarteilchenphysik, das sich mit der Physik flavourändernder Übergänge beschäftigt, nennt man Flavourphysik. Die Quarkflavourphysik involviert insbesondere drei Sektoren, den Strange-, den Charm- und den Beauty-Sektor (entsprechend der Quarkflavour), welche sich mit den Zerfällen von Kaonen, und D - bzw. B -Mesonen und deren Mischungen beschäftigen [10, 11, 12]. Durch das Studium von entsprechenden Übergängen lässt sich der Quarkflavoursektor des Standardmodells experimentell überprüfen. Insbesondere schwache B -Zerfälle sind bis zum heutigen Tag intensiv untersucht worden. Zu diesem Zweck wurden spezielle Teilchenbeschleuniger, die auf die Produktion von B -Mesonen spezialisiert sind, sogenannte B -Fabriken, ins Leben gerufen. Beispiele für B -Fabriken sind der PEP-II Beschleuniger (USA) und der KEKB-Beschleuniger (Japan), welche aber 2008 bzw. 2010 den Dienst eingestellt haben. Die SuperB-Fabrik SuperKEKB in Japan befindet sich gerade im Bau und die Datennahme soll aller Voraussicht nach dieses Jahr aufgenommen werden. Doch zuvor

läutete die Inbetriebnahme des Large Hadron Colliders (LHC) am Forschungszentrum CERN in Genf im Jahr 2011 eine neue Ära ein, da dieser erstmalig die Möglichkeit bietet, die Physik bei der Teraskala (d. h. Energien im TeV-Bereich) zu erforschen. Der LHC beherbergt vier verschiedene Experimente, von denen das Experiment LHCb insbesondere der Untersuchung des Beauty-Sektors gewidmet ist. Jedoch ist es nicht allein darauf beschränkt, sondern auch der Charm- und der Strange-Sektor werden hier weiter erforscht. Mit der Entdeckung eines Higgs-artigen Teilchens am LHC in 2012, konnte der erste große Erfolg dieser Ära gefeiert werden [13, 14]. Momentan befindet sich der LHC in der zweiten Phase der Datennahme („Run 2“) und es konnte schon eine beträchtliche Datenmenge, die einer integrierten Luminosität von 9 fb^{-1} entspricht, aufgenommen werden. Bisher sind noch vier weitere Phasen der Datennahme geplant. Insgesamt soll die integrierte Luminosität dann einen Wert von 300 fb^{-1} erreichen [15]. Trotz dieses enormen technischen Fortschritts wurden *direkte* Signale, die von neuen Teilchen oder Wechselwirkungen herrühren könnten, im Hochenergiebereich bisher noch nicht beobachtet. Aus diesem Grund gewinnen *indirekte* Untersuchungen der Physik jenseits des Standardmodells (BSM) mittels Observablen des Niederenergiebereiches zunehmend an Bedeutung. Insbesondere können Präzisionsmessungen in Kombination mit verlässlichen theoretischen Vorhersagen dabei helfen, den BSM-Parameterraum für Massen und Kopplungskonstanten einzuschränken. Eine besondere Bedeutung kommt dabei den seltenen Zerfällen schwerer Mesonen zu, da diese eine erhöhte Sensitivität auf mögliche Effekte sogenannter neuer Physik besitzen. Selten bedeutet, dass das entsprechende Verzweigungsverhältnis klein, d. h. in der Praxis von der Größenordnung $\lesssim 10^{-6}$ ist. Vom theoretischen Standpunkt aus gesehen ist diese numerische Kleinheit des Verzweigungsverhältnisses darauf zurückzuführen, dass derartige Zerfälle von einem flavourändernden neutralen Strom (FCNC) induziert und durch elektroschwache Box- bzw. Pinguindiagramme im SM vermittelt werden. Für die seltenen B -Zerfälle konnte in den vergangenen Jahren dahingehend ein beachtlicher Fortschritt verzeichnet werden, als dass die theoretischen Vorhersagen und experimentellen Messungen ein hohes Maß an Präzision erreicht haben. Weit weniger erforscht hingegen sind die analogen Charm-Zerfälle, was unter anderem daran liegt, dass die elektroschwache Physik durch sogenannte langreichweitige Effekte abgeschirmt wird, und somit nur schwerlich zugänglich zu sein scheint. Zudem scheint es eine hochgradig nicht-triviale Aufgabe zu sein, realistische Modelle zu konstruieren, um diese Effekte sauber abschätzen zu können. Vor diesem Hintergrund beschäftigen wir uns in dieser Arbeit mit zwei seltenen Zerfällen, mit einem Zerfall des Charm-Sektors, $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$, und mit einem Zerfall des B -Sektors, $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$. Weitere Details zur der Motivation und dem Inhalt dieser Projekte finden sich in den einleitenden Bemerkungen zu den jeweiligen Kapiteln.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Kapitel 2 beinhaltet theoretisches Werkzeug. Nach einem kurzen Überblick über das Standardmodell der Teilchenphysik gehen wir in Kapitel 2.2 auf verschiedene Methoden und Konzepte ein, die wir für die theoretische Vorhersage von in der Teilchenphysik relevanten Größen benötigen. Den effektiven Feldtheorien und den hadronischen Matrixelementen ist jeweils ein eigenes Kapitel gewidmet (Kapitel 2.3 und 2.4). Den Hauptteil dieser Arbeit stellen die Kapitel 3-5 dar. Die Kapitel 3 und 4 basieren auf den Projekten die in [A2] und [A3] veröffentlicht wurden. Beide Kapitel gehören inhaltlich zusammen und beschäftigen sich mit dem Charm-Sektor. Gegenstand des ersten dieser zwei Kapitel sind die skalenabhängigen effektiven Kopplungen, die sogenannten Wilsonkoeffizienten, für $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Übergänge. Diese Koeffizienten werden typischerweise zunächst an der elektroschwachen Skala berechnet. Für die Analyse eines konkreten Zerfalls müssen die Koeffizienten aber an der Skala des betrachteten Zerfalls, gegeben durch die Masse des zerfallenden Teilchens, berechnet werden. Diese Berechnung präsentieren wir in Kapitel 3. Das darauf folgende Kapitel 4 greift die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels auf, und behandelt die Analyse von $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfällen im Rahmen des QCD-Faktorisierungsansatzes. Dabei legen wir unser besonderes Augenmerk nicht auf Präzision, sondern auf eine vernünftige Abschätzung der differentiellen Zerfallsraten inklusive der relevanten Unsicherheiten. Danach nehmen wir einen gedanklichen Sprung vor und studieren in Kapitel 5, dessen Resultate bisher noch nicht publiziert worden sind, einen Zerfall des Beauty-Sektors, $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$ bei großer invarianter Dimesonmasse. Dabei ist es unser Ziel, eine grobe Abschätzung für die differentiellen Zerfallsraten aller Zerfallsmoden in einem geeigneten Phasenraumbereich vorzunehmen. Abschließend fassen wir unsere in den Kapiteln 3-5 gewonnen Erkenntnisse in Kapitel 6 zusammen und geben einen kurzen Ausblick darauf, was über die im Hauptteil behandelten Gegenstände hinaus von Interesse sein könnte. Weiterführende Details, die in den Hauptteil keinen Eingang gefunden haben, finden sich in den Anhängen A-G. Eine Übersicht über die in dieser Arbeit verwendeten Akronyme ist in Anhang H festgehalten.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel diskutieren wir die wesentlichen theoretischen Grundlagen, welche für diese Arbeit benötigt werden. Manche Abschnitte orientieren sich an [18]. Zunächst geben wir in Kapitel 2.1 einen kurzen Überblick über das Standardmodell der Teilchenphysik. Das darauf folgende Kapitel 2.2 behandelt grundlegende Methoden und Konzepte, die auf dem Weg von der Lagrangedichte bis zur Vorhersage für eine Observable benutzt werden. Dieser Weg wird durch die Verwendung einer effektiven Theorie zusätzlich vereinfacht, in manchen Fällen sogar erst dadurch gangbar. Dies ist Gegenstand von Kapitel 2.3. Im letzten Kapitel 2.4 beschäftigen wir uns mit den Matrixelementen effektiver Operatoren, die im effektiven Feldtheorieansatz auftauchen.

2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Dieses Kapitel orientiert sich an [19, 18]. Unser Ziel besteht lediglich darin, im Folgenden einen kurzen Abriss über das Standardmodell zu geben. Für eine ausführliche Beschreibung der in diesem Kapitel erörterten Sachverhalte verweisen wir den Leser auf [20, 21].

2.1.1 Teilcheninhalt und Wechselwirkungen

Das Standardmodell der Teilchenphysik (SM) ist eine Theorie zur konsistenten Beschreibung der Grundbausteine der Materie und deren Wechselwirkungen. Der Teilcheninhalt umfasst zwölf Fermionen (Spin $\frac{1}{2}$), den Materiebestandteilen, zwölf Eichbosonen (Spin 1), den Kräfteträgern, und ein Higgs-Boson (Spin 0). Die Fermionen sind in drei Familien eingeteilt. Jede Familie enthält zwei Quarks, welche eine drittelzahlige elektromagnetische Ladung (in Einheiten der Elementarladung) tragen, und

Fermionen (Materieteilchen)	Generation			Eichbosonen (Kräfteträger)
	I.	II.	III.	
Quarks	u (2,2 MeV)	c (1,28 GeV)	t (173,1 GeV)	γ ($< 10^{-18}$ eV)
	d (4,7 MeV)	s (96 MeV)	b (4,18 GeV)	g (0)
Leptonen	e (0,511 MeV)	μ (0,106 GeV)	τ (1,777 GeV)	Z (91,2 GeV)
	ν_e (< 2 eV)	ν_μ ($< 0,19$ MeV)	ν_τ ($< 18,2$ MeV)	W (80,4 GeV)
Higgs-Boson	H (125,1 GeV)			

Tabelle 2.1: Elementarteilchen im SM und deren Massen, entnommen aus [22]. Fermionen (Quarks und Leptonen) sind die Materiebestandteile und tragen einen halbzahligen Spin. Die Wechselwirkung zwischen den Fermionen wird durch einen Austausch von Eichbosonen (γ, g, Z, W), die einen ganzzahligen Spin besitzen, realisiert. Das mit dem Higgsboson assoziierte Higgsfeld steht mit der Masse der Elementarteilchen in Verbindung.

zwei Leptonen, von denen das eine elektromagnetisch negativ geladen ist und das andere elektromagnetisch neutral ist. Für die einzelnen Quarksorten („flavour“) wurden die Bezeichnungen u („up“), c („charm“), t („top“) und d („down“), s („strange“), b („bottom“ oder „beauty“) eingeführt. Die drei zuerst (zuletzt) genannten Quarks werden auch als Up-Type-Quarks (Down-Type-Quarks) bezeichnet. Ein elektromagnetisch neutrales Lepton wird auch Neutrino genannt. Die Fermionen der zweiten und dritten Familie unterscheiden sich von denen der ersten Familie nur im Hinblick auf die Masse. Ansonsten handelt es sich um identische Kopien. Wie Tabelle 2.1 zeigt, unterscheiden sich die Fermionmassen teilweise um mehrere Größenordnungen. Neutrinos werden im SM als masselos behandelt. Desweiteren gibt es zu jedem Teilchen ein Antiteilchen mit derselben Masse, aber den entgegengesetzten Quantenzahlen. Stabile Materie besteht ausschließlich aus Teilchen der ersten Familie. Teilchen der zweiten und dritten Familie lassen sich z. B. durch Teilchenstreuungen an Beschleunigern wie dem Large Hadron Collider (LHC) erzeugen. Sie sind instabil und zerfallen in Teilchen der ersten Familie. Die Elementarteilchen können auf drei verschiedene Arten miteinander wechselwirken: stark, elektromagnetisch und schwach. Quarks können auf alle drei Arten miteinander interagieren, die geladenen Leptonen lediglich elektromagnetisch und schwach. Die Neutrinos nehmen ausschließlich an der schwachen Wechselwirkung teil. Eine Wechselwirkung wird durch den Austausch von ihr entsprechenden Eichbosonen vermittelt. Gluonen sind die Austauscheteilchen für die starke, W -Bosonen sowie das Z -Boson für die schwache und das Photon ist das Austauscheteilchen für die elektromagnetische

Wechselwirkung. Die gravitative Wechselwirkung wird nicht durch das Standardmodell beschrieben. Bisher ist noch kein Modell konstruiert worden, welches alle vier Kräfte erfolgreich vereinheitlicht. Das Higgs-Boson, präziser gesagt das Higgsfeld, steht mit der Masse der Elementarteilchen in einem engen Zusammenhang. Mit diesem sogenannten Higgsmechanismus werden wir uns noch in Kapitel 2.1.3 etwas näher beschäftigen. Doch betrachten wir im anschließenden Kapitel zunächst einige Elemente des Feldkonzeptes, welches zur Beschreibung von Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen verwendet wird.

2.1.2 Elemente der Quantenfeldtheorie

Das Standardmodell ist eine *lokal eichinvariante* Quantenfeldtheorie (QFT)¹, die auf der Symmetriegruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ basiert. Dabei ist die Farbgruppe $SU(3)_C$ mit der starken Wechselwirkung und die Gruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ mit der elektroschwachen Wechselwirkung assoziiert. Die Symmetrie der zuletzt genannten Gruppe wird durch den Higgsmechanismus spontan gebrochen, wobei die Symmetrie, die mit der Untergruppe $U(1)_{em}$ verbunden ist, von diesem Mechanismus unberührt bleibt. Teilchen werden durch Felder, welche Operatoren auf dem quantenmechanischen Hilbertraum der Teilchenzustände sind, beschrieben. Diese Feldoperatoren wirken als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Teilchen und Antiteilchen. Mit einem Teilchen ist abhängig von dessen Spin ein spezifischer Feldtyp verbunden. Und zwar wird

- ein Teilchen mit Spin-0 durch ein Skalarfeld,
- ein Teilchen mit Spin-1 durch ein Vektorfeld,
- und ein Teilchen mit Spin- $\frac{1}{2}$ durch ein Spinorfeld,

beschrieben. Die mit den Materieteilchen (Eichbosonen) assoziierten Felder heißen auch Materiefelder (Eichfelder). Eine QFT kann analog zur klassischen Mechanik im Lagrangeformalismus formuliert werden. Die vollständige Dynamik einer Feldtheorie ist dann durch ihre Lagrangedichte, welche eine Funktion der Felder ist, beschrieben. Dieser Lagrangeformalismus gestattet es, die folgenden grundlegenden Eigenschaften in die Theorie zu implementieren:

¹Eine QFT ist einfach gesagt eine Synthese von Quantenmechanik (Theorie mikroskopischer Teilchen), spezieller Relativitätstheorie (Theorie „schneller“ Teilchen) und klassischer Elektrodynamik (Theorie der klassischen elektromagnetischen Felder). Die Effekte aller drei Theorien sind zur Beschreibung von Elementarteilchen unerlässlich.

- die Raumzeitsymmetrie in Form von Lorentzinvarianz sowie interne Symmetrien wie die Eichsymmetrie,
- die Kausalität,
- und lokale Wechselwirkungen.

Dieser kurze Überblick soll hier genügen. Doch bevor wir uns die QFT der elektroschwachen und starken Wechselwirkung ansehen, beschäftigen wir uns im Weiteren kurz mit der Quantenelektrodynamik (QED), um den einer Eichtheorie zugrundeliegenden Hauptgedanken, die lokale Eichinvarianz, besser zu verstehen. Dazu betrachten wir zunächst die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x), \quad (2.1)$$

welche ein freies Diracfermion ψ beschreibt. In dieser Lagrangedichte gibt es zwei Terme: einen, mit einer Ableitung, und einen, der quadratisch in dem Fermionfeld ist. Den ersten Term interpretieren wir als kinetischen Term, den zweiten Term als Massenterm. Man sieht sehr leicht, dass diese Lagrangedichte eine $U(1)$ -Symmetrie aufweist, sie also invariant unter der *globalen* Phasentransformation

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x), \quad (2.2)$$

ist, wobei α eine beliebige reelle Zahl ist. Wie schon bereits oben festgestellt, beschreibt die Gleichung (2.1) eine freie Theorie. Was uns also noch fehlt ist ein Term, der eine Wechselwirkung beschreibt. Es ist nun gerade das Konzept der lokalen Eichinvarianz, welches uns den entsprechenden Wechselwirkungsterm generiert. Die lokale Eichinvarianz wird als ein fundamentales Prinzip der modernen Physik angesehen. Um den Wechselwirkungsterm zu generieren, fordern wir daher die Invarianz der Lagrangedichte der Theorie unter *lokalen* Eichtransformationen

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (2.3)$$

wobei $\alpha(x)$ nun eine beliebige reellwertige Funktion ist. Um diese Forderung zu erfüllen, müssen wir ein Eichfeld A_μ einführen und die Ableitung in Gleichung (2.1) durch die sogenannte kovariante Ableitung ersetzen,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x). \quad (2.4)$$

Diese Ersetzung nennt man auch minimale Substitution, e bezeichnet die elektromagnetische Kopplung. Dann muss das Eichfeld gemäß

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (2.5)$$

transformieren. Damit gelangen wir zu der lokal eichinvarianten Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WW}, \quad (2.6)$$

d. h. das Prinzip der lokalen Eichinvarianz hat eine Wechselwirkung zwischen dem Fermionfeld und dem Eichfeld, beschrieben durch \mathcal{L}_{WW} , generiert. Da alle Felder in dem Wechselwirkungsterm von demselben Raumzeitpunkt x^μ abhängen, spricht man von einer lokalen Wechselwirkung. Doch fehlt uns noch ein weiterer Term. Da das Vektorfeld A_μ bisher kein dynamischer Freiheitsgrad ist, müssen wir noch den entsprechenden kinetischen Term

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.7)$$

eingeführen und zu \mathcal{L} addieren. Damit ist die Dynamik der QED vollständig beschrieben. Auf den Eichfixierungsterm wollen wir hier nicht eingehen. Das Fazit, welches wir an dieser Stelle ziehen wollen ist das Folgende: *Das Prinzip der lokalen Eichinvarianz legt die Struktur der Wechselwirkungen zwischen Fermionen und Eichbosonen vollständig fest.* Die QED, anhand derer wir zu diesem Fazit gekommen sind, ist eine abelsche Eichtheorie und damit hinsichtlich der Struktur der zugrundeliegenden Symmetriegruppe sehr einfach. Jedoch lässt sich das Prinzip der lokalen Eichinvarianz auch auf nichtabelsche Gruppen, welche bei der Beschreibung der schwachen und starken Wechselwirkung involviert sind, verallgemeinern. Nichtabelsche Eichtheorien nennt man auch Yang-Mills-Theorien [23].

Diese wenigen Bemerkungen sollen an dieser Stelle genügen. Für eine umfassende Einführung in die QFT verweisen wir auf [20, 21]. Im den folgenden zwei Kapiteln besprechen wir die elektroschwache Feldtheorie und die Quantenchromodynamik, die Feldtheorie der starken Wechselwirkung.

2.1.3 Elektroschwache Theorie

Unter der elektroschwachen Feldtheorie verstehen wir eine vereinheitlichte theoretische Beschreibung der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die Theorie basiert auf einer $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie. Diese Symmetriegruppe besitzt vier

Generatoren T_a ,

$$T_a = \hat{I}_a \quad (a = 1, 2, 3) \quad \text{und} \quad T_4 = \hat{Y}, \quad (2.8)$$

wobei \hat{Y} der Hyperladungsoperator und \hat{I}_a die schwachen Isospinoperatoren sind, welche der Lie-Algebra

$$[\hat{I}_a, \hat{I}_b] = i\varepsilon_{abc}\hat{I}_c, \quad [\hat{I}_a, \hat{Y}] = 0, \quad (2.9)$$

genügen. Die Objekte ε_{abc} heißen auch die Strukturkonstanten der Gruppe. In der fundamentalen Darstellung sind die Generatoren der Gruppe $SU(2)_L$ durch $\frac{\sigma_a}{2}$ mit den Pauli-Matrizen σ_a gegeben. Die elektroschwache Wechselwirkung koppelt ausschließlich an linkshändige Fermionen. Links- und rechtshändige Fermionfeldkomponenten sind durch die Projektionen

$$\psi_{L,R} \equiv P_{L,R} \psi, \quad P_{L,R} \equiv \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5). \quad (2.10)$$

definiert. Hier steht ψ für ein beliebiges Fermionfeld und γ_5 ist eine Diracmatrix. Die Fermionfelder gruppieren wir dann in $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Multipletts. Linkshändige Fermionfelder bilden Dubletts mit

$$Q_L^i = (u_L^i, d_L^i)^T \quad \text{mit} \quad u_L^i = u_L, c_L, t_L, \quad d_L^i = d_L, s_L, b_L, \quad (2.11)$$

$$E_L^i = (\nu_L^i, e_L^i)^T \quad \text{mit} \quad \nu_L^i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \quad e_L^i = e_L, \mu_L, \tau_L. \quad (2.12)$$

Rechtshändige Felder bilden Singulets mit

$$U_R = u_R, c_R, t_R, \quad (2.13)$$

$$D_R = d_R, s_R, b_R, \quad (2.14)$$

$$E_R = e_R, \mu_R, \tau_R. \quad (2.15)$$

Diese $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Multipletts lassen sich dann durch die Quantenzahlen des schwachen Isospins I und seiner z-Komponente I_3 , und der Hyperladung Y klassifizieren. Für linkshändige Felder gilt $I = \frac{1}{2}$, für rechtshändige Felder $I = 0$. Isospin I und Hyperladung Y sind mit der elektromagnetischen Ladung Q über die Gell-Mann-Nishijima-Relation,

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (2.16)$$

	ν_L^i	e_L^i	E_R	u_L^i	d_L^i	U_R	D_R
I_3	+1/2	-1/2	0	+1/2	-1/2	0	0
Y	-1	-1	-2	+1/3	+1/3	+4/3	-2/3
Q	0	-1	-1	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3

Tabelle 2.2: Isospin I_3 , Hyperladung Y und elektromagnetische Ladung Q für links- und rechtshändige Leptonen und Quarks.

verknüpft. In Tabelle 2.2 sind die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Quantenzahlen für die einzelnen Fermionen aufgelistet.

Die Lagrangedichte der elektroschwachen Feldtheorie setzt sich schematisch aus vier Termen zusammen

$$\mathcal{L}_{\text{EW}} = \mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} . \quad (2.17)$$

Im Folgenden betrachten wir die Terme in dieser Lagrangedichte separat.

Eichfelder

Der erste Term

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1\dots 3} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} , \quad (2.18)$$

beinhaltet die Eichfelder. Dabei haben wir die Feldstärketensoren

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \varepsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c , \quad (SU(2)_L) \quad (2.19)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu , \quad (U(1)_Y) \quad (2.20)$$

eingeführt. Mit g_2 bezeichnen wir die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung, W_μ^a und B_μ bezeichnen die Eichfelder der schwachen Wechselwirkung bzw. der Hyper-Wechselwirkung. Wir stellen fest, dass mit jedem Generator der Gruppe ein Eichfeld assoziiert ist.

Fermionfelder und Fermionfeld-Eichfeld-Wechselwirkung

Der zweite Term

$$\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \sum_{j=1\dots 3} \sum_{\psi_j} \bar{\psi}_j i \not{D} \psi_j \quad (2.21)$$

mit $\psi_i \in \{Q_L^i, U_R^i, D_R^i, E_L^i, E_R^i\}$ beinhaltet den kinetischen Term der Fermionfelder. Zudem generiert die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \hat{T}^a W_\mu^a + ig_1 \frac{\hat{Y}}{2} B_\mu, \quad (2.22)$$

Wechselwirkungsterme. Mit g_1 bezeichnen wir hier die Kopplungskonstante der Hyper-Wechselwirkung. An dieser Stelle weisen wir nochmal darauf hin, dass links- und rechts-händige Felder unterschiedlich unter der Gruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ transformieren. Damit gehen die Generatoren der Gruppe in derjenigen Darstellung in die kovariante Ableitung ein, unter der die Felder, auf welche sie wirkt, transformieren.

Higgsfeld

Die ersten beiden Terme in der Lagrangedichte der elektroschwachen Feldtheorie beinhalten keine Teilchenmassen. Laut experimentellem Befund sind jedoch sowohl Quarks und Leptonen als auch die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung massive Teilchen.² Um die Teilchenmassen in die Theorie zu integrieren, konstruierten der britische Physiker Peter W. Higgs [24, 25] sowie François Englert und Robert Brout [26] sowie T. W. B. Kibble, Carl R. Hagen und Gerald Guralnik [27] im Jahr 1964 einen Mechanismus, der heute auch Higgsmechanismus genannt wird. Sie schlugen vor den Beitrag

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (2.23)$$

zu der Lagrangedichte der elektroschwachen Feldtheorie zu addieren. Das Higgspotential ist gegeben durch

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \mu^2, \lambda > 0. \quad (2.24)$$

²Wir weisen hier nochmal darauf hin, dass die Neutrinos im SM als masselose Teilchen behandelt werden.

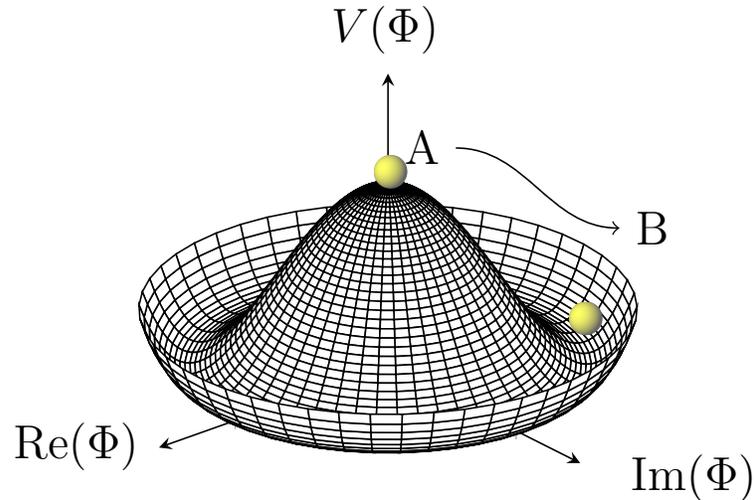


Abbildung 2.1: Illustration des Higgspotentials. Wegen dessen Form spricht man auch manchmal vom „Mexikanischen-Hut-Potential“. Die spontane Symmetriebrechung können wir uns anhand eines mechanischen Analogons verständlich machen. Eine Kugel befinde sich in einer instabilen Lage im Punkt A. Rollt die Kugel den Potentialberg herunter, wählt sie dabei einen „Vakuuzustand“ B spontan aus. Grafik erstellt mithilfe von [28].

Dabei ist das Higgfeld Φ ein komplexes Skalarfeld mit $Y = 1$, welches unter der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ als Isospindublett transformiert,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Außerdem ist es ein Farbsingulett und besitzt einen elektrisch neutralen Vakuumerwartungswert. In Abbildung 2.1 ist das Higgspotential dargestellt. Bedingt durch die Wahl der Parameter μ^2, λ besitzt das Potential einen nicht-trivialen entarteten Vaku-

umzustand für alle Feldkonfigurationen mit $\Phi^\dagger\Phi = \frac{2\mu^2}{\lambda}$. Mittels der Bedingung

$$\hat{Q}\Phi = \left(\hat{I}_3 + \frac{\hat{Y}}{2} \right) \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi = 0, \quad (2.26)$$

wählen wir die reelle und elektrisch neutrale Feldkonfiguration und erhalten den Vakuumerwartungswert

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.27)$$

Durch diese spezifische Wahl des Vakuumerwartungswertes wird die ursprüngliche Symmetrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ spontan gebrochen. Darunter verstehen wir, dass der Grundzustand diese Symmetrie nicht mehr teilt. Jedoch ist er invariant unter Transformationen der durch den Ladungsoperator \hat{Q} generierten Untergruppe $U(1)_{em}$. In Abbildung 2.1 ist diese spontane Symmetriebrechung anhand eines mechanischen Analogons illustriert. Wir stellen uns eine Kugel vor, die bei $\Phi = 0$ im Punkt A ruhe. Diese Situation entspricht der Konfiguration vor der Symmetriebrechung. Die Kugel rölle sodann aus dieser instabilen Lage den Potentialberg zu einem Punkt B herunter, der spontan ausgewählt wird. Dieser Punkt B entspricht der Wahl eines spezifischen „Vakuumszustandes“. Dieser Vakuumszustand teilt die Rotationssymmetrie des Potentials nicht.

Wenn wir nun diesen spezifischen Vakuumerwartungswertes in den kinetischen Term des Higgsfeldes einsetzen und die Massenmatrizen diagonalisieren, erhalten wir die physikalischen Eichfeldern

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad (2.28)$$

und

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

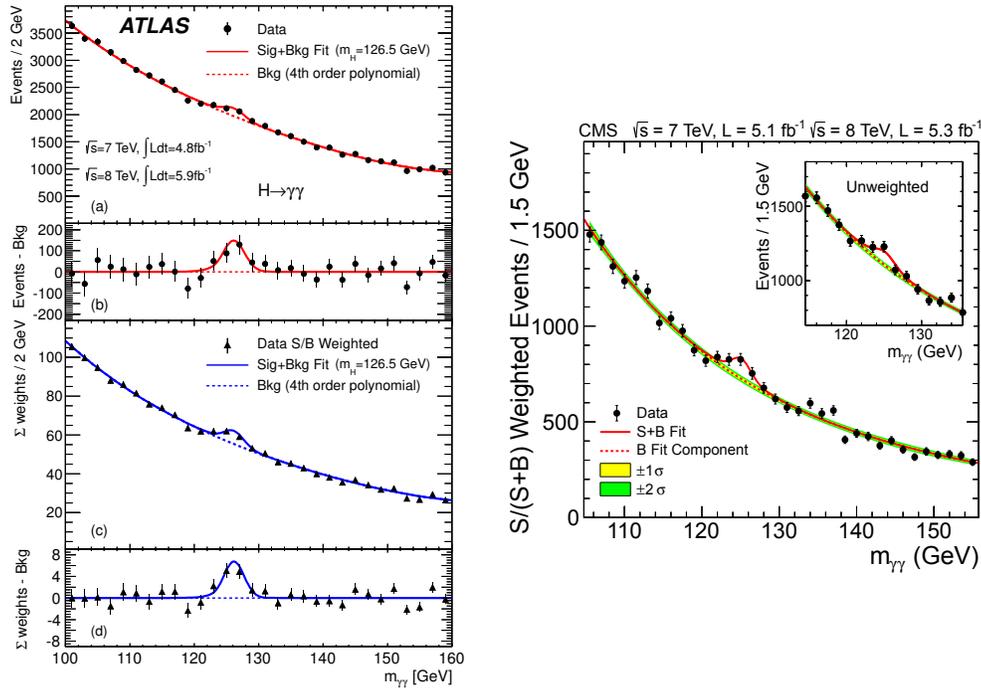


Abbildung 2.2: ATLAS- und CMS-Messung für den Kanal $H \rightarrow \gamma\gamma$. Entnommen aus [13, 14].

wobei $\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$ der Weinberg-Winkel ist. Die Massen der Eichbosonen ergeben sich zu

$$M_W = \frac{1}{2} g_2 v, \quad M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} v. \quad (2.30)$$

Für das Feld A_μ taucht kein Massenterm auf. Das Photon ist daher masselos.

Diese sogenannte elektroschwache Symmetriebrechung $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$ wurde 1967 von Sheldon Glashow und Steven Weinberg [29] sowie Abdus Salam [30] theoretisch beschrieben.

Die Existenz des mit dem Higgfeld assoziierten Higgsbosons konnte 2012 am LHC am CERN nachgewiesen werden [13]. Die Abbildung 2.2 zeigt eine Messung von ATLAS und CMS für den Kanal $H \rightarrow \gamma\gamma$. Am 8. Oktober 2013 wurden Peter W. Higgs und François Englert mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet [31].

Fermionmassen

Im vorausgehenden Abschnitt haben wir gesehen, wie der Higgsmechanismus den Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung ihre Masse verleiht. Die Fermionmassen werden durch den sogenannten Yukawaterm

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -Y_{ij}^D \bar{Q}_L^i \Phi D_R^j - Y_{ij}^U \bar{Q}_L^i \Phi^c U_R^j - Y_{ij}^E \bar{E}_L^i \Phi E_R^j + h.c., \quad (2.31)$$

erzeugt. Die Objekte Y_{ij}^X mit $X \in \{D, U, E\}$ sind komplexe 3×3 -Matrizen und werden Yukawamatrizen genannt. Außerdem gilt $\Phi^c = i\sigma_2 \Phi$. Der Yukawaterm enthält zunächst noch flavourändernde Massenterme. Diese sind nicht observabel. Aus diesem Grund diagonalisieren wir die Yukawamatrizen. Für den Leptonsektor können wir die Diagonalisierung sehr einfach durchführen. Die Behandlung des Quarkanteils ist etwas komplizierter. Im Weiteren gehen wir darauf ein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Matrix Y^U schon Diagonalform und reellwertige Einträge besitze. Dann können wir die Matrix Y^D mittels der Transformation $Y^D = V_L \text{diag}(Y^D) V_R^\dagger$ diagonalisieren und einen Basiswechsel durchführen,

$$D'_R = V_R^\dagger D_R, \quad D'_L = V_L^\dagger D_L. \quad (2.32)$$

Dies führt zu Massentermen der Form

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = \sum_q -m_q \bar{q}_L q_R + h.c., \quad (2.33)$$

wobei q hier für ein Quarkfeld einer spezifischen Quarksorte steht. Die Quarkmassen $m_q = v y_q$ sind proportional zum Vakuumerwartungswert des Higgsfelds, die Proportionalitätskonstante y_q heißt Yukawakopplung. Bedingt durch den Basiswechsel in Gleichung (2.32) tritt in den Wechselwirkungstermen, in denen ein W -Boson involviert ist, zusätzlich die Matrix V_L auf. Diese Matrix heißt CKM-Matrix [32] und wir schreiben $V_L \equiv V^{\text{CKM}}$. Weil die CKM-Matrix in dieser Arbeit von besonderer Bedeutung ist, werden wir uns in Kapitel 2.1.4 noch detaillierter damit beschäftigen.

Wenn wir die physikalischen Eichfelder in den Wechselwirkungsanteil einsetzen, erhalten wir

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = J_{\text{em}}^\mu A_\mu + J_{\text{NC}}^\mu Z_\mu + J_{\text{CC}}^\mu W_\mu^+ + J_{\text{CC}}^{\mu\dagger} W_\mu^-, \quad (2.34)$$

mit den Strömen

$$J_{\text{em}}^\mu = -e \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f, \quad (2.35)$$

$$J_{\text{NC}}^\mu = \frac{g_2}{2 \cos \theta_W} \sum_f \bar{\psi}_f (v_f \gamma^\mu - a_f \gamma^\mu \gamma_5) \psi_f, \quad (2.36)$$

$$J_{\text{CC}}^\mu = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\sum_i \bar{\nu}_l^i \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e^i + \sum_{i,j} \bar{U}^i \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} V_{ij}^{\text{CKM}} D^j \right), \quad (2.37)$$

und

$$v_f = I_3^f - 2Q_f \sin^2 \theta_W, \quad a_f = I_3^f, \quad (2.38)$$

wobei f das Fermionflavour angibt und i, j Familienindizes sind. In dem geladenen Strom J_{CC}^μ in Gleichung (2.37) taucht, wie bereits erwähnt, zusätzlich das Matrixelement V_{ij}^{CKM} auf. Der elektromagnetische Strom J_{em}^μ und der neutrale Strom J_{NC}^μ hingegen sind flavour-diagonal; sie sind invariant unter der Basistransformation aus Gleichung (2.32). Damit ist die elektroschwache Feldtheorie vollständig beschrieben. Bevor wir uns der Theorie der starken Wechselwirkung widmen, studieren wir im folgenden Kapitel die CKM-Matrix, wie schon oben angekündigt, im Detail.

2.1.4 CKM-Matrix

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass bei der Kopplung der W-Bosonen an die geladenen Ströme die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix V^{CKM} [32] ins Spiel kommt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die beiden Yukawa-Matrizen im Quarksektor des SM nicht kommutieren. Die CKM-Matrix ist eine komplexe, unitäre 3×3 -Matrix, die sich durch drei Euler-Winkel θ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) und eine komplexe Phase δ_{13} parametrisieren lässt. Diese Phase ist im SM die einzige Quelle von CP-Verletzung. Dabei versteht man unter CP-Verletzung die Verletzung der Symmetrie unter kombinierter Anwendung des Ladungskonjugations- (C) und des Paritätsoperators (P).³ Um die CKM-Matrix zu parametrisieren verwendet man recht häufig die Parametrisierung

³Der C-Operator ersetzt bei Anwendung auf einen Teilchenzustand dieses Teilchen durch sein Antiteilchen, der P-Operator invertiert alle räumlichen Komponenten. Eine weitere diskrete Symmetrie ist mit dem Zeitumkehroperator (T) verbunden, der die Zeitkomponente invertiert. Das CPT-Theorem [33] besagt, dass CPT in jeder lokal Lorentz-invarianten QFT erhalten ist.

nach Chau-Keung [34]. Mit $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ und $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ ergibt sich dann

$$V^{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Die Gleichung (2.40) bezeichnet man auch als PDG-Standard-Parametrisierung [22]. Aus Experimenten wissen wir, dass die Einträge der Matrix eine strenge Hierarchie aufweisen. Insbesondere impliziert diese Hierarchie, dass Flavourübergänge innerhalb einer Quarkfamilie wahrscheinlicher sind als Flavourübergänge, die zwei verschiedene Quarkfamilien involvieren. Man spricht in diesem Zusammenhang von CKM-begünstigten und CKM-unterdrückten Übergängen. Durch eine Entwicklung in dem kleinen Parameter $\lambda = |V_{us}| \approx 0,22$ mit

$$\lambda = s_{12}, \quad A\lambda^2 = s_{23}, \quad A\lambda^3(\varrho - i\eta) = s_{13}e^{-i\delta}, \quad (2.41)$$

die sogenannte Wolfenstein-Parametrisierung [35], wird diese Hierarchie evident. Dabei sind A, ϱ und η reelle Parameter der Ordnung eins. In dieser Parametrisierung ist die CKM-Mischungsmatrix gegeben durch

$$V^{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\varrho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \varrho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (2.42)$$

In dieser Arbeit benötigen wir die Wolfenstein-Parametrisierung sogar in höherer Ordnung [36]. Laut aktuellem Forschungsstand ist [37]

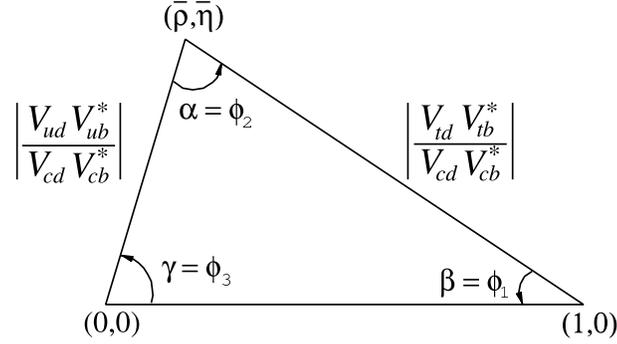


Abbildung 2.3: Darstellung des Unitaritätsdreiecks. Entnommen aus [37].

$$\begin{aligned}
|V^{\text{CKM}}| &= \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,97417 \pm 0,00021 & 0,2248 \pm 0,0006 & 0,00409 \pm 0,00039 \\ 0,220 \pm 0,005 & 0,995 \pm 0,016 & 0,0405 \pm 0,0015 \\ 0,0082 \pm 0,0006 & 0,0400 \pm 0,0027 & 1,009 \pm 0,031 \end{pmatrix}. \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Aus der Unitarität der Mischungsmatrix folgen u. a. die Bedingungen

$$\sum_{k=1,2,3} V_{ik} V_{kj}^* = \delta_{ij}. \quad (2.44)$$

Für $i = 1$ und $j = 3$ erhalten wir

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0. \quad (2.45)$$

Die Gleichung (2.45) ist besonders interessant, weil alle drei Terme von derselben Ordnung in dem Wolfenstein-Parameter λ sind. Sie lässt sich als ein Dreieck in der komplexen Ebene darstellen (siehe Abbildung 2.3). Die restlichen fünf Unitaritätsdreiecke sind nicht weiter von Interesse, weil diese quasi zu einer Linie entartet sind. Aus diesem Grund bezeichnet man das durch Gleichung (2.45) definierte Dreieck als *das* Unitaritätsdreieck. Die in Abbildung 2.3 verwendeten Parameter $\bar{\rho}$ und $\bar{\eta}$ sind gegeben durch

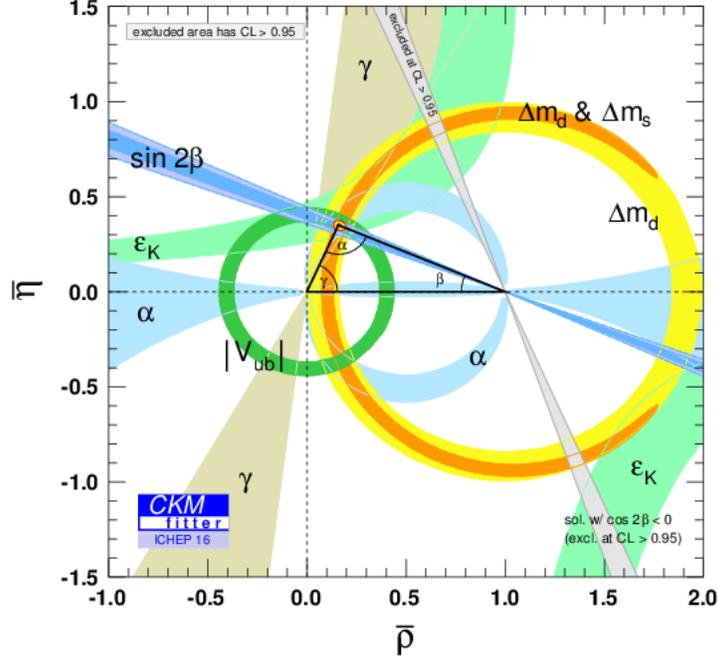


Abbildung 2.4: Fit des Unitaritätsdreiecks in der $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ -Ebene. Entnommen aus [38].

$b \rightarrow s$	$c \rightarrow u$
$\lambda_u = V_{us}^* V_{ub} \sim \lambda^4$	$\lambda_d = V_{cd}^* V_{ud} \sim \lambda$
$\lambda_t = V_{ts}^* V_{tb} \sim \lambda^2$	$\lambda_b = V_{cb}^* V_{ub} \sim \lambda^5$

Tabelle 2.3: Vergleich der CKM-Strukturen von $b \rightarrow s$ und $c \rightarrow u$ Übergängen.

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad \bar{\eta} = \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (2.46)$$

Die Messung der Winkel und Seitenlängen dieses Dreiecks bietet eine Möglichkeit die Unitarität der CKM-Matrix zu testen und nach Effekten neuer Physik (NP) zu suchen. Insbesondere ist die Fläche des Unitaritätsdreiecks ein Maß für die CP-Verletzung [39, 40]. In Abbildung 2.4 ist ein von der Gruppe CKMfitter durchgeführter Fit des Unitaritätsdreiecks in der $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ -Ebene gezeigt.

Abhängig davon, ob man $b \rightarrow s$ oder $c \rightarrow u$ Übergänge studiert, tauchen verschiedene Strukturen von CKM-Matrixelementen bei der Berechnung der Übergangsamplituden auf. In Tabelle 2.3 haben wir die entsprechenden CKM-Strukturen inklusive deren Potenz in dem Wolfenstein-Parameter λ aufgelistet. Schon an dieser Stelle können wir also darauf schließen, dass seltene B -Zerfälle ganz andere Eigenschaften besitzen als seltene D -Zerfälle.

2.1.5 Quantenchromodynamik

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die Eichtheorie der starken Wechselwirkung, die zugehörige Symmetriegruppe ist die $SU(3)_C$. Da Quarks drei verschiedene Farbfreiheitsgrade tragen können, führen wir Triplets der Form $q = (q_1, q_2, q_3)$ ein, die unter der fundamentalen Darstellung der Gruppe transformieren. Hier repräsentiert q ein Quarkfeld einer beliebigen Quarksorte. Die Gruppe $SU(3)_C$ besitzt acht Generatoren T_a , für die in der fundamentalen Darstellung

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2}, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (2.47)$$

gilt, wobei die Objekte λ_a die Gell-Mann Matrizen sind, welche der Kommutatorrelation

$$[\lambda^a, \lambda^b] = i f^{abc} \lambda^c, \quad (2.48)$$

genügen, die wiederum die Strukturkonstanten f_{abc} der Gruppe definiert. Die Lagrangendichte der QCD ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{Quark}} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{a=1..8} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \sum_q \bar{q}(i\not{D} - m_q)q, \end{aligned} \quad (2.49)$$

gegeben, mit dem Feldstärketensor

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (SU(3)_C) \quad (2.50)$$

wobei wir außerdem die starke Kopplungskonstante g_s eingeführt haben. Die kovariante Ableitung ist

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a. \quad (2.51)$$

Sie involviert die Eichfelder G_μ^a , welche mit dem Austauschteilchen der QCD, den sogenannten Gluonen, assoziiert sind. Auf den Eichfixierungsterm und den Geistfeldterm wollen wir hier nicht eingehen. Die QCD besitzt fundamentale Eigenschaften wie z. B. die sogenannte asymptotische Freiheit. Diese Eigenschaften werden wir in den Kapiteln 2.2.3 und 2.2.4 besprechen.

2.2 Von der Lagrangedichte zur Observablen

Im vorangegangenen Kapitel haben wir die Lagrangedichte des SM diskutiert. Doch um von der Lagrangedichte zu einer konkreten Vorhersage für eine Observable zu kommen, gilt es einen Weg zurückzulegen, welcher Gegenstand dieses Kapitels ist. Die theoretische Vorhersage von Observablen involviert Matrixelemente (Kapitel 2.2.1), welche wir mittels der Störungstheorie und Feynmandiagrammen (Kapitel 2.2.2) bis zu der angestrebten Präzision berechnen können. Die dabei potentiell auftretenden Divergenzen, können wir im Rahmen der Renormierung (Kapitel 2.2.3) behandeln. Zusätzliche Komplikationen ergeben sich bei der Analyse von hadronischen Prozessen, da die Störungstheorie hier nur teilweise anwendbar ist (Kapitel 2.2.4). Neben diesem diskutieren wir das wichtige Konzept der Quark-Hadron-Dualität. Mögliche Resonanzeffekte werden nicht durch die Störungstheorie beschrieben, und müssen modelliert werden (Kapitel 2.2.5).

2.2.1 Observablen und Matrixelemente

Die Aufgabe einer Theorie ist es Vorhersagen über Größen zu machen, die sich experimentell überprüfen lassen (Observablen). In der Elementarteilchenphysik spielen unter anderem zwei Größen eine wichtige Rolle: Der Wirkungsquerschnitt und die Zerfallsbreite (manchmal auch Zerfallsrate genannt).

Den Wirkungsquerschnitt kann man sich als „Stärke“ einer Teilchenreaktion in einem Kollisionsexperiment vorstellen. Es seien N die Anzahl der Streueignisse und X eine kinematische Variable, dann ist der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{dX}$ gegeben durch

$$\frac{dN}{dX} = \frac{d\sigma}{dX} L_{\text{int}}. \quad (2.52)$$

Hier ist L_{int} die integrierte Luminosität. Sie gibt an, wie viele Teilchenbegegnungen insgesamt pro Fläche stattfinden. Bei einem Speicherring z. B. ist sie durch die Anzahl der Teilchen in den kollidierenden Paketen sowie der Querschnittsfläche und Umlauf-

frequenz der Pakete bestimmt. Unter der Variablen X können wir uns zum Beispiel einen Impulsübertrag vorstellen. Mittels einer Integration über X ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} . Die theoretische Vorhersage für den differentiellen Wirkungsquerschnitt erhalten wir aus der Formel [20]

$$d\sigma = \underbrace{\frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|}}_{\text{Flussfaktor}} \underbrace{\left(\prod_{f=1}^N \frac{d^3 p_f}{2\pi^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A - \sum_{f=1}^N p_f \right)}_{\text{Phasenraumintegration}} \underbrace{|\mathcal{M}(p_A p_B \rightarrow \{p_f\})|^2}_{\text{Übergangsmatrixelement}}. \quad (2.53)$$

Hier sind $E_{A(B)}$ und $v_{A(B)}$ die Energien und Geschwindigkeiten der beiden einfallenden Teilchen A und B ; p_f und E_f geben die Impulse und Energien der N Teilchen im Endzustand an.

Die totale Zerfallsbreite Γ_{tot} ist über die Beziehung $\tau = \hbar/\Gamma_{\text{tot}}$ mit der Lebensdauer τ eines Teilchenzustandes verknüpft, wobei \hbar hier das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum bezeichnet. Für ein Teilchen mit der Masse M_A und dem Impuls p_A , welches in N Teilchen mit Impulsen p_f und Energien E_f zerfällt, ist die allgemeine Berechnungsformel für die differentielle Zerfallsbreite gegeben durch [20]

$$d\Gamma = \frac{1}{2M_A} \underbrace{\left(\prod_{f=1}^N \frac{d^3 p_f}{2\pi^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A - \sum_{f=1}^N p_f \right)}_{\text{Phasenraumintegration}} \underbrace{|\mathcal{M}(M_A \rightarrow \{p_f\})|^2}_{\text{Übergangsmatrixelement}}. \quad (2.54)$$

Die Gleichungen (2.53) und (2.54) beinhalten neben der sogenannten Phasenraumintegration (Kinematik) das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}(p_A p_B(M_A) \rightarrow \{p_f\})$. In diesem in die vollständige Information über die Dynamik des Zerfalls enthalten. Mittels der Relation

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N | i\hat{T} | \vec{p}_A \vec{p}_B(\vec{p}_A) \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(P - \sum_f p_f \right) \cdot i\mathcal{M}(p_A p_B(M_A) \rightarrow \{p_f\}), \quad (2.55)$$

$P = p_A + p_B, p_A$, ist das Matrixelement mit der \hat{T} -Matrix

$$\hat{T} = T \exp \left(i \int d^4 x \mathcal{L}_{WW}^{SM}(x) \right), \quad (2.56)$$

verbunden. Dabei bezeichnet T das zeitgeordnete Produkt und \mathcal{L}_{WW}^{SM} ist ein entspre-

chender Wechselwirkungsterm. Die \hat{T} -Matrix ist der nicht-triviale Anteil der unitären Streumatrix \hat{S} und es gilt $\hat{S} = \mathbb{1} + i\hat{T}$. Die Berechnung von Matrixelementen ist eine nicht-triviale Aufgabe. Im Weiteren folgen einige grundsätzliche Methoden und Konzepte, welche für diese Berechnung benötigt werden.

2.2.2 Störungstheorie und Feynmandiagramme

Matrixelemente lassen sich im Allgemeinen nicht exakt, sondern nur mithilfe eines Näherungsverfahrens berechnen. Im Folgenden verwenden wir die sogenannte Störungstheorie; die Gitter-QCD (LQCD) erwähnen wir als eine Alternative, gehen aber nicht näher darauf ein. Um das Matrixelement für einen gegebenen Prozess konkret zu berechnen, setzen wir in Gleichung (2.56) den entsprechenden Wechselwirkungsterm \mathcal{L}_{WW}^{SM} ein, und führen bis zu gegebener Ordnung eine Entwicklung in der Kopplungskonstanten durch [18]. Die in der Entwicklung auftretenden Terme können wir in Form von Diagrammen repräsentieren, welche Feynmandiagramme genannt werden [41]. Ein einfaches Feynmandiagramm zeigt Abbildung 2.11 (a). In einem solchen Feynmandiagramm gibt es im Wesentlichen drei verschiedene Bausteine: äußere Linien (repräsentieren physikalische Teilchen), innere Linien (repräsentieren sogenannte virtuelle „Teilchen“⁴) und Vertizes (repräsentieren Wechselwirkungspunkte). Jedem dieser Bausteine können wir einen mathematischen Ausdruck zuordnen. Die Feynmanregeln, welche sich aus der Lagrangedichte ableiten lassen, liefern eine Verbindung zwischen den Bausteinen im Diagramm und dem zugehörigen mathematischen Ausdruck. Eine Übersicht über die Feynmanregeln im SM kann man z. B. [20] entnehmen. Anstatt das Exponential in Gleichung (2.56) zu entwickeln können wir also, bis zu einer gegebenen Ordnung in der Kopplungskonstanten (repräsentiert durch die Anzahl der Vertizes im Feynmandiagramm), alle Feynmandiagramme, die zu dem betrachteten Prozess beitragen, aufschreiben, und diese mittels der Feynmanregeln in einen mathematischen Ausdruck übersetzen. Mit diesem Wissen könnten wir nun z. B. das Matrixelement für den Prozess $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ in führender Ordnung α_{em} berechnen. Für hadronische Prozesse oder in höherer Ordnung Störungstheorie ergeben sich jedoch zusätzliche Komplikationen, auf die wir in den folgenden Kapiteln weiter eingehen.

