1986 г. Декабрь Том 150, вып. 4

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

# СУПЕРСТРУНЫ—НОВЫЙ ПОДХОД К ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

*Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко*

СОДЕРЖАНИЕ



> Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем.
>
> *А. Эйнштейн*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Построение физических теорий всегда включает два момента: вначале создание новых теорий, описывающих новую область физических явлений; далее объедиение различных теорий или моделей в одну теоретическую схему. На втором этапе находит свое отражение убежденность физика во всеобщей взаимосвязи и единстве физического мира. Возможность объединения нескольких физических теорий на единой основе связано с более глубоким проникновением в природу физических явлений, с выяснением более фундаментальных закономерностей. Классическим примером здесь является электромагнитная теория Максвелла, объединившая в стройную схему электрические и магнитные явления.

Огромные усилия физиков были направлены в первой трети нашего столетия на объединение гравитации и электромагнетизма на геометрической основе [2,3]. Теория тяготения, созданная Эйнштейном, связывала гравитационное поле с геометрической характеристикой пространственно-временного континуума — его кривизной. Поэтому было естественно попытаться связать с геометрическими характеристиками пространства-времени и электромагнитное поле. По этому пути строилась конформно-инвариантная теория тяготения и электромагнетизма Вейля [4], единые теории поля Эйнштейна [5]. Новая идея в этой области была выдвинута Калуцой и Клейном (см. [6]). В их подходе пространство-время считалось не 4-мерным, а 5-мерным, причем пятое измерение было компактифицировано: $M^5 \sim M^4 \times S^1$. Кривизна 4-мерного подмногообразия $M^4$ по-прежнему отождествлялась с гравитационным полем, а компоненты метрического тензора $g_{\mu 5}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$,— с электромагнитным потенциалом. Группа изометрии компактного многообразия $S^1$ определяла калибровочную группу, в данном случае группу U(1) поля Максвелла.

Развитие квантовой механики и физики элементарных частиц показали ограниченность этого подхода в построении единой теории поля. Стало ясно, что действительно единая теория фундаментальных взаимодействий должна включать в себя не только гравитацию и электромагнетизм, но и все поля, квантами которых являются элементарные частицы.

Сейчас известны следующие четыре типа фундаментальных взаимодействий *) (четыре вида сил): сильное взаимодействие (в котором участвуют адроны), электромагнитное, слабое и гравитационное. Охарактеризуем кратко каждое из них.

Согласно современным представлениям, адроны построены из кварков, число которых в достижимой в настоящее время области энергий ($\sim 10^2$ ГэВ) равно 6. Эти кварки разбиваются на пары: (u, d), (c, s), (t, b). Кварки u, c, t имеют заряд $+2/3$, а заряд кварков d, s, b равен $-1/3$. Барионы состоят из трех кварков, например протон p = uud, нейтрон n = udd, $\lambda$-частица $\lambda$ = uds; мезоны из двух: $\pi^+ = u\bar{d}$, $K^+ = u\bar{s}$, $J/\psi = c\bar{c}$. Каждый из кварков может находиться в одном из трех цветовых состояний по группе $SU(3)_c$ (желтом, синем, красном). Физически наблюдаемые адроны являются синглетами по цветовому квантовому числу. Динамической теорией, описывающей адронную физику, является квантовая хромодинамика (КХД)[7,8]. В этой теории взаимодействие между кварками переносится глюонными полями — безмассовыми векторными мезонами с неабелевой калибровочной группой $SU(3)_c$. В рамках КХД удается объяснить основную особенность в поведении кварков, а именно то, что на малых расстояниях они практически не взаимодействуют друг с другом (асимптотическая свобода). Это обусловлено убыванием эффективной хромодинамической константы взаимодействия с ростом энергии. Однако вопрос, могут ли кварки существовать в свободном состоянии или нет, в рамках КХД остается нерешенным.

Чтобы проводить конкретные расчеты, в КХД используется гипотеза о невылетании кварков. Тем самым снимается вопрос, почему сильные взаимодействия, переносчиками которых являются безмассовые глюоны, имеют конечный радиус действия. Использование асимптотической свободы и гипотезы о невылетании кварков позволяет описывать в КХД процессы с большими поперечными импульсами, рождение лептонных пар, струйные процессы в $e^+e^-$-аннигиляции, т. е. такие реакции, в которых детали образования конечных состояний из кварков и глюонов не существенны. Описание

*) Обсуждение экспериментальных указаний на возможность существования в природе новых дальнодействующих сил (5-е фундаментальное взаимодействие) можно найти, например, в: Fischbach E. et al.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 3.

спектра масс адронов, эксклюзивных процессов оказывается за пределами возможностей современного аппарата КХД.

Электромагнитное и слабое взаимодействия в последнее время успешно объединены в единую теорию электрослабого взаимодействия Глэшоу — Вайнберга — Салама [137–139] на основе калибровочной группы $SU(2) \times U(1)$. Наблюдение промежуточных векторных бозонов $W^+$, $W^-$ и $Z^0$ на протон-антипротонных встречных пучках [9] является прямым экспериментальным подтверждением данной теории. Характерная ее черта — это присутствие киральных фермионов (фермионные поля являются собственными векторами проекционных операторов $1 \pm \gamma_5$), что проявляется как нарушение P-инвариантности в слабых процессах.

Единое описание трех взаимодействий: сильного, электромагнитного и слабого — является целью теорий великого объединения (ТВО) [10,11]. В этих теориях выбирается в качестве основной достаточно большая калибровочная группа $SU(5)$, $SO(10)$ или $E_6$, и в такую калибровочную модель «вкладываются» КХД и электрослабая теория. Фундаментальными фермионными полями являются кварки и лептоны, которые группируются в поколения. К каждой паре кварков, о которых говорилось выше, добавляется пара лептонов: кварки u, d с электроном и электронным нейтрино образуют первое поколение, кварки c, s с мюоном и мюонным нейтрино образуют второе поколение и, наконец, кварки t, b вместе с тау-лептоном и соответствующим нейтрино группируются в третье поколение. Массы кварков и лептонов растут с увеличением номера поколения. Важным следствием ТВО является предсказание нестабильности протона [135,136].

С ростом энергии эффективные константы слабого и электромагнитного взаимодействия должны расти, а хромодинамическая константа взаимодействия должна уменьшаться так, что при энергии $10^{15}$ ГэВ (энергетический масштаб великого объединения) все три константы должны стать равными. Согласно теориям великого объединения в огромном энергетическом диапазоне от $10^2$ до $10^{15}$ ГэВ нельзя ожидать никакой принципиально новой физики (великая «пустыня»). К сожалению, в теориях великого объединения нет принципа, который бы заранее позволил выбрать в качестве основной ту или иную калибровочную группу. Кроме того, в эти теории, как правило, входит большое количество численных параметров, связанных с хиггсовским сектором, с константами юкавского взаимодействия.

Массы, встречающиеся в ТВО, меняются в огромном диапазоне: от нескольких электрон-вольт (возможная масса нейтрино) до $10^{15}$ ГэВ. В рамках единых теорий пока нет удовлетворительного объяснения такой иерархии масс. В теории великого объединения гравитация не вписывается естественным образом, так как переносчиками взаимодействия в этих теориях являются калибровочные векторные поля спина 1, в то время как кванты гравитационного поля (гравитоны) имеют спин 2.

Включение гравитации в единую теорию фундаментальных взаимодействий требует прежде всего построения квантовой теории тяготения. Определенные надежды в этой области связываются с супергравитацией.

Супергравитация представляет собой теорию с локализованной калибровочной суперсимметрией. Преобразования суперсимметрии [12–14] перемешивают бозонные $B$ и фермионные $F$ поля: $\delta B = \bar{\varepsilon} F$, $\delta F = \partial B \cdot \varepsilon$, где $\varepsilon$ — спинорный параметр преобразования. Суперсимметрия является пространственно-временной симметрией, так как повторное применение преобразований дает трансляцию: $(\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1) B = a^\mu \partial_\mu B$, где $a^\mu = \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1$, $\gamma^\mu$ — матрицы Дирака. Это позволяет трактовать преобразования суперсимметрии как «квадратный корень» из преобразований трансляции.

Суперсимметрия объединяет в одни супермультиплеты бозоны и фермионы. Сейчас нет экспериментального подтверждения суперсимметрии (т. е. она может быть только нарушенной), но с теоретической точки зрения суперсимметричные полевые модели обладают рядом неоспоримых достоинств. Здесь в первую очередь заслуживает внимания взаимное сокращение многих ультрафиолетовых расходимостей в таких моделях.

В теориях с размерной константой взаимодействия, к которым принадлежит и гравитация, единственным способом устранения расходимостей является их взаимное сокращение. В супергравитации это было продемонстрировано на одно- и двухпетлевом уровне. В высших порядках теории возмущений такого сокращения бесконечностей скорее всего нет. Суперсимметричные

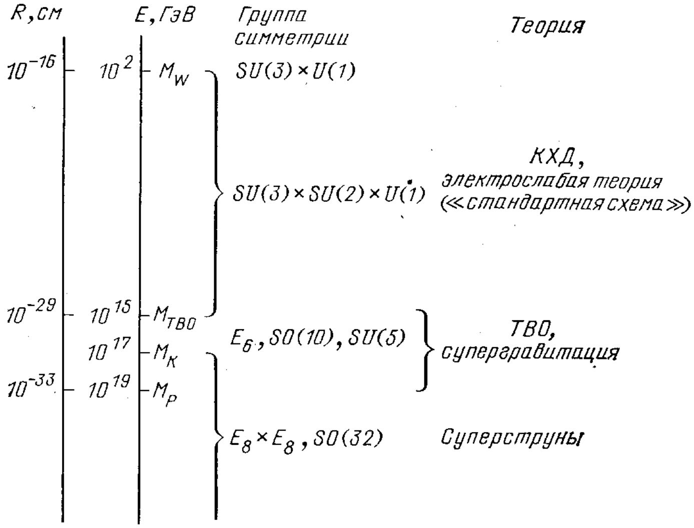



**Рис. 1. Основные теоретические схемы в физике элементарных частиц, их область применимости (по энергии $E$ и расстоянию $R$) и соответствующие фундаментальные группы симметрии**

теории великого объединения включают и гравитацию. На рис. 1 показаны области применимости основных физических теорий и соответствующие группы симметрии.

В последние годы идеи Калуцы — Клейна о том, что все внутренние симметрии (в том числе и калибровочные) в 4-мерном пространстве Минковского порождены общековариантными пространственно-временными симметриями $D$-мерного мира ($D = 4 + k$), возродились и в рамках суперсимметрии [13]. Причем суперсимметрия дает естественное ограничение на размерность $D$: $D \leqslant 11$.

В настоящее время внимание теоретиков привлекают суперструнные теории [15,16] как весьма перспективные кандидаты на объединение всех фундаментальных взаимодействий, в том числе и гравитации.

Суперструны — это одномерные релятивистские объекты, длина которых порядка планковских масштабов ($10^{-33}$ см). Помимо линейных размеров, суперструны характеризуются и спиновыми (фермионными) степенями свободы, распределенными вдоль струн. Число физических фермионных степеней свободы как раз равно числу бозонных степеней свободы, что и обеспечивает суперсимметрию всей теории.

Последовательная квантовая теория суперструн формулируется в 10-мерном пространстве-времени Минковского. В силу ряда причин, детальный механизм которых еще не вполне ясен, происходит компактификация 6 измерений до планковских размеров: $M^{10} \to M^4 \times K^6$. Весьма привлекательной является идея о том, что теория суперструн позволит практически однозначно выбрать компактное многообразие $K^6$, а его топологические свойства определят основные черты низкоэнергетической динамики суперструн, описывающей современную физику элементарных частиц. В низкоэнергетическом пределе ($E \ll 10^{19}$ ГэВ) суперструнные теории переходят в супергравитацию и суперсимметричную теорию Янга — Миллса.

Таким образом, теория суперструн огранически включает в себя суперсимметрию, идею Калуцы — Клейна о многомерности нашего пространственно-временнóго мира, а также идею о нелокальности объектов — носителей фундаментальных взаимодействий. Важными свойствами суперструнных теорий является отсутствие аномалий, т. е. нарушения на квантовом уровне классических симметрий в теории (калибровочной симметрии и лоренц-инвариантности), а также возможность устранения расходимостей в теории. Примечательно, что суперструнные теории практически не оставляют произвола в выборе основной калибровочной группы. Их роль могут выполнять только две группы: SO(32) и $E_8 \times E_8$.

Количество работ, посвященных суперструнам, огромно [17,18]. Поэтому дать им полное освещение невозможно. Цель, которая преследовалась в данном обзоре,— это попытаться изложить на достаточно простом теоретическом уровне основные идеи суперструнного подхода в физике элементарных частиц.

## 2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СТРУНЫ В АДРОННОЙ ФИЗИКЕ

### 2.1. Действие Намбу — Гото для бозонной струны

Суперструна является естественным обобщением релятивистской струнной модели, возникшей первоначально в адронной физике (см., например, обзоры [19-21]) как динамическая основа дуально-резонансных моделей [22,23]. Теория суперструн базируется на аппарате, развитом для описания адронных струнных моделей. В дуальном подходе предполагается, что адронный спектр в древесном приближении эквидистантный и состоит из бесконечного числа резонансов с нулевой шириной. Этот спектр генерируется бесконечным счетным набором операторов рождения и уничтожения $a^+_{n\mu}$, $a_{n\mu}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, каждый из которых является лоренцевым вектором. Такой набор операторов можно получить при квантовании одномерно-протяженного релятивистского объекта конечного размера (струны, нити). Прямое обобщение на релятивистский случай обычной линейной струны с точки зрения дуальных моделей не годится, так как из ее квадратичного лагранжиана не следуют ограничения на физические векторы состояний, которые можно было бы отождествить с условиями Вирасоро в дуальных моделях. Поэтому для релятивистской бозонной струны Намбу [24] и Гото [25] предложили действие, которое пропорционально площади мировой поверхности в пространстве-времени, заметаемой струной в процессе ее движения:

$$S = -\gamma \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int\limits_0^{\pi} d\sigma\, (\det \| h_{\alpha\beta} \|)^{1/2}, \tag{1}$$

где $h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu$ — индуцированная метрика на мировой поверхности струны, $x^\mu(\tau, \sigma)$ — координаты струны, $\alpha, \beta = 0, 1$, $\mu = 0, 1, \ldots, D-1$, $D$ — размерность пространства-времени с сигнатурой метрики $(+, -, -, \ldots)$ $\gamma$ — константа с размерностью $[M]^2$, определяемая в дуальных моделях универсальным наклоном редджевских траекторий $\alpha'$: $\gamma = (2\pi\alpha')^{-1}$. Параметр $u^0 = \tau$ является эволюционным параметром, а переменная $u^1 = \sigma$ нумерует точки вдоль струны. В силу репараметризационной инвариантности действия (1) на динамические переменные струны можно наложить условия ортонормальной калибровки

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0, \quad \dot{x} = \partial_\tau x, \quad x' = \partial_\sigma x. \tag{2}$$

В результате уравнения движения струны линеаризуются:

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0. \tag{3}$$

Если струна открыта, то на ее концах должны выполняться граничные условия

$$x'^\mu(\tau, 0) = x'^\mu(\tau, \pi) = 0. \tag{4}$$

Для замкнутой струны ($0 \leqslant \sigma \leqslant 2\pi$) координаты струны подчинены условию периодичности

$$x^\mu(\tau, 0) = x^\mu(\tau, 2\pi). \tag{5}$$

### 2.2. Ковариантное квантование. Алгебра Вирасоро. Критическая размерность пространства-времени. Тахионы

Решение уравнений движения (3), удовлетворяющее граничным условиям (4), представимо в виде ряда Фурье

$$x^\mu(\tau, \sigma) = Q^\mu + P^\mu \frac{\tau}{\pi\gamma} + \frac{i}{(\pi\gamma)^{1/2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} \frac{\alpha_n^\mu}{n} \cos(n\sigma), \tag{6}$$

где $P^\mu$ — полный импульс струны, $Q^\mu$ — координаты «центра масс» струны при $\tau = 0$. В силу действительности $x^\mu(\tau, \sigma)$ амплитуды $\alpha_n^\mu$ подчинены условию $\alpha_{-n\mu} = \alpha_{n\mu}^+$. В квантовой теории эти амплитуды трактуются как операторы Фока, подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[\alpha_{m\mu}, \alpha_{n\nu}] = -mg_{\mu\nu}\delta_{n+m,0}, \quad [Q_\mu, P_\nu] = -ig_{\mu\nu}, \tag{7}$$

где $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, \ldots)$.

