

Stefan Häusler

Massenspektrum im Schwinger-Modell

Diplomarbeit
zur Erlangung des Magistergrades der Naturwissenschaften
vorgelegt an der Karl-Franzens-Universität
Graz

Begutachtet von Univ.-Prof. Dr. C. B. Lang
Institut für Theoretische Physik, Karl-Franzens-Universität Graz

2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Quantenfeldtheorie	3
2.1	Klassische Feldtheorie	3
2.2	Quantisierung	6
2.2.1	Kanonische Quantisierung	6
2.2.2	Pfadintegral Quantisierung	7
2.3	Eichtheorie	12
2.3.1	QED	12
2.3.2	QCD	13
2.3.3	Quantisierung	14
3	Das Schwinger-Modell	15
3.1	Bosonisierung	16
3.2	Brechung der chiralen Symmetrie	19
3.3	Confinement	20
4	Das Schwinger-Modell auf dem Gitter	22
4.1	Freie Fermionen auf dem Gitter	23
4.1.1	Wilson-Fermionen	25
4.2	QED auf dem Gitter	26
4.3	Kontinuum-Limes	28
5	Korrelationsfunktionen	30
5.1	Das Zwei-Flavour SM auf dem Torus \mathcal{T}_2	30
5.2	Korrelationsfunktionen der Fermiondichten	31
5.2.1	Isovektor- und Axialvektor-Strom	33
5.2.2	Isoskalar-Strom	34
5.2.3	Skalare und pseudoskalare Dichten	35
6	Das massive Zwei-Flavour SM	36
6.1	Das verallgemeinerte Sine-Gordon-Modell	36
6.2	Die semiklassische Näherung	38

7	Ginsparg-Wilson-Fermionen	40
7.1	Das „Nogo“-Theorem	40
7.2	Die Ginsparg-Wilson-Relation	42
7.3	Exakte chirale Symmetrie auf dem Gitter	44
7.4	Der Fixpunkt-Operator	46
7.4.1	Die Block-Spin-Transformation	47
7.4.2	Die Fixpunkt-Wirkung	49
7.4.3	Die Sattelpunktnäherung	51
7.4.4	Die FP-Wirkung für das Eichfeld	52
7.4.5	Die FP-Wirkung der Fermionen	53
7.5	Der Overlap-Operator	54
7.6	Der massive Fall	55
8	Simulation	57
8.1	MC-Simulation	57
8.2	<i>Finite Size</i> -Effekte und <i>Critical Slowing Down</i>	59
8.3	Observablen	60
9	Ergebnisse	63
A	Propagatoren	69
B	Danksagung	71
	Abbildungsverzeichnis	72
	Literaturverzeichnis	73

Kapitel 1

Einleitung

Die Quantenchromodynamik wird als die korrekte Theorie der starken Wechselwirkung betrachtet. Bis 1974 waren alle Voraussagen der QCD auf Störungstheorie beschränkt, wodurch nur der Bereich schwacher Kopplungen und somit die Beschreibung der Dynamik über kurzer Distanzen zugänglich war. Die Gitterformulierung durch Wilson [1] eröffnete die Möglichkeit, auch nicht-perturbative Phänomene anhand numerischer Methoden zu untersuchen. Von grundlegendem Interesse ist, ob die QCD Quark-Confinement, die Struktur des Hadron-Spektrums oder die spontane Brechung der chiralen Symmetrie erklären kann.

Ein Nachteil der Gitter-QCD ist der große numerische Aufwand, welcher für präzise Ergebnisse nötig ist. Aus diesem Grund werden viele Konzepte erst in nieder-dimensionalen Testmodellen ausgearbeitet, bevor sie in vier Dimensionen übernommen werden. Eines der bekanntesten Beispiele ist die masselose $U(1)$ -Eichtheorie in zwei Dimensionen, welche zuerst von Schwinger (1962) [2] untersucht wurde. Die Verallgemeinerung des Modells auf zwei Flavours [3, 4] besitzt trotz einer unterschiedlichen zugrundeliegenden Dynamik ähnliche Eigenschaften wie die QCD mit zwei Quark-Flavours. Es zeigt Confinement-Verhalten [5] und hat auf dem klassischen Level eine $U(2)_L \times U(2)_R$ Symmetriegruppe, welche durch die Anomalie [6] auf $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ gebrochen wird. Weiters existiert ein Mechanismus, welcher die spontane Brechung der chiralen Symmetrie in die $SU(2)_V$ Untergruppe nachahmt. Das Spektrum besteht aus einem massiven und drei masselosen pseudoskalaren Mesonen. Im Gegensatz zum masselosen Fall ist das massive Schwingermodell nicht analytisch lösbar. Es besteht jedoch die Möglichkeit, das Modell im Limes großer Kopplungen und kleiner Fermionmassen [7, 8] oder anhand einer semiklassischen Näherung [9] zu untersuchen.

Bei der Formulierung von Fermionen auf dem Gitter tauchen grundsätzliche Probleme auf. Eine Möglichkeit das „*fermion doubling problem*“ loszuwerden ist die Verwendung von Wilson-Fermionen, wodurch jedoch die chirale Symmetrie auch bei verschwindender Fermionmasse explizit durch $O(a)$ Gitterartefakte gebrochen wird. Dies hat eine zusätzliche Quarkmassenrenormierung [10, 11] zur Folge, wodurch der Bereich kleiner Fermionmassen schwer zugänglich wird. Die

Ginsparg-Wilson-Relation [12] eröffnet neue Möglichkeiten der Formulierung chiraler Fermionen auf dem Gitter. Dirac-Operatoren, welche die GWR erfüllen verletzen die chirale Symmetrie nur lokal und sind automatisch $O(a)$ korrigiert. Zwei derzeit bekannten Lösungen sind der sogenannte Overlap-Operator [13] und der Fixpunkt-Operator [14, 15]. Das Ziel dieser Arbeit ist einerseits die Bestätigung der bekannten Funktionalabhängigkeit der Mesonmassen und die Bestimmung der korrekten Koeffizienten und andererseits die Untersuchung des Spektrums nahe des chiralen Limes.

Kapitel 2

Quantenfeldtheorie

Die Quantenfeldtheorie wird als der geeignete Rahmen zur Beschreibung der starken, der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung betrachtet. Sie vereinigt die Quantentheorie, das Feldkonzept und das Prinzip der Relativität. Eine Einführung in die folgenden Kapitel kann in [16, 17] gefunden werden.

2.1 Klassische Feldtheorie

Die fundamentale Größe der klassischen Mechanik ist die Wirkung

$$S = \int dt L(q, \dot{q}, t), \quad (2.1)$$

das zeitliche Integral über die Lagrange-Funktion L , welche von den generalisierten Koordinaten $q(t)$ und deren Geschwindigkeiten $\dot{q}(t)$ abhängt. Durch die Forderung des Hamiltonschen Prinzips, daß die Variation der Wirkung verschwindet, erhält man die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (2.2)$$

Beim Übergang zur lokalen Feldtheorie werden die generalisierten Koordinaten $q(t)$ durch die Felder $\phi(\mathbf{x}, t)$ und die Geschwindigkeiten $\dot{q}(t)$ durch die Ableitungen der Felder ersetzt

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \phi(\mathbf{x}) \\ \dot{q} &\rightarrow \partial_\mu \phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Lagrange-Funktion ist jetzt durch das räumliche Integral über die Lagrange-Dichte \mathcal{L} gegeben,

$$\begin{aligned} L &= \int d^3x \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}), \partial_\mu \phi(\mathbf{x}), t) \\ S &= \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}), \partial_\mu \phi(\mathbf{x}), t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aus der Lorentz-Invarianz folgt, daß sich die Wirkung S und somit die Lagrange-Dichte \mathcal{L} wie ein Lorentz-Skalar transformieren. Die Bewegungsgleichungen der Felder ergeben sich wiederum durch die Forderung, daß die Variation der Wirkung verschwindet. Diese wird durch eine Variation der Felder

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi + \delta\phi \\ \partial_\mu\phi &\rightarrow \partial_\mu\phi + \delta(\partial_\mu\phi)\end{aligned}\quad (2.5)$$

durchgeführt, wobei

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\phi + \delta\phi) - \partial_\mu\phi = \partial_\mu(\delta\phi). \quad (2.6)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x (\mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \delta(\partial_\mu\phi)) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)) \\ &= \int d^4x \left(\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Die Ableitungen von \mathcal{L} in bezug auf die Felder sind sogenannte Funktionalableitungen. Die partielle Integration des zweiten Terms in Glg. (2.7) unter Berücksichtigung, daß $\delta\phi = 0$ am Rand des Integrationsvolumens verschwindet, ergibt schließlich

$$0 = \delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right) (\delta\phi). \quad (2.8)$$

Da die Variation $\delta\phi$ beliebig ist, folgen die Feldgleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Im Falle mehrerer Felder wird nur ein zusätzlicher Index eingeführt, die Form der Feldgleichungen verändert sich jedoch nicht.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Wir betrachten als Beispiel freie Boson- und Fermionfelder.

Freie Bosonen: Die Lagrange-Dichte für das reelle skalare Feld ϕ der Masse m lautet

$$\mathcal{L}_{\text{K.G.}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (2.11)$$

Nach (2.10) ergibt sich die Feldgleichung

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = (\partial_t^2 - \Delta + m^2)\phi = 0. \quad (2.12)$$

Dies ist die wohlbekannt Klein-Gordon-Gleichung für freie Bosonen mit der allgemeinen Lösung

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}2p_0} (f(\mathbf{p})e^{ipx} + f^*(\mathbf{p})e^{-ipx}) \quad (2.13)$$

für beliebige Funktionen $f(\mathbf{p})$.

Freie Fermionen: Die Lagrange-Dichte für Fermionen der Masse m ist durch

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F.D.}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi \quad (2.14)$$

gegeben, wo $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_0$, γ_μ die Dirac-Matrizen

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

und σ_i die Paulimatrizen sind. Unter Verwendung des konjugierten Feldes $\bar{\psi}$ in (2.10) erhalten wir die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.16)$$

während sich durch Einsetzen von ψ die konjugierte Dirac-Gleichung

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0 \quad (2.17)$$

ergibt. Die allgemeine Lösung lautet

$$\psi(x) = \sum_{s=\pm 1/2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{p_0}} [b(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s)e^{-ipx} + d^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s)e^{ipx}] \quad (2.18)$$

mit Spinoren

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{p_0 + m}\chi_s \end{pmatrix}, \\ v(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{p_0 + m}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \chi_s \\ \boldsymbol{\epsilon} \cdot \chi_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

und

$$\chi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

2.2 Quantisierung

Für die Quantisierung des Systems stehen uns zwei gleichwertige Zugänge zu Verfügung. Der kanonische Formalismus umfasst die Identifikation der eigentlichen dynamischen Variablen des Systems. Diese sind Operatoren, von welchen man fordert, daß sie die kanonischen Kommutatorbeziehungen erfüllen. Die Zeitentwicklung des System wird durch die Euler-Lagrangeschen Feldgleichungen beschrieben, welche formal identisch zu den klassischen Feldgleichungen sind. Das erlaubt uns, die Übergangsamplitude zwischen einem Anfangszustand und einem Endzustand zu bestimmen.

Alternativ können wir für die Beschreibung des Quantensystems den Feynman-Padintegral-Formalismus verwenden. In diesem Fall wird die Übergangsamplitude direkt als die Summe (ein Funktionalintegral) über alle möglichen Pfade zwischen dem Anfangs- und dem Endzustand ausgedrückt, wobei jeder Pfad durch den Exponenten seiner Wirkung gewichtet wird.

2.2.1 Kanonische Quantisierung

Das freie skalare Feld

Wir ersetzen die Feldvariablen durch Operatoren, von welchen wir fordern, daß sie folgende kanonischen Kommutatorbeziehungen zur gleichen Zeit erfüllen:

$$\begin{aligned} [\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei

$$\pi(x) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\phi)}. \quad (2.22)$$

Die Feldoperatoren erfüllen formal die Klein-Gordon-Gleichung. Wir ersetzen demnach die Entwicklungskoeffizienten der allgemeinen Lösung in Glg. (2.13) durch die Operatoren $a(\mathbf{p})$ und $a^\dagger(\mathbf{p})$ und erhalten

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}2p_0} (a(\mathbf{p})e^{ipx} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx}). \quad (2.23)$$

Wir interpretieren $a^\dagger(\mathbf{p})$ und $a(\mathbf{p})$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und erhalten aus Glg. (2.21) die Kommutatorbeziehungen

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] &= [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Mit den Lösungen (2.23) und (2.24) können wir den Feynman-Propagator, welcher der Vakuumserwartungswert des zeitgeordnete Produkts zweier Felder ist,

berechnen:

$$\begin{aligned}
i\Delta(x_1 - x_2) &\equiv \langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | 0 \rangle \\
&= \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle 0 | \phi(x_2)\phi(x_1) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\varepsilon} e^{ip(x_1 - x_2)}. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Das freie Dirac-Feld

Wir ersetzen die Felder $\psi(x)$ und deren konjugierten Impuls $\pi(x) = i\psi^\dagger(x)$ durch Operatoren welche die Antikommutatorbeziehungen

$$\begin{aligned}
\{\psi(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{x}', t)\} &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
\{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}', t)\} &= \{\psi^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0 \tag{2.26}
\end{aligned}$$

erfüllen. Analog zum skalaren Feld lösen wir formell die Dirac-Gleichung und berechnen den Feynman-Propagator

$$\begin{aligned}
iS_F(x_1 - x_2)_{\alpha\beta} &\equiv \langle 0 | T(\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta} e^{-ip(x_1 - x_2)}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