⁴Bei virtuellen „Teilchen“ handelt es sich nicht um physikalische Teilchen, sondern um Quantenfluktuationen. Im Gegensatz zu physikalischen Teilchen sind sie nicht auf die Massenschale limitiert.

2.2.3 Renormierung⁵ und asymptotische Freiheit

Bei der Berechnung von Matrixelementen treten in der nächstführenden Ordnung (bei FCNCs in der führenden Ordnung) der Kopplungskonstanten oftmals Schleifen in den Feynmandiagrammen auf (siehe z. B. Abbildung 2.11 (c)). Die Impulse in einer Schleife können dabei unendlich groß werden.⁶ Dies führt dazu, dass die entsprechenden Schleifenintegrale⁷ im Allgemeinen divergent sind. Da diese Divergenzen von Schleifenimpulsen $|\vec{k}| \rightarrow \infty$ herrühren, spricht man von Ultraviolett-Divergenzen. Um endliche Vorhersagen, die mit dem Experiment verglichen werden können, zu erhalten, führt man zwei Schritte durch. In einem ersten Schritt parametrisiert man die Divergenzen zunächst, indem man einen Regulator einführt. Dies nennt man *Regularisierung*. In einem zweiten Schritt absorbiert man diese Divergenzen durch eine Redefinition der Parameter der Theorie. Man spricht von *Renormierung*.

Um eine Quantenfeldtheorie zu regularisieren gibt es verschiedene Methoden. Die Idee bei der Cutoff-Regularisierung ist, die Integrale bei einem endlichen Impuls Λ (Cutoff) abzuschneiden. Bei der Pauli-Villars-Regularisierung zieht man von dem Integranden des divergenten Integrals, eine vom Parameter Λ abhängige Funktion ab, die das gleiche asymptotische Verhalten für $|\vec{k}| \rightarrow \infty$ aufweist. Dadurch wird das Konvergenzverhalten verbessert. Da die erste Methode keine relativistisch invarianten Ergebnisse liefert und die zweite Methode die Eichinvarianz nicht erhält, verwendet man in der Praxis die dimensionale Regularisierung [42, 43, 44, 45]. Diese erhält beide Symmetrien. Hier werden die vierdimensionalen Integrale auf eine D -dimensionale Raumzeit verallgemeinert,

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}, \quad (2.57)$$

wobei man außerdem eine Massenskala μ einführt, die dafür sorgt, dass die Ausdrücke in allen Dimensionen dieselbe Massendimension haben. Den Parameter D kann man danach von ganzzahligen zu reellen Werten analytisch fortsetzen. Typischerweise definiert man dann $D = 4 - \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$. Nach dieser Prozedur liefert das Schleifenintegral dann einen Ausdruck, der aus der Summe von einem Beitrag mit Polen in $1/\varepsilon$ und einem Beitrag der für $\varepsilon \rightarrow 0$ regulär ist, besteht. Den Ersteren eliminiert man hernach aus der Theorie durch eine Redefinition von physikalischen Parametern.

⁵Vgl. [20].

⁶Im Gegensatz dazu verhindert das zweite Kirchhoffsche Gesetz (Maschenregel) bei elektrischen Netzwerken, dass die Ströme innerhalb einer Masche unendlich groß werden können.

⁷Gemäß der Feynmanregeln müssen wir eine Schleife in eine Integration über alle möglichen Schleifenimpulse übersetzen.

Neben den Ultraviolett-Divergenzen können auch Infrarot-Divergenzen auftreten, welche von kleinen Schleifenimpulsen oder -winkeln herrühren. Hier erfolgt das Vorgehen analog und wir müssen lediglich $\varepsilon < 0$ wählen. Weiterhin verschwinden sogenannte skalenlose Integrale (d. h. Integrale, die keine intrinsische Massenskala besitzen) in dimensionaler Regularisierung.⁸

Um die Divergenzen aus den physikalischen Observablen zu entfernen geht man davon aus, dass die Objekte in der Lagrangedichte (Felder, Massen, Kopplungen) in der quantisierten Theorie (d. h. die Felder sind im Gegensatz zur klassischen Feldtheorie hier operatorwertig) keine physikalischen, sondern sogenannte nackte Größen sind. Diese sind mittels einer multiplikativen Verknüpfung mit den physikalischen Objekten verbunden,

$$q^{(0)} = Z_q^{1/2} q, \quad G_\mu^{a(0)} = Z_3^{1/2} G_\mu^a, \quad (2.58)$$

$$g_s^{(0)} = Z_{g_s} g_s \mu^\varepsilon, \quad m_q^{(0)} = Z_m m_q. \quad (2.59)$$

Dabei haben wir uns hier auf die Renormierung der Größen der QCD beschränkt. Der Index null an einer Größe zeigt an, dass es sich um eine nackte (unrenormierte) Größe handelt. Die Renormierungskonstanten Z_i lassen sich derart wählen, dass sie die Divergenzen absorbieren, wobei es möglich ist, beliebig viele endliche Terme zusätzlich in die Z_i zu absorbieren. Das führt zu dem Begriff des Renormierungsschemas. Zwei wichtige Vertreter sind das $\overline{\text{MS}}$ -Schema [46] und das $\overline{\text{MS}}$ -Schema [47]. Im $\overline{\text{MS}}$ -Schema werden lediglich die $1/\varepsilon$ -Pole in die Renormierungskoeffizienten gesteckt, in dem $\overline{\text{MS}}$ -Schema werden zusätzlich Terme mit $\ln 4\pi - \gamma_E$ ⁹ in diese absorbiert. Insgesamt liefert die Regularisierung in Kombination mit der Renormierung dann endliche Vorhersagen.

In Gleichung (2.57) haben wir die artifizielle Skala μ eingeführt. Physikalische Observablen müssen μ -unabhängig sein. Bedingt durch die Tatsache, dass wir theoretische Vorhersagen von Observablen nur bis zu einer endlichen Ordnung Störungstheorie machen können, wird eine Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ induziert. Diese μ -Abhängigkeit kann man dazu benutzen, die Größe der in der Störungsreihe vernachlässigten Terme abzuschätzen. Desweiteren bemerken wir, dass die Abhängigkeit der divergenten Diagramme von dem Parameter μ logarithmisch $\sim \log \frac{\mu^2}{p^2}$ ist, wobei p^2 ei-

⁸Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich die $1/\varepsilon$ -Pole der UV- und IR-Region bei skalenlosen Integralen gerade aufheben.

⁹Hier ist γ_E die Euler-Mascheroni-Konstante.

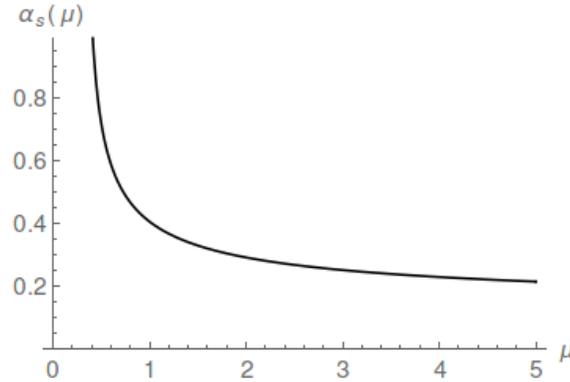


Abbildung 2.5: Starke Kopplungskonstante α_s in Abhängigkeit von der Skala μ in Dreischleifennäherung (siehe Gleichung (A.1) mit $\Lambda_{\text{QCD}} = 0,214 \text{ GeV}$). Für große Werte von μ ist α_s klein und eine perturbative Rechnung ist somit möglich. Die Quarks und Gluonen sind in diesem Fall asymptotisch frei. Für kleine Skalen wächst die Kopplung gegen alle Grenzen. Eine perturbative Behandlung ist nicht mehr möglich. Die Quarks und Gluonen hadronisieren in diesem Fall.

ne für den zugrundeliegenden Prozess charakteristische Massenskala ist. Je nach Wahl von μ können diese Logarithmen groß werden und die Konvergenz der Störungsreihe zerstören. In diesem Zusammenhang spricht man von „großen Logarithmen“. Um also eine hinreichend gute Konvergenz der Reihe zu gewährleisten, wählen wir $\mu^2 \sim \mathcal{O}(p^2)$. Daher betrachtet man μ als die charakteristische Skala des betrachteten Prozesses. Bei Problemen, die mehrere weit voneinander getrennte Skalen involvieren, spielt die Skala μ weiterhin die Rolle einer Faktorisierungsskala, welche eine Trennung von sogenannten kurz- und langreichweitigen Effekten herbeiführt. Dies führt uns zu dem Konzept einer effektiven Feldtheorie. In Kapitel 2.3 werden wir uns diesem Thema noch ausgiebig widmen.

Aus der Bedingung, dass die nackten Größen μ -unabhängig sein müssen, ergeben sich sogenannte Renormierungsgruppengleichungen (RGE). Die RGEs für die starke Kopplungskonstante und die Quarkmasse (inklusive Lösung bis zur hier benötigten Ordnung) sind in Anhang A.1 und A.2 angegeben. In Abbildung 2.5 ist die Dreischleifennäherung der starken Kopplungskonstanten in Abhängigkeit von der Skala μ dargestellt. Dabei ist $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 300 \text{ MeV}$ der charakteristische Parameter der QCD. Für $\mu \rightarrow \Lambda_{\text{QCD}}$ wächst α_s über alle Grenzen, in dem Fall $\mu \rightarrow \infty$ konvergiert α_s gegen null. Letzteres bezeichnet man als asymptotische Freiheit der QCD [48]. Diese fundamentale Eigenschaft der QCD wurde im 1973 von David Gross, Frank Wilczek und David Politzer entdeckt. Im Jahr 2004 wurden sie dafür mit dem Nobelpreis für Physik geehrt [49].



Abbildung 2.6: Eine Illustration zur Dualität. Abgebildet ist ein Teil von M. C. Eschers „Sky and Water“. Entnommen aus [51].

2.2.4 Hadronische Prozesse und Quark-Hadron-Dualität

Wir haben weiter oben diskutiert, wie wir mithilfe der Technik der Feynmandiagramme, Matrixelemente für einen gegebenen Prozess berechnen können. Jedoch ist dieses Bild noch nicht vollständig gezeichnet. Für hadronische Prozesse müssen wir dieser Diskussion noch etwas hinzufügen. Bei allen Zerfällen an denen die starke Wechselwirkung beteiligt ist, müssen nämlich zwei Effekte berücksichtigt werden. Erstens, die kurzreichweitigen Korrelationen, bei denen die Quarks und Gluonen asymptotisch frei sind. Hier ist α_s klein und eine perturbative Rechnung ist möglich. Zweitens, die Hadronisierungseffekte, welche von der Größenordnung der Skala Λ_{QCD} sind. Bei dieser Skala wächst die starke Kopplungskonstante α_s aber über alle Grenzen hinaus, und eine perturbative Rechnung ist nicht möglich (vgl. Abbildung 2.5). Was wir also benötigen, ist eine *Faktorisierung* der Matrixelemente in kurzreichweitige und langreichweitige Objekte, die wir dann separat voneinander behandeln können. Der effektive Feldtheorieansatz leistet unter anderem genau das zuletzt Gesagte. Damit werden wir uns in Kapitel 2.3 noch ausführlich beschäftigen.

Desweiteren spielt der Begriff der Quark-Hadron-Dualität (QHD) in QCD-Rechnungen eine wichtige Rolle. Unter Dualität versteht man im Allgemeinen zunächst etwas mit sich anscheinend widersprechenden Eigenschaften, welche aber vielmehr Manifestationen ein und desselben Phänomens von komplementären Winkeln aus gesehen sind [50]. In Abbildung 2.6 ist eine anschauliche Illustration für den Dualitätsbegriff zu finden. Abhängig davon, von welchem Blickwinkel man das Bild betrachtet, sieht man entweder Fische oder Vögel. Beide jedoch ergänzen sich und sind Teil desselben Bildes. Ebenso verhält es sich mit den Partonen und Hadronen in der Teilchenphysik. Die Freiheitsgrade in der QCD sind Quarks und Gluonen. Im Experiment hingegen werden niemals freie Quarks und Gluonen gemessen, sondern Hadronen. Dieses Phänomen nennt man

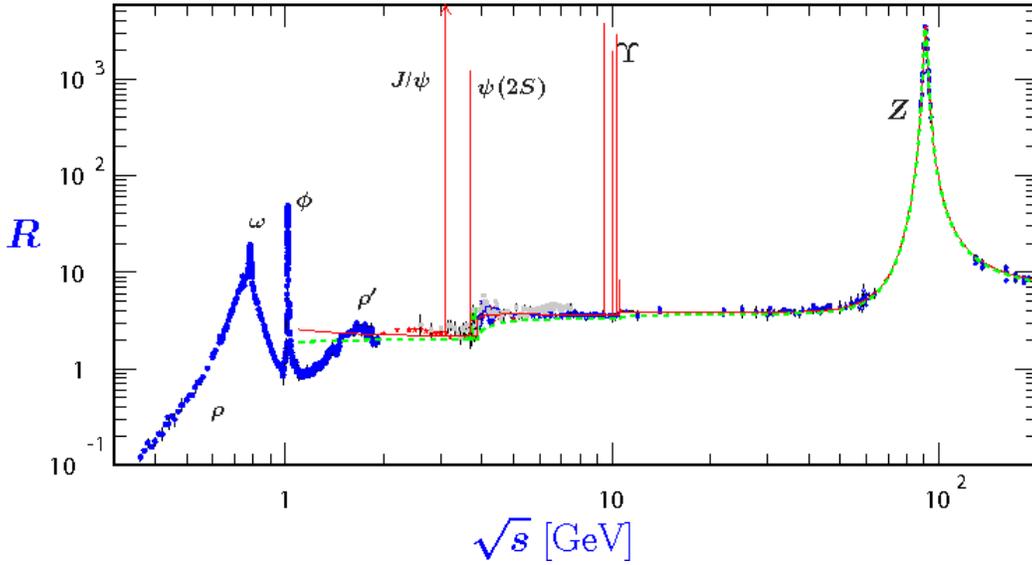


Abbildung 2.7: Darstellung des R-Ratio in Abhängigkeit der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} . Entnommen aus [37].

Quarkeinschluss („confinement“). Für unsere Rechnungen nehmen wir eine Dualität zwischen Quarks und Gluonen auf der einen Seite und Hadronen auf der anderen Seite an. Als Illustration werfen wir einen Blick auf das sogenannte R-Ratio. Es ist definiert durch

$$R(s) \equiv \frac{\sigma_{\text{tot}}^{(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}(s)}{\sigma^{(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}(s)}. \quad (2.60)$$

Die Quark-Hadron-Dualität erlaubt uns dann für $\sqrt{s} \rightarrow \infty$ folgende Näherung

$$\sigma_{\text{tot}}^{(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}(s) \simeq \sum_{q=u,d,s,\dots} \sigma^{(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}(s), \quad (2.61)$$

wobei die Summe über alle Quarkflavour mit $m_q \ll \sqrt{s}$ läuft. Die Gleichung (2.61) kann mittels einer Operatorproduktentwicklung (OPE) und des optischen Theorems auch formal hergeleitet werden [52].

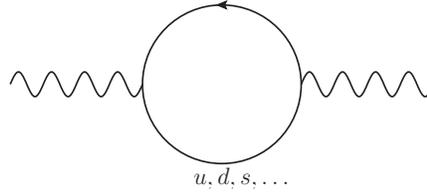


Abbildung 2.8: Diagrammatische Darstellung für die Erzeugung und Vernichtung eines Quark-Antiquark-Paares (in führender Ordnung). Die wellenförmigen Linien entsprechen einem virtuellen Photon.

2.2.5 Resonanzen und Dispersionsrelation¹⁰

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, wie wir das R-Ratio für $\sqrt{s} \rightarrow \infty$ perturbativ ermitteln können. Die Abbildung 2.7 zeigt, warum wir diese Bedingung fordern mussten. In dieser Abbildung ist das experimentelle Ergebnis für das R-Ratio dargestellt. Wir beobachten für $\sqrt{s} \sim 1$ GeV diverse Peaks. Bei diesen handelt es sich um Bindungszustände von Quarks, sogenannte Resonanzen. Die Resonanz ϕ z. B. entspricht einem Strange-Antistrange-Bindungszustand. Diese Zwischenzustände sind zwar instabil, besitzen aber messbare Quantenzahlen, weshalb man diese als Teilchen interpretiert. Resonanzen werden durch die perturbative Rechnung nicht reproduziert, vielmehr gilt, dass die Störungstheorie nahe der Resonanzen nicht gültig ist, da die Quarks hier nicht mehr asymptotisch frei sondern gebunden sind. Man spricht von Dualitätsverletzung. Wollen wir eine Vorhersage für eine Observable machen, müssen wir uns also auf den Bereich fernab der Resonanzen konzentrieren. Oftmals betrachtet man auch integrierte Größen. Unter dem Integral sollten sich die Oszillationen von Resonanzen in den experimentellen Resultaten dann weitgehend aufheben, was einen besseren Vergleich mit den perturbativ berechneten Ergebnissen ermöglicht. In manchen Fällen (wie in dieser Arbeit) jedoch, müssen wir die Resonanzen modellieren und in die theoretische Rechnung einbauen. Ausgangspunkt dazu ist eine sogenannte Dispersionsrelation, die ein Bindeglied zwischen perturbativen und hadronischen Größen darstellt. In dem Folgenden werden wir darauf eingehen.

Der Startpunkt unserer Betrachtung ist die 2-Punkt-Korrelationsfunktion

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j_\mu(x) j_\nu(0) \} | 0 \rangle = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q^2). \quad (2.62)$$

Hier sind q der Viererimpuls des virtuellen Photons und $j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ ein farbneutraler

¹⁰Die folgende Argumentation orientiert sich an [53].

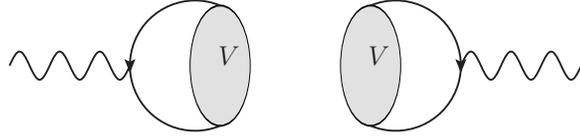


Abbildung 2.9: Diagrammatische Darstellung für die Produktion von intermediären Vektormesonen V (in führender Ordnung). Die wellenförmigen Linien entsprechen einem virtuellen Photon.

Quarkstrom mit den entsprechenden Flavour $\psi = u, d, s, \dots$. Die elektromagnetische Kopplungskonstante haben wir der Einfachheit halber weggelassen. Der Anfangs- und Endzustand entsprechen dem QCD-Vakuum. Gleichung (2.62) ist die Formalisierung der Amplitude einer Quark-Antiquark-Fluktuation, welche in Abbildung 2.8 für die führende Ordnung diagrammatisch dargestellt ist. Im folgenden studieren wir die invariante Amplitude $\Pi(q^2)$. Diese können wir als analytische Funktion in der komplexen Variablen q^2 auffassen. Nun können wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Für $Q^2 \equiv -q^2 \ll \Lambda_{\text{QCD}}^2$ (raumartig) handelt es sich bei der Korrelationsfunktion um ein rein kurzreichweitiges Objekt und die Quarks in dem Diagramm aus Abbildung 2.8 propagieren vornehmlich bei kurzen Abständen. Somit sind die Quark-Gluon-Wechselwirkungen wegen der asymptotischen Freiheit der QCD unterdrückt und wir können die Korrelationsfunktion perturbativ ausrechnen.
2. Für positive Werte von q^2 (zeitartig) wächst der durchschnittliche Abstand zwischen den Raumpunkten x und 0 . Die langreichweitigen Effekte werden relevant und die Quarks können zu intermediären Vektormesonen V hadronisieren. Dies ist in Abbildung 2.9 illustriert.

Eine elegante Methode diese beiden Phasenraumregionen miteinander in Beziehung zu setzen ist eine sogenannte Dispersionsrelation, welche wir im Folgenden herleiten.

Aus der Analytizität von $\Pi(q^2)$ und dem Cauchy-Theorem ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{\Pi(z)}{z - q^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} dz \frac{\Pi(z)}{z - q^2} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^R dz \frac{\Pi(z + i\varepsilon) - \Pi(z - i\varepsilon)}{z - q^2}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

wobei die gewählte Integrationskontur C in Abbildung 2.10 illustriert ist. Unter der Annahme, dass die Korrelationsfunktion für $|q|^2 \sim R \rightarrow \infty$ hinreichend schnell verschwindet und unter Verwendung des Spiegelungsprinzips von Schwartz ergibt sich die

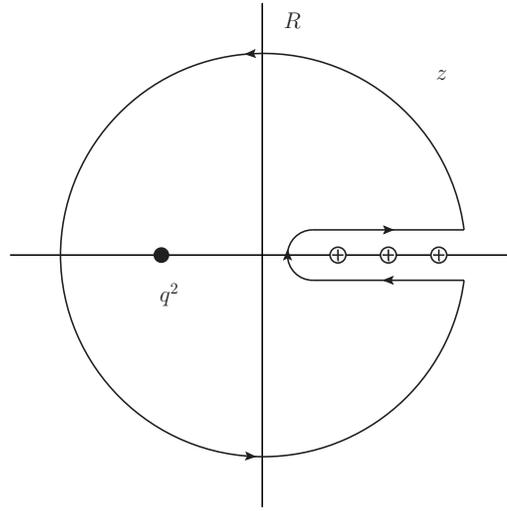


Abbildung 2.10: Darstellung der komplexen q^2 -Ebene und der gewählten Integrationskontur. Der schwarze Punkt zeigt den Referenzpunkt bei $q^2 < 0$ an. Die hadronischen Schwellenwerte werden durch Kreuze bei $q^2 > 0$ angedeutet.

Dispersionsrelation

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{t_{\min}}^{\infty} ds \frac{\text{Im } \Pi(s)}{s - q^2 - i\varepsilon}, \quad t_{\min} = \min\{m_{V,i}^2, s_0^h\}. \quad (2.64)$$

Hier ist $m_{V,i}$ die Masse einer Vektorresonanz und s_0^h die Schwelle für den niedrigsten Zustand des hadronischen Kontinuums. Für den konkreten Fall des OPE-Ergebnisses für $\Pi(q^2)$ wie definiert in Gleichung (2.62) ist das Integral in Gleichung (2.64) nicht konvergent. Dieses Problem kann durch sogenannte Subtraktionsterme umgangen werden. Um in unserem konkreten Fall die Konvergenz zu erzielen, subtrahieren wir von $\Pi(q^2)$ den Wert der Korrelationsfunktion an einem beliebigen Referenzpunkt $t_0 < 0$,

$$\bar{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{t_{\min}}^{\infty} ds \frac{q^2 - t_0}{s - t_0} \frac{\text{Im } \Pi(s)}{s - q^2 - i\varepsilon}. \quad (2.65)$$

Weil eine Subtraktion ausreicht, um das Integral konvergent zu machen, spricht man auch von einer einmal-subtrahierten Dispersionsrelation. Gleichung (2.65) ist nun die gewünschte Beziehung zwischen der raumartigen Region (linke Seite) und der zeitarartigen Region (rechte Seite). Durch Einfügung eines vollständigen Satzes von intermediären hadronischen Zuständen in Gleichung (2.62), können wir den Imaginärteil der

invarianten Amplitude durch hadronische Größen ausdrücken,

$$\frac{1}{\pi} \text{Im } \Pi(s) = \sum_i f_{V,i}^2 F_{\text{mod}}(s, m_{V,i}^2) + \rho^h(s) \theta(s - s_0^h). \quad (2.66)$$

Der erste Term in Gleichung (2.66) beschreibt einzelne Vektorresonanzen mit Masse $m_{V,i}$ und Zerfallskonstante $f_{V,i}$. Die Modellfunktion F_{mod} kann man im Fall einer scharfen Resonanz als eine Deltadistribution wählen, für den Fall einer endlichen Breite erfolgt die Modellierung häufig durch einen Breit-Wigner-Ansatz. Der zweite Term beinhaltet das Kontinuum, beschrieben durch die hadronische Spektralfunktion $\rho^h(s)$. Wichtig ist nun die Beobachtung, dass die Funktion $\text{Im } \Pi(s)$ unter Vernachlässigung von Korrekturen universell ist, d. h. sie hängt nicht von einem bestimmten Prozess ab. So kommt sie beispielsweise sowohl in dem Prozess $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ als auch in dem Zerfall $D \rightarrow \rho\ell^+\ell^-$ vor. Wir können also die in den Funktionen aus Gleichung (2.66) enthaltenen Parameter, durch einen Fit an das experimentelle Spektrum des R-Ratios bestimmen, und das Modell mit den so gewonnenen Parametern dazu benutzen, den Zerfall $D \rightarrow \rho\ell^+\ell^-$ zu analysieren. Die Tatsache, dass die hadronische Funktion für $q^2 \rightarrow -\infty$ mit dem perturbativen Ergebnis übereinstimmen muss, ergibt eine weitere Einschränkung für den Fit. Um von dem perturbativen zu dem hadronischen Bild zu wechseln, können wir dann die Ersetzung

$$\Pi(q^2) \rightarrow \Pi(t_0) \Big|_{\text{OPE}} + \frac{1}{\pi} \int_{t_{\text{min}}}^{\infty} ds \frac{q^2 - t_0}{s - t_0} \frac{\text{Im } \Pi(s)}{s - q^2 - i\varepsilon}, \quad (2.67)$$

durchführen. Der zusätzliche Term $\Pi(t_0)$ integriert die Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ in das hadronische Modell.

In diesem Kapitel haben wir uns auf die Funktion $\Pi(q^2)$ und damit auf die Quarkschleifentopologie beschränkt. Dieselbe Diskussion gilt ebenso für eine andere Topologie, in der eine analytische Funktion des Impulsübertrags auftaucht. Für zeitartige Virtualitäten kann diese Funktion durch eine analoge Modellfunktion ersetzt werden. In Anhang F präsentieren wir ein Resonanzmodell für den Zerfall $D \rightarrow \rho\ell^+\ell^-$. Zusätzlich zur Quarkschleifentopologie taucht hier noch die sogenannte Annihilationstopologie auf, welche wir in der zeitartigen Region entsprechend modifizieren.

2.3 Effektive Feldtheorie

Die Berechnung von Feynmandiagrammen kann abhängig von der Zahl der Schleifen und internen Linien beliebig kompliziert werden. Daher ist es wünschenswert diese

Komplexität zu reduzieren. Die Beschreibung eines Prozesses mittels einer effektiven Feldtheorie (EFT) leistet genau das zuletzt Gesagte. Außerdem führt eine solche Beschreibung zu einer Faktorisierung von kurzreichweitigen und langreichweitigen Effekten, was, wie weiter oben schon angedeutet, für die Analyse hadronischer Prozesse wichtig ist. Im folgenden Kapitel beginnen wir damit den Begriff der EFT näher zu beleuchten, das darauf folgende Kapitel geht auf die Konstruktion einer EFT ein. Gegenstand des Kapitels 2.3.3 ist die Fermitheorie, eine spezielle EFT, welche für diese Arbeit von besonderer Relevanz ist. Zuletzt beschäftigen wir uns in Kapitel 2.3.4 noch mit der Renormierungsgruppengleichung der Wilsonkoeffizienten.

2.3.1 Was sind effektive Theorien?

Bei der Beschreibung eines physikalischen Prozesses vereinfacht sich die Rechnung beträchtlich, und wird häufig auch erst möglich, wenn wir uns ausschließlich auf diejenigen Freiheitsgrade beschränken, welche für die betrachtete Skala relevant sind. Eine Theorie welche nur diejenigen Freiheitsgrade enthält, welche für die betrachtete Skala relevant sind, nennt man eine effektive Theorie. Immer dann wenn eine Theorie weit voneinander getrennte Skalen aufweist, ist es sinnvoll eine effektive Theorie zu verwenden. Betrachtet man den physikalischen Prozess bei der kleinen Skala, so entkoppeln die schweren Freiheitsgrade, welche durch die große Skala gegeben sind. Dabei verstehen wir unter Entkopplung, dass die Effekte der schweren Freiheitsgrade als inverse Potenzen der großen Skala unterdrückt sind [18]. Für Feltheorien haben Applequist und Carazzone [54] den Beweis erbracht, dass eine solche Entkopplung mit sehr wenigen Ausnahmen möglich ist.

Zur Illustration betrachten wir eine Billardkugel mit der Masse m und der Geschwindigkeit $v \ll c$, wobei c hier die Lichtgeschwindigkeit ist. Wollen wir nun die kinetische Energie der Kugel berechnen, verwenden wir dazu die Formel der klassischen Mechanik, $E_{\text{kin}} = 1/2mv^2$. Relativistische Effekte sind bei der kleinen Skala $v \ll c$ nämlich nicht relevant (sie sind mit $\mathcal{O}(v^4/c^2)$ unterdrückt), sodass wir diese nicht in unserer Rechnung berücksichtigen müssen. Für $v \ll c$ ist die klassische Mechanik also die effektive Theorie der speziellen Relativitätstheorie. Ganz analog dazu können wir die mikroskopischen Effekte der Quantenmechanik bei der makroskopischen Skala der Billardkugel vernachlässigen, da diese $\mathcal{O}(\hbar)$ sind. Im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ ist die klassische Mechanik also die effektive Theorie der Quantenmechanik.

2.3.2 Konstruktion einer effektiven Feldtheorie

Um die Konstruktion der Lagrangedichte \mathcal{L}_{eff} einer *effektiven Feldtheorie* nachzuvollziehen, betrachten wir ein Beispiel [55]. Gegeben sei eine *volle Theorie* mit einem Skalarfeld ϕ und ein Prozess, der bei einer Energieskala E stattfindet. Außerdem gelte $E \ll E_0$, wobei E_0 eine andere charakteristische Energieskala sei. Im einfachsten Fall kann man nun im Pfadintegralformalismus von einem erzeugenden Funktional der Gestalt

$$Z[J] = \int D\phi_H D\phi_L \exp \left(iS[\phi_L, \phi_H] + i \int d^4x J(x) \phi_L(x) \right), \quad (2.68)$$

ausgehen. Dabei wurde das Feld $\phi = \phi_L + \phi_H$ durch einen Abschneideparameter $\Lambda \lesssim E_0$ in einen niederfrequenten ($\omega < \Lambda$) Anteil ϕ_L und einen hochfrequenten ($\omega > \Lambda$) Anteil ϕ_H zerlegt wurde. Führt man die Integration über ϕ_H aus ergibt sich

$$Z[J] = \int D\phi_L \exp \left(iS_{\Lambda}^{\text{eff}}[\phi_L] + i \int d^4x J(x) \phi_L(x) \right), \quad (2.69)$$

mit

$$\exp(iS_{\Lambda}^{\text{eff}}[\phi_L]) = \int D\phi_H \exp(iS[\phi_H, \phi_L]). \quad (2.70)$$

In der so gewonnenen effektiven Wirkung S_{Λ}^{eff} taucht das Feld ϕ_H nun nicht mehr auf, es wurde „ausintegriert“. In einem letzten Schritt entwickelt man die effektive Lagrangedichte in eine Taylorreihe in $1/\Lambda$

$$S_{\Lambda}^{\text{eff}}[\phi_L] = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \int d^4x \sum_i C_i(\Lambda) \mathcal{O}_i[\phi_L]. \quad (2.71)$$

Dies ist ein Beispiel für eine OPE. Dadurch erhält man eine unendliche Reihe von allen denjenigen lokalen Operatoren \mathcal{O}_i , die durch die Symmetrien der zugrundeliegenden Theorie erlaubt sind (Lorentzsymmetrie, Eichsymmetrie, Paritätssymmetrie, Flavoursymmetrie, Quantenzahlen etc.). Die Koeffizienten C_i heißen Wilsonkoeffizienten und spielen die Rolle einer effektiven Kopplung. Damit haben wir die angestrebte Faktorisierung erreicht. Die Effekte kurzer Abstände wurden in die Koeffizienten absorbiert, die Operatoren hängen nur von den Feldern ϕ_L ab und beschreiben die Effekte großer Abstände. Der Cutoff Λ spielt die Rolle einer Faktorisierungsskala. Eine illustrative Analogie zu Gleichung (2.71) ist die Multipolentwicklung der klassischen Elektrodyna-

mik. Sei R_0 die Ausdehnung einer Ladungsverteilung. Dann kann man das Potential Φ für $r \gg R_0$ in R_0/r entwickeln gemäß

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \quad (2.72)$$

Hier übernehmen die Momente $q, \vec{p}, Q_{ij}, \dots$ die Rolle der Wilsonkoeffizienten und die Terme mit r die Rolle der Operatoren.

In der theoretischen Elementarteilchenphysik gibt es je nach Fragestellung verschiedene effektive Theorien. Die *Fermitheorie* beschreibt schwache Zerfälle. Bei dem Übergang von der vollen zur effektiven Theorie wird das W -Boson ausintegriert. Dieser Theorie ist das Kapitel 2.3.3 gewidmet.

Die *Heavy-Quark-Effective-Theory* (HQET) [56] dient der Beschreibung von Hadronen mit schweren Quarks ($Q = b, c$).¹¹ So wirkt im Grenzfall $m_Q \rightarrow \infty$ das schwere Quark innerhalb eines Mesons als eine statische Quelle von Gluonen. Zwischen dem schweren Quark und den leichten Freiheitsgraden (leichte Quarks und Gluonen) werden nur Gluonen mit Energien $\sim \Lambda_{\text{QCD}}$ ausgetauscht. Somit können diese weichen Gluonen weder das Flavour noch den Spin des schweren Quarks auflösen. Dies führt zu der Heavy-Quark-Flavour-Symmetrie und der Heavy-Spin-Symmetrie. Das Wasserstoffatom ist eine Analogie dazu. Hier können die zwischen Proton und Elektron ausgetauschten Photonen im Limes einer unendlichen Protonmasse weder einen Wasserstoffkern von einem Deuteron unterscheiden noch sind sie sensitiv auf den Kernspin (Hyperfineinstruktur).

Die *Chirale Störungstheorie* (ChPT) [57] beschreibt die Dynamik von Mesonen und Baryonen bei niedrigen Energien $E \lesssim 1\text{GeV}$, d. h. es sind nicht länger Quarks und Gluonen die Freiheitsgrade, sondern Hadronen, insbesondere Pionen.

Die *Soft-Collinear-Effective-Theory* (SCET) [58] wird z. B. verwendet um die Faktorisierung von hochenergetischen Teilchenjets zu beschreiben.

2.3.3 Fermitheorie

Schwache Zerfälle von schweren Hadronen weisen zwei Skalen auf: Die Masse des W -Bosons $M_W \approx 80,4\text{GeV}$ [59], das den schwachen Zerfall vermittelt, und den Impulsübertrag $\sqrt{q^2} \sim \mathcal{O}(m_Q)$, wobei m_Q , $Q = b, c$ die Masse des schweren Quarks in dem Hadron ist. Es ist $q^2 \ll M_W^2$. Betrachtet man den Zerfall bei der kleinen Skala, so

¹¹Das Top-Quark hadronisiert nicht und ist daher nicht Gegenstand dieser Theorie.

bietet es sich also an, eine effektive Theorie zu konstruieren, in der das W -Boson nicht mehr als Freiheitsgrad vorkommt.¹² Physikalisch bedeutet das, dass das schwere Quark bei einer Auflösung von $\mathcal{O}(m_Q^{-1})$ nichts von der Propagation des W -Bosons, welche ein Effekt kurzer Abstände $\mathcal{O}(M_W^{-1})$ ist, sieht. Die Wechselwirkung schrumpft auf einen Punkt zusammen. Für die Konstruktion der EFT könnte man analog zu Kapitel 2.3.1 das entsprechende erzeugende Funktional betrachten. Das Pfadintegral hätte dann eine Gaußform bezüglich des Feldes des W -Bosons. Somit könnte das W -Boson explizit „ausintegriert“ werden [60] und man erhielte ein \mathcal{L}_{eff} ähnlich zu Gleichung (2.71). Für präzise Rechnungen jedoch ist es nötig die Effekte der QCD zu implementieren. Da die Skala m_Q immer noch einen perturbativen Charakter hat, kann man diese Effekte als Quantenkorrekturen behandeln. Berücksichtigt man die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks, ist das Pfadintegral komplizierter, insbesondere ist es kein Gaußintegral mehr. Um die effektive Lagrangedichte zu konstruieren, benutzen wir deshalb die folgende Methode:

1. Wir schreiben

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_i \lambda_{\text{CKM}} C_i(\mu) \mathcal{O}_i, \quad (2.73)$$

mit noch unbestimmten, dimensionslosen Wilsonkoeffizienten $C_i(\mu)$, die von der Renormierungsskala μ abhängen. λ_{CKM} ist eine CKM-Struktur, die auch aus einem Produkt von CKM-Matrixelementen bestehen kann.

2. Wir schreiben alle möglichen eichinvarianten Operatoren \mathcal{O}_i der Massendimension sechs hin, welche Lorentzskalare sowie Farbsingulets sind und berücksichtigen, dass die starke Wechselwirkung die Parität und Chiralität erhält. Operatoren höherer Massendimension sind mit inversen Potenzen von M_W unterdrückt.
3. Die Wilsonkoeffizienten ergeben sich durch ein „Matching“ (Koeffizientenvergleich) der Amplituden (des betrachteten Prozesses) der vollen Theorie und der effektiven Theorie an der Skala $\mu = M_W$.

In dieser Arbeit nehmen die $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Übergänge einen großen Raum ein (Kapitel 3 und 4). Daher wenden wir die oben beschriebene Methode im Folgenden auf solche Übergänge an. Zwar beschäftigen wir uns auch mit $b \rightarrow s \ell^+ \ell^-$ Prozessen (Kapitel 5), jedoch erfolgt deren Behandlung weitestgehend analog dazu. Für $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Übergänge

¹²Das Top-Quark, das Z -Boson und das Higgsboson sind ebenfalls nicht mehr in dieser Theorie vorhanden.

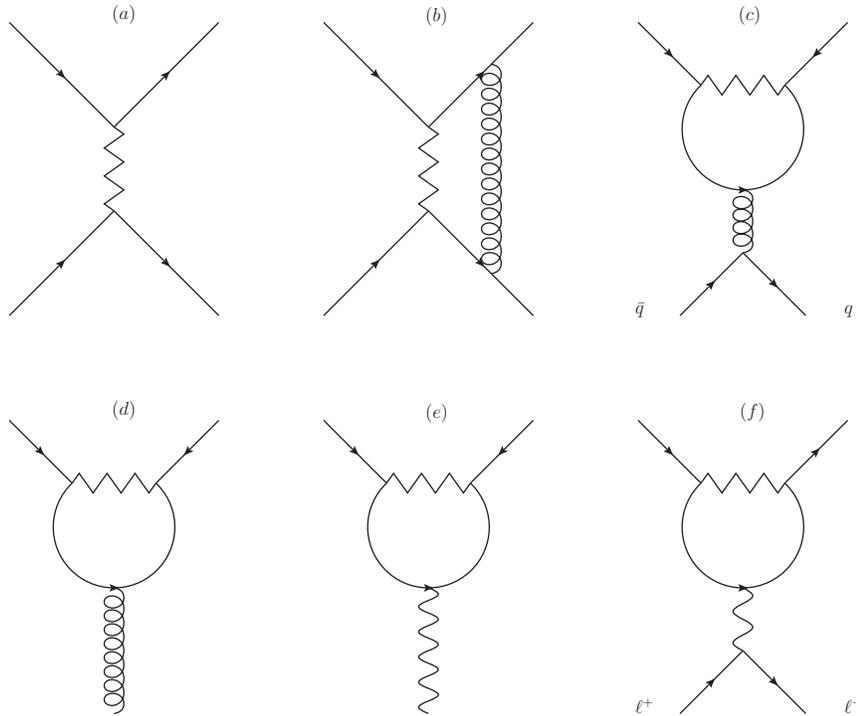


Abbildung 2.11: Diagramme in der vollen Theorie. Die Strom-Strom-Operatoren rühren aus den Diagrammen (a) und (b) her. Das Diagramm (c) ist die Quelle der QCD-Pinguinoperatoren. Der chromomagnetische und der elektromagnetische Pinguinoperator entstehen aus den Diagrammen (d) bzw. (e), die semileptonischen Operatoren stammen aus Diagramm (f).

hat die effektive Hamiltondichte ¹³ die folgende Gestalt

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=d,s,b} V_{cq}^* V_{uq} [C_1(\mu) \mathcal{O}_1^q + C_2(\mu) \mathcal{O}_2^q + \sum_{i=3}^{10} C_i(\mu) \mathcal{O}_i]. \quad (2.74)$$

In der Literatur sind verschiedene Operatorbasen zu finden [61, 62]. Da die in der BBL-Basis [61] vorkommende Matrix γ_5 in dimensionaler Regularisierung Probleme bereitet [63, 64], verwenden wir in dieser Arbeit die CMM-Basis [62], da sich in dieser Basis einfacher konsistente Rechnungen durchführen lassen.

¹³Im folgenden verwenden wir die Hamiltondichte anstelle der Lagrangedichte.

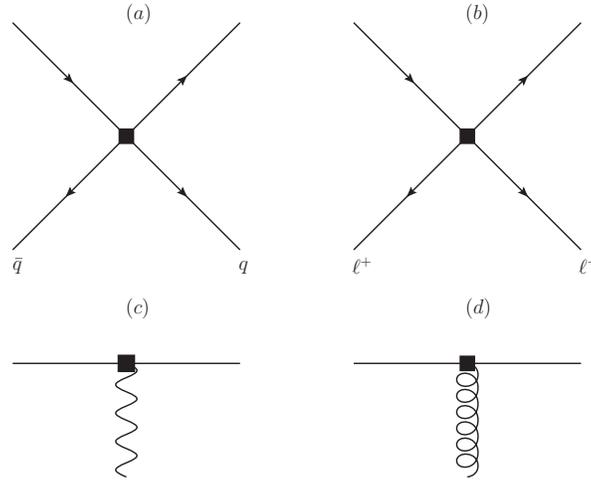


Abbildung 2.12: Diagramme in der effektiven Theorie. In der EFT schrumpft die Wechselwirkung mit dem W-Boson auf einen Punkt zusammen, was zu effektiven Vertizes führt. Die Diagramme (a) und (b) zeigen die effektiven Vertizes für die Operatoren \mathcal{O}_{1-6} und $\mathcal{O}_{9,10}$. Für die Operatoren $\mathcal{O}_{7,8}$ sind die effektiven Vertizes durch die Diagramme (c) und (d) dargestellt. Ein schwarzes Viereck markiert die Einsetzung eines entsprechenden effektiven Operators.

Die Strom-Strom-Operatoren sind gegeben durch

$$\mathcal{O}_1^q = (\bar{u}_L \gamma_\mu T^a q_L)(\bar{q}_L \gamma^\mu T^a c_L), \quad \mathcal{O}_2^q = (\bar{u}_L \gamma_\mu q_L)(\bar{q}_L \gamma^\mu c_L), \quad (2.75)$$

wobei $q = d, s, b$. Die Matrizen T^a sind die Generatoren der SU(3) und der Index L zeigt an, dass es sich um linkshändige Felder handelt.

Die starken Pinguinoperatoren sind

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_3 &= (\bar{u}_L \gamma_\mu c_L) \sum_{q=u,d,s,c} (\bar{q} \gamma^\mu q), & \mathcal{O}_5 &= (\bar{u}_L \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho c_L) \sum_{q=u,d,s,c} (\bar{q} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho q), \\ \mathcal{O}_4 &= (\bar{u}_L \gamma_\mu T^a c_L) \sum_{q=u,d,s,c} (\bar{q} \gamma^\mu T^a q), & \mathcal{O}_6 &= (\bar{u}_L \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho T^a c_L) \sum_{q=u,d,s,c} (\bar{q} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho T^a q). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Die elektro- und chromomagnetischen Pinguinoperatoren sind gegeben durch

$$\mathcal{O}_7 = -\frac{g_{em} m_c}{16\pi^2} (\bar{u}_L \sigma^{\mu\nu} c_R) F_{\mu\nu}, \quad \mathcal{O}_8 = -\frac{g_s m_c}{16\pi^2} (\bar{u}_L \sigma^{\mu\nu} T^a c_R) G_{\mu\nu}^a, \quad (2.77)$$

und, schließlich, werden die semileptonischen Operatoren folgendermaßen gewählt

$$\mathcal{O}_9 = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} (\bar{u}_L \gamma_\mu c_L) (\bar{\ell} \gamma^\mu \ell), \quad \mathcal{O}_{10} = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} (\bar{u}_L \gamma_\mu c_L) (\bar{\ell} \gamma^\mu \gamma_5 \ell). \quad (2.78)$$

Die Vorzeichenkonvention für $\mathcal{O}_{7,8}$ entspricht $+ig_s T^a$, $+ig_{em} e_f$ für den gewöhnlichen Quark-Eichboson-Vertex ($e_f = -1$ für geladene Leptonfelder). Die Operatoren \mathcal{O}_{7-10} werden manchmal auch mit einem zusätzlichen Vorfaktor $1/\alpha_s$ definiert. Den Operatoren entsprechen effektive Vertizes. Durch einen Vergleich von den Abbildungen 2.11 und 2.12 (inklusive Beschriftungen) kann man nachvollziehen, mit welchem Diagramm in der vollen Theorie der jeweilige Operator verbunden ist.

Bezogen auf das SM ist die obige Basis vollständig, da sie bis Massendimension sechs einschließlich alle möglichen Diracstrukturen umfasst, die bei $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Zerfällen auftauchen können. Um Effekten jenseits des SM Rechnung zu tragen, könnte man die Basis erweitern und z. B. Operatoren hinzufügen, die rechtshändige Ströme enthalten. In [A1] z. B. wurde eine solche Analyse für den Übergang $b \rightarrow u \ell \bar{\nu}_\ell$ durchgeführt, um zu untersuchen, ob die dort hinzugefügten rechtshändigen Ströme die Abweichung zwischen den Werten für das CKM-Matrixelement $|V_{ub}|$, die man aus exklusiven und inklusiven Zerfällen bestimmen kann, erklären können. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns ausschließlich mit dem SM.

Die Wilsonkoeffizienten können wir, wie oben gesagt, durch ein Matching an der Skala M_W bestimmen,

$$\mathcal{A}_{\text{voll}} \stackrel{!}{=} \langle u \ell^+ \ell^- | \mathcal{H}_{\text{eff}} | c \rangle \Big|_{\mu=M_W}, \quad (2.79)$$

wobei sich $\mathcal{A}_{\text{voll}}$ aus den Diagrammen in Abbildung 2.11 zusammensetzt. Da die Wilsonkoeffizienten kurzreichweitige Objekte sind, hängen diese nicht von den Quarkzuständen ab. Für die Quarkmassen m_q gilt nämlich $m_q \ll M_W$, weshalb diese als langreichweitige Effekte betrachtet werden. Aus diesem Grund können wir die Matchingrechnung mit asymptotisch freien Quarkzuständen durchführen.

2.3.4 Renormierungsgruppengleichung für die Wilsonkoeffizienten

In Kapitel 2.3.3 wurde erklärt, dass man die Wilsonkoeffizienten durch eine Matchingrechnung an der Skala $\mu = M_W$ berechnen kann. Für spezifische Berechnungen benötigt man aber den Wert der Wilsonkoeffizienten an der Skala des betrachteten Prozes-

ses, m_Q . Die in Kapitel 2.3.3 durchgeführte OPE führte zu einer Faktorisierung von kurzreichweitigen (Wilsonkoeffizienten) und langreichweitigen (Operatormatrixelemente) Beiträgen. Schematisch hat das die folgende Struktur

$$(1 + \alpha_s G \ln \frac{M_W^2}{-p_i^2}) = (1 + \alpha_s G \ln \frac{M_W^2}{\mu^2}) \cdot (1 + \alpha_s G \ln \frac{\mu^2}{-p_i^2}), \quad (2.80)$$

also Amplitude = Wilsonkoeffizient \times Matrixelement, wobei p_i die äußeren Impulse bezeichnet. Für $\mu \sim m_Q$ ist die starke Kopplungskonstante zwar noch klein, jedoch ersieht man aus Gleichung (2.80), dass die Kombination $\alpha_s \ln(M_W^2/\mu^2)$ nicht mehr als Entwicklungsparameter verwendet werden kann. Man spricht von großen Logarithmen. Um dieses Problem zu lösen gehen wir wie folgt vor. Aus der Bedingung, dass die physikalischen Observablen nicht von der Renormierungsskala abhängen dürfen,

$$\frac{d}{d \ln \mu} \langle \mathcal{H}_{\text{eff}} \rangle = 0, \quad (2.81)$$

lässt sich die Renormierungsgruppengleichung [60]

$$\frac{dC_i(\mu)}{d \ln \mu} = \gamma_{ji}(\mu) C_j(\mu), \quad (2.82)$$

mit der anomalen Dimensionsmatrix γ , herleiten. Diese beschreibt in einer gegebenen Ordnung in α_s die Mischung eines Operators. Die Einträge der anomalen Dimensionsmatrix kann man aus den Koeffizienten Z_{ij} der Operatorrenormierung

$$\mathcal{O}_i^{(0)} = Z_{ij} \mathcal{O}_j, \quad (2.83)$$

berechnen, wobei $\mathcal{O}_i^{(0)}$ einen unrenormierten Operator bezeichnet. Diese Operatorrenormierung ist zusätzlich zu der in Kapitel 2.2.3 Prozedur nötig, um die Ergebnisse in der EFT endlich zu machen. Durch das Lösen von Gleichung (2.82) werden in der n -ten Ordnung Störungstheorie automatisch alle Terme der Form

$$\alpha_s(M_W)^m \left(\alpha_s(M_W) \ln \frac{M_W^2}{\mu^2} \right)^k, \quad 0 \leq m \leq n, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.84)$$

aufsummiert. In dieser Arbeit gilt die folgende Nomenklatur. Den führenden Term $m = 0, k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir als führende logarithmische Ordnung (LL), den Term der LL inklusive dem Beitrag $m = 1, k \in \mathbb{N}_0$ als nächstführende logarithmische Ordnung (NLL), und den Term der LL+NLL inklusive dem Beitrag $m = 2, k \in \mathbb{N}_0$ als nächst-

nächstführende logarithmische Ordnung (NNLL). Die Lösung der RGE für $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten in nächstführender logarithmischer Ordnung ist in Anhang A.3 angegeben.

2.4 Hadronische Matrixelemente

Bei der Berechnung von Observablen von Teilchenzerfällen mittels eines EFT-Ansatzes, tauchen neben den Wilsonkoeffizienten hadronische Matrixelemente der Form $\langle f | \mathcal{O}_i | i \rangle$ auf. Hadronische Matrixelemente werden durch nichtperturbative Objekte wie Formfaktoren (Kapitel 2.4.1) parametrisiert. Für bestimmte kinematische Situationen lassen sich hadronische Matrixelemente weiter faktorisieren (Kapitel 2.4.3). Dabei tauchen Lichtkegelverteilungsamplituden (Kapitel 2.4.2) auf.