Условия ортонормальной калибровки (2) приводят к операторам Вирасоро

$$\begin{aligned} L_n &= -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} :\alpha_{n-m}\alpha_m:, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ L_n^+ &= L_{-n}, \quad \alpha_0^\mu = P^\mu (\pi\gamma)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{8}$$

которые удовлетворяют следующей алгебре:

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{D}{12} n(n^2-1) \delta_{n+m,0}. \tag{9}$$

Операторы $L_0$, $L_{\pm 1}$ образуют подалгебру в алгебре Вирасоро, изоморфную алгебре Ли группы SU(1, 1). Важным моментом является появление $c$-числового члена (центрального заряда, швингеровского члена) в коммутаторе (9). В классической теории, где роль коммутаторов играют скобки Пуассона, этой аномалии нет:

$$\{L_n, L_m\} = (-i)(n-m) L_{n+m}. \tag{9'}$$

Алгебра (9′) изоморфна алгебре Ли конформной группы на плоскости. В классике $L_n$ генерируют голоморфные отображения $z \to f(z)$ и могут быть представлены как операторы дифференцирования $L_n \sim ie^{iz}\partial/\partial z$. Если аномалии в (9) не сокращаются, то конформная симметрия в квантовой теории оказывается нарушенной (см. раздел 2.3).

Появление аномального швингеровского члена в (9) связано с переходом к нормальному произведению операторов $\alpha_n^\mu$ в $L_n$. Проще всего получить этот член можно путем вычисления по теореме Вика [26] среднего по вакууму от коммутатора (9), если учесть, что спаривание операторов $\alpha_k^\mu \alpha_j^\nu$ равно $-g^{\mu\nu}\theta(k)\, k\delta_{k+j,0}$.

Временные компоненты $\alpha_{n0}^{+}$, $n>0$, действуя на вакуум, будут приводить к векторам состояний с отрицательной нормой. Физическими состояниями $|\,\phi\,\rangle$ являются только такие, которые удовлетворяют условиям

$$L_0\,|\,\phi\,\rangle=\alpha\,(0)\,|\,\phi\,\rangle,\quad L_n\,|\,\phi\,\rangle=0,\quad n=1,\,2,\,\ldots \tag{10}$$

Было показано [27,28], что решение этих уравнений не содержит состояний с отрицательной нормой, если $1\leqslant D\leqslant 25$, а $\alpha\,(0)\leqslant 1$. Физическое пространство состояний с положительной нормой (т. е. если исключить состояния с нулевой нормой) удается построить только в пространстве-времени с размерностью $D=26$ и если $\alpha\,(0)=1$ (дуальная модель Венециано). Это означает, что основное состояние струны — тахион, так как для квадрата массы струны из (10) получаем

$$M^2=P^2=-\pi\gamma\sum_{m\neq 0}:\alpha_{-m}\alpha_m:-2\pi\gamma\alpha\,(0). \tag{11}$$

Бесконечномерная алгебра Вирасоро (9) принадлежит к аффинным алгебрам Каца — Муди, теория которых получила развитие в последнее время [29]. Эти алгебры можно рассматривать как обобщение на бесконечномерный случай классической теории конечных алгебр Ли, причем это расширение максимально сохраняет такие понятия в теории алгебр Ли, как корневые диаграммы, старший вес, матрица Картана и т. д. Результаты, полученные в теории алгебр Каца — Муди, позволили построить новое доказательство теоремы об отсутствии «духов» в релятивистской струнной модели [30].

Теория замкнутой бозонной струны содержит два независимых набора осцилляторных операторов $\alpha_n$ и $\beta_n$:

$$x^{\mu}\,(\tau,\,\sigma)=Q^{\mu}+P^{\mu}\,\frac{\tau}{2\pi\gamma}+\frac{i}{2\,(\pi\gamma)^{1/2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\,e^{in\tau}\,(\alpha_n^{\mu}e^{-in\sigma}+\beta_n^{\mu}e^{in\sigma}). \tag{12}$$

В соответствии с этим удваивается и набор операторов Вирасоро

$$L_n=-\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}:\alpha_{n-m}\alpha_m:,\qquad \widetilde{L}_n=-\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}:\beta_{n-m}\beta_m:, \tag{13}$$

где $\alpha_0^{\mu}=\beta_0^{\mu}=P^{\mu}/2\,(\pi\gamma)^{1/2}$. Физические векторы состояний подчинены калибровочным условиям

$$L_n\,|\,\phi\rangle=\widetilde{L}_n\,|\,\phi\rangle=0,\quad n\geqslant 1, \tag{14}$$

$$(L_0-\widetilde{L}_0)\,|\,\phi\rangle=0 \tag{14$'$}$$

и условию массовой оболочки

$$[L_0+\widetilde{L}_0-\alpha\,(0)]\,|\,\phi\rangle=0. \tag{15}$$

Замкнутой струне соответствует дуальная модель Вирасоро — Шапиро [22,23]. В этой модели нет «духовых» состояний, если $D=26$ и $\alpha\,(0)=2$. Таким образом, основное состояние по-прежнему является тахионом. Первое возбужденное состояние описывает безмассовую частицу со спином 2.

Из (14′) и (15) следует $[L_0-(\alpha\,(0)/2)]\,|\phi\,\rangle=0$ и $[\widetilde{L}_0-(\alpha\,(0)/2)]\,|\,\phi\,\rangle=0$. Условие (14′) можно трактовать еще и как требование инвариантности теории при конечных сдвигах параметра $\sigma$: $\sigma\to\sigma+\sigma_0$. Это основывается на равенстве

$$\exp\,[2i\sigma_0\,(L_0-\widetilde{L}_0)]\,x^{\mu}\,(\tau,\,\sigma)\,\exp\,[-2i\sigma_0\,(L_0-\widetilde{L}_0)]=x^{\mu}\,(\tau,\,\sigma+\sigma_0). \tag{16}$$

В теории замкнутых струн можно ввести понятие ориентированной и неориентированной струны. Если потребовать инвариантность теории при отражении параметра $\sigma$: $\sigma\to-\sigma$, то такая замкнутая струна называется неориентированной. Это эквивалентно, если учесть (12), требованию инвариантности при замене операторов $\alpha_n^\mu$ на $\beta_n^\mu$, и наоборот. Следовательно, в теории неориентированной струны присутствуют только симметричные по $\alpha$ и $\beta$ состояния (ограниченная дуальная модель Вирасоро — Шапиро). Теория ориентированной струны включает полный набор состояний (как симметричных, так и антисимметричных по операторам $\alpha$, $\beta$).

Энергетический масштаб в дуальных струнах задает константа $\alpha' = (2\pi\gamma)^{-1}$. Адронная физика требует, чтобы $\alpha' \sim 1$ (ГэВ)$^{-2}$. Эта же величина определяет характерную длину дуальной струны $L \sim (\alpha')^{1/2} \sim 10^{-13}$ см. Струнные модели дают в древесном приближении линейную зависимость между спином $J$-состояния и квадратом его массы $M^2$ (линейные реджевские траектории). Энергия релятивистской струны пропорциональна ее длине $E \sim L$; следовательно, $M^2 \sim L^2$. Угловой момент вращающейся струны, имеющей форму прямолинейного отрезка, пропорционален $L^2$. Следовательно, $J \sim M^2$. Линейность траекторий Редже запрещает, в частности, существование легких адронных состояний с большими спинами (квантовая теория струны приводит к ограничению $J \leqslant \alpha' M^2$ для открытой струны, а для замкнутой $2J \leqslant \alpha' M^2$). Эти свойства адронного спектра подтверждаются экспериментально.

## 2.3. БРСТ-формализм в ковариантной квантовой теории струны

Ковариантное квантование релятивистской струны без фиксирования калибровки просто и компактно излагается [31-33] с использованием техники Бэкки — Руе — Сторра — Тютина [34,35] (БРСТ-формализм). Такая формулировка квантовой механики струны оказывается полезной при построении ковариантной квантовополевой теории взаимодействующих струн.

Этот формализм состоит в следующем. В калибровочных и общековариантных теориях, связи $\varphi_a(q, p)$ в которых являются связями первого рода по терминологии Дирака [36]:

$$[\varphi_a, \varphi_b] = f_{ab}^c \varphi_c, \tag{17}$$

при построении ковариантной квантовой теории необходимо ввести динамические переменные (поля), соответствующие духам Фаддеева — Попова. Каждой связи $\varphi_a$ сопоставляется пара канонически-сопряженных полей духов $c_a$ и $\bar{c}_a$

$$[c_a, \bar{c}_b] = \delta_{ab}, \quad [c_a, c_b] = [\bar{c}_a, \bar{c}_b] = 0. \tag{18}$$

Если часть связей фермионные, то алгебра (17) является градуированной алгеброй. Духовые переменные являются фермионными, если соответствующая связь бозонная, и наоборот. Далее вводится оператор БРСТ-заряда [37,38]:

$$Q = \sum_a \varphi_a c_a - \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} f_{ab}^c c_\alpha c_b \bar{c}_c. \tag{19}$$

Это нильпотентный оператор, т. е. его антикоммутатор (или в классике — скобка Пуассона) равен нулю в силу уравнений (17), (18) и тождества Якоби для структурных констант $f_{ab}^c$ (для простоты предполагается, что $f_{ab}^c$ не зависят от канонических переменных $q$ и $p$). С помощью $Q$ строятся новые связи $\tilde{\varphi}_a$, учитывающие наличие духов в теории:

$$\tilde{\varphi}_a = [Q, \bar{c}_a] = \varphi_a + \sum f_{ab}^c \bar{c}_c c_b. \tag{20}$$

Связи $\tilde{\varphi}_a$ удовлетворяют той же алгебре (17) и БРСТ-инвариантны:

$$[Q, \tilde{\varphi}_a] = 0, \tag{21}$$

так как

$$Q^2 = 0. \tag{22}$$

При переходе к квантовой теории операторы в $\varphi_a$ $(q, p)$ и $Q$ должны быть упорядочены. После этого уравнения (17) и (22) необходимо проверить вновь, так как могут появиться аномалии.

На классическом уровне связи $L_n = 0$ в теории струны являются связями первого рода, так как они удовлетворяют замкнутой алгебре (9'). Пусть $c_n$ и $\bar{c}_n$ — соответствующие фермионные операторы духов

$$[c_m, c_n]_+ = \delta_{n+m,\,0}, \quad [c_m, c_n] = [\bar{c}_m, \bar{c}_n] = 0. \tag{23}$$

Операторы $c$ и $\bar{c}$ по отдельности эрмитовы:

$$c_m^+ = c_{-m}, \quad \bar{c}_m^+ = \bar{c}_{-m}. \tag{24}$$

БРСТ-заряд в теории бозонной струны определяется формулой

$$Q = \sum_m L_{-m} c_m - \frac{1}{2} \sum_{m,\,n} (m-n) : c_{-m} c_{-n} \bar{c}_{m+n} : - \alpha(0)\, c_0. \tag{25}$$

Как и раньше, слагаемое с $\alpha(0)$ в (25) появилось за счет нормального упорядочивания операторов $\alpha_n$ в $L_0$. Квадрат эрмитова оператора $Q$ должен обращаться, согласно (22), в нуль. Очевидно, это возможно только на пространстве состояний с неположительно-определенной нормой.

Квантовые операторы Вирасоро теперь определяются так:

$$\tilde{L}_m = \{Q, \bar{c}_m\} = L_m + \sum (m-n) : \bar{c}_{m+n} c_{-n} : - \alpha(0)\, \delta_{m,\,0}. \tag{26}$$

Аномальный член в алгебре операторов $\tilde{L}_m$ равен

$$\frac{1}{12} D (m^3 - m) + \frac{1}{6} (m - 13m^3) + 2\alpha(0)\, m. \tag{27}$$

Он обращается в нуль, если $D = 26$ и $\alpha(0) = 1$. Следовательно, только в этом случае квантовая теория бозонной струны конформно-инвариантна.

Бесконечное число условий на физические векторы состояний струны (10) в БРСТ-формализме заменяется одним:

$$Q \mid \phi \rangle = 0. \tag{28}$$

Все решения (28), не содержащие возбуждений духов, удовлетворяют условиям (10). Следовательно, здесь можно применять «no-ghost»— теорему из ковариантной теории струны.

### 2.4. Светоподобная калибровка

Отказавшись от явной релятивистской инвариантности, можно построить квантовую теорию струны, исключив зависимые динамические переменные в теории [39]. Для этого условия ортонормальной калибровки (2) следует дополнить условиями светоподобной калибровки

$$nx = nP \frac{\tau}{\gamma\pi} + nQ, \tag{29}$$

где $n$ — постоянный изотропный вектор $n^2 = 0$. Дело в том, что условия ортонормальной калибровки (2) еще не полностью фиксируют выбор параметров $\tau$, $\sigma$ на мировой поверхности струны. Уравнения (2) и (3) допускают переход к новым параметрам $\tilde{\tau}$, $\tilde{\sigma}$ по формулам $\tilde{\tau} \pm \tilde{\sigma} = f_{\pm}(\tau \pm \sigma)$ с произвольными функциями $f_{\pm}$. С помощью этих преобразований всегда можно удовлетворить калибровочным условиям (29). С помощью (2) и (29) две компоненты вектора $x^{\mu}(\tau, \sigma)$ выражаются через оставшиеся поперечные компоненты, которые квантуются как независимые динамические переменные. Пусть вектор $n^{\mu}$ имеет компоненты $n^{\mu} = (1, 0, \ldots, 0, -1)$, тогда в переменных светового конуса $x^{\pm} = (x^0 \pm x^{D-1})/\sqrt{2}$, $x^{\mu} = (x^{\pm}, \mathbf{x}_{\perp})$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}^- &= \frac{\pi\gamma(\dot{\mathbf{x}}_{\perp}^2 + \mathbf{x}_{\perp}'^2)}{2P^+}, \quad & x^{-\prime} &= \frac{\pi\gamma\dot{\mathbf{x}}_{\perp}\mathbf{x}_{\perp}'}{P^+}, \\ \dot{x}^+ &= \frac{P^+}{\pi\gamma}, & x^{+\prime} &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Динамика независимых компонент $\mathbf{x}_{\perp}(\tau, \sigma)$ определяется квадратичным действием струны в светоподобной калибровке:

$$S = \frac{\gamma}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma\,(\dot{\mathbf{x}}_{\perp}^2 - \mathbf{x}_{\perp}'^2). \tag{31}$$

Решением уравнений движения (3) для независимых переменных $\mathbf{x}_{\perp}(\tau, \sigma)$ являются поперечные компоненты в разложении (6) $\mu = 1, 2, \ldots, D-2$. В терминах фурье-амплитуд формулы (30) переписываются так:

$$\begin{gathered} \alpha_k^{(+)} = 0, \quad k \neq 0, \quad \alpha_k^{(-)} = \frac{\pi\gamma}{P^+} L_{n\perp} - \delta_{n,0}\alpha(0), \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{gathered} \tag{32}$$

где $L_{n\perp}$ — операторы Вирасоро, построенные из поперечных фурье-амплитуд:

$$L_{n\perp} = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} :\boldsymbol{\alpha}_{n-m\perp}\boldsymbol{\alpha}_{m\perp}:, \quad \boldsymbol{\alpha}_{0\perp} = \frac{\mathbf{P}_{\perp}}{(\pi\gamma)^{1/2}}, \quad \alpha_0^{(\pm)} = \frac{P^{\pm}}{(\pi\gamma)^{1/2}}. \tag{33}$$

В частности, для массы струны как целого получаем из (32) при $n = 0$ следующее выражение:

$$M^2 = P^2 = -\mathbf{P}_{\perp}^2 + 2P^+P^- = \pi\gamma\sum_{m\neq 0} :\boldsymbol{\alpha}_{-m\perp}\boldsymbol{\alpha}_{m\perp}: - 2\pi\gamma\alpha(0). \tag{34}$$

В рассматриваемом случае норма векторов состояний, очевидно, положительна, так как они строятся действием на вакуум только операторов $\boldsymbol{\alpha}_{n\perp}^{+}$, $n \geqslant 1$.