2.2.2 Pfadintegral Quantisierung

Quantenfeldtheorie wird üblicherweise in Termen des Vakuumerwartungswertes des zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren definiert, den Greens-Funktionen. Für diese postulieren wir folgenden Pfadintegraldarstellung

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \langle 0 | T(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) | 0 \rangle / \langle 0 | 0 \rangle \\
&= Z^{-1} \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4 x \mathcal{L}}, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

mit der klassischen Lagrange-Dichte \mathcal{L} und dem Normierungsfaktor

$$Z = \int D\phi e^{i \int d^4 x \mathcal{L}} \sim \langle 0 | 0 \rangle. \tag{2.29}$$

$D\phi$ bezeichnet die Integration über alle Freiheitsgrade und ist formal durch

$$D\phi = \prod_x d\phi(x) \tag{2.30}$$

definiert. Glg. (2.28) sollte als Formulierung der Theorie betrachtet werden. Die Greens-Funktionen sind durch Funktionalableitungen der Funktionale $W[J]$ gegeben, die den Vakuums-Übergangsamplituden in Anwesenheit äußerer Felder entsprechen:

$$W[J] = Z^{-1} \int D\phi e^{i \int d^4 x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)]}. \tag{2.31}$$

Entwicklung in Potenzen von J ergibt

$$W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (2.32)$$

und daraus folgt

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} W[J]. \quad (2.33)$$

Der Pfad-Integral-Formalismus hat nur im euklidischen Raum, d.h. Rotation zu imaginärer Zeit

$$t = x_0 \rightarrow -ix_4 \quad (2.34)$$

eine wohl definierte Bedeutung. Es kann gezeigt werden [18, 19], daß die analytische Fortsetzung von Glg. (2.34) (Wick-Rotation), wegen der speziellen Polstruktur des Feynman-Propagators, bis zu jeder Ordnung der Störungstheorie möglich ist. Es ist eine Annahme, daß das über die Störungstheorie hinaus richtig ist. Für die korrekte Rückrotation zu Minkowski-Metrik ist es hinreichende, die von Osterwalder und Schrader aufgestellten Bedingungen [20] zu erfüllen. Durch

$$i \int dt d\mathbf{x} \rightarrow \int d^4x \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{Mink} \rightarrow -\mathcal{L}_{Eucl} \quad (2.35)$$

wird die oszillierende Exponentialfunktion in Glg. (2.28) zu einer exponentiell abfallenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= Z^{-1} \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^4x \mathcal{L}_{Eucl}} \\ Z &= \int D\phi e^{-\int d^4x \mathcal{L}_{Eucl}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Diese Gleichungen können als die Zustandssumme und die Korrelationsfunktion eines Systems in der statistischen Mechanik interpretiert werden. Die Quantentheorie von Feldern in 3 Raumdimensionen wird in die statistische Mechanik von Feldern in 4 euklidischen Dimensionen transformiert. Die euklidische Wirkung spielt die Rolle von $E/k_b T$, wobei E die klassische Energie, k_b der Boltzmannfaktor und T die Temperatur ist.

Die Beziehung zwischen QFT und klassischen statistischen Systemen ist tiefer als die vorangegangenen Beobachtungen und wird in Kapitel 4.3 weiter ausgeführt.

Pfadintegral Quantisierung für Fermionen

Die Quantisierung von Fermionen in euklidischer Metrik erfolgt mittels des generierenden Funktionals

$$W[\eta, \bar{\eta}] = \int D\psi(x) D\bar{\psi}(x) e^{-\int d^4x [\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi]}, \quad (2.37)$$

wobei

$$D\psi(x)D\bar{\psi}(x) = \prod_x d\psi(x)d\bar{\psi}(x) \quad (2.38)$$

und $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\eta(x)$ und $\bar{\eta}(x)$ jeweils die (klassischen) Fermionfelder und die Quellen sind. Während die Summe der Pfade für Bosonen ein Funktionalintegral über normale komplexe Funktionen (skalare Felder) ist, muß das Funktionalintegral in (2.37) über antikommutierende Größen genommen werden

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi(x')\} &= \{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\} = 0 \\ \{\eta(x), \eta(x')\} &= \{\eta(x), \bar{\eta}(x')\} = \{\bar{\eta}(x), \bar{\eta}(x')\} = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Folglich sind diese Elemente einer Grassmann-Algebra.

Grassmann-Integration

Die Variablen ψ_1, \dots, ψ_N werden als Generatoren einer Grassmann-Algebra bezeichnet, wenn sie untereinander antikommutieren, d.h.

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

Daraus folgt, daß das Quadrat einer Grassmann-Variable verschwindet,

$$\psi_i^2 = 0. \quad (2.41)$$

Ein allgemeines Element einer Grassmann-Algebra ist durch eine Potenzreihe in den ψ_i 's definiert:

$$f(\psi) = f_0 + \sum_i f_i\psi_i + \sum_{ij} f_{ij}\psi_i\psi_j + \dots + f_{12\dots N}\psi_1\psi_2\dots\psi_N. \quad (2.42)$$

Aufgrund von Glg. (2.41) hat die Potenzreihe nur eine endliche Anzahl von Termen. Wir betrachten Funktionen von den $2N$ Grassmann-Variablen ψ_1, \dots, ψ_N , $\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N$. Für die weitere Diskussion sind wir vorwiegend an der Berechnung der Zweipunkt-Korrelationsfunktion $G^{(2)}(\psi_i, \bar{\psi}_j)$ aus Glg. (2.36), und somit an Integralen der Form

$$I_1[A] = \int \prod_{l=1}^N d\bar{\psi}_l d\psi_l \psi_i \bar{\psi}_j e^{-\sum_{m,n=1}^N \bar{\psi}_m A_{mn} \psi_n} \quad (2.43)$$

$$I_2[A] = \int \prod_{l=1}^N d\bar{\psi}_l d\psi_l e^{-\sum_{m,n=1}^N \bar{\psi}_m A_{mn} \psi_n}, \quad (2.44)$$

interessiert. A ist eine antisymmetrische und nicht-singuläre Matrix. Wir betrachten zuerst das Integral über eine allgemeine Funktion einer einzelnen Grassmann-Variable

$$\int d\psi f(\psi) = \int d\psi (f_0 + f_1\psi). \quad (2.45)$$

Das Integral sollte linear in f sein. Daher muß es eine lineare Funktion von f_0 und f_1 sein. Wir fordern die fundamentale Eigenschaft der Invarianz des Integrals (2.45) unter der Verschiebung $\psi \rightarrow \psi + \eta$ und erhalten

$$\int d\psi(f_0 + f_1\psi) \rightarrow \int d\psi((f_0 + f_1\eta) + f_1\psi). \quad (2.46)$$

Die Verschiebung verändert den konstanten Term und läßt den linearen Term unverändert. Die einzige lineare Funktion von f_0 und f_1 mit dieser Eigenschaft ist eine Konstante (die konventionell 1 gewählt wird) mal f_1 . Demnach definieren wir [21]

$$\int d\psi(f_0 + f_1\psi) = f_1. \quad (2.47)$$

Um eine Mehrdeutigkeit von Integralen mehrerer Grassmann-Variablen zu vermeiden, legen wir

$$\int d\bar{\psi} \int d\psi \psi \bar{\psi} = +1, \quad (2.48)$$

fest, wobei die innerste Integration zuerst durchgeführt wird. Weiters ist zu erwähnen, daß auch die Maße $d\psi$ und $d\bar{\psi}$ Grassmann-Variablen sind, die mit allen anderen Grassmann-Variablen antikommutieren.

Um (2.44) zu berechnen, bringen wir den Integranden in folgende Form

$$e^{-\sum_{m,n=1}^N \bar{\psi}_m A_{mn} \psi_n} = \prod_{m=1}^N e^{-\bar{\psi}_m \sum_{n=1}^N A_{mn} \psi_n}. \quad (2.49)$$

Wegen (2.41) tragen nur die ersten zwei Terme der Potenzreihenentwicklung des Exponenten zum Produkt bei und

$$e^{-\sum_{m,n=1}^N \bar{\psi}_m A_{mn} \psi_n} = \sum_{n_1, \dots, n_N} (1 - \bar{\psi}_1 A_{1n_1} \psi_{n_1}) \dots (1 - \bar{\psi}_N A_{Nn_N} \psi_{n_N}). \quad (2.50)$$

Da wegen (2.47) nur jene Ausdrücke bei der Integration nicht verschwinden, die alle Grassmann-Variablen enthalten, müssen wir nur Terme der Form

$$K[\psi, \bar{\psi}] = \sum_{n_1, \dots, n_N} \psi_{n_1} \bar{\psi}_1 \psi_{n_2} \bar{\psi}_2 \dots \psi_{n_N} \bar{\psi}_N A_{1n_1} A_{2n_2} \dots A_{Nn_N} \quad (2.51)$$

berücksichtigen. Da ein Produkt von Grassmann-Variablen antisymmetrisch gegenüber Vertauschung zweier Variablen ist, wird (2.51) zu

$$\begin{aligned} K[\psi, \bar{\psi}] &= \psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 \dots \psi_N \bar{\psi}_N \sum_{n_1, \dots, n_N} \epsilon_{n_1, n_2, \dots, n_N} A_{1n_1} A_{2n_2} \dots A_{Nn_N}, \\ K[\psi, \bar{\psi}] &= (\det A) \psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 \dots \psi_N \bar{\psi}_N. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Wir ersetzen den Exponenten in (2.44) durch diesen Ausdruck und erhalten

$$I_2[A] = \left[\prod_{i=1}^N \int d\bar{\psi}_i d\psi_i \psi_i \bar{\psi}_i \right] \det A = \det A. \quad (2.53)$$

Wären ψ und $\bar{\psi}$ normale Zahlen gewesen, hätten wir $(2\pi)^N / \det A$ als Ergebnis erhalten.

Für die Berechnung von $I_1[A]$ fügen wir zu Glg. (2.50) $\psi_i \bar{\psi}_j$ hinzu

$$\psi_i \bar{\psi}_j e^{-\sum_{m,n=1}^N \bar{\psi}_m A_{mn} \psi_n} = \sum_{n_1, \dots, n_N} \psi_i \bar{\psi}_j (1 - \bar{\psi}_1 A_{1n_1} \psi_{n_1}) \dots (1 - \bar{\psi}_N A_{Nn_N} \psi_{n_N}). \quad (2.54)$$

Da jede Variable nur dann einen Beitrag zum Integral gibt, wenn sie nur einmal auftritt, ersetzt $\bar{\psi}_j$ den Klammerausdruck

$$\dots (-\bar{\psi}_j) (1 - \bar{\psi}_j A_{jn_j} \psi_{n_j}) \psi_i \dots = \dots (-\bar{\psi}_j) \psi_i \dots \quad (2.55)$$

und löscht somit Terme mit dem Faktor A_{jn_j} . Das negative Vorzeichen von $\bar{\psi}_j$ entsteht durch die Vertauschung mit ψ_i . Gleichermaßen ersetzt ψ_i alle Klammerausdrücke

$$\dots (-\bar{\psi}_{n_i}) (1 - \bar{\psi}_{n_i} A_{n_i i} \psi_i) \psi_i \dots = \dots (-\bar{\psi}_{n_i}) \psi_i \dots \quad (2.56)$$

und löscht demnach Ausdrücke mit $A_{n_i i}$. Analog zu (2.52) folgt

$$K[\psi, \bar{\psi}] = (-1)^{i+j} \psi_1 \bar{\psi}_1 \dots \psi_N \bar{\psi}_N \sum_{n_1, \dots, n_{N'} \neq i} \epsilon_{n_1, n_2, \dots, n_{N'}} A_{1n_1} \dots A_{N'n_{N'}}, \quad (2.57)$$

wobei

$$1, \dots, N' = 1, \dots, (j-1), (j+1), \dots, N. \quad (2.58)$$

Die Summe entspricht der Determinante jener Matrix, die man durch streichen der i -ten Spalte und der j -ten Zeile der Matrix A_{ij} erhält, dem sogenannten Minor M_{ji} . Für die inverse Matrix von A_{ij} gilt

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A} \quad (2.59)$$

und (2.57) wird zu

$$K[\psi, \bar{\psi}] = (\det A) A_{ij}^{-1} \psi_1 \bar{\psi}_1 \dots \psi_N \bar{\psi}_N. \quad (2.60)$$

Damit erhalten wir als Lösung des zweiten gesuchten Integrals

$$I_1[A] = (\det A) (A^{-1})_{ij}. \quad (2.61)$$

2.3 Eichtheorie

Wir gehen nun von einer freien zu einer wechselwirkenden Theorie über. Dies erreichen wir durch die Bedingung, daß die Theorie invariant unter lokalen Symmetrie-Transformationen ist. Derzeit wird angenommen, daß alle fundamentalen Wechselwirkungen in Form von Eichtheorien beschrieben werden können.

2.3.1 QED

Die QED ist eine abelsche Eichtheorie mit einer lokalen $U(1)$ Symmetrie. Wir zeigen, daß sie aus der Forderung nach Eichinvarianz und Renormierbarkeit der freien Dirac-Theorie abgeleitet werden kann.