2.4.1 Formfaktoren

Hadronische Matrixelemente $\langle f | \mathcal{O}_i | i \rangle$ werden unter anderem durch Formfaktoren parametrisiert. Als Beispiel betrachten wir das $B \rightarrow \pi$ Übergangsmatrixelement eines Vektorstroms [66]

$$\langle \pi(p') | \bar{u} \gamma^\mu b | B(p) \rangle = f_+(q^2) \left[p^\mu + p'^\mu - \frac{M_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q^\mu \right] + f_0(q^2) \frac{M_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q^\mu, \quad (2.85)$$

wobei M_B die Masse des B -Mesons, m_π die Pionmasse und $q = p - p'$ ist. Die Funktionen $f_+(q^2)$ und $f_0(q^2)$ sind dann gerade die Vektorformfaktoren.

Formfaktoren sind nichtperturbative Größen und müssen daher mittels nichtperturbativer Methoden wie z. B. Gitter-QCD (LQCD) [67] und Lichtkegelsummenregeln (LCSR) [53] berechnet werden. Beide Methoden liefern komplementäre Informationen. Die LQCD ist am besten bei großem Impulsübertrag (zwischen dem Meson im Anfangs- und Endzustand) $q^2 = \mathcal{O}(m_Q^2)$ anwendbar. Die Methode der LCSR hingegen funktioniert am besten für kleine Werte von $q^2 \ll m_Q^2$ [53]. Entsprechend der Größe der Energie des Hadrons im Endzustand (im Ruhesystem des schweren Mesons), in unserem Beispiel $E_\pi = (M_B^2 + m_\pi^2 - q^2)/2M_B$, spricht man von der Region eines kleinen (entspricht $q^2 = \mathcal{O}(m_b^2)$) und großen (entspricht $q^2 \ll m_b^2$) hadronischen Rückstoßes.

Um Vorhersagen im Rahmen des Standardmodells zu machen, die mit dem Experiment verglichen werden können, benötigen wir konkrete Funktionen für die Formfaktoren.

In dieser Arbeit verwenden wir die folgende Parametrisierung [68]

$$F(q^2) = \frac{F(0)}{1 - q^2/M_{R(J^P)}^2} \left\{ 1 + b_1 \left[z(q^2) - z(0) + \frac{1}{2} z(q^2)^2 - z(0)^2 \right] \right\}, \quad (2.86)$$

mit

$$z(q^2) = \frac{\sqrt{t_+ - q^2} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - q^2} + \sqrt{t_+ - t_0}}, \quad (2.87)$$

$$t_{\pm} = (M_B \pm M_V)^2, \quad (2.88)$$

$$t_0 = t_+ - \sqrt{t_+ - t_-} \sqrt{t_+}. \quad (2.89)$$

Durch den Faktor $(1 - q^2/M_{R(J^P)}^2)^{-1}$ werden die tiefliegenden Resonanzen mit der Masse M_R und den Quantenzahlen J^P berücksichtigt, welche Polen entsprechen. Die Variable $z(q^2)$ ist wegen $|z(q^2)| \ll 1$ für $q^2 \leq t_-$ ein sehr guter Entwicklungsparameter [18]. In der Region der Paarproduktion $q^2 \geq t_+$ genügt sie der Gleichung $|z(q^2)| = 1$. Den freien Parameter t_0 wählen wir derart, dass der maximale Wert von $|z(q^2)|$ in der physikalischen Region des Formfaktors minimiert wird. Der optimale Wert ist in Gleichung (2.89) gegeben. Mit dem so gewählten t_0 können wir die Entwicklung in der Variablen z schon nach dem zweiten Term abbrechen und die Formfaktordatenpunkte werden gut durch Gleichung (2.86) beschrieben.

In [66] sind die Parametrisierungen der Matrixelemente von den Übergängen $B \rightarrow P$ und $B \rightarrow V$ angegeben. P bezeichnet hier ein leichtes pseudoskalares Meson und V ein leichtes Vektormeson. Im ersten Fall gibt es zwei, im zweiten Fall sieben unabhängige Formfaktoren (sogenannte volle Formfaktoren). In [66] wird ebenfalls gezeigt, dass sich die Anzahl der unabhängigen Formfaktoren für Formfaktoren die den Übergang eines schweren Mesons in ein leichtes Meson beschreiben, im Fall eines großen Rückstoßes auf eins bzw. zwei reduziert. Bei der Herleitung kommt unter anderem die HQET zum Einsatz. Weiterhin verweisen wir auf [69, 70]. Diese reduzierten Formfaktoren nennt man weiche Formfaktoren, weil sie im Gegensatz zu den vollen Formfaktoren nur noch Effekte weicher Gluonen enthalten. Harte gluonische Korrekturen können systematisch mittels des QCD-Faktorisierungsansatzes (siehe Kapitel 2.4.3) berechnet werden. Dies ist in Abbildung 2.13 illustriert.

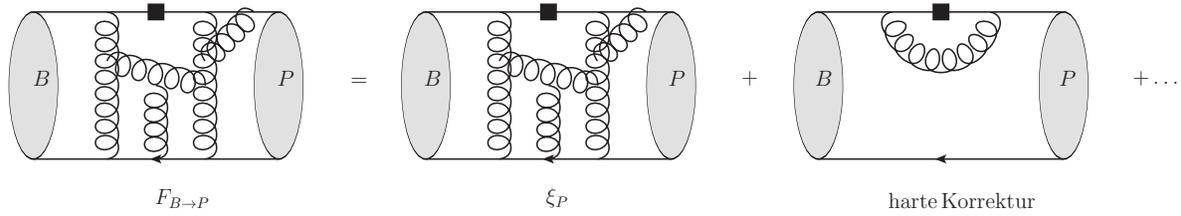


Abbildung 2.13: Reduktion eines vollen Formfaktors $F_{B \rightarrow P}$ auf einen weichen Formfaktor ξ_P . Es wurde nur eine endliche Anzahl von Gluonen eingezeichnet. Die Gluonen im mittleren Diagramm sind allesamt weich. Harte gluonische Korrekturen können systematisch mittels des QCD-Faktorisierungsansatzes bis zu beliebiger Ordnung in α_s berechnet werden. Gezeigt ist eine harte Vertexkorrektur. Korrekturen, die das Spektatorquark involvieren wurden nicht eingezeichnet. Ein schwarzes Viereck entspricht der Einsetzung eines effektiven Operators.

2.4.2 Lichtkegelverteilungsamplituden

Unter einem Meson können wir uns naiv gedacht einen Bindungszustand aus einem Quark und einem Antiquark vorstellen. Doch ist diese naive Vorstellung nicht ganz korrekt. Präzise gesagt ist dieser Zweiteilchenzustand nur der erste Term in einer unendlichen Reihe, Fockentwicklung genannt, zu der in höherer Ordnung Vielteilchenfluktuationen bestehend aus Quarks, Antiquarks und Gluonen beitragen. Die Impulse der Mesonkonstituenten können longitudinale und transversale Komponenten besitzen. Eine Lichtkegelverteilungsamplitude (LCDA) beschreibt die Verteilung des longitudinalen Impulsbruchteils der Konstituenten im Meson [66]. Bei hochenergetischen Mesonen ist es sicher sinnvoll die transversale Komponente in erster Näherung zu vernachlässigen. Die Entwicklung in dem Transversalimpuls wird Twistentwicklung genannt. Die führende Ordnung, bei welcher der Transversalimpuls vernachlässigt wird, nennt man Twist-2. Die LCDAs sind μ -abhängige Objekte und genügen einer RGE. Die Evolution der LCDA von leichten (schweren) Mesonen wird durch den Brodsky-Lepage-Kern (Lange-Neubert-Kern) beschrieben [71, 72]. Die Eigenfunktionen des zuerst genannten Kerns sind die Gegenbauerpolynome. Daher können wir eine LCDA eines leichten Mesons in diese Polynome entwickeln. In führender Ordnung der Fock- und Twistentwicklung können wir die Gegenbauerentwicklung für unsere Zwecke nach der zweiten Ordnung abbrechen, und erhalten für den Fall eines leichten pseudoskalaren Mesons

$$\phi^M(u) = 6u(1-u) \left[1 + 3a_1^M(\mu)(2u-1) + \frac{3}{2}a_2^M(\mu)(5(2u-1)^2 - 1) \right] + \dots, \quad (2.90)$$

wobei die Gegenbauerkoeffizienten $a_{1,2}^M(\mu)$ von dem betrachteten leichten Meson M und der Skala μ abhängen. Für leichte Vektormesonen treten für die transversale und longitudinale Polarisation je eine LCDA derselben Form wie die in Gleichung (2.90) auf. Schwere Mesonen werden anders behandelt als leichte [73], was wir aber an dieser Stelle nicht weiter ausführen wollen. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf Anhang F.2.

2.4.3 QCD-Faktorisierungsansatz

In Kapitel 2.3 haben wir uns zunutze gemacht, dass die relevante Skala des Zerfalls klein gegenüber der Skala der elektroschwachen Theorie ist und argumentiert, dass die schweren Freiheitsgrade bei dieser Zerfallsskala keine Rolle spielen. Das hat die Theorie insofern vereinfacht, dass die schweren Freiheitsgrade aus der Theorie entfernt wurden, was uns zu der Fermitheorie führte. Nun werden wir sehen, dass das Vorhandensein einer weiteren großen Skala, die Masse des schweren Mesons M_m , $m = B, D$ mit $M_m \gg \Lambda_{\text{QCD}}$, die Anwendung einer weiteren teilweise perturbativen Methode - der QCD-Faktorisierung (QCDF) - erlaubt.

In dieser Arbeit werden wir den QCDF-Ansatz dazu verwenden, die semileptonischen Zerfälle $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ und $D \rightarrow \rho\ell^+\ell^-$ zu analysieren. Ursprünglich wurde die QCD-Faktorisierung zur Behandlung von rein hadronischen Prozessen entwickelt. Aus diesem Grund, aber auch um die Grundidee besser zu verstehen, betrachten wir für einen Moment den rein hadronischen Zerfall $B \rightarrow K\pi$ [74]. Zu dem Matrixelement dieses Zerfalls trägt u. a. der Operator $\mathcal{O}_2^u = (\bar{s}_L\gamma_\mu u_L)(\bar{u}_L\gamma^\mu b_L)$ bei. Als erste Näherung können wir annehmen, dass das Matrixelement dieses Operators faktorisiert,

$$\begin{aligned} \langle K\pi | \mathcal{O}_2^u | B \rangle &\simeq \langle K | \bar{s}_L\gamma^\mu u_L | 0 \rangle \times \langle \pi | \bar{u}_L\gamma_\mu b_L | B \rangle \\ &\propto f_K \times \xi_\pi, \end{aligned} \quad (2.91)$$

wobei wir in Gleichung (2.91) die Kaonzerfallskonstante f_K und den weichen $B \rightarrow \pi$ Formfaktor ξ_π eingeführt haben. Diagrammatisch bedeutet das, dass man den Prozess in zwei unabhängige Teilprozesse zerlegt (siehe Abbildung 2.14 links). Der erste Teilprozess beschreibt dann den Übergang des B -Mesons in ein Pion, der zweite Teilprozess die Erzeugung eines Kaons aus dem Vakuum. Weil im Ruhesystem des B -Mesons jedes der leichten Mesonen eine Energie von $M_B/2$ besitzt, sehen weiche Gluonen mit einer Virtualität $|q^2| \sim \Lambda_{\text{QCD}}^2$ die hochenergetischen leichten Mesonen als farbneutral und koppeln daher nicht. Dies bezeichnet man als Farbdurchsichtigkeit [75]. Die Effekte von harten Gluonen mit einer Virtualität $|q^2| \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$ sind mit α_s unterdrückt und

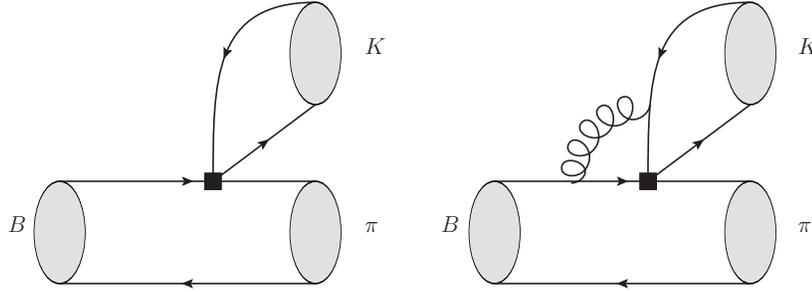


Abbildung 2.14: Zwei mögliche Diagramme für den rein hadronischen Zerfall $B \rightarrow K\pi$ für die naive Faktorisierung (links) und für eine mögliche nichtfaktorierbare Korrektur (rechts). Die schwarzen Quadrate entsprechen der Einsetzung eines effektiven Operators.

können in erster Näherung vernachlässigt werden. Diese Näherung, bei der man jegliche Wechselwirkung zwischen den beiden Teilprozessen vernachlässigt, bezeichnet man als *naive Faktorisierung*.

Die Anwendung der naiven Faktorisierung führt dazu, dass die Operatormatrixelemente nicht von der Renormierungsskala μ abhängen. Somit kann die μ -Abhängigkeit der Wilsonkoeffizienten nicht durch diejenige der Matrixelemente kompensiert werden. Der QCD-Faktorisierungsansatz löst dieses Problem [76, 77, 78] und die gluonischen Korrekturen lassen sich systematisch berechnen (siehe Abbildung 2.14 rechts). Im Rahmen dieses Ansatzes entkoppeln kurzreichweitige Effekte mit Energien $\sim M_B$ von den langreichweitigen Effekten in führender Ordnung in Λ_{QCD}/M_B . Dies führt auf die Faktorisierungsformel

$$\langle K\pi | \mathcal{O}_2^u | B \rangle = \xi_\pi \int_0^1 du T_I(u) \phi_K(u) + \int_0^1 d\xi du dv T_{II}(\xi, u, v) \Phi_B(\xi) \phi_K(u) \phi_\pi(v). \quad (2.92)$$

Dabei wurden die nichtperturbativen Effekte in den Formfaktor ξ_π und die Lichtkegelverteilungsamplituden ϕ_B, ϕ_K, ϕ_π absorbiert. Diese Wellenfunktionen sind ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ein Quark mit einem longitudinalen Impulsbruchteil ξ, u, v in dem jeweiligen Meson zu finden. Die Objekte $T_I(u)$ und $T_{II}(\xi, u, v)$ heißen harte Streukerne und sind störungstheoretisch berechenbar. Der zweite Term in Gleichung (2.92) beinhaltet alle diejenigen Beiträge, bei denen das Spektatorquark an dem Streuprozess beteiligt ist. In führender Ordnung trägt der zweite Term nicht bei, während der erste Term das Ergebnis der naiven Faktorisierung reproduziert. In Kapitel 5 werden wir den semileptonischen Zerfall $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ studieren. Im Vergleich zu seinem

nicht-leptonischen Gegenstück ist er insofern komplizierter, dass wir hier zusätzlich noch ein virtuelles Photon abstrahlen müssen, welches das Leptonpaar erzeugt. Dies führt zu mehreren Diagrammen mit einer komplizierteren Diracstruktur.

Die Frage, ob der QCDF-Ansatz auch auf seltene semileptonische $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfälle anwendbar ist, ist Teil aktueller Forschungsvorhaben, inklusive des Vorliegenden (siehe Kapitel 4). In dem kinematischen Bereich, in dem die Energie des ρ -Mesons im D -Ruhesystem von der Größe $M_D/2$ ist, können wir das entsprechende Matrixelement schematisch wie folgt schreiben:

$$\langle \ell^+ \ell^- \rho_a | \mathcal{H}_{\text{eff}} | D \rangle = C_a \xi_a + \Phi_D \otimes T_a \otimes \Phi_\rho. \quad (2.93)$$

Die Formfaktorkorrekturen C_a und die harten Streukerne T_a sind perturbativ berechenbar, die weichen Formfaktoren ξ_a und die Lichtkegelverteilungsamplituden $\Phi_{D,\rho}$ sind nichtperturbative und prozessunabhängige Objekte. Der Index a zeigt an, ob es sich um ein transversal ($a = \perp$) oder longitudinal ($a = \parallel$) polarisiertes ρ -Meson handelt.

Kapitel 3

Die Wilsonkoeffizienten für $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Übergänge im SM

Die Behandlung von Übergängen, die von einem flavourändernden neutralen Strom (FCNC) vermittelt werden, mittels eines EFT-Ansatzes, involviert die sogenannten Wilsonkoeffizienten, welche als effektive Kopplungen fungieren. Diese lassen sich perturbativ berechnen und hängen zudem von der Renormierungsskala μ ab. Für eine konsistente Analyse solcher Zerfälle bis zur Ordnung α_s werden die Wilsonkoeffizienten bis zu eben dieser Ordnung benötigt. Solche Übergänge mit b -Quarks sind bis zum heutigen Tag ein intensives Studienobjekt, und sowohl die theoretischen Vorhersagen als auch die experimentellen Messungen haben ein bemerkenswertes Maß an Präzision erreicht [79]. Verbunden mit diesen Studien sind auch die zugehörigen $b \rightarrow s$ Wilsonkoeffizienten bis zur nächstführenden Ordnung behandelt worden. Im Gegensatz dazu ist der Forschungsstand im Charm-Sektor weit weniger elaboriert. Dies liegt zum einen daran, dass die entsprechenden Zerfallsraten extrem GIM-unterdrückt sind [29], was die Kollegen in der experimentellen Teilchenphysik vor eine große Herausforderung stellt. Zum anderen sind die Raten von Resonanzeffekten dominiert, die den Zugriff auf die elektroschwache Physik stark einschränken. Aus diesem Grund ist es wenig erstaunlich, dass die zugehörigen $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten in der Literatur nicht so ausgiebig diskutiert worden sind. Insbesondere gab es bis vor kurzem keine konsistente Behandlung der Wilsonkoeffizienten des D -Sektors bis zur Ordnung α_s , ja es gab sogar Missverständnisse, vor allem im Zusammenhang mit dem Koeffizienten $C_{9,\text{eff}}$ [80]. In unserer Arbeit [A2] haben wir erstmalig eine konsistente Behandlung vorgenommen. Uns war bereits vorher bekannt, dass sich die elektroschwachen SM-Beiträge zu der Rate von Charm-FCNCs, abhängig von den betrachteten Korrekturen, um mehrere Größenordnungen unterscheiden können [81]. Darum erschien es uns

sinnvoll, konsistente Ergebnisse für die $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten in der nächstführenden Ordnung bereitzustellen, um die Effekte dieser Ordnung in D -Zerfällen konsistent untersuchen zu können. Unsere Arbeit [A2] ist auch Grundlage für das vorliegende Kapitel. Ausgehend von den Anfangsbedingungen und den anomalen Dimensionen in NNLL [61, 82, 83, 62, 84, 85, 86, 87] präsentieren wir eine konsistente Evolution der $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Wilsonkoeffizienten von der Skala $\mu = M_W$ zu der Skala $\mu = m_c$. Die Rechnung ist in vielen Teilen analog zu derjenigen in dem B -Sektor. Der Hauptunterschied ist das Auftreten einer intermediären Skala $\mu = m_b$ mit $M_W > m_b > m_c$, was eine zweistufige Evolution erforderlich macht.

Der Kapitelaufbau ist wie folgt: Wir beginnen in Kapitel 3.1 mit den Anfangsbedingungen bei der Skala M_W . In dem Folgekapitel 3.2 führen wir eine konsistente zweistufige Evolution der Wilsonkoeffizienten bis zur nächstführenden Ordnung in der starken Kopplungskonstanten durch. Anschließend dokumentieren wir unsere numerischen Ergebnisse in Kapitel 3.3. Das letzte Kapitel 3.4 beschäftigt sich mit einem Missverständnis bezüglich $C_{9,\text{eff}}$, welches wir zu klären versuchen. Wichtige Details finden sich in den Anhängen A und B.

3.1 Anfangsbedingungen bei der Skala M_W

In Kapitel 2.3.3 wurde erklärt, dass die Wilsonkoeffizienten an der Skala M_W (die Anfangsbedingungen) durch ein „Matching“ zwischen den Amplituden der vollen Theorie und der effektiven Theorie berechnet werden können. Die Matchingrechnung ist im Allgemeinen kompliziert. Wir werden im Folgenden aber sehen, dass wir keine komplizierte Rechnung durchführen müssen, um die Anfangsbedingungen für die $c \rightarrow u$ Koeffizienten zu erhalten.

Die Anfangsbedingungen der Strom-Strom-Operatoren können direkt aus der B -Physik übernommen werden und sind gegeben durch [84]

$$C_1(M_W) = 15a_s + a_s^2 \left[(16x + 8)\sqrt{4x - 1} \text{Cl}_2 \left(2 \arcsin \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) - \left(16x + \frac{20}{3} \right) \ln x - 32x + \frac{7091}{72} + \frac{17}{3}\pi^2 \right], \quad (3.1)$$

$$C_2(M_W) = 1 + a_s^2 \left(\frac{127}{18} + \frac{4}{3}\pi^2 \right), \quad (3.2)$$

wobei $x = [\hat{m}_t(M_W)/M_W]^2$ ist, mit der Top-Quark $\overline{\text{MS}}$ -Masse \hat{m}_t und $a_s = \alpha_s/(4\pi)$.

Die Top-Quarkmasse stammt aus Quarkschleifendiagrammen, welche bei der Matchingrechnung in der Ordnung α_s^2 auftreten, und taucht als kurzreichweitiger Parameter in den Wilsonkoeffizienten auf. Die in Gleichung (3.1) auftretende Clausenfunktion ist definiert als

$$\text{Cl}_2(x) = \text{Im} [\text{Li}_2(e^{ix})] , \quad (3.3)$$

mit dem Dilogarithmus Li_2 . Alle anderen Anfangsbedingungen $C_i(M_W)$, $i = 3 \dots 10$ verschwinden. In der vollen Theorie gilt nämlich für die Amplituden, aus denen sich die entsprechenden Anfangsbedingungen ergeben (vgl. Abbildung 2.11 (c)-(f)),

$$\mathcal{A}_{\text{voll}} \propto \sum_{q=d,s,b} V_{cq}^* V_{uq} F(x_q) , \quad (3.4)$$

wobei F eine Schleifenfunktion ist, die von dem Verhältnis $x_q = m_q/M_W$ abhängt. In führender Ordnung in der $1/M_W$ -Entwicklung müssen die Verhältnisse m_q/M_W vernachlässigt werden [81]. Aufgrund der Unitarität der CKM-Matrix verschwindet die obige Amplitude dann in führender Ordnung in $1/M_W$. Man spricht von GIM-Unterdrückung [29]. Diese Unterdrückung wurde erstmalig in dem Zerfallskanal $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ beobachtet und führte dazu, dass Glashow, Iliopoulos und Maiani 1970 hypothetisch das Charm-Quark einführten. Im Gegensatz zum Charm-Sektor darf das Verhältnis m_t/M_W in der Matchingrechnung für die B -Zerfälle nicht vernachlässigt werden. Das führt zu von null verschiedenen Anfangsbedingungen für $C_i(M_W)$, $i = 3 \dots 10$ im Bottom-Sektor.

Damit hat der Vektor der C_{1-8} an der Skala M_W enthält, $C(M_W)$, nur zwei von null verschiedene Einträge.

3.2 Evolution der Wilsonkoeffizienten

In dem Kapitel 3.1 haben wir die Wilsonkoeffizienten an der Skala M_W behandelt. Spezifische Rechnungen für D -Zerfälle involvieren jedoch die Wilsonkoeffizienten an der Skala $\mu \sim m_c$. Die hierzu nötige Evolution besteht aus zwei Schritten. Im ersten Schritt führen wir eine Evolution von der Skala M_W zu der Skala $\mu \sim m_b$ durch. Dabei tragen lediglich die Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}^q$ bei, weil ausschließlich deren Anfangsbedingungen von null verschieden sind. An der Skala $\mu \sim m_b$ wird das b -Quark ausintegriert. Dies führt dazu, dass die Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}^b$ unterhalb der Skala $\mu \sim m_b$ nicht mehr existieren. An dieser Skala müssen wir daher ein Matching zwischen der effektiven Theorie

	$b \rightarrow s$ Übergänge	$c \rightarrow u$ Übergänge
Operatorbasis	$\mathcal{O}_{1,2}^{u,c}, b, s$	$\mathcal{O}_{1,2}^{d,s,b}, b \leftrightarrow c, s \leftrightarrow u$
Anfangsbedingungen	$C_{1-10}(M_W) \neq 0$	nur $C_{1-2}(M_W) \neq 0$
Anomale Dimension	$Q_u, Q_d, n_f = 5$	$Q_u \leftrightarrow Q_d, n_f = 4, 5$
Evolution	ein Schritt: $M_W \searrow m_b$	zwei Schritte: $M_W \searrow m_b \searrow m_c$

Tabelle 3.1: Einige wichtige Unterschiede zwischen der Evolution der Wilsonkoeffizienten von b -Zerfällen und derjenigen von c -Zerfällen.

mit fünf Quarksorten und derjenigen mit vier Quarksorten durchführen. Dies generiert Pinguinoperatoren mit nicht verschwindenden Wilsonkoeffizienten $C_{4,9}$, die nur über $C_{1,2}(m_b)$ von M_W abhängen. Im zweiten Schritt führen wir eine Evolution von der Skala $\mu \sim m_b$ zu der Skala $\mu \sim m_c$ durch. Durch die Mischung der Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}^{d,s}$ in \mathcal{O}_{3-9} unterhalb der Skala $\mu \sim m_b$ sowie das zusätzliche Matching an dieser Skala erhalten zusätzlich $C_{3,5-8}$ nicht verschwindende Beiträge. Der Koeffizient C_{10} mischt nicht unter Renormierung, weil der axiale Leptonstrom des zugehörigen Operators nur durch das Z-Boson erzeugt werden kann. Dieses ist in der effektiven Theorie aber nicht mehr vorhanden. Daher ist C_{10} identisch null an allen Skalen in führender Ordnung in der $1/M_W$ -Entwicklung. In Tabelle 3.1 haben wir einige wichtige Unterschiede zwischen der Evolution der Wilsonkoeffizienten von b -Zerfällen und derjenigen von c -Zerfällen festgehalten.

An diesem Punkt stellen wir fest, dass wir die effektive Hamiltondichte aus Gleichung (2.74) noch etwas präzisieren müssen. Für Skalen $M_W > \mu > m_b$ lautet die effektive Hamiltondichte

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(M_W > \mu > m_b) = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=d,s,b} V_{cq}^* V_{uq} [C_1(\mu) \mathcal{O}_1^q + C_2(\mu) \mathcal{O}_2^q], \quad (3.5)$$

für Skalen $m_b > \mu > m_c$ ist sie gegeben durch

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(m_b > \mu > m_c) = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=d,s} V_{cq}^* V_{uq} [C_1(\mu) \mathcal{O}_1^q + C_2(\mu) \mathcal{O}_2^q + \sum_{i=3}^{10} C_i(\mu) \mathcal{O}_i]. \quad (3.6)$$

Außerdem definieren wir die effektiven Wilsonkoeffizienten

$$C_{7/8,\text{eff}}(\mu) = C_{7/8}(\mu) + \sum_{i=1}^6 y_i^{(7/8)} C_i(\mu), \quad (3.7)$$

mit $y^{(7)} = Q(0, 0, 1, \frac{4}{3}, 20, \frac{80}{3})$ und $y^{(8)} = (0, 0, 1, -\frac{1}{6}, 20, -\frac{10}{3})$ in der gewählten Operatorbasis. Es gelten die Zuweisungen $Q = Q_u = 2/3$ und $Q = Q_d = -1/3$ für D -Zerfälle einerseits und für B -Zerfälle andererseits. Durch diese Wahl sind die Amplituden der Übergänge $c \rightarrow u\gamma$ und $c \rightarrow ug$ in führender Ordnung proportional zu $C_{7,\text{eff}}$ bzw. $C_{8,\text{eff}}$. In [A2] wurde die Evolution in der Basis mit den effektiven Wilsonkoeffizienten durchgeführt. Abweichend davon führen wir die Evolution in dieser Arbeit in der Basis mit den nicht-effektiven Wilsonkoeffizienten durch. Es ist zu beachten, dass die anomale Dimensionsmatrix von der Wahl der Basis abhängt.

Wie bereits oben erwähnt, müssen wir an der Skala $\mu = m_b$ ein weiteres Matching durchführen. Das bedeutet, dass die Matrixelemente von Gleichung (3.5) und (3.6) an der Skala $\mu = m_b$ übereinstimmen müssen, was auf Einschleifenniveau zu der Bedingung

$$C_1(m_b)\langle\mathcal{O}_1^b\rangle_{1\text{-loop}}(m_b) + C_2(m_b)\langle\mathcal{O}_2^b\rangle_{1\text{-loop}}(m_b) \stackrel{!}{=} - \sum_{i=3}^9 C_i(m_b)\langle\mathcal{O}_i\rangle_{\text{tree}}(m_b), \quad (3.8)$$

führt. Diese Bedingung involviert die Auswertung der in Abbildung 3.1 dargestellten Diagramme. Das obere Subdiagramm können wir aus dem Anhang C von [88] entnehmen und ist in angepasster Notation gegeben durch

$$\mathcal{M}_{1\text{-loop}} = -\frac{3g_{\text{em}}e_b}{16\pi^2} h(q^2, m_b) \bar{u}(p')(q^2\gamma^\mu - q^\mu \not{q})(1 - \gamma_5)c(p), \quad (3.9)$$

wobei für den Operator \mathcal{O}_1^b noch ein T^a hinzugefügt werden muss. Dabei ist $h(q^2, m_b)$ eine Schleifenfunktion, die von dem Impulsübertrag q^2 abhängt. Der Term mit \not{q} trägt nicht bei, wenn $\mathcal{M}_{1\text{-loop}}$ mittels des entsprechenden Eichbosonpropagators mit dem Quark-Antiquark-Strom bzw. mit dem leptonischen Strom (untere Subdiagramme in Abbildung 3.1) kontrahiert wird. Das Matching ist bei $q^2 = 0$ durchzuführen. In diesem Fall ist $h(0, m_b) = -4/9$. Insgesamt führt diese Prozedur dann zu den beiden Matchingkoeffizienten [89]

$$C_4(m_b) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{9} C_1(m_b) - \frac{2}{3} C_2(m_b) \right), \quad (3.10)$$

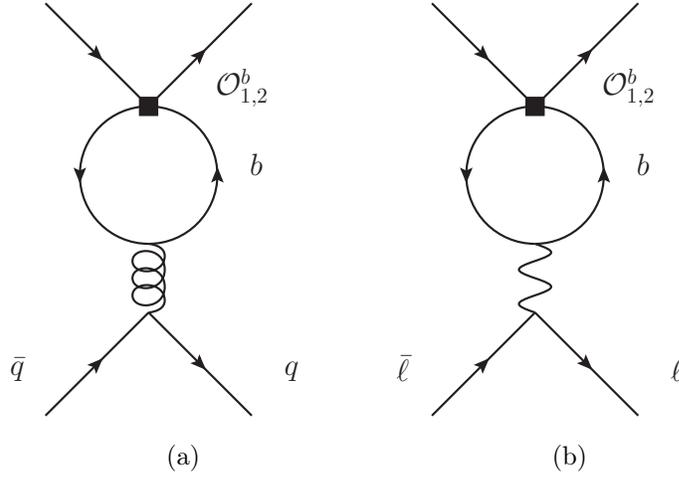


Abbildung 3.1: Diagramme die für das Matching zwischen der effektiven Theorie mit fünf Quarks und der mit vier Quarks bei der Ordnung α_s relevant sind.

$$C_9(m_b) = -\frac{8}{27} \left(C_1(m_b) + \frac{3}{4} C_2(m_b) \right). \quad (3.11)$$

Weiter unten werden wir noch sehen, dass wir für die Evolution von C_9 bis zur hier gewünschten Ordnung, die Koeffizienten $C_{1-6}(m_b)$ in NNLL benötigen und damit insbesondere auch $C_4(m_b)$. Außerdem benötigen wir die α_s -Korrektur zu dem Matchingkoeffizienten $C_9(m_b)$. Diese Beiträge sind jedoch bisher noch nicht bekannt. Die Diagramme, die ein zusätzliches Gluon haben, das nur die oberen Fermionlinien in Abbildung 3.1 verbindet, sind für die B -Physik in [90] zwar berechnet worden; jedoch involviert die Rechnung eine Entwicklung in m_c/m_b , die in dem hier betrachteten Fall in eine Entwicklung in m_b/m_c umgeschrieben werden müsste, was aber keinerlei Sinn ergibt. Daher setzen wir in dem Folgenden näherungsweise $C_4(m_b) \simeq 0$ in Ordnung α_s^2 und $C_9(m_b) \simeq 0$ in Ordnung α_s .

Nach diesen Vorüberlegungen können wir nun die Evolution durchführen. Die in diesem Kapitel verwendeten anomalen Dimensionsmatrizen sind in Anhang A.4 zu finden. Da die Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$ nicht in die Operatoren \mathcal{O}_{1-8} mischen, können wir die Evolution der Wilsonkoeffizienten C_{1-8} separat behandeln. Für diese Koeffizienten ist die Evolutionsvorschrift gegeben durch

$$C(\mu) = U^{(n_f=4)}(\mu, m_b) R U^{(n_f=5)}(m_b, M_W) C(M_W). \quad (3.12)$$

Dabei ist $U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1)$ eine Evolutionsmatrix, die von der Anzahl der Quarkflavour n_f und einer Anfangsskala μ_1 sowie einer Endskala μ_2 abhängt, und R ist eine Matchingmatrix [89]

$$R_{ij} = \delta_{ij} + a_s(m_b)R_{ij}^{(1)} + a_s(m_b)^2 R_{ij}^{(2)} \dots, \quad (3.13)$$

mit $a_s = \alpha_s/(4\pi)$. Ihre Einträge ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung (3.10) zu

$$R_{41}^{(1)} = \frac{1}{9}, \quad R_{42}^{(1)} = -\frac{2}{3}. \quad (3.14)$$

Die Evolutionsmatrix $U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1)$ genügt der Renormierungsgruppengleichung

$$\frac{d}{d \ln \mu_1} U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1) = \gamma^T(n_f, \mu_1) U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1). \quad (3.15)$$

Hier ist $\gamma(n_f, \mu_1)$ die sogenannte anomale Dimensionsmatrix, zu der wir in Anhang A.4 einige Details angeben. Die Lösung für Gleichung (3.15) in der NNLL Ordnung ist in [91] für B -Zerfälle zu finden. Für den hier betrachteten Fall müssen lediglich triviale Änderungen vorgenommen werden. In Anhang A.3 geben wir die für unseren Zweck angepasste Lösung an.

Für den Wilsonkoeffizienten C_9 erhalten wir die folgende Evolutionsvorschrift:

$$C_9(\mu) = C_9(m_b) + W^{(n_f=4)}(\mu, m_b) R U^{(n_f=5)}(m_b, M_W) C(M_W), \quad (3.16)$$

mit der 1×6 -Matrix

$$W^{(n_f=4)}(\mu, m_b) = -\frac{1}{2} \int_{a_s(m_b)}^{a_s(\mu)} da_s \frac{\kappa(a_s)}{\beta(a_s)} U^{(n_f=4)}(\mu, m_b), \quad (3.17)$$

wobei $U^{(n_f=4)}(\mu, m_b)$ und R die 6×6 -Untermatrizen von den entsprechenden Größen sind, die oben definiert wurden. Hier enthält der Vektor $C(M_W)$ lediglich die Komponenten $C_1(M_W)$ bis $C_6(M_W)$, wobei, wie bereits gesagt, nur zwei davon nicht verschwinden. Die Lösung von Gleichung (3.17) können wir ebenfalls aus [91] entnehmen. In Anhang A.3 geben wir die an die D -Zerfälle angepasste Lösung an. Die 1×6 -Matrix κ beschreibt die Mischung von den Operatoren \mathcal{O}_{1-6} in den semileptonischen Operator \mathcal{O}_9 und ist ebenfalls in Anhang A.4 festgehalten. An dieser Stelle verweisen wir noch auf einen besonderen Umstand. Gemäß Gleichung (A.24) beginnt die Matrix $W^{(n_f=4)}(\mu, m_b)$ bereits in der Ordnung α_s^{-1} . Daher benötigen wir $C_{1-6}(m_b)$ in der Ord-

nung NNLL für eine konsistente Evolution des Koeffizienten C_9 bis zur Ordnung α_s . Die Koeffizienten $C_{1,2}(m_b)$ berechnen wir daher in der Ordnung NNLL. Wie bereits oben erklärt vernachlässigen wir aber an dieser Stelle die α_s^2 -Korrektur des Matchingkoeffizienten $C_4(m_b)$, weil diese bisher noch nicht bekannt ist. Außerdem vernachlässigen wir die α_s -Korrektur zu $C_9(m_b)$ in Gleichung (3.16).

Weil keiner der Operatoren in \mathcal{O}_{10} mischt, verschwindet der Wilsonkoeffizient C_{10} für alle $\mu \leq M_W$ in führender Ordnung in $1/M_W$.

Damit ist die Evolution der $c \rightarrow u \ell^+ \ell^-$ Wilsonkoeffizienten bis $\mathcal{O}(\alpha_s)$ vollständig beschrieben.

3.3 Numerische Ergebnisse

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der zahlenmäßigen Auswertung. In Tabelle 3.2 haben wir unsere numerischen Ergebnisse für die $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten an der Skala $\mu = 1,5 \text{ GeV}$ zusammengestellt. Wir bemerken, dass sich die numerischen Ergebnisse in dem Vierquarksektor, C_{1-6} an der Skala $\mu = 1,5 \text{ GeV}$, von denen der B -Zerfälle an der Skala $\mu = 4,6 \text{ GeV}$ (vgl. Tabelle 5.1) nicht sonderlich unterscheiden. Lediglich der Koeffizient C_1 ist ungefähr doppelt so groß für Charm-Zerfälle, wohingegen C_{2-6} recht ähnlich sind. Den größten Unterschied beobachten wir für die Koeffizienten $C_{7,\text{eff}}$, $C_{8,\text{eff}}$, C_9 und C_{10} . Der Wilsonkoeffizient $C_{7,\text{eff}}$ hat ein anderes Vorzeichen und ist grob um einen Faktor sechs kleiner, $C_{8,\text{eff}}$ ist ungefähr um einen Faktor drei kleiner als für die B -Zerfälle; C_9 ist negativ und eine Größenordnung kleiner für Charm-Zerfälle. Letztlich ist der Koeffizient C_{10} exakt null in allen Ordnungen in der starken Kopplungskonstanten. An dieser Stelle weisen wir nochmal darauf hin, dass wir für die Evolution von C_{1-6} in der Ordnung NNLL die Matchingbedingung an der Skala $\mu = m_b$ auf Zweischleifenniveau vernachlässigt haben. Ebenso haben wir die α_s -Korrektur zu $C_9(m_b)$ nicht berücksichtigt. Dadurch ergibt sich eine zusätzliche Korrektur für C_9 . Diese Beiträge sollte man mit einbeziehen, sobald sie bekannt sind.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
LL	-0,948	1,080	-0,003	-0,049	0,000	0,001
NLL	-0,647	1,033	-0,004	-0,076	0,000	0,000
NNLL	-0,579	1,030	-0,006	-0,075	0,000	0,000
	$C_{7,\text{eff}}$	$C_{8,\text{eff}}$	C_9	C_{10}		
LL	0,066	-0,047	-0,098	0		
NLL	0,042	-0,052	-0,288	0		
NNLL	-	-	-0,445	0		

Tabelle 3.2: $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten an der Skala $\mu = 1,5 \text{ GeV}$ in führender logarithmischer (LL), nächstführender logarithmischer (NLL) und nächst-nächstführender logarithmischer (NNLL) Ordnung für C_{1-6} , C_9 und C_{10} . Die Inputwerte sind $\Lambda_{\text{QCD},\overline{\text{MS}}}^{(4)} = 0,294 \text{ GeV}$, $\Lambda_{\text{QCD},\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 0,214 \text{ GeV}$, $\hat{m}_t(\hat{m}_t) = 163,3 \text{ GeV}$, $M_W = 80,4 \text{ GeV}$, $\hat{m}_b(\hat{m}_b) = 4,18 \text{ GeV}$ und $\sin^2 \theta_W = 0,23$. Für α_s wird die 3-Schleifennäherung verwendet.

3.4 Der effektive Wilsonkoeffizient $C_{9,\text{eff}}$ ¹

Analog zur B -Physik führen wir den effektiven „Wilsonkoeffizienten“ $C_{9,\text{eff}}$ ein. Dieser ist unabhängig vom Renormierungsschema und absorbiert alle universellen langreichweitigen Effekte von den Quarkschleifen in der Störungstheorie [92]

$$-C_{9,\text{eff}}(s) = \lambda_b(C_9 + Y^{(b)}(s)) + \lambda_d Y^{(d)}(s), \quad (3.18)$$

wobei $s = q^2$, $q = p - p'$ ist, mit den Impulsen p und p' des einlaufenden c - bzw. auslaufenden u -Quarks. Die Funktionen $Y^{(i)}(s)$ sind definiert als (nutze Anhang D)

$$\begin{aligned} Y^{(b)}(s) = & [h(s, m_c) + h(s, m_u)] \left(7C_3 + \frac{4}{3}C_4 + 76C_5 + \frac{64}{3}C_6 \right) \\ & - h(s, m_s) \left(\frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + 3C_3 + 30C_5 \right) \\ & - h(s, m_d) \left(3C_3 + 30C_5 \right) + \frac{8}{9} \left(3C_3 + 16C_5 + \frac{16}{3}C_6 \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

¹Hier haben wir für $C_{9,\text{eff}}$ und $h(s, m_q)$ eine andere Definition als in [A2] gewählt.

und

$$Y^{(d)}(s) = -\left(\frac{2}{3} C_1 + \frac{1}{2} C_2\right) [h(s, m_s) - h(s, m_d)], \quad (3.20)$$

wobei

$$h(s, m_q) = -\frac{4}{9} \left(\ln \frac{m_q^2}{\mu^2} - \frac{2}{3} - z \right) + \frac{2}{9} (2+z) B_0(s, m_q), \quad (3.21)$$

mit $z = 4m_q^2/s$, und

$$B_0(s, m_q) = -2 \sqrt{|z-1|} \begin{cases} \arctan \frac{1}{\sqrt{z-1}} & z > 1 \\ \ln \frac{1 + \sqrt{1-z}}{\sqrt{z}} - \frac{i\pi}{2} & z \leq 1 \end{cases}. \quad (3.22)$$

In dieser Arbeit betrachten wir keine Zweischleifenbeiträge zu dem Matrixelement, sondern wir fokussieren uns auf die Einschleifenbeiträge, die in vorherigen Studien behandelt worden sind [93, 94, 95, 80]. In all diesen Studien wurden verschiedene Operatorbasen verwendet. Um die Ergebnisse von dort mit unseren zu vergleichen, können die Formeln aus Anhang B benutzt werden.

Im Folgenden beschäftigen wir uns noch, wie eingangs erwähnt, mit einem Missverständnis hinsichtlich des effektiven Wilsonkoeffizienten $C_{9,\text{eff}}$. Dabei beschränken wir uns auf die Arbeit [80], in der sich nach unserem Verständnis ein logischer Fehler in der Argumentation befindet. Die Diskussion orientiert sich an [A2]. In [93, 94] wurden die Erkenntnisse von Inami und Lim [96] dazu benutzt, den Wilsonkoeffizienten C_9 der elektroschwachen Theorie ohne QCD-Effekte abzuschätzen. Später haben Fajfer et al. [95] bemerkt, dass die Zerfallsbreite dadurch beträchtlich überschätzt wird. Darin stimmen wir mit den Autoren überein. Jedoch haben Paul et al. 2011 argumentiert [80], dass diese Ergebnisse einen Vorzeichenfehler in der zu unserer in Gleichung (3.21) definierten Funktion h , analogen Funktion enthalten, der das Hauptargument aus [95] entkräften würde. Daher unternehmen wir an dieser Stelle den Versuch, über diesen Punkt in einer anderen Weise als in [95] Klarheit zu schaffen.

Zunächst betrachten wir den Fall der B -Zerfälle. Um die Anfangsbedingung für den Wilsonkoeffizienten C_9 an der Skala M_W in führender Ordnung zu erhalten, muss man zuerst die Pinguin- und Boxdiagramme in der vollen QCD berechnen. Diese Rechnung wurde von Inami und Lim [96] durchgeführt. Das Ergebnis enthält Logarithmen der Form $\ln(m_t/M_W)$ und $\ln(m_c/M_W)$. Die u -Quarkmasse kann vernachlässigt und

die entsprechende IR-Singularität dimensional regularisiert werden. Dann müssen die entsprechenden Diagramme in der effektiven Theorie berechnet werden. Die Wilsonkoeffizienten werden dann so gewählt, dass die beiden Rechnungen an der Skala M_W übereinstimmen, wobei dieses Matching bei verschwindendem Impulsübertrag durchgeführt werden kann. Somit führt die effektive Theorie auf Terme proportional zu der h -Funktion aus Gleichung (3.21) bei $s = 0$:

$$h(0, m_q) = -\frac{4}{9} \left(1 + \ln \frac{m_q^2}{\mu^2} \right). \quad (3.23)$$

Wiederum kann die u -Quarkmasse vernachlässigt werden und das entsprechende Diagramm verschwindet in dimensionaler Regularisierung. Weil die Top-Quarkmasse in der effektiven Theorie nicht mehr auftaucht, kann der Term mit $\ln(m_t/M_W)$ offenbar nicht reproduziert werden. Vielmehr ist er in $C_9(M_W)$ enthalten. Der Term mit $\ln(m_c/\mu)$ in (3.23) entspricht genau dem Term mit $\ln(m_c/M_W)$ der vollen QCD-Rechnung, die auf einen Term mit $\ln(\mu/M_W)$ in $C_9(\mu \sim M_W)$ führt, d. h. die expliziten Logarithmen der leichten Quarkmassen in der vollen Theorie haben *dasselbe* Vorzeichen wie in der Schleifenfunktion $h(s, m_q)$. Das muss so sein, weil die entsprechenden Beiträge wegen $m_c \ll M_W$ als langreichweitig (im Vergleich zu der Skala M_W) betrachtet werden, und daher in der effektiven Theorie reproduziert werden müssen und nicht in den Wilsonkoeffizienten enthalten sein dürfen. In der eigentlichen Matchingrechnung kann man m_c von Anfang an vernachlässigen, was auf dasselbe Ergebnis für $C_9(M_W)$ führt.

Im Fall der D -Zerfälle, werden die Rollen von den t -, c - und u -Quarks von den b -, s - und d -Quarks übernommen. Mit derselben Argumentation von vorher, können diesmal *alle* Quarkmassen in der Matchingrechnung vernachlässigt werden. Dies führt wegen der Unitarität der CKM-Matrix unmittelbar zu einem verschwindenden $C_9(M_W)$. Die Behauptung von Paul et al. [80], dass die Logarithmen in dem Inami-Lim-Term und in den effektiven QCD-Korrekturen ein unterschiedliches Vorzeichen haben müssen, ist angesichts der obigen Betrachtung von der Hand zu weisen. Außerdem besitzt die Funktion h einen Grenzwert für $m_q \rightarrow 0$ bei $s \neq 0$:

$$h(s, 0) = \frac{4}{27} \left(2 + 3\pi i - 3 \log \frac{s}{\mu^2} \right). \quad (3.24)$$

Wenn der Logarithmus in dem Inami-Lim-Term also wirklich den expliziten Logarithmus in dem ersten Term in (3.21) wegheben sollte, dann würde der gesamte Beitrag eine logarithmische Divergenz für verschwindende Quarkmassen bei $s \neq 0$ enthalten. Diese kurze Diskussion mag an dieser Stelle genügen.

In dem folgenden Kapitel werden wir unsere Ergebnisse für die $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten dazu verwenden, $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfälle im QCDF-Ansatz zu analysieren.

Kapitel 4

$D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfälle im QCD-Faktorisierungsansatz

Dieses Kapitel basiert auf [A3]. Es folgt nicht nur rein formal dem Vorhergehenden, sondern auch inhaltlich. Wir werden seltene semileptonische $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfälle im QCDF-Ansatz analysieren und uns dabei der Resultate für die $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten bedienen, mit denen wir uns im vorangehenden Kapitel beschäftigt haben. Für die analogen $b \rightarrow s$ Übergänge liefert der QCDF-Ansatz eine erfolgreiche Beschreibung der Zerfallsrate im kinematischen Bereich eines großen hadronischen Rückstoßes [91, 97]. Im Gegensatz dazu erwarten wir für den D -Sektor wegen der relativ kleinen Charm-Quarkmasse, ein deutlich schlechteres Konvergenzverhalten der QCDF-Entwicklung in der starken Kopplungskonstanten α_s und dem Inversen der D -Mesonmasse $1/m_D$. Zudem ist bekannt, dass das Spektrum von $c \rightarrow u$ Übergängen von langreichweitigen Resonanzeffekten dominiert wird, was auf die spezifische CKM- und Massenstruktur von Charm-FCNCs zurückzuführen ist. Ziel dieses Kapitels ist es daher nicht, präzise Vorhersagen von Observablen zu machen, sondern kritisch zu bewerten, inwiefern $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfälle im QCDF-Ansatz unter theoretischer Kontrolle sind. Unser Vorgehen erfolgt analog zu den entsprechenden B -Zerfällen. Die hadronischen Unsicherheiten durch langreichweitige Resonanzeffekte schätzen wir im Rahmen eines vereinfachten Modells ab, wobei wir uns hier auf die führende Ordnung in α_s beschränken.

Der Aufbau dieses Kapitels ist wie folgt: Wir starten in Kapitel 4.1 mit der Einführung der Notation und diskutieren das theoretische Grundgerüst. In Kapitel 4.2 besprechen wir die einzelnen Zerfallstopologien im Detail, in dem anschließenden Kapitel 4.3 erfolgt die numerische Auswertung. In den letzten beiden Kapiteln 4.4 und 4.5 geben wir einen Ausblick auf die Sensitivität unseres Zerfallskanals auf mögliche Effekte NP und fassen die wichtigsten Unterschiede zwischen dem B - und D -Sektor zusammen. Das

hadronische Resonanzmodell diskutieren wir in Anhang F im Detail. Weitere nützliche Informationen sind in den Anhängen C-E festgehalten.

4.1 Notation und theoretisches Grundgerüst

In Kapitel 4.1 führen wir die Notation für die Berechnung der Zerfallsamplituden ein. Um den Vergleich mit den analogen B -Zerfällen zu vereinfachen, orientieren wir uns dabei an der Notation aus [98, 97], gegebenenfalls nehmen wir Anpassungen vor. Außerdem besprechen wir das theoretische Grundgerüst für die hier behandelten $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfälle.

4.1.1 Effektive Hamiltondichte

In Kapitel 2.3.3 haben wir die niederenergetische effektive Hamiltondichte für $c \rightarrow u$ Übergänge eingeführt. Auch die vollständige Operatorbasis in Massendimension sechs ist dort zu finden, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten, die Operatoren noch einmal aufzulisten. Im Folgenden schreiben wir die effektive Hamiltondichte in der Form

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left(\lambda_b \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(b)} + \lambda_d \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d)} \right), \quad (4.1)$$

mit den CKM-Strukturen $\lambda_q = V_{cq}^* V_{uq}$ und den beiden Beiträgen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(b)} &= C_1 \mathcal{O}_1^s + C_2 \mathcal{O}_2^s + \sum_{i=3}^9 C_i \mathcal{O}_i, \\ \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d)} &= C_1 (\mathcal{O}_1^s - \mathcal{O}_1^d) + C_2 (\mathcal{O}_2^s - \mathcal{O}_2^d). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten haben wir im letzten Kapitel berechnet. Im Weiteren verwenden wir diese Ergebnisse. Da der Wilsonkoeffizient C_{10} verschwindet (GIM-Mechanismus), läuft die Summation in Gleichung (4.2) nur bis $i = 9$. Wegen $\lambda_b \sim \lambda^5$ und $\lambda_d \sim \lambda$ erwarten wir, dass die Effekte von $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(b)}$ relativ zu denen von $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d)}$ stark unterdrückt sind.