Основная проблема в нековариантном подходе — это доказательство релятивистской инвариантности теории в квантовом случае. Для этого необходимо убедиться в том, что генераторы группы Пуанкаре $P_{\mu}$ и $J_{\mu\nu}$, построенные с помощью динамических переменных струны, удовлетворяют известным коммутационным соотношениям. Генератором трансляций является полный импульс струны $P_{\mu}$, а тензор углового момента струны

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} = \gamma\int_0^{\pi}(x_{\mu}\dot{x}_{\nu} - x_{\nu}\dot{x}_{\mu})\,d\sigma = Q_{\mu}P_{\nu} - Q_{\nu}P_{\mu} - \\ - \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_{-n\mu}\alpha_{n\nu} - \alpha_{-n\nu}\alpha_{n\mu}) \end{aligned} \tag{35}$$

есть генератор лоренцевых поворотов. Оказывается, что все коммутационные соотношения имеют правильное значение, кроме коммутатора [39]

$$[J^{-i}, J^{-j}] = \\ = \frac{2}{(P^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m \left[ 1 - \frac{1}{24}(D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{24}(D-2) - \alpha(0) \right] \right\} (\alpha^i_{-m}\alpha^j_m - \alpha^j_{-m}\alpha^i_m), \tag{36}$$

где $i, j = 2, 3, \ldots, D-1$; $D$ — размерность пространства-времени. Алгебра группы Пуанкаре требует, чтобы $[J^{-i}, J^{-j}] = 0$. Поэтому единственная возможность согласовать данную теорию с релятивистской инвариантностью — это потребовать, чтобы было $\alpha(0) = 1$ и $D = 26$. Отсюда следует, в частности, что основное состояние струны согласно формуле (34) имеет мнимую массу (тахион). Первое возбужденное состояние $\alpha^i_{-1} \mid 0 \rangle$ описывает безмассовую векторную частицу со спином 1. В реальном адронном спектре такого состояния нет. Этот факт, а также нефизическая размерность пространства-времени и тахионные состояния являются основными недостатками дуального струнного подхода к физике адронов.

Были предложены методы квантования релятивистской струны без ограничения на размерность пространства-времени и без тахионных состояний [40,41]. Но в этом случае теряется связь струнных моделей с дуально-резонансным подходом.

### 2.5. Струнная модель адронов и квантовая хромодинамика

Представление о релятивистской струне возникает в адронной физике, помимо дуальных моделей, и в рамках квантовой хромодинамики. Весьма вероятно, что при расстоянии между кварками, приближающемся к размеру адрона ($\sim 10^{-13}$ см), энергетически более выгодными оказываются такие конфигурации глюонных полей, когда эти поля не заполняют все пространство (как в электродинамике), а концентрируются вдоль линий, соединяющих кварки [42–44]. Энергия двух кварков, связанных такой трубкой глюонного поля, пропорциональна расстоянию между ними. Следовательно, силы притяжения между кварками не убывают с расстоянием, а остаются постоянными. Поэтому никакое внешнее воздействие не может разорвать эту связь и привести к рождению свободного кварка. Причина возникновения локализованных вдоль линии конфигураций глюонного поля — это вакуумные поля в КХД [45], которые создают внешнее давление на глюонную трубку. Такие локализованные конфигурации глюонного поля моделирует релятивистская струна (поперечные размеры глюонной трубки считаются бесконечно малыми). Релятивистская струна значительно проще, чем такая сложная квантовополевая модель, как хромодинамика, вместе с тем струнная модель воспроизводит основные предсказания, полученные в полевом подходе. В частности, релятивистская струна, связывающая массивные частицы, приводит к потенциалу между ними, линейно растущему с расстоянием [46] (потенциал запирания кварков).

### 2.6. Спиновая струна. Динамические переменные и ковариантное квантование

Исторически вначале были построены дуально-резонансные модели, включающие фермионные операторы (модель Невё — Шварца [47] и Рамона [48]), и потом уже была предложена спиновая струна как динамическая основа этих моделей.

В спиновой струне бозонные координаты $x^\mu(\tau, \sigma)$ дополняются спиновыми переменными $S_\alpha^\mu(\tau, \sigma)$, являющимися грассмановыми (антикоммутирующими) величинами уже на классическом уровне. По индексу $\mu$ они преобразуются как лоренцев $D$-мерный вектор, а по индексу $\alpha$ — как двумерный спинор в пространстве $(\tau, \sigma)$. Физически $S_\alpha^\mu(\tau, \sigma)$ можно трактовать как переменные, описывающие распределение спина вдоль струны.

Уравнения движения (3) и условия ортонормальной калибровки (2) в теории спиновой струны обобщаются следующим образом:

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0, \quad \dot{S}_1^\mu = S_1'^\mu, \quad \dot{S}_2^\mu = -S_2'^\mu, \tag{37}$$

$$\begin{gathered} \dot{x}^2 + x'^2 + 2i\,(S_1^\mu S'_{1\mu} + S_2^\mu S'_{2\mu}) = 0, \\ \dot{x}_\mu x'^\mu + i\,(S_1^\mu S'_{1\mu} - S_2^\mu S'_{2\mu}) = 0, \end{gathered} \tag{38}$$

$$(\dot{x}_\mu + x'_\mu)\, S_1^\mu = 0, \quad (\dot{x}_\mu - x'_\mu)\, S_2^\mu = 0. \tag{39}$$

Таким образом, $x^\mu$ и $S^\mu$ подчиняются свободным уравнениям Даламбера и Дирака соответственно, а взаимодействуют они только в силу дополнительных условий (38), (39). Граничные условия в теории спиновой струны записываются так:

$$\begin{gathered} x'^\mu(\tau, 0) = x'^\mu(\tau, \pi) = 0, \\ S_1^\mu(\tau, 0) = S_2^\mu(\tau, 0), \quad S_1^\mu(\tau, \pi) = \varepsilon S_2^\mu(\tau, \pi), \end{gathered} \tag{40}$$

где $\varepsilon = -1$ для дуальной струны Невё — Шварца и $\varepsilon = +1$ для модели Рамона.

Уравнения движения (37) в ортонормальной калибровке (38), (39) получаются из следующего действия:

$$S = -\frac{\gamma}{2} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int\limits_0^\pi d\sigma\, (\partial_\alpha x^\mu \partial_\alpha x_\mu + i\bar{S}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha S_\mu), \tag{41}$$

где $\rho^\alpha$, $\alpha = 0, 1$ — двумерные $\gamma$-матрицы Дирака для пространства $\tau, \sigma$:

$$\begin{gathered} \rho^0 = -i\sigma_2, \quad \rho^1 = \sigma_1, \quad \rho^5 = \sigma_3, \quad \rho^\alpha \rho^\beta = \eta_{\alpha\beta} + \rho^5 \varepsilon_{\alpha\beta}, \\ \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(1, -1), \quad \varepsilon_{01} = 1, \end{gathered} \tag{42}$$

а спиновые переменные $S_1^\mu$, $S_2^\mu$ представлены в виде двухкомпонентного столбца $S^\mu$, причем $\bar{S}_\mu = S_\mu^T \rho^0$. Дополнительные условия (38) и (39), не следующие из действия (41), означают обращение в нуль симметричного тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ в параметрическом пространстве $\tau, \sigma$:

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\,(\partial_\rho x)^2 + \frac{i}{4}\bar{S}\,(\rho_\alpha \partial_\beta + \rho_\beta \partial_\alpha)\, S = 0 \tag{43}$$

и плотности супертока

$$J_\alpha = (\partial_\beta x^\mu)\, \rho^\beta \rho_\alpha S_\mu = 0. \tag{44}$$

Решение уравнений движения для $x^\mu$ дается по-прежнему разложением (6), а для спиновых переменных имеем

$$\begin{gathered} S_1^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_k b_k^\mu \exp[-ik(\tau + b)], \\ S_2^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_k b_k^\mu \exp[-ik(\tau - \sigma)], \quad b_k^\mu = \overset{*}{b}{}_{-k}^\mu. \end{gathered} \tag{45}$$

Если в граничных условиях (40) $\varepsilon = -1$, то суммирование в (45) ведется по полуцелым числам. Если же $\varepsilon = +1$,— то по целым.

Связи (38), (39) приводят к следующим калибровочным операторам:

$$G_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} :\alpha_{n-k}\alpha_k: - \frac{1}{2}\sum_{k=\infty}^{+\infty} k : b_{n-k}b_k:,$$
$$H_n = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{n-k}\alpha_k, \quad [b_n^\mu, b_m^\nu] = -g^{\mu\nu}\delta_{n+m,\,0}. \tag{46}$$

Как и в бозонном случае, алгебра этих операторов на квантовом уровне оказывается незамкнутой из-за появления аномальных членов, зависящих от размерности пространства-времени. Например, в случае дуальной модели Рамона ($\varepsilon = +1$) имеем

$$[G_n, G_m]_- = (n-m)\, G_{n+m} + \frac{D}{8} n^3\delta_{n+m,\,0},$$
$$[H_n, H_m]_+ = 2G_{n+m} + \frac{D}{2} n^2\delta_{n+m,\,0}, \tag{47}$$
$$[G_n, H_m]_- = \left(\frac{n}{2} - m\right) H_{n+m}.$$

Физическими считаются такие векторы состояний, которые удовлетворяют условиям

$$G_n \mid \phi\rangle = 0, \quad H_n \mid \phi\rangle = 0, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots \tag{48}$$

Построить гильбертово пространство векторов состояний с положительно-определенной нормой удается только при $D = 10$. Оператор квадрата массы в теории спиновой струны дается формулой

$$\alpha' M^2 = m, \quad \begin{array}{ll} m = 0,\ 1,\ \ldots, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ m = -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \ldots, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{array} \tag{49}$$

Таким образом, в спиновой струне, соответствующей дуальной модели Рамона, нет тахионных состояний.

Спектр спиновой струны может быть урезан, так что на каждом массовом уровне будет равное число бозонов и фермионов, т. е. спектр будет суперсимметричным [49].

## 2.7. Нековариантное квантование

В теории спиновой струны, так же как в бозонном случае, можно провести разделение динамических переменных на зависимые и независимые и построить квантовую теорию в терминах только независимых (поперечных) степеней свободы [15]. Для этого светоподобная калибровка (29) распространяется и на спиновые переменные:

$$n_\mu S_1^\mu = n_\mu S_2^\mu = 0. \tag{50}$$

Отсюда следует, что

$$S_1^+(\tau,\ \sigma) = S_2^+(\tau,\ \sigma) = 0 \tag{51}$$

Возможность введения такой калибровки обусловлена инвариантностью уравнений (37), (38), (39) относительно (псевдо)конформных преобразований параметров $\tau$, $\sigma$:

$$\tilde\tau \pm \tilde\sigma = f_\pm(\tau \pm \sigma), \quad \tilde{x}^\mu(\tilde\tau,\ \tilde\sigma) = x^\mu(\tau,\ \sigma),$$
$$\tilde{S}_1^\mu(\tilde\tau,\ \tilde\sigma) = S_1^\mu(\tau,\ \sigma)\,(\dot f_+)^{-1/2}, \quad \tilde{S}_2^\mu(\tilde\tau,\ \tilde\sigma) = S_2^\mu(\tau,\ \sigma)\,(\dot f_-)^{-1/2} \tag{52}$$

и суперсимметричных преобразований специального вида, смешивающих бозонные и фермионные переменные:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_1^\mu &= S_1^\mu + \varepsilon f(\tau, \sigma)(\dot{x}^\mu + x'^\mu),\\ \tilde{S}_2^\mu &= S_2^\mu + \varepsilon g(\tau, \sigma)(\dot{x}^\mu - x'^\mu),\\ \tilde{x}^\mu &= x^\mu - 2i\varepsilon(fS_1^\mu + gS_2^\mu),\end{aligned} \tag{53}$$

где $f(\tau, \sigma)$ и $g(\tau, \sigma)$ — антикоммутирующие с $S^\mu$ функции, подчиняющиеся уравнениям

$$\dot{f} - f' = 0, \quad \dot{g} + g' = 0. \tag{54}$$

Формулы (38), (39) и (51) позволяют выразить переменные $x^\pm(\tau, \sigma)$ и $S_1^\pm(\tau, \sigma)$, $S_2^\pm(\tau, \sigma)$ через $\mathbf{x}_\perp(\tau, \sigma)$ и $\mathbf{S}_{\perp 1}(\tau, \sigma)$, $\mathbf{S}_{\perp 2}(\tau, \sigma)$ в полной аналогии с (30). Динамика независимых переменных задается действием спиновой струны в светоподобной калибровке, аналогичным (41):

$$S = \frac{\gamma}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma\,[(\partial_\alpha \mathbf{x}_\perp)^2 + i\bar{\mathbf{S}}_\perp \rho^\alpha \partial_\alpha \mathbf{S}_\perp]. \tag{55}$$

Решением уравнений движения (37) для независимых переменных являются поперечные компоненты $\mu = 1, 2, \ldots, D-2$ в формулах (6) и (45).

Лоренцевские генераторы $J^{-i}$ определяются формулой

$$J^{-i} = Q^- P^i - Q^i P^- - \frac{i}{P^+}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(\alpha_n^i G_{-n\perp} - \alpha_{-n}^i G_{n\perp}) + \\ + \frac{1}{P^+}\sum_{n>0}(b_n^i H_{-n\perp} - b_{-n}^i H_{n\perp}), \tag{56}$$

где $G_{n\perp}$ и $H_{n\perp}$ — калибровочные операторы (46) для поперечных переменных. Условие лоренц-инвариантности теории требует

$$[J^{-i}, J^{-j}] = 0. \tag{57}$$

Это выполняется только при $D = 10$ и $\alpha(0) = 0$ ($\varepsilon = 1$) и $\alpha(0) = -1/2$ ($\varepsilon = -1$).

Масса спиновой струны выражается через независимые переменные следующим образом:

$$\alpha' M^2 = \sum_{n>0}(:\alpha_{-n\perp}\alpha_{n\perp}: + n : \mathbf{b}_{-n\perp}\mathbf{b}_{n\perp}:) + \begin{cases} 0, & \varepsilon = +1,\\ -\frac{1}{2}, & \varepsilon = -1.\end{cases} \tag{58}$$

Появление тахионов в спектре дуальных струн связано с учетом энергии нулевых колебаний гармонических осцилляторов, описывающих динамику струны [50]. Действительно, с учетом этих колебаний классическое выражение в формуле для квадрата массы бозонной струны (21)

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty n a_n^{+i} a_n^i, \quad (n)^{1/2} a_n^i = \alpha_n^i, \quad n \geqslant 1, \tag{59}$$

должно быть заменено в квантовой теории следующим оператором:

$$\sum_{n=1}^\infty n \sum_{i=1}^{D-2}\left(a_n^{+i} a_n^i + \frac{1}{2}\right) = \frac{D-2}{2}\sum_{n=1}^\infty n + \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^{D-2} n a_n^{+i} a_n^i. \tag{60}$$

Таким образом,

$$2\alpha(0) = -(D-2)\sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Этот расходящийся ряд должен быть регуляризован. Сравнивая его с $\zeta$-функцией Римана [51]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \tag{61}$$

которая может быть аналитически продолжена в точку $s = -1$, причем $\zeta(-1) = -1/12$, получаем

$$\alpha(0) = \frac{D-2}{24}. \tag{62}$$

Такая процедура перенормировки согласована с релятивистской инвариантностью квантовой теории бозонной струны, которая, как было показано ранее, требует $D = 26$, $\alpha(0) = 1$.