Wir betrachten die Lagrange-Dichte des freien Dirac-Feldes

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x). \quad (2.62)$$

Sie hat eine globale $U(1)$ Symmetrie, die der Invarianz unter einer Phasenänderung

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha} \end{aligned} \quad (2.63)$$

entspricht. Wir verallgemeinern diese globale Symmetrie zu einer lokalen Symmetrie, d.h. wir "eichen die Theorie" durch die Ersetzung von α durch $\alpha(x)$. Wir konstruieren demnach eine Theorie, welche unter der Raum-Zeit abhängigen Phasentransformation

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)} \end{aligned} \quad (2.64)$$

invariant ist. Durch diese Transformation bekommt der Ableitungsterm jedoch die Form

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x)' = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\psi(x)) \\ &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)\partial_\mu\alpha(x)\psi(x). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Der zweite Ausdruck zerstört die Invarianz. Wir ersetzen daher ∂_μ durch die kovariante Ableitung D_μ , welche die einfachere Transformation

$$D_\mu \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x) \quad (2.66)$$

haben soll. Somit wäre $\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$ eichinvariant. Diese Forderung können wir durch die Einführung eines zusätzlichen Vektorfeldes $A_\mu(x)$, dem Eichfeld, und der kovarianten Ableitung

$$D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu + ieA_\mu(x))\psi(x) \quad (2.67)$$

erfüllen. Dabei ist e ein freier Parameter, der als elektrische Ladung identifiziert werden kann. Damit das Transformationsgesetz (2.66) für die kovariante Ableitung gilt, muß das Eichfeld die Transformationseigenschaft

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.68)$$

besitzen. Wir erhalten demnach die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{\psi}(x) i \gamma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu(x)) \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (2.69)$$

Damit das Eichfeld eine dynamische Variable wird, fügen wir zur Lagrange-Dichte einen Term mit Ableitungen der Eichfelder hinzu. Der einfachste eichinvariante Ausdruck in 4 Dimensionen ist

$$\mathcal{L}'_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.70)$$

wobei

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.71)$$

Das Eichfeld A_μ muß masselos sein, da der Term $A_\mu A^\mu$ nicht eichinvariant ist. Höher dimensionale Kopplungen als (2.67) sind ausgeschlossen, da sie nicht renormierbar sind. Damit erhalten wir die vollständige Lagrange-Dichte der QED

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x) i \gamma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu(x)) \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.72)$$

2.3.2 QCD

Im Falle nicht abelscher Eichtransformationen wird die Vorgehensweise ein wenig komplizierter, das Konzept bleibt jedoch das gleiche. Für die QCD wird die globale $SU(3)$ -Colour-Symmetrie als Eichsymmetrie betrachtet. Die Lagrange-Dichte lautet

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2} \tilde{G}_{\mu\nu}(x) \tilde{G}^{\mu\nu}(x) + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{q}^j(x) \left(i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i g_s \tilde{A}_\mu(x) \right) - m_j \right) q^j(x), \quad (2.73)$$

wobei $q^j(x)$ die Felder der N_f verschiedenen Quarks mit Flavour j und der Masse m_j sind. Durch die Eichung tauchen die Gluonfelder $\tilde{A}_\mu(x) = \sum_{a=1}^8 1/2 \lambda_a A_\mu^a(x)$ auf. Diese Vektorfelder haben acht Komponenten, von denen jede zu einem der acht Generatoren der $SU(3)$ gehört, den Gell-Mann-Matrizen λ_a , $a = 1, \dots, 8$. A_μ^a gehört folglich zur 8-dimensionalen Darstellung der Symmetriegruppe.

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \tilde{A}_\nu(x) - \partial_\nu \tilde{A}_\mu(x) + i g_s [\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \quad (2.74)$$

ist der Gluon-Feldstärketensor. Die Symmetrietransformation ist durch

$$U(x) = e^{i \sum_{a=1}^8 \alpha^a(x) \frac{\lambda_a}{2}} \quad (2.75)$$

gegeben und für die Quark- und Gluonfelder gilt

$$\begin{aligned} q^j(x) &\rightarrow q'^j(x) = U(x)q^j(x) \\ \bar{q}^j(x) &\rightarrow \bar{q}'^j(x) = \bar{q}^j(x)U^\dagger(x) \\ \tilde{A}_\mu(x) &\rightarrow \tilde{A}'_\mu(x) = U(x) \left(\tilde{A}_\mu(x) - \frac{i}{g_s} \partial_\mu \right) U^\dagger(x). \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.3.3 Quantisierung

Die Quantisierung der QED in euklidischer Metrik erfolgt mittels des generierenden Funktionals

$$W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \int DA(x) D\psi(x) D\bar{\psi}(x) e^{-\int d^4x [\mathcal{L}_{QED}(\psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\mu(x)A^\mu(x)]}. \quad (2.77)$$

Das Maß

$$DA(x) = \prod_x dA(x) \quad (2.78)$$

beinhaltet alle möglichen Eichfeldkonfigurationen. Einige Konfigurationen sind jedoch durch Eichtransformationen untereinander verknüpft. Sie bilden Äquivalenzklassen, wobei alle Konfigurationen einer Klasse die gleiche Physik beschreiben, d.h. sie haben die gleiche Wirkung. Dadurch entsteht ein unendlicher Faktor im Funktionalintegral und das Integrationsmaß muß geeignet redefiniert werden. Nur eine endliche Anzahl von Konfigurationen pro Äquivalenz-Klasse soll berücksichtigt werden. Dies geschieht durch die Einführung eichfixierender Terme in der Lagrange-Dichte.

Kapitel 3

Das Schwinger-Modell

Das Schwinger-Modell (J. Schwinger, 1962) ist masselose QED in $1 + 1$ Dimensionen und wird im euklidischen Raum durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}(x))\psi(x), \quad \mu = 0, 1 \quad (3.1)$$

beschrieben. In $1+1$ Dimensionen gibt es nur drei antikommutierende γ -Matrizen, $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_5$, welche als die Pauli σ -Matrizen gewählt werden können:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_1 &= \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_5 &= i\gamma_1\gamma_0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 5. \quad (3.3)$$

Der Feldstärketensor hat nur eine Komponente $F_{01} = -F_{10} = E$.

Das masselose Schwinger-Modell ist exakt lösbar [2, 3, 7, 22, 23]. Ausgehend von einer Theorie mit wechselwirkenden masselosen Fermionen, erhält man eine freie Theorie mit massiven Bosonen. Das Modell zeigt weiters Confinementverhalten der fundamentalen Fermionen [5] und die Brechung der chiralen Symmetrie durch die axiale Anomalie [6]. Es ist daher ein geeignetes Testmodell für QCD in vier Dimensionen.

3.1 Bosonisierung

Bosonisierung ist eine Operation, welche die Beschreibung eines physikalischen Systems mittels fermionischer Felder auf eine Beschreibung mittels bosonischer Felder abbildet. Das heißt, es gibt eine Korrespondenz zwischen einer bestimmten Menge von Greensfunktionen der fermionischen Theorie und einer anderen Menge in der bosonischen Theorie.

Zur Lösung des Schwingermodells verwenden wir den Zugang, der direkt mit dem Pfadintegral arbeitet [24]. Wir zerlegen das Eichfeld in einen skalaren und einen pseudoskalaren Anteil

$$A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu B(x) + \partial_\mu \varphi(x), \quad (3.4)$$

wobei $\varphi(x)$ dem Eichfreiheitsgrad entspricht. Um die fermionischen Felder vom Eichfeld entkoppeln zu können, ist es nötig die Eichung zu fixieren. Durch den Ansatz (3.4) ist die Landau-Eichung

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \quad (3.5)$$

am geeignetsten. Demnach wird $\partial_\mu \varphi(x)$ zu einer Konstanten, welche wir der Einfachheit halber Null wählen. Durch (3.4) wird der Feldstärketensor zu

$$F_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu} \partial^2 B(x). \quad (3.6)$$

Mit der Identität

$$\varepsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu = i \gamma_\mu \gamma_5 \quad (3.7)$$

und der Redefinition des Eichfeldes

$$A_\mu \equiv e A_\mu \quad (3.8)$$

erhalten wir für die Wirkung

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2e^2} \int d^2 x (\partial^2 B(x))^2 + \int d^2 x (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) + j_\mu^5(x) \partial_\mu B(x)), \\ S &= S_B + S_F \end{aligned} \quad (3.9)$$

mit dem Axialvektorstrom

$$j_\mu^5(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x). \quad (3.10)$$

Die Wirkung wird durch "point-splitting" des Axialvektorstromes regularisiert. Die γ -Matrizen und die Ableitung $\partial_\mu B(x)$ werden in die Richtung projiziert, in welche die Fermionen aufgespaltet werden:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu &= \hat{e}_\mu(\theta) \cdot \gamma, \\ \partial_\mu &= \hat{e}_\mu(\theta) \cdot \partial. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der Winkel θ legt die Richtung der Aufspaltung fest. Für die Einheitsvektoren $\hat{e}_\mu(\theta)$ gilt

$$\begin{aligned}\hat{e}_0(\theta) &= \cos(\theta)\hat{e}_0 + \sin(\theta)\hat{e}_1, \\ \hat{e}_1(\theta) &= -\sin(\theta)\hat{e}_0 + \cos(\theta)\hat{e}_1.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Somit lautet der fermionische Anteil der Wirkung

$$S_F = \int d^2x (\bar{\psi}(x)\gamma_\mu(\theta)\partial_\mu(\theta)\psi(x) + j_\mu^5(x)\partial_\mu(\theta)B(x)), \quad (3.13)$$

wobei

$$j_\mu^5(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu(\theta)\gamma_5\psi(x + a\hat{e}_\mu(\theta)). \quad (3.14)$$

Durch die Regularisierung ist der fermionische Sektor nicht mehr eichinvariant. Es kann jedoch gezeigt werden [24], daß im Limes $a \rightarrow 0$ die vollständige Eichinvarianz wiederhergestellt ist.

Das Funktionalintegral lautet

$$\begin{aligned}W[\bar{\eta}, \eta] &= \int D\bar{\psi} D\psi DB \exp\left(S_B + S_F + \int d^2x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)\right), \\ S_B &= \frac{1}{2e^2} \int d^2x (\partial^2 B(x))^2, \\ S_F &= \iint d^2x d^2y \bar{\psi}(x)M(x, y)\psi(y)\end{aligned}\quad (3.15)$$

mit

$$M(x, y) = \gamma_\mu(\theta)\partial_\mu(\theta)\delta(x - y) + \gamma_\mu(\theta)\gamma_5(\theta)\partial_\mu(\theta)B(x)\delta(x - y). \quad (3.16)$$

Durch die Invarianz der Fermionintegration unter der Transformation

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi - M^{-1}\eta, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} - \bar{\eta}M^{-1}\end{aligned}\quad (3.17)$$

erhalten wir

$$W[\bar{\eta}, \eta] = \int DB \exp\left(-\iint d^2x d^2y \bar{\eta}(x)M^{-1}(x, y)\eta(y) + S_B\right) e^{S'(B, a, \theta)} \quad (3.18)$$

mit

$$e^{S'(B, a, \theta)} = \int D\bar{\psi} D\psi e^{S_F}. \quad (3.19)$$

Wir berechnen zuerst $S'(B, a, \theta)$. Nach partieller Integration des zweiten Terms von (3.13) erhalten wir

$$S_F = \int d^2x (\bar{\psi}(x)\gamma_\mu(\theta)\partial_\mu(\theta)\psi(x) + B(x)\partial_\mu(\theta)j_\mu^5(x)). \quad (3.20)$$

Durch die lokale chirale Transformation

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{B(x)\gamma_5}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)e^{B(x)\gamma_5}\end{aligned}\quad (3.21)$$

werden die Fermionfelder vollständig vom Eichfeld entkoppelt und wir erhalten

$$S_F = \int d^2x \bar{\psi}(x)\gamma_\mu(\theta)\partial_\mu(\theta)\psi(x). \quad (3.22)$$

Die Kopplung der beiden Felder taucht jedoch durch die chirale Anomalie des Fermionintegrationsmaßes wieder auf [25].

Um wieder sphärische Symmetrie zu erhalten, muß über alle möglichen Richtungen θ gemittelt werden. Nach einer Reihenentwicklung des Pfadintegrals (3.19) [24] und dem Limes

$$S'(B) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} S'(B, a, \theta) \quad (3.23)$$

erhalten wir

$$S'(B) = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x (\partial B)^2. \quad (3.24)$$

Demnach lautet das Funktionalintegral

$$W[\bar{\eta}, \eta] = \int DB \exp\left(-\iint d^2x d^2y \bar{\eta}(x)M^{-1}(x, y)\eta(y) + S'(B) + S_B\right) \quad (3.25)$$

mit

$$S'(B) + S_B = \frac{1}{2e^2} \int d^2x \left((\partial^2 B(x))^2 + \frac{e^2}{\pi} (\partial B(x))^2 \right). \quad (3.26)$$

Für M^{-1} gilt

$$M^{-1} = e^{B(x)\gamma_5} G_0(x-y) e^{B(y)\gamma_5} \quad (3.27)$$

mit dem freien Fermionpropagator

$$G_0(x) = \frac{1}{\not{\partial}\delta(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{x_\mu \gamma_\mu}{x^2}. \quad (3.28)$$

Wenn wir $\partial B(x)$ durch ϕ ersetzen, erhalten wir die Wirkung für freie Bosonen mit der Masse

$$m = \frac{e}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.29)$$

Das Schwingermodell mit N_f masselosen Flavours wurde ebenfalls ausführlich untersucht [3, 4]. Man kann N_f^2 skalare Zustände bilden. Da jedes Flavour gleich zur Vakuumpolarisation beiträgt, erhält man in der bosonisierten Theorie $N_f^2 - 1$ masselose Bosonen und ein massives Boson mit der Masse

$$m = \sqrt{N_f} \frac{e}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.30)$$

3.2 Brechung der chiralen Symmetrie

Anhand des Funktionalintegrals kann jetzt der Propagator

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(0)\psi(0) \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} G_0^2(x) \int DB(x) e^{2(B(x)-B(0))} e^{S_B+S'} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{x^2} e^{P(x)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

berechnet werden [24], mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} P(x) &= 2e^2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{|1 - e^{ipx}|^2}{p^2(p^2 + m^2)} \\ &= 2(\gamma + \ln(mx/2) + K_0(mx)), \end{aligned} \quad (3.32)$$

wobei γ die Eulerkonstante und K_0 die assoziierte Besselfunktion ist. $P(x)$ hat die folgende asymptotische Entwicklung:

$$P(x) \sim \begin{cases} 2m^2 x^2 & x \rightarrow 0 \\ 2\gamma + 2 \ln(mx/2) + O(e^{-mx}) & x \rightarrow \infty \end{cases} .$$

Demnach gilt für $x \rightarrow \infty$:

$$\langle \bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(0)\psi(0) \rangle = \frac{m^2}{8\pi^2} e^{2\gamma} + O(e^{-mx}). \quad (3.33)$$

Für große Abstände zerfällt der Propagator in (Clusterzerlegung)

$$\langle \bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(0)\psi(0) \rangle = |\langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle|^2. \quad (3.34)$$

Der Ordnungsparameter $\langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle$ gibt an, ob die chirale Symmetrie gebrochen ist oder nicht. Für große x gilt

$$\langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{m}{\sqrt{8\pi}} e^\gamma. \quad (3.35)$$

Obwohl die Wirkung in 1 + 1 Dimensionen formal invariant unter der chiralen Transformation (3.21) ist, ist die Symmetrie dennoch durch die axiale Anomalie [6] gebrochen.