4.1.2 Verallgemeinerte Formfaktoren

Das Studium von seltenen semileptonischen $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfällen involviert die hadronischen Matrixelemente $\langle \gamma^*(q, \mu) \rho^+(p', \varepsilon^*) | \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(i)} | D^+(p) \rangle$. In den Abbildungen 4.1 und

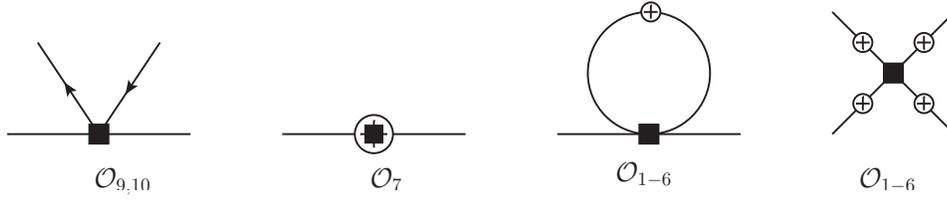


Abbildung 4.1: Diagramme in führender Ordnung α_s . Ein schwarzes Quadrat markiert die Einsetzung eines effektiven Operators, die Kreuze sind mögliche Abstrahlungspunkte für das virtuelle Photon, welches das geladene Leptonpaar erzeugt. Das dritte Diagramm von links ist ein Beispiel für eine Quarkschleifentopologie, das Diagramm ganz rechts eines für eine Annihilationstopologie.

4.2 sind zur Illustration mögliche Diagramme dargestellt, die in führender bzw. nächstführender Ordnung in α_s zu diesen Matrixelementen beitragen. Im Weiteren werden wir immer wieder von Quarkschleifen- und Annihilationstopologien sowie Spektatorquarkstreuung sprechen. Diese Begriffe beziehen sich auf die Gestalt der Diagramme. Wir verweisen hierzu auf die Beschreibungen der zuletzt angeführten Abbildungen. Wir betonen an dieser Stelle, dass wir keine vollständig neue Berechnung der diesen Diagrammen entsprechenden Amplituden durchführen, sondern die aus der B -Physik bekannten Ergebnisse für unseren Zweck anpassen. Die Matrixelemente des $D \rightarrow \rho$ Übergangs drücken wir durch die verallgemeinerten Formfaktoren $\mathcal{T}_a^{(i)}(q^2)$ gemäß

$$\begin{aligned}
& \langle \gamma^*(q, \mu) \rho^+(p', \varepsilon^*) | \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(i)} | D^+(p) \rangle \\
&= \frac{i g_{\text{em}} m_c}{4\pi^2} \left\{ 2 \mathcal{T}_{\perp}^{(i)}(q^2) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^*_\nu p_\rho p'_\sigma \right. \\
&\quad - 2i \mathcal{T}_{\perp}^{(i)}(q^2) \left[\left(p \cdot p' - \frac{m_\rho^2 m_D^2}{p \cdot p'} \right) \varepsilon^{*\mu} - (\varepsilon^* \cdot p) \left(p'^\mu - \frac{m_\rho^2}{p \cdot p'} p^\mu \right) \right] \\
&\quad \left. - i \mathcal{T}_{\parallel}^{(i)}(q^2) (\varepsilon^* \cdot p) \left[q^\mu - \frac{q^2}{m_D^2 - m_\rho^2} (p^\mu + p'^\mu) \right] \right\}, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

aus. Diese sind in dem Sinn verallgemeinert, dass sie sowohl Informationen von kurzen als auch von langen Abständen enthalten. Dabei treten für jeden Satz von effektiven Operatoren ($i = b, d$) zwei unabhängige verallgemeinerte Formfaktoren auf, wobei der Index $a = \perp, \parallel$ anzeigt, ob der jeweilige Beitrag von einem transversal oder longitudinal polarisierten Vektormeson herrührt. Wie in [91] gezeigt wurde, vereinfachen sich die hadronischen Matrixelemente der schwachen effektiven Hamiltondichte in der Region,

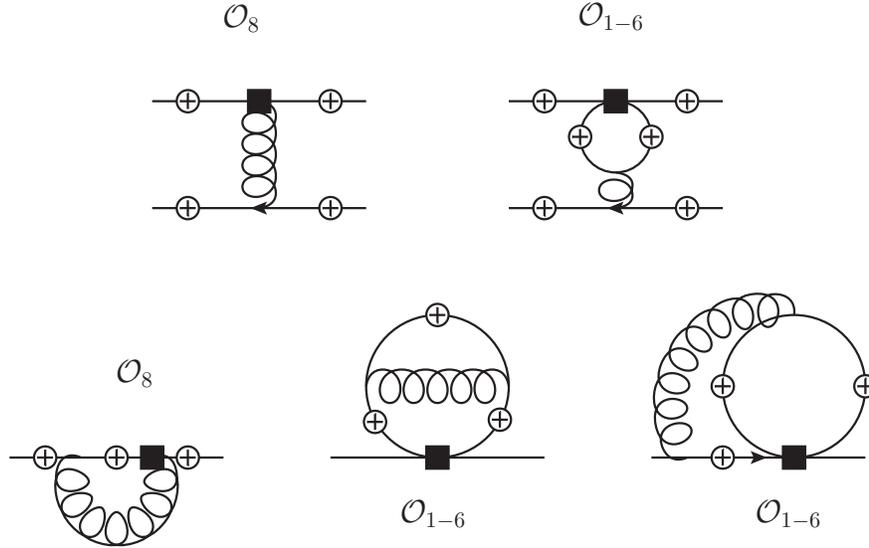


Abbildung 4.2: Beispiele von Diagrammen in der nächstführenden Ordnung α_s . Ein schwarzes Quadrat markiert die Einsetzung eines effektiven Operators, die Kreuze sind mögliche Abstrahlungspunkte für das virtuelle Photon, welches das geladene Leptonpaar erzeugt. Bei den beiden Diagrammen in der ersten Zeile handelt es sich um Spektorquarkstreuung.

in der das Vektormeson eine große Energie E im Ruhesystem des D -Mesons besitzt,

$$E \equiv \frac{p \cdot p'}{m_D} = \frac{m_D^2 + m_\rho^2 - q^2}{2m_D} \rightarrow \frac{m_D}{2} \gg \Lambda_{\text{QCD}}. \quad (4.4)$$

Man spricht von der Region eines großen hadronischen Rückstoßes. In diesem kinematischen Bereich können die verallgemeinerten Formfaktoren nämlich mittels des QCD-Faktorisierungsansatzes, wie bereits in Kapitel 2.4.3 erklärt wurde, weiter zerlegt werden. Analog zu den entsprechenden B -Zerfällen ergibt sich

$$\mathcal{T}_a^{(i)} \simeq \xi_a C_a^{(i)} + \frac{\pi^2}{N_c} \frac{f_D f_{\rho,a}}{m_D} \Xi_a \sum_{\pm} \int \frac{d\omega}{\omega} \phi_{D,\pm}(\omega) \int_0^1 du \phi_a(u) T_{a,\pm}^{(i)}(u, \omega), \quad (4.5)$$

mit $\Xi_{\perp} \equiv 1$ und $\Xi_{\parallel} \equiv \frac{m_\rho}{E}$. Der erste Term beinhaltet alle formfaktorartigen Beiträge. Dabei ist ξ_a ein universeller „weicher“ Formfaktor. Der Koeffizient $C_a^{(i)}$ ist perturbativ berechenbar. Im Folgenden meinen wir diesen Koeffizienten, wenn wir von Formfak-

torkorrekturen sprechen. Der zweite Term beinhaltet sowohl die Effekte der Spektatorquarkstreuung als auch Annihilationstopologien. Mit f_D und $f_{\rho,\pm(\parallel)}$ bezeichnen wir hier die Zerfallskonstanten der Mesonen, $\phi_{D,\pm}(\omega)$ und $\phi_{\perp,\parallel}(u)$ sind die entsprechenden Lichtkegelverteilungsamplituden. Die harten Streukerne $T_{a,\pm}^{(i)}(u, \omega)$ sind ebenso wie die Formfaktorkorrekturen Objekte, die wir in der Störungstheorie berechnen können. Schon an dieser Stelle möchten wir erwähnen, dass die gluonischen Virtualitäten der Spektatorquarkstreuung von der Ordnung $\sqrt{m_D \Lambda_{\text{QCD}}} \sim 1 \text{ GeV}$ sind. Damit ist ein großer Wert der starken Kopplungskonstanten α_s sowie eine große Unsicherheit durch die Variation der Renormierungsskala assoziiert.

Außerdem definieren wir die Koeffizientenfunktionen

$$\mathcal{C}_{9,\perp}^{(i)}(q^2) \equiv \delta^{ib} C_9 + \frac{2m_c m_D}{q^2} \frac{\mathcal{T}_{\perp}^{(i)}(q^2)}{\xi_{\perp}(q^2)}, \quad \mathcal{C}_{9,\parallel}^{(i)}(q^2) \equiv \delta^{ib} C_9 - \frac{2m_c}{m_D} \frac{\mathcal{T}_{\parallel}^{(i)}(q^2)}{\xi_{\parallel}(q^2)}, \quad (4.6)$$

welche unabhängig von den Konventionen sind, die für die Renormierung der schwachen effektiven Hamiltondichte verwendet wurden. Dann können wir die zweifach-differentielle Zerfallsbreite durch diese Koeffizientenfunktionen ausdrücken und erhalten [97]

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma}{dq^2 d\cos\theta} = & \frac{G_F^2}{128\pi^3} m_D^3 S \lambda_D(q^2, m_\rho^2)^3 \left(\frac{\alpha_{\text{em}}}{4\pi}\right)^2 \times \left[\right. \\ & (1 + \cos^2\theta) \frac{2q^2}{m_D^2} \xi_{\perp}(q^2)^2 \left| \lambda_d \mathcal{C}_{9,\perp}^{(d)} + \lambda_b \mathcal{C}_{9,\perp}^{(b)} \right|^2 \\ & \left. (1 - \cos^2\theta) \left(\frac{E \xi_{\parallel}(q^2)}{m_\rho} \right)^2 \left| \lambda_d \mathcal{C}_{9,\parallel}^{(d)} + \lambda_b \mathcal{C}_{9,\parallel}^{(b)} \right|^2 \right], \quad (4.7) \end{aligned}$$

mit $S = 1$ für ρ^- und $S = 1/2$ für ρ^0 . Weiterhin ist

$$\lambda_D(q^2, m_\rho^2) = \left[\left(1 - \frac{q^2}{m_D^2}\right)^2 - \frac{2m_\rho^2}{m_D^2} \left(1 + \frac{q^2}{m_D^2}\right) + \frac{m_\rho^4}{m_D^4} \right]^{1/2}. \quad (4.8)$$

Außerdem haben wir hier benutzt, dass der Wilsonkoeffizient C_{10} im SM identisch null ist. Als Nebenbemerkung stellen wir fest, dass diese Bedingung ein Verschwinden der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie A_{FB} bezüglich des Winkels θ impliziert. Damit können wir die Observable A_{FB} als einen sogenannten Nulltest für das SM verwenden, welcher sich für die Suche nach Effekten NP eignet. Jedoch könnte die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in typischen NP-Szenarien immer noch zu klein sein, als dass

ein mögliches Experiment sensitiv darauf ist [80, 99].

Für den Zerfall in leichte pseudoskalare Mesonen können wir analoge Funktionen $\mathcal{T}_p^{(i)}$ definieren [91, 100]. Die expliziten Ausdrücke geben wir in Anhang E der Vollständigkeit halber an.

4.1.3 Resonanzeffekte

Eine hadronische Modellierung der Resonanzeffekte ist aus zwei Gründen unumgänglich. Erstens stellen die Beiträge von den Annihilationstopologien im Vergleich mit den entsprechenden B -Zerfällen keine kleine Korrektur zu der totalen Zerfallsamplitude für $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfälle dar, da diese numerisch von derselben Größenordnung sind wie die Beiträge, welche durch die naive Faktorisierung berücksichtigt werden. Diese Abschätzung ist bereits in früheren Publikationen zu finden [101, 102]. Zweitens können wir die Region kleinen Impulsübertrags, $4m_\ell^2 \leq q^2 \lesssim 1\text{-}2 \text{ GeV}^2$, nicht wie bei den analogen B -Zerfällen aus der phänomenologischen Analyse ausschließen, weil der Phasenraum für D -Zerfälle im Limes großen hadronischen Rückstoßes verglichen mit den B -Zerfällen, stark eingeschränkt ist. Die damit assoziierten parametrischen und systematischen Unsicherheiten müssen wir also sauber abschätzen.

Bei der perturbativen Berechnung der Zerfallsamplituden treten q^2 -abhängige Funktionen auf. In führender Ordnung in α_s sind das die Schleifenfunktion $h(q^2, m_q)$ und die Funktionen $\lambda_D^\pm(q^2)$, welche wir später bei der Behandlung der Annihilationstopologie definieren werden. Für die Euklidische Region, gegeben durch $-q^2 = Q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$, können wir diese Funktionen perturbativ berechnen. In der physikalischen Region, in welcher der Impulsübertrag zeitartig ist, $s = q^2 > 0$, ist die q^2 -Abhängigkeit vielmehr durch eine hadronische Spektralfunktion gegeben, welche die Resonanzeffekte mit berücksichtigt. Für eine saubere Abschätzung der hadronischen Unsicherheiten, benötigen wir also eine hadronische Beschreibung der oben erwähnten Funktionen. Um die Euklidische Region mit der physikalischen Region in Beziehung zu setzen, verwenden wir eine Dispersionsrelation, welche wir in Kapitel 2.2.5 bereits detailliert besprochen haben. Ein in der Literatur weit verbreiteter Ansatz für die Modellierung von Resonanzeffekten ist die sogenannte Vektormesondominanz (VMD) [103, 104, 105, 106, 107]. Hier nimmt man an, dass die langreichweitigen hadronischen Effekte vollständig von den tiefliegenden schmalen Vektorzuständen (ρ, ω, ϕ etc.) dominiert werden. Diese können dann durch Breit-Wigner-Resonanzen modelliert werden. In dieser Arbeit verwenden wir ein etwas komplizierteres aber dennoch stark vereinfachtes Modell. Dabei orientieren wir uns an [108, 50]. Zum einen modifizieren wir die Form der Breit-Wigner-Resonanzen für die tiefliegenden Zustände, sodass diese in Übereinklang mit einfachen Analytizitätsargumenten in führender Ordnung ist. Zum anderen berücksichtigen wir eine unendliche

Reihe von höheren Resonanzen. In diesem Rahmen behandeln wir die Schleifen- und Annihilationstopologien separat und ersetzen die oben erwähnten q^2 -abhängigen Funktionen durch unsere Modellfunktionen. Dabei beschränken wir uns bei der Modellierung der hadronischen Effekte auf die führende Ordnung in der starken Kopplungskonstanten. In der nächstführenden Ordnung in α_s ist unser vereinfachtes Modell nicht mehr gültig. An dieser Stelle weisen wir noch einmal darauf hin, dass es uns nicht um eine vollständig realistische Beschreibung der differentiellen Zerfallsbreite geht. Vielmehr ist es unser Ziel, eine grobe Abschätzung der hadronischen Unsicherheiten zu erhalten. Für eine detaillierte Beschreibung unseres hadronischen Modells verweisen wir den Leser auf Anhang F.

Die numerischen Effekte der Vektorresonanzen in seltenen semileptonischen D -Zerfällen, sind von den Effekten in den entsprechenden B -Zerfällen oder von denen in der e^+e^- -Annihilation recht verschieden. Im Folgenden beleuchten wir im Rahmen einer kurzen Auflistung diese Unterschiede.

- Der Wirkungsquerschnitt von $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen ist gemäß dem optischen Theorem durch den Imaginärteil der Schleifenfunktion gegeben.

Für seltene semileptonische Zerfälle ist die Zerfallsrate proportional zu [109]

$$|C + f|^2 = C^2 + 2C \operatorname{Re} f + |f|^2, \quad (4.9)$$

wobei C schematisch für den kurzreichweitigen Anteil steht; f entspricht einer langreichweitigen q^2 -abhängigen komplexen Funktion.

- Für B -Mesonen dominiert der kurzreichweitige Anteil C^2 . Die nächsten beiden Terme können wir als Korrekturen in f interpretieren. In diesem Fall sind wir also sensitiv auf den Realteil der langreichweitigen Funktion.
- Für D -Mesonen ist der kurzreichweitige Anteil stark unterdrückt. Der dominante Term ist daher $|f|^2$. Dies ist z. B. in Abbildung 4.5 zu erkennen.

Aus diesem Grund weist die hadronische Modifikation der Zerfallsbreite für seltene semileptonische D -Zerfälle, nicht das von den B -Zerfällen gewohnte oszillatorische Verhalten auf (siehe z. B. Abbildung 4.9). Dies hat zur Folge, dass selbst partiell über q^2 integrierte Raten eine große hadronische Unsicherheit besitzen.

4.2 Detaillierte Analyse der Zerfallstopologien

In diesem Kapitel studieren wir die einzelnen Zerfallstopologien im Detail. Wir beschäftigen uns sowohl mit den perturbativen Objekten als auch mit deren hadronischer Modifikation (mit letzterer nur in führender Ordnung α_s).

4.2.1 Naive Faktorisierung

In der führenden Ordnung der starken Kopplungskonstanten, naive Faktorisierung genannt, tragen nur die Operatoren $\mathcal{O}_{7,9,10}$ bei. Deren hadronische Matrixelemente können wir zunächst durch die vollen Vektor-, Axialvektor- und Tensorformfaktoren für $D \rightarrow \rho$ Übergänge parametrisieren [66]. Im Limes eines großen hadronischen Rückstoßes können wir die vollen Formfaktoren dann auf die weichen Formfaktoren aus Gleichung (4.3) reduzieren,

$$\begin{aligned}\xi_{\perp}(q^2) &\equiv \frac{m_D}{m_D + m_{\rho}} V(q^2), \\ \xi_{\parallel}(q^2) &\equiv \frac{m_D(m_D + m_{\rho})}{m_D^2 - q^2} A_1(q^2) - \frac{m_D - m_{\rho}}{m_D} A_2(q^2).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Hier bezeichnen $V(q^2)$ den Vektorformfaktor und $A_{1,2}(q^2)$ die Axialvektorformfaktoren. Für die Formfaktoren sind verschiedene Parametrisierungen in der Literatur zu finden. Mithilfe von SCET/QCDF auf Baumgrapheniveau ergibt sich das naive Skalierungsverhalten für die weichen Formfaktoren [66],

$$\xi_{\perp}(q^2) \simeq \frac{\xi_{\perp}(0)}{(1 - q^2/m_D^2)^2}, \quad \xi_{\parallel}(q^2) \simeq \frac{\xi_{\parallel}(0)}{(1 - q^2/m_D^2)^3}.\quad (4.11)$$

In [110] wurde eine Parametrisierung für die q^2 -Abhängigkeit der vollen Formfaktoren vorgeschlagen,

$$A_{1,2}(q^2) = \frac{A_{1,2}(0)}{1 - b'x}, \quad V(q^2) = \frac{V(0)}{(1 - x)(1 - ax)},\quad (4.12)$$

mit $x = q^2/M_{D^*}^2$ und $a = 0,55$, $b' = 0,69$. Mittels Gleichung (4.10) erhalten wir daraus die q^2 -Abhängigkeit der weichen Formfaktoren. Die Normierung der vollen Formfaktoren bei $q^2 = 0$ wurde von der CLEO-Kollaboration experimentell bestimmt [111] (siehe dazu Tabelle 4.1). In Abbildung 4.3 haben wir die q^2 -Abhängigkeit der beiden obigen Parametrisierungen nebeneinandergestellt. Wie wir der Abbildung entnehmen können,

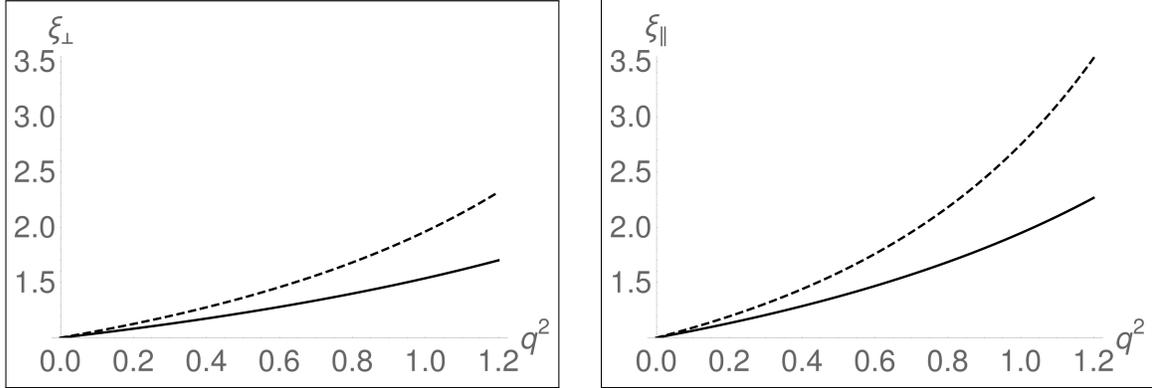


Abbildung 4.3: Abhängigkeit der $D \rightarrow \rho$ Übergangsformfaktoren als Funktion des Impulsübertrags q^2 (in Einheiten von GeV^2 , normiert auf $q^2 = 0$), gemäß Gleichung (4.11) [gestrichelte Linie], verglichen mit der Parametrisierung aus [110] [durchgehende Linie]. Entnommen aus [A3].

liefert das naive Skalierungsverhalten einen etwas zu steilen Anstieg. Daher verwenden wir für die numerische Analyse in dieser Arbeit die Parametrisierung aus Gleichung (4.12).

4.2.1.1 Korrekturen zu den $D \rightarrow \rho$ Formfaktoren im Limes eines großen hadronischen Rückstoßes

In angepasster Notation aus [91, 97] sind die faktorisierbaren Formfaktorkorrekturen durch [97]

$$C_{\perp}^{(f,b)} = C_7^{\text{eff}} \left(\ln \frac{m_c^2}{\mu^2} - L + \Delta M \right), \quad C_{\parallel}^{(f,b)} = -C_7^{\text{eff}} \left(\ln \frac{m_c^2}{\mu^2} + 2L + \Delta M \right), \quad (4.13)$$

gegeben, wohingegen $C_{\perp,\parallel}^{(f,d)} = 0$ ist. Dabei ist

$$L = -\frac{m_c^2 - q^2}{q^2} \ln \left(1 - \frac{q^2}{m_c^2} \right), \quad (4.14)$$

und ΔM hängt von der Konvention ab, die man für die Definition der Charm-Quarkmasse zugrunde legt. In dieser Arbeit verwenden wir der Einfachheit halber das $\overline{\text{MS}}$ -Schema. In diesem Schema ist $\Delta M = 0$.

Die faktorisierbaren Spektatorkorrekturen sind in unserer Konvention für die weichen

$D \rightarrow \rho$ Formfaktoren gegeben durch

$$T_{\perp,+}^{(\ell,b)} = T_{\parallel,+}^{(\ell,b)} = C_7^{\text{eff}} \frac{4m_D}{\bar{u}E}, \quad (4.15)$$

und es gilt $T_{a,-}^{(\ell,b)} = 0$ sowie $T_{a,\pm}^{(\ell,d)} = 0$ im Limes eines großen hadronischen Rückstoßes.

4.2.2 Quarkschleifentopologien (ohne Spektatoreffekte)

Wenn wir zwei der Quarklinien eines Vierquarkoperators zu einer Schleife verbinden und von dieser ein virtuelles Photon abstrahlen, erhalten wir einen Beitrag zu dem effektiven Wilsonkoeffizienten aus Gleichung (4.6) gemäß

$$C_{\perp}^{(0,i)} = \delta^{ib} C_7^{\text{eff}} + \frac{q^2}{2m_c m_D} Y^{(i)}(q^2), \quad C_{\parallel}^{(0,i)} = -\delta^{ib} C_7^{\text{eff}} - \frac{m_D}{2m_c} Y^{(i)}(q^2). \quad (4.16)$$

Die Funktionen $Y^{(i)}(q^2)$ haben wir bereits in den Gleichungen (3.19) und (3.20) eingeführt. Zu der Funktion $Y^{(d)}(q^2)$ machen wir zwei Bemerkungen. Erstens verschwindet die Funktion in dem Limes $m_s \rightarrow m_{u,d} \simeq 0$. Zweitens verhält sich die Kombination von Wilsonkoeffizienten ($\frac{4}{3}C_1 + C_2$), die in dieser Funktion auftaucht, für Skalen von der Größenordnung der Charm-Quarkmasse störungstheoretisch äußerst ungünstig. In Abbildung 4.4 haben wir diesen Effekt illustriert. Es fällt auf, dass die Kurven für die führende und nächstführende Ordnung in α_s um einen großen Abstand zueinander verschoben sind; die Steigung ist nahezu identisch. Diese Kombination von Wilsonkoeffizienten besitzt also große Korrekturen höherer Ordnung. Nun sollten die dominanten Beiträge der Quarkschleifen gerade von der Funktion $Y^{(d)}(q^2)$ herrühren, weil die Funktion $Y^{(b)}(s)$ CKM-unterdrückt ist. Daher könnte die Kombination ($\frac{4}{3}C_1 + C_2$) zu einem negativen Konvergenzverhalten physikalischer Größen beitragen. An dieser Stelle verweisen wir noch auf die Diskussion zu Abbildung 4.6.

Die Quarkschleifentopologie involviert die Funktion $h(q^2, m_q)$, welche wir für zeitartige q^2 durch ihr hadronisches Gegenstück ersetzen müssen. Um die Resonanzeffekte zu berücksichtigen führen wir die Ersetzung

$$h(q^2, m_q) \rightarrow h(-\sigma^2, m_q) + \frac{4}{9} \int_0^\infty ds \frac{\sigma^2 + q^2}{\sigma^2 + s} \frac{j_q(s)}{s - q^2 - i\varepsilon}, \quad (m_{u,d} = 0, m_s) \quad (4.17)$$

durch. Die genaue Form der Spektralfunktion $j_q(s)$, welche die Effekte der hadronischen Vektorresonanzen mit den entsprechenden Quantenzahlen modelliert, sowie die

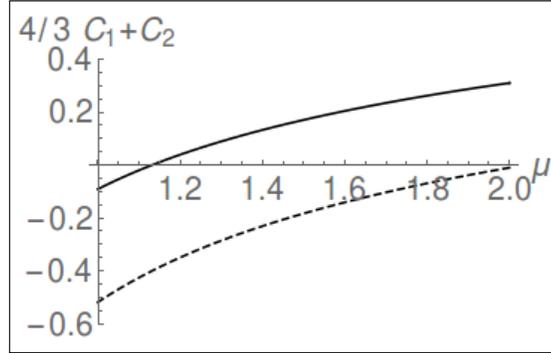


Abbildung 4.4: Kombination der Wilsonkoeffizienten ($\frac{4}{3}C_1 + C_2$) als Funktion der Renormierungsskala μ (in Einheiten von GeV) in LL (gestrichelte Linie) und NLL (durchgehende Linie). Entnommen aus [A3].

Bedeutung des Parameters σ^2 ist in Anhang F gegeben. Der Einfachheit halber unterscheiden wir hier nicht zwischen ρ - und ω -Mesonen und setzen $m_u = m_d = 0$. Zudem ist für das perturbative Ergebnis von $h(s, m_c)$ wegen $q^2 < 4m_c^2$ keine Modifikation nötig.

In der Funktion $Y^{(d)}(q^2)$ taucht die Differenz $h(s, m_s) - h(s, m_d)$ auf. Wir erwarten, dass die Auswirkung des GIM-Mechanismus auf diese Differenz in der perturbativen Beschreibung und in der hadronischen Beschreibung voneinander verschieden ist. In Abbildung 4.5 illustrieren wir den Effekt des Resonanzmodells auf die Differenz $[h(q^2, m_s) - h(q^2, m_d)]$ für kleine q^2 (relevant für $D \rightarrow \rho$ Zerfälle) und vergleichen diesen mit dem perturbativen Ergebnis. Wie wir sehen, werden weder das Vorzeichen noch die Größenordnung, noch die Form des hadronischen Modells durch das perturbative Ergebnis reproduziert (trotz der Tatsache, dass man für $q^2 < 0$ nach Konstruktion eine nahezu perfekte Übereinstimmung hat, siehe Abbildungen F.1 und F.2 in Anhang F).

4.2.2.1 Nichtfaktorisiere $c \rightarrow u$ Formfaktorkorrekturen

Die nichtfaktorisierbaren Formfaktorkorrekturen können wir durch die q^2 -abhängigen kurzreichweitigen Funktionen $F_i^{(j)}$ ausdrücken [91, 97]

$$C_F C_{\perp}^{(\text{nf}, i)} = - \left(-C_1 (F_1^{(7)} - \delta_{id} F_{1,d}^{(7)}) - C_2 (F_2^{(7)} - \delta_{id} F_{2,d}^{(7)}) + \delta_{ib} C_8^{\text{eff}} F_8^{(7)} - \frac{q^2}{2m_c m_D} \left[C_1 (F_1^{(9)} - \delta_{id} F_{1,d}^{(9)}) + C_2 (F_2^{(9)} - \delta_{id} F_{2,d}^{(9)}) - \delta_{ib} C_8^{\text{eff}} F_8^{(9)} \right] \right),$$

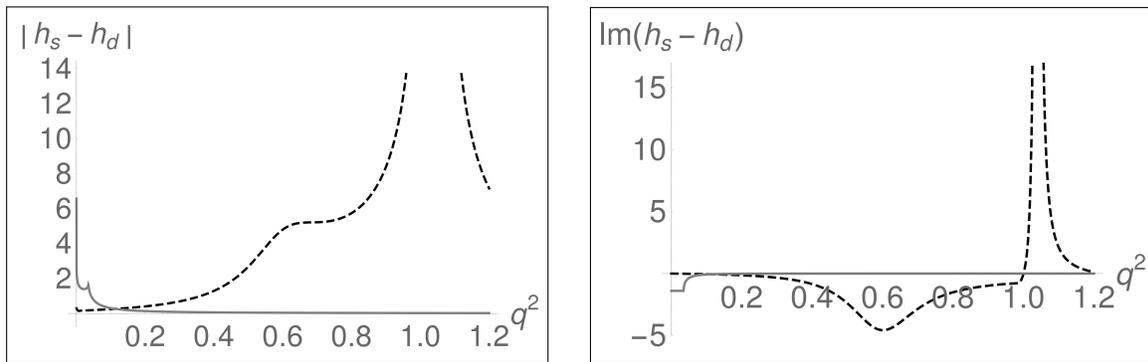


Abbildung 4.5: Vergleich des perturbativen Ergebnisses für den Absolutbetrag und den Imaginärteil der Funktion $h(q^2, m_s) - h(q^2, m_d)$ (graue durchgehende Linie) mit dem Modell (4.17) für dessen hadronische Modifikation (schwarze gestrichelte Linie), als eine Funktion des Impulsübertrags q^2 (in Einheiten von GeV^2). Die Parameterwerte sind wie folgt gewählt. Für die Modellierung der d -Quarkschleife ($m_d = 0$), verwenden wir $\sigma^2 = 2 \text{ GeV}^2$, $a = 1$, $b = 1/6$. Für die s -Quarkschleife ($m_s = 100 \text{ MeV}$), benutzen wir $\sigma_s^2 = 2 \text{ GeV}^2$, $a_s = 1,4$, $b_s = 0,1$. Die Parameter $n_V = 1,94$ und $n_\phi = 2,37$ sind so adjustiert, dass das perturbative Ergebnis für $h(q^2, m_{s/d})$ in dem Limes $q^2 \rightarrow -\infty$ reproduziert wird. Für Details, siehe Anhang F. Entnommen aus [A3].

$$C_F C_{\parallel}^{(\text{nf},i)} = - \left(C_1(F_1^{(7)} - \delta_{id}F_{1,d}^{(7)}) + C_2(F_2^{(7)} - \delta_{id}F_{2,d}^{(7)}) - \delta_{ib}C_8^{\text{eff}}F_8^{(7)} + \frac{m_D}{2m_c} \left[C_1(F_1^{(9)} - \delta_{id}F_{1,d}^{(9)}) + C_2(F_2^{(9)} - \delta_{id}F_{2,d}^{(9)}) - \delta_{ib}C_8^{\text{eff}}F_8^{(9)} \right] \right). \quad (4.18)$$

Wie wir aus der Gleichung (4.18) ersehen können, haben wir nur die Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}$ berücksichtigt. Die Beiträge der QCD-Pinguinoperatoren sind bisher nicht bekannt. Wegen der Kleinheit ihrer Wilsonkoeffizienten sollten die Beiträge aber zu vernachlässigen sein. Im Folgenden legen wir im Rahmen einer Auflistung dar, wie wir die Funktionen $F_i^{(j)}$ aus den von dem Übergang $b \rightarrow (s, d)\gamma^*$ bekannten Ergebnissen ableiten können.

- Die Funktionen $F_8^{(7)}$ und $F_8^{(9)}$ erhalten wir durch Ersetzung der entsprechenden Ladungsfaktoren (das entspricht einer Multiplikation mit Q_u/Q_d , wobei $Q_{u,d}$ die jeweiligen Ladungsfaktoren für Up- und Down-Quarks sind).
- Um die Funktionen $F_{1,d}^{(7)}, F_{1,d}^{(9)}, F_{2,d}^{(7)}$ und $F_{2,d}^{(9)}$ zu erhalten, müssen wir zunächst zu den nackten (d. h. unrenormierten) Funktionen aus den b -Zerfällen [98] zurückgehen, die Ladungsfaktoren ersetzen und die Funktionen dann renormieren. Im Anhang C haben wir einige Details dazu festgehalten.
- Die Ergebnisse für die Funktionen $F_1^{(7)}, F_1^{(9)}, F_2^{(7)}$ und $F_2^{(9)}$ mit allgemeinen Ladungsfaktoren konnten wir aus Mathematica-Notebooks extrahieren, die uns Christoph Greub freundlicherweise zur Verfügung gestellt hat (verbunden mit der Arbeit in [112]).
- Für den Limes $q^2 \rightarrow 0$ können wir die relevanten Funktionen $F_1^{(7)}$ und $F_2^{(7)}$ direkt aus [113] extrahieren.

In Kapitel 4.2.2 haben wir gesehen, dass die Quarkschleifentopologie in führender Ordnung eine starke Abhängigkeit von der Renormierungsskala aufweist, was auf ein ungünstiges perturbatives Verhalten der Kombination von Wilsonkoeffizienten ($\frac{4}{3}C_1 + C_2$) zurückzuführen ist. Erwartungsgemäß sollte die Korrektur aus Gleichung (4.18) eine Verbesserung dieser Situation schaffen. Um diesen Effekt zu untersuchen haben wir in Abbildung 4.6 den Beitrag der Quarkschleifentopologie zu dem über das Intervall $0,5 \text{ GeV}^2 \leq q^2 \leq 0,7 \text{ GeV}^2$ integrierten Verzweigungsverhältnis, in Abhängigkeit der Skala μ dargestellt. Die Effekte der Annihilations- und Spektortopologien können wir dabei ignorieren, weil sie eine unabhängige Skalenabhängigkeit induzieren. Außerdem haben wir zusätzlich den CKM-unterdrückten Beitrag vernachlässigt. Wir sehen, dass die Korrektur der nächstführenden Ordnung den Beitrag der führenden Ordnung dominiert. Auf der einen Seite spielt das Skalenverhalten der führenden Ordnung auf

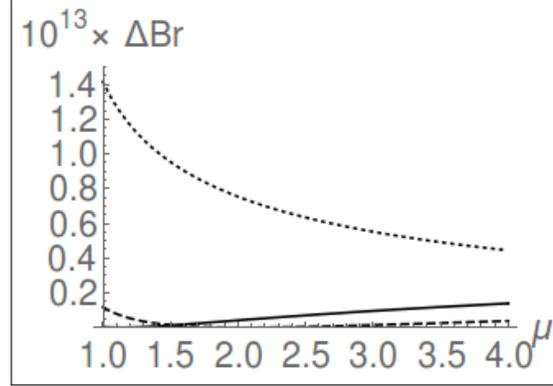


Abbildung 4.6: Beitrag der Quarkschleifentopologie zu dem differentiellen Verzweigungsverhältnis, integriert über einen q^2 -Bin $[0, 5; 0, 7]$ GeV^2 , als Funktion der Renormierungsskala μ (in Einheiten von GeV), eingeschränkt auf die Beiträge proportional zu λ_d . Das LO Ergebnis mit LL (NLL) Wilsonkoeffizienten ist als gestrichelte (durchgehende) Linie gezeigt. Die NLO Beiträge mit NLL Wilsonkoeffizienten sind als gepunktete Linie dargestellt. Entnommen aus [A3].

diesem Level also keine Rolle mehr. Auf der anderen Seite aber spricht dies für ein schlechtes Konvergenzverhalten der Störungsreihe.

4.2.3 Annihilation

Der führende Beitrag der Annihilation stammt von der Topologie, bei der das virtuelle Photon von dem leichten Quark im D -Meson abgestrahlt wird (für $m_c \rightarrow \infty$). Die Beiträge sind deshalb von dem Ladungsfaktor e_q des Spektatorquarks abhängig. Wiederum passen wir die Resultate des B -Sektors an und erhalten

$$\begin{aligned}
 m_c T_{\parallel,-}^{(0,b)} &= -e_q \frac{4m_D^2 \omega}{m_D \omega - q^2 - i\varepsilon} (\delta_{qd} - \delta_{qu}) \left[C_3 + \frac{4}{3} (C_4 + 12 C_5 + 16 C_6) \right], \\
 m_c T_{\parallel,-}^{(0,d)} &= e_q \frac{4m_D^2 \omega}{m_D \omega - q^2 - i\varepsilon} \left[\delta_{qd} 3C_2 + \delta_{qu} \left(\frac{4}{3} C_1 + C_2 \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Weil der Beitrag von $T_{\parallel,-}^{(0,b)}$ CKM-unterdrückt ist, erwarten wir, dass

- der Annihilationsbeitrag für geladene D -Mesonzerfälle ($q = d$) durch den Wilsonkoeffizienten C_2 bestimmt wird. Die geladene Mode sollte also von der Annihilationstopologie dominiert sein.

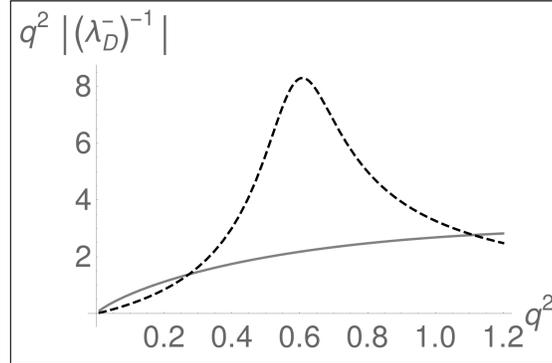


Abbildung 4.7: Vergleich des perturbativen Ergebnisses für den Absolutbetrag der Funktion $(\lambda_D^-(q^2))^{-1}$ (masseloser Spektator, graue durchgehende Linie) mit dem Modell (4.21) für dessen hadronische Modifikation (schwarze gestrichelte Linie). Es ist zu beachten, dass das Ergebnis mit q^2 multipliziert wurde (in Einheiten von GeV^2). Die Parameterwerte sind wie folgt gewählt: $\sigma^2 = 2 \text{ GeV}^2$, $a = 1$, $b = 1/6$. Die D -Meson LCDA wird durch eine Exponentialfunktion modelliert (F.26) mit $\omega_0 = 0,45 \text{ GeV}$. Der Parameter $n_V = 2,40$ ist so adjustiert, dass das Ergebnis für tiefes Euklidisches q^2 reproduziert wird. Für Details, siehe Anhang F. Entnommen aus [A3].

- der Annihilationsbeitrag für die neutrale Mode ($q = u$) sich genau so verhält, wie der Beitrag der Quarkschleifentopologie, weil dieselbe Kombination von Wilsonkoeffizienten ($\frac{4}{3}C_1 + C_2$) auftaucht. Beide Topologie sollten also mit einer ähnlichen Größenordnung beitragen.

Strahlungskorrekturen zur Annihilationstopologie sind bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht berechnet worden. Aus diesem Grund können wir diese in unsere Analyse nicht miteinbeziehen. Wir erwarten daher eine verstärkte Abhängigkeit der entsprechenden Beiträge von der Renormierungsskala.

Die Propagatoren der Annihilationstopologie beinhalten zeitartige Virtualitäten. Zudem werden wir sehen, dass diese Topologie große Beiträge zu der Zerfallsbreite liefert. Aus diesem Grund müssen wir die damit verbundenen Resonanzeffekte modellieren. Bei der Faltung von Gleichung (4.19) mit der Lichtkegelverteilungsamplitude des D -Mesons tritt die q^2 -abhängige Funktion

$$(\lambda_D^-(q^2))^{-1} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega - q^2/m_D - i\varepsilon} \phi_D^-(\omega), \quad (4.20)$$

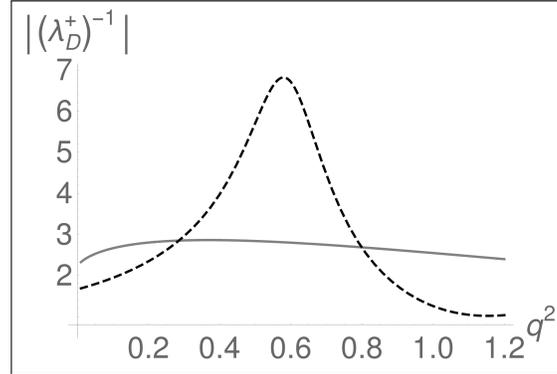


Abbildung 4.8: Vergleich des perturbativen Ergebnisses für den Absolutbetrag der Funktion $(\lambda_D^+(q^2))^{-1}$ (masseloser Spektator, graue durchgehende Linie) mit dem Modell (4.24) für dessen hadronische Modifikation (schwarze gestrichelte Linie). Die Parameterwerte sind wie folgt gewählt: $\sigma^2 = 2 \text{ GeV}^2$, $a = 1$, $b = 1/6$. Die D -Meson LCDA ist durch eine Exponentialfunktion modelliert mit $\omega_0 = 0,45 \text{ GeV}$. Der Parameter $n_V = 1,75$ ist so adjustiert, dass das Ergebnis für tiefes Euklidisches q^2 reproduziert wird. Für Details, siehe Anhang F. Entnommen aus [A3].

auf. Wir bemerken, dass der Grenzwert $q^2 \rightarrow 0$ für die Gleichung (4.20) nicht existiert. Damit ist die QCDF nur für hart-kollineare Werte des Impulsübertrags $q^2 \sim \mathcal{O}(\Lambda m_D) \sim 1 \text{ GeV}^2$ anwendbar. Für die Berücksichtigung von Resonanzeffekten führen wir analog zu den Beiträgen der Quarkschleifentopologie die Ersetzung

$$(\lambda_D^-(q^2))^{-1} \rightarrow \int_0^\infty \frac{ds}{s - q^2 - i\varepsilon} \phi_D^-(s/m_D) j_q(s), \quad (4.21)$$

durch. In Abbildung 4.7 haben wir den Betrag von $[\lambda_D^-(q^2)]^{-1}$ für das perturbative Ergebnis und das hadronische Modell dargestellt. Für weitere Details verweisen wir auf Anhang F.2.

4.2.3.1 Power-Korrekturen der Ordnung $1/m_D$

Die führenden Beiträge der transversalen Amplitude der Annihilation sind mit $1/m_D$ unterdrückt. Aus dem B -Mesonsektor ist jedoch bekannt, dass diese Beiträge numerisch durchaus relevant sind [114, 115, 116, 117, 97]. Aus diesem Grund finden sie in unsere

Analyse Eingang. Durch Anpassung der Ergebnisse aus der B -Physik erhalten wir

$$\begin{aligned}
m_c T_{\perp,+}^{(0,b)} &= -e_q \frac{4\omega}{\bar{u} + us/m_D^2} (\delta_{qd} - \delta_{qu}) \left[C_3 + \frac{4}{3} (C_4 + 3C_5 + 4C_6) \right] \\
&\quad + e_q \frac{2f_{\parallel}}{f_{\perp}} \frac{M_V}{1 - s/m_D^2} \frac{m_D \omega}{m_D \omega - s - i\varepsilon} (\delta_{qd} - \delta_{qu}) \left[C_3 + \frac{4}{3} (C_4 + 12C_5 + 16C_6) \right], \\
m_c T_{\perp,+}^{(0,d)} &= -e_q \frac{2f_{\parallel}}{f_{\perp}} \frac{M_V}{1 - s/m_D^2} \frac{m_D \omega}{m_D \omega - s - i\varepsilon} \left[\delta_{qd} 3C_2 + \delta_{qu} \left(\frac{4}{3} C_1 + C_2 \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Bei der Faltung von Gleichung (4.22) mit $\phi_D^+(\omega)$ tritt die q^2 -abhängige Funktion

$$(\lambda_D^+(q^2))^{-1} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - q^2/m_D - i\varepsilon} \phi_D^+(\omega), \tag{4.23}$$

auf. Deren Grenzwert $q^2 \rightarrow 0$ existiert und beschreibt den weichen Beitrag zu dem $D \rightarrow \gamma$ Formfaktor. Hadronischen Effekten tragen wir durch die Ersetzung

$$(\lambda_D^+(q^2))^{-1} \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{ds}{s - q^2 - i\varepsilon} \phi_D^+(s/m_D) j_q(s), \tag{4.24}$$

Rechnung. Der numerische Effekt ist in Abbildung 4.8 illustriert. Für weitere Details verweisen wir den Leser wieder auf den Anhang F.2.

4.2.4 Nichtfaktorisiere Spektatorstreuung

Nichtfaktorisiere Spektatoreffekte rühren von hadronischen Matrixelementen mit den Operatoren $\mathcal{O}_{1-6,8}$ her, wobei das Spektatorquark in dem $D \rightarrow \rho$ Übergang an dem kurzreichweitigen Streuungsprozess teilnimmt. Die Beiträge entnehmen wir [91, 97] und passen sie für die $c \rightarrow u$ Übergänge mithilfe von Anhang D an. Die harten Streukerne sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
T_{\perp,+}^{(\text{nf},b)} &= -\frac{4Q_u C_8^{\text{eff}}}{u + \bar{u}s/m_D^2} \\
&\quad + \frac{m_D}{2m_c} \left[Q_u (t_{\perp}(u, m_c) + t_{\perp}(u, m_u)) \left(C_3 - \frac{1}{6} C_4 + 16 C_5 + \frac{10}{3} C_6 \right) \right. \\
&\quad \left. - Q_u t_{\perp}(u, m_c) \frac{4m_c}{m_D} \left(C_3 - \frac{1}{6} C_4 + 4 C_5 - \frac{2}{3} C_6 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ Q_d t_{\perp}(u, m_s) \left(C_2 - \frac{1}{6} C_1 + 6 C_6 \right) + Q_d t_{\perp}(u, m_d) 6 C_6 \Big], \quad (4.25)$$

und

$$T_{\parallel,+}^{(\text{nf},b)} = \frac{m_D}{m_c} \left[Q_u (t_{\parallel}(u, m_c) + t_{\parallel}(u, m_u)) \left(C_3 - \frac{1}{6} C_4 + 16 C_5 + \frac{10}{3} C_6 \right) \right. \\ \left. + Q_d t_{\parallel}(u, m_s) \left(C_2 - \frac{1}{6} C_1 + 6 C_6 \right) + Q_d t_{\parallel}(u, m_d) 6 C_6 \right], \quad (4.26)$$

zusammen mit

$$T_{\perp,+}^{(\text{nf},d)} = Q_d \frac{m_D}{2m_c} \left(C_2 - \frac{1}{6} C_1 \right) (t_{\perp}(u, m_s) - t_{\perp}(u, m_d)), \quad (4.27)$$

$$T_{\parallel,+}^{(\text{nf},d)} = Q_d \frac{m_D}{m_c} \left(C_2 - \frac{1}{6} C_1 \right) (t_{\parallel}(u, m_s) - t_{\parallel}(u, m_d)), \quad (4.28)$$

und

$$T_{\parallel,-}^{(\text{nf},i)} = e_q \frac{m_D \omega}{m_D \omega - s - i\varepsilon} \left[\delta^{ib} \frac{8C_8^{\text{eff}}}{\bar{u} + us/m_D^2} + \frac{6m_D}{m_c} F_V^{(i)}(\bar{u}m_D^2 + us) \right]. \quad (4.29)$$

Dabei sind die Quarkschleifenfunktionen, die die relevanten Subdiagramme beschreiben, gegeben durch

$$F_V^{(b)}(s) = (h(s, m_c) + h(s, m_u)) \left(C_3 + \frac{5}{6} C_4 + 16 C_5 + \frac{22}{3} C_6 \right) \\ + h(s, m_s) \left(C_2 - \frac{1}{6} C_1 + C_4 + 10 C_6 \right) \\ + h(s, m_d) (C_4 + 10 C_6) + \frac{8}{9} \left(2 C_4 - \frac{16}{5} C_5 + \frac{128}{15} C_6 \right), \quad (4.30)$$

$$F_V^{(d)}(s) = \left(C_2 - \frac{1}{6} C_1 \right) (h(s, m_s) - h(s, m_d)). \quad (4.31)$$

Die Funktionen $t_{\perp,\parallel}(u, m_q)$ und die Definition von C_8^{eff} sind in [91] zu finden.

Die CKM-begünstigten Amplituden $T_{\perp,+}^{(\text{nf},d)}$ sind wiederum GIM-unterdrückt. Daher berücksichtigen wir auch hier Korrekturen der Ordnung $1/m_D$ zu der transversalen

Amplitude. Erneut bedienen wir uns der Ergebnisse aus der B -Physik und erhalten

$$\begin{aligned}
T_{\perp,+}^{(0,i)} &= 4e_q \delta^{ib} C_8^{\text{eff}} \frac{\omega}{m_D} \left(\frac{1}{\bar{u} + us/m_D^2} + \frac{1}{(\bar{u} + us/m_D^2)^2} \right) \\
&+ 6e_q \frac{\omega}{m_c(\bar{u} + us/m_D^2)} F_V^{(i)}(\bar{u}m_D^2 + us) \\
&- 3e_q \frac{M_V}{m_c(1 - s/m_D^2)} \frac{f_{\parallel}}{f_{\perp}\phi_{\perp}(u)} \frac{m_D \omega}{m_D \omega - s - i\varepsilon} F_V^{(i)}(\bar{u}m_D^2 + us) \int_0^u dv \frac{\phi_{\parallel}(v)}{v}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Der zweite Term in der ersten Zeile von Gleichung (4.32) ist für $u \rightarrow 1$ logarithmisch divergent. Dies zeigt an, dass die QCDF für Matrixelemente mit \mathcal{O}_8 in der nächstführenden Ordnung der $1/m_D$ -Entwicklung zusammenbricht. Um diese Divergenz zu regularisieren ersetzen wir die obere Integrationsgrenze durch $1 - \Lambda_h/m_D$, wobei $\Lambda_h = 0,5$ GeV eine typische hadronische Skala ist [97, 117].

4.3 Numerische Ergebnisse

Nach dem theoretischen Teil sind wir nun an dem Punkt angelangt, numerische Resultate zu präsentieren. Die Gegenstände unserer Betrachtung sind dabei

1. die einzelnen Beiträge zu den Koeffizientenfunktionen $\mathcal{C}_{9,\perp}$ und $\mathcal{C}_{9,\parallel}$,
2. die differentiellen Zerfallsraten,
3. und die Verhältnisse von transversalen und longitudinalen Zerfallsraten.

Von den beiden letzteren analysieren wir zudem über verschiedene Bins Δq^2 integrierte Größen, inklusive deren parametrischen und hadronischen Unsicherheiten. Bei den parametrischen Unsicherheiten beschränken wir uns auf deren dominanten Quellen, die Renormierungsskala μ und der LCDA-Parameter ω_0 , der den Durchschnittswert des Impulses des Spektatorquarks im D -Meson beschreibt. Die wichtigsten hadronischen Inputparameter sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Für den Parameter ω_0 gibt es im Gegensatz zu den analogen B -Zerfällen [118, 119] praktisch keine theoretische oder phänomenologische Information. Daher haben wir für diesen einen ad-hoc Wert mit einer konservativen Unsicherheit gewählt. Dieser Wert entspricht unserer naiven Erwartung aufgrund der Heavy-Quark-Symmetrie. Alle übrigen für die numerische Analyse benötigten Parameter sind in Tabelle 4.2 zusammengetragen.