Теперь понятно, почему в теории спиновой струны удалось получить квантовое решение без тахионов. Энергия нулевых колебаний фермионных осцилляторов $\mathbf{b}^{+}_{\perp n}$, $\mathbf{b}_{\perp n}$ отрицательна и по величине равна энергии нулевых колебаний бозонных осцилляторов $\mathbf{a}^{+}_{\perp n}$, $\mathbf{a}_{\perp n}$ [52,53]. В результате происходит их взаимная компенсация, так как число независимых бозонных и фермионных степеней свободы в спиновой струне одинаково и равно 8.

### 2.8. Полное действие для спиновой струны

Недостатком теории спиновой струны, изложенной выше, было то, что вариационным путем из действия (41) выводились только уравнения движения (37), а калибровочные условия (38), (39) постулировались дополнительно. Представляет интерес полное действие для спиновой струны, из которого с помощью вариационного принципа получалась бы вся динамика, т. е. уравнения движения (37) и условия калибровки (38), (39) или (43), (44). Такое действие было построено [54–59] путем расширения симметрии теории при преобразованиях (52), (53) до общековариантных преобразований в двумерном пространстве $\tau$, $\sigma$ и локальных преобразований суперсимметрии. Действие Намбу — Гото (1) оказалось неудобным для такого обобщения, так как координаты струны входят в него неполиномиально. Для бозонной струны было предложено новое действие, квадратичное по координатам струны [54]:

$$\begin{gathered} S' = -\frac{\gamma}{2}\iint_{\Omega} \mathrm{d}^2u\, |g|^{1/2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu, \\ u = (u^0, u^1), \quad u^0 = \tau, \quad u^1 = \sigma. \end{gathered} \tag{63}$$

В этой формуле $x^\mu(u)$ — по-прежнему координаты струны, $g_{\alpha\beta}(u)$ — вспомогательное поле симметричного тензора второго ранга, заданного в $\Omega$, $\gamma$ — константа с размерностью квадрата массы, которую будем полагать далее равной 1. Действие (63) инвариантно при глобальных преобразованиях Пуанкаре

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \delta g_{\alpha\beta} = 0, \tag{64}$$

при общековариантных преобразованиях параметров $u^0$, $u^1$:

$$\delta x^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha x^\mu, \quad \delta g_{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi^\gamma \cdot g_{\gamma\beta} + \partial_\beta \xi^\gamma \cdot g_{\alpha\gamma}, \tag{65}$$

и при вейлевских преобразованиях:

$$\delta g_{\alpha\beta} = \lambda(u)\, g_{\alpha\beta}, \quad \delta x^\mu = 0. \tag{66}$$

На классическом уровне $S'$ полностью эквивалентно действию Намбу — Гото (1). Варьирование $S'$ по $x^\mu$ и $g_{\alpha\beta}$ дает следующие уравнения движения:

$$\frac{1}{|g|^{1/2}}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(g^{\alpha\beta}|g|^{1/2}\partial_\beta x^\mu)=0, \tag{67}$$

$$\frac{\delta S'}{\partial g^{\alpha\beta}}=\frac{1}{2}|g|^{1/2}T_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}|g|^{1/2}\left(\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\partial_\gamma x^\mu\partial_\rho x_\mu g^{\gamma\rho}\right)=0; \tag{68}$$

здесь $T_{\alpha\beta}$ — симметричный «метрический» тензор энергии-импульса полей $x^\mu(u)$. Из (68) получаем, что вспомогательное поле $g_{\alpha\beta}(u)$ равно (с точностью до произвольного множителя) метрике на мировой поверхности струны

$$g_{\alpha\beta}=\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu. \tag{69}$$

В этом случае (67) сводятся к уравнениям движения, получаемым из действия Намбу — Гото (1), а (63) переходит в (1).

Интересно проследить, как возникают условия ортонормальной калибровки (2) при работе с действием (63). Пользуясь инвариантностью $S'$ при преобразованиях (65), тензорное поле второго ранга $g_{\alpha\beta}(u)$ всегда можно привести к диагональному виду $g_{\alpha\beta}(u)=\exp[\varphi(u)]\,\eta_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}=\mathrm{diag}\,(1,\ -1)$. После этого уравнения движения для $g_{\alpha\beta}(u)$ (68) сводятся к (2). Таким образом, тензорное поле $g_{\alpha\beta}(u)$ в классической теории струны, базирующейся на действии (63), играет роль множителей Лагранжа. Следовательно, на классическом уровне действия (1) и (63) полностью эквивалентны. Однако при квантовании действия (63), как было показано Поляковым [40], в принципе открывается возможность построить непротиворечивую квантовую теорию релятивистской струны, отличную от стандартного подхода при $D\neq 26$. На квантовом уровне можно отказаться от инвариантности теории струны при вейлевских преобразованиях (66) (действие Намбу — Гото (1) такой инвариантностью не обладает) и учесть конформную аномалию. В результате конформно-плоская часть метрики $\varphi(u)$ становится динамической переменной, подчиняющейся нелинейному двумерному уравнению Лиувилля $\partial^2\varphi+\mu_0^2e^\varphi=0$.

В работе [60] было предложено еще одно действие для замкнутой струны Намбу — Гото, квадратичное по координатам струны и допускающее суперсимметричное обобщение.

Полное действие для спиновой струны [54,57] получается введением в (63) суперсимметричным образом фермионных полей. Метрический тензор $g_{\alpha\beta}(u)$ «расщепляется» стандартным путем с помощью векторов подвижного репера $V_a^\alpha(u)$: $g^{\alpha\beta}=V_a^\alpha V_b^\beta\eta^{ab}$, $\eta^{ab}=\mathrm{diag}\,(1,\ -1)$. Действие записывается в следующем виде:

$$S_{\text{сп}}=-\frac{\gamma}{2}\int d^2uV\Big[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu+iV_a^\alpha\bar{S}^\mu\rho^a\partial_\alpha S_\mu+$$
$$+2V_a^\alpha V_b^\beta\bar{\psi}_\alpha\rho^b\rho^a S^\mu\left(\partial_\beta x_\mu+\frac{1}{2}\bar{S}_\mu\psi_\beta\right)\Big], \tag{70}$$

где $V=\det\|V_a^\alpha\|$, $\psi_\alpha(u)$ — поле спина 3/2. Это действие инвариантно при локальных двумерных лоренц-преобразованиях в пространстве $\tau$, $\sigma$, при вейлевских преобразованиях:

$$x\to x,\quad S\to\lambda^{-1/2}S,\quad V_a^\alpha\to\lambda V_a^\alpha,\quad \psi_\alpha\to\lambda^{1/2}\psi_\alpha, \tag{71}$$

и при локальных преобразованиях суперсимметрии:

$$\begin{aligned}&\delta x^\mu=i\bar{\varepsilon}(u)S^\mu,\quad \delta S=(\partial_\alpha x+i\bar{S}\psi_\alpha)\rho^a V_a^\alpha\varepsilon(u),\\ &\partial V_a^\alpha=-2i\bar{\varepsilon}(u)V_b^\alpha V_a^\beta\rho^b\psi_\beta,\quad \delta\psi_\alpha=-D_\alpha\varepsilon(u),\end{aligned} \tag{72}$$

где $D_\alpha$ — ковариантная производная спинора в двуметрии. Поле Рариты — Швингера $\psi_\alpha(u)$ и подвижный репер $V_a^\alpha(u)$ играют роль вспомогательных переменных. В силу инвариантности теории при суперсимметричных преобразованиях (72) всегда можно выбрать калибровку, в которой

$$V_a^{\alpha}(u) = h(u)\delta_a^{\alpha}, \quad \psi_\alpha(u) = 0 \tag{73}$$

(суперконформная калибровка). В результате уравнения движения для $x^\mu$ и $S^\mu$, следующие из (70), сведутся к (37), уравнения движения для подвижного репера $V_a^\alpha$ дадут калибровочные условия (38) в форме (43), а уравнения Эйлера $\delta S_{\text{сп}}/\delta\psi^\alpha = 0$ сведутся к условиям (39) в форме (44).

## 3. ДИНАМИКА СУПЕРСТРУН И ИХ СВЯЗЬ С ФИЗИКОЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

### 3.1. Суперструна. Функционал действия и динамические переменные в светоподобной калибровке

Суперструна [15,16,61-63] представляет собой некоторую модификацию спиновой релятивистской струны. В этой модели использовано другое описание для спиновых переменных, распределенных вдоль струны [62]. В спиновой струне это осуществлялось с помощью грассмановых переменных $S_A^\mu(\tau, \sigma)$, $\mu = 0, 1, \ldots, D-1$, $A = 1, 2$, являющихся лоренцевским вектором в $D$-мерном пространстве Минковского и майорановским спинором в двумерном касательном пространстве к мировой поверхности струны. Суперсимметрия, имеющая место в спиновой струне, относилась фактически к двумерному пространству $\tau$, $\sigma$, а не к объемлющему 10-мерному пространству Минковского. Эту суперсимметрию можно пытаться расширить. Прямое построение ($N = 2$)-суперсимметричной струнной теории путем удвоения числа полей [58] приводит к модели с критической размерностью $D = 2$. Это, очевидно, не представляет физического интереса.

Другой путь — это поиски новых представлений для фермионного поля, заданного вдоль струны. Для суперсимметрии в теории необходимо, чтобы число физических степеней свободы фермионного поля равнялось числу бозонных степеней свободы, т. е. числу поперечных компонент вектора $x^\mu(\tau, \sigma)$ (восьми в случае 10-мерного пространства-времени). Проще всего построить теорию суперструны в светоподобной калибровке, оперируя только с независимыми динамическими переменными. Алгебра Ли группы SO(8) имеет три действительных неэквивалентных 8-мерных представления, одно векторное и два спинорных. Поэтому переход от спиновой струны к суперструне осуществляется заменой

$$S_A^i(\pi, \sigma) \to Q_A^a(\tau, \sigma), \tag{74}$$

где $i = 1, 2, \ldots, D-2$; $A = 1, 2$ — спиновый индекс в двумерном пространстве $\tau$, $\sigma$; $a$ — восьмизначный спиновый индекс по группе SO(8). Подставляя (74) в (55), получаем[61]

$$S = \frac{T}{2}\iint d\tau\, d\sigma\, [\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^i \partial_\beta x^i + i\bar{Q}^a \rho^\alpha \partial_\alpha Q^a]. \tag{75}$$

Все формулы из нековариантной квантовой теории спиновой струны с помощью замены (74) переносятся в теорию суперструны. Релятивистская инвариантность опять-таки выполняется только в 10-мерном пространстве-времени, и основное состояние теории безмассовое (тахионов нет). Используются граничные условия, как и в спиновой струне Рамона [40]. Поэтому разложение грассмановых переменных идет по целочисленным модам

$$Q_1^a(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_n Q_n^a \exp[-ik(\tau+\sigma)],$$
$$Q_2^a(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_n Q_n^a \exp[-ik(\tau-\sigma)]. \qquad (76)$$

В квантовой теории операторы $Q_n^a$ подчиняются антикоммутационным соотношениям

$$[Q_n^a, Q_m^b]_+ = \delta_{n+m,0}\delta_{ab}. \qquad (77)$$

Операторы $Q_{-n}^a$, $n > 0$, являются операторами рождения. При действии на бозонные состояния они превращают их в фермионные, причем число бозонных и фермионных состояний в каждом супермультиплете с фиксированной массой одно и то же.

Чтобы проверить релятивистскую инвариантность теории [15], необходимо построить зависимые операторы $x^{\pm}$, $Q^{\pm}$, $J^{\pm}$ и убедиться, что алгебра Пуанкаре выполняется, если $D = 10$.

### 3.2. Полное действие для суперструны

По аналогии со спиновой струной (см. формулу (70)) для суперструны было построено полное действие [64], из которого следуют как динамические уравнения, так и калибровочные условия. Полный набор динамических переменных для суперструны состоит из пространственно-временны́х координат $x^\mu(\tau, \sigma)$ и антикоммутирующих грассмановых переменных $\theta_A^a(\tau, \sigma)$, $A = 1, 2$. Действие строится в 10-мерном пространстве Минковского. Спинорный индекс $a$ пробегает $2^5 = 32$ значений, так как размерность $\gamma$-матриц Дирака в $D$-мерном пространстве-времени равна $2^k$, где $k$ — целая часть числа $D/2$.

Требуется, чтобы переменные $\theta_A^a$ были майорано-вейлевским спинором по индексу $a$:

$$h^{ab}\theta_A^b = 0, \quad \bar\theta_A = -\theta_A\gamma^0, \quad A = 1, 2, \qquad (78)$$

где $h$ означает вейлевский проектор $h = (1 \pm \gamma_{11})/2$. Такое условие может быть выполнено только в пространстве-времени с размерностью $D = 2 \pmod 8$, т. е. $D = 2, 10, \ldots$ В условиях (78) имеются две возможности: $\theta_1^a$ и $\theta_2^a$ могут иметь одну и ту же киральность или же противоположную. Комплексные переменные $\theta_A^a(\tau, \sigma)$, $A = 1, 2$, содержат $2^7$ независимых действительных функций. Условия (78), а также граничные условия и уравнение Дирака для $\theta_A^a$ снижают число независимых фермионных степеней свободы до $2^3 = 8$.

Динамика свободной суперструны определяется действием

$$S = \frac{T}{2} \int\int d\tau\, d\sigma\, (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2), \qquad (79)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2\pi}(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta}\pi_\alpha^\mu \pi_{\mu\beta} \qquad \pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha x^\mu - i\bar\theta_A\gamma^\mu\partial_\alpha\theta_A, \qquad (80)$$

$$\mathcal{L}_2 = -i\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu(\bar\theta_1\gamma_\mu\partial_\beta\theta_1 - \bar\theta_2\gamma_\mu\partial_\beta\theta_2) +$$
$$+ \varepsilon^{\alpha\beta}\bar\theta_1\gamma_\mu\partial_\alpha\theta_1\bar\theta_2\gamma_\mu\partial_\beta\theta_2, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \quad \mu = 0, 1, \ldots, 9. \qquad (81)$$

Кроме локальной репараметризационной инвариантности, это действие обладает глобальной ($N = 2$)-суперсимметрией при преобразованиях

$$\begin{gathered}\delta\theta_A = \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\theta_A + \varepsilon_A,\\ \delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu + i\bar{\varepsilon}_A\gamma^\mu\theta_A, \quad \delta g^{\alpha\beta} = 0.\end{gathered} \tag{82}$$

Граничные условия для $\theta_A$ понижают эту симметрию до $N = 1$. Действие (79) инвариантно и при локальных суперсимметричных преобразованиях.

Полное действие суперструны (79) приводит к связям первого и второго рода. Существенно, что явное выделение всех связей первого рода, оказывается, нельзя осуществить лоренц-инвариантным способом [64-68]. Следует отметить, что аналогичная ситуация имеет место и для суперсимметричной безмассовой точечной частицы [66].

Локальная суперсимметрия и репараметризационная инвариантность позволяют тем не менее перейти к светоподобной калибровке $x^+ \sim \tau$, $\gamma^+\theta_A = 0$. В этой калибровке оставшиеся независимые переменные удовлетворяют свободным уравнениям движения, генерируемым действием (75).