3.3 Confinement

Es gibt zwei Möglichkeiten zu testen, ob eine Theorie *confined* oder nicht. Die erste zeigt, daß unendlich viel Energie benötigt wird, um eine isolierte Testladung zum System hinzuzufügen. Der Ordnungsparameter ist in diesem Fall der Polyakov-Loop $\langle \mathcal{L} \rangle$, welcher für $\langle \mathcal{L} \rangle = 0$ Confinement angibt. Die zweite Methode zeigt, daß unendlich viel Energie benötigt wird, um zwei Ladungen beliebig weit räumlich zu trennen. Dies wird an Hand des Wilson-Loops

$$\mathcal{W}_C = \left\langle e^{ie \oint_C dz_\mu A_\mu(z)} \right\rangle \quad (3.36)$$

untersucht. Das Linienintegral (3.36) wird entlang der rechteckigen Weges \mathcal{C} mit den Seiten R und T in euklidischer Raum-Zeit genommen. Das statische Quark-Potential wird durch das Verhalten des Wilson-Loops für große T definiert:

$$V(R) \equiv - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathcal{W}_C, \quad (3.37)$$

sodaß

$$\mathcal{W}_C \stackrel{T \rightarrow \infty}{\sim} C e^{-TV(R)}. \quad (3.38)$$

$V(R)$ ist die Energie des Eichfeldes in Gegenwart zweier statischen Ladungen, welche durch den Abstand R getrennt sind. Schließlich führen wir noch den Koeffizienten

$$\alpha \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} V(R) = - \lim_{R, T \rightarrow \infty} \frac{1}{RT} \ln \mathcal{W}_C \quad (3.39)$$

ein, die sogenannte *string tension*. Wenn α nicht verschwindet, wächst das Potential $V(R)$ asymptotisch mit R :

$$V(R) \stackrel{R \rightarrow \infty}{\sim} \alpha R. \quad (3.40)$$

In diesem Fall wirkt eine konstante Kraft α zwischen den weit getrennten Ladungen und man spricht von statischem Confinement. Große Wilson-Loops erfüllen somit das Flächengesetz [1]

$$\mathcal{W}_C \stackrel{R, T \rightarrow \infty}{\sim} C e^{-\alpha RT}. \quad (3.41)$$

Wir berechnen nun den Wilson-Loop für das Schwingermodell. Aus (3.4) und dem Integralsatz von Stokes folgt

$$\oint_C A_\mu dz_\mu = - \int_\Gamma d^2x \partial^2 B(x), \quad (3.42)$$

wobei Γ die von \mathcal{C} eingeschlossene Fläche ist. Somit lautet das Wilson-Loop-Integral

$$\left\langle e^{ie \oint_C dz_\mu A_\mu(z)} \right\rangle = \frac{1}{Z} \int DB(x) \exp \left(-i \int_\Gamma d^2x \partial^2 B \right) e^{S'(B) + S_B} \quad (3.43)$$

mit

$$S'(B) + S_B = \frac{1}{2e^2} \int d^2x \left((\partial^2 B(x))^2 + \frac{e^2}{\pi} (\partial B(x))^2 \right). \quad (3.44)$$

Die Transformation in den Impulsraum und die Integration über die bosonischen Felder [26] führt zu

$$\mathcal{W}_c = \exp \{L(T, R) - L(R, T)\}, \quad (3.45)$$

wobei

$$L(T, R) = -\frac{e^2}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{|1 - \exp(ip_0 T)|^2 |1 - \exp(ip_1 R)|^2}{p_1^2 (p^2 + m^2)}. \quad (3.46)$$

Für große Loops und große T erhalten wir

$$\mathcal{W}_c = \exp \left\{ -\frac{e^2}{2m} (T + R) + O(e^{-mT}, e^{-mR}) \right\} \quad (3.47)$$

Demnach erfüllt \mathcal{W}_c nicht das für Confinement erforderliche Flächengesetz (3.41). Der Grund dafür ist, daß der *string* in $(T + R)$ -Paare zerfällt und \mathcal{W}_c eine $\exp(-\text{Umfang})$ Abhängigkeit erhält, d.h. die Fermion-Paarerzeugung zerstört das Wilson-Verhalten des Loops.

Der Wilson-Loop in Abwesenheit der Fermionen kann durch die Wahl $m = 0$ in $L(T, R)$ erhalten werden. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_c &= \exp \left\{ -\frac{e^2}{2} RT \right\} \\ &= \exp \{-\alpha RT\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Es ist zu beachten, daß in Anwesenheit der Fermionen für $R, T \ll 1$

$$\mathcal{W}_c \cong \exp \{-\alpha RT + O(R^2, T^2)\} \quad (3.49)$$

gilt. Somit erhalten wir folgendes Bild über Confinement im Schwinger-Modell.

Kleine Eichfeld-Loops zeigen das $\exp(-\text{Fläche})$ Wilson-Verhalten. Wenn die Loops größer und größer gemacht werden, benötigen wir aufgrund des Wilson-Verhaltens der reinen Eichfeld-Loops sehr viel Energie und das System erzeugt statt dessen ein Fermion-Antifermion-Paar [5]. Der Übergang von einer Flächenabhängigkeit zu einer Umfangabhängigkeit erfolgt bei der charakteristischen Längenskala des Systems, welche für das Schwingermodell m^{-1} ist.

Kapitel 4

Das Schwinger-Modell auf dem Gitter

Die grundlegende Definition einer QFT benötigt die zeitweilige Einführung eines Definitionsrahmens, welcher die ultravioletten Divergenzen regularisiert und letztendlich durch eine bestimmte Grenzwertbildung aus der Theorie verschwindet. Ältere Regularisierungsschemen sind eng mit der Störungstheorie verknüpft: Ein Prozeß wird bis zu einer bestimmten Ordnung der Kopplungskonstanten berechnet und die divergenten Terme werden Ordnung für Ordnung entfernt.

Die Gitter-Regularisierung (Wilson, 1974) [1] ist die einzige bekannte nicht-perturbative eichinvariante Regularisierungsmethode. Der erste Schritt ist die Einführung eines Raum-Zeit-Gitters, durch welche der Impulsraum auf die Brilluin-Zone $[-\pi/a, \pi/a]$ beschränkt wird und somit der erforderlicher Impuls-Cutoff geschaffen wird. Der zweite Schritt entspricht dem Entfernen der Gitterstruktur. Der Zusammenhang mit dem Experiment besteht nur im Kontinuum-Limes, wenn der Gitterabstand a gegen Null geht.

Durch die abzählbare Anzahl von Freiheitsgraden bekommt das Pfadintegral eine wohl definierte Bedeutung und ermöglicht die Durchführung numerischer Simulationen der QFT mittels Monte-Carlo-Simulationen. Dadurch wird die Gittereichtheorie zu einem geeigneten Mittel, um nicht-perturbative Analysen durchzuführen und Confinement zu untersuchen. Letztendlich soll geprüft werden, ob die QCD die korrekte Theorie der starken Wechselwirkung ist.

Ein Nachteil der Gitter-Regularisierung ist die Verletzung bestimmter Symmetrien. Die Diskretisierung von Raum und Zeit bricht die Lorentz-Symmetrie ($O(d)$ Symmetrie im euklidischen Raum). Die verbleibende kubische Symmetrie reicht jedoch aus, um diese im Kontinuum-Limes wiederherzustellen. Spezielle Probleme treten bei der chiralen Symmetrie und der chiralen Eichtheorie auf.

Die Formulierung der Eichtheorie auf dem Gitter erfordert folgende Schritte: Diskretisierung von Raum-Zeit, Beschreibung des Eichfeldes und der fermionischen Felder, Konstruktion der Wirkung und Festlegung der Operatoren, welche die Physik untersuchen sollen.

4.1 Freie Fermionen auf dem Gitter

Wir betrachten die Wirkung freier Fermionen in zwei dimensionaler euklidischer Metrik

$$S_F = \int d^2x \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + M)\psi(x), \quad \mu = 0, 1. \quad (4.1)$$

Der Übergang vom Kontinuum auf ein quadratisches Gitter mit dem Gitterabstand a erfolgt durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow n_\mu a, \\ \int d^2x &\rightarrow a^2 \sum_n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Jeder Punkt auf dem Gitter ist durch zwei ganzzahlige Variablen spezifiziert, welche durch $n_\mu \equiv (n_0, n_1)$ bezeichnet werden. Da wir an der Pfadintegraldarstellung von dimensionslosen Größen interessiert sind, skalieren wir die Masse M und die Felder ψ und $\bar{\psi}$ entsprechend ihrer kanonischen Dimension:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \frac{1}{a} \hat{M}, \\ \psi(x) &\rightarrow \frac{1}{a^{1/2}} \hat{\psi}(na), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \frac{1}{a^{1/2}} \bar{\hat{\psi}}(na), \\ \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow \frac{1}{a^{3/2}} \hat{\partial}_\mu \hat{\psi}(na). \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei die Ableitung auf dem Gitter durch

$$\hat{\partial}_\mu \hat{\psi}(na) = \frac{1}{2} \left[\hat{\psi}(na + \hat{\mu}a) - \hat{\psi}(na - \hat{\mu}a) \right] \quad (4.4)$$

gegeben ist. Der Vektor $\hat{\mu} \equiv \hat{e}_\mu$ bezeichnet den Einheitsvektor in μ -Richtung. Somit wird die Gitterversion der Wirkung (4.1) zu

$$S_F = \sum_{n,m,\alpha,\beta} \bar{\hat{\psi}}_\alpha(n) K_{\alpha\beta}(n,m) \hat{\psi}_\beta(m), \quad (4.5)$$

wobei

$$K_{\alpha\beta}(n,m) = \sum_\mu \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} [\delta_{m,n+\hat{\mu}} - \delta_{m,n-\hat{\mu}}] + \hat{M} \delta_{m,n} \delta_{\alpha,\beta} \quad (4.6)$$

ist. Die Form der Gitterwirkung (4.5) ist nicht eindeutig und stellt nur die einfachste mögliche Wahl dar. Grundsätzlich sollte sie Symmetrien wie Eichinvarianz (s. Kapitel 4.2), Translations- und Rotationsinvarianz, Parität-Symmetrie, Ladungskonjugation und hermitesche Invarianz respektieren und die korrekten klassischen

Ausdrücke im naiven Kontinuum-Limes, d.h. wenn wir den Gitterabstand a analytisch gegen 0 gehen lassen, wiedergeben. Um letzteres zu kontrollieren berechnen wir die Zweipunkt-Greensfunktion

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \bar{\hat{\psi}}_\beta(m) \rangle = \frac{\int D\bar{\hat{\psi}} D\hat{\psi} \hat{\psi}_\alpha(n) \bar{\hat{\psi}}_\beta(m) e^{-S_F}}{\int D\bar{\hat{\psi}} D\hat{\psi} e^{-S_F}}, \quad (4.7)$$

wobei das Integrationsmaß durch

$$D\bar{\hat{\psi}} D\hat{\psi} = \prod_{\alpha,n} d\bar{\hat{\psi}}_\alpha(n) \prod_{\beta,m} d\hat{\psi}_\beta(m). \quad (4.8)$$

definiert ist. Unter Verwendung von (2.61) und (2.53) erhalten wir

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \bar{\hat{\psi}}_\beta(m) \rangle = K_{\alpha\beta}^{-1}(n, m). \quad (4.9)$$

Um den Kontinuum-Limit zu untersuchen, reskalieren wir M , ψ und $\bar{\psi}$ entsprechend (4.3) und führen den Limes $a \rightarrow 0$ durch, d.h.

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(x) \bar{\hat{\psi}}_\beta(y) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} G_{\alpha\beta} \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, Ma \right), \quad (4.10)$$

wobei

$$G_{\alpha\beta}(n, m, \hat{M}) \equiv K_{\alpha\beta}^{-1}(n, m). \quad (4.11)$$

Nach einigen Berechnungen [27] erhalten wir

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(x) \bar{\hat{\psi}}_\beta(y) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\left[-i \sum_\mu \gamma_\mu \tilde{p}_\mu + M \right]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \tilde{p}_\mu^2 + M^2} e^{ip \cdot (x-y)} \quad (4.12)$$

mit

$$\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(p_\mu a). \quad (4.13)$$

Die Sinusfunktion im Nenner von (4.12) verschwindet für $p = 0$ und an den Enden der Brillouin-Zone $p_\mu = \pm\pi/a$. Folglich existieren in d Raum-Zeit-Dimensionen 2^d Bereiche der Integration (4.12), in denen p_μ einen endliche Wert im Limes $a \rightarrow 0$ annimmt. Die Impulsverteilungsfunktion hat die charakteristische Form von Einzel-Teilchen-Propagatoren, wodurch $(2^d - 1)$ zusätzlichen Fermionen auftauchen. Dies ist das sogenannten „*fermion doubling problem*“.