$A_1(0)$	$0,56 \pm 0,01_{-0,03}^{+0,02}$	[111]
$A_2(0)$	$0,47 \pm 0,06_{-0,04}^{+0,04}$	[111]
$V(0)$	$0,84 \pm 0,09_{-0,06}^{+0,05}$	[111]
$f_{\rho,\parallel}$	$209 \pm 1 \text{ MeV}$	[22]
$f_{\rho,\perp}(1 \text{ GeV})$	$165 \pm 9 \text{ MeV}$	[120]
$a_2(\rho)_{\perp,\parallel}(1 \text{ GeV})$	$0,15 \pm 0,07$	[120]
f_D	$209 \pm 3 \text{ MeV}$	[121]
ω_0	$450 \pm 150 \text{ MeV}$	(ad-hoc)

Tabelle 4.1: Zusammenfassung der wichtigsten hadronischen Inputwerte. Entnommen aus [A3].

α_{em}	1/137	m_ρ	0,775 GeV
$\bar{m}_c(\bar{m}_c)$	1,275 GeV	Γ_ρ	0,149 GeV
$\bar{m}_s(2 \text{ GeV})$	93,5 MeV	m_ϕ	1,019 GeV
M_{D^\pm}	1,870 GeV	Γ_ϕ	4,26 MeV
M_{D^0}	1,865 GeV	m_K	0,497 GeV
τ_{D^\pm}	1,04 ps	λ	0,22506
τ_{D^0}	0,41 ps	A	0,811
$M_{D^{*\pm}}$	2,010 GeV	$\bar{\rho}$	0,124
$M_{D^{*0}}$	2,007 GeV	$\bar{\eta}$	0,356

Tabelle 4.2: Zusammenfassung von Inputwerten, die nicht in Tabelle 4.1 angegeben sind. Alle Werte sind aus [22] entnommen. (Dabei sind λ , A , $\bar{\rho}$, $\bar{\eta}$ die Wolfensteinparameter für die CKM-Matrix.) Entnommen aus [A3].

4.3.1 Detaillierte Aufschlüsselung der Beiträge zu $\mathcal{C}_{9,\perp}$ und $\mathcal{C}_{9,\parallel}$

Um eine Vorstellung davon zu bekommen, mit welcher Größenordnung die einzelnen Zerfallstopologien zu den Koeffizientenfunktionen $\mathcal{C}_{9,\perp}(q^2)$ und $\mathcal{C}_{9,\parallel}(q^2)$ beitragen, haben wir die einzelnen Beiträge in den Tabellen 4.3 und 4.4 stellvertretend für den Wert $q^2 = 0,5 \text{ GeV}^2$ festgehalten. Im Rahmen einer Auflistung stellen wir das Folgende fest:

- Der Beitrag von dem Wilsonkoeffizienten C_9 ist stark unterdrückt. Dies ist zum einen auf den GIM-Mechanismus zurückzuführen. Zum anderen tritt dieser Koeffizient in einem Produkt mit der CKM-Struktur $\lambda_b \ll \lambda_d$ auf.

Da alle Beiträge $\propto \lambda_b$ unterdrückt sind, beschränken wir uns bei den folgenden Kommentaren auf die Beiträge $\propto \lambda_d$.

-
- Für die neutrale Zerfallsmode tragen - zumindest für den betrachteten Wert von q^2 - die nichtfaktorisierten Formfaktorkorrekturen (FFnf) und die Annihilation (Ann) mit derselben Größenordnung bei. Auch die nichtfaktorisierten Spektatoreffekte (Speknf) und die im Fall eines transversal polarisierten Vektormesons auftretenden Power-Korrekturen der Annihilation ($1/M$ Ann), liefern einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag.
 - Die geladene Zerfallsmode wird vollständig von den Beiträgen der Annihilations-topologie (Ann) dominiert. Für den Fall eines transversal polarisierten Vektormesons sind wiederum die Power-Korrekturen der Annihilation ($1/M$ Ann) numerisch relevant. Insbesondere an dieser Stelle sollten wir uns nochmal vor Augen führen, dass die α_s -Korrekturen zur Annihilation nicht berücksichtigt wurden, weil diese noch nicht bekannt sind.

Zerfall	Beitrag	$\propto \lambda_b$	$\propto \lambda_d$
$D^0 \rightarrow \rho_{\perp}^0 \ell^+ \ell^-$	C_9	-0,445	0
	FFf	$0,186 - 0,252i$	$-0,006 + 0,000i$
	FFnf	$1,373 + 1,254i$	$0,071 - 0,044i$
	Spekf	0,071	0
	Speknf	$-0,114 + 0,009i$	$-0,013 + 0,009i$
	$1/M$ Ann	$-0,191 + 0,209i$	$-0,271 - 0,372i$
	$1/M$ Spek	$0,243 + 0,082i$	$0,002 - 0,006i$
$\mathcal{C}_{9,\perp}$	Summe	$1,123 + 1,302i$	$-0,217 - 0,413i$
$D^0 \rightarrow \rho_{\parallel}^0 \ell^+ \ell^-$	C_9	-0,445	0
	FFf	$-0,106 - 0,252i$	$-0,006 + 0,000i$
	FFnf	$0,267 + 0,570i$	$0,029 + 0,020i$
	Ann	$-0,050 + 0,206i$	$0,088 - 0,366i$
	Spekf	-0,027	0
	Speknf	$0,146 + 0,019i$	$-0,008 + 0,004i$
$\mathcal{C}_{9,\parallel}$	Summe	$-0,215 + 0,543i$	$0,103 - 0,342i$

Tabelle 4.3: Aufschlüsselung der individuellen Beiträge zu den Koeffizientenfunktionen $\mathcal{C}_{9,\perp}$ und $\mathcal{C}_{9,\parallel}$ in NLO für die neutrale Zerfallsmode, $D^0 \rightarrow \rho^0 \ell^+ \ell^-$ bei $q^2 = 0,5 \text{ GeV}^2$. Die Renormierungsskala wurde auf $\mu = 1,5 \text{ GeV}$ gesetzt. Alle anderen Inputparameter wurden auf ihren Standardwert gesetzt. Hier bezeichnet C_9 den rein kurzreichweitigen Beitrag. Außerdem geben wir eine Auflistung der faktorisierten (FFf) und nichtfaktorisierten (FFnf) Formfaktorkorrekturen, der Annihilation (Ann) in führender Ordnung $1/m_D$, der faktorisierten (Spekf) und nichtfaktorisierten (Speknf) Spektatorwechselwirkungen in führender Ordnung $1/m_D$, sowie der Power-Korrekturen ($1/M$) zu den Annihilations- und Spektortopologien. Entnommen aus [A3].

Zerfall	Beitrag	$\propto \lambda_b$	$\propto \lambda_d$
$D^+ \rightarrow \rho_{\perp}^+ \ell^+ \ell^-$	C_9	-0,445	0
	FFf	$0,187 - 0,252i$	$-0,006 + 0,000i$
	FFnf	$1,376 + 1,256i$	$0,071 - 0,044i$
	Spekf	0,071	0
	Speknf	$-0,114 + 0,009i$	$-0,013 + 0,009i$
	1/M Ann	$-0,095 + 0,104i$	$2,472 + 3,381i$
	1/M Spek	$-0,121 - 0,041i$	$-0,001 + 0,003i$
$\mathcal{C}_{9,\perp}$	Summe	$0,859 + 1,077i$	$2,523 + 3,349i$
$D^+ \rightarrow \rho_{\parallel}^+ \ell^+ \ell^-$	C_9	-0,445	0
	FFf	$-0,106 - 0,252i$	$-0,006 + 0,000i$
	FFnf	$0,266 + 0,570i$	$0,029 + 0,020i$
	Ann	$-0,025 + 0,103i$	$-0,799 + 3,335i$
	Spekf	-0,027	0
	Speknf	$-0,186 + 0,001i$	$-0,009 + 0,009i$
$\mathcal{C}_{9,\parallel}$	Summe	$-0,523 + 0,422i$	$-0,785 + 3,364i$

Tabelle 4.4: Dasselbe wie in Tabelle 4.3 für die geladene Mode, $D^+ \rightarrow \rho^+ \ell^+ \ell^-$. Entnommen aus [A3].

4.3.2 Differentielle Zerfallsraten

Als nächstes beschäftigen wir uns mit den differentiellen Zerfallsraten. Dabei unterscheiden wir zwischen der longitudinalen Rate $d\Gamma_L$ und der transversalen Rate $d\Gamma_T$. Diese können wir durch Projektion auf die Terme mit $(1 \pm \cos^2 \theta)$ in Gleichung (4.7) erhalten. In den Abbildungen 4.9 und 4.10 haben wir die differentiellen Verzweigungsverhältnisse für die neutrale und geladene Zerfallsmode als Funktion des Impulsübertrags q^2 dargestellt. Gezeigt sind die Kurven in LO und NLO inklusive der Unsicherheit durch die Skalenvariation. Für die LO-Kurve haben wir zusätzlich unser Ergebnis für das hadronische Resonanzmodell dargestellt. Es folgen einige Kommentare:

- Für den gewählten Wert der Skala μ ist der Unterschied zwischen den Vorhersagen für die LO und die NLO relativ klein.
- Die Raten der neutralen Zerfallsmode weisen eine große Abhängigkeit von der Renormierungsskala auf. Dies ist auf die Kombination von Wilsonkoeffizienten $(\frac{4}{3}C_1 + C_2)$ zurückzuführen, welche in den Beiträgen der Annihilation auftaucht (siehe Gleichung (4.19) und (4.22)). Für die geladene Mode beobachten wir diese Abhängigkeit von der Skala nicht, weil die besagte Kombination von Wilsonkoeffizienten hier nicht auftritt.
- Das hadronische Resonanzmodell führt zu einer beträchtlichen Erhöhung der differentiellen Raten. Wie bereits weiter oben detailliert erklärt, ist das darauf zurückzuführen, dass wir in seltenen semileptonischen D -Zerfällen auf den Absolutwert der langreichweitigen Funktionen sensitiv sind.
- In der Region $q^2 \simeq 0,75 \text{ GeV}^2$ ist die resonante Erhöhung verhältnismäßig klein, wodurch der Zugriff auf das perturbative Ergebnis möglich sein sollte. Jedoch sind die differentiellen Raten hier klein und die Unsicherheiten groß.

Des Weiteren haben wir die über verschiedene Bins Δq^2 integrierten Verzweigungsverhältnisse inklusive parametrischer und hadronischer Unsicherheiten bestimmt. Unsere Resultate sind in den Tabellen 4.5–4.8 dargestellt. Wir beobachten große Unsicherheiten, die leicht die 100%-Marke überschreiten können.

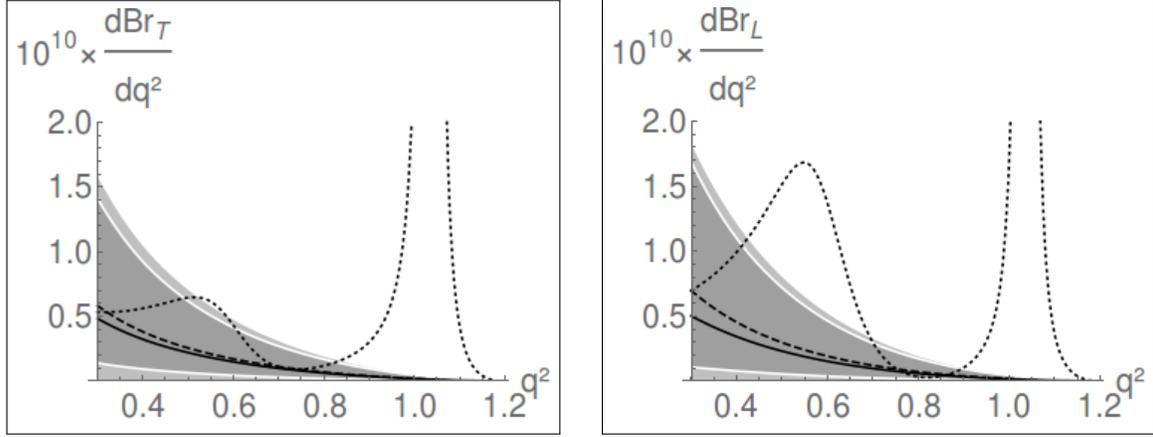


Abbildung 4.9: Die differentiellen Verzweigungsverhältnisse für $D^0 \rightarrow \rho^0 \ell^+ \ell^-$ Zerfälle (in Einheiten von GeV^{-2}) mit transversal oder longitudinal polarisierten ρ -Mesonen als Funktion des Impulsübertrags q^2 (in GeV^2). Das LO QCDF Ergebnis (inklusive Quarkannihilation in LO) ist als gestrichelte Linie dargestellt; das NLO Ergebnis (ohne NLO Korrekturen zur Annihilation) ist als durchgehende Linie gezeigt. Die Unsicherheitsbänder (dunkelgrau für LO; hellgrau für NLO) beziehen sich *nur* auf die Variation der Renormierungsskala mit $\mu \in [1, 3; 2, 0]$ GeV. Die gepunktete Linie illustriert das LO Ergebnis für das hadronische Resonanzmodell. Entnommen aus [A3].

Δq^2		$\text{Br}_T \times 10^{-12}$	μ	ω_0	hadr.
(0,3–0,5) GeV^2	LO	7,861	+11,218 –7,833	+9,010 –3,428	+3,574
	NLO	6,637	+15,209 –4,726	+8,574 –3,149	+1,752
(0,5–0,7) GeV^2	LO	3,487	+4,977 –3,475	+3,354 –1,437	+4,713
	NLO	3,039	+6,838 –2,153	+3,299 –1,367	+3,820
(0,7–0,9) GeV^2	LO	1,419	+2,026 –1,414	+1,123 –0,547	+1,450
	NLO	1,266	+2,815 –0,893	+1,140 –0,536	+0,865

Tabelle 4.5: Verzweigungsverhältnisse für die neutrale Zerfallsmode mit transversal polarisierten Vektormesonen, integriert über verschiedene Bins Δq^2 . Entnommen aus [A3].

Δq^2		$\text{Br}_L \times 10^{-12}$	μ	ω_0	hadr.
(0,3–0,5) GeV ²	LO	9,334	+13,326 –9,302	+5,157 –2,756	+11,300
	NLO	6,982	+18,243 –5,418	+4,524 –2,321	+8,759
(0,5–0,7) GeV ²	LO	3,927	+5,608 –3,914	+1,643 –1,026	+19,766
	NLO	3,103	+7,793 –2,360	+1,509 –0,903	+16,051
(0,7–0,9) GeV ²	LO	1,467	+2,095 –1,462	+0,446 –0,334	+0,198
	NLO	1,194	+2,939 –0,899	+0,430 –0,304	+0,115

Tabelle 4.6: Dasselbe wie in Tabelle 4.5 für longitudinal polarisierte Vektormesonen. Entnommen aus [A3].

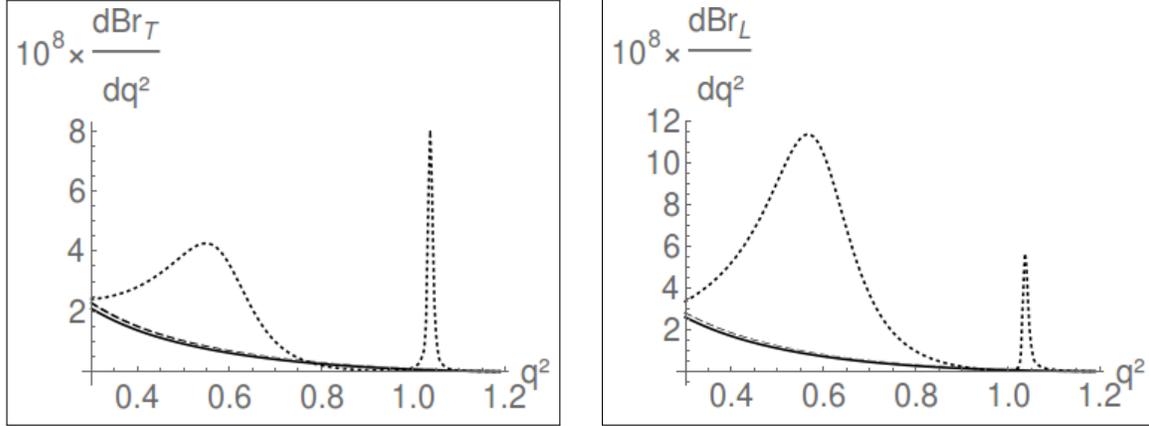


Abbildung 4.10: Dasselbe wie Abbildung 4.9 für $D^+ \rightarrow \rho^+ \ell^+ \ell^-$ Zerfälle, mit $\mu \in [1, 0; 2, 0]$ GeV. Entnommen aus [A3].

Δq^2		$\text{Br}_T \times 10^{-9}$	μ	ω_0	had.
(0,3–0,5) GeV ²	LO	3,085	+0,288 –0,123	+3,592 –1,360	+2,763
	NLO	2,827	+0,000 –0,000	+3,261 –1,237	+2,937
(0,5–0,7) GeV ²	LO	1,384	+0,128 –0,054	+1,354 –0,577	+4,836
	NLO	1,265	+0,000 –0,000	+1,226 –0,523	+5,417
(0,7–0,9) GeV ²	LO	0,573	+0,052 –0,022	+0,462 –0,224	+0,030
	NLO	0,523	+0,000 –0,000	+0,417 –0,202	+0,350

Tabelle 4.7: Dasselbe wie Tabelle 4.5 für die geladene Zerfallsmode. Entnommen aus [A3].

Δq^2		$\text{Br}_L \times 10^{-9}$	μ	ω_0	hadr.
(0,3–0,5) GeV^2	LO	3,753	+0,332 –0,140	+2,101 –1,120	+7,365
	NLO	3,497	+0,000 –0,000	+1,929 –1,032	+7,523
(0,5–0,7) GeV^2	LO	1,598	+0,140 –0,059	+0,677 –0,421	+16,022
	NLO	1,481	+0,000 –0,000	+0,619 –0,387	+17,028
(0,7–0,9) GeV^2	LO	0,607	+0,053 –0,022	+0,187 –0,139	+1,959
	NLO	0,561	+0,000 –0,000	+0,170 –0,127	+2,703

Tabelle 4.8: Dasselbe wie Tabelle 4.6 für die geladene Zerfallsmode. Entnommen aus [A3].

4.3.3 Verhältnis von transversalen und longitudinalen Raten

Δq^2		\mathcal{R}_{TL}	μ	ω_0	hadr.
(0,3–0,5) GeV ²	LO	0,842	+0,009 –0,000	+0,322 –0,168	–0,288
	NLO	0,950	+0,271 –0,363	+0,371 –0,202	–0,417
(0,5–0,7) GeV ²	LO	0,888	+0,011 –0,000	+0,340 –0,181	–0,542
	NLO	0,979	+0,330 –0,608	+0,395 –0,219	–0,621
(0,7–0,9) GeV ²	LO	0,968	+0,012 –0,000	+0,361 –0,198	+0,755
	NLO	1,060	+0,789 –0,726	+0,421 –0,240	+0,568

Tabelle 4.9: Verhältnis der transversalen und longitudinalen Rate wie in Gleichung (4.33) definiert für die neutrale Zerfallsmode. Entnommen aus [A3].

Δq^2		\mathcal{R}_{TL}	μ	ω_0	hadr.
(0,3–0,5) GeV ²	LO	0,822	+0,004 –0,002	+0,319 –0,167	–0,296
	NLO	0,808	+0,003 –0,009	+0,314 –0,163	–0,285
(0,5–0,7) GeV ²	LO	0,866	+0,004 –0,002	+0,338 –0,180	–0,513
	NLO	0,854	+0,003 –0,009	+0,332 –0,176	–0,493
(0,7–0,9) GeV ²	LO	0,944	+0,004 –0,002	+0,359 –0,197	–0,709
	NLO	0,932	+0,003 –0,009	+0,353 –0,193	–0,665

Tabelle 4.10: Verhältnis der transversalen und longitudinalen Rate wie in Gleichung (4.33) definiert für die geladene Zerfallsmode. Entnommen aus [A3].

Im letzten Unterkapitel haben wir gesehen, dass die Unsicherheiten selbst für die integrierten Raten groß sind. Oftmals reduzieren sich die Unsicherheiten bei der Betrachtung von Verhältnissen. Daher studieren wir zuletzt noch kurz das Verhältnis der transversalen und longitudinalen Raten

$$\mathcal{R}_{TL} := \left(\int_{\Delta q^2} dq^2 \frac{d\Gamma_T}{dq^2} \right) / \left(\int_{\Delta q^2} dq^2 \frac{d\Gamma_L}{dq^2} \right), \quad (4.33)$$

und integrieren dieses über dieselben Bins Δq^2 wie im vorangegangenen Abschnitt. Unsere Ergebnisse präsentieren wir in den Tabellen 4.9 und 4.10. In der Tat bemerken

wir eine leichte Reduktion der Unsicherheiten, zumindest für die unteren q^2 -Bins. Dazu machen wir die folgenden Bemerkungen:

- Für die neutrale Mode beträgt die Skalenunsicherheit in NLO immer noch bis zu einigen 10%.
- Die Unsicherheit die von dem Parameter ω_0 aus der LCDA des D -Mesons herührt, ist bis zu 30% groß. Hier sollten wir bedenken, dass wir die LCDA durch ein einfaches Exponentialmodell mit einem ad-hoc Wert für ω_0 angenommen haben.
- Wir beobachten eine leichte Reduktion der hadronischen Unsicherheiten.

Als ein weiteres Verhältnis, aus dem sich die hadronischen Unsicherheiten herauskürzen könnten, wäre die leptonische Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, normiert auf die transversale Zerfallsrate,

$$A_{\text{FB}}(q^2) \equiv \frac{1}{d\Gamma_T/dq^2} \left(\int_0^1 d \cos \theta \frac{d^2\Gamma}{dq^2 d \cos \theta} - \int_{-1}^0 d \cos \theta \frac{d^2\Gamma}{dq^2 d \cos \theta} \right) \\ \propto \text{Re} [\mathcal{C}_{9,\perp}(q^2) C_{10}^*] / |\mathcal{C}_{9,\perp}^2(q^2)|, \quad (4.34)$$

denkbar. Dabei haben wir in der zweiten Zeile der vorangegangenen Gleichung einen möglichen Beitrag NP für den Wilsonkoeffizienten C_{10} eingeführt, und diesen komplex gewählt. Jedoch sieht der Real- oder Imaginärteil des Resonanzbeitrags zu $\mathcal{C}_{9,\perp}$ sehr verschieden von dem Betragsquadrat aus. Daher erwarten wir keine signifikante Reduktion der theoretischen Unsicherheiten in diesem Fall.

4.4 Ausblick auf Effekte NP

Angesichts der immensen theoretischen Unsicherheiten, denken wir nicht, dass sich der Zerfall $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ sonderlich gut für die Suche nach Effekten NP eignet. Sollten wir dennoch daran interessiert sein, könnte das Verhältnis von transversalen und longitudinalen Raten dafür geeignet sein, da sich in diesem die Unsicherheiten zumindest teilweise herauskürzen. Der Standard-Ansatz für die Berücksichtigung von NP-Effekten besteht in der Erweiterung der Operatorbasis. Dazu führen wir analog zu den entsprechenden B -Zerfällen die Operatoren [122]

$$\mathcal{O}'_7 = -\frac{g_{\text{em}} m_c}{16\pi^2} (\bar{u}_R \sigma^{\mu\nu} c_L) F_{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

$$\mathcal{O}'_9 = \frac{\alpha_{\text{em}}}{4\pi} (\bar{u}_R \gamma_\mu c_R) (\bar{\ell} \gamma^\mu \ell), \quad (4.36)$$

$$\mathcal{O}'_{10} = \frac{\alpha_{\text{em}}}{4\pi} (\bar{u}_R \gamma_\mu c_R) (\bar{\ell} \gamma^\mu \gamma_5 \ell), \quad (4.37)$$

mit den entsprechenden Wilsonkoeffizienten $C'_{7,9,10}$ ein. Diese Operatoren unterscheiden sich von denen im SM nur in der Chiralität der Quarkfelder. Genau so wie ihre SM-Partner besitzen die „gestrichenen“ Operatoren Massendimension sechs; sie sind ebenfalls Lorentzskalare und besitzen dieselben Flavourquantenzahlen. Dann ist das Verhältnis \mathcal{R}_{TL} sensitiv auf die folgende Kombination von Wilsonkoeffizienten

$$\mathcal{R}_{TL} \propto \frac{|C_{10}|^2 + |C'_{10}|^2 + |C_9|^2 + |C'_9|^2 + \frac{4\hat{m}_c^2}{\hat{s}^2} (|C_7|^2 + |C'_7|^2) + \frac{4\hat{m}_c}{\hat{s}} \text{Re}[C_7 C_9^* + C'_7 C'_9^*]}{|C_{10} - C'_{10}|^2 + |C_9 - C'_9|^2 + \frac{4\hat{m}_c^2}{\hat{s}^2} |C_7 - C'_7|^2 + \frac{4\hat{m}_c}{\hat{s}^2} \text{Re}[(C_7 - C'_7)(C_9 - C'_9)^*]}, \quad (4.38)$$

wobei $\hat{m}_c = m_c/M_D$ und $\hat{s} = q^2/M_D^2$ ist. Prinzipiell wären auch noch Beiträge von skalar- oder tensorwertigen Operatoren denkbar. Diese haben wir hier aber vernachlässigt, da die einfachste Modifikation in der Umkehrung der Quarkchiralitäten besteht.

4.5 Wichtige Ergebnisse auf einen Blick

Bevor wir diesen Teil der Arbeit beschließen, möchten wir kurz und prägnant versuchen aufzuzeigen, warum sich die seltenen semileptonischen D -Zerfälle nun so sehr von ihrem Gegenstück des B -Sektors unterscheiden. Der Übersichtlichkeit halber tun wir dies im Rahmen einer Auflistung.

- Der QCDF-Ansatz ist eine simultane Entwicklung in der starken Kopplungskonstanten α_s und dem Inversen der schweren Quarkmasse $1/m_Q$. Wegen $\alpha_s(m_c) \simeq 0,38 > \alpha_s(m_b) \simeq 0,22$ und $1/m_D \simeq 0,3 - 0,4 > 1/m_B \simeq 0,1 - 0,2$ ist das Konvergenzverhalten dieser Entwicklung für D -Zerfälle schlechter. Insbesondere sind die Virtualitäten der Gluonen, die in die Spektatorstreuung involviert sind, von der Ordnung $\sqrt{m_D \Lambda_{\text{QCD}}} \sim 1 \text{ GeV}$, was das Konvergenzverhalten zusätzlich verschlechtert.
- Die Skalenabhängigkeit von α_s in dem Bereich der c -Quarkmasse ist größer. Dies führt zu einer größeren Unsicherheit und damit zu schlechteren Vorhersagen.
- Wegen der CKM-Unterdrückung ist die Physik im D -Sektor durch den Beitrag von $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d)}$ mit den Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}$ bestimmt. Deren Wilsonkoeffizienten liefern neben C_9 , der aber wie gesagt CKM- und zusätzlich GIM-unterdrückt ist, die dominanten kurzreichweitigen Beiträge. In $b \rightarrow s$ Übergängen ist es anders herum.

Hier spielt der Beitrag von $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(t)}$ die Hauptrolle. Dieser beinhaltet die semileptonischen Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$, deren Wilsonkoeffizienten die B -Physik dominieren. Die Dominanz von $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d)}$ im D -Sektor bedingt dreierlei.

- (a) Die größten Beiträge zur differentiellen Zerfallsrate kommen von den nicht-faktorisierbaren Formfaktorkorrekturen (dominieren über die LO-Effekte der Quarkschleife), der Annihilationstopologie und den $1/m_D$ -Korrekturen zur Annihilation, da diese in einer Kombination mit den Wilsonkoeffizienten $C_{1,2}$ auftreten. Im B -Sektor sind diese Beiträge CKM-unterdrückt.
 - (b) Für die neutrale Zerfallsmode taucht die Kombination von Wilsonkoeffizienten $(\frac{4}{3}C_1 + C_2)$ in der Annihilation und deren Power-Korrektur auf. Diese Kombination besitzt ein ungünstiges perturbatives Verhalten, was zu einer hohen Skalenabhängigkeit und damit zu einer großen Unsicherheit der Raten für diese Mode führt. Weiterhin taucht dieselbe Kombination auch in der Quarkschleifentopologie auf, welche aber unterdrückt ist. Im B -Sektor tritt dieselbe Kombination zwar auch auf, sie ist aber CKM-unterdrückt.
 - (c) In der Formel für die Annihilation (und deren Power-Korrekturen) taucht der mit einer großen Unsicherheit behaftete Parameter ω_0 auf. Weil die Annihilation (und deren Power-Korrekturen) für beide Moden einen Hauptbeitrag zu den Raten liefert, führt das zu einer großen parametrischen Unsicherheit für die Vorhersagen der differentiellen Raten. Zudem müssen wir die Annihilation (und deren Power-Korrekturen) für zeitartige q^2 durch das hadronische Gegenstück ersetzen. Dies führt zu einer großen hadronischen Unsicherheit. Die entsprechenden Beiträge im B -Sektor sind CKM-unterdrückt.
- Weil der kurzreichweitige Anteil für D -Zerfälle unterdrückt ist, sind die Raten auf den Betrag der langreichweitigen komplexen Funktionen sensitiv. Daher besitzen die hadronisch modellierten Raten nicht das von der B -Physik bekannte oszillatorische Verhalten um das perturbative Ergebnis. Dadurch besitzen selbst integrierte Größen eine große hadronische Unsicherheit.
 - Der kleinere Phasenraum für D -Zerfälle hat eine größere Sensitivität auf hadronische Resonanzeffekte zur Folge.

Kapitel 5

Der Zerfall $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$

Sowohl der resonante Zerfall $B \rightarrow K^*(\rightarrow K\pi)\ell^+\ell^-$ als auch der rein hadronische Zerfall $B \rightarrow K\pi$ sind im QCDF-Ansatz bereits in diversen Arbeiten ausführlich studiert worden [91, 97, 78, 74, 123], und es ist bekannt, dass deren Verzweigungsverhältnis eine Größenordnung von 10^{-6} bzw. 10^{-5} aufweist. Dieses Kapitel ist dem seltenen semileptonischen Zerfall $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$, den wir bei einer großen invarianten Dimesonmasse analysieren werden, gewidmet. Relativ zu seinem nicht-leptonischen Gegenstück ist der hier betrachtete semileptonische Kanal mit α_{em} unterdrückt. Demgemäß erwarten wir eine Größenordnung von höchstens 10^{-10} für sein Verzweigungsverhältnis. Der Zerfall $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ ist aus mindestens zwei Gründen von Interesse. Zum einen besitzt er als Vierkörperzerfall eine reiche kinematische Struktur, was uns die Möglichkeit für eine umfassende Winkelanalyse bieten sollte. Zum anderen erhoffen wir uns neue Erkenntnisse über den resonanten Zerfall $B \rightarrow K^*(\rightarrow K\pi)\ell^+\ell^-$, der gegenwärtig eine wichtige Rolle in der Flavourphysik spielt [122, 124, 125]. In der vorliegenden Arbeit behandeln wir $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ Zerfälle im Rahmen des QCDF-Ansatzes mit dem Hauptziel, eine grobe Abschätzung für die differentielle Zerfallsrate aller möglichen Zerfallsmoden ($K^-\pi^+$, $\bar{K}^0\pi^-$, ...) vorzunehmen. Wir erwarten, dass dieser Ansatz in der kinematischen Situation, in der sich die beiden Mesonen im Endzustand mit einer großen Energie von $M_B/2$ im Ruhesystem des B -Mesons entgegengesetzt voneinander wegbewegen, anwendbar ist. Da es uns, wie schon gesagt, nur um eine erste Abschätzung geht, konzentrieren wir uns bei der Analyse auf die führende Ordnung in α_s , berücksichtigen aber zusätzlich die Beiträge der semileptonischen Operatoren, welche in der nächstführenden Ordnung den dominanten Beitrag liefern sollten. Diese zuletzt genannten Beiträge können aus den Ergebnissen von [126] gewonnen werden. In dieser Studie haben die Autoren vor Kurzem die Zerfallsmode $B^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^-\bar{\nu}_\ell$ analysiert, welche durch einen $b \rightarrow u$ Übergang induziert wird und im SM nur einen effektiven

Operator involviert. Wegen ersterem wird diese Mode daher von der Baumgraphentopologie dominiert. Die Autoren kommen unter anderem zu dem Ergebnis, dass die Zerfallsrate in dem berücksichtigten Teil des Phasenraums zu klein für den direkten Gebrauch zur Bestimmung hadronischer Parameter oder der Suche nach Effekten NP ist. Ein zusätzlicher Grund, uns mit dem Zerfall $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ zu beschäftigen besteht also in der Hoffnung, dass dieser Zerfall in einem entsprechenden Teil des Phasenraums das leisten könnte, was der Zerfall $B^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^-\bar{\nu}_\ell$, wie oben gesagt, nicht bieten konnte.

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Im folgenden Kapitel 5.1 beginnen wir mit der effektiven Hamiltondichte für $b \rightarrow s$ Übergänge und besprechen, welche Operatoren angesichts unseres Vorhabens berücksichtigt werden müssen. Das Kapitel 5.2 behandelt die Kinematik des Zerfalls. Hier werden alle relevanten kinematischen Größen definiert. Außerdem beschäftigen wir uns mit den Kriterien für die Anwendbarkeit des QCDF-Ansatzes. In dem darauf folgenden Kapitel 5.3 berechnen wir systematisch die Amplituden für die nicht-lokalen und die lokalen Beiträge zur differentiellen Zerfallsbreite, welche Gegenstand des Kapitels 5.4 ist. Zuletzt erfolgt in Kapitel 5.5 die numerische Auswertung. Rechnerische Details liefern wir in Anhang G nach.

5.1 Effektive Hamiltondichte

Der Zerfall $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ wird auf Partonlevel durch einen $b \rightarrow s\ell^+\ell^-$ Übergang induziert. Dieser wird durch die effektive Hamiltondichte [97]

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left(\lambda_t \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(t)} + \lambda_u \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(u)} \right), \quad (5.1)$$

mit den Beiträgen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(t)} &= C_1 \mathcal{O}_1^c + C_2 \mathcal{O}_2^c + \sum_{i=3}^{10} C_i \mathcal{O}_i, \\ \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(u)} &= C_1 (\mathcal{O}_1^c - \mathcal{O}_1^u) + C_2 (\mathcal{O}_2^c - \mathcal{O}_2^u), \end{aligned} \quad (5.2)$$

und den CKM-Strukturen

$$\lambda_q = V_{qs}^* V_{qb}, \quad q = u, t, \quad (5.3)$$

beschrieben. Die C_i sind die $b \rightarrow s$ Wilsonkoeffizienten. In der CMM-Basis sind die Operatoren gegeben durch

$$\mathcal{O}_1^q = (\bar{s}_L \gamma_\mu T^a q_L)(\bar{q}_L \gamma^\mu T^a b_L), \quad (5.4)$$

$$\mathcal{O}_2^q = (\bar{s}_L \gamma_\mu q_L)(\bar{q}_L \gamma^\mu b_L), \quad (5.5)$$

$$\mathcal{O}_3 = (\bar{s}_L \gamma_\mu b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu q), \quad (5.6)$$

$$\mathcal{O}_4 = (\bar{s}_L \gamma_\mu T^a b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu T^a q), \quad (5.7)$$

$$\mathcal{O}_5 = (\bar{s}_L \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho q), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{O}_6 = (\bar{s}_L \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho T^a b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho T^a q), \quad (5.9)$$

$$\mathcal{O}_7 = -\frac{g_{\text{em}} m_b}{16\pi^2} (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} b_R) F_{\mu\nu}, \quad (5.10)$$

$$\mathcal{O}_8 = -\frac{g_s m_b}{16\pi^2} (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} T^a b_R) G_{\mu\nu}^a, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{O}_9 = \frac{\alpha_{\text{em}}}{4\pi} (\bar{s}_L \gamma_\mu b_L)(\bar{\ell} \gamma^\mu \ell), \quad (5.12)$$

$$\mathcal{O}_{10} = \frac{\alpha_{\text{em}}}{4\pi} (\bar{s}_L \gamma_\mu b_L)(\bar{\ell} \gamma^\mu \gamma_5 \ell), \quad (5.13)$$

mit $q = u, c$ für die Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}^q$. Die $b \rightarrow s$ Wilsonkoeffizienten an der Skala $\mu = 4, 6 \text{ GeV}$ sind in Tabelle 5.1 dokumentiert. Deren Evolution zu dieser Skala haben wir gemäß [84, 91] durchgeführt. Für einen besseren Vergleich mit unseren Ergebnissen aus dem Charm-Sektor wurden in Tabelle 5.1 auch solche Ergebnisse aufgelistet, die für die in diesem Kapitel betrachtete Ordnung in α_s nicht benötigt werden. Die Form der effektiven Hamiltondichte ist derjenigen der D -Zerfälle sehr ähnlich.

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin das Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ zu berechnen. Dabei fokussieren wir uns auf die führende Ordnung in der starken Kopplungskonstanten. Um die Effekte der nächstführenden Ordnung zumindest abzuschätzen, berücksichtigen wir weiterhin die in dieser Ordnung dominanten Operatoren. Zunächst argumentieren wir, welche Operatoren wir angesichts unseres Zieles überhaupt zu berücksichtigen haben. Die Objekte, die wir unter anderem im Weiteren berechnen sind die nicht-lokalen Korrelatoren

$$\langle K\pi | T \{ J_{\text{em}}^\mu(x), \mathcal{O}_{\text{had}}^{(1-6)}(0) \} | B \rangle, \quad (5.14)$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
LL	-0,510	1,026	-0,005	-0,069	0,000	0,001
NLL	-0,300	1,008	-0,005	-0,083	0,000	0,001
NNLL	-0,267	1,009	-0,005	-0,081	0,000	0,001
	$C_{7,\text{eff}}$	$C_{8,\text{eff}}$	C_9	C_{10}		
LL	-0,311	-0,148	2,011	0		
NLL	-0,305	-0,167	4,062	-4,077		
NNLL	-	-	4,232	-4,129		

Tabelle 5.1: $b \rightarrow s$ Wilsonkoeffizienten an der Skala $\mu = 4,6 \text{ GeV}$ in führender logarithmischer (LL), nächstführender logarithmischer (NLL) und nächst-nächstführender logarithmischer (NNLL) Ordnung für C_{1-6} , C_9 und C_{10} . Die Inputwerte sind $\Lambda_{\text{QCD},\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 0,214 \text{ GeV}$, $\hat{m}_t(\hat{m}_t) = 162,3 \text{ GeV}$, $M_W = 80,4 \text{ GeV}$, $\hat{m}_b(\hat{m}_b) = 4,18 \text{ GeV}$ und $\sin^2 \theta_W = 0,23$. Für α_s wird die 3-Schleifennäherung verwendet.

welche wir weiter unten näher besprechen werden. In führender Ordnung in α_s tragen die Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}^c$ nicht bei, weil kein c -Quark in den entsprechenden Diagrammen auftaucht. Dies ist erst in der nächstführenden Ordnung der Fall, in der Quarkschleifen in den Diagrammen auftreten können. Für die CKM-Strukturen gilt $\lambda_t \sim \lambda^2$ und $\lambda_u \sim \lambda^4$. Die beiden Terme $\lambda_t C_i$, $i = 3 \dots 6$ und $\lambda_u C_i$, $i = 1, 2$ sind daher von derselben Größenordnung und es ist nicht möglich die Beiträge der starken QCD-Pinguinoperatoren wegen der Kleinheit ihrer Wilsonkoeffizienten zu vernachlässigen (vgl. Tabelle 5.1). Alle übrigen Operatoren sind mit α_s unterdrückt. Damit tragen in führender Ordnung α_s nur die beiden Tree-Level-Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}^u$ sowie die QCD-Pinguinoperatoren \mathcal{O}_{3-6} bei. Die Summe bei den QCD-Pinguinen läuft nur über $q = u, d$. Für die Berechnung der Amplituden erweist es sich als günstig die Operatoren alle auf die Form $\mathcal{O}_i = (\bar{s}\Gamma_1 b)(\bar{q}\Gamma_2 q)$ zu bringen. Hier bezeichnen wir mit $\Gamma_{1,2}$ die entsprechenden Diracstrukturen zwischen den Quarkfeldern. Die Operatoren \mathcal{O}_{3-6} besitzen bereits die gewünschte Form. Für die Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}^u$ erreichen wir dies durch Anwendung der Fierzidentität

$$(\bar{s}_L \gamma_\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu b_L) = (\bar{s}_L \gamma_\mu b_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L). \quad (5.15)$$

Wie bereits oben gesagt, berücksichtigen wir außerdem die in der Ordnung α_s dominanten Operatoren. Dies sind die semileptonischen Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$, da diese wegen

der Größe ihrer Wilsonkoeffizienten die in der Ordnung α_s dominanten Beiträge liefern sollten. Hier treten die lokalen Matrixelemente

$$\langle K\pi|\bar{s}_L\gamma^\mu b_L|B\rangle, \quad (5.16)$$

auf. Für deren Berechnung können wir auf die Ergebnisse von [126] zurückgreifen. Bevor wir uns nun an die Berechnung der Amplituden machen können, ist es notwendig zunächst die Kinematik des Zerfalls zu definieren.

5.2 Kinematik

In diesem Kapitel legen wir die Notation für den Zerfall

$$B(p) \rightarrow K(k_1)\pi(k_2)\ell^+(q_1)\ell^-(q_2)$$

fest. Dabei orientieren wir uns an [127, 126]. Einige Modifikationen kommen dadurch zustande, dass die Kaonmasse m_K , im Gegensatz zu der Pionmasse, hier nicht vernachlässigt wird. Wir definieren die Summe und die Differenz der hadronischen und leptonischen Impulse durch

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_2, & k &= k_1 + k_2, \\ \bar{q} &= q_1 - q_2, & \bar{k} &= k_1 - k_2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Das hadronische System kann dann durch drei Lorentzinvarianten beschrieben werden: Den Impulsübertrag q^2 , die invariante Dimesonmasse k^2 und das Skalarprodukt $q \cdot \bar{k}$,

$$q \cdot \bar{k} = (\hat{E}_1 - \hat{E}_2) \frac{M_B^2 - k^2 - q^2}{2\sqrt{k^2}} + \frac{1}{2k^2} \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda_K} \cos \theta_K. \quad (5.18)$$

Dabei ist θ_K der Polarwinkel des Kaons im Dimesonruhesystem. Die Variablen $\hat{E}_{1/2}$ bezeichnen die Energien des Kaons und des Pions in demselben System. Außerdem ist

$$\lambda(a, b, c) \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc), \quad (5.19)$$

die Källénfunktion und es gilt die Schreibweise $\lambda \equiv \lambda(q^2, k^2, M_B^2)$ und $\lambda_K \equiv \lambda(k^2, 0, m_K^2)$. Im Folgenden verwenden wir die invariante Dimesonmasse k^2 sowie die Energien des

Kaons und des Pions $E_{1,2}$ im B -Ruhe-system,

$$E_{1,2} \equiv \frac{p \cdot k_{1,2}}{M_B} = \hat{E}_{1,2} \frac{M_B - q^0}{\sqrt{k^2}} \pm |\vec{k}_{RF}| \cos \theta_K \frac{|\vec{q}|}{\sqrt{k^2}}, \quad (5.20)$$

$$= \frac{(k^2 \pm m_K^2)(M_B^2 + k^2 - q^2) \pm \cos \theta_K \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda_K}}{4M_B k^2}, \quad (5.21)$$

als unabhängige Variablen, wobei die Größen $\hat{E}_{1,2}, q^0$ und $|\vec{k}_{RF}|$ durch

$$\hat{E}_{1,2} = \frac{k^2 \pm m_K^2}{2\sqrt{k^2}}, \quad q^0 = \frac{M_B^2 - k^2 + q^2}{2M_B}, \quad |\vec{k}_{RF}| = \frac{\sqrt{\lambda_K}}{2\sqrt{k^2}}, \quad (5.22)$$

gegeben sind. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf Anhang G. Außerdem gelten die Relationen

$$q^2 = M_B^2 - 2M_B(E_1 + E_2) + k^2, \quad q \cdot \bar{k} = M_B(E_1 - E_2). \quad (5.23)$$

Es erweist sich als günstig im Folgenden eine Orthogonalbasis zu verwenden. Mittels des Verfahrens von Gram-Schmidt ergibt sich

$$\begin{aligned} q^\mu, \\ k_{(0)}^\mu &= k^\mu - \frac{k \cdot q}{q^2} q^\mu, \\ \bar{k}_{(\parallel)}^\mu &= \bar{k}^\mu + \left(-\frac{4(k \cdot q)(q \cdot \bar{k})}{\lambda} + \frac{4q^2}{\lambda} k \cdot \bar{k} \right) k^\mu + \left(\frac{4k^2(q \cdot \bar{k})}{\lambda} - \frac{4k \cdot q}{\lambda} k \cdot \bar{k} \right) q^\mu, \\ \bar{q}_{(\perp)}^\mu &= 2\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{q_\alpha k_\beta \bar{k}_\gamma}{\sqrt{\lambda}}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

mit der Normierung

$$\begin{aligned} k_{(0)}^2 &= -\frac{\lambda}{4q^2}, \\ \bar{k}_{(\parallel)}^2 &= \bar{q}_{(\perp)}^2 = \frac{1}{\lambda} (4q^2(k \cdot \bar{k})^2 - 8(k \cdot \bar{k})(k \cdot q)(\bar{k} \cdot q) + 4k^2(\bar{k} \cdot q)^2 + \lambda \bar{k}^2). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Terme $\sim k \cdot \bar{k}$ berücksichtigen die Korrekturen durch die Kaonmasse. In dieser Orthogonalbasis können die beiden Vektoren k und \bar{k} folgendermaßen ausgedrückt

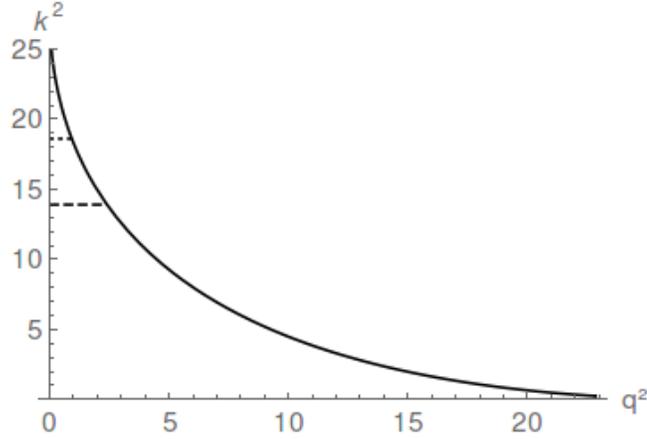


Abbildung 5.1: Illustration des Phasenraums in den kinematischen Variablen q^2 und k^2 (beide in GeV^2). Die komplette Region über der gestrichelten Linie entspricht dem von uns verwendeten Szenario. Die gepunktete Linie markiert den Phasenraum des konservativen Ansatzes.

werden

$$\begin{aligned} k^\mu &= \frac{k \cdot q}{q^2} q^\mu + k_{(0)}^\mu, \\ \bar{k}^\mu &= \frac{q \cdot \bar{k}}{q^2} q^\mu - \frac{4q^2}{\lambda} \left(k \cdot \bar{k} - \frac{k \cdot q \bar{k} \cdot q}{q^2} \right) k_{(0)}^\mu + \bar{k}_{(\parallel)}^\mu. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Damit können wir die Zerfallsamplituden in diese Basis transformieren und die entsprechenden (verallgemeinerten) Formfaktoren (siehe nächstes Kapitel) ablesen. Für die Berechnung der Amplituden verwenden wir den QCDF-Ansatz. Präziser formuliert benutzen wir hier die naive Faktorisierung, da wir uns im Wesentlichen auf die führende Ordnung in α_s beschränken. Damit dieser Ansatz anwendbar ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. Die beiden leichten Mesonen im Endzustand müssen im Ruhesystem des B -Mesons schnell sein, d. h. es muss gelten $E_{1,2} \gg \Lambda_{\text{QCD}}$.
2. Die invariante Masse des Dimesonsystems muss groß sein, $k^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}$.

Um den Phasenraumbereich zu finden, der dem ersten Kriterium genügt, muss gelten [126]

$$E_{1,2} \geq E_{\min}(q^2, k^2, |\cos \theta_K|) = \frac{(k^2 - m_K^2)(M_B^2 + k^2 - q^2) - |\cos \theta_K| \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda_K}}{4M_B k^2}. \quad (5.27)$$

Ein konservativer Ansatz ist $E_{\min} = M_B/3 \simeq 1,76 \text{ GeV}$ zu fordern, was sich ohne einen zusätzlichen Schnitt für $|\cos\theta_K|$ durch $k_{\min}^2 = 2M_B^2/3 \simeq 18,6 \text{ GeV}^2$ bewerkstelligen lässt. Hier verwenden wir jedoch den erweiterten Phasenraumbereich mit

$$\begin{aligned} k_{\min}^2 &= M_B^2/2 \simeq 13,9 \text{ GeV}^2, \\ \Rightarrow E_{\min} &= M_B/4 \simeq 1,32 \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

für unsere Analyse. In [126] betrachten die Autoren noch ein drittes Szenario, indem diese die Größe von $|\cos\theta_K|$ einschränken, was eine nicht-triviale untere Schranke für die Größe von k^2 herbeiführt. Nochmal sei gesagt, dass wir uns in dieser Abhandlung aber auf das durch Gleichung (5.28) definierte Szenario beschränken. Unabhängig von diesen Szenarien ist der maximale Wert des leptonischen Impulsübertrages durch

$$q_{\max}^2 = (M_B - \sqrt{k_{\min}^2})^2, \quad (5.29)$$

gegeben. Der minimale Wert beträgt $q_{\min}^2 = 4m_\ell^2$, da der Impulsübertrag mindestens für die Erzeugung des Leptonpaares ausreichen muss. Eine Illustration des Phasenraums in den kinematischen Variablen q^2 und k^2 sowie des von uns benutzten Szenarios zeigt Abbildung 5.1.

5.3 Amplituden

Im Folgenden berechnen wir die differentielle Zerfallsrate für $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ Zerfälle. Es gibt vier verschiedene Zerfallsmoden: $\bar{B}^0 \rightarrow K^-\pi^+\ell^+\ell^-$, $B^- \rightarrow \bar{K}^0\pi^-\ell^+\ell^-$, $\bar{B}^0 \rightarrow \bar{K}^0\pi^0\ell^+\ell^-$ und $B^- \rightarrow \bar{K}^-\pi^0\ell^+\ell^-$. Die Berechnung involviert sowohl nicht-lokale als auch lokale Beiträge. Im Weiteren geben wir zunächst eine allgemeine Parametrisierung für diese Beiträge an. Danach erfolgt die Berechnung der einzelnen Amplituden für die verschiedenen Zerfallsmoden.