Второе слагаемое в полном действии суперструны (79), порождаемое $L_2$, аналогично дополнительному члену Весса — Зумино в действии для нелинейных сигма-моделей [69]. Эта добавка приводит к дополнительной локальной фермионной симметрии в действии суперструны (79), которая характерна только для двумерия.

Для объединения всех фундаментальных взаимодействий на основе суперструнной теории необходимо считать, что размерная константа $T$ в действии суперструны (75) или (79) по порядку величины равна $T^{-1/2} \sim 10^{-33}$ см, т. е. суперструны должны иметь планковские размеры.

### 3.3. Полевая теория суперструн

До сих пор речь шла только о первичном квантовании струнных моделей, т. е. о квантовой механике струн. Полная квантовая теория струн требует описания процессов рождения и уничтожения струн, их взаимных превращений, т. е. требуется вторичноквантованная полевая теория релятивистских струн.

Попытки воспроизвести в струнных моделях петлевые дуальные диаграммы показали, что взаимодействие струн должно быть чрезвычайно специфическим: они должны взаимодействовать строго локально, в одной точке. Например, концы открытой струны могут соединяться вместе, в результате чего открытая струна превращается в замкнутую, и т. д.

Вторичноквантованный струнный функционал $\Psi[x(\sigma)]$ удобно разложить по собственным состояниям оператора квадрата массы струны $M^2$. Для бозонной открытой струны имеем [79]

$$\Psi[x(\sigma)] = \{\varphi(x) + A_\mu^{(1)}(x)\,\alpha_{-1}^\mu + h_{\mu\nu}(x)\,\alpha_{-1}^\mu\alpha_{-1}^\nu + A_\mu^{(2)}(x)\,\alpha_{-2}^\mu + \ldots\}\,|\,0\rangle.$$

Коэффициенты этого разложения представляют собой обычные локальные поля. Условия (10), перенесенные в полевую теорию струн

$$L_n\Psi[x(\sigma)] = \delta_{n,0}\Psi[x(\sigma)], \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

дают уравнения движения для этих полей

$$\begin{gathered}L_0\varphi(x) = -\alpha' P^2\varphi(x) = \alpha'\,\partial^2\varphi(x) = \varphi(x),\\ (\alpha'\partial^2 - 1 + n)\,A_\mu^{(n)}(x) = 0, \quad \partial^\mu A_\mu^{(1)}(x) = 0,\\ (\alpha'\partial^2 + 1)\,h_{\mu\nu}(x) = 0\end{gathered}$$

и т. д. Таким образом, скалярное поле $\varphi(x)$ — это поле тахиона с квадратом массы $(\alpha')^{-1}$, $A_\mu(x)$ — электромагнитное поле и т. д. В полевой теории открытых струн нет безмассового симметричного тензорного поля второго ранга, которое можно было бы отождествить с гравитационным полем. Гравитация описывается замкнутыми струнами.

Полная квантовополевая теория взаимодействующих струн не построена. Первые работы в этом направлении были сделаны в начале 70-х годов [70–72],

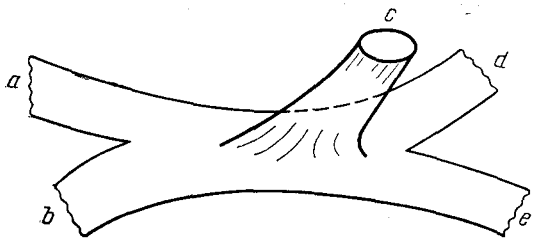



**Рис. 2. Взаимодействие открытых и замкнутых релятивистских струн, описывающее процесс $a + b \to c + d + e$.**

**Две открытые струны $a$ и $b$, соединяясь своими концами, образуют одну открытую струну, которая порождает замкнутую струну $c$ и две открытые $d$ и $e$**

когда релятивистские струны рассматривались как динамическая основа дуально-резонансных моделей в адронной физике. Аналогом фейнмановских диаграмм в полевой теории струн являются двумерные поверхности (мировые поверхности струн), которые могут иметь в общем случае сложную топологическую структуру. В рамках фейнмановского интегрирования по путям необходимо провести суммирование по всем этим поверхностям при заданных начальной и конечной конфигурациях струн (рис. 2). Для этого требуется определить меру в пространстве двумерных поверхностей [40,130–132]. Эта задача **в общем виде** решена [133] для поверхностей рода $p$ в теории замкнутых бозонных струн. Риманова поверхность рода $p$ топологически эквивалентна сфере с $p$ ручками. Она описывает $p$-петлевую струнную диаграмму. Для $p = 2$, 3 **получены явные формулы** [130–133]. В этом подходе возникает принципиальный вопрос, с каким весом должны входить в амплитуду или в статсумму вклады от поверхностей различного рода. Руководящим принципом здесь должно быть требование унитарности струнной амплитуды.

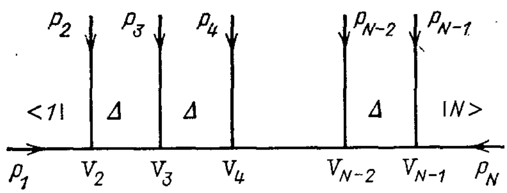



**Рис. 3. Древесная дуальная диаграмма**

Более простой оказывается ситуация, если функциональное интегрирование вести только по физическим поперечным переменным струны. Именно в светоподобной калибровке строилась теория взаимодействующих струн в первых работах [70,71,74], использующих для этих целей функциональное интегрирование. Недостаток такого подхода — потеря явной лоренц-инвариантности.

Для практических расчетов в полевой теории струн используются фактически правила вычисления дуальных древесных и петлевых диаграмм с соответствующими поправками на суперсимметрию теории. Схематически эти правила сводятся к следующему. Древесная $N$-частичная амплитуда (рис. 3) имеет вид [22,23,75]

$$T_N = \langle 1 | V_2 \Delta \cdot V_3 \cdot \Delta \ \ldots \ \Delta \cdot V_{N-1} | N \rangle \tag{83}$$

где $\Delta$ — пропагатор, описывающий распространение струны

$$\Delta = \frac{\alpha'}{L_0}, \tag{84}$$

$V$ — вершинный оператор. Петлевые диаграммы строятся из древесных замыканием внешних линий. Следует отметить, что этот метод позволяет построить струнные амплитуды только на массовой поверхности.

В работах [76,77] предпринимается попытка построить ковариантную полевую теорию струн с использованием БРСТ-формализма, т. е. проводится вторичное квантование квантовой механики струны, построенной в БРСТ-формализме (см. раздел 2.3). Полное струнное поле включает динамические и духовые поля, а также вспомогательные поля, необходимые для замыкания БРСТ-алгебры на массовой поверхности. В этом подходе возникают функционалы от грассмановых переменных. Здесь может оказаться полезной некоммутативная геометрия [78].

Другие подходы к полевой теории струн можно найти в работах [80,81].

## 3.4. Внутренние степени свободы в струнных моделях

Суперструнные теории, так же как и более простые струнные модели, не допускают нарушения свойств однородности вдоль струны, так как это сразу же ведет к потере параметризационной инвариантности в теории и к нарушению калибровочной алгебры (в бозонном случае — алгебры Вирасоро). Как уже отмечалось выше, в адронной физике струны ассоциировались с трубками или жгутами глюонного поля, соединяющими кварки. Поэтому, казалось бы, совершенно естественно попытаться ввести в действие струны дополнительные слагаемые, описывающие точечные массы, заряды и спины на концах струны. Однако даже такое минимальное нарушение однородности релятивистских струн приводит к принципиальному изменению их динамики, например сразу же теряется связь с дуальными моделями.

Внутренние степени свободы вводятся в струнные модели чисто кинематическим путем, а не динамическим. Для этого используется разработанный в дуально-резонансных моделях механизм Чана — Патона. Он сводится к следующему рецепту [82].

Каждой вершине в струнной диаграмме сопоставляется генератор $\lambda_{a_i}$ группы $G$. Множители $\lambda_{a_i}$ перемножаются в том же порядке, в каком следуют соответствующие вершины на диаграмме, и от всего произведения матриц берется след

$$\operatorname{tr}(\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}\ldots\lambda_{a_N}). \tag{85}$$

Для дуальных амплитуд было важным свойством факторизации произведения (85)

$$\operatorname{tr}(\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}\ldots\lambda_{a_N})=\sum_a \operatorname{tr}(\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}\ldots\lambda_{a_M}\lambda_a)\operatorname{tr}(\lambda_a\lambda_{a_{M+1}}\ldots\lambda_{a_N}), \tag{86}$$

которое гарантировало сохранение свойств дуальности амплитуды при введении внутренней симметрии. Не всякая группа $G$ удовлетворяет свойству (86). Чаном и Патоном [82] этот механизм был предложен для группы $G = \mathrm{SU}(N)$. Но в квантовополевой теории струн такой способ введения внутренних квантовых чисел оказался согласованным только для групп $G = \mathrm{SO}(N)$ и $G = \mathrm{USp}(N)$.

Способ введения внутренних квантовых чисел в дуальные модели, отличный от техники Чана — Патона, рассматривался в работе [83], однако он не получил распространения. В амплитудах появлялись высшие представления группы внутренней симметрии.

Принципиально новый механизм введения внутренней симметрии в струнную теорию был предложен в [84] при построении гетерозисной струны (см. раздел 3.8). Этот механизм основывается на теории представлений бесконечномерных алгебр Каца — Муди, теория которых получила развитие в последние годы [29].

### 3.5. Низкоэнергетический (локально-полевой) предел в теории взаимодействующих струн

Принципиально новая точка зрения на струнные теории была высказана в 1974 г. Шерком и Шварцем [85]. Исследуя низкоэнергетический предел $\alpha' \to 0$ в теории замкнутых струн, моделирующих траекторию померона, они показали, что безмассовое состояние спина 2 в этом пределе ведет себя точно так же, как и гравитон, т. е. подчиняется тем же динамическим уравнениям, которые вытекают для квантов гравитационного поля в теории Эйнштейна. Таким образом, струнные модели могут претендовать на роль единых теорий, включающих гравитацию.

В отличие от локальной полевой теории, в которой каждое поле описывает кванты (частицы) только одного типа, свободная суперструна несет в себе бесконечное число супермультиплетов, соответствующих нормальным модам колебаний струны. Супермультиплет основного состояния безмассовый, возбужденные состояния имеют массы и угловые моменты (спины), неограниченно возрастающие. Масштабом на шкале масс является натяжение $T$ суперструны с размерностью $[M]^2$, причем $T^{1/2}$ того же порядка, что и планковская масса $T^{1/2} \sim 10^{19}$ ГэВ. Это вполне естественно для модели, претендующей включить в себя квантовую теорию гравитации. В пределе, когда энергия значительно меньше $T^{1/2}$, состояния суперструны с массой, отличной от нуля, выходят из игры, и эффективная низкоэнергетическая теория поля включает только основной безмассовой супермультиплет. Именно эти мультиплеты должны заполнять элементарные частицы, наблюдаемые сейчас на эксперименте, так как по сравнению с планковской массой ($\sim 10^{-5}$ г) все они должны рассматриваться как безмассовые.

Низкоэнергетический предел в струнных теориях строится следующим образом. Вначале вычисляется в древесном приближении $N$-точечная струнная амплитуда с безмассовыми внешними состояниями в пределе $\alpha' \to 0$ (см. раздел 3.3). Далее подбирается действие для локальной полевой теории, которое на уровне древесных фейнмановских диаграмм воспроизводит струнную амплитуду. Петлевые поправки в полученной таким путем полевой теории должны воспроизвести петлевые поправки в струнной теории. Заранее неочевидно, что такая локальная квантовополевая модель существует. Это требует специального доказательства [86,87]. На практике обычно вычисляется вершина калибровочного взаимодействия в низшем нетривиальном порядке, а вершина более высокого порядка восстанавливается из калибровочной инвариантности.

Эта процедура содержит определенную неоднозначность, так как дуальная диаграммная техника (других разработанных способов просто нет) позволяет вычислить струнные амплитуды только на массовой поверхности. Следовательно, соответствующая низкоэнергетическая полевая теория может быть построена с точностью до слагаемых, не дающих вклада в струнные амплитуды на массовой поверхности.

Еще один способ получения низкоэнергетического полевого предела в струнных теориях основан на методе фонового поля [88]. Рассматривается взаимодействие струны с безмассовыми фоновыми полями (гравитон, гравитино, дилатон и т. д.). Далее вычисляется эффективный лагранжиан этих полей при определенных условиях согласованности.

### 3.6. Классификация суперструнных теорий

Суперструнные теории [94,95] типа I описывают открытые струны и замкнутые неориентируемые струны (понятие ориентации в теории замкнутых струн объяснено в разделе 2.2). Концы открытых струн несут квантовые числа калибровочных групп $G = \mathrm{SO}(N)$ или $G = \mathrm{USp}(N)$ согласно формализму Чана — Патона. Унитарные группы $\mathrm{SU}(N)$ не допускают квантовое рассмотрение. Теория локально инвариантна относительно двух суперсимметрий, но граничные условия допускают только одну. Безмассовые состояния таких струн являются состояниями суперсимметричной теории Янга — Миллса в 10-мерном пространстве-времени с калибровочной группой $G$.

Суперструнные теории типа II описывают только замкнутые ориентируемые струны. В теориях типа IIа суперзаряды имеют противоположную киральность. Низкоэнергетическим пределом таких теорий является некиральная ($N = 2$)-супергравитация в 10-мерном пространстве-времени. В суперструнных теориях типа IIб суперзаряды имеют одну и ту же киральность. В низкоэнергетическом пределе эти суперструнные теории сводятся к киральной ($N = 2$)-супергравитации [89–92], которая, как это было недавно показано [93], свободна от гравитационных аномалий. Недостатком суперструнных теорий типа II является отсутствие какой-либо неабелевой калибровочной симметрии. Поэтому маловероятно, что они могут привести к интересной с физической точки зрения киральной компактифицированной полевой теории.

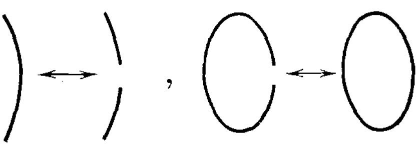


**Рис. 4. «Янг-миллсовское» взаимодействие суперструн, характеризуемое константой $g$**

Еще два примера непротиворечивых теорий суперструн с калибровочными группами SO(32) и $E_8 \times E_8$ дает гетерозисная струна (см. раздел 3.8).

Тот факт, что струнные модели содержат в себе калибровочные теории и общековариантную теорию гравитации, является довольно неожиданным,

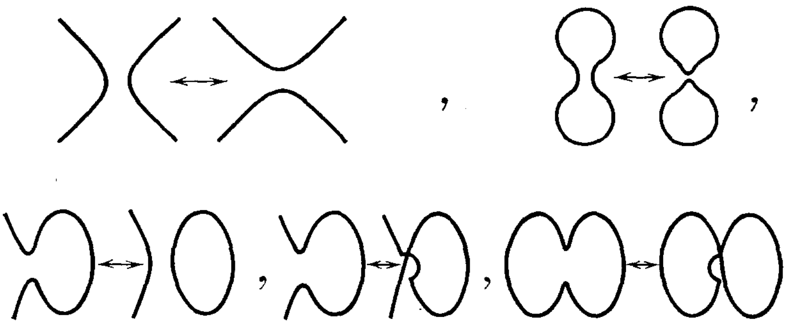


**Рис. 5. «Гравитационное» взаимодействие суперструн, характеризуемое константой $\varkappa$**

так как в них при построении не закладывались ни калибровочная инвариантность, ни общая ковариантность. Основное свойство инвариантности в теории струны — это репараметризационная инвариантность действия струны (двумерная общая ковариантность в пространстве $\tau$, $\sigma$). Вероятно, этот вопрос был бы выяснен, если бы удалось сформулировать квантовополевую теорию струн общековариантным образом в пространстве струнных конфигураций (например, в пространстве петель в случае замкнутых струн).