Demnach führt der Ansatz (4.5) nicht zum korrekten Kontinuum-Limes und es muß ein Weg gefunden werden, die zusätzlichen Teilchen zu eliminieren.

4.1.1 Wilson-Fermionen

Eine der bekanntesten Methoden, um dies zu erreichen, wurde von Wilson (1975) vorgeschlagen. Durch die Einführung eines zusätzlichen Terms in die Wirkung (4.5)

$$S_F^W = S_F - \frac{r}{2} \sum_n \bar{\psi}(n) \hat{\Delta} \psi(n), \quad (4.14)$$

wobei r der Wilson-Parameter und $\hat{\Delta}$ der Gitter-Laplaceoperator

$$\hat{\Delta} \psi(n) = \sum_{\mu} (\psi(n + \hat{\mu}) + \psi(n - \hat{\mu}) - 2\psi(n)) \quad (4.15)$$

ist, werden die Nullstellen im Nenner von (4.12) an den Enden der Brillouin-Zone um eine Betrag proportional a^{-1} angehoben. Analog zu (4.5) kann die Wilson-Wirkung in die Form

$$S_F^W = \sum_{n,m,\alpha,\beta} \bar{\psi}_{\alpha}(n) K_{\alpha\beta}^W(n,m) \psi_{\beta}(m), \quad (4.16)$$

gebracht werden, wobei

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^W(n,m) &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu n} [(r - \gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \delta_{m,n+\hat{\mu}} + (r + \gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \delta_{m,n-\hat{\mu}}] \\ &\quad + (\hat{M} + 2r) \delta_{m,n} \delta_{\alpha,\beta}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die modifizierte Wirkung führt zu folgender Zweipunkt-Greensfunktion im Kontinuum

$$\langle \hat{\psi}_{\alpha}(x) \bar{\hat{\psi}}_{\beta}(y) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{[-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu} + M(p)]_{\alpha\beta}}{\sum_{\mu} \tilde{p}_{\mu}^2 + M(p)^2} e^{ip \cdot (x-y)}, \quad (4.18)$$

wobei $M(p)$ durch

$$M(p) = M + \frac{2r}{a} \sum_{\mu} \sin^2(p_{\mu} a/2) \quad (4.19)$$

gegeben ist. Im Kontinuum-Limes $a \rightarrow 0$ wird $M(p)$ zu M . An den Enden der Brillouin-Zone divergiert jedoch $M(p)$, wodurch die zusätzlich aufgetauchten Teilchen entkoppeln.

Der Nachteil dieser Methode ist, daß durch den zusätzlichen Massenterm r auch im masselosen Fall die chirale Symmetrie explizit gebrochen ist. Daher stellt sich die Frage, ob dieser Mangel durch eine einfache Veränderung der Gitterwirkung behoben werden kann. Nielsen und Ninomiya [28, 29] zeigten, daß es nicht möglich ist, exakte chirale Symmetrie am Gitter zu realisieren, ohne einige wichtige grundlegenden Prinzipien, wie Lokalität, zu verletzen (s. Kapitel 7.1).

4.2 QED auf dem Gitter

Wir beginnen mit der Wilson-Wirkung für freie Fermionen

$$S_F^W[\psi, \bar{\psi}] = \sum_{n,m,\alpha,\beta} \bar{\psi}_\alpha(n) K_{\alpha\beta}^W(n, m) \psi_\alpha(m) \quad (4.20)$$

mit

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^W(n, m) &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} [(r - \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta_{m, n+\hat{\mu}} + (r + \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta_{m, n-\hat{\mu}}] \\ &\quad + (\hat{M} + 2r) \delta_{m,n} \delta_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (4.21)$$

und fordern, analog zu Kapitel 2.3.1, daß diese invariant unter der lokalen Eichtransformation

$$\begin{aligned} \psi(n) &\rightarrow G(n)\psi(n), \\ \bar{\psi}(n) &\rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n) \end{aligned} \quad (4.22)$$

ist, wobei $G(n) = e^{-i\alpha(n)}$ ein Element der $U(1)$ Gruppe ist. Um eichinvariante Ausdrücke für Terme der Gitterableitung (4.4) zu erhalten, ersetzen wir:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)\psi(n + \hat{\mu}) &\rightarrow \bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n, n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}), \\ \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)\psi(n) &\rightarrow \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu}, n}\psi(n), \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei

$$\begin{aligned} U_{n, n+\hat{\mu}} &\rightarrow G(n)U_{n, n+\hat{\mu}}G^{-1}(n + \hat{\mu}), \\ U_{n+\hat{\mu}, n} &\rightarrow G(n + \hat{\mu})U_{n+\hat{\mu}, n}G^{-1}(n). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Elemente $U_{n, n+\hat{\mu}}$ leben auf den *links* zwischen zwei Gitterpunkten und sind richtungsorientierte Größen für die

$$U_{n, n+\hat{\mu}} = U_{n+\hat{\mu}, n}^\dagger \quad (4.25)$$

gilt. Sie sind ebenfalls Elemente der $U(1)$ Eichgruppe, welche als

$$U_{n, n+\hat{\mu}} = e^{i\phi_\mu(n)} \quad (4.26)$$

geschrieben werden können. Somit erhalten wir die eichinvariante Gitterwirkung für Wilson-Fermionen

$$\begin{aligned} S_F^W[U, \psi, \bar{\psi}] &= (\hat{M} + 2r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n, n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) \\ &\quad + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu}, n}^\dagger\psi(n)]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Um $\phi_\mu(n)$ zu identifizieren, reskalieren wir die Variablen \hat{M} , ψ und $\bar{\psi}$ und führen den naiven Kontinuum-Limes durch:

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_F^W[U, \psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu + M)\psi(x), \quad (4.28)$$

wobei

$$D_\mu \psi(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^{3/2}} \left(\hat{\partial}_\mu + \frac{i\phi_\mu(n)}{a} \right) \psi(n). \quad (4.29)$$

Durch Vergleich von (4.29) mit (2.67) erhalten wir

$$\phi_\mu(n) = eaA_\mu(n) \quad (4.30)$$

und weiters

$$U_\mu(n) \equiv U_{n, n+\hat{\mu}} = e^{ieaA_\mu(n)}. \quad (4.31)$$

Um die Konstruktion der Gitterwirkung zu vervollständigen, benötigen wir noch die Gitterversion des kinetischen Terms des Eichfeldes (2.70). Dieser kann aus dem Produkt der Link-Variablen entlang eines geschlossenen Weges auf dem euklidischen Raum-Zeit-Gitter konstruiert werden. Wegen der lokalen Struktur von (2.70) konzentrieren wir uns nur auf die kleinsten möglichen Wege, welche entlang der Ränder einer elementaren Plakette in der μ - ν -Ebene verlaufen. Wir definieren

$$U_{\mu\nu}(n) \equiv U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad (4.32)$$

und erhalten mittels (4.31)

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{ia^2 F_{\mu\nu}(n)}, \quad (4.33)$$

wobei

$$F_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{a} [(A_\nu(n+\hat{\mu}) - A_\nu(n)) - (A_\mu(n+\hat{\nu}) - A_\mu(n))] \quad (4.34)$$

der diskretisierte Feldstärketensor ist. Für kleine Gitterabstände ergibt

$$\frac{1}{e^2} \sum_n \sum_{\substack{\mu, \nu \\ \mu < \nu}} \left[1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) \right] \approx \frac{1}{4} \sum_{\substack{n \\ \mu, \nu}} a^2 F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n) \quad (4.35)$$

die korrekte Wirkung des Eichfelder im Kontinuum (2.70). Somit ist die vollständige Gitterwirkung der QED durch

$$S_{QED}[U, \psi, \bar{\psi}] = S_F^W[U, \psi, \bar{\psi}] + \frac{1}{e^2} \sum_P \left[1 - \frac{1}{2} (U_P + U_P^\dagger) \right] \quad (4.36)$$

gegeben, wobei U_P das Produkt der Link-Variablen entlang des Weges um die elementare Plakette P bezeichnet.

4.3 Kontinuum-Limes

Um letztendlich physikalische Größen messen zu können, müssen wir den Kontinuum-Limes durchführen. Wenn wir eine Theorie auf dem Gitter definieren, entspricht der Gitterabstand a einem ultravioletten Cutoff. Die Kopplungskonstante $e(a)$ in der Wirkung (4.36) ist eine nackte Kopplung, die nur in Bezug auf a definiert ist. Wenn wir den Kontinuum-Limes durchführen und den Gitterabstand gegen Null gehen lassen, müssen wir physikalische Größen festhalten und angeben, wie sich $e(a)$ verhält.

Der einzige dimensionsbehaftete Parameter ist der Gitterabstand a . Aus Dimensionsgründen müssen physikalische Observablen proportional zu Ordnungen von a sein. Anregungszustände haben zum Beispiel die Masse

$$m(e, a) = \frac{1}{a} \hat{m}(e(a)), \quad (4.37)$$

wobei $\hat{m}(e(a))$ eine dimensionslose Gittergröße ist. Die Existenz des Kontinuum-Limes impliziert

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \hat{m}(e(a)) \rightarrow \text{konstant} \quad (4.38)$$

und \hat{m} muß klarerweise für $a \rightarrow 0$ verschwinden. Was heißt es, den Gitterabstand gegen Null gehen zu lassen? Dazu betrachten wir die Korrelationslänge ξ , die den exponentiellen Abfall

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(x) \bar{\hat{\psi}}_\beta(y) \rangle \propto e^{|x-y|/\xi} \quad (4.39)$$

der Zweipunkt-Funktion (4.18) bestimmt. Aus (4.38) folgt für die Korrelationslänge in Einheiten der Gittergröße $\hat{\xi} = \xi/a = 1/\hat{m}$ für verschwindenden Gitterabstand

$$\hat{\xi} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \infty. \quad (4.40)$$

Folglich müssen wir den Parameter $e(a)$ in (4.38) so verändern, daß die Korrelationslänge $\hat{\xi}$ divergiert. Dies tritt nur an einem kritischen Punkt e_c eines Phasenüberganges zweiter (oder höherer) Ordnung auf. Da \hat{m} an diesem Punkt verschwinden muß, können wir offensichtlich bei praktischen numerischen Simulationen auf einem endlichen Gitter nie den Kontinuum-Limes erreichen.

Wir erwarten jedoch in der Nähe des kritischen Punktes der QED $e_c = 0$, daß physikalische Größen und somit (4.38) unabhängig von der Gittergröße sind. Infolgedessen erfüllt m die Renormierungsgruppen-Gleichung

$$\frac{\partial m(e, a)}{\partial \log a} = \left(\frac{\partial}{\partial \log a} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} \right) m(e, a) = 0, \quad (4.41)$$

wobei

$$\beta(e) = \frac{\partial e}{\partial \log a} \quad (4.42)$$

die Callan-Symanzik β -Funktion [30, 31] ist, welche in vier Dimensionen durch Störungstheorie in e ermittelt werden kann:

$$\beta(e) = \beta_0 e^3 + \beta_1 e^5 + O(e^7). \quad (4.43)$$

Die Integration der Differentialgleichung ergibt [27, 32]

$$\begin{aligned} a(e) &= \frac{1}{\Lambda} f(e), \\ f(e) &= (\beta_0 e^2)^{-\beta_1/2\beta_0^2} \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0 e^2}\right) (1 + O(e^2)). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die Integrationskonstante Λ fixiert die Skala und hat die Dimension einer Masse. Ihr Wert kann nur nicht-perturbativ ermittelt werden und hängt im Detail vom Regularisierungsschema und der bestimmten Form der Gitterwirkung ab. Physikalische Größen sollten somit folgendermaßen asymptotisch skalieren:

$$\hat{m} = ma(e) = m \frac{1}{\Lambda} f(e) \quad (4.45)$$

Um physikalische Ergebnisse in der Gittereichtheorie zu erhalten, sind folgende drei Schritte erforderlich:

1. Berechnung der Massen \hat{m} für mehrere Kopplungen e .
2. Beobachten des Skalierens von ma entsprechend der β -Funktion in Abhängigkeit von e .
3. Setzen der gesamten Massenskala für eine dimensionsbehaftete Größe in Übereinstimmung mit dem Experiment und Voraussage aller weiteren dimensionsbehafteten Observablen in deren Einheiten.

Das Schwinger-Modell ist eine superrenormierbare Theorie. Die nackte Kopplung \hat{e} hat daher die Dimension einer Masse. Durch die Untersuchung des naiven Kontinuum-Limes der Eichfeldwirkung (4.35) erhalten wir

$$e = \frac{1}{a} \hat{e}. \quad (4.46)$$

und weiters

$$\frac{\hat{m}}{\hat{e}} = \frac{1}{\Lambda} \frac{m}{e}. \quad (4.47)$$

Kapitel 5

Korrelationsfunktionen

Das Ziel unserer Untersuchungen ist die Berechnung des Massenspektrums des Zwei-Flavour Schwingermodells auf dem Gitter, welches aus dem exponentiellen Abfall der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen der fermionischen Ströme bestimmt wird. Azakov und Joos berechneten das Modell im Kontinuum auf einem Torus \mathcal{T}_2 [33, 34] explizit und unter Berücksichtigung des endlichen Volumens. Der Torus im Kontinuum entspricht den periodischen Randbedingungen auf dem Gitter und wir erwarten daher die Reproduktion der Kontinuumseigenschaften bei MC-Simulationen des Gittermodells. Die Ausführungen dieses Kapitels folgen hauptsächlich [35].