Den nicht-lokalen Beitrag zur $B \rightarrow K\pi$ Amplitude parametrisieren wir durch vier verallgemeinerte Formfaktoren (nicht-lokale Korrelatoren) gemäß [127]

$$\begin{aligned} &\langle K(k_1)\pi(k_2)|T\{J_{\text{em}}^\mu(x), \mathcal{O}_{\text{had}}^{(1-6)}(0)\}|B(p)\rangle \\ &= q^2 \left(iH_\perp \frac{1}{\sqrt{k^2}} \bar{q}_{(\perp)}^\mu + H_t \frac{q^\mu}{\sqrt{q^2}} + H_0 \frac{2\sqrt{q^2}}{\sqrt{\lambda}} k_{(0)}^\mu + H_\parallel \frac{1}{\sqrt{k^2}} \bar{k}_{(\parallel)}^\mu \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Dabei hängt jeder verallgemeinerte Formfaktor von den drei unabhängigen Lorentzin-

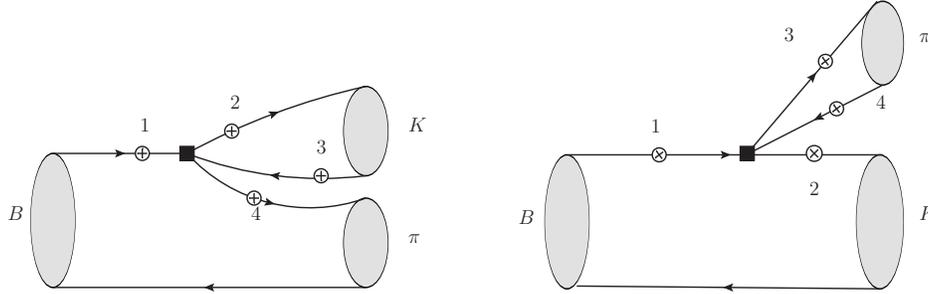


Abbildung 5.2: Beiträge von den starken QCD-Pinguinoperatoren zur Amplitude $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ in führender Ordnung α_s . Das schwarze Viereck entspricht der Einsetzung eines effektiven Operators, die Kreuze markieren die Einfügung eines virtuellen Photons, welches das geladene Leptonpaar erzeugt. Je nach Zerfallsmode gibt es zwei verschiedene Flavourtopologien.

varianten q^2, k^2 und $q \cdot \bar{k}$ ab. Den zusätzlichen Faktor q^2 in Gleichung (5.30) haben wir eingeführt, um die verallgemeinerten Formfaktoren zu dimensionslosen Größen zu machen. In Analogie parametrisieren wir die lokalen Beiträge von den Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$ durch

$$\begin{aligned} \langle K(k_1)\pi(k_2)|\bar{s}_L\gamma^\mu b_L|B(p)\rangle \\ = iF_\perp \frac{1}{\sqrt{k^2}} \bar{q}_{(\perp)}^\mu + F_t \frac{q^\mu}{\sqrt{q^2}} + F_0 \frac{2\sqrt{q^2}}{\sqrt{\lambda}} k_{(0)}^\mu + F_\parallel \frac{1}{\sqrt{k^2}} \bar{k}_{(\parallel)}^\mu. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Im Folgenden beschränken wir uns auf die kinematische Situation, in der die beiden Mesonen im B -Ruhesystem große Energien ($E_{1,2} \gg \Lambda_{\text{QCD}}$) und eine große invariante Masse ($k^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}$) besitzen und sich in genau entgegengesetzte Richtungen bewegen. In diesem Fall können wir für die Berechnung der Amplituden den QCD-Faktorisierungsansatz verwenden.

5.3.1 Nicht-lokale Beiträge der Operatoren \mathcal{O}_{1-6}

Je nach Zerfallsmode gibt es ein oder zwei Flavourtopologien, welche zu der gesamten Amplitude beitragen. Für die Zerfallsmoden $\bar{B}^0 \rightarrow K^-\pi^+\ell^+\ell^-$ und $B^- \rightarrow \bar{K}^0\pi^-\ell^+\ell^-$ gibt es lediglich eine Flavourtopologie. Da das virtuelle Photon an vier verschiedenen Quarklinien abgestrahlt werden kann, gibt es vier Amplituden. Für die Zerfallsmoden $\bar{B}^0 \rightarrow \bar{K}^0\pi^0\ell^+\ell^-$ und $B^- \rightarrow \bar{K}^-\pi^0\ell^+\ell^-$ gibt es jeweils zwei Flavourtopologien. In Abbildung 5.2 sind die zu den Amplituden gehörenden Diagramme graphisch dargestellt.

Der Beitrag zu dem nicht-lokalen hadronischen Matrixelement kann dann in führender Ordnung mittels QCD-Faktorisierungsformel schematisch wie folgt geschrieben werden

$$\langle K(k_1)\pi(k_2)|T\{J_{\text{em}}^\nu(x), \mathcal{O}_{\text{had}}^{(1-6)}(0)\}|B(p)\rangle = \xi_2(E_2) \cdot T_{\text{Ia}}^{\text{nl},\nu} \otimes \phi_1 + \xi_1(E_1) \cdot T_{\text{Ib}}^{\text{nl},\nu} \otimes \phi_2. \quad (5.32)$$

Dabei sind ξ_i und ϕ_i ($i = 1, 2$) die weichen Formfaktoren und die Lichtkegelverteilungsamplituden für das Kaon und das Pion. Etwas präziser ausgedrückt hängen die weichen Formfaktoren von den Größen $\hat{q}_{1,2}^2 = (p - k_{1,2})^2$ ab. Mit $T_{\text{Ia,b}}^{\text{nl},\nu}$ bezeichnen wir den nicht-lokalen Beitrag zu den harten Streukernen, welche wir im Weiteren perturbativ berechnen. Erst in der Ordnung α_s tritt in Gleichung (5.32) ein Term der Gestalt $T_{\text{II}}^{\text{nl},\nu} \otimes \phi_B \otimes \phi_1 \otimes \phi_2$ auf, wobei ϕ_B die Lichtkegelverteilungsamplitude für das B -Meson ist. Diese Ordnung ist aber nicht Gegenstand unserer Betrachtung. Im Weiteren berechnen wir die einzelnen Amplituden für die beiden Flavourtopologien.

Flavourtopologie 1

Zunächst konzentrieren wir uns auf die in Abbildung 5.2 links gezeigte Flavourtopologie. Entsprechend der Nummerierung in Abbildung 5.2 erhalten wir für die Amplituden $\mathcal{A}_{i\nu}$,

$$\mathcal{A}_{1\nu} = \frac{ig_{\text{em}}e_b}{(p_b - q)^2 - m_b^2} \text{tr}[\not{k}_2 \Gamma_2 \mathcal{M}_1^{(2)} \Gamma_1 (p\not{b} - \not{q} + m_b) \gamma_\nu P_v], \quad (5.33)$$

$$\mathcal{A}_{2\nu} = \frac{ig_{\text{em}}e_s}{(k_{q1} + q)^2} \text{tr}[\not{k}_2 \Gamma_2 \mathcal{M}_1^{(2)} \gamma_\nu (\not{k}_{q1} + \not{q}) \Gamma_1 P_v], \quad (5.34)$$

$$\mathcal{A}_{3\nu} = \frac{ig_{\text{em}}e_q}{(k_{\bar{q}1} + q)^2} \text{tr}[\not{k}_2 \Gamma_2 (\not{k}_{\bar{q}1} + \not{q}) \gamma_\nu \mathcal{M}_1^{(2)} \Gamma_1 P_v], \quad (5.35)$$

$$\mathcal{A}_{4\nu} = \frac{ig_{\text{em}}e_q}{(k_{q2} + q)^2} \text{tr}[\not{k}_2 \gamma_\nu (\not{k}_{q2} + \not{q}) \Gamma_2 \mathcal{M}_1^{(2)} \Gamma_1 \gamma_\nu P_v]. \quad (5.36)$$

Dabei sind

$$\mathcal{M}_1^{(2)} = if_1 \frac{k\not{k}\gamma_5}{4} \phi_1(u), \quad P_v \equiv \frac{\not{p} + M_B}{2M_B}, \quad (5.37)$$

der Impulsraumprojektor für das Kaon im Endzustand in führendem Twist und der Projektor, der die große Komponente im B -Meson herausprojiziert, u und $\bar{u} = 1 - u$ sind die longitudinalen Impulsbruchteile des Quarks und des Antiquarks in einem

Zweiteilchen-Fockzustand, d. h.

$$k_{q1}^\mu \simeq uk_1^\mu, \quad k_{\bar{q}1}^\mu \simeq \bar{u}k_1^\mu. \quad (5.38)$$

Außerdem ist e_q , $q = u, d$ abhängig von der betrachteten Zerfallsmode. Für die Propagatoren P_i gelten die folgenden Approximationen

$$P_1^{-1} = (p_b - q)^2 - m_b^2 \approx k^2 - M_B^2, \quad (5.39)$$

$$P_2^{-1} = (k_{q1} + q)^2 \approx \bar{u}(k^2 - 2M_B E_1) - 2M_B E_2 + M_B^2 - u\bar{u}k_1^2, \quad (5.40)$$

$$P_3^{-1} = (k_{\bar{q}1} + q)^2 \approx u(k^2 - 2M_B E_1) - 2M_B E_2 + M_B^2 - u\bar{u}k_1^2, \quad (5.41)$$

$$P_4^{-1} = (k_{q2} + q)^2 \approx M_B^2 - 2M_B E_1 + k_1^2, \quad (5.42)$$

wobei wir $m_b \simeq M_B$ sowie $p_b^\mu \simeq p^\mu$ und für P_4 die Näherung $k_{q2} \approx k_2$ verwendet haben. Wir bemerken, dass wir die Pionmasse $k_2^2 = m_\pi^2$ in unserer Rechnung vernachlässigen.

Flavourtopologie 2

Nun behandeln wir die in Abbildung 5.2 rechts gezeigte Flavourtopologie. Entsprechend der Nummerierung in dieser Abbildung erhalten wir für die Amplituden $\tilde{\mathcal{A}}_{i\nu}$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{1\nu} = \frac{ig_{\text{em}}e_b}{(p_b - q)^2 - m_b^2} \text{tr}[\not{k}_1 \Gamma_1 (p\not{b} - \not{q} + m_b) \gamma_\nu P_\nu] \text{tr}[\Gamma_2 \mathcal{M}_2^{(2)}], \quad (5.43)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{2\nu} = \frac{ig_{\text{em}}e_s}{(k_{q1} + q)^2} \text{tr}[\not{k}_1 \gamma_\nu (\not{k}_{q1} + \not{q}) \Gamma_1 P_\nu] \text{tr}[\Gamma_2 \mathcal{M}_2^{(2)}], \quad (5.44)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{3\nu} = \frac{ig_{\text{em}}e_q}{(k_{q2} + q)^2} \text{tr}[\not{k}_1 \Gamma_1 P_\nu] \text{tr}[\gamma_\nu (k_{q2}\not{q} + \not{q}) \Gamma_2 \mathcal{M}_2^{(2)}], \quad (5.45)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{4\nu} = \frac{ig_{\text{em}}e_q}{(k_{\bar{q}2} + q)^2} \text{tr}[\not{k}_1 \Gamma_1 P_\nu] \text{tr}[\Gamma_2 (k_{\bar{q}2}\not{q} + \not{q}) \gamma_\nu \mathcal{M}_2^{(2)}]. \quad (5.46)$$

Hier ist der Projektor $\mathcal{M}_2^{(2)}$ analog zu dem aus dem letzten Abschnitt definiert und die Propagatoren sind

$$\tilde{P}_1^{-1} = (p_b - q)^2 - m_b^2 \approx k^2 - M_B^2, \quad (5.47)$$

$$\tilde{P}_2^{-1} = (k_{q1} + q)^2 \approx M_B^2 - 2M_B E_2, \quad (5.48)$$

$$\tilde{P}_3^{-1} = (k_{q2} + q)^2 \approx u(-k^2 + 2M_B E_2 + k_1^2) + M_B^2 + k^2 - 2M_B(E_1 + E_2), \quad (5.49)$$

$$\tilde{P}_4^{-1} = (k_{\bar{q}2} + q)^2 \approx \bar{u}(-k^2 + 2M_B E_2 + k_1^2) + M_B^2 + k^2 - 2M_B(E_1 + E_2), \quad (5.50)$$

wobei wir in \tilde{P}_2 die Näherung $k_{q1} \approx k_1$ benutzt haben. Damit haben wir alle nicht-lokalen Beiträge in führender Ordnung in der starken Kopplungskonstanten vollständig berechnet.

5.3.2 Nicht-lokales Matrixelement

Abhängig von der betrachteten Zerfallsmode ist das nicht-lokale Matrixelement sensitiv auf verschiedene Kombinationen von Wilsonkoeffizienten. Es bezeichne $D_{iq}^{j/k}$ die i -te Amplitude mit Diracstruktur der Operatoren $\mathcal{O}_{j,k}$ und dem Quarkflavour $q = u, d$. Diese können wir direkt aus den weiter oben berechneten Ausdrücken $\mathcal{A}_{i\nu}$ gewinnen, indem wir diese durch die entsprechende Lichtkegelverteilungsamplitude dividieren. Der Übersichtlichkeit halber unterdrücken wir den Lorentzindex der Objekte $D_{iq}^{j/k}$. Für Moden ohne ein π^0 im Endzustand erhalten wir unter Berücksichtigung der Farbfaktoren aus Anhang G.2

$$T_{\text{Ia}}^{\text{nl},\nu} = 4\pi \left\{ \left[-\lambda_u C_2 \delta_{qu} + \lambda_t \frac{1}{N_C} (C_3 + C_F C_4 + 16C_5 + 16C_F C_6) \right] \times (D_1^{1/2} + D_2^{1/2} + D_{3q}^{1/2} + D_{4q}^{1/2}) \right\}. \quad (5.51)$$

Für Moden mit einem π^0 im Endzustand bekommen wir, da hier zwei Flavourtopologien beitragen, die beiden harten Streukerne

$$\begin{aligned} T_{\text{Ia}}^{\text{nl},\nu} &= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left\{ \left[-\lambda_u C_2 \delta_{qu} \pm \lambda_t \frac{1}{N_C} (C_3 + C_F C_4 + 16C_5 + 16C_F C_6) \right] \right. \\ &\quad \left. \times (D_1^{1/2} + D_2^{1/2} + D_{3q}^{1/2} + D_{4q}^{1/2}) \right\}, \\ T_{\text{Ib}}^{\text{nl},\nu} &= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left\{ \left[-\lambda_u \frac{1}{N_C} (C_F C_1 + C_2) + \lambda_t 12C_5 \right] (\tilde{D}_1^{1/2} + \tilde{D}_2^{1/2} + \tilde{D}_{3u}^{1/2} + \tilde{D}_{4u}^{1/2}) \right. \\ &\quad - \lambda_t 12C_5 (\tilde{D}_{3d}^{1/2} + \tilde{D}_{4d}^{1/2}) \\ &\quad \left. + \lambda_t (C_3 + 4C_5) (\tilde{D}_{3u}^{3/4} - \tilde{D}_{3d}^{3/4} + \tilde{D}_{4u}^{3/4} - \tilde{D}_{4d}^{3/4}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

wobei das untere Vorzeichen für $q = d$ gilt und die Tilde anzeigt, dass es sich um einen Beitrag der zweiten Flavourtopologie handelt. Der Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wurde eingeführt, weil der Zustand des neutralen Pions durch $|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$ gegeben ist. Die Kombinationen von Wilsonkoeffizienten sind sehr ähnlich zu denen der nicht-leptonischen Zerfälle [74]. Der Unterschied ist, dass Beiträge von den Operatoren $\mathcal{O}_{3,5}$ im nicht-

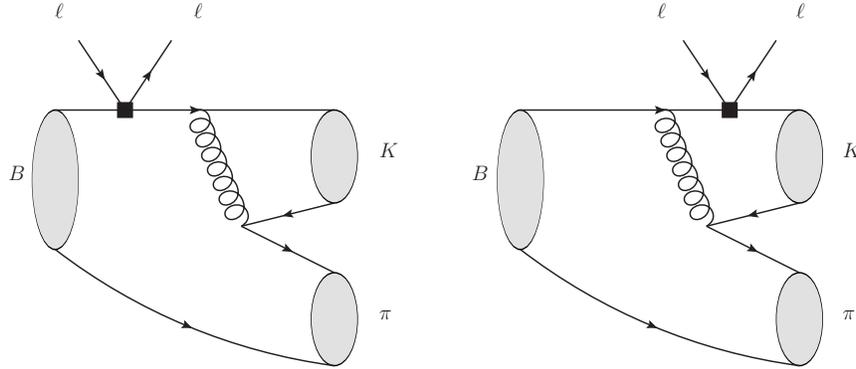


Abbildung 5.3: Beiträge von den Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$ zur Amplitude $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$. Das schwarze Viereck entspricht der Einsetzung eines effektiven Operators.

leptonischen Fall für die zweite Flavourtopologie nicht auftauchen. Die Terme mit \mathcal{O}_5 heben sich nämlich gerade auf und die Spur mit der Diracstruktur von \mathcal{O}_3 verschwindet. Damit beschließen wir die Diskussion der nicht-lokalen Beiträge. In dem folgenden Kapitel werden wir uns noch den lokalen Beiträgen der semileptonischen Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$ widmen.

5.3.3 Lokale Beiträge der Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$

Die Beiträge die von den semileptonischen Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$ herrühren, können wir [126] entnehmen. In dieser Arbeit wurde der Zerfall $B^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^-\bar{\nu}_\ell$ behandelt. Die Ergebnisse können direkt auf den hier betrachteten Zerfall für *masselose* Kaonen übertragen werden. Im Weiteren gehen wir davon aus, dass die Effekte der Kaonmasse in den lokalen Beiträgen numerisch nicht relevant sind. Diese mit zu berücksichtigen würde über dieses Projekt hinausgehen.¹ Daher vernachlässigen wir die Effekte der Kaonmasse in den lokalen Beiträgen und übertragen die Ergebnisse aus [126] direkt auf unseren Zerfall. Im Folgenden geben wir die für unseren Fall angepassten Ergebnisse wieder. Es gibt zwei verschiedene Diagramme, da das Gluon sowohl von dem b -Quark als auch von dem s -Quark abgestrahlt werden kann. Die Diagramme sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Für das entsprechende hadronische Matrixelement führen

¹An dieser Stelle möchten wir nochmal betonen, dass wir hier lediglich eine naive Abschätzung der Fehler anstreben.

wir die Faktorisierungsformel

$$\langle K(k_1)\pi(k_2) | \bar{s}_L \gamma^\mu b_L | B(p) \rangle = \frac{2\pi f_1}{k^2} \xi_2(E_2) \int_0^1 du \phi_1(u) T_I^{1,\mu}(u, k^2, E_1, E_2), \quad (5.53)$$

ein. Der harte Streukern $T_I^{1,\mu}$ ist gegeben durch

$$T_I^{1,\mu}(u, k^2, E_1, E_2) = i \frac{\alpha_s C_F}{N_C} \frac{\lambda_t}{4\pi} \left\{ f(u) \left[\left(\frac{2E_1 M_B}{k^2} - 1 \right) s_2 + \frac{1}{2} s_3 \right] + g(u) \left[s_1 + s_2 - \frac{M_B}{2E_2} s_5 - \frac{1}{2} s_7 \right] \right\}, \quad (5.54)$$

mit den zwei unabhängigen Funktionen

$$f(u) \equiv \frac{-k^2}{\bar{u}(k^2 - 2E_1 M_B) - 2E_2 M_B}, \quad g(u) \equiv \frac{2E_2 M_B}{\bar{u} k^2} f(u). \quad (5.55)$$

Außerdem ist

$$s_1 = k_1^\mu, \quad s_2 = k_2^\mu, \quad s_3 = 2k_1^\mu, \quad s_7 = 0, \\ s_5 = \frac{-2E_1 M_B k_2^\mu + 2E_2 M_B k_1^\mu + 2i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{1,\nu} k_{2,\rho} p_\sigma + (k^2 - k_1^2) p^\mu}{2M_B^2}. \quad (5.56)$$

Der Faktor $1/4\pi$ in Gleichung (5.54) stammt aus der Definition der semileptonischen Operatoren. Beiträge der Form $T_{II}^1 \otimes \phi_B \otimes \phi_1 \otimes \phi_2$ tauchen erst in der Ordnung α_s^2 auf, welche wir hier vernachlässigen. Damit sind die dominanten lokalen Beiträge vollständig berechnet.

5.4 Differentielle Zerfallsbreite

Nach der Berechnung der Zerfallsamplituden können wir uns nun mit der differentiellen Zerfallsbreite beschäftigen. Diese ergibt sich aus Gleichung (2.54) zu

$$d^5\Gamma = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{2M_B} dR_4, \quad (5.57)$$

mit dem 4-Teilchenphasenraum [128]

$$dR_4 = \frac{1}{2^5 (2\pi)^6 M_B^2} \frac{\sqrt{\lambda(M_B^2, q^2, k^2) \lambda(q^2, m_\ell^2, m_\ell^2) \lambda(k^2, m_K^2, m_\pi^2)}}{8q^2 k^2} dq^2 dk^2 d\cos\theta_\ell d\cos\theta_K d\phi. \quad (5.58)$$

Hier ist ϕ der Winkel zwischen der Dimeson- und Dileptonzerfallsebene, θ_ℓ der Winkel zwischen dem negativen Lepton und der positiven z -Richtung gemessen im Dileptonruhesystem, und m_ℓ die Leptonmasse. Für den Limes verschwindender Kaon- und Leptonmasse können wir die dreifach differentielle Zerfallsbreite wie folgt schreiben,

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dq^2 dk^2 d\cos\theta} = N & [2(C_{10}^2 + C_9^2)|F_0|^2 + (C_{10}^2 + C_9^2)|F_\parallel|^2 + 2(C_{10}^2 + C_9^2)|F_\perp|^2 \sin^2(\theta_K) \\ & + 2|H_0|^2 + |H_\parallel|^2 + |H_\perp|^2 + 2C_9 \operatorname{Re}(2H_0 F_0^* + H_\parallel F_\parallel^* + H_\perp F_\perp^*) \\ & - ((C_{10}^2 + C_9^2)|F_\parallel|^2 + |H_\parallel|^2 + |H_\perp|^2 + 2C_9 \operatorname{Re}(H_\parallel F_\parallel^* + H_\perp F_\perp^*)) \cos(2\theta_K)], \end{aligned} \quad (5.59)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N = \alpha_{\text{em}}^2 G_F^2 \frac{q^2 \sqrt{\lambda}}{3 \cdot 2^9 \pi^5 M_B^3}. \quad (5.60)$$

Die Formel für die differentielle Zerfallsbreite inklusive Kaonmasse kann aus den Ergebnissen von Anhang G.3 hergeleitet werden. Wir verzichten an dieser Stelle darauf diese Formel anzugeben.

5.5 Numerische Ergebnisse

Nun können wir uns an die zahlenmäßige Auswertung machen. Weil wir sehr kleine Werte für die Verzweigungsverhältnisse erwarten, konzentrieren wir uns in der numerischen Analyse auf die Zentralwerte. Außerdem vernachlässigen wir die Kaonmasse. Eine Abschätzung der Unsicherheiten sowie den Effekt durch die Kaonmasse präsentieren wir etwas später noch. Als Input verwenden wir die Werte, die in Tabelle 5.2 zusammengestellt sind. Die weichen Formfaktoren entwickeln wir gemäß Gleichung (2.86). Für alle vier Moden berechnen wir das partiell integrierte Verzweigungsverhältnis. In Anlehnung an [126] verwenden wir den erweiterten Phasenraumbereich

$$4m_\mu^2 \leq q^2 \leq (M_B - \sqrt{k^2})^2, \quad 13,90 \text{ GeV}^2 \leq k^2 \leq (M_B - \sqrt{q^2})^2. \quad (5.61)$$

M_{B^\pm}	5,279 GeV	[22]	f_π	130,4 MeV	[22]
M_{B^0}	5,289 GeV	[22]	f_K	159,8 MeV	[22]
τ_{B^\pm}	1,638 ps	[22]	$a_2^\pi(1\text{GeV})$	$0,17 \pm 0,08$	[129]
τ_{B^0}	1,520 ps	[22]	$a_1^K(1\text{GeV})$	$0,10 \pm 0,04$	[68, 130]
M_{π^\pm}	139,6 MeV	[22]	$a_2^K(1\text{GeV})$	$0,25 \pm 0,15$	[68, 130]
M_{π^0}	135,0 MeV	[22]	$F_\pi(0)$	$0,301 \pm 0,023$	[131]
M_{K^\pm}	493,7 MeV	[22]	$F_K(0)$	$0,395 \pm 0,033$	[131]
M_{K^0}	497,6 MeV	[22]	b_1^π	$-1,72 \pm 1,14$	[131]
M_{B^*}	5,325 GeV	[22]	b_1^K	$-1,42 \pm 1,52$	[131]
M_{B_s}	5,367 GeV	[22]	λ	0,22506	[22]
			A	0,811	[22]
			$\bar{\rho}$	0,124	[22]
			$\bar{\eta}$	0,356	[22]

Tabelle 5.2: Zusammenfassung von Inputwerten. Die Parameterwerte der Formfaktoren besitzen eine Korrelation von 0,74 für das Pion bzw. 0,72 für das Kaon.

Unsere Ergebnisse sind in Tabelle 5.3 festgehalten. Hier präsentieren wir die Werte mit LL und NLL Wilsonkoeffizienten. Auch die Effekte durch die semileptonischen Operatoren haben hier Eingang gefunden. Zu dieser Tabelle machen wir die folgenden Bemerkungen:

- Der numerische Wert für das Verzweigungsverhältnis ist für alle vier Moden von der Größenordnung 10^{-11} .
- Obwohl die Kombinationen von Wilsonkoeffizienten sehr ähnlich zu denjenigen von den nicht-leptonischen Zerfällen sind, verhalten sich die relativen Größen der Verzweigungsverhältnisse nicht ähnlich. Insbesondere fallen die Werte für die erste und vierte Mode in Tabelle 5.3 am größten aus. Dies ist auf die unterschiedlichen Ladungsfaktoren zurückzuführen, die bei der Kopplung des virtuellen Photons an die Quarklinien auftreten.
- Die Effekte der Operatoren $\mathcal{O}_{9,10}$ sind sehr klein, ein weitaus größerer Unterschied kommt durch den Übergang von den LL zu den NLL Wilsonkoeffizienten zustande.

Im Weiteren greifen wir exemplarisch die Mode $\bar{B}^0 \rightarrow K^-\pi^+\ell^+\ell^-$ heraus und demonstrieren an dieser zweierlei. Erstens machen wir eine grobe Abschätzung der Unsicherheiten, um einen Eindruck von deren Größenordnung zu erhalten. Zweitens studieren

Zerfallsmode	LL	NLL	LL incl. $\mathcal{O}_{9,10}$	NLL incl. $\mathcal{O}_{9,10}$	nicht-lep.
$\bar{B}^0 \rightarrow K^- \pi^+ \ell^+ \ell^-$	3, 28	4, 92	3, 30	4, 99	$1, 96 \times 10^{-5}$
$B^- \rightarrow \bar{K}^0 \pi^- \ell^+ \ell^-$	0, 74	1, 36	0, 73	1, 33	$2, 37 \times 10^{-5}$
$\bar{B}^0 \rightarrow \bar{K}^0 \pi^0 \ell^+ \ell^-$	1, 15	1, 28	1, 16	1, 30	$0, 99 \times 10^{-5}$
$B^- \rightarrow K^- \pi^0 \ell^+ \ell^-$	2, 74	3, 43	2, 76	3, 47	$1, 29 \times 10^{-5}$

Tabelle 5.3: Über die Intervalle $4m_\mu^2 \leq q^2 \leq (M_B - \sqrt{k^2})^2$, $13,90 \text{ GeV}^2 \leq k^2 \leq (M_B - \sqrt{q^2})^2$ integriertes Verzweigungsverhältnis für die einzelnen Moden mit LL und NLL Wilsonkoeffizienten. Auch der Effekt der leptonischen Operatoren ist illustriert. Die numerischen Werte müssen noch mit 10^{-11} multipliziert werden. In der rechten Spalte präsentieren wir zum Vergleich die experimentellen Ergebnisse für das nicht-leptonische Gegenstück [22].

Zentralwert	F_0	b_1	μ	Zentralwert	m_K
4, 99	+0,79 -0,73	+0,72 -0,66	+2,78 -2,69	4, 92	-0, 03

Tabelle 5.4: Abschätzung der Unsicherheiten für die Mode $\bar{B}^0 \rightarrow K^- \pi^+ \ell^+ \ell^-$ mit NLL Wilsonkoeffizienten und inklusive $\mathcal{O}_{9,10}$. Die Korrelation zwischen den Parametern F_0 und b_1 wurde der Einfachheit halber vernachlässigt. Die Skala μ haben wir in dem Intervall $[M_B/2, 2M_B]$ variiert. Bei der Brechnung der Korrektur durch die Kaonmasse wurden allein nicht-lokale Beiträge berücksichtigt.

wir das Verhalten der lokalen und nicht-lokalen Beiträge zum Verzweigungsverhältnis in Abhängigkeit von k^2 . Wir beginnen mit der Abschätzung der Unsicherheiten. Die dominanten Quellen von Unsicherheit sind die Renormierungsskala μ sowie die Formfaktorparameter F_0 und b_1 (siehe Gleichung (2.86)). Der Einfachheit halber vernachlässigen wir die Korrelation zwischen den letzten beiden genannten Größen. Wir betonen, dass es uns hier nur um eine grobe Abschätzung geht. Unsere Ergebnisse sind in Tabelle 5.4 aufgelistet. Wir erwarten, dass die Unsicherheiten recht groß sind. Die größte Unsicherheit rührt von der Skala μ her. Dies ist nicht verwunderlich, da wir durch die naive Faktorisierung die μ -Abhängigkeit der Operatormatrixelemente übergangen haben. Deren Berücksichtigung sollte die Lage verbessern. Nun studieren wir noch kurz das Verhalten der lokalen und nicht-lokalen Beiträge zum Verzweigungsverhältnis. Dieses ist in Abbildung 5.4 illustriert. Dabei haben wir die QCDF-Ergebnisse für den Bereich $1,00 \text{ GeV}^2 \leq k^2 \leq 13,90 \text{ GeV}^2$ extrapoliert. Wir sehen, dass die semi-leptonischen Operatoren erst für $k^2 \gtrsim 4 \text{ GeV}^2$ über die Operatoren \mathcal{O}_{1-6} dominieren.

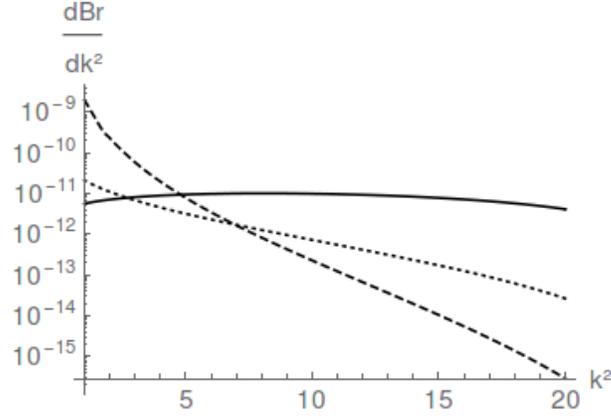


Abbildung 5.4: Beiträge zum über $4m_\mu^2 \leq q^2 \leq (M_B - \sqrt{k^2})^2$ integrierten Verzweigungsverhältnis (in Einheiten von GeV^{-2}) als Funktion von k^2 (in GeV^2) von dem Zerfall $\bar{B}^0 \rightarrow K^-\pi^+\ell^+\ell^-$ mit NLL Wilsonkoeffizienten für die nicht-lokalen Beiträge (durchgezogene Linie), für die lokalen Beiträge (gestrichelte Linie) und dem Interferenzterm aus beiden Anteilen (gepunktete Linie). Die QCDF-Ergebnisse wurden für den Bereich $1,00 \text{ GeV}^2 \leq k^2 \leq 13,90 \text{ GeV}^2$ extrapoliert.

Ausblick auf Korrekturen durch Twist-3

Bisher haben wir für die Auswertung der Spuren, welche in den Amplituden auftreten, den Projektor für die leichten Mesonen in führendem Twist verwendet. Im Weiteren machen wir einige Bemerkungen hinsichtlich der Berücksichtigung von Twist-3-Korrekturen. Aus den Arbeiten [78, 126] ist bekannt, dass Beiträge vom Twist-3 numerisch relevant sind. Dies ist auf den großen Vorfaktor μ_i , ($i = 1, 2$) zurückzuführen; für das Pion z. B. gilt $\mu_2 = m_\pi^2/(m_u + m_d) \sim 2,5 \text{ GeV}$. Man spricht von chiraler Erhöhung. In der Twist-2-Näherung sind wir davon ausgegangen, dass die beiden Quarks in den leichten Mesonen lediglich eine longitudinale Impulskomponente besitzen. Die Komponente senkrecht dazu haben wir vernachlässigt. Um Beiträgen vom Twist-3 Rechnung zu tragen, nähern wir die Partonimpulse in einem Zweiteilchen-Fockzustand durch

$$k_{q_1}^\mu \simeq uk_1^\mu + k_\perp^\mu, \quad k_{\bar{q}_1}^\mu \simeq \bar{u}k_1^\mu - k_\perp^\mu, \quad (5.62)$$

wobei wir den transversalen Impuls senkrecht auf beide Impulse der leichten Mesonen wählen, $k_\perp \cdot k_{1,2} = 0$. Außerdem gilt $k_\perp \sim \Lambda_{\text{QCD}}$. Eine komplette Behandlung aller Twist-3-Beiträge würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Aus diesem Grund legen

wir im Folgenden exemplarisch für die erste Flavourtopologie dar, wie wir prinzipiell vorzugehen haben. Der Projektor in Twist-3 ist in diesem Fall gegeben durch [126]

$$\mathcal{M}_1^{(3)} = \frac{if_1\mu_1}{4}\gamma_5 \left(-\phi_P(u) + i\sigma_{\mu\nu} \frac{k_1^\mu k_2^\nu}{k_1 \cdot k_2} \frac{\phi'_\sigma(u)}{6} - i\sigma_{\mu\nu} \frac{\phi_\sigma(u)}{6} k_1^\mu \frac{\partial}{\partial k_{\perp\nu}} \right) \Big|_{k_\perp \rightarrow 0}, \quad (5.63)$$

wobei die entsprechenden Lichtkegelverteilungsamplituden durch die Bewegungsgleichungen [132]

$$\frac{u}{2} \left(\phi_P(u) + \frac{\phi'_\sigma(u)}{6} \right) \simeq \frac{\bar{u}}{2} \left(\phi_P(u) - \frac{\phi'_\sigma(u)}{6} \right) \simeq \frac{\phi_\sigma(u)}{6}, \quad (5.64)$$

festgelegt werden, was auf die Wandzura-Wilczek-Näherung

$$\phi_P(u) \simeq 1, \quad \phi_\sigma(u) \simeq 6u\bar{u}, \quad (5.65)$$

führt. An dieser Stelle scheint noch ein kurzer Kommentar zu dem Ableitungsterm in Gleichung (5.63) angebracht zu sein. Und zwar gilt

$$\frac{\partial}{\partial k_{\perp\nu}} = P_\perp^{\nu\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\perp^\alpha}, \quad \text{mit} \quad P_\perp^{\nu\alpha} = g^{\nu\alpha} - \frac{k^\nu k^\alpha}{k^2}, \quad (5.66)$$

wobei $P_\perp^{\nu\alpha}$ ein orthogonaler Projektor ist. Exemplarisch für die Amplitude $\mathcal{A}_{2\nu}$ ergibt sich dann

$$\mathcal{A}_{2\nu} = \frac{ig_{em}e_s}{(uk_1 + q)^2 + 2k_\perp \cdot q} \text{tr}[\not{k}_2 \Gamma_2 \mathcal{M}_1^{(3)} \gamma_\nu (\not{k}_{q1} + \not{q}) \Gamma_1 P_\nu]. \quad (5.67)$$

Diese Notation ist so zu verstehen, dass die Ableitung in dem Mesonprojektor sowohl auf den Nenner als auch auf den Zähler wirkt. Führt man die Spuren von der ersten Flavourtopologie für alle Operatorstrukturen aus, so stellt man fest, dass diese für die Baumgraphenoperatoren verschwinden. Spuren mit den Diracstrukturen anderer Operatoren liefern nicht-verschwindende Beiträge. Mit dem nicht-leptonischen Gegenstück zu diesem Zerfall verhält es sich ebenso [74]. Diese kurzen Bemerkungen zum Twist-3 mögen an dieser Stelle genügen. Es wäre interessant die Korrekturen vom Twist-3 in einer über diese Studie hinausgehenden Arbeit in der numerischen Auswertung zu berücksichtigen.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir die $c \rightarrow u\ell^+\ell^-$ Wilsonkoeffizienten für die schwache effektive Hamiltondichte bis zur ersten Ordnung in der starken Kopplungskonstanten α_s berechnet. Diese werden dazu benötigt, um seltene semileptonische Zerfälle von D -Mesonen in eben dieser Ordnung analysieren zu können. Wir haben gesehen, dass die Rechnung sehr ähnlich zu derjenigen der analogen B -Zerfälle ist. Der Hauptunterschied besteht darin, dass die Evolution von der Anfangsskala M_W zu der Skala m_c zwei Stufen involviert, weil das Bottom-Quark an der Skala m_b herausintegriert wird. Bei den anomalen Dimensionen und der Anfangsbedingung an der Skala M_W , konnten wir auf die aus dem B -Sektor bekannten Ergebnisse zurückgreifen, und wir mussten lediglich einige triviale Anpassungen (Quarkladungen und Anzahl der aktiven Flavour in der EFT) vornehmen. Die numerischen Werte für die Wilsonkoeffizienten sind sehr verschieden von denen der b -Zerfälle. Es gibt zwei wesentliche Unterschiede: C_9 ist negativ und unterscheidet sich um eine Größenordnung, und C_{10} verschwindet. Zuletzt haben wir versucht, ein Missverständnis zu klären, welches in der Literatur bezüglich des korrekten Matching an der Skala M_W herrscht. An dieser Stelle weisen wir nochmal darauf hin, dass wir für die Evolution von C_{1-6} in der Ordnung NNLL die Matchingbedingung an der Skala $\mu = m_b$ auf Zweischleifenniveau vernachlässigt haben. Ebenso haben wir die α_s -Korrektur zu $C_9(m_b)$ nicht berücksichtigt. Dadurch ergibt sich eine zusätzliche Korrektur für C_9 . Diese Beiträge sollte man mit einbeziehen, sobald sie bekannt sind.

Im zweiten Teil der Arbeit haben wir den seltenen semileptonischen Zerfall $D \rightarrow \rho\ell^+\ell^-$ mithilfe des QCDF-Ansatzes analysiert, und dazu unsere Ergebnisse für die $c \rightarrow u$ Wilsonkoeffizienten aus dem ersten Teil verwendet. Dabei war es nicht unser primäres Ziel, präzise Vorhersagen zu machen, sondern kritisch zu bewerten, inwiefern $D \rightarrow \rho\ell^+\ell^-$

Zerfälle im QCDF-Ansatz unter theoretischer Kontrolle sind, und eine vernünftige Abschätzung für die auftretenden Unsicherheiten zu machen. Im Rahmen des QCDF-Ansatzes können wir die Beiträge von den einzelnen Zerfallstopologien voneinander trennen und separat behandeln. Die perturbative Analyse zeigt, dass die naive Faktorisierung im Gegenteil zu den analogen B -Zerfällen noch nicht einmal als erste Näherung dient, weil die nichtfaktorisierten Effekte im Allgemeinen dominieren. Für die neutrale Zerfallsmode liefern die nichtfaktorisierten Formfaktorkorrekturen, die Annihilation und die Spektatoreffekte die größten Beiträge. Die geladene Mode wird vollständig von der Annihilationstopologie dominiert. Außerdem haben wir gesehen, dass das Konvergenzverhalten der QCDF-Entwicklung verhältnismäßig schlecht ist, was auf die relativ kleine Charm-Quarkmasse zurückzuführen ist. Bedingt durch die CKM-Struktur und den kleinen Phasenraum, besitzen die differentiellen Zerfallsraten große hadronische Unsicherheiten. Diese hadronischen Unsicherheiten haben wir mittels eines Modellansatzes abgeschätzt, welcher die tiefliegenden Resonanzen durch eine modifizierte Breit-Wigner-Funktion und die höheren Resonanzen durch eine unendliche Reihe von Vektorresonanzen modelliert. Zusätzlich weisen die differentiellen Zerfallsraten eine große parametrische Unsicherheit durch den Parameter ω_0 auf. Für die neutrale Mode kommt noch eine hohe Skalenunsicherheit hinzu, welche wir auf ein ungünstiges perturbatives Verhalten einer Kombination von Wilsonkoeffizienten zurückführen können. Zuletzt haben wir uns noch das Verhältnis der transversalen und der longitudinalen Raten \mathcal{R}_{TL} angesehen, in der Hoffnung, dass sich die Unsicherheiten hier herauskürzen. In der Tat reduzieren sich die Unsicherheiten im Verhältnis ein wenig. Insgesamt kommen wir zu dem Ergebnis, dass verlässliche theoretische Vorhersagen für die hier betrachteten Observablen von $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfällen kaum möglich sind. Um diese Zerfälle für die Suche nach Effekten NP zu benutzen, könnte die Größe \mathcal{R}_{TL} von Interesse sein. Weiterhin haben wir die α_s -Korrekturen zu der Annihilation in unserer Analyse vernachlässigt, da diese bisher nicht bekannt sind. Es könnte interessant sein diese mit einzubeziehen, sobald diese bekannt sind. Außerdem könnte es interessant sein $D \rightarrow \pi \ell^+ \ell^-$ Zerfälle als weiteres Studienobjekt in Betracht zu ziehen, da der Phasenraum hier größer ist. Dies könnte die Sensitivität auf hadronische Resonanzeffekte verringern. Mittels des Anhangs E können unsere Ergebnisse auf diesen Kanal übertragen werden.

Im letzten Teil der Arbeit haben wir uns mit dem seltenen semileptonischen Zerfall $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$ beschäftigt und dessen Verzweigungsverhältnis in naiver Faktorisierung und führendem Twist berechnet. Die Rechnung involviert nicht-lokale Korrelatoren mit den QCD-Pinguinoperatoren, die wir für die kinematische Situation, in der die beiden leichten Mesonen eine große Energie im Ruhesystem des B -Mesons mit einer großen

invarianten Dimesonmasse haben, in ein Produkt von einem weichen Formfaktor und einem harten Streukern zerlegen können. Je nach Zerfallsmode gibt es entweder ein oder zwei beitragende Flavourtopologien mit den harten Streukernen $T_{\text{Ia,b}}^{\text{nl},\nu}$, welche auf verschiedene Kombinationen von Wilsonkoeffizienten sensitiv sind. Diese Kombinationen sind denen der entsprechenden nicht-leptonischen Zerfälle sehr ähnlich. Korrekturen durch die Kaonmasse haben wir durch eine Modifikation der Kinematik aus [127] berücksichtigt. Um die Effekte der nächstführenden Ordnung in α_s abzuschätzen, haben wir desweiteren die in dieser Ordnung dominanten semileptonischen Operatoren in Betracht gezogen. Die dabei auftretenden lokalen Matrixelemente mit dem harten Streukern $T_1^{1,\mu}$ haben wir mittels der Ergebnisse aus [126] berechnet. In der numerischen Analyse haben wir uns in Anlehnung an [126] auf den erweiterten Teil des Phasenraums $4m_\mu^2 \leq q^2 \leq (M_B - \sqrt{k^2})^2$, $13,90 \text{ GeV}^2 \leq k^2 \leq (M_B - \sqrt{q^2})^2$ beschränkt. Das Verzweigungsverhältnis ist für alle Zerfallsmoden von der Größenordnung 10^{-11} und damit bei dem aktuellen Stand der Technik zu klein für eine experimentelle Überprüfung. Wegen Ladungsfaktoren, welche auf die Kopplung des virtuellen Photons zurückzuführen sind, verhalten sich die relativen Größen der Verzweigungsverhältnisse zueinander anders als für das nicht-leptonische Gegenstück. Die Unsicherheit für die Verhältnisse ist verhältnismäßig groß, insbesondere für die Renormierungsskala μ . Dies ist darauf zurückzuführen, dass wir im Rahmen der naiven Faktorisierung die μ -Abhängigkeit der Operatormatrixelemente vernachlässigt haben. Außerdem haben wir gesehen, dass die nicht-lokalen Beiträge den Phasenraum in dem Bereich $4,00 \text{ GeV}^2 \lesssim k^2 \leq (M_B - \sqrt{q^2})^2$ dominieren. Damit kommen wir ebenso wie die Autoren von [126] zu dem Ergebnis, dass sich der Zerfall $B \rightarrow K\pi\ell^+\ell^-$ zumindest, wenn man sich nur auf den betrachteten Phasenraumbereich beschränkt, nicht für den direkten Gebrauch zur Bestimmung hadronischer Größen oder für die Suche nach Effekten NP eignet. Trotzdem könnte dieser Zerfall wichtig sein, um zusätzliche Erkenntnisse über den resonanten Zerfall $B \rightarrow K^*(\rightarrow K\pi)\ell^+\ell^-$ zu erlangen. Um den numerischen Wert für das partiell integrierte Verzweigungsverhältnis zu erhöhen, könnten wir nämlich den Phasenraumbereich erweitern, indem wir die hadronischen Effekte entsprechend modellieren. In diesem Rahmen könnte es dann auch interessant sein, die Beiträge vom Twist-3 sowie Beiträge von gluonischen Korrekturen höherer Ordnung mit zu berücksichtigen.

Anhang A

Evolution der Wilsonkoeffizienten

A.1 Starke Kopplungskonstante α_s

Die Renormierungsgruppengleichung der starken Kopplungskonstanten α_s ist in Dreischleifennäherung gegeben durch [133]

$$\frac{d\alpha_s}{d\ln\mu} = \beta(\alpha_s) = -2\beta_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} - 2\beta_1 \frac{\alpha_s^2}{(4\pi)^2} - 2\beta_2 \frac{\alpha_s^3}{(4\pi)^3} + \dots, \quad (\text{A.1})$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{11}{3}N_C - \frac{2}{3}n_f, \\ \beta_1 &= \frac{34}{3}N_C^2 - \frac{10}{3}N_C n_f - 2C_F n_f, \\ \beta_2 &= \frac{1}{2}(2857 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dabei sind $N_C = 3$ der Farbfaktor, $C_F = 4/3$ und n_f die Anzahl der aktiven Flavour in der effektiven Theorie. Die Lösung dieser Gleichung ist [134, 135]

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu) &= \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} \\ &\times \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \ln(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} + \frac{\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} \left(\left(\ln \ln(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2) - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\beta_2 \beta_0}{\beta_1^2} - \frac{5}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Der Parameter Λ_{QCD} ist dabei die charakteristische Skala der QCD, welcher durch eine Anfangsbedingung, z. B. bei $\alpha_s(M_Z)$ bestimmt ist. Desweiteren hängt der Parameter

Λ_{QCD} von n_f ab, und wir schreiben $\Lambda_{\text{QCD}}^{(n_f)}$. Mittels der Forderung, dass $\alpha_s(\mu)$ an der Massenschwelle der Quarks jeweils kontinuierliche Werte annimmt,

$$\alpha_s(\mu \rightarrow m_f^-) \stackrel{!}{=} \alpha_s(\mu \rightarrow m_f^+), \quad (\text{A.4})$$

erhalten wir die Werte für $\Lambda_{\text{QCD}}^{(5)}$ und $\Lambda_{\text{QCD}}^{(4)}$, welche wir in dieser Arbeit benötigen. In Anhang C benötigen wir noch die Renormierungskonstante der starken Kopplungskonstanten auf Einschleifenniveau [60],

$$Z_{g_s} = 1 - \frac{\alpha_s \beta_0}{4\pi} \frac{1}{2\varepsilon}. \quad (\text{A.5})$$

A.2 Skalenabhängigkeit der Masse

Die Renormierungsgruppengleichung für die Masse lautet [60]

$$\frac{d}{d \ln \mu} m(\mu) = -\gamma_m(\alpha_s(\mu)) m(\mu), \quad (\text{A.6})$$

mit der anomalen Dimensionsmatrix

$$\gamma_m(\alpha_s(\mu)) = \frac{1}{Z_m} \frac{dZ_m}{d \ln \mu}, \quad (\text{A.7})$$

wobei Z_m die Renormierungskonstante der Masse ist. Außerdem gilt

$$\gamma_m(\alpha_s) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma_m^{(0)} + \frac{\alpha_s^2}{(4\pi)^2} \gamma_m^{(1)}, \quad (\text{A.8})$$

mit

$$\gamma_m^{(0)} = 6C_F, \quad \gamma_m^{(1)} = C_F \left(3C_F + \frac{97}{3}N_C - \frac{10}{3}n_f \right). \quad (\text{A.9})$$

Die von der Skala μ abhängige Masse ist bis zur Ordnung α_s dann gegeben durch

$$m(\mu) = m(\mu_0) \left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\mu_0)} \right]^{\frac{\gamma_m^{(0)}}{2\beta_0}} \left[1 + \left(\frac{\gamma_m^{(1)}}{2\beta_0} - \frac{\beta_1 \gamma_m^{(0)}}{2\beta_0^2} \right) \frac{\alpha_s(\mu) - \alpha_s(\mu_0)}{4\pi} \right]. \quad (\text{A.10})$$

A.3 Lösung der Renormierungsgruppengleichung

In diesem Kapitel stellen wir die Lösung der Renormierungsgruppengleichung

$$\frac{d}{d \ln \mu_1} U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1) = \gamma^T(n_f, \mu_1) U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1), \quad (\text{A.11})$$

vor und orientieren uns dabei an [91]. Mit der anomalen Dimensionsmatrix $\gamma(n_f, \mu_1)$ werden wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen. Im Weiteren unterdrücken wir deren Abhängigkeit von n_f und μ_1 . Die Evolutionsmatrix $U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1)$ ist in führender Ordnung α_s gegeben durch

$$U^{(0)}(\mu_2, \mu_1) = V \left[\left(\frac{\alpha_s(\mu_2)}{\alpha_s(\mu_1)} \right)^{-\gamma_i^{(0)}/(2\beta_0)} \right]_{\text{diag}} V^{-1}, \quad (\text{A.12})$$

wobei die Matrix V gerade $\gamma^{(0)T}$ auf Diagonalform bringt,

$$V^{-1} \gamma^{(0)T} V = \left[\gamma_i^{(0)} \right]_{\text{diag}}. \quad (\text{A.13})$$

Damit lässt sich die Evolutionsmatrix in der NNLL Ordnung schreiben als

$$U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1) = (1 + a_s(\mu_2)J^{(1)} + a_s(\mu_2)^2 J^{(2)}) U^{(0)}(\mu_2, \mu_1) \\ \times (1 - a_s(\mu_1)J^{(1)} - a_s(\mu_1)^2 [J^{(2)} - J^{(1)2}]), \quad (\text{A.14})$$

mit $a_s \equiv \alpha_s/(4\pi)$ und

$$J^{(n)} = V^{-1} H^{(n)} V. \quad (\text{A.15})$$

Dabei haben wir die Matrizen $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ eingeführt mit den Einträgen

$$H_{ij}^{(1)} = \delta_{ij} \gamma_i^{(0)} \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} - \frac{G_{ij}^{(1)}}{2\beta_0 + \gamma_i^{(0)} - \gamma_j^{(0)}}, \quad (\text{A.16})$$

$$H_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} \gamma_i^{(0)} \frac{\beta_2}{4\beta_0^2} + \sum_k \frac{2\beta_0 + \gamma_i^{(0)} - \gamma_k^{(0)}}{4\beta_0 + \gamma_i^{(0)} - \gamma_j^{(0)}} \left(H_{ik}^{(1)} H_{kj}^{(1)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} H_{ij}^{(1)} \delta_{jk} \right) \\ - \frac{G_{ij}^{(2)}}{4\beta_0 + \gamma_i^{(0)} - \gamma_j^{(0)}}, \quad (\text{A.17})$$

wobei wir

$$G^{(n)} = V^{-1} \gamma^{(n)T} V, \quad (\text{A.18})$$

definiert haben. Damit können wir die Lösung der Renormierungsgruppengleichung in der Form

$$C(\mu) = U^{(n_f=4)}(\mu, m_b) R U^{(n_f=5)}(m_b, M_W) C(M_W), \quad (\text{A.19})$$

schreiben. Die Matchingmatrix R wird im Hauptteil besprochen.