Локальное взаимодействие суперструн может быть двух типов.

Два свободных конца двух открытых струн или одной и той же струны могут соединиться вместе. В результате получится одна открытая или замкнутая струна (рис. 4). Возможен и обратный процесс, т. е. разрыв одной открытой струны на две или же разрыв замкнутой струны. Такое взаимодействие суперструн называется «янг-миллсовским».

Второй тип взаимодействий суперструн — это взаимодействия «гравитационного» типа, когда контактируют две внутренние точки двух струн или одной и той же струны (рис. 5).

Существенно, что в теории суперструн нет контактных взаимодействий более высокого порядка, когда взаимодействуют три и более точки. Вершины, содержащие большое число гравитонов, воспроизводятся в струнном подходе как низкоэнергетические эффективные вершины, возникающие при обмене массовыми струнными модами.

В низкоэнергетической полевой теории, следующей из суперструн с калибровочной группой SO(32), янг-миллсовская константа взаимодействия $g$ и гравитационная ньютоновская константа $\varkappa$ оказываются связанными соотношением

$$\varkappa = \mathrm{const}\cdot g^2 T, \tag{87}$$

где $T$ — натяжение суперструны.

## 3.7. Сокращение аномалий и проблема расходимостей

**Замечательным свойством суперструнных теорий является отсутствие в них (т. е. сокращение) калибровочных и гравитационных аномалий. Этот факт, установленный в 1984 г. [96], еще в большей мере повысил интерес к этим теориям.**

**Аномалии в квантовополевых моделях связаны с нарушением на квантовом уровне классических симметрий [97–101] (калибровочной инвариантности**

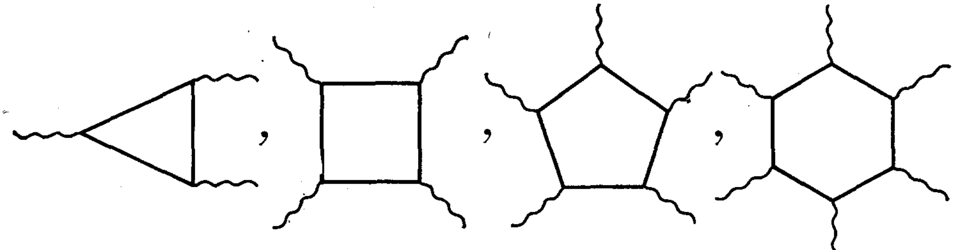



Рис. 6. Однопетлевые фейнмановские диаграммы, которые приводят к калибровочным аномалиям для различных значений размерности пространства-времени $D$

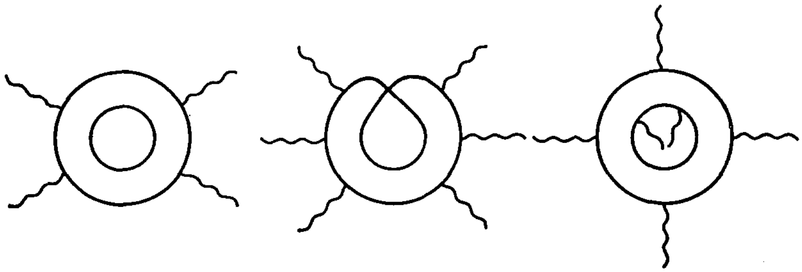
**лоренцевской инвариантности и т. д.). Впервые такие аномалии были обнаружены как несогласованность при описании распада $\pi^0$-мезона на два $\gamma$-кванта в полевых теориях с псевдоскалярным и псевдовекторным взаимодействием при расчете однопетлевой диаграммы с тремя виртуальными фермионными линиями. Далее было установлено, что в калибровочных теориях с киральными фермионами аномалии в общем случае проявляются как неинвариантность фермионного эффективного действия $\Gamma_f[A]$ при калибровочных преобразованиях векторного потенциала $A$.**

Гравитационные аномалии свидетельствуют о нарушении на квантовом уровне общей ковариантности теории или же локальной лоренцевской инвариантности. Калибровочные и гравитационные аномалии можно трактовать как нарушение при квантовании соответствующих законов сохранения: закона сохранения калибровочного тока или ковариантного закона сохранения для тензора энергии-импульса. Аномалии делают теорию несогласованной, так как они ведут к нарушению унитарности за счет взаимодействия физических поперечных мод калибровочного или гравитационного поля с продольными нефизическими модами. Требование отсутствия аномалий отбирает жизнеспособные на квантовом уровне полевые теории. Например, при объединении кварков и лептонов в поколения происходит сокращение аномалий в модели Вайнберга — Салама.

В пространстве Минковского четной размерности $D = 2n$ калибровочные аномалии возникают в однопетлевых фейнмановских диаграммах с $n + 1$ и бо́льшим числом внешних линий калибровочных полей (рис. 6). По петлям циркулируют киральные фермионы. Если $D = 4k + 2$, то в теории могут быть и гравитационные аномалии. Существенно, что аномалии, соответствующие диаграммам более высокого порядка, однозначно определяются вкладом самых низших аномальных диаграмм.

В суперструнных теориях, формулируемых в 10-мерном пространстве Минковского, калибровочные, гравитационные и смешанные аномалии возникают в петлевых 6-угольных диаграммах. Сокращение аномалий в суперструнных моделях с группой внутренней симметрии SO(32) было проверено двумя путями: на струнном уровне прямым расчетом шестиугольных струнных диаграмм и в низкоэнергетическом пределе на локальном квантовополевом уровне.

Однопетлевые струнные диаграммы шестого порядка показаны на рис. 7. Внешние волнистые линии соответствуют янг-миллсовским состояниям. Топология этих диаграмм может быть трех типов: 1) плоские, кольцевые диаграммы с топологией цилиндра, внешние линии связаны только с одной



а б в

Рис. 7. Однопетлевые струнные диаграммы с шестью внешними линиями безмассовых калибровочных бозонов.

*а* — Плоская кольцевая диаграмма. *б* — Диаграмма с топологией листа Мёбиуса. *в* — Неплоская ориентируемая диаграмма с внешними линиями, подходящими к обеим границам. Калибровочные аномалии дают диаграммы типа рис. *а* и *б*

границей (рис. 7, *а*); 2) неплоские диаграммы с топологией листа Мёбиуса (рис. 7, *б*); 3) плоские диаграммы, внешние линии которых подходят к обеим границам (рис. 7, *в*). Диаграммы третьего типа не содержат аномалий вовсе.

Вклад кольцевых диаграмм (рис. 7, *а*) записывается в следующем виде (см. раздел 3.4):

$$N \operatorname{tr} (\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_6) \int d^{10}p \operatorname{Tr} [\Delta\cdot V(1)\, \Delta\cdot V(2) \ldots \Delta\cdot V(6)], \qquad (88)$$

где tr означает след матриц в фундаментальном представлении группы $G$ внутренней симметрии струнной теории, а Tr — след матриц в присоединенном представлении группы $G$. Групповой фактор, стоящий перед интегралом в (88),— это множитель Чана — Патона, $\lambda_i$ — генераторы группы $G$ в фундаментальном представлении (антиэрмитовы $N \times N$-матрицы). Внутренняя граница дала множитель $N = \operatorname{tr}(1)$, т. е. размерность фундаментального представления группы $G$. Для корректности расчета необходимо регуляризовать подынтегральное выражение в (88). В работе [96] использовались две регуляризации: Паули — Вилларса и гауссовская регуляризация.

Неплоские диаграммы, показанные на рис. 7, *б*, вместо множителя $N$ содержат множитель $l$, который для различных групп $G$ принимает разные значения:

$$l = \begin{cases} +1, & \mathrm{USp}(N), \\ 0, & \mathrm{U}(N), \\ -1, & \mathrm{SO}(N). \end{cases} \qquad (89)$$

Таким образом, взаимное сокращение аномальных вкладов от диаграмм первых двух типов возможно только для $G = SO(N)$. Вклад от однопетлевых струнных диаграмм шестого порядка оказывается пропорциональным $N + 32l$; следовательно, только суперструнные теории с группой SO(32) не содержат аномалий.

В низкоэнергетическом полевом пределе суперструнная теория типа I сводится к ($D = 10$, $N = 1$)-супергравитации и ($D = 10$, $N = 1$)-суперсимметричной теории Янга — Миллса. Супергравитационный мультиплет включает следующие поля: подвижный репер $e^m_\mu$, антисимметричный тензор второго ранга $B_{\mu\nu}$, скалярное поле $\varphi$ (дилатон), гравитино $\psi^+_\mu$ со спином 3/2 и поле $\lambda^-$ со спином 1/2 ($\pm$ означает киральность соответствующего поля), векторный потенциал $A^\mu$ и его фермионный партнер $\chi^+$ со спином 1/2 ($A^\mu$ и $\chi^+$ принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы). Бозонный сектор низкоэнергетической суперструнной теории описывается действием

$$S_0 = \int d^{10}x\cdot e\left(-\frac{1}{2\varkappa^2}R - \frac{1}{\varkappa^2}\varphi^{-2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4g^2}\varphi^{-1}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} - \frac{3\varkappa^2}{2g^4}\varphi^{-2}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\right), \qquad (90)$$

где

$$e = \det \| e^m_\mu \|, \quad F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu = dA + A\wedge A,$$

$R$ — кривизна. Один-форма $A_\mu$ (потенциал) является матричным представлением калибровочной алгебры $A = A^a_\mu\lambda^a\,dx^\mu$, $\lambda^a$ — антиэрмитовы матрицы в фундаментальном представлении группы внутренней симметрии струнной теории. *Как было показано Грином и Шварцем*[96], *сокращение аномалий* на полевом уровне происходит для двух калибровочных групп: SO(32) и $E_8 \times E_8$, имеющих один и тот же ранг 16.

Важным моментом в механизме сокращения аномалий является необходимость модификации обычной ($N = 1$)-супергравитации, взаимодействующей с ($N = 2$)-суперсимметричной теорией Янга — Миллса. В определение напряженностей $H$ калибровочного поля $B$ должны быть введены дополнительные топологические члены:

$$H = dB - \omega_{3Y} + \omega_{3L}, \qquad (91)$$

где $\omega_{3Y}$ — янг-миллсовская 3-форма Черна — Саймона, $\omega_{3L}$ — лоренцевская 3-форма Черна — Саймона. Для группы SO(32) имеем

$$\omega_{3Y} = \mathrm{tr}\left(A\wedge F - \frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right), \qquad (92)$$

где tr — след матриц в векторном представлении SO(32), а $\wedge$ — знак внешнего произведения. Для $\omega_{3Y}$ существует альтернативная запись

$$\omega_{3Y} = \frac{1}{30}\mathrm{Tr}\left(A\wedge F - \frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right), \quad d\omega_{3Y} = \frac{1}{30}\mathrm{Tr}\,(F\wedge F), \qquad (93)$$

справедливая для двух групп SO(32) и $E_8 \times E_8$. В (93) Tr означает след в присоединенном представлении этих групп.

Лоренцевская 3-форма Черна — Саймона $\omega_{3L}$ определяется формулой

$$\omega_{3L} = \mathrm{tr}\left(\omega\wedge R - \frac{1}{3}\omega\wedge\omega\wedge\omega\right), \quad d\omega_{3L} = \mathrm{tr}\,(R\wedge R), \qquad (94)$$

где $\omega = \omega_\mu\,dx^\mu$ — локальная лоренцевская связность, принимающая значения в алгебре Ли группы SO(1, 9), $R = d\omega + \omega\wedge\omega$ — 2-форма кривизны. В (94) tr означает след в векторном представлении SO(1, 9).

Аномальные вклады однопетлевых шестиугольных диаграмм (см. рис. 6, *в*) оказываются пропорциональными ($n$ — 496), где $n$ — число киральных полей со спином 1/2. Таким образом, требуется 496 полей спина 1/2, чтобы сократить аномалии. Но размерность присоединенного представления групп SO(32) и $E_8 \times E_8$ как раз равна 496, причем для группы $E_8 \times E_8$ такую же размерность имеет и фундаментальное представление. Таким образом, сокращение аномалий на квантовополевом уровне имеет место для любой из этих групп.

Увеличение размерности пространства-времени ухудшает ситуацию с ультрафиолетовыми расходимостями в локальной квантовой теории поля, так как увеличивается степень импульсов в числителе фейнмановских интегралов. Однопетлевые расчеты [102] дают некоторые основания полагать, что суперструнные теории с калибровочными группами SO(32) и $E_8 \times E_8$ являются конечными в 10-мерном пространстве Минковского, т. е. расходимости, содержащиеся в отдельных диаграммах, взаимно сокращаются при суммировании вкладов от всех диаграмм. Существенно, что такое сокращение происходит только благодаря свойствам калибровочных групп SO(32) и $E_8 \times E_8$, т. е. эти группы опять оказываются выделенными.

Единственный тип расходимостей, который, в принципе, может не скомпенсироваться при суммировании отдельных диаграмм, — это струнный

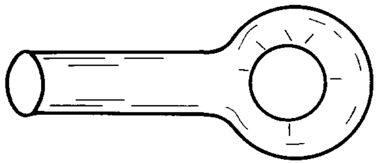


Рис. 8. Однопетлевая струнная диаграмма — аналог фейнмановских диаграмм с замкнутыми линиями, начинающимися и заканчивающимися в одной и той же вершине

аналог обычных «головастиков» (линий, выходящих и заканчивающихся в одной и той же вершине) в локальной теории поля [103–105]. При этом в вакуум испускается с нулевым импульсом и нулевой массой замкнутая струна (рис. 8). Хорошо известно, что расходимости, порождаемые «головастиками» в локальной теории поля, свидетельствуют о том, что теория возмущений строится по отношению к нефизическому вакууму. Вакуум должен быть переопределен путем исключения вкладов таких диаграмм [26]. В суперсимметричных локальных теориях поля вклад этих диаграмм автоматически равен нулю. Если в суперструнной теории нет аномалий, то ее суперсимметрия не нарушается и на квантовом уровне. Поэтому можно ожидать, что в суперструнных теориях с калибровочными группами SO(32) и $E_8 \times E_8$ ситуация будет аналогичной. Таким образом, в теории суперструн имеет место тесная связь между отсутствием аномалий и конечностью теории. В обычной локальной теории поля эта связь не такая однозначная: отсутствие аномалий вовсе не означает, что полевая теория конечна, хотя в перенормируемой теории аномалий заведомо нет.

Интересно отметить, что впервые ультрафиолетово-конечная во всех порядках теории возмущений локальная полевая теория с ($N = 4$)-суперсимметрией была получена как низкоэнергетический предел фермионной струнной модели [49,106–109].

## 3.8. Гетерозисная струна

Механизм сокращения аномальний, установленный Грином и Шварцем в суперструнной модели, существенно базируется на свойствах группы SO(32). Подобными свойствами обладает еще одна полупростая группа Ли $E_8 \times E_8$. Однако такая калибровочная группа не может быть введена в струнную модель стандартным путем с помощью матричных множителей Чана — Патона. В работе [84] была построена новая теория замкнутых струн, которая в низкоэнергетическом пределе сводится к десятимерной ($N = 1$)-супергравитации, взаимодействующей с суперсимметричным полем Янга — Миллса с калибровочной группой $\mathrm{Spin}(32)/Z_2$ или $E_8 \times E_8$ (группа $\mathrm{Spin}(32)/Z_2$ имеет ту же самую алгебру Ли, что и ортогональная группа $SO(32)$). Эта теория, получившая название «гетерозисная струна», представляет собой киральное объединение *) (гибрид) бозонной релятивистской струны в 26-мерном пространстве-времени и суперструнной модели в 10-мерном пространстве-времени.