5.1 Das Zwei-Flavour SM auf dem Torus \mathcal{T}_2

Die Wirkung des Zwei-Flavour Schwingermodells im Kontinuum auf dem Torus \mathcal{T}_2 , $0 \leq x_\mu \leq L_\mu$, in euklidischer Metrik ist durch

$$S = \int_{\mathcal{T}_2} dx \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}^{(b)}(x) \gamma_\mu (\partial_\mu + ie A_\mu(x)) \psi^{(b)}(x) \right], \quad b = 1, 2 \quad (5.1)$$

gegeben. Das $U(1)$ Eichfeld auf \mathcal{T}_2 kann durch

$$A_\mu(x) = \partial_\mu \varphi(x) + \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu B(x) + t_\mu + \frac{2\pi k}{e L_0 L_1} \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \quad (5.2)$$

beschrieben werden, wobei das konstante harmonische Eichpotential $t_\mu \in [0, 2\pi/L_\mu]$, $\square t_\mu = 0$, das sogenannte Toronfeld ist. Der letzte Term in (5.2) ist ein Repräsentant der Chern-Klasse $\mathcal{CH}^{(k)}$ (topologische Sektor) mit der topologischen Quantenzahl $k = \frac{e}{2\pi} \int F$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Das Atiyah-Singer-Indextheorem [36] besagt:

$$n_L - n_R = N_f k, \quad (5.3)$$

wobei N_f die Anzahl der Flavour und n_L (n_R) die Anzahl der linkshändigen (rechtshändigen) Lösungen der Dirac-Gleichung in einem Hintergrundfeld mit der

topologischen Quantenzahl k ist. Diese Lösungen werden topologische Nullmoden (NM) genannt und es gilt

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x))\chi^{(b)}(x) = 0. \quad (5.4)$$

Im Zwei-Flavour SM gibt es $2k$ linkshändige (rechtshändige) NM für $k > 0$ ($k < 0$) und keine oder zwei NM für $k = 0$, abhängig vom Toronfeld t_μ [33].

Die Pfadintegraldarstellung des Vakuumerwartungswertes der Observable Ω hat die Form

$$\langle \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int DAD\bar{\psi}D\psi \Omega[A, \bar{\psi}, \psi] e^{-S[A, \bar{\psi}, \psi]}. \quad (5.5)$$

Bei der Integration über die fermionischen Felder muß man auf die $2k$ NM, die im topologischen Sektor $k \neq 0$ auftauchen, acht geben. Man erhält [37]

$$\begin{aligned} \langle \psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\dots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_n) \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_k \int D^{(k)}A e^{-S_F[A]} \det'[D_A] \\ &\times \sum_{perm} \{(\pm 1)\chi_1(x_{i_1})\dots\chi_l(x_{i_l})\bar{\chi}_1(y_{j_1})\dots\bar{\chi}_l(y_{j_l}) \\ &S^{(k)}(x_{i_{l+1}}, y_{j_{l+1}}; A)\dots S^{(k)}(x_{i_n}, y_{j_n}; A)\}, \quad (5.6) \end{aligned}$$

wobei \sum_k die Summation über alle topologischen Sektoren und $\chi_i(x)$, $\bar{\chi}_j(y)$, $i, j = 1, \dots, l$ mit $l = 2k$ eine orthogonale Menge von NM-Wellenfunktionen bezeichnet. Dabei sind $\det'[D_A]$ und $S^{(k)}(x, y; A)$ jeweils die Determinante und die Greensfunktion des Dirac-Operators ohne NM im Hintergrundfeld $A^{(k)}$ mit der topologischen Quantenzahl k . Zur Vereinfachung der Notation wurden in (5.6) die Dirac- und Flavour-Indices μ, b bei $\psi_\mu^{(b)}(x)$ und $\chi_\mu^{(b)}(x)$ nicht angeführt.

Für die Berechnung von Observablen benötigt man die effektive Wirkung Γ_{eff} , welche durch $\det'[D_{A^{(k)}}] = \exp(\frac{1}{2}\Gamma_{eff}[A^{(k)}])$ definiert ist. In [34] wurde sie mittels Pauli-Villars-Regularisierung berechnet.

5.2 Korrelationsfunktionen der Fermiondichten

Bei der Berechnung von Fermiondichte-Korrelationsfunktionen mit Hilfe des Pfadintegrals (5.6) erhalten wir Beiträge von den Eichfeldsektoren I^k mit den topologischen Quantenzahlen $k = 0, \pm 1$:

$$\langle \bar{\psi}(x)\Gamma\tau^u\psi(x)\bar{\psi}(y)\Gamma'\tau^v\psi(y) \rangle = I^0 + I^{-1} - I^1, \quad u, v = 0, 1, 2, 3, \quad (5.7)$$

wobei Γ (Γ') eine allgemeine Kombination von zweidimensionalen γ -Matrizen, die auf den Spinorindex μ wirken, und τ^u zweidimensionale hermitesche Matrizen, welche auf den Flavourindex b wirken, sind.

Der $k = 0$ Beitrag besteht aus einem *connected*-Teil I_c und einem *disconnected*-Teil I_d :

$$\begin{aligned}
I^0 &= I_d + I_c \\
&= \frac{1}{Z} \int DA^0 \exp(-S_G[A^0]) \exp\left(\frac{1}{2}\Gamma_{eff}[A^0]\right) \\
&\quad \times \left\{ \text{Tr}(\tau^u) \text{Tr}[\Gamma S(x, x'; A^0)|_{x=x'}] \text{Tr}(\tau^v) \text{Tr}[\Gamma' S(y, y'; A^0)|_{y=y'}] \right. \\
&\quad \left. - \text{Tr}(\tau^u \tau^v) \text{Tr}[\Gamma S(x, y; A^0) \Gamma' S(y, x; A^0)] \right\}. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Es folgt aus der Form der lokalen Lösung der 2-dimensionalen Dirac-Gleichung mit dem Hintergrundfeld A^0 des Schwingermodells, daß

$$S(x, y; A^0) = e^{ie\alpha(x)} S_t(x - y) e^{-ie\alpha^*(x)}, \tag{5.9}$$

wobei $\alpha(x) = a(x) - i\gamma_5 b(x)$ und $S_t(x - y)$ der Propagator in einem reinen Toron-Hintergrundfeld t_μ ist.

Für die Terme $I^{\pm 1}$ von den topologischen Sektoren $k = \pm 1$ erhalten wir nach der Integration über die Eichfelder [34]

$$\begin{aligned}
I^{\pm 1} &= \frac{\eta^2(\tau) e^{4e^2 G(0)} |\theta_1'(0)| |\theta_1(z/2)|^4 + |\theta_3(z/2)|^4}{8\pi L_0^2 |\theta_1(z)| |\theta_3(0)|^4} \\
&\quad \times \exp(-2\pi^2/(L_0 L_1) - 2\pi G_m(x - y)) \cdot \\
&\quad \times \text{Tr}[(1 \pm \gamma_5)\Gamma] \text{Tr}[(1 \pm \gamma_5)\Gamma'] \text{Tr}(\tau^u \varepsilon \tau^{v*} \varepsilon), \tag{5.10}
\end{aligned}$$

wobei $\eta(\tau) = q^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$, $q = e^{-\pi\tau}$, ist. Dabei ist $\theta_1(z) = \theta_1(z|i\tau)$, $\tau = L_1/L_0$, die Jacobi θ -Funktion

$$\theta_{ab}(z|i\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(\pi i(n + a/2)^2 \tau + 2\pi i(n + a/2)(z + b/2)), \quad a, b = 0, 1 \tag{5.11}$$

mit der Notation $\theta_1 = -\theta_{11}$, $\theta_2 = \theta_{10}$, $\theta_3 = \theta_{00}$, $\theta_4 = \theta_{01}$ und dem Argument $z = [(x_0 - y_0) + i(x_1 - y_1)]/L_0$.

Die Greensfunktionen $G(x)$, $G_m(x)$ sind durch

$$\square(\square - m^2)G(x) = \delta'(x), \quad (-\square + m^2)G_m(x) = \delta'(x) \tag{5.12}$$

definiert, wobei $G_m(x) = G_0(x) - m^2 G(x)$, $m^2 = 2e^2/\pi$, und der Index über den Deltafunktionen das Weglassen der NM anzeigt. Die Lösungen von (5.12) sind durch [34]

$$\begin{aligned}
G_0(x) &= -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\theta_1([x_0 + ix_1]/L_0|i\tau)|}{|\theta_1'(0|i\tau)|} + \frac{x_1^2}{2L_0 L_1} + const, \\
G_m(x) &= \frac{1}{2L_0} \sum_n \frac{\cosh[E(n)(L_1/2 - |x_1|)] e^{2\pi i n x_0/L_0}}{E(n) \sinh[L_1 E(n)/2]} - \frac{1}{m^2 L_0 L_1} \tag{5.13}
\end{aligned}$$

gegeben, wobei

$$E(n) = \left(\frac{2\pi^2 n^2}{L_0^2} + m^2 \right)^{1/2}. \quad (5.14)$$

Für $|x| \ll L_1, L_2$ erhalten wir die korrekten Greensfunktionen freier Bosonen im flachen Raum:

$$G_0(x) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|/L_1), \quad (5.15)$$

$$G_m(x) \approx \frac{1}{2\pi} K_0(m|x|), \quad (5.16)$$

wobei K_0 die modifizierte Besselfunktion bezeichnet.

Anhand der Berechnung der Spuren der γ_μ - und τ -Matrizen in (5.8) und (5.10) erhalten wir folgendes Ergebnis:

1. Der Isektor-Strom $\Gamma = \gamma_\mu \tau^u$, $u = 1, 2, 3$, erhält nur Beiträge vom *connected*-Teil.
2. Der Isoskalar-Strom $\Gamma = \gamma_\mu \tau^0$ erhält Beiträge vom *connected*- und vom *disconnected*-Teil.
3. Die skalaren und pseudoskalaren Dichten $\Gamma = \tau^u$ und $\Gamma = \gamma_5 \tau^u$, $u = 0, 1, 2, 3$, erhalten Beiträge vom *connected*-Teil und von den NM (5.10).

5.2.1 Isektor- und Axialvektor-Strom

Durch Einsetzen von (5.9) in (5.8) erhalten wir für den Isektor-Strom $j_\mu^u = \bar{\psi} \gamma_\mu \tau^u \psi$, $u = 1, 2, 3$, die Zweipunkt-Korrelationsfunktion

$$\langle j_\mu^u(x) j_\nu^v(y) \rangle = \delta_{uv} \left(-\frac{2}{\pi} \varepsilon_{\mu\rho} \varepsilon_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma G_0(x-y) + \frac{1}{\pi^2 L_0 L_1} R_{\mu\nu}(\tau) \right), \quad (5.17)$$

wobei

$$\begin{aligned} R_{00}(\tau) &= 2\pi + P(\tau), & R_{11}(\tau) &= -P(\tau), & R_{01}(\tau) &= R_{10}(\tau) = 0, \\ P(\tau) &= \frac{\tau}{3} \left(\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)} - \pi^2 [\theta_2(0)^4 - \theta_4(0)^4] \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Für die Korrelationsfunktion der Felder eines festen räumlichen Impulses $p_0 \neq 0$ erhalten wir mittels (5.13) und (5.17)

$$\begin{aligned} \pi_\mu^u(t; p_0) &\equiv \int dx_0 \exp(ip_0 x_0) \langle j_\mu^u(x_0, t) j_\mu^u(0, 0) \rangle \\ &= (-1)^{\mu+1} |p_0| \frac{\cosh[|p_0|(\frac{1}{2}L_1 - t)]}{\pi \sinh(\frac{1}{2}|p_0|L_1)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Im Limes $L_0, L_1 \rightarrow \infty$ folgt aus (5.15) und (5.17)

$$\langle j_\mu^u(x) j_\nu^v(y) \rangle = \delta_{uv} \frac{(-1)^{\delta_{\mu\nu}}}{\pi^2} \frac{1}{|z|^2} \left[-\delta_{\mu\nu} + 2 \frac{z_\mu z_\nu}{|z|^2} \right], \quad z = x - y \quad (5.20)$$

das korrekte Ergebnis im flachen Raum [9].