Die Evolution des Wilsonkoeffizienten C_9 kann separat betrachtet werden und ist gegeben durch

$$\frac{d}{d \ln \mu} C_9(\mu) = \kappa(\mu) C(\mu), \quad (\text{A.20})$$

wobei die 1×6 -Matrix κ die Mischung von den Operatoren \mathcal{O}_{1-6} in den semileptonischen Operator \mathcal{O}_9 beschreibt. Sie besitzt die Entwicklung

$$\kappa = \kappa^{(-1)} + \kappa^{(0)} a_s + \kappa^{(1)} a_s^2 + \dots \quad (\text{A.21})$$

Die Lösung der Renormierungsgruppengleichung für C_9 können wir dann in der Form

$$C_9(\mu) = C_9(m_b) + W^{(n_f=4)}(\mu, m_b) C(m_b), \quad (\text{A.22})$$

schreiben, mit der 1×6 -Matrix

$$W^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_s(\mu_1)}^{\alpha_s(\mu_2)} da_s \frac{\kappa(a_s)}{\beta(a_s)} U^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1), \quad (\text{A.23})$$

wobei

$$\begin{aligned} W^{(n_f)}(\mu_2, \mu_1) = & -\frac{\kappa^{(-1)}}{2\beta_0 a_s(\mu_1)} D_{-1}(\mu_2, \mu_1) \\ & -\frac{1}{2\beta_0} \left[\left(\kappa^{(0)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \kappa^{(-1)} + \kappa^{(-1)} J^{(1)} \right) D_0(\mu_2, \mu_1) - \kappa^{(-1)} D_{-1}(\mu_2, \mu_1) J^{(1)} \right] \\ & -\frac{a_s(\mu_1)}{2\beta_0} \left[\left(\kappa^{(1)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \kappa^{(0)} + \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0^2} - \frac{\beta_2}{\beta_0} \right) \kappa^{(-1)} + \left(\kappa^{(0)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \kappa^{(-1)} \right) J^{(1)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa^{(-1)} J^{(2)}) D_1(\mu_2, \mu_1) - \left(\kappa^{(0)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \kappa^{(-1)} + \kappa^{(-1)} J^{(1)} \right) D_0(\mu_2, \mu_1) J^{(1)} \\
& - \kappa^{(-1)} D_{-1}(\mu_2, \mu_1) \left[J^{(2)} - J^{(1)2} \right] .
\end{aligned} \tag{A.24}$$

In Gleichung (A.24) kommt die 6×6 -Matrix $D_n(\mu_2, \mu_1)$ vor, welche durch

$$D_n(\mu_2, \mu_1) = V \left[\frac{1}{n - \gamma_i^{(0)}/(2\beta_0)} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{a_s(\mu_2)}{a_s(\mu_1)} \right)^{n - \gamma_i^{(0)}/(2\beta_0)} \\ - 1 \end{array} \right] \right]_{\text{diag}} V^{-1}, \tag{A.25}$$

gegeben ist.

A.4 Anomale Dimensionsmatrix

Dieser Anhang beschäftigt sich mit der anomalen Dimensionsmatrix, welche durch eine Entwicklung in der starken Kopplungskonstante gegeben ist,

$$\gamma(n_f, \mu_1) = \gamma^{(0)} a_s(n_f, \mu_1) + \gamma^{(1)} a_s(n_f, \mu_1)^2 + \dots \tag{A.26}$$

Dabei handelt es sich um eine 10×10 -Matrix. Im Folgenden machen wir eine Auflistung von Publikationen, in denen man die Matrizen $\gamma^{(i)}$ bis zur hier benötigten Ordnung, mit der vollen Parameterabhängigkeit finden kann.

- Die 6×6 -Untermatrix der anomalen Dimensionsmatrix mit der vollen Abhängigkeit von n_f ist in [62, 86] zu finden.
- Die 2×2 -Untermatrix der Eigenmischung in dem Dipoloperatorsektor ist in [87] gegeben. Diese Matrix hängt zusätzlich von den Quarkladungen ab, die für den Fall von D -Zerfällen entsprechend gewählt werden müssen.
- Bis zu der hier benötigten Ordnung ist die 6×2 -Untermatrix für die Mischung zwischen Vierfermion- und Dipoloperatoren mit der vollen Abhängigkeit von den Quarkladungen und der Anzahl der aktiven Flavour in [A2] gegeben.
- Die 1×6 -Untermatrix für die Mischung von \mathcal{O}_{1-6} in \mathcal{O}_9 ist in [85] zu finden.

Da diese Matrizen teilweise sehr umfangreich sind, geben wir sie im Folgenden mit den hier relevanten Parameterwerten an. Für die Evolution von der Skala M_W zu der

Skala m_b tragen nur die Operatoren $\mathcal{O}_{1,2}$ bei. Daher benötigen wir lediglich die 2×2 -Untermatrix der anomalen Dimension. Für $n_f = 5$ ist

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{8}{3} \\ 12 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{355}{9} & -\frac{502}{27} \\ -\frac{35}{3} & -\frac{28}{3} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Für eine konsistente Evolution von C_9 benötigen wir $C_{1,2}(m_b)$ in der NNLL Ordnung. Dabei kommt die Matrix

$$\gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{12773}{18} + \frac{1472}{3} \zeta(3) & \frac{745}{9} - \frac{4288}{9} \zeta(3) \\ \frac{1177}{2} - 2144 \zeta(3) & 306 - 224 \zeta(3) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

ins Spiel. Unterhalb der Skala m_b gibt es eine nicht verschwindende Mischung in die Operatoren \mathcal{O}_{3-8} . Für die Evolution von der Skala m_b zu der Skala m_c benötigen wir also die 8×8 -Untermatrizen, die für $n_f = 4$ durch

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{2}{9} & 0 & 0 & \frac{140}{243} & \frac{167}{162} \\ 12 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & -\frac{280}{81} & \frac{76}{27} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{52}{3} & 0 & 2 & -\frac{128}{81} & \frac{368}{27} \\ 0 & 0 & -\frac{40}{9} & -\frac{112}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{6} & \frac{592}{243} & -\frac{649}{81} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{256}{3} & 0 & 20 & \frac{12928}{81} & \frac{12080}{27} \\ 0 & 0 & -\frac{256}{9} & -\frac{64}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{40288}{243} & -\frac{3400}{81} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{64}{9} & \frac{28}{3} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

und

$$\gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{371}{9} & -\frac{542}{27} & -\frac{1412}{243} & -\frac{1369}{243} & \frac{134}{243} & -\frac{35}{162} & -\frac{1030}{729} & \frac{9161}{1944} \\ -\frac{55}{3} & -\frac{28}{3} & -\frac{416}{81} & \frac{1280}{81} & \frac{56}{81} & \frac{35}{27} & -\frac{10288}{243} & \frac{2633}{162} \\ 0 & 0 & -\frac{4468}{81} & -\frac{31001}{81} & \frac{400}{81} & \frac{3397}{108} & -\frac{76000}{243} & \frac{23143}{81} \\ 0 & 0 & -\frac{9262}{243} & -\frac{63401}{243} & \frac{317}{486} & \frac{13019}{648} & \frac{37316}{243} & -\frac{25009}{108} \\ 0 & 0 & -\frac{250240}{81} & -\frac{108848}{81} & \frac{23692}{81} & \frac{5662}{27} & -\frac{4064768}{729} & \frac{2977916}{243} \\ 0 & 0 & \frac{62432}{243} & -\frac{26840}{243} & -\frac{15524}{243} & -\frac{6283}{162} & \frac{3675760}{2187} & -\frac{2941804}{729} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4912}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4832}{81} & \frac{4124}{27} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

gegeben sind.

Die Lösung der Renormierungsgruppengleichung für den Koeffizienten C_9 involviert die 1×6 -Matrix κ , welche die Mischung der Operatoren \mathcal{O}_{1-6} in den semileptonischen Operator \mathcal{O}_9 beschreibt. Diese ist gegeben durch

$$\kappa = \kappa^{(-1)} + \kappa^{(0)} a_s + \kappa^{(1)} a_s^2 + \dots, \quad (\text{A.31})$$

mit

$$\kappa^{(-1)} = \left(\frac{16}{27}, \frac{4}{9}, -\frac{64}{9}, -\frac{64}{27}, -\frac{736}{9}, -\frac{1024}{27} \right), \quad (\text{A.32})$$

$$\kappa^{(0)} = \left(\frac{872}{729}, -\frac{448}{243}, \frac{3136}{243}, \frac{21856}{729}, \frac{64384}{243}, \frac{246976}{729} \right), \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \kappa^{(1)} = & \left(\frac{962999}{19683}, \frac{783452}{6561}, \frac{1052104}{6561}, \frac{1331194}{19683}, \frac{91534096}{6561}, -\frac{28647728}{19683} \right) \\ & + \zeta(3) \left(-\frac{4448}{243}, \frac{3712}{81}, \frac{7424}{81}, \frac{49472}{243}, \frac{77312}{81}, \frac{441344}{243} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Anhang B

Alternative Operatorbasen¹

Um die vorliegende Ausarbeitung mit früheren Arbeiten vergleichen zu können, führen wir die „gequerten“ Koeffizienten \bar{C}_i (mit $i = 1, \dots, 6$) ein, die durch die folgenden Linearkombinationen der Wilsonkoeffizienten C_i definiert sind [91]:

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 &= \frac{1}{2} C_1, \\ \bar{C}_2 &= C_2 - \frac{1}{6} C_1, \\ \bar{C}_3 &= C_3 - \frac{1}{6} C_4 + 16 C_5 - \frac{8}{3} C_6, \\ \bar{C}_4 &= \frac{1}{2} C_4 + 8 C_6, \\ \bar{C}_5 &= C_3 - \frac{1}{6} C_4 + 4 C_5 - \frac{2}{3} C_6, \\ \bar{C}_6 &= \frac{1}{2} C_4 + 2 C_6.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Die Linearkombinationen sind derart gewählt, dass die \bar{C}_i in *führender logarithmischer Ordnung* mit den Wilsonkoeffizienten in der Standardbasis [61] übereinstimmen. Numerische Werte für die Koeffizienten \bar{C}_i sind in Tabelle B.1 aufgelistet. Die obigen Definitionen sind in allen Ordnungen Störungstheorie gültig. Die „gequerten“ Koeffizienten hängen über [62] mit denen die in [61] definiert sind, zusammen. Es gilt

$$\bar{C}_i = C_i^{\text{BBL}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} T_{ij} C_j^{\text{BBL}} + O(\alpha_s^2),\tag{B.2}$$

¹Vgl. [A2].

	\bar{C}_1	\bar{C}_2	\bar{C}_3	\bar{C}_4	\bar{C}_5	\bar{C}_6
LL	-0,474	1,238	0,008	-0,020	0,006	-0,024
NLL	-0,324	1,141	0,012	-0,036	0,009	-0,037
NNLL	-0,290	1,127	0,011	-0,034	0,008	-0,037

Tabelle B.1: „Gequerte“ Wilsonkoeffizienten \bar{C}_{1-6} an der Skala $\mu = 1,5 \text{ GeV}$ in führender logarithmischer (LL), nächstführender logarithmischer (NLL) und nächstnächstführender logarithmischer (NNLL) Ordnung. Die Inputwerte sind dieselben wie in Tabelle 3.2.

wobei

$$T = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{178}{27} & -\frac{4}{9} & \frac{160}{27} & \frac{13}{9} \\ 0 & 0 & \frac{34}{9} & \frac{20}{3} & -\frac{16}{9} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & \frac{164}{27} & \frac{23}{9} & -\frac{146}{27} & -\frac{32}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{9} & -\frac{23}{3} & \frac{2}{9} & \frac{16}{3} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Anhang C

Renormierung des Matrixelements

$$\langle u\ell^+\ell^- | \mathcal{O}_{1,2}^d | c \rangle$$

Um die Funktionen $F_{1,d}^{(7)}$, $F_{1,d}^{(9)}$, $F_{2,d}^{(7)}$ und $F_{2,d}^{(9)}$ zu erhalten, müssen wir zu den nackten (d. h. unrenormierten) Funktionen von den b -Zerfällen zurückgehen, die Ladungsfaktoren ersetzen und die Funktionen renormieren [98]. Der dazu relevante Gegenterm ist gegeben durch

$$\delta\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{4G_{\text{F}}}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 \lambda_d C_i \left[\sum_{j=1}^2 \delta Z_{ij} \mathcal{O}_j^d + \sum_{j=3}^{10} \delta Z_{ij} \mathcal{O}_j + \sum_{j=11}^{12} \delta Z_{ij} \mathcal{O}_j^d \right] + \dots \quad (\text{C.1})$$

Für die Renormierung verwenden wir die Basis, in der die Operatoren \mathcal{O}_{7-10} mit $1/\alpha_s$ reskaliert wurden [98]. Bei den Operatoren $\mathcal{O}_{11,12}$ handelt es sich um sogenannte evaneszente Operatoren, welche in $D = 4$ Dimensionen verschwinden. Wir wählen diese zu

$$\mathcal{O}_{11}^d = (\bar{u}_L \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho T^a d_L) (\bar{d}_L \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho T^a c_L) - 16 \mathcal{O}_1^d, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{O}_{12}^d = (\bar{u}_L \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho d_L) (\bar{d}_L \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho c_L) - 16 \mathcal{O}_2^d. \quad (\text{C.3})$$

Die Renormierungskonstante mit allgemeinen Ladungsfaktoren kann aus den in [85] gegebenen Ergebnissen hergeleitet werden. Sie ist dann gegeben durch [A3]

$$Z = \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -2 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8Q_u}{9} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{2}{9} \\ 6 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2Q_u}{3} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4Q_d}{81} - \frac{Q_u}{3} & 0 & \frac{-44Q_d}{243} - \frac{2Q_u}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-8Q_d}{27} + 2Q_u & 0 & \frac{88Q_d}{81} + \frac{16Q_u}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4(-2Q_d+3(-69+4n_f)Q_u)}{81} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2(8Q_d+3(-21+2n_f)Q_u)}{27} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})
\end{aligned}$$

Aus der Bedingung, dass $\langle \mathcal{H}_{\text{eff}} + \delta\mathcal{H}_{\text{eff}} \rangle$ endlich sein muss, ergeben sich für $i = 1, 2$ die Renormierungsbedingungen

$$\left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 F_{i,d}^{(7),2\text{-loop}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_{i4} F_{4,d}^{(7),1\text{-loop}} + \delta Z_{i7} \stackrel{!}{=} \text{endlich}, \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 F_{i,d}^{(9),2\text{-loop}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_{i1} F_{1,d}^{(9),1\text{-loop}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_{i2} F_{2,d}^{(9),1\text{-loop}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_{i4} F_{4,d}^{(9),1\text{-loop}} + \delta Z_{i9} Z_{g_s}^{-1} \\
& + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_{i11} F_{11,d}^{(9),1\text{-loop}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_{i12} F_{12,d}^{(9),1\text{-loop}} \stackrel{!}{=} \text{endlich}, \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

wobei wir die Matrixelemente gemäß ¹

$$\langle u\ell^+\ell^- | \mathcal{O}_i^d | c \rangle_{i\text{-loop}} = \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{i-1} \left(F_{i,d}^{(7),i\text{-loop}} \langle \tilde{\mathcal{O}}_7 \rangle_{\text{tree}} + F_{i,d}^{(9),i\text{-loop}} \langle \tilde{\mathcal{O}}_9 \rangle_{\text{tree}} \right) \quad i = 1, 2 \quad (\text{C.7})$$

zerlegt haben. Hierbei bezeichnen $\langle \tilde{\mathcal{O}}_7 \rangle_{\text{tree}}$ und $\langle \tilde{\mathcal{O}}_9 \rangle_{\text{tree}}$ die Matrixelemente der reskalierten Operatoren

$$\tilde{\mathcal{O}}_{7,9} = \frac{\alpha_s}{4\pi} \mathcal{O}_{7,9}, \quad (\text{C.8})$$

auf Baumgraphenniveau. Es ist zu beachten, dass die starke Kopplungskonstante in der Definition des Operators \mathcal{O}_9 renormiert werden muss. Die zugehörige Renormierungskonstante Z_{g_s} ist in Gleichung (A.5) gegeben. Für α_s von dem Operator \mathcal{O}_7 ist keine Renormierung erforderlich, weil die Mischung der Vierquarkoperatoren in \mathcal{O}_7 auf Ein Schleifenniveau verschwindet. Daher beginnt die entsprechende Komponente in δZ in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ und die Renormierung der Kopplungskonstante ist ein Effekt höherer Ordnung. Die Massenrenormierung und die Wellenfunktionsrenormierung sind ebenso Effekte höherer Ordnung und müssen somit nicht berücksichtigt werden.

¹Diese Definition unterscheidet sich um ein Vorzeichen von der in [136].

Anhang D

Details zu $D \rightarrow \rho\gamma^*$ Matrixelementen

Nicht-triviale Änderungen der $D \rightarrow \rho\gamma^*$ Amplituden ergeben sich nicht nur bei dem Anpassen der Annihilationsbeiträge an die D -Physik. Auch bei der Anpassung der Beiträge die von den Operatoren \mathcal{O}_{1-6} herrühren, ergeben sich diese teilweise, da das b -Quark in der effektiven Theorie nicht mehr als Freiheitsgrad auftaucht, und in der Schleife somit nur noch die Beiträge von vier aktiven Quarkflavour berücksichtigt werden müssen. Die Amplituden der B -Physik, bei denen die Anzahl der aktiven Quarkflavour noch nicht integriert wurden, können dem Anhang C von [88] entnommen werden. In führender Ordnung α_s ergibt sich das Matrixelement der Operatoren \mathcal{O}_{1-6} in der BBL-Basis, für unseren Zweck angepasst, dann zu

$$\begin{aligned}
& \langle \gamma^* \rho | \sum_{i=1}^6 C_i^{\text{BBL}} \mathcal{O}_i | D \rangle \\
& \stackrel{\mathcal{O}(\alpha_s^0)}{=} - \frac{g_{\text{em}}}{16\pi^2} \left[(N_C C_1^{\text{BBL}} + C_2^{\text{BBL}}) (3e_s h(q^2, m_s)) \right. \\
& \quad + \sum_{q=u,c,d,s} e_q (N_C C_3^{\text{BBL}} + C_4^{\text{BBL}} + N_C C_5^{\text{BBL}} + C_6^{\text{BBL}}) (3h(q^2, m_q) + \frac{4}{3}) \\
& \quad \left. + (C_3^{\text{BBL}} + N_C C_4^{\text{BBL}}) (3e_c h(q^2, m_c)) + (C_3^{\text{BBL}} + N_C C_4^{\text{BBL}}) (3e_d h(q^2, 0)) \right] \\
& \quad \times \langle \gamma^* \rho | \bar{u}(p') (q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q}) (1 - \gamma_5) c(p) | D \rangle . \tag{D.1}
\end{aligned}$$

Dabei entspricht der Ausdruck in den eckigen Klammern gerade $2Y^{(b)}(s)$.

Für die Beiträge von \mathcal{O}_{1-6} in nächstführender Ordnung α_s , bei denen das Photon an

interne Quarklinien koppelt, ergibt sich

$$T_{\perp,+}^{(\text{nf},b)} \propto \frac{M_D}{2m_c} \left[C_2^{\text{BBL}} e_s t_{\perp}(u, m_s) + C_3^{\text{BBL}} (e_d t_{\perp}(u, 0) + e_c t_{\perp}(u, m_c)) \right. \\ \left. + \sum_{q=u,c,d,s} (C_4^{\text{BBL}} - C_6^{\text{BBL}}) e_q t_{\perp}(u, m_q) - 4C_5^{\text{BBL}} e_c m_c / M_D t_{\perp}(u, m_c) \right], \quad (\text{D.2})$$

$$T_{\parallel,+}^{(\text{nf},b)} \propto \frac{M_D}{m_c} \left[C_2^{\text{BBL}} e_s t_{\parallel}(u, m_s) + C_3^{\text{BBL}} (e_d t_{\parallel}(u, 0) + e_c t_{\parallel}(u, m_c)) \right. \\ \left. + \sum_{q=u,c,d,s} (C_4^{\text{BBL}} - C_6^{\text{BBL}}) e_q t_{\parallel}(u, m_q) \right]. \quad (\text{D.3})$$

Um die obigen Beiträge in die CMM-Basis umzurechnen, können wir die Ersetzung $C_i^{\text{BBL}} \rightarrow \bar{C}_i$ vornehmen und Gleichung (B.1) verwenden. Weiterhin ergibt sich gemäß Anhang D aus [88] eine Änderung in der Funktion $Y^{(b)}(s)$

$$+\frac{2}{9}(3C_3^{\text{BBL}} + C_4^{\text{BBL}} + 3C_5^{\text{BBL}} + C_6^{\text{BBL}}) \quad \longrightarrow \quad +\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\bar{C}_3 + 2\bar{C}_4 + \frac{16}{3}\bar{C}_5\right). \quad (\text{D.4})$$

Anhang E

Explizite Formeln für $D \rightarrow \pi \ell^+ \ell^-$ Zerfälle¹

Wir definieren die verallgemeinerten Formfaktoren für $D \rightarrow \pi \gamma^*$ Übergänge durch

$$\langle \gamma^*(q, \mu) \pi^+(p') | \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(i)} | D^+(p) \rangle = \frac{g_{\text{em}} m_c}{4\pi^2} \frac{\mathcal{T}_{P=\pi}^{(i)}(q^2)}{m_D} [q^2 (p^\mu + p'^\mu) - (m_D^2 - M_\pi^2) q^\mu] . \quad (\text{E.1})$$

Mithilfe von [91] erhalten wir die Faktorisierungsformel

$$\mathcal{T}_P^{(i)} \simeq -\xi_P C_{\parallel}^{(i)} + \frac{\pi^2}{N_c} \frac{f_D f_P}{m_D} \sum_{\pm} \int \frac{d\omega}{\omega} \phi_{D,\pm}(\omega) \int_0^1 du \phi_P(u) T_{\parallel,\pm}^{(i)}(u, \omega), \quad (\text{E.2})$$

wobei dieselben Funktionen $T_{\parallel,\pm}^{(i)}$ wie in dem Fall eines Zerfalls in ein longitudinal polarisiertes Vektormeson auftreten. $\xi_P(q^2)$ ist der weiche Formfaktor für $D \rightarrow \pi$ Übergänge [91]. Analog zu den $D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Zerfällen definieren wir die Koeffizientenfunktionen ²

$$C_{9,P}^{(i)}(q^2) = \delta^{ib} C_9 + \frac{2m_c}{m_D} \frac{\mathcal{T}_P^{(i)}(q^2)}{\xi_P(q^2)}. \quad (\text{E.3})$$

Dann können wir die doppelt differentielle Zerfallsrate folgendermaßen schreiben

¹Vgl. [A3].

²Man beachte das andere relative Vorzeichen verglichen mit Gleichung (4.6).

$$\frac{d^2\Gamma(D \rightarrow \pi\ell^+\ell^-)}{dq^2 d\cos\theta} = \frac{G_F^2}{128\pi^3} m_D^3 S \lambda_D^3(q^2, M_\pi^2) \left(\frac{\alpha_{\text{em}}}{4\pi}\right)^2 \times \\ (1 - \cos^2\theta) \xi_\pi^2(q^2) \left| \lambda_d C_{9,\pi}^{(d)} + \lambda_b C_{9,\pi}^{(b)} \right|^2. \quad (\text{E.4})$$

Damit können wir unsere Ergebnisse von den $D \rightarrow \rho\ell^+\ell^-$ Zerfällen unmittelbar dazu verwenden, unsere Analyse auf die $D \rightarrow \pi\ell^+\ell^-$ Zerfälle auszudehnen.

Anhang F

Resonanzmodell

Basierend auf [137, 108, 50] (siehe auch [138, 139, 140, 141, 109]) präsentieren wir in diesem Anhang Details zu dem verwendeten hadronischen Modell und orientieren uns dabei an [A3]. In einer Vorbetrachtung erläutern wir die Modellierung der Vektorresonanzen und des Kontinuums. Danach wenden wir das Modell auf die verschiedenen Topologien an. Wir betonen, dass wir hier nicht an einer realistischen Beschreibung des Spektrums, sondern nur an einer sinnvollen Abschätzung der hadronischen Unsicherheiten interessiert sind.

I. Modellierung der Vektorresonanzen

Für die Modellierung der Vektormesonresonanzen verwenden wir einen modifizierten Breit-Wigner-Ansatz (BWA) [108, 50]. Im Vergleich zu dem für gewöhnlich in der Literatur verwendeten normalen BWA, weist der modifizierte Ansatz das richtige analytische Verhalten auf, nämlich einen Verzweigungsschnitt bei $q^2 = 0$. Außerdem können wir mittels des modifizierten Ansatzes auch die Resonanzeffekte jenseits der Region $q^2 \simeq M_V^2$ kontrollieren, der normale Ansatz gestattet dies nur in der unmittelbaren Resonanzregion. Im Folgenden unterscheiden wir zwischen Resonanzen mit leichtem, flavourlosem Quarkinhalt (u, d) und Resonanzen im $\bar{s}s$ -Kanal. Für den ersten Fall machen wir den Ansatz

$$f_{\text{mod}}(q^2) = \hat{n}_V \left(1 + z_V \frac{\sigma_V^2}{M_V^2} \right)^{-1}, \quad z_V = \left(\frac{-q^2 - i\varepsilon}{\sigma_V^2} \right)^{1-b_V/\pi}, \quad b_V = \frac{\Gamma_V}{M_V}, \quad (\text{F.1})$$

wobei wir die Pionmasse auf null gesetzt haben. Im zweiten Fall müssen wir die Definition von z_V modifizieren, um die Schwelle für die $K\bar{K}$ -Produktion zu berücksichtigen;

Mischungseffekte vernachlässigen wir. Dies führt uns zu dem Ansatz

$$f_{\text{mod}}^{(s\bar{s})}(q^2) = \hat{n}_V \left(1 + \tilde{z}_V \frac{\tilde{\sigma}_V^2}{\tilde{M}_V^2} \right)^{-1}, \quad (\text{F.2})$$

mit

$$\tilde{z}_V = \left(\frac{4m_K^2 - q^2 - i\varepsilon}{\tilde{\sigma}_V^2} \right)^{1 - \tilde{b}_V/\pi}, \quad \tilde{b}_V = \frac{\tilde{\Gamma}_V}{\tilde{M}_V} \left(1 - \frac{4m_K^2}{\tilde{\sigma}_V^2} \right). \quad (\text{F.3})$$

Den Imaginärteil des modifizierten BWA können wir im ersten Fall wie folgt approximieren,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Im} [f_{\text{mod}}] &= \frac{\hat{n}_V \theta(q^2)}{\pi} \frac{|z_V| \hat{\sigma}_V^2 \sin b_V}{1 - 2|z_V| \hat{\sigma}_V^2 \cos b_V + |z_V|^2 \hat{\sigma}_V^4} \\ &\simeq \frac{n_V \theta(q^2)}{\pi} \frac{q^2 M_V \Gamma_V}{(q^2 - M_V^2)^2 + q^2 \Gamma_V^2}, \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

wobei wir in der letzten Zeile der Einfachheit halber $\hat{\sigma}_V^2 = \sigma_V^2/M_V^2 = 1$ gesetzt und $b_V \ll 1$ ausgenutzt haben. Für den $\bar{s}s$ -Kanal erhalten wir analog (für $\tilde{\sigma}_V^2 \simeq M_V^2$)

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} [f_{\text{mod}}^{(s\bar{s})}] \simeq \frac{n_V}{\pi} \frac{(q^2 - 4m_K^2) \theta(q^2 - 4m_K^2)}{\tilde{M}_V^2 - 4m_K^2} \frac{q^2 \tilde{M}_V^3 \tilde{\Gamma}_V}{(q^2 - \tilde{M}_V^2)^2 + \frac{q^2 - 4m_K^2}{\tilde{M}_V^2 - 4m_K^2} \tilde{M}_V^2 \tilde{\Gamma}_V^2}. \quad (\text{F.5})$$

Wir bemerken, dass der obige Ansatz den normalen BWA für $q^2 \simeq M_V^2 \approx \sigma_V^2$ und $b_V \ll 1$ reproduziert. Am Beispiel des ersten Falles erhalten wir in dieser Näherung also

$$f_{\text{BW}}(q^2) = \frac{n_V M_V^2}{M_V^2 - q^2 - i M_V \Gamma_V}, \quad \frac{1}{\pi} \text{Im} [f_{\text{BW}}] = \frac{n_V}{\pi} \frac{M_V^3 \Gamma_V}{(q^2 - M_V^2)^2 + M_V^2 \Gamma_V^2}. \quad (\text{F.6})$$

Weiterhin erhalten wir im zweiten Fall in dem Limes $m_K^2 \rightarrow -\infty$ den normalen BWA zurück.

II. Modellierung des Kontinuums

Das Kontinuum modellieren wir durch eine unendliche Reihe von äquidistanten Resonanzen mit den Massen $M_n^2 = (n + a_0) \sigma^2$ und den Breiten $\Gamma_n = b M_n$, für $n =$

$\{0, 1, 2, \dots\}$ und $a_0 = \text{const.}$ Im Folgenden argumentieren wir, dass die Funktion

$$\pi(q^2) = \frac{1}{1 - b/\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + a_0 + z} = -\frac{1}{1 - b/\pi} \Psi(z + a_0), \quad z = \left(\frac{-q^2 - i\varepsilon}{\sigma^2} \right)^{1-b/\pi}, \quad (\text{F.7})$$

eine sinnvolle Beschreibung des Kontinuums liefert. Erstens trägt jede einzelne Resonanz wie ein modifizierter BW zu dem Kontinuum bei. Zweitens reproduziert sie das von der Quarkschleifenfunktion bekannte asymptotische Ergebnis (vgl. Gleichung (F.16))

$$\lim_{-q^2 \rightarrow \infty} \pi(q^2) = -\ln \frac{-q^2}{\sigma^2} + \mathcal{O}(\sigma^2/q^2). \quad (\text{F.8})$$

Letztlich erhält der Imaginärteil von $\pi(q^2)$ für einen zeitartigen Impulsübertrag, $q^2 > 0$, einen oszillatorischen Anteil, welchen wir benötigen um das Kontinuum zu beschreiben. Im Weiteren illustrieren wir dies kurz für ein vereinfachtes Modell mit $a_0 = 1$ [108, 50]. In diesem Fall erhalten wir

$$\psi(z + 1) = \psi(z) + \frac{1}{z} = \psi(-z) - \pi \cot(\pi z), \quad (\text{F.9})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Im} [\pi(q^2)]_{\text{osc.}} &\simeq \text{Im} [\cot(\pi z)] \\ &= -\frac{\sinh(2\pi|z| \sin b) \theta(q^2)}{\cos(2\pi|z| \cos b) - \cosh(2\pi|z| \sin b)} \\ &\approx \left(1 + 2 \exp\left(-\frac{2\pi q^2 b}{\sigma^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi q^2}{\sigma^2}\right) \right) \theta(q^2), \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

wobei die letzte Näherung für $q^2 > s_0 \equiv \frac{\sigma^2}{2\pi b}$ (und $\frac{b}{\pi} \left| \ln \frac{q^2}{\sigma^2} \right| \ll 1$) gültig ist.

III. Modellansatz

Unser Modellansatz lautet damit insgesamt wie folgt:

$$j_{(u/d)}(q^2) = \frac{n_V}{\pi} \frac{q^2 M_V \Gamma_V}{(q^2 - M_V^2)^2 + q^2 \Gamma_V^2}$$

$$-\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{1-b/\pi} \Psi(z+a) \right], \quad z = \left(\frac{-q^2 - i\varepsilon}{\sigma^2} \right)^{1-b/\pi}, \quad (\text{F.11})$$

und

$$j_{(s)}(q^2) = \frac{n_\phi}{\pi} \frac{(q^2 - 4m_K^2) \theta(q^2 - 4m_K^2)}{m_\phi^2 - 4m_K^2} \frac{m_\phi^3 \Gamma_\phi}{(q^2 - m_\phi^2)^2 + \frac{q^2 - 4m_K^2}{m_\phi^2 - 4m_K^2} m_\phi^2 \Gamma_\phi^2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{1-b_s/\pi} \Psi(z_s + a_s) \right], \quad z_s = \left(\frac{4m_K^2 - q^2 - i\varepsilon}{\sigma_s^2} \right)^{1-b_s/\pi} \quad (\text{F.12})$$

Der Einfachheit halber haben wir die Resonanzen ρ und ω kombiniert und die Näherungen $M_V \simeq m_\rho \simeq m_\omega$ und $\Gamma_V \simeq \Gamma_\rho$ verwendet. Den Realteil der betrachteten Funktion können wir aus der entsprechenden Dispersionsrelation erhalten. Für die numerische Abschätzung verwenden wir die Parameterwerte

$$M_V \equiv m_\rho = 775 \text{ MeV}, \quad \Gamma_V \equiv \Gamma_\rho = 149 \text{ MeV}, \\ m_\phi = 1019 \text{ MeV}, \quad \Gamma_\phi = 4.27 \text{ MeV}, \quad m_K = 497 \text{ MeV}, \quad (\text{F.13})$$

und

$$b \equiv 1/6, \quad \sigma^2 \equiv 2 \text{ GeV}^2, \quad a \equiv 1, \\ b_s \simeq \frac{\Gamma_{\phi(1680)}}{m_{\phi(1680)}} \simeq 0.1, \quad \sigma_s^2 \simeq \sigma^2, \quad a_s = \frac{m_{\phi(1680)}^2}{\sigma_s^2} \simeq 1.4. \quad (\text{F.14})$$

Die Werte für σ^2 und a haben wir aus [108, 50] entnommen. Sie entstammen einem Fit an τ -Zerfallsdaten im Vektorkanal. Den Wert für σ_s^2 haben wir durch die Flavoursymmetrie festgelegt. Dies ist konsistent mit dem Massensplitting $m_{\phi(2175)}^2 - m_{\phi(1680)}^2 \simeq 1,9 \text{ GeV}^2$. Die Normierungsfaktoren n_V und n_ϕ ergeben sich durch die Forderung, dass die entsprechenden Integrale über $j_{(i)}(s)$ für das perturbative und hadronische Ergebnis übereinstimmen müssen.

F.1 Anwendung auf die Quarkschleifentopologie

Die Quarkschleifentopologie entspricht in führender Ordnung mathematisch der Funktion

$$h(q^2, m_q) = -\frac{4}{9} \left(\ln \frac{m_q^2}{\mu^2} - \frac{2}{3} - \zeta \right) - \frac{4}{9} (2 + \zeta) \sqrt{1 - \zeta} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \zeta}}{\sqrt{-\zeta}} \right], \quad (\text{F.15})$$

mit $\zeta = \frac{4m_q^2}{q^2 + i\varepsilon}$. Für den Limes $q^2 \rightarrow -\infty$ besitzt sie die asymptotische Form

$$h(q^2, m) \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} -\frac{4}{9} \ln \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) + \text{endliche Terme.} \quad (\text{F.16})$$

Um von der perturbativen zu der hadronischen Beschreibung zu wechseln, führen wir die Ersetzung

$$h(q^2, m_q) \rightarrow h(-\sigma^2, m_q) \Big|_{\text{OPE}} + \frac{4}{9} \int_0^\infty ds \frac{\sigma^2 + q^2}{\sigma^2 + s} \frac{j_q(s)}{s - q^2 - i\varepsilon}, \quad (m_{u,d} = 0, m_s)$$

durch, wobei die hadronischen Parameter in der Spektralfunktion $j_q(s)$ von den leichten Quarkflavour abhängen. Den Term $h(-\sigma^2, m_q)$ haben wir hinzugefügt um die Abhängigkeit von der Renormierungsskala in das Modell zu integrieren. Für die Renormierungsskala wählen wir $\mu = 1,5 \text{ GeV}$. Die Parameter n_V und n_ϕ erhalten wir durch die Forderung

$$\int_0^\infty ds \frac{j_q(s) - j_{\text{OPE}}(s)}{s + \sigma^2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{F.17})$$

Daraus erhalten wir $n_V \simeq 1,94$ und $n_\phi \simeq 2,37$. In den Abbildungen F.1,F.2 vergleichen wir das perturbative Ergebnis für den Real- und Imaginärteil der Schleifenfunktionen mit deren hadronischen Gegenstücken. Außerdem vergleichen wir für die tiefliegenden Resonanzen den modifizierten BWA mit dem normalen Ansatz. Dazu machen wir die folgenden Bemerkungen:

- Für $q^2 < 0$ und $q^2 \gtrsim 5 \text{ GeV}^2$ approximiert das perturbative Ergebnis das hadronische Modell sehr gut.
- Für kleine positive Werte von q^2 weist die Modellfunktion ein oszillatorisches Verhalten auf.
- Der Realteil und auch der Betrag unserer Modellfunktion für $h(q^2, m_{u,d})$ liefert etwas größere Werte als der einfache BWA. Dies kann auf Beiträge von höheren Resonanzen zurückgeführt werden.
- In der Nähe einer Resonanz sind sich die Imaginärteile des modifizierten und des normalen BWA recht ähnlich. Für $q^2 = 0$ verschwindet der Imaginärteil der Modellfunktion. Im Gegensatz dazu liefert der normale Ansatz ein endliches Ergebnis.

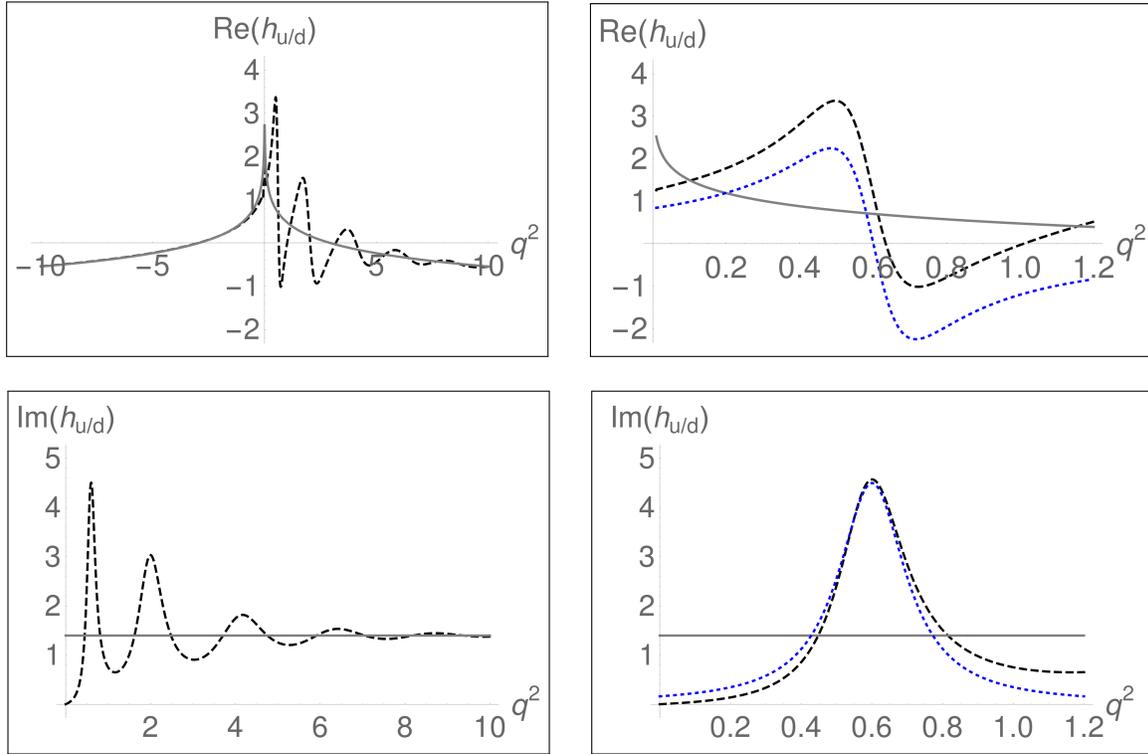


Abbildung F.1: Vergleich des perturbativen Ergebnisses für den Real- und Imaginärteil der Funktion $h(q^2, 0)$ (graue durchgehende Linie) mit dem Modell (4.17) unter Verwendung von (F.11) für dessen hadronische Modifikation (schwarze gestrichelte Linie) als Funktion von q^2 (in Einheiten von GeV^2). Auf der rechten Seite vergleichen wir zusätzlich mit dem einfachen Breit-Wigner-Ansatz (blaue gepunktete Linie). Die Parameterwerte sind wie folgt gewählt: $\sigma^2 = 2 \text{ GeV}^2$, $a = 1$, $b = 1/6$, $\mu^2 = 1,5 \text{ GeV}^2$. Der Wert von $n_V = 1,94$ ist so adjustiert, dass er das perturbative Ergebnis im Limes $q^2 \rightarrow -\infty$ reproduziert. Entnommen aus [A3].

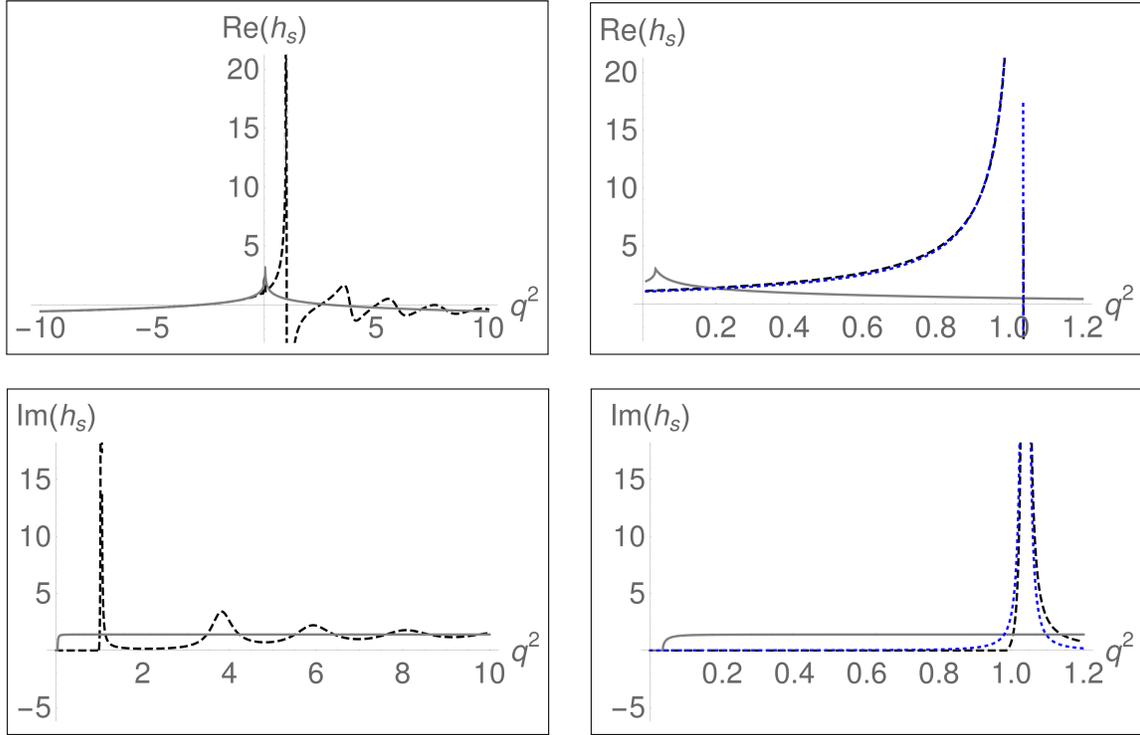


Abbildung F.2: Vergleich des perturbativen Ergebnisses für den Real- und Imaginärteil der Funktion $h(q^2, m_s)$ (graue durchgehende Linie) mit dem Modell (4.17) unter Verwendung von (F.11) für dessen hadronische Modifikation (schwarze gestrichelte Linie) als Funktion von q^2 (in Einheiten von GeV^2). Auf der rechten Seite vergleichen wir zusätzlich mit dem einfachen Breit-Wigner-Ansatz (blaue gepunktete Linie). Die Parameterwerte sind wie folgt gewählt: $\sigma^2 = 2 \text{ GeV}^2$, $a_s = 1, 4$, $b_s = 0, 1$, $\mu^2 = 1, 5 \text{ GeV}^2$. Der Wert von $n_\phi = 2, 37$ ist so adjustiert, dass er das perturbative Ergebnis im Limes $q^2 \rightarrow -\infty$ reproduziert. Entnommen aus [A3].

F.2 Anwendung auf die Annihilationstopologie

Bei der Annihilationstopologie treten in führender Ordnung die Funktionen, auch „Momente“ genannt,

$$(\lambda_D^\pm(q^2))^{-1} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega - q^2/m_D - i\varepsilon} \phi_D^\pm(\omega), \quad (\text{F.18})$$

auf. Im Folgenden vernachlässigen wir Beiträge von 3-Teilchenzuständen im D -Meson. In diesem Fall genügen die Lichtkegelverteilungsamplituden $\phi_D^\pm(\omega)$ der sogenannten Wandzura-Wilczek-Relation [66],

$$\phi_D^+(\omega) \simeq -\omega \frac{d\phi_D^-(\omega)}{d\omega}, \quad (\text{F.19})$$

was für die obigen Momente

$$-q^2 \frac{\partial}{\partial q^2} [\lambda_D^-(q^2)]^{-1} = [\lambda_D^+(q^2)]^{-1}, \quad (\text{F.20})$$

impliziert. Alternativ dazu können die Momente durch die Wandzura-Wilczek-Wellenfunktion $\psi_D(x)$ [73] dargestellt werden. Dabei ist

$$\phi_D^+(\omega) = \omega \int_\omega^\infty dx \psi_D(x), \quad \phi_D^-(\omega) = \int_\omega^\infty dx (x - \omega) \psi_D(x), \quad (\text{F.21})$$

und x ist die zweifache Energie des Spektatorquarks in dem D -Meson. Damit gilt

$$\begin{aligned} (\lambda_D^+(q^2))^{-1} &= \int_0^\infty dx \left[x + \frac{q^2}{m_D} \ln \left(1 - \frac{m_D x}{q^2 + i\varepsilon} \right) \right] \psi_D(x), \\ (\lambda_D^-(q^2))^{-1} &= \int_0^\infty dx x \ln \left(1 - \frac{m_D x}{q^2 + i\varepsilon} \right) \psi_D(x) - (\lambda_D^+(q^2))^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

Daraus ergeben sich die Imaginärteile der Momente zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Im} (\lambda_D^+(q^2))^{-1} &= \int_0^\infty dx \theta(q^2) \theta(m_D x - q^2) \frac{q^2}{m_D} \psi_D(x) = \theta(q^2) \phi_D^+(q^2/m_D), \\ \frac{1}{\pi} \text{Im} (\lambda_D^-(q^2))^{-1} &= \int_0^\infty dx \theta(q^2) \theta(m_D x - q^2) \left(x - \frac{q^2}{m_D} \right) \psi_D(x) = \theta(q^2) \phi_D^-(q^2/m_D). \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

Um von dem perturbativen zu dem hadronischen Bild zu wechseln, ersetzen wir $\theta(q^2)$ durch die im letzten Kapitel eingeführte Spektralfunktion $j_{u/d}(q^2)$. Das führt uns zu der Ersetzungsregel

$$(\lambda_D^\pm(q^2))^{-1} \rightarrow \int_0^\infty \frac{ds}{s - q^2 - i\varepsilon} \phi_D^\pm(s/m_D) j_{u/d}(s). \quad (\text{F.24})$$

In Gleichung (F.24) taucht das Produkt der Lichtkegelverteilungsamplitude ϕ_D^\pm und der Modellfunktion $j_{u/d}(q^2)$ auf. Dies entspricht der naiven Faktorisierung in die Teilprozesse $D \rightarrow \rho q \bar{q}$ und $q \bar{q} \rightarrow \gamma^*$. Damit wird an dieser Stelle klar, dass diese einfache Ersetzungsregel in der nächstführenden Ordnung in α_s keine Gültigkeit mehr besitzt. Die Parameter n_V (für ϕ_D^+ und ϕ_D^-) ergeben sich durch die Bedingung

$$\int_0^\infty ds \phi_D^\pm(s/m_D) (j_{u/d}(s) - 1) \stackrel{!}{=} 0, \quad (\text{F.25})$$

zu $n_V = 2,40$ für $\lambda_D^-(q^2)$ und $n_V = 1,75$ für $\lambda_D^+(q^2)$. Dabei haben wir für die Lichtkegelverteilungsamplituden $\phi_D^\pm(\omega)$ ein Exponentialmodell [142]

$$\phi_D^-(\omega) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\omega/\omega_0}, \quad \phi_D^+(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0^2} e^{-\omega/\omega_0}, \quad (\text{F.26})$$

mit dem Parameter $\omega_0 = 0,45$ GeV angenommen. Die Abbildungen F.3 und F.4 zeigen einen Vergleich zwischen dem perturbativen und dem hadronischen Ergebnis.

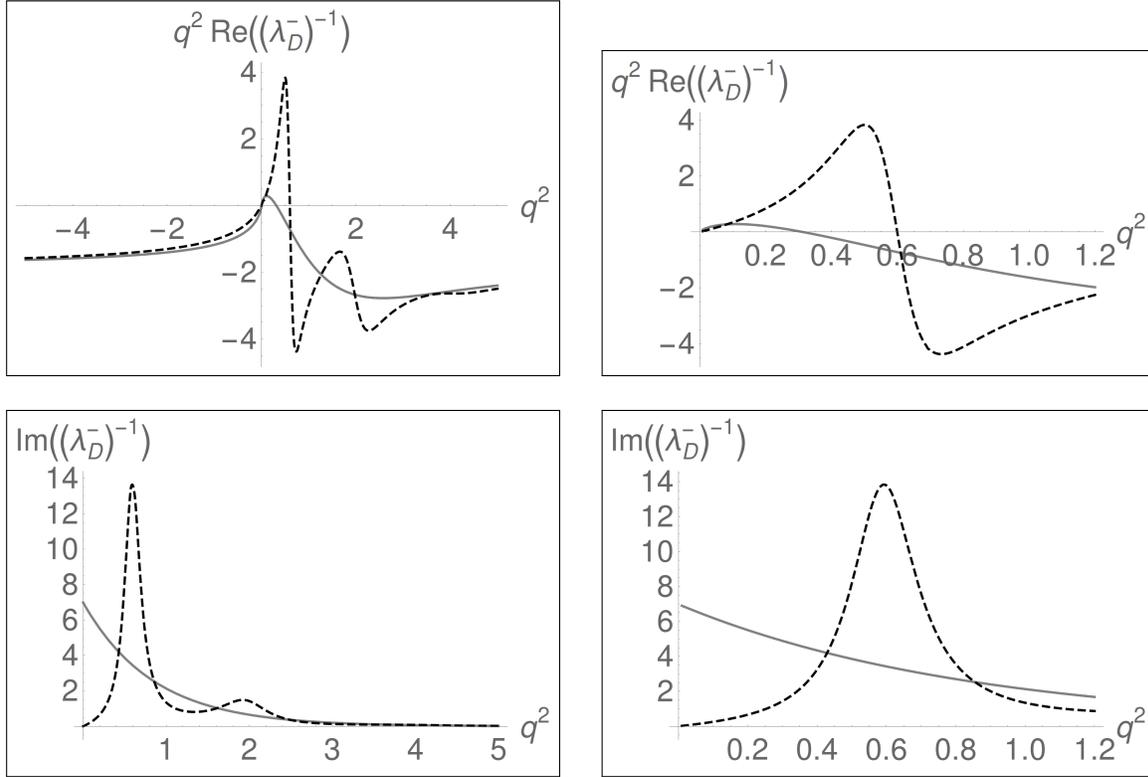


Abbildung F.3: Vergleich des perturbativen Ergebnisses für den Real- und Imaginärteil der Funktion $(\lambda_D^-(q^2))^{-1}$ (masseloser Spektator, graue durchgehende Linie) mit dem Modell (4.21) für dessen hadronische Modifikation (schwarze gestrichelte Linie) als Funktion von q^2 (in Einheiten von GeV^2). Es ist zu beachten, dass der Realteil mit q^2 multipliziert wurde. Die Parameterwerte sind wie folgt gewählt: $\sigma^2 = 2 \text{ GeV}^2$, $a = 1$, $b = 1/6$. Die D -Meson LCDA wird durch eine Exponentialfunktion modelliert (F.26) mit $\omega_0 = 0,45 \text{ GeV}$. Der Parameter $n_V = 2,40$ ist so adjustiert, dass das Ergebnis für tiefe Euklidische Werte von q^2 reproduziert wird. Entnommen aus [A3].