Такое объединение основано на следующем наблюдении. Состояния замкнутых ориентируемых (тип II) струн (бозонных или фермионных) представляют собой прямое произведение движущихся влево (левосторонних) или движущихся вправо (правосторонних) мод. Физическими переменными в замкнутой бозонной струне являются 24 поперечные компоненты радиуса-вектора струны, описывающие правосторонние $x^i(\tau-\sigma)$ и левосторонние $\tilde{x}^i(\tau+\sigma)$ моды. Функции $x^i(\sigma)$ и $\tilde{x}^i(\sigma)$ удовлетворяют периодическим граничным условиям на отрезке $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$. Замкнутая суперструна содержит 8 правосторонних и 8 левосторонних независимых бозонных переменных, а также по 8 правосторонних и левосторонних действительных фермионных переменных в двумерном пространстве $\tau$, $\sigma$: $S^a(\tau-\sigma)$ и $\tilde{S}^a(\tau+\sigma)$, соответственно. Бозонные переменные определяются следующими разложениями Фурье:

$$\begin{aligned} x^i(\tau-\sigma) &= \frac{Q^i}{2} + \frac{P^i}{2}(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^i}{n}\exp[-2in(\tau-\sigma)], \\ \tilde{x}^i(\tau+\sigma) &= \frac{Q^i}{2} + \frac{P^i}{2}(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\beta_n^i}{n}\exp[-2in(\tau+\sigma)], \end{aligned} \tag{95}$$

где

$$\begin{aligned} &[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = [\beta_n^i, \beta_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}, \\ &[\alpha_n^i, \beta_m^j] = 0, \quad [Q^i, P^i] = i\delta^{ij}. \end{aligned} \tag{96}$$

Для фермионных переменных имеем

$$S^a(\tau-\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n^a \exp[-2in(\tau-\sigma)], \tag{97}$$

где

$$\begin{aligned} &\gamma^+ S_n = hS_n = 0, \quad [S_m^a, S_n^b] = (\gamma^+ h)^{ab}\delta_{m+n,0}, \\ &2h = 1 \pm \gamma_{11}, \quad \gamma^\pm = \gamma^0 \pm \gamma^9, \end{aligned} \tag{98}$$

и аналогичное выражение для левосторонних переменных $\tilde{S}^a(\tau+\sigma)$.

Независимые динамические переменные гетерозисной струны комбинируется из переменных бозонной струны и суперструны следующим образом. Из бозонной струны берутся только левосторонние переменные: 8 поперечных координат $\tilde{x}^i$ и 16 внутренних координат $\tilde{x}^I$, $I = 1, \ldots, 16$. Из суперструны берутся только правосторонние переменные: 8 поперечных бозонных координат $x^i$, $i = 1, \ldots, 8$, и 8 майорано-вейлевских фермионных переменных $S^a$. Далее предполагается, что внутренние бозонные координаты $\tilde{x}^I$, $I = 1, \ldots, 16$, компактифицируются на специальном торе $T^{16}$, базисные векторы которого $e_i^I$, $i = 1, \ldots, 16$, генерируют целочисленную четную самодуальную решетку [110-112]. Это означает, что метрика

$$g_{ij} = \sum_{I=1}^{16} e_i^I e_j^I$$

*) Биологический термин гетерозис («гибридная сила») означает явление усиления положительных свойств гибрида по сравнению с исходными образцами растений или животных.

— целочисленная, имеет четные диагональные элементы и $\det g = 1$. Существуют только две решетки такого типа: решетка, построенная на корневых векторах группы $E_8 \times E_8$, и решетка весов группы $Spin(32)/Z_2$.

Компоненты полного импульса струны $P^I$, $I = 1, \ldots, 16$, соответствующие внутренним компактифицированным бозонным переменным $\tilde{x}^I$, могут принимать только строго определенные значения

$$P^I = \sum_{i=1}^{16} n_i e_i^I, \tag{99}$$

где $n_i$ — целые числа.

Такая гибридная струнная модель не имеет тахионных состояний, релятивистски-инвариантна в 10-мерном пространстве Минковского, обладает суперсимметрией. Безмассовые состояния в этой теории образуют неприводимый мультиплет для ($N = 1$, $D = 10$)-супергравитации и неприводимый мультиплет для ($N = 1$, $D = 10$)-суперсимметричной теории Янга — Миллса с калибровочной группой $Spin(32)/Z_2$ или $E_8 \times E_8$. Именно благодаря строго определенным групповым свойствам состояний в гетерозисной струне появляется соответствующая калибровочная симметрия.

Такой механизм генерирования внутренней неабелевой калибровочной симметрии в результате компактификации присущ только струнным теориям. При компактификации локальной полевой модели на торе $T^{16}$ могла бы возникнуть только тривиальная абелева симметрия $[U(1)]^{16}$.

В теории взаимодействующих гетерозисных струн калибровочная константа $g$ и ньютоновская константа $\varkappa$ подчиняются соотношению, отличному от (87):

$$\varkappa = \mathrm{const} \cdot g\, (T)^{-1/2}. \tag{100}$$

## 3.9. Компактификация в теории суперструн. Многообразия Калаби — Яо. Низкоэнергетическая феноменология

Теория суперструн, формулируемая сначала в 10-мерном пространстве Минковского, может быть реалистической теорией только в том случае, если в ней происходит динамическая компактификация шести измерений, т. е. вакуумное пространственно-временно́е многообразие имеет вид $M^4 \times K^6$, где $M^4$ — 4-мерное пространство Минковского, а $K^6$ — некоторое компактное 6-мерное многообразие. Современное состояние суперструнной теории не позволяет получить это утверждение как следствие решения динамических уравнений. Более того, не доказано даже то, что 10-мерное пространство Минковского является решением полной квантовополевой теории суперструн. Поэтому идею о компактификации следует рассматривать пока как гипотезу, которую необходимо будет обосновать в будущем.

Сейчас исследуются более простые вопросы [113–119]: каким, в принципе, может быть вакуумное состояние в суперструнных теориях, как можно вложить ту или иную теорию великого объединения в суперструнную схему? В качестве калибровочных групп в ТВО рассматриваются $SU(5)$, $SO(10)$, $E_6$ размерности которых соответственно равны 24, 45 и 78. Ни одна из них не может быть реализована как группа изометрии компактного многообразия $K^6$, размерность [120] которой не может превышать 21. Поэтому калибровочные группы ТВО должны вкладываться в струнные группы симметрии $SO(32)$ или $E_8 \times E_8$.

Рассмотрим сначала суперструны с группой $SO(32)$. Группа $E_6$ не является подгруппой $SO(32)$. Различные вложения $SU(5)$ и $SO(10)$ в $SO(32)$ исследовались в работах [115–117]. Здесь неизбежны определенные трудности. Например, как получить нетривиальную унификацию поколений и т. д.

Более привлекательной с точки зрения приложений является суперструнная теория с калибровочной группой $E_8 \times E_8$ (гетерозисная струна). Группа $E_8$ в качестве подгруппы содержит $SU(3) \times E_6$.

Оказывается, что свободу в выборе компактного многообразия $K^6$ можно значительно ограничить, если потребовать от компактифицированной теории суперструн выполнения следующих условий [113]:

1) геометрия должна иметь вид $M^4 \times K^6$, где $M^4$ — максимально симметричное пространство-время;

2) в четырех измерениях должна существовать ненарушенная ($N = 1$)-суперсимметрия;

3) калибровочная группа и спектр фермионов должны быть реалистическими.

Второе требование продиктовано важной ролью суперсимметрии в разрешении проблемы иерархий и проблемы больших чисел Дирака [121,122].

Как было показано в работе [113], выполнение условий 1—3) требует, чтобы $K^6$ было 6-мерным многообразием Калаби — Яо, т. е. комплексным 3-мерным *кэлеровым риччи-плоским многообразием с группой голономии* $SU(3)$. Существование таких многообразий было предположено Калаби [123,124] и доказано Яо [125].

Не любое действительное многообразие четной размерности $2n$ может рассматриваться как глобальное комплексное многообразие размерности $n$. Например, двумерная сфера $S^2$ — комплексное многообразие. Комплексные координаты на $S^2$ вводятся с помощью стереографической проекции. Но четырехмерная сфера $S^4$ не является уже комплексным многообразием. Далее, комплексное многообразие называется кэлеровым, если все компоненты метрического тензора $g_{\alpha\bar{\beta}}(z)$ определяются с помощью одной функции (кэлерова потенциала) согласно формуле

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} K(z, \bar{z}). \tag{101}$$

Тензор Риччи $R_{\alpha\bar{\beta}}$ для кэлерова многообразия равен

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \ln \det (g_{\gamma\bar{\delta}}). \tag{102}$$

Если пространство риччи-плоское, то

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = 0. \tag{103}$$

Группа голономии [126] порождается связностью, действующей на многообразии *), и для 6-мерного риманова многообразия она является подгруппой $O(6)$. Для пространства Калаби — Яо два-форма кривизны $R^{mn}_{\alpha\bar{\beta}}$ принимает значения в $SU(3)$.

Доказательство существования пространства Калаби — Яо потребовало доказательства существования решений нелинейных уравнений в частных производных, следующих из (101), (102), (103). Полной классификации пространств Калаби — Яо нет.

Конструктивные способы построения пространств Калаби — Яо — это рассмотрение подмногообразий проективного комплексного пространства $CP^n$ или факторизация торов. Обычно этот подход приводит к многообразиям Калаби — Яо с большим (по модулю) значением эйлеровой характеристики $\chi$. Это неприемлемо с физической точки зрения, так как число поколений в этой схеме компактификации равно $|\chi|/2$. Один из возможных путей понижения $|\chi|$ — в переходе от $K^6$ к $K^6/G$, где $G$ — дискретная группа симметрии $K^6$.

*) Эта группа определяется следующим образом [134]. Возьмем некоторую точку $n$-мерного многообразия, на котором определена связность, и будем параллельно переносить вектор вдоль замкнутого контура, начинающегося и заканчивающегося в этой точке. В результате такого переноса мы получим новый вектор. Если связность риманова, то преобразования исходного вектора в конечный образуют подгруппу в $O(n)$, называемую *группой голономии данного многообразия.*

Так как многообразия Калаби — Яо риччи-плоские, то они не имеют непрерывных симметрий, т. е. у них нет ненулевых векторных полей Киллинга *). Следовательно, здесь не работает механизм генерирования в результате компактификации калибровочной симметрии, который имеет место в полевых моделях Калуцы — Клейна [6,13].

Необходимость модификации с помощью черн-саймоновских членов локальной суперсимметричной полевой теории, следующей в низкоэнергетическом пределе из струнной динамики, приводит к интересной связи между гравитационным полем и калибровочным полем. А именно, для однозначного определения напряженности в (91) — (94) требуется [113], чтобы $dH = 0$, т. е.

$$\frac{1}{30}\operatorname{Tr}(F \wedge F) = \operatorname{tr}(R \wedge R). \tag{104}$$

Таким образом, кривизна пространства-времени в струнных теориях требует существования нетривиального калибровочного поля, и наоборот. Как было показано в работе [113], условию (104) можно удовлетворить, если потребовать, чтобы калибровочное поле было равно спиновой связности, соответствующим образом вложенной в SO(32) или $E_8 \times E_8$.

В струнной теории с калибровочной группой $E_8 \times E_8$ после компактификации [113] одна из групп $E_8$ оказывается нарушенной до $E_6$. Кварки и лептоны являются безмассовыми возбуждениями суперструны. Они описываются нулевыми модами соответствующих волновых уравнений на многообразии Калаби — Яо и преобразуются по представлению $\underline{27}$ группы $E_6$. По отношению к ненарушенной группе $E_8$ они являются синглетами. Квантовые числа фермионов определяются топологическими инвариантами $K^6$. Число поколений оказывается равным $|\chi|/2$, где $\chi$ — эйлерова характеристика $K^6$. В этом сценарии компактификации космологическая константа в $M^4$ равна нулю. Интересно, что и юкавские константы взаимодействия, являющиеся свободными параметрами в ТВО, оказываются связанными с топологическими характеристиками многообразия Калаби — Яо.

Далее происходит нарушение $E_6$ до $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1) \times G$, где $G = U(1)$, $U(1) \times U(1)$, $SU(2) \times U(1)$ и т. д. [114]. Дополнительная к стандартной схеме $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ группа $G$ означает существование дополнительных $Z^0$-бозонов в низкоэнергетической суперструнной теории. Нет никаких оснований предполагать, что их масса должна существенно отличаться от массы $Z^0$-бозона в теории Вайнберга — Салама ($\sim 10^2$ Гэв).

Предсказание дополнительных $Z^0$-бозонов может вступить в противоречие с феноменологией нейтральных токов. Другими словами, группы $E_6$ ТВО, следующие из суперструн, вероятно, слишком велики. Избежать этих проблем, по-видимому, можно с использованием группы SO(10).

Прийти к группе SO(10) в рамках $E_8 \times E_8$-суперструнной теории можно следующим образом [114]. В качестве $K^6$ следует взять не пространство Калаби—Яо, а риччи-плоское компактное 6-мерное многообразие с группой голономии SO(6). В принципе, такие многообразия могут существовать, хотя конкретные примеры еще не построены. В этом случае низкоэнергетическая феноменология будет определяться подгруппой в $E_8$, коммутирующей с SO(6), т. е. группой SO(10). Суперсимметрия оказывается нарушенной уже на древесном уровне, число поколений по-прежнему равно $|\chi|/2$ и космологический член в $M^4$ равен нулю.

---

*) Уравнения на векторы Киллинга $\xi^i$ с помощью $R_{ij}$ записываются так [127]:

$$g^{jk}\xi^i_{;j;k} + R^i_j \xi^j = 0, \quad \xi^i_{;i} = 0,$$

где точка с запятой означают ковариантное дифференцирование по метрике $g_{ij}$. Поэтому, если $R_{ij} = 0$, то каждая компонента вектора Киллинга должна быть гармонической функцией. Если многообразие компактно и метрика на нем положительно определена, то все гармонические функции на таком многообразии сводятся к константам. А условие $\xi^i_{;i} = 0$ означает в этом случае, что $\xi^i$ — нулевой вектор.

Рассматриваются и другие механизмы компактификации [118,119], в которых $K^6$ не является риччи-плоским пространством, а имеет ненулевое кручение. В этом случае число поколений не определяется эйлеровой характеристикой $\chi$.

### 3.10. Космологические следствия

В суперструнной теории с калибровочной группой $E_8 \times E_{8'}$ (гетерозисная струна) реальный мир описывается группой $E_8$, вторая группа $E_{8'}$ описывает «теневой» мир *), взаимодействующий с обычной материей только гравитационными силами [129]. В результате оба мира, существуя параллельно, практически не чувствуют друг друга после планковской эпохи (возраст Вселенной $\lesssim 10^{-43}$ с, ее температура $\gtrsim 10^{19}$ ГэВ). В каждом из них устанавливается свое термодинамическое равновесие за счет своих внутренних негравитационных взаимодействий. Если вначале обычная и теневая материи были хорошо перемешаны, то это состояние будет сохраняться до тех пор, пока негравитационные силы не станут важными на макроскопических масштабах. В стандартной космологии этот момент соответствует поздней стадии образования галактик.

Далее равновесие в пространственном распределении обычной и теневой материи может нарушиться за счет случайного характера негравитационных возмущений, действующих независимо в каждом виде материи, т. е. может произойти пространственное разделение обычной и теневой материй. Поэтому, в принципе, могут существовать галактики, в которых преобладает или обычная, или теневая материя. Возможно также существование двойных звезд, образованных обычной звездой и теневой звездой. Причем такой объект будет наблюдаться как одна отдельная звезда с периодическим движением. В действительности есть близкие звезды (на расстояниях $< 5$ пс), которые, как предполагается, имеют невидимых партнеров. Конечно, существуют менее экзотические объяснения в этом случае, например невидимым партнером может быть нейтронная звезда, черная дыра или же объект планетных размеров.