Der Axialvektor-Strom ist in zwei Dimensionen wegen $\gamma_\mu \gamma_5 = i \varepsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu$ dual zum Vektor-Strom:

$$j_{5,\mu}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) = i \varepsilon_{\mu\nu} j_\nu(x). \quad (5.21)$$

5.2.2 Isoskalar-Strom

Der *disconnected*-Anteil des Isoskalar-Stroms $j_\mu^0 = \bar{\psi} \gamma_\mu \tau^0 \psi$ ist der gleiche wie für den Iovektor-Strom. Zusammen mit dem *connected*-Teil erhalten wir

$$\langle j_\mu^0(x) j_\nu^0(y) \rangle = -\frac{2}{\pi} \varepsilon_{\mu\rho} \varepsilon_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma G_0(x-y) + \frac{4e^2}{\pi^2} \varepsilon_{\mu\rho} \varepsilon_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma G(x-y). \quad (5.22)$$

Die konstanten Terme von I_d und I_c haben sich weggehoben. Aus (5.12) folgt

$$\langle j_\mu^0(x) j_\nu^0(y) \rangle = -\frac{2}{\pi} \varepsilon_{\mu\rho} \varepsilon_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma G_m(x-y). \quad (5.23)$$

Gleich wie für den Iovektor-Strom bilden wir die Korrelationsfunktion der Felder für einen festen räumlichen Impuls p_0 und erhalten mittels (5.13) und (5.23)

$$\begin{aligned} \eta_\mu(t; p_0) &\equiv \int dx_0 \exp(ip_0 x_0) \langle j_\mu^0(x_0, t) j_\mu^0(0, 0) \rangle \\ &= c_\mu(p_0) \frac{\cosh[E(p_0)(\frac{1}{2}L_1 - t)]}{\pi \sinh(\frac{1}{2}E(p_0)L_1)}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

wobei $E(p_0) = \sqrt{m^2 + p_0^2}$, $c_\mu(p_0) = -E(p_0)$ für $\mu = 0$ und $c_\mu(p_0) = p_0^2/E(p_0)$ für $\mu = 1$. Somit bleibt nur der Beitrag eines freien massiven Teilchens übrig. Im Limes $L_0, L_1 \rightarrow \infty$ folgt aus (5.16) und (5.23)

$$\begin{aligned} \langle j_\mu^0(x) j_\nu^0(y) \rangle &= \frac{(-1)^{\delta_{\mu\nu}}}{\pi^2} \frac{1}{|z|^2} \\ &\quad \left[-\delta_{\mu\nu} K_1(m|z|) m|z| + \frac{z_\mu z_\nu}{|z|^2} K_2(m|z|) (m|z|)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.25)$$

wobei $z = x - y$, die Korrelationsfunktion im flachen Raum [9].

5.2.3 Skalare und pseudoskalare Dichten

Die Korrelationsfunktionen von Skalaren und Pseudoskalaren $s^u = \bar{\psi}\tau^u\psi$, $s_5^u = \bar{\psi}\gamma_5\tau^u\psi$, $u = 0, 1, 2, 3$, können durch die Definition von $s_{\pm}^u(x)$ in einfacher Form geschrieben werden, wobei $s_+^0(x) = s^0(x)$, $s_+^u(x) = s_5^u(x)$ und $s_-^0(x) = s_5^0(x)$, $s_-^u(x) = s^u(x)$ für $u = 1, 2, 3$. Mit der massiven Greensfunktion unter Einbeziehung der NM erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle s_{\pm}^u(x)s_{\pm}^v(y) \rangle &= \delta_{uv}C \frac{|\theta_1(\frac{z}{2})|^4 + |\theta_3(\frac{z}{2})|^4}{|\theta_1(z)|} \\ &\quad \times \left\{ \pm \exp[2\pi\bar{G}_m(x-y)] + \exp[-2\pi\bar{G}_m(x-y)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

wobei

$$C = 2 \frac{\eta^2(\tau)|\theta_1'(0)|}{\pi L_0^2 |\theta_3(0)|^4} e^{4e^2 G(0) - \pi^2/(e^2 L_0 L_1)}. \quad (5.27)$$

Der erste Term kommt vom topologischen Sektor $k = 0$, der zweite Term von den Sektoren $k \pm 1$.

Im Limes des unendlichen Volumens wird (5.26) zu [38, 39, 40]

$$\begin{aligned} \langle s_+^u(x)s_+^v(y) \rangle &= -\delta_{uv} \frac{me^\gamma}{(2\pi)^2} \frac{4}{|x-y|} \cosh[K_0(m|x-y|)], \\ \langle s_-^u(x)s_-^v(y) \rangle &= \delta_{uv} \frac{me^\gamma}{(2\pi)^2} \frac{4}{|x-y|} \sinh[K_0(m|x-y|)]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Für große Abstände $|x-y|$ gilt

$$K_0(m|x-y|) = \sqrt{\frac{\pi}{2m|x-y|}} e^{-m|x-y|}, \quad m|x-y| \gg 1 \quad (5.29)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \langle s_+^u(x)s_+^v(y) \rangle &= -\delta_{uv} \frac{me^\gamma}{(2\pi)^2} \frac{4}{|x-y|}, \\ \langle s_-^u(x)s_-^v(y) \rangle &= \delta_{uv} \frac{me^\gamma}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \frac{4}{|x-y|^{3/2}} e^{-m|x-y|}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Kapitel 6

Das massive Zwei-Flavour SM

Das massive Zwei-Flavour Schwingermodell im Kontinuum ist durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{b=1,2} [\bar{\psi}^{(b)} \gamma_\mu (\partial_\mu + ie A_\mu) \psi^{(b)} - m^{(b)} \bar{\psi}^{(b)} \psi^{(b)}] \quad (6.1)$$

gegeben, wobei wir nur den Fall gleicher Masse für beide Flavours betrachten. Das massive Schwingermodell im Kontinuum ist nicht analytisch lösbar. Für ein Flavour ist es möglich die Greensfunktionen durch eine Störungsreihenentwicklung in der Fermionmasse zu berechnen [41, 42]. Für zwei oder mehr Flavours konvergiert diese Reihenentwicklung jedoch nur für endliches Volumen [9, 43]. Ein alternativer Zugang ist in diesem Fall abelsche Bosisierung [7].

6.1 Das verallgemeinerte Sine-Gordon-Modell

Wir führen zwei bosonische Felder $\phi^{(b)}$, $b = 1, 2$, ein und definieren

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(b)} \gamma_\mu \psi^{(b)} &\equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi^{(b)}, \\ \bar{\psi}^{(b)} \psi^{(b)} &\equiv C \cos(\sqrt{4\pi} \phi^{(b)}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die ursprüngliche Theorie (6.1) ist equivalent zu einer bosonischen Theorie mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{b=1,2} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^{(b)})^2 + ie \frac{F^{\mu\nu}}{\sqrt{\pi}} \phi^{(b)} - mC \cos(\sqrt{4\pi} \phi^{(b)}) \right] \quad (6.3)$$

in dem Sinn, daß sie das gleiche Spektrum hat und alle Korrelationsfunktionen der fermionischen Ströme der Theorie (6.1) mit den entsprechenden Korrelationsfunktionen der bosonischen Ströme der Theorie (6.3) übereinstimmen. Nach der

Integration über $F_{\mu\nu}$ erhalten wir die nur mehr von physikalischen Freiheitsgraden abhängende Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{VSG} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^{(0)})^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^{(3)})^2 + \\ &\quad \frac{e^2}{\pi} (\varphi^{(0)})^2 - 2mC \cos(\sqrt{2\pi}\varphi^{(0)}) \cos(\sqrt{2\pi}\varphi^{(3)}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei

$$\varphi^{(0)} = (\phi^{(1)} + \phi^{(2)}) / \sqrt{2}, \quad \varphi^{(3)} = (\phi^{(1)} - \phi^{(2)}) / \sqrt{2}. \quad (6.5)$$

Für $m = 0$ erhalten wir zwei freie bosonische Felder, $\varphi^{(0)}$ mit der Masse $\mu^{(0)} = \sqrt{2}e/\sqrt{\pi}$ und $\varphi^{(3)}$, welches masselos ist. Die Konstante C wird nicht durch die Bosonisierung bestimmt, hängt jedoch von den Massen $\mu^{(0)}$ und $\mu^{(3)}$, welche für die Normalordnung der Felder $\varphi^{(0)}$ und $\varphi^{(3)}$ verwendet werden, ab [9, 4]:

$$C = \frac{(\mu^{(0)}\mu^{(3)})^{1/2} e^\gamma}{4\pi}, \quad (6.6)$$

wobei γ die Eulersche Konstante ($\gamma=0.577216\dots$) bezeichnet. Aus (6.2) folgt

$$j_\mu^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \varphi^{(a)}, \quad a = 0, 3. \quad (6.7)$$

Für die anderen beiden Ströme $j_\mu^{(1)}$ und $j_\mu^{(2)}$ des Iso-Tripletts ist keine abelsche Bosonisierung bekannt. Wegen der Invarianz der ursprüngliche Theorie (6.1) unter Flavour-Rotation, ist ihre Masse jedoch identisch zu der des Tripletstromes $j_\mu^{(3)}$. Die Lagrange-Dichte (6.3) stellt die Verallgemeinerung des Sine-Gordon-Modells für zwei Flavours dar und kann für nicht verschwindende Quarkmassen ebenfalls nicht analytisch gelöst werden.

Eine Möglichkeit [7] ist, das Modell im Limes großer Kopplungen e und kleiner Massen m zu analysieren. Das Iso-Singlettfeld $\varphi^{(0)}$ wird dadurch statisch und das Modell reduziert sich auf das standard Sine-Gordon-Modell für das Triplettfeld $\varphi^{(3)}$ mit

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^{(3)})^2 - 2mC \cos(\beta\varphi^{(3)}) \quad (6.8)$$

und $\beta = \sqrt{2\pi}$. Das reduzierte Modell (6.8) ist analytisch lösbar [44] und wurde von Smilga [8] untersucht. Das Spektrum besteht aus zwei Teilchen gleicher Masse M_π , genannt Soliton und Antisoliton, und aus $n = 1, 2, \dots < (8\pi - \beta^2)/\beta^2$, d.h. in unserem Fall $n = 2$, Bindungszuständen. Einer der beiden Bindungszustände hat dieselbe Masse M_π wie das Soliton und das Antisoliton und bildet mit ihnen ein Triplet. Der zweite Bindungszustand hat die Masse $\sqrt{3}M_\pi$ und ist ein Singlett. Smilga erhält für die Tripletmasse

$$\begin{aligned} \frac{M_\pi}{e} &= 2^{5/6} e^{\gamma/3} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right)^{2/3} \frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \left(\frac{m}{e} \right)^{2/3}, \\ &= 2.008\dots \left(\frac{m}{e} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (6.9)$$

und für das Fermion-Kondensat

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_1 \psi_1 \rangle = \langle \bar{\psi}_2 \psi_2 \rangle &= -\frac{2^{2/3} e^{2\gamma/3}}{\sqrt{3} \pi^4} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right)^{4/3} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right)^2 m^{1/3} e^{2/3} \\ &= -0.388\dots m^{1/3} e^{2/3}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Für die Masse M_η des Singletts erhalten wir durch die Näherung (6.8) kein Ergebnis und sind auf semiklassische Untersuchungen angewiesen.

6.2 Die semiklassische Näherung

Wir bringen die Langrange-Dichte (6.4) in die Form

$$\mathcal{L}_{VSG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^{(0)})^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^{(3)})^2 + V(\varphi^{(0)}, \varphi^{(3)}) \quad (6.11)$$

mit

$$V(\varphi^{(0)}, \varphi^{(3)}) = \frac{e^2}{\pi} (\varphi^{(0)})^2 - 2mC \cos(\sqrt{2\pi}\varphi^{(0)}) \cos(\sqrt{2\pi}\varphi^{(3)}). \quad (6.12)$$

Für die semiklassische Näherung [9] ermittelt man die Minima $\varphi_0^{(a)}$, $a = 0, 3$, des Wechselwirkungsteiles $V(\varphi^{(0)}, \varphi^{(3)})$, d.h. man löst die Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^{(a)}} V(\varphi^{(a)}) \right|_{\varphi^{(a)} = \varphi_0^{(a)}}. \quad (6.13)$$

Man berechnet am Ort dieser Minima die Massenmatrix $H_{bb'}$ der effektiven Theorie mittels

$$H_{bb'} \equiv \left. \frac{\partial^2 V(\varphi^{(a)})}{\partial \varphi^{(b)} \partial \varphi^{(b')}} \right|_{\varphi^{(a)} = \varphi_0^{(a)}}, \quad (6.14)$$

und erhält eine positiv definite Diagonalmatrix, deren Einträge als die Quadrate der Massen der Felder $\varphi_0^{(a)}$ in der effektiven Theorie um die semiklassischen Vakuen interpretiert werden. Nach der Normalordnung der Felder $\varphi^{(a)}$ hinsichtlich ihrer Massen, d.h. $\mu^{(0)} = M_\eta$ und $\mu^{(3)} = M_\pi$, ergibt die Berechnung für das Isotriplett und das Isosinglett

$$\frac{M_\pi}{e} = \exp 2\gamma/3 \frac{2^{5/6}}{\pi^{1/6}} \left(\frac{m}{e} \right)^{2/3} = 2.1633\dots \left(\frac{m}{e} \right)^{2/3} \quad (6.15)$$

und

$$\frac{M_\eta}{e} = \sqrt{\frac{2}{\pi} + \left(\frac{M_\pi}{e} \right)^2}. \quad (6.16)$$

Die Beziehung (6.16) zwischen M_π und M_η gilt unabhängig von der Normalordnungsvorschrift aufgrund der Formel

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^{(0)2}}V(\varphi^{(0)},\varphi^{(3)}) = \frac{2e^2}{\pi} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^{(3)2}}V(\varphi^{(0)},\varphi^{(3)}), \quad (6.17)$$

was aus (6.12) ersichtlich ist. Da die semiklassische Näherung für verschwindende Fermionmassen die korrekte Lösung des freien Modells wiedergibt, erwarten wir für kleine Massen ebenfalls gute Resultate.

Kapitel 7

Ginsparg-Wilson-Fermionen

Bei der Formulierung von Fermionen auf dem Gitter tauchen grundsätzliche Probleme auf. Um das „*fermion doubling problem*“ loszuwerden, müssen andere wichtige Eigenschaften der Kontinuumstheorie aufgegeben werden. Unter anderem ist es nicht möglich, exakte chirale Symmetrie auf dem Gitter zu realisieren. Es stellte sich jedoch heraus, daß Gitter-Dirac-Operatoren, welche die Ginsparg-Wilson-Relation erfüllen, die Symmetrie nur so gering wie möglich brechen. Zwei bekannte Lösungen der GWR sind der Fixpunkt-Operator und Neuberger's Overlap-Operator.