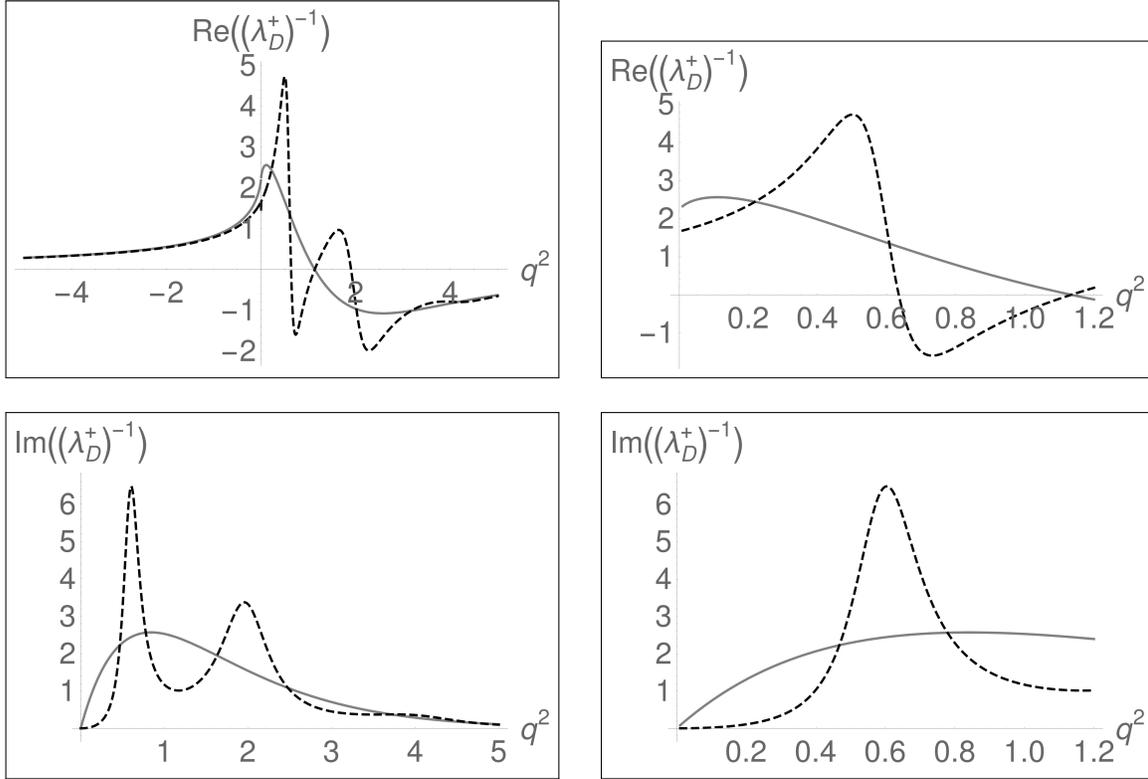


Abbildung F.4: Vergleich des perturbativen Ergebnisses für den Real- und Imaginärteil der Funktion $(\lambda_D^+(q^2))^{-1}$ (masseloser Spektator, graue durchgehende Linie) mit dem Modell (4.24) für dessen hadronische Modifikation (schwarze gestrichelte Linie) als Funktion von q^2 (in Einheiten von GeV^2). Die Parameterwerte sind wie folgt gewählt: $\sigma^2 = 2 \text{ GeV}^2$, $a = 1$, $b = 1/6$. Die D -Meson LCDA wird durch eine Exponentialfunktion modelliert mit $\omega_0 = 0,45 \text{ GeV}$. Der Parameter $n_V = 1,75$ ist so adjustiert, dass das Ergebnis für tiefe Euklidische Werte von q^2 reproduziert wird. Entnommen aus [A3].

Anhang G

Rechnerische Details zum Zerfall

$$B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$$

G.1 Größen in verschiedenen Bezugssystemen

In diesem Kapitel geben wir kinematische Größen in den verschiedenen Bezugssystemen an. Dabei orientieren wir uns an [127] und berücksichtigen Modifikationen durch die Kaonmasse.

Das Dileptonruhesystem

Im Dileptonruhesystem erhalten wir

$$\begin{aligned} q_{1,2}^\mu &= (E_\ell, \mp |\vec{q}_{RF}| \sin \theta_\ell, 0, \mp |\vec{q}_{RF}| \cos \theta_\ell), \\ q^\mu &= 2E_\ell(1, 0, 0, 0), \\ \bar{q}^\mu &= -\sqrt{q^2} \beta_\ell (0, \sin \theta_\ell, 0, \cos \theta_\ell), \end{aligned} \tag{G.1}$$

mit

$$|\vec{q}_{RF}| = \frac{\sqrt{q^2}}{2} \beta_\ell, \quad \beta_\ell^2 = 1 - \frac{4m_\ell^2}{q^2}. \tag{G.2}$$

Dabei sind E_ℓ und m_ℓ die Energie bzw. die Masse des Leptons. Um von dem Dileptonruhesystem in das Ruhesystem des B -Mesons zu transformieren, verwenden wir die

Transformationsmatrix

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{q^0}{\sqrt{q^2}} & 0 & 0 & \frac{-|\vec{q}|}{\sqrt{q^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-|\vec{q}|}{\sqrt{q^2}} & 0 & 0 & \frac{q^0}{\sqrt{q^2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.3})$$

wobei wir q^0 und $|\vec{q}|$ weiter unten definieren.

Das B -Meson-Ruhsystem

Im B -Meson-Ruhsystem erhalten wir

$$\begin{aligned} p^\mu &= (M_B, 0, 0, 0), \\ q^\mu &= (q^0, 0, 0, -|\vec{q}|), \\ k^\mu &= (M_B - q^0, 0, 0, +|\vec{q}|), \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

mit

$$q^0 = \frac{M_B^2 - k^2 + q^2}{2M_B}, \quad |\vec{q}| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2M_B}. \quad (\text{G.5})$$

Das Dimesonruhsystem

Im Dimesonruhsystem erhalten wir

$$\begin{aligned} k_1^\mu &= (\hat{E}_1, -|\vec{k}_{\text{RF}}| \sin \theta_K \cos \phi, -|\vec{k}_{\text{RF}}| \sin \theta_K \sin \phi, +|\vec{k}_{\text{RF}}| \cos \theta_K), \\ k_2^\mu &= (\hat{E}_2, +|\vec{k}_{\text{RF}}| \sin \theta_K \cos \phi, +|\vec{k}_{\text{RF}}| \sin \theta_K \sin \phi, -|\vec{k}_{\text{RF}}| \cos \theta_K), \\ k^\mu &= (\sqrt{k^2}, 0, 0, 0), \\ \bar{k}^\mu &= (\hat{E}_1 - \hat{E}_2, -2|\vec{k}_{\text{RF}}| \sin \theta_K \cos \phi, -2|\vec{k}_{\text{RF}}| \sin \theta_K \sin \phi, 2|\vec{k}_{\text{RF}}| \cos \theta_K), \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

mit

$$\hat{E}_{1,2} = \frac{k^2 \pm m_K^2}{2\sqrt{k^2}}, \quad |\vec{k}_{\text{RF}}| = \frac{\sqrt{\lambda_K}}{2\sqrt{k^2}}. \quad (\text{G.7})$$

Um von dem Dimesonruhesystem in das Ruhesystem des B -Mesons zu transformieren, verwenden wir die Transformationsmatrix

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \frac{M_B - q^0}{\sqrt{k^2}} & 0 & 0 & \frac{|\vec{q}|}{\sqrt{k^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{|\vec{q}|}{\sqrt{k^2}} & 0 & 0 & \frac{M_B - q^0}{\sqrt{k^2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.8})$$

G.2 Farbfaktoren

Je nach Flavourtologie treten in den Amplituden unterschiedliche Farbfaktoren auf:

(a) Flavourtologie 1

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1^u \rangle &\sim \langle \bar{s}^i u^j \rangle \langle \bar{u}^k b^l \rangle T_{ij}^a T_{kl}^a, \quad i = j \rightarrow 0, \text{ wegen } T_{ii}^a = 0, \\ \langle \mathcal{O}_2^u \rangle &\sim \langle \bar{s}^i u^i \rangle \langle \bar{u}^j b^j \rangle \sim \delta_{ii}/N_C \delta_{jj}/N_C \rightarrow 1, \\ \langle \mathcal{O}_{3,5} \rangle &\sim \langle \bar{s}^i u^j \rangle \langle \bar{u}^j b^i \rangle \sim \delta_{ij}/N_C \delta_{ij}/N_C \rightarrow 1/N_C, \\ \langle \mathcal{O}_{4,6} \rangle &\sim \langle \bar{s}^i u^l \rangle \langle \bar{u}^k b^j \rangle T_{ij}^a T_{kl}^a \sim C_F/N_C \delta_{ii}/N_C \delta_{jj}/N_C \rightarrow C_F/N_C, \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

(b) Flavourtologie 2

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1^u \rangle &\sim \langle \bar{s}^i b^l \rangle \langle \bar{u}^k u^j \rangle T_{ij}^a T_{kl}^a \sim C_F/N_C \delta_{ii}/N_C \delta_{jj}/N_C \rightarrow C_F/N_C, \\ \langle \mathcal{O}_2^u \rangle &\sim \langle \bar{s}^i b^j \rangle \langle \bar{u}^j b^i \rangle \sim \delta_{ij}/N_C \delta_{ij}/N_C \rightarrow 1/N_C, \\ \langle \mathcal{O}_{3,5} \rangle &\sim \langle \bar{s}^i b^i \rangle \langle \bar{u}^j u^j \rangle \sim \delta_{ii}/N_C \delta_{jj}/N_C \rightarrow 1, \\ \langle \mathcal{O}_{4,6} \rangle &\sim \langle \bar{s}^i b^j \rangle \langle \bar{u}^k u^l \rangle T_{ij}^a T_{kl}^a, \quad i = j \rightarrow 0, \text{ wegen } T_{ii}^a = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Dabei haben wir die Fierzidentität

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{C_F}{N_C} \delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N_C} T_{il}^a T_{kj}^a \quad (\text{G.11})$$

verwendet.

G.3 Kinematische Invarianten

Die folgenden kinematischen Invarianten tauchen in der Rechnung auf

$$k \cdot q = \frac{M_B^2 - q^2 - k^2}{2}, \quad (\text{G.12})$$

$$(k \cdot q)^2 = k^2 q^2 + \lambda/4, \quad (\text{G.13})$$

$$k \cdot \bar{q} = \frac{\sqrt{\lambda} |\vec{q}_{RF}|}{\sqrt{q^2}} \cos \theta_\ell, \quad (\text{G.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{k} \cdot \bar{q} &= 2(\hat{E}_1 - \hat{E}_2) M_B \frac{|\vec{q}| |\vec{q}_{RF}|}{\sqrt{q^2} \sqrt{k^2}} \cos \theta_\ell - 4 |\vec{q}_{RF}| |\vec{k}_{RF}| \sin \theta_K \sin \theta_\ell \cos \phi \\ &\quad + 2 \frac{|\vec{q}_{RF}| |\vec{k}_{RF}|}{\sqrt{q^2} \sqrt{k^2}} (M_B^2 - k^2 - q^2) \cos \theta_K \cos \theta_\ell, \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

$$\bar{q} \cdot \bar{q}_{(\perp)} = 4 |\vec{q}_{RF}| |\vec{k}_{RF}| \sin \theta_K \sin \theta_\ell \sin \phi, \quad (\text{G.16})$$

$$\bar{q} \cdot \bar{k}_{(\parallel)} = -4 |\vec{q}_{RF}| |\vec{k}_{RF}| \sin \theta_K \sin \theta_\ell \cos \phi, \quad (\text{G.17})$$

$$\varepsilon^{\nu\rho\sigma} k_{(0)\mu} \bar{k}_{(\parallel)\nu} q_{1\rho} q_{2\sigma} = \sqrt{\lambda} |\vec{k}_{RF}| |\vec{q}_{RF}| \sin \theta_K \sin \theta_\ell \sin \phi, \quad (\text{G.18})$$

$$\varepsilon^{\nu\rho\sigma} k_{(0)\mu} \bar{q}_{(\perp)\nu} q_{1\rho} q_{2\sigma} = -k \cdot \bar{k} q^2 \bar{q} \cdot k + k \cdot q q \cdot \bar{k} \bar{q} \cdot k - \frac{\lambda}{4} \bar{q} \cdot \bar{k}, \quad (\text{G.19})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\nu\rho\sigma} \bar{k}_{(\parallel)\mu} \bar{q}_{(\perp)\nu} q_{1\rho} q_{2\sigma} &= -k \cdot \bar{k} q^2 \bar{q} \cdot k + (\bar{k} \cdot q)^2 \bar{q} \cdot k \\ &\quad + \frac{4}{\lambda} (k \cdot \bar{k} q^2 - k \cdot q q \cdot \bar{k}) (-k \cdot \bar{k} q^2 \bar{q} \cdot k + k \cdot q q \cdot \bar{k} \bar{q} \cdot k). \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

Anhang H

Liste von Akronymen

In diesem Anhang geben wir eine Übersicht über die in dieser Arbeit verwendeten Akronyme. Weil sich alle Akronyme auf Worte in der englischen Sprache beziehen, erfolgt die Erklärung auch in dieser Sprache. Der Fließtext enthält sowohl Akronyme als auch deren Entsprechung im deutschen, in seltenen Fällen auch deren Entsprechung im englischen.

BBL	Buras-Buchalla-Lautenbacher
BSM	Beyond the Standard Model
BW	Breit-Wigner
ChPT	Chiral Perturbation Theory
CKM	Cabbibo-Kobayashi-Maskawa
CMM	Chetyrkin-Misiak-Munz
EFT	Effective Field Theory
FCNC	Flavour Changing Neutral Current
HQET	Heavy Quark Effective Theory
LCDA	Light Cone Distribution Amplitude
LCSR	Light Cone Sum Rule
LHC	Large Hadron Collider
LL	Leading Logarithmic order

LO	Leading Order
LQCD	Lattice QCD
NLL	Next-to Leading Logarithmic order
NLO	Next-to Leading Order
NNLL	Next-to Next-to Leading Logarithmic order
NNLO	Next-to Next-to Leading Order
NP	New Physics
OPE	Operator Product Expansion
QCD	Quantum Chromo Dynamics
QCDF	QCD Factorization
QED	Quantum Electro Dynamics
QHD	Quark Hadron Duality
RGE	Renormalization Group Equation
SCET	Soft Collinear Effective Theory
SM	Standard Model

Literaturverzeichnis

- [1] Griffiths D. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, 2008. (Cited on page 1.)
- [2] Nikolaou S.M. *Die Atomlehre Demokrits und Platons Timaios. Eine vergleichende Untersuchung..* Vieweg + Teubner, 1998. (Cited on page 1.)
- [3] Gernot Böhme H.B. *Feuer, Wasser, Erde, Luft. Eine Kulturgeschichte der Elemente*. C. H. Beck, 1996. (Cited on page 1.)
- [4] Thomson J. *Cathode rays*. *Phil.Mag.* **44**, (1897), 293–316. (Cited on page 1.)
- [5] Chadwick J. *Possible Existence of a Neutron*. *Nature* **129**, (1932), 312. (Cited on page 1.)
- [6] Gell-Mann M. *A Schematic Model of Baryons and Mesons*. *Phys.Lett.* **8**, (1964), 214–215. (Cited on page 2.)
- [7] Abachi S. et al. [D0]. *Search for high mass top quark production in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV*. *Phys. Rev. Lett.* **74**, (1995), 2422–2426. arXiv:hep-ex/9411001. (Cited on page 2.)
- [8] Abe F. et al. [CDF]. *Observation of top quark production in $p\bar{p}$ collisions*. *Phys. Rev. Lett.* **74**, (1995), 2626–2631. arXiv:hep-ex/9503002. (Cited on page 2.)
- [9] Kodama K. et al. [DONUT]. *Observation of tau neutrino interactions*. *Phys. Lett.* **B504**, (2001), 218–224. arXiv:hep-ex/0012035. (Cited on page 2.)
- [10] Antonelli M. et al. *Flavor Physics in the Quark Sector*. *Phys. Rept.* **494**, (2010), 197–414. arXiv:0907.5386. (Cited on page 2.)
- [11] Aaij R. et al. [LHCb]. *Implications of LHCb measurements and future prospects*. *Eur. Phys. J.* **C73** (4), (2013), 2373. arXiv:1208.3355. (Cited on page 2.)

- [12] Artuso M. et al. *B, D and K decays*. Eur. Phys. J. **C57**, (2008), 309–492. arXiv:0801.1833. (Cited on page 2.)
- [13] Aad G. et al. [ATLAS Collaboration]. *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*. Phys.Lett. **B716**, (2012), 1–29. arXiv:1207.7214. (Cited on pages 3 and 15.)
- [14] Chatrchyan S. et al. [CMS]. *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*. Phys. Lett. **B716**, (2012), 30–61. arXiv:1207.7235. (Cited on pages 3 and 15.)
- [15] Cowan G. *Future LHCb upgrades and long-term physics prospects*. 2017. LHCb implications workshop in November 2017, Geneva, Switzerland. (Cited on page 3.)
- [16] de Boer S., Mueller B. and Seidel D. *Higher-order Wilson coefficients for $c \rightarrow u$ transitions in the standard model*. JHEP **08**, (2016), 091. arXiv:1606.05521. (Cited on pages 4, 49, 50, 53, 57, 58, 121 and 125.)
- [17] Feldmann T., Mueller B. and Seidel D. *$D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ Decays in the QCD Factorization Approach* arXiv:1705.05891. (Cited on pages 4, 61, 69, 71, 72, 74, 75, 76, 80, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 127, 131, 133, 138, 139, 142, 143 and 167.)
- [18] Müller B. *Bestimmung des CKM-Elements $|V_{ub}|$ aus dem Zerfall $\bar{B}_s \rightarrow K^* \ell \bar{\nu}_\ell$* . Master thesis, Universität Siegen (2014). (Cited on pages 5, 24, 34 and 43.)
- [19] Hollik W. *Quantum field theory and the Standard Model* arXiv:1012.3883. (Cited on page 5.)
- [20] Michael E. Peskin D.V.S. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995. (Cited on pages 5, 9, 23, 24 and 25.)
- [21] Schwartz M.D. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2015. (Cited on pages 5 and 9.)
- [22] Patrignani C. et al. [Particle Data Group]. *Review of Particle Physics*. Chin. Phys. **C40** (10), (2016), 100001. (Cited on pages 6, 18, 80, 108 and 109.)
- [23] Yang C.N. and Mills R.L. *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*. Phys. Rev. **96**, (1954), 191–195. (Cited on page 9.)
- [24] Higgs P.W. *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*. Phys.Lett. **12**, (1964), 132–133. (Cited on page 12.)

- [25] Higgs P.W. *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*. Phys.Rev.Lett. **13**, (1964), 508–509. (Cited on page 12.)
- [26] Englert F. and Brout R. *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*. Phys.Rev.Lett. **13**, (1964), 321–323. (Cited on page 12.)
- [27] Guralnik G., Hagen C. and Kibble T. *Global Conservation Laws and Massless Particles*. Phys.Rev.Lett. **13**, (1964), 585–587. (Cited on page 12.)
- [28] *StackExchange*. URL <https://tex.stackexchange.com/questions/231706/special-effects-in-tikz-leads-to-unprintable-pdf>. (Cited on page 13.)
- [29] Glashow S., Iliopoulos J. and Maiani L. *Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry*. Phys.Rev. **D2**, (1970), 1285–1292. (Cited on pages 15, 49 and 51.)
- [30] Dombey N. *Abdus Salam: A Reappraisal. PART I. How to Win the Nobel Prize* arXiv:1109.1972. (Cited on page 15.)
- [31] *Informationen der Nobelstiftung zur Preisverleihung 2013 an Peter Higgs*. URL http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2013/. (Cited on page 15.)
- [32] Kobayashi M. and Maskawa T. *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*. Prog.Theor.Phys. **49**, (1973), 652–657. (Cited on pages 16 and 17.)
- [33] Luders G. *Proof of the TCP theorem*. Annals Phys. **2**, (1957), 1–15. [Annals Phys.281,1004(2000)]. (Cited on page 17.)
- [34] Chau L.L., Keung W.Y. and Tran M.D. *An Updated Analysis of the Quark Mixing Matrix and Its Phenomenological Implications*. Phys. Rev. **D27**, (1983), 2145. (Cited on page 18.)
- [35] Wolfenstein L. *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix*. Phys.Rev.Lett. **51**, (1983), 1945. (Cited on page 18.)
- [36] Ahn Y.H., Cheng H.Y. and Oh S. *Wolfenstein Parametrization at Higher Order: Seeming Discrepancies and Their Resolution*. Phys. Lett. **B703**, (2011), 571–575. arXiv:1106.0935. (Cited on page 18.)

- [37] Patrignani C. et al. [Particle Data Group]. *Review of Particle Physics*. Chin. Phys. **C40** (10), (2016), 100001. (Cited on pages 18, 19 and 29.)
- [38] Charles J. et al. [CKMfitter Group]. Eur. Phys. J. **C41**, (2005), 1–131. arXiv:hep-ph/0406184, URL <http://ckmfitter.in2p3.fr>. (Cited on page 20.)
- [39] Jarlskog C. *A Basis Independent Formulation of the Connection Between Quark Mass Matrices, CP Violation and Experiment*. Z. Phys. **C29**, (1985), 491–497. (Cited on page 20.)
- [40] Jarlskog C. *Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation*. Phys. Rev. Lett. **55**, (1985), 1039. (Cited on page 20.)
- [41] Feynman R. *Space - time approach to quantum electrodynamics*. Phys.Rev. **76**, (1949), 769–789. (Cited on page 24.)
- [42] Cicutta G.M. and Montaldi E. *Analytic renormalization via continuous space dimension*. Lett. Nuovo Cim. **4**, (1972), 329–332. (Cited on page 25.)
- [43] Bollini C.G. and Giambiagi J.J. *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*. Nuovo Cim. **B12**, (1972), 20–26. (Cited on page 25.)
- [44] Bollini C.G. and Giambiagi J.J. *Lowest order divergent graphs in nu-dimensional space*. Phys. Lett. **40B**, (1972), 566–568. (Cited on page 25.)
- [45] Ashmore J.F. *A Method of Gauge Invariant Regularization*. Lett. Nuovo Cim. **4**, (1972), 289–290. (Cited on page 25.)
- [46] 't Hooft G. *Dimensional regularization and the renormalization group*. Nucl. Phys. **B61**, (1973), 455–468. (Cited on page 26.)
- [47] Bardeen W.A., Buras A.J., Duke D.W. and Muta T. *Deep Inelastic Scattering Beyond the Leading Order in Asymptotically Free Gauge Theories*. Phys. Rev. **D18**, (1978), 3998. (Cited on page 26.)
- [48] Wilczek F. *Asymptotic freedom: From paradox to paradigm*. Proc. Nat. Acad. Sci. **102**, (2005), 8403–8413. [Rev. Mod. Phys.77,857(2005)], arXiv:hep-ph/0502113. (Cited on page 27.)

- [49] *Informationen der Nobelstiftung zur Preisverleihung 2004 an David Gross, David Politzer und Frank Wilczek.* URL https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/. (Cited on page 27.)
- [50] Shifman M. *The quark hadron duality.* eConf **C030614**, (2003), 001. [,13(2003)]. (Cited on pages 28, 66, 133, 135 and 136.)
- [51] *Illustration zur Dualität.* URL https://www.researchgate.net/profile/M_Shifman/publication/222408771/figure/fig1/AS:305075554668556@1449747088786/figure-7-An-illustration-of-duality-a-fragment-of-Escher%27s-Sky-and-Water.png. (Cited on page 28.)
- [52] Khodjamirian A. *Quantum chromodynamics and hadrons: An Elementary introduction.* In *High-energy physics. Proceedings, European School, Tsakhkadzor, Armenia, August 24-September 6, 2003.* 2004, 173–222. arXiv:hep-ph/0403145, URL <http://doc.cern.ch/yellowrep/2005/2005-007/p173.pdf>. (Cited on page 29.)
- [53] Colangelo P. and Khodjamirian A. *QCD sum rules, a modern perspective* arXiv:hep-ph/0010175. (Cited on pages 30 and 42.)
- [54] Appelquist T. and Carazzone J. *Infrared singularities and massive fields.* Phys. Rev. D **11**, (1975), 2856–2861. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.11.2856>. (Cited on page 34.)
- [55] Polchinski J. *Effective field theory and the Fermi surface.* In *Theoretical Advanced Study Institute (TASI 92): From Black Holes and Strings to Particles Boulder, Colorado, June 3-28, 1992.* 1992, 0235–276. arXiv:hep-th/9210046. (Cited on page 35.)
- [56] Neubert M. *Heavy quark effective theory.* Subnucl. Ser. **34**, (1997), 98–165. arXiv:hep-ph/9610266. (Cited on page 36.)
- [57] Scherer S. *Introduction to chiral perturbation theory.* Adv. Nucl. Phys. **27**, (2003), 277. arXiv:hep-ph/0210398. (Cited on page 36.)
- [58] Becher T., Broggio A. and Ferroglia A. *Introduction to Soft-Collinear Effective Theory.* Lect. Notes Phys. **896**, (2015), pp.1–206. arXiv:1410.1892. (Cited on page 36.)

- [59] Beringer J. et al. [Particle Data Group]. *Review of Particle Physics (RPP)*. Phys.Rev. **D86**, (2012), 010001. (Cited on page 36.)
- [60] Buras A.J. *Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays*. In *Probing the standard model of particle interactions. Proceedings, Summer School in Theoretical Physics, NATO Advanced Study Institute, 68th session, Les Houches, France, July 28-September 5, 1997. Pt. 1, 2*. 1998, 281–539. arXiv:hep-ph/9806471. (Cited on pages 37, 41 and 118.)
- [61] Buchalla G., Buras A.J. and Lautenbacher M.E. *Weak decays beyond leading logarithms*. Rev. Mod. Phys. **68**, (1996), 1125–1144. arXiv:hep-ph/9512380. (Cited on pages 38, 50 and 125.)
- [62] Chetyrkin K.G., Misiak M. and Munz M. $|\Delta F| = 1$ *nonleptonic effective Hamiltonian in a simpler scheme*. Nucl. Phys. **B520**, (1998), 279–297. arXiv:hep-ph/9711280. (Cited on pages 38, 50, 121 and 125.)
- [63] Breitenlohner P. and Maison D. *Dimensional Renormalization and the Action Principle*. Commun. Math. Phys. **52**, (1977), 11–38. (Cited on page 38.)
- [64] Breitenlohner P. and Maison D. *Dimensionally Renormalized Green's Functions for Theories with Massless Particles. 2.* Commun. Math. Phys. **52**, (1977), 55. (Cited on page 38.)
- [65] Feldmann T., Müller B. and van Dyk D. *Analyzing $b \rightarrow u$ transitions in semileptonic $\bar{B}_s \rightarrow K^{*+}(\rightarrow K\pi)\ell^-\bar{\nu}_\ell$ decays*. Phys. Rev. **D92** (3), (2015), 034013. arXiv:1503.09063. (Cited on page 40.)
- [66] Beneke M. and Feldmann T. *Symmetry breaking corrections to heavy to light B meson form-factors at large recoil*. Nucl. Phys. **B592**, (2001), 3–34. arXiv:hep-ph/0008255. (Cited on pages 42, 43, 44, 68 and 140.)
- [67] Gupta R. *Introduction to lattice QCD: Course*. In *Probing the standard model of particle interactions. Proceedings, Summer School in Theoretical Physics, NATO Advanced Study Institute, 68th session, Les Houches, France, July 28-September 5, 1997. Pt. 1, 2*. 1997, 83–219. arXiv:hep-lat/9807028. (Cited on page 42.)
- [68] Khodjamirian A., Klein C., Mannel T. and Offen N. *Semileptonic charm decays $D \rightarrow \pi\ell\nu_\ell$ and $D \rightarrow K\ell\nu_\ell$ from QCD Light-Cone Sum Rules*. Phys. Rev. **D80**, (2009), 114005. arXiv:0907.2842. (Cited on pages 43 and 108.)

- [69] Dugan M.J. and Grinstein B. *QCD basis for factorization in decays of heavy mesons*. Phys. Lett. **B255**, (1991), 583–588. (Cited on page 43.)
- [70] Charles J., Le Yaouanc A., Oliver L., Pene O. and Raynal J.C. *Heavy to light form-factors in the heavy mass to large energy limit of QCD*. Phys. Rev. **D60**, (1999), 014001. arXiv:hep-ph/9812358. (Cited on page 43.)
- [71] Lepage G.P. and Brodsky S.J. *Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics*. Phys. Rev. **D22**, (1980), 2157. (Cited on page 44.)
- [72] Lee S.J. and Neubert M. *Model-independent properties of the B-meson distribution amplitude*. Phys. Rev. **D72**, (2005), 094028. arXiv:hep-ph/0509350. (Cited on page 44.)
- [73] Bell G., Feldmann T., Wang Y.M. and Yip M.W.Y. *Light-Cone Distribution Amplitudes for Heavy-Quark Hadrons*. JHEP **11**, (2013), 191. arXiv:1308.6114. (Cited on pages 45 and 140.)
- [74] Beneke M. and Neubert M. *QCD factorization for $B \rightarrow PP$ and $B \rightarrow PV$ decays*. Nucl. Phys. **B675**, (2003), 333–415. arXiv:hep-ph/0308039. (Cited on pages 45, 93, 104 and 111.)
- [75] Bjorken J.D. *Topics in B Physics*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **11**, (1989), 325–341. (Cited on page 45.)
- [76] Beneke M., Buchalla G., Neubert M. and Sachrajda C.T. *QCD factorization for $B \rightarrow \pi\pi$ decays: Strong phases and CP violation in the heavy quark limit*. Phys. Rev. Lett. **83**, (1999), 1914–1917. arXiv:hep-ph/9905312. (Cited on page 46.)
- [77] Beneke M., Buchalla G., Neubert M. and Sachrajda C.T. *QCD factorization for exclusive, nonleptonic B meson decays: General arguments and the case of heavy light final states*. Nucl. Phys. **B591**, (2000), 313–418. arXiv:hep-ph/0006124. (Cited on page 46.)
- [78] Beneke M., Buchalla G., Neubert M. and Sachrajda C.T. *QCD factorization in $B \rightarrow \pi K, \pi\pi$ decays and extraction of Wolfenstein parameters*. Nucl. Phys. **B606**, (2001), 245–321. arXiv:hep-ph/0104110. (Cited on pages 46, 93 and 110.)
- [79] Blake T., Gershon T. and Hiller G. *Rare b hadron decays at the LHC*. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **65**, (2015), 113–143. arXiv:1501.03309. (Cited on page 49.)

- [80] Paul A., Bigi I.I. and Recksiegel S. *On $D \rightarrow X_u \ell^+ \ell^-$ within the Standard Model and Frameworks like the Littlest Higgs Model with T Parity.* Phys. Rev. **D83**, (2011), 114006. arXiv:1101.6053. (Cited on pages 49, 58, 59 and 66.)
- [81] Greub C., Hurth T., Misiak M. and Wyler D. *The $c \rightarrow u \gamma$ contribution to weak radiative charm decay.* Phys. Lett. **B382**, (1996), 415–420. arXiv:hep-ph/9603417. (Cited on pages 49 and 51.)
- [82] Borzumati F. and Greub C. *2HDMs predictions for $B \rightarrow X_s \gamma$ in NLO QCD.* Phys. Rev. **D58**, (1998), 074004. arXiv:hep-ph/9802391. (Cited on page 50.)
- [83] Chetyrkin K.G., Misiak M. and Munz M. *Weak radiative B meson decay beyond leading logarithms.* Phys. Lett. **B400**, (1997), 206–219. [Erratum: Phys. Lett. **B425**, 414(1998)], arXiv:hep-ph/9612313. (Cited on page 50.)
- [84] Bobeth C., Misiak M. and Urban J. *Photonic penguins at two loops and m_t dependence of $BR[B \rightarrow X_s \ell^+ \ell^-]$.* Nucl. Phys. **B574**, (2000), 291–330. arXiv:hep-ph/9910220. (Cited on pages 50 and 95.)
- [85] Gambino P., Gorbahn M. and Haisch U. *Anomalous dimension matrix for radiative and rare semileptonic B decays up to three loops.* Nucl. Phys. **B673**, (2003), 238–262. arXiv:hep-ph/0306079. (Cited on pages 50, 121 and 127.)
- [86] Gorbahn M. and Haisch U. *Effective Hamiltonian for non-leptonic $|\Delta F| = 1$ decays at NNLO in QCD.* Nucl. Phys. **B713**, (2005), 291–332. arXiv:hep-ph/0411071. (Cited on pages 50 and 121.)
- [87] Gorbahn M., Haisch U. and Misiak M. *Three-loop mixing of dipole operators.* Phys. Rev. Lett. **95**, (2005), 102004. arXiv:hep-ph/0504194. (Cited on pages 50 and 121.)
- [88] Seidel D. *Harte Streuung in exklusiven, radiativen B -Mesonzerfällen.* Diploma thesis, RWTH Aachen (2001). (Cited on pages 53, 129 and 130.)
- [89] Buras A.J., Jamin M. and Lautenbacher M.E. *The Anatomy of ε'/ε beyond leading logarithms with improved hadronic matrix elements.* Nucl. Phys. **B408**, (1993), 209–285. arXiv:hep-ph/9303284. (Cited on pages 53 and 55.)
- [90] Asatryan H.H., Asatryan H.M., Greub C. and Walker M. *Calculation of two loop virtual corrections to $b \rightarrow s \ell^+ \ell^-$ in the standard model.* Phys. Rev. **D65**, (2002), 074004. arXiv:hep-ph/0109140. (Cited on page 54.)

- [91] Beneke M., Feldmann T. and Seidel D. *Systematic approach to exclusive $B \rightarrow V\ell^+\ell^-$, $V\gamma$ decays*. Nucl. Phys. **B612**, (2001), 25–58. arXiv:hep-ph/0106067. (Cited on pages 55, 61, 63, 66, 69, 71, 77, 78, 93, 95, 119, 125 and 131.)
- [92] Misiak M. *The $b \rightarrow se^+e^-$ and $b \rightarrow s\gamma$ decays with next-to-leading logarithmic QCD corrections*. Nucl. Phys. **B393**, (1993), 23–45. [Erratum: Nucl. Phys. **B439**, 461(1995)]. (Cited on page 57.)
- [93] Fajfer S., Prelovsek S. and Singer P. *Rare charm meson decays $D \rightarrow P\ell^+\ell^-$ and $c \rightarrow u\ell^+\ell^-$ in SM and MSSM*. Phys. Rev. **D64**, (2001), 114009. arXiv:hep-ph/0106333. (Cited on page 58.)
- [94] Burdman G., Golowich E., Hewett J.L. and Pakvasa S. *Rare charm decays in the standard model and beyond*. Phys. Rev. **D66**, (2002), 014009. arXiv:hep-ph/0112235. (Cited on page 58.)
- [95] Fajfer S., Singer P. and Zupan J. *The Radiative leptonic decays $D^0 \rightarrow e^+e^-\gamma, \mu^+\mu^-\gamma$ in the standard model and beyond*. Eur. Phys. J. **C27**, (2003), 201–218. arXiv:hep-ph/0209250. (Cited on page 58.)
- [96] Inami T. and Lim C.S. *Effects of Superheavy Quarks and Leptons in Low-Energy Weak Processes $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$, $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$ and $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$* . Prog. Theor. Phys. **65**, (1981), 297. [Erratum: Prog. Theor. Phys. **65**, 1772(1981)]. (Cited on page 58.)
- [97] Beneke M., Feldmann T. and Seidel D. *Exclusive radiative and electroweak $b \rightarrow d$ and $b \rightarrow s$ penguin decays at NLO*. Eur. Phys. J. **C41**, (2005), 173–188. arXiv:hep-ph/0412400. (Cited on pages 61, 62, 65, 69, 71, 76, 77, 79, 93 and 94.)
- [98] Seidel D. *Analytic two loop virtual corrections to $b \rightarrow d\ell^+\ell^-$* . Phys. Rev. **D70**, (2004), 094038. arXiv:hep-ph/0403185. (Cited on pages 62, 73 and 127.)
- [99] Fajfer S. and Prelovsek S. *Effects of lightest Higgs model in rare D meson decays*. Phys. Rev. **D73**, (2006), 054026. arXiv:hep-ph/0511048. (Cited on page 66.)
- [100] Buchalla G. *Precision flavour physics with $B \rightarrow K\nu\bar{\nu}$ and $B \rightarrow K\ell^+\ell^-$* . Nucl. Phys. Proc. Suppl. **209**, (2010), 137–142. arXiv:1010.2674. (Cited on page 66.)
- [101] Khodjamirian A., Stoll G. and Wyler D. *Calculation of long distance effects in exclusive weak radiative decays of B meson*. Phys. Lett. **B358**, (1995), 129–138. arXiv:hep-ph/9506242. (Cited on page 66.)

- [102] Lyon J. and Zwicky R. *Anomalously large \mathcal{O}_8 and long-distance chirality from $A_{\text{CP}}[D^0 \rightarrow (\rho^0, \omega)\gamma](t)$* arXiv:1210.6546. (Cited on page 66.)
- [103] Fajfer S., Kosnik N. and Prelovsek S. *Updated constraints on new physics in rare charm decays*. Phys. Rev. **D76**, (2007), 074010. arXiv:0706.1133. (Cited on page 66.)
- [104] Cappiello L., Cata O. and D'Ambrosio G. *Standard Model prediction and new physics tests for $D^0 \rightarrow h^+h^-\ell^+\ell^-$ ($h = \pi, K : \ell = e, \mu$)*. JHEP **04**, (2013), 135. arXiv:1209.4235. (Cited on page 66.)
- [105] Fajfer S. and Košnik N. *Resonance catalyzed CP asymmetries in DP^{+-}* . Phys. Rev. **D87** (5), (2013), 054026. arXiv:1208.0759. (Cited on page 66.)
- [106] Fajfer S. and Košnik N. *Prospects of discovering new physics in rare charm decays*. Eur. Phys. J. **C75** (12), (2015), 567. arXiv:1510.00965. (Cited on page 66.)
- [107] de Boer S. and Hiller G. *Rare radiative charm decays within the standard model and beyond* arXiv:1701.06392. (Cited on page 66.)
- [108] Shifman M.A. *Quark hadron duality*. In *Proceedings, 8th International Symposium on Heavy Flavor Physics (Heavy Flavours 8)*. 2000, hf8/013. [hf8/013(2000)], arXiv:hep-ph/0009131, URL <http://jhep.sissa.it/archive/prhep/preproceeding/hf8/013>. (Cited on pages 66, 133, 135 and 136.)
- [109] Beylich M., Buchalla G. and Feldmann T. *Theory of $B \rightarrow K^{(*)}\ell^+\ell^-$ decays at high q^2 : OPE and quark-hadron duality*. Eur. Phys. J. **C71**, (2011), 1635. arXiv:1101.5118. (Cited on pages 67 and 133.)
- [110] Fajfer S. and Kamenik J.F. *Charm meson resonances and $D \rightarrow V$ semileptonic form-factors*. Phys. Rev. **D72**, (2005), 034029. arXiv:hep-ph/0506051. (Cited on pages 68 and 69.)
- [111] Dobbs S. et al. [CLEO]. *First Measurement of the Form Factors in the Decays $D^0 \rightarrow \rho^- e^+ \nu_e$ and $D^+ \rightarrow \rho^0 e^+ \nu_e$* . Phys. Rev. Lett. **110** (13), (2013), 131802. arXiv:1112.2884. (Cited on pages 68 and 80.)
- [112] Greub C., Pilipp V. and Schubach C. *Analytic calculation of two-loop QCD corrections to $b \rightarrow s\ell^+\ell^-$ in the high q^2 region*. JHEP **12**, (2008), 040. arXiv:0810.4077. (Cited on page 73.)

- [113] Greub C., Hurth T. and Wyler D. *Virtual $\mathcal{O}(\alpha_s)$ corrections to the inclusive decay $b \rightarrow s\gamma$* . Phys. Rev. **D54**, (1996), 3350–3364. arXiv:hep-ph/9603404. (Cited on page 73.)
- [114] Bosch S.W. and Buchalla G. *The Radiative decays $B \rightarrow V\gamma$ at next-to-leading order in QCD*. Nucl. Phys. **B621**, (2002), 459–478. arXiv:hep-ph/0106081. (Cited on page 76.)
- [115] Ali A. and Parkhomenko A.Y. *Branching ratios for $B \rightarrow K^*\gamma$ and $B \rightarrow \rho\gamma$ decays in next-to-leading order in the large energy effective theory*. Eur. Phys. J. **C23**, (2002), 89–112. arXiv:hep-ph/0105302. (Cited on page 76.)
- [116] Kagan A.L. and Neubert M. *Isospin breaking in $B \rightarrow K^*\gamma$ decays*. Phys. Lett. **B539**, (2002), 227–234. arXiv:hep-ph/0110078. (Cited on page 76.)
- [117] Feldmann T. and Matias J. *Forward backward and isospin asymmetry for $B \rightarrow K^*\ell^+\ell^-$ decay in the standard model and in supersymmetry*. JHEP **01**, (2003), 074. arXiv:hep-ph/0212158. (Cited on pages 76 and 79.)
- [118] Beneke M. and Rohrwild J. *B meson distribution amplitude from $B \rightarrow \gamma\ell\nu$* . Eur. Phys. J. **C71**, (2011), 1818. arXiv:1110.3228. (Cited on page 79.)
- [119] Braun V.M. and Khodjamirian A. *Soft contribution to $B \rightarrow \gamma\ell\nu_\ell$ and the B -meson distribution amplitude*. Phys. Lett. **B718**, (2013), 1014–1019. arXiv:1210.4453. (Cited on page 79.)
- [120] Ball P. and Zwicky R. *$|V_{td}/V_{ts}|$ from $B \rightarrow V\gamma$* . JHEP **04**, (2006), 046. arXiv:hep-ph/0603232. (Cited on page 80.)
- [121] Vladikas A. *FLAG: Lattice QCD Tests of the Standard Model and Foretaste for Beyond*. PoS **FPCP2015**, (2015), 016. arXiv:1509.01155. (Cited on page 80.)
- [122] Kruger F. and Matias J. *Probing new physics via the transverse amplitudes of $B^0 \rightarrow K^{*0}(\rightarrow K^-\pi^+)l^+l^-$ at large recoil*. Phys. Rev. **D71**, (2005), 094009. arXiv:hep-ph/0502060. (Cited on pages 90 and 93.)
- [123] Beneke M., Buchalla G., Neubert M. and Sachrajda C.T. *QCD factorization for $B \rightarrow \pi K$ decays*. In *High energy physics. Proceedings, 30th International Conference, ICHEP 2000, Osaka, Japan, July 27-August 2, 2000. Vol. 1, 2*. 2000, 882–885. arXiv:hep-ph/0007256, URL http://inspirehep.net/record/530806/files/arXiv:hep-ph_0007256.pdf. (Cited on page 93.)

- [124] Altmannshofer W., Ball P., Bharucha A., Buras A.J., Straub D.M. and Wick M. *Symmetries and Asymmetries of $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$ Decays in the Standard Model and Beyond*. JHEP **01**, (2009), 019. arXiv:0811.1214. (Cited on page 93.)
- [125] Bobeth C., Hiller G. and van Dyk D. *The Benefits of $\bar{B} \rightarrow \bar{K}^* l^+ l^-$ Decays at Low Recoil*. JHEP **1007**, (2010), 098. arXiv:1006.5013. (Cited on page 93.)
- [126] Böer P., Feldmann T. and van Dyk D. *QCD Factorization Theorem for $B \rightarrow \pi \pi \ell \nu$ Decays at Large Dipion Masses*. JHEP **02**, (2017), 133. arXiv:1608.07127. (Cited on pages 93, 97, 99, 100, 105, 107, 110, 111 and 115.)
- [127] Faller S., Feldmann T., Khodjamirian A., Mannel T. and van Dyk D. *Disentangling the Decay Observables in $B^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \ell^- \bar{\nu}_\ell$* . Phys. Rev. **D89** (1), (2014), 014015. arXiv:1310.6660. (Cited on pages 97, 100, 115 and 145.)
- [128] Widhalm L. Ph.D. thesis, TU Wien (2001). (Cited on page 107.)
- [129] Khodjamirian A., Mannel T., Offen N. and Wang Y.M. *$B \rightarrow \pi \ell \nu_l$ Width and $|V_{ub}|$ from QCD Light-Cone Sum Rules*. Phys. Rev. **D83**, (2011), 094031. arXiv:1103.2655. (Cited on page 108.)
- [130] Chetyrkin K.G., Khodjamirian A. and Pivovarov A.A. *Towards NNLO Accuracy in the QCD Sum Rule for the Kaon Distribution Amplitude*. Phys. Lett. **B661**, (2008), 250–258. arXiv:0712.2999. (Cited on page 108.)
- [131] Khodjamirian A. and Rusov A.V. *$B_s \rightarrow K \ell \nu_\ell$ and $B_{(s)} \rightarrow \pi(K) \ell^+ \ell^-$ decays at large recoil and CKM matrix elements*. JHEP **08**, (2017), 112. arXiv:1703.04765. (Cited on page 108.)
- [132] Braun V.M. and Filyanov I.E. *Conformal Invariance and Pion Wave Functions of Nonleading Twist*. Z. Phys. **C48**, (1990), 239–248. [Yad. Fiz.52,199(1990)]. (Cited on page 111.)
- [133] Larin S.A. and Vermaseren J.A.M. *The Three loop QCD Beta function and anomalous dimensions*. Phys. Lett. **B303**, (1993), 334–336. arXiv:hep-ph/9302208. (Cited on page 117.)
- [134] Larin S.A., van Ritbergen T. and Vermaseren J.A.M. *The Large quark mass expansion of $\Gamma(Z^0 \rightarrow \text{hadrons})$ and $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})$ in the order α_s^3* . Nucl. Phys. **B438**, (1995), 278–306. arXiv:hep-ph/9411260. (Cited on page 117.)
- [135] Hinchliffe I. Eur. Phys. J. **C15**, (2000), 85. (Cited on page 117.)

-
- [136] Asatrian H.M., Bieri K., Greub C. and Walker M. *Virtual corrections and bremsstrahlung corrections to $b \rightarrow d\ell^+\ell^-$ in the standard model*. Phys. Rev. **D69**, (2004), 074007. arXiv:hep-ph/0312063. (Cited on page 128.)
- [137] Blok B., Shifman M.A. and Zhang D.X. *An Illustrative example of how quark hadron duality might work*. Phys. Rev. **D57**, (1998), 2691–2700. [Erratum: Phys. Rev. **D59**, 019901(1999)], arXiv:hep-ph/9709333. (Cited on page 133.)
- [138] Cata O., Golterman M. and Peris S. *Duality violations and spectral sum rules*. JHEP **08**, (2005), 076. arXiv:hep-ph/0506004. (Cited on page 133.)
- [139] Cata O., Golterman M. and Peris S. *Unraveling duality violations in hadronic tau decays*. Phys. Rev. **D77**, (2008), 093006. arXiv:0803.0246. (Cited on page 133.)
- [140] Cata O., Golterman M. and Peris S. *Possible duality violations in tau decay and their impact on the determination of α_s* . Phys. Rev. **D79**, (2009), 053002. arXiv:0812.2285. (Cited on page 133.)
- [141] Boito D., Cata O., Golterman M., Jamin M., Maltman K., Osborne J. and Peris S. *A new determination of α_s from hadronic τ decays*. Phys. Rev. **D84**, (2011), 113006. arXiv:1110.1127. (Cited on page 133.)
- [142] Grozin A.G. and Neubert M. *Asymptotics of heavy meson form-factors*. Phys. Rev. **D55**, (1997), 272–290. arXiv:hep-ph/9607366. (Cited on page 141.)

Liste der eigenen Publikationen

- [A1] Thorsten Feldmann, Bastian Müller, Danny van Dyk: *Analyzing $b \rightarrow u$ transitions in semileptonic $\bar{B}_s \rightarrow K^{*+}(\rightarrow K\pi)\ell^-\bar{\nu}_\ell$ decays*, Phys. Rev. D92 (2015) no.3, 034013, arXiv: 1503.09063 (Cited on page 40.)
- [A2] Stefan de Boer, Bastian Müller, Dirk Seidel: *Higher-order Wilson coefficients for $c \rightarrow u$ transitions in the standard model*, JHEP 1608 (2016) 091, arXiv: 1606.05521 (Cited on pages 4, 49, 50, 53, 57, 58, 121 and 125.)
- [A3] Thorsten Feldmann, Bastian Müller, Dirk Seidel: *$D \rightarrow \rho \ell^+ \ell^-$ decays in the QCD factorization approach*, JHEP 1708 (2017) 105, arXiv:1705.05891 (Cited on pages 4, 61, 69, 71, 72, 74, 75, 76, 80, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 127, 131, 133, 138, 139, 142, 143 and 167.)

Danksagung

In dem Bewusstsein, dass mein allererster Dank nicht einem Menschen gebührt, danke ich zunächst meinem himmlischen Gott und Vater, der es mir geschenkt hat das Studium der Physik aufnehmen und mit der Promotion beschließen zu dürfen. Die dafür notwendigen Gaben und Fähigkeiten hat Er mir verliehen und Er ist es auch, der mich die gesamte Studienzeit hindurch getragen hat.

Desweiteren gilt mein Dank meinem Betreuer Prof. Dr. Thorsten Feldmann, der mir die Gelegenheit gegeben hat, mehrere Jahre in der Wissenschaft zu arbeiten und in diesem Rahmen eine Dissertation anfertigen zu dürfen. Die gemeinsame Bearbeitung der Forschungsprojekte, insbesondere die Zusammenarbeit an dem Projekt [A3], empfand ich als sehr angenehm. Außerdem danke ich ihm, dass er es mir ermöglicht hat, an verschiedenen Konferenzen, Workshops und Teilchenphysikschulen teilzunehmen.

Desweiteren danke ich Prof. Dr. Thomas Mannel vielmals für jegliche Unterstützung während meiner gesamten Zeit in der TP1 und nicht zuletzt für die unvergesslichen Grillpartys und Weihnachtsfeiern.

Weiterhin bedanke ich mich bei meinen weiteren Kollaborationspartnern Dr. Dirk Seidel, Dr. Stefan de Boer und Dr. Keri Vos. Insbesondere Dr. Dirk Seidel danke ich für die überaus angenehme Zusammenarbeit und die vielzähligen hilfreichen Diskussionen. Ebenso bedanke ich mich bei Dr. Keri Vos für ihre geduldige Unterstützung.

Weiterhin danke ich der ganzen Arbeitsgruppe TP1 für das sehr angenehme Arbeitsklima und für Unterstützung aller Art. Meinem Kollegen und Zimmergenossen Aleksey Rusov danke ich für die nette Zeit zusammen. Wir haben viele hilfreiche Diskussionen zu physikalischen Fragestellungen geführt. Insbesondere bei Problemen mit Wolfram Mathematica war er ein guter Ansprechpartner. Zudem haben wir unzählbare interessante Gespräche zu nicht auf die Physik bezogenen Themen geführt.

Ein herzliches Dankeschön richte ich auch an die Korrekturleser meiner Arbeit Dr. Danny van Dyk, der das gesamte Manuskript gelesen hat, und Dr. Keri Vos.

Letztlich gilt mein Dank meinen Eltern, die mich mein ganzes Studium hindurch unterstützt und gefördert haben. Sie haben mir allen Freiraum gegeben, um mich meiner Arbeit ungestört widmen zu können.