Калибровочная группа теневого мира $E_{8'}$ может нарушаться точно так же, как и группа $E_8$ обычного мира, т. е. теневой мир может быть идентичным двойником по отношению к наблюдаемому миру. Однако анализ изначального нуклеосинтеза с учетом теневой материи запрещает полную симметрию между нашим миром и миром-двойником [129].

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суперструны органически вписываются в современную теорию элементарных частиц. С точки зрения предсказаний они переходят в низкоэнергетическом полевом пределе в суперсимметричные теории великого объединения. Основными преимуществами суперструнного подхода являются следующие моменты:

1. Суперструны позволяют объединить все фундаментальные взаимодействия, включая и гравитацию.

2. Они практически однозначно фиксируют основную калибровочную группу в теории великого объединения.

3. Четырехмерность нашего мира в суперструнном подходе трактуется как следствие динамических уравнений этой теории.

4. В идеальном случае теория будет включать всего два фундаментальных параметра: натяжение струны $T$ и одну из констант янг-миллсовского

*) Теневая Вселенная обсуждалась в физике элементарных частиц и ранее; см., например, [128].

или гравитационного взаимодействия суперструн. Здесь же следует отметить и те принципиальные вопросы в суперструнной теории, решение которых необходимо для ее обоснования:

1) Строгое доказательство конечности или перенормируемости во всех порядках струнной теории возмущений.

2) Динамическое обоснование процесса компактификации.

3) Необходимо установить механизм нарушения суперсимметрии при энергиях $E \lesssim 10^2$ ГэВ.

4) Найти более фундаментальные причины обращения в нуль космологической постоянной нашего 4-мерного мира.

Решение этих вопросов требует в первую очередь построения вторично-квантованной полевой теории суперструн, позволяющей проводить конкретные вычисления. Недостатком современных формулировок полевых теорий струн является то, что в теорию сразу закладывается определенная фоновая метрика (обычно — метрика 10-мерного плоского пространства Минковского). Но возбуждения суперструн содержат, в частности, и гравитон, т. е. наблюдаемая физическая метрика пространства-времени должна определяться динамически путем решения уравнений полевой теории суперструн.

При формулировке полевой теории струн, вероятно, был бы полезен принцип, аналогичный принципу эквивалентности в общей теории относительности, но сформулированный в пространстве струнных конфигураций. Хорошо известно, что динамика «старых» адронных струн в значительной степени определялась требованием дуальности струнных амплитуд. Аналог принципа дуальности для суперструн не найден.

**Объединенный институт ядерных исследований,**
Дубна (Московская обл.)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйнштейн А.//Собр. науч. тр.— М.: Наука, 1966.— Т. 2. С. 873.
2. Бергман П.//УФН. 1980. Т. 132. С. 177.
3. Визгин В. П. Единые теории поля в первой трети XX века.— М.: Наука, 1985.
4. Weyl H. Space, Time, Matter.— N.Y.: Dover Publ., 1952.
5. Эйнштейн А.//Собр. науч. тр. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1965—1966.
6. Калуца Г.//Альберт Эйнштейн и теория гравитации.— М.: Наука, 1979.— С. 529.
   Ходос А.//УФН. 1985. Т. 146. С. 647.
7. Окунь Л. Б. Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1984.
8. Индурайн Ф.//Квантовая хромодинамика.— М.: Мир, 1986.
9. Руббиа К.//УФН. 1985. Т. 147. С. 371.
10. Langacker P.//Phys. Rept. Ser. C. 1981. V. 72. P. 185.
11. Матинян С. Г.//УФН. 1980. Т. 130. С. 3.
12. Огиевецкий В. И., Мезинческу Л.//УФН. 1975. Т. 117. С. 673.
13. Арефьева И. Я., Волович И. В.//УФН. 1985. Т. 146. С. 655.
14. Высоцкий М. И.//УФН. 1985. Т. 146. С. 591.
15. Schwarz J. H.//Phys. Rept. 1982. V. 89. P. 223.
16. Green M. B.//Surv. High Energy Phys. 1983. V. 3. P. 127.
17. Unified String Theories: Proceedings of the Workshop on Unified String Theories. Santa Barbara, California, 29 July — 16 August 1985/Eds M. B. Green, D. J. Gross. — Singapore: World Scientific, 1985.
18. Superstrings: The First 15 Years of Superstring Theory: Reprints + Commentary by J. H. Schwarz. Vols 1, 2.— Singapore: World Scientific, 1985.
19. Scherk J.//Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 123.
20. Rebbi C.//Phys. Rept. Ser. C. 1974. V. 12. P. 1.
21. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.//Физ. ЭЧАЯ. 1978. Т. 9. С. 709.
22. Шелест В. А., Зиновьев Г. М., Миранский В. А. Модели сильновзаимодействующих частиц. Т. 2.— М.: Атомиздат, 1966.
23. Frampton P. H. Dual Resonance Models and String Theories.— Singapore: World Scientific, 1986.

24. Nambu Y. Lectures for the Copenhagen Symposium, 1970.
25. Goto T.//Progr. Theor. Phys. 1971. V. 46. P. 1560.
26. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1985.
27. Brower R. C.//Phys. Rev. Ser. D. 1972. V. 6. P. 1655.
28. Gervais J. L., Neveu A.//Nucl. Phys. Ser. B. 1973. V. 63. P. 114.
29. Kac V. G. Inifinite Dimensional Lie Algebras.— Cambridge: Cambridge. Univ. Press, 1985.
Moody R. V.// J. Algebra. 1986. V 10. P. 211.
30. Thorn C. B.//Proc. of the Conference on «Vertex Operator: Mathematics and Physics». Berkeley, California, November 10—17 1983.— New York, 1983.— P. 411.
31. Kato M., Ogawa K.//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 212. P. 443.
32. Hwang S.//Phys. Rev. Ser. D. 1983. V. 28. P. 2614.
33. Fujikawa K.//Ibidem. 1982. V. 25. P. 2584.
34. Becchi C., Rouet A., Stora R.//Phys. Lett. Ser. B. 1974. V. 52. P. 244; Ann. of Phys. 1976. V. 98. P. 287.
35. Тютин И. В. Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке: Препринт ФИАН СССР № 39.— Москва, 1975.
36. Дирак П. Лекции по квантовой механике//Дирак П. Принципы квантовой механики.— М.: Наука, 1979.
37. Fradkin E. S., Vilkovisky G.A.//Phys. Lett. Ser. B. 1975. V. 55. P. 224.
38. Batalin L. A., Vilkovisky G. A.//Ibidem. 1977. V. 69. P. 309.
39. Goddard P., Goldstone J., Rebbi C., Thorn C. B.//Nucl. Phys. Ser. B. 1973. V. 56. P. 109.
40. Polyakov A. M.//Phys. Lett. Ser. B. 1981. V. 103. P. 207, 211.
41. Rohrlich F.//Nucl. Phys. Ser. B. 1976. V. 112. P. 177.
42. Намбу Й.//УФН. 1978. Т. 124. С. 147.
43. Wilson K. C.//Phys. Rev. Ser. D. 1974. V. 10. P. 2445.
44. Bander M.//Phys. Rept. Ser. C. 1981. V. 75. P. 205.
45. Pagels H., Tomboulis E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1978. V. 143. P. 485.
46. Nesterenko V. V. Calculation of the Static Interquark Potential in the String Model in the Time-like Gauge: JINR preprint E2-85-739.— Dubna. 1985.
47. Neveu A., Schwarz J. H.//Nucl. Phys. Ser. B. 1971. V. 31. P. 86.
48. Ramond P.//Phys. Rev. Ser. D. 1971. V. 3. P. 2415.
49. Gliozzi F., Scherk J., Olive D. I.//Nucl. Phys. Ser. B. 1977. V. 122. P. 253.
50. Brink L., Nielsen H. B.//Phys. Lett. Ser. B. 1973. V. 45. P. 332.
51. Бирелл Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени.— М.: Мир, 1984.
52. Генденштейн Л. Э., Криве И. В.//УФН. 1985. Т. 146. С. 553.
53. Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 185. P. 513; 1982. V. 202. P. 253.
54. Brink L., Vecchia P. D., Howe P.//Phys. Lett. Ser. B. 1976. V. 65. P. 471.
55. Iwasaki Y., Kikkawa K.//Phys. Rev. Ser. D. 1973. V. 8. P. 440.
56. Collins P. A., Tucker R. W.//Nucl. Phys. Ser. B. 1977. V. 121. P. 307.
57. Deser S., Zumino B.//Phys. Lett. Ser. B. 1976. V. 65. P. 369.
58. Ademollo M. et al.//Nucl. Phys. Ser. B. 1976. V. 111. P. 77.
59. Brink L., Schwarz J. H.//Ibidem. V. 121. P. 285.
60. Волков Д. В., Желтухин А. А.//Укр. физ. ж. 1985. Т. 30. С. 809.
61. Green M. B., Schwarz J. H.//Phys. Lett. Ser. B. 1982. V. 109. P. 444.
62. Green M. B., Schwarz J. H.//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 181. P. 502.
63. Brink L., Lindgren O., Nilson B. E. W.//Ibidem. 1983. V. 212. P. 401.
64. Green M. B., Schwarz J. H.//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 136. P. 367; Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 243. P. 285.
65. Hori T., Kamimura K.//Progr. Theor. Phys. 1985. V. 73. P. 476.
66. Bengtsson I., Cederwall M. Covariant Superstrings Do Not Admit Covariant Gauge Fixing: Göteborg preprint 84-21.— 1984.
67. Siegel W.//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 263. P. 93.
68. Terao H., Uehara S. Hiroshima preprint RRK-85-24.—1985.
69. Wess J., Zumino B.//Phys. Lett. Ser. B. 1971. V. 37. P. 95.
70. Gervais J. L., Sakita B.//Phys. Rev. Ser. D. 1971. V. 4. P. 2291.
71. Mandelstam S.//Nucl. Phys. Ser. B. 1973. V. 64. P. 205; 1974. V. 83. P. 413.
72. Kaku M., Kikkawa K.//Phys. Rev. Ser. D. 1974. V. 10. P. 1110.
73. Alvarez O. Differential Geometry in String Models: Preprint UCB-PTH-85/80 LBL-20483.— Berkeley. 1985.
74. Mandelstam S. The Interacting-string Picture and Functional-Integration: Preprint UCB-PTH-85/47.— 1985.
75. Dual Theory/Ed. M. Jacob.— Amsterdam: North-Holland, 1974.

76. Siegel W.//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 142. P. 276; V. 149. P. 157, 162; 1985. V. 151. P. 391, 396.
77. Siegel W., Zwiebach B.//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 263. P. 105.
78. Witten E.//Ihidem. V. 268. P. 253.
79. Banks T., Peskin M. E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 264. P. 513.
80. Neveu A., Nicolai H., West P. C.//Ibidem, P. 573.
81. Thorn C. B.//Ibidem. V. 263. P. 493.
82. Chan H. M., Paton J.//Nucl. Phys. Ser. B. 1969. V. 40. P. 519.
83. Bardakci K., Halpern M. B.//Phys. Rev. Ser. D. 1971. V. 3. P. 2493.
84. Gross D. J., Harvey J. A., Martinec E., Rohm R.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 502; Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 256. P. 253.
85. Scherk J., Schwarz J. H.//Ibidem. 1974. V. 81. P. 118.
86. Scherk J.//Ibidem. 1971. V. 31. P. 222.
87. Neveu A., Scherk J.//Ibidem. 1972. V. 36. P. 155.
88. Fradkin E. S., Tseytlin A. A.//Ibidem. 1985. V. 261. P. 1; Ann. of Phys. 1982. V. 143. P. 413.
89. Green M. B., Schwarz J. H.//Phys. Lett. Ser. B. 1983. V. 122. P. 143.
90. Schwarz J. H., West P. C.//Ibidem. V. 126. P. 301
91. Schwarz J. H.//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 226. P. 269.
92. Howe P., West P. C.//Ibidem. 1984. V. 238. P. 181.
93. Alvarez-Gaumé L., Witten E.//Ibidem. V. 234. P. 269.
94. Green M. B., Schwarz J. H.//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 140. P. 33; Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 243. P. 475.
95. Green M. B.//Nature. 1985. V. 314. No. 6010. P. 409.
96. Green M. B., Schwarz J. H.//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 149. P. 117; Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 255. P. 93.
97. Bardeen W. A.//Phys. Rev. 1969. V. 184. P. 1848.
98. Adler S. L.//Ibidem. V. 177. P. 2426.
99. Zumino B., Wu Y.-S., Zee A.//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 239. P. 477.
100. Witten E.//Ibidem. 1983. V. 223. P. 422, 433.
101. Bardeen W. A., Zumino B.//Ibidem. 1984. V. 244. P. 421.
102. Green M. B., Schwarz J. H.//Nucl. Phys. Ser. B. 1982. V. 198. P. 441; Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 151. P. 21.
103. Shapiro J.//Phys. Rev. Ser. D. 1975. V. 11. P. 2937.
104. Ademollo M. et al.//Nucl. Phys. Ser. B. 1975. V. 124. P. 221.
105. Green M. B.//Ibidem. 1977. V. 124. P. 461.
106. Brink L., Schwarz J., Scherk J.//Ibidem. V. 121, P. 77.
107. Mandelstam S.//Ibidem. 1983. V. 213. P. 149.
108. Howe P., Stelle K., Townsend P.//Ibidem. V. 214. P. 519.
109. Grisaru M., Siegel W.//Ibidem. V. 214. P. 519.
110. Frenkel I. B., Kac V. G.//Invent. Math. 1980. V. 62. P. 23.
111. Lepowsky J., Wilson R. L.//Commun. Math. Phys. 1978. V. 62. P. 43.
112. Segal G.//Ibidem. 1981. V. 80. P. 301.
113. Candelas P., Horowitz C. T., Strominger A., Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 258. P. 46.
114. Witten E.//Ibidem. P. 75.
115. Witten E.//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 149. P. 351.
116. Frampton P. H., Dam V. H., Yamamoto K.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1114.
117. Maniet H. S. et al.//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 263. P. 621.
118. Bars I.//Phys. Rev. Ser. D. 1985. V. 33. P. 382.
119. Bars I., Visser M.//Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 163. P. 118.
120. Вейнберг С. Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975.
121. Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 188. P. 513.
122. Affleck I., Dine M., Seiberg N.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1677.
123. Calabi E.//Algebraic Geometry and Topology: A symposium in Honor of S. Lefschetz.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. P. 78.
124. Calabi E.//Ann. Sci. de l'E.N.S. 1979. T.12. P. 266.
125. Yao S.-T.//Proc. Nat. Acad. Sci. 1977. V. 74. P. 1798.
126. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1.— М.: Наука, 1981.
127. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти.— М.: ИЛ, 1957.
128. Померанчук И. Я., Окунь Л. Б.//Письма ЖЭТФ. 1965. Т. 1. С. 28; Phys. Lett. 1965. V. 16. P. 338.
Померанчук И. Я., Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б.//ЯФ. 1966. Т. 3. С. 1154.
129. Kolb E. W., Seckel D., Turner M. S.//Nature. 1985. V. 314. No. 6010. P. 415.
130. Belavin A. A., Knizhnik V. G.//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 168. P. 201.

131. Манин Ю. И.//Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 161.
132. Баранов М. А., Шварц А. С.//Ibidem. 1985. Т. 42. С. 340.
133. Белавин А. А., Книжник В. Г., Морозов А. Ю., Переломов А. М.//Ibidem. 1986. Т. 43. С. 319.
Белавин А. А., Книжник В. Г.//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 364.
134. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии.— М.: ИЛ, 1960.
135. Вайнберг С.//УФН. 1982. Т. 137. С. 151.
136. Langacker P.//Phys. Rept. Ser. C. 1981. V. 72. P. 185.
137. Глэшоу Ш.//УФН. 1980. Т. 132. С. 219.
138. Вайнберг А.//Ibidem. С. 201.
139. Салам А.//Ibidem. С. 229.