7.1 Das „Nogo“-Theorem

Die Lagrange-Dichte (6.1) des Zwei-Flavour Schwingermodells im Kontinuum kann im masselosen Fall in die Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{b=1,2} \left[\bar{\psi}_L^{(b)} \gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi_L^{(b)} + \bar{\psi}_R^{(b)} \gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi_R^{(b)} \right] \quad (7.1)$$

mit

$$\psi_{R/L}^{(b)} = P_{R/L} \psi^{(b)}, \quad P_{R/L} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \quad (7.2)$$

gebracht werden. Sie hat die globale Symmetrie

$$\underbrace{SU(2)_L \times SU(2)_R}_{\text{Chirale Guppe}} \times U(1)_V \times U(1)_A \quad (7.3)$$

und ist invariant unter der globalen chiralen Transformation

$$\begin{aligned} SU(2)_{R/L} : \quad \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\alpha^u \tau^u P_{R/L}} \psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\alpha^u \tau^u P_{L/R}}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Die axiale $U(1)_A$ ist wegen der abelschen Anomalie auf dem Quantenlevel keine Symmetrie, was zu einem massiven η -Teilchen führt. Für mehr als zwei Dimensionen nimmt man an, daß die chirale Symmetriegruppe spontan in die Untergruppe $SU(2)_V$ bricht, was in der QCD das Fehlen der Paritätspartner im Hadronspektrum erklärt. Für $N_f = 2$ Flavours werden die Pionen als die $(N_f^2 - 1)$ masselosen Goldstone-Bosonen identifiziert. In zwei Dimensionen gibt es entsprechend Mermin/Wagner [45] und Coleman [46] keine spontane Symmetriebrechung. Im Zwei-Flavour Schwingermodell existiert jedoch ein Mechanismus, der die spontane Brechung der chiralen Symmetrie nachahmt, wodurch es zu einem geeigneten Modell für die Untersuchung des chiralen Limes der QCD wird.

Wenn wir das Modell naiv auf dem Gitter formulieren, gibt es mehrere Fermionarten pro Fermionfreiheitsgrad (s. Kapitel 4.1). Die Einführung des Wilson-Terms (4.14) ist nur eine von mehreren Möglichkeiten, die unerwünschten Doppler zu beseitigen. Der zusätzliche Massenterm bricht jedoch explizit die chirale Symmetrie der Gitterwirkung (4.36) bei endlichem Gitterabstand durch $O(a)$ Gitterartefakte. Dies hat zur Folge, daß die Operatoren verschiedener chiraler Darstellungen gemischt werden und außerdem eine zusätzliche Quarkmassenrenormierung [10, 11] erforderlich ist. Es stellt sich daher die Frage, ob eine Möglichkeit besteht, die chirale Symmetrie durch eine geeignetere Wahl der Gitterwirkung wiederherzustellen.

Ein allgemeiner Dirac-Operator D auf dem Gitter sollte die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (a) $\tilde{D}(p)$ ist eine analytische periodische Funktion des Impulses p_μ mit der Periode $2\pi/a$.
- (b) $\tilde{D}(p) = i\gamma_\mu p_\mu + O(ap^2)$ für $p \ll \pi/a$.
- (c) $\tilde{D}(p)$ ist invertierbar für $p \neq 0$.
- (d) $\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0$.

Dabei ist $\tilde{D}(p)$ die Fouriertransformierte von $D(x)$. Die Eigenschaft (a) ist erforderlich, wenn D ein lokaler Operator (d.h. beschränkt durch $Ce^{-\gamma|x|}$) sein soll, (b) und (c) sichern den korrekten Kontinuum-Limes und (d) gewährleistet, daß die Lagrange-Dichte invariant unter der chiralen Transformation (7.4) ist.

Das „Nogo“-Theorem von Nielsen und Ninomiya [28, 29] besagt, das in der Gitterregularisierung die Eigenschaften (a) - (d) nicht gleichzeitig halten können. In [28] wird das Theorem mittels algebraischer Topologie bewiesen, in [47] wird Differential-Geometrie verwendet, während der Beweis in [29] auf Differential-Topologie basiert.

Für die hier gezeigte einfache Version nehmen wir zusätzlich noch Reflexions-Positivität an, welche im Prinzip nur im Kontinuum erfüllt sein muß. Auf dem Gitter könnte sie durch Terme die im Kontinuum-Limes verschwinden gebrochen

sein. Reflexions-Positivität impliziert die Existenz einer antilineare Abbildung Θ , welche im 2-dimensionalen Impulsraum durch

$$\Theta \tilde{\psi}_{p_0, p_1} = \tilde{\psi}_{p_0, -p_1} \gamma_1, \quad \Theta \tilde{\psi}_{p_0, -p_1} = \gamma_1 \tilde{\psi}_{p_0, p_1} \quad (7.5)$$

definiert ist. Daraus folgt

$$\tilde{D}(p) = \gamma_1 \tilde{D}^\dagger(p_0, p_1) \gamma_1. \quad (7.6)$$

Auf einem quadratischen Gitter gilt

$$\tilde{D}(p) = \gamma_\mu \tilde{D}^\dagger(R_\mu p) \gamma_\mu, \quad (7.7)$$

wobei $(R_\mu p)_\nu = p_\nu(1 - 2\delta_{\mu\nu})$. Durch mehrfache Anwendung von (7.7) für $\mu = 0, 1$ erhalten wir

$$\tilde{D}(p) = \gamma_5 \tilde{D}(-p) \gamma_5 \quad (7.8)$$

Aus der Eigenschaft (d) des Diracoperators folgt

$$\tilde{D}(p) = -\gamma_5 \tilde{D}(p) \gamma_5 \quad (7.9)$$

und weiters

$$\tilde{D}(-p) = -\tilde{D}(p). \quad (7.10)$$

Da der Diracoperator laut Eigenschaft (a) eine periodische Funktion mit der Periode $2\pi/a$ ist, muß er für $p_\mu = 0, \pm\pi/a$ verschwinden, wodurch Eigenschaft (c) verletzt ist.

7.2 Die Ginsparg-Wilson-Relation

Ginsparg und Wilson [12] schlugen 1982 einen Weg vor, um das Nogo-Theorem zu umgehen. Sie ersetzten die Eigenschaft (d) durch die mildere Bedingung

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = 2a D \gamma_5 R D. \quad (7.11)$$

Dabei ist R ein lokaler Operator, der das Maß der Brechung der chiralen Symmetrie von D^{-1} angibt,

$$R = \frac{1}{2a} \gamma_5 \{D^{-1}, \gamma_5\}. \quad (7.12)$$

Die Relation (7.11) stellt die mildeste Brechung der chiralen Symmetrie dar. Die Lokalität von R sichert, daß propagierende Zustände für Entfernungen größer als die Reichweite von R effektiv chiral sind. Im Kontinuum-Limes $a \rightarrow 0$ ist die Eigenschaft (d) wiederhergestellt.

Ursprünglich wurde die Beziehung (7.11) aus Renormierungsgruppenbetrachtungen der Wirkung freier Fermionen hergeleitet, welche auf den Fall wechselwirkender Theorien verallgemeinert wurden. Der Operator R stammt ausschließlich

von einem die chirale Symmetrie brechenden Term der Blockspin-Transformation und nicht von der ursprünglichen Wirkung. Aus diesem Grund wird erwartet, daß die beschriebene Physik chiral invariant ist. In der Herleitung der Beziehung wurde die Annahme gemacht, daß die Wirkung quadratisch in den Fermionfeldern ist, was nur für freie Felder stimmt.

Ginsparg und Wilson fanden keine Lösung für eine wechselwirkende Theorie, wodurch ihre Veröffentlichung für viele Jahre nicht beachtet wurde. 15 Jahre später erkannte Hasenfratz [15], daß die Fixpunktwirkung die GWR erfüllt. Eine zweite formelle Lösung [11, 13] wurde unabhängig von der GWR ausgehend vom Overlap-Formalismus [48, 49] von Neuberger vorgeschlagen.

Beide Lösungen erfüllen die GWR mit

$$R = \frac{1}{2} \quad (7.13)$$

und zusammen mit ihrer γ_5 -Hermitizität

$$D^\dagger = \gamma_5 D \gamma_5, \quad (7.14)$$

kann die GWR in die einfache Form

$$D + D^\dagger = a D D^\dagger = a D^\dagger D \quad (7.15)$$

gebracht werden. Folglich kommutieren D und D^\dagger , d.h. D ist normal. Die Eigenwerte erfüllen demnach

$$\lambda + \bar{\lambda} = |\lambda|^2 \quad (7.16)$$

und liegen auf dem Kreis $\lambda = 1 - e^{i\varphi}$. Aus der γ_5 -Hermitizität folgt weiters für die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren \mathbf{v}_i von D

$$\begin{aligned} D \mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\ (\mathbf{v}_i^\dagger \gamma_5) D &= (\mathbf{v}_i^\dagger \gamma_5) \lambda_i^*. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die Eigenwerte kommen daher in konjugiert-komplexen Paaren λ, λ^* . Durch Multiplikation mit \mathbf{v}_j von rechts erhalten wir [50]

$$\mathbf{v}_i^\dagger \gamma_5 D \mathbf{v}_j = \lambda_i^* (\mathbf{v}_i^\dagger \gamma_5 \mathbf{v}_j) = \lambda_j (\mathbf{v}_i^\dagger \gamma_5 \mathbf{v}_j). \quad (7.18)$$

und für $\lambda_i^* \neq \lambda_j$ und $i = j$ folgt

$$\mathbf{v}_i^\dagger \gamma_5 \mathbf{v}_i = 0. \quad (7.19)$$

Demnach können nur die Eigenvektoren mit den reellen Eigenwerten 0 und 2 Eigenzustände von γ_5 sein.

Der Index des Dirac-Operators ist durch die Differenz der Anzahl der positiv (n_+) und negativ (n_-) chiralen NM gegeben:

$$\text{index}(A) \equiv n_- - n_+. \quad (7.20)$$

Das Atiyah-Singer-Index-Theorem der Kontinuumsstheorie [36] besagt,

$$Q_{Top} = \text{Index}(A) = n_- - n_+. \quad (7.21)$$

Darüberhinaus gilt in zwei Dimensionen entsprechend des *vanishing*-Theorems [51, 52, 53]

$$\begin{aligned} n_+ \neq 0 &\rightarrow n_- = 0, \\ n_- \neq 0 &\rightarrow n_+ = 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Wir definieren die topologische Ladung Q_{Top} des Gitter-Dirac-Operators [54] durch

$$Q(A) = \sum_x \text{tr}(\gamma_5 R D(x, x)). \quad (7.23)$$

Da der Index von $D' = 2 - D$ entgegengesetzt dem Index von D ist [55],

$$n'_+ - n'_- = n_- - n_+, \quad (7.24)$$

erhalten wir durch

$$\begin{aligned} Q_{Top} &= \frac{1}{2} \sum_x \text{tr}(\gamma_5 D) = -\frac{1}{2} \sum_x \text{tr}(\gamma_5 (2 - D)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_\lambda (2 - \lambda) (\mathbf{v}_\lambda, \gamma_5 \mathbf{v}_\lambda) \\ &= n_- - n_+ \equiv \text{Index}(D). \end{aligned} \quad (7.25)$$

das Atiyah-Singer-Index-Theorem auf dem Gitter.

Es ist zu betonen, daß die GWR nicht die Lokalität von D , das Fehlen der Doppler oder den korrekten Kontinuum-Limes garantiert.

7.3 Exakte chirale Symmetrie auf dem Gitter

Lüscher wies darauf hin [56], daß die GWR eine kontinuierliche Symmetrie der Fermionwirkung impliziert, welche als Gitterform der chiralen Symmetrie interpretiert werden kann. Die infinitesimale globale Transformation des Flavour-Singletts lautet

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \gamma_5 \left(1 - \frac{1}{2}aD\right) \psi, \\ \delta\bar{\psi} &= \bar{\psi} \left(1 - \frac{1}{2}aD\right) \gamma_5. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Aus (7.11) folgt die Invarianz der Wirkung,

$$\delta(\bar{\psi} D \psi) = 0. \quad (7.27)$$

Die entsprechende Flavour-Nichtsinglett-Transformation ist durch

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \tau\gamma_5 \left(1 - \frac{1}{2}aD\right) \psi, \\ \delta\bar{\psi} &= \bar{\psi} \left(1 - \frac{1}{2}aD\right) \gamma_5\tau.\end{aligned}\tag{7.28}$$

gegeben. Nun sieht es so aus, als hätten wir zuviel Symmetrie, da die Flavour-Singlett-Transformation anomal sein sollte.

Lüscher zeigte, daß das Integrationsmaß $d\bar{\psi}d\psi$ nicht invariant unter der Transformation (7.26) ist. Um die Anomalie zu berechnen, betrachten wir die Theorie in einem endlich Raum-Zeit-Volumen. Der nicht normierte Erwartungswert eines beliebigen Produkts \mathcal{O} von Fermionfeldern lautet

$$\langle\mathcal{O}\rangle_F = \int \prod_x d\bar{\psi}d\psi \mathcal{O} e^{-S_F}.\tag{7.29}$$

Durch die Substitution

$$\psi \rightarrow \psi + \epsilon\delta\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \epsilon\delta\bar{\psi}\tag{7.30}$$

und die Entwicklung bis zur ersten Ordnung in ϵ erhalten wir

$$\langle\delta\mathcal{O}\rangle_F = -a \operatorname{tr}\{\gamma_5 D\}\langle\mathcal{O}\rangle_F.\tag{7.31}$$

Aus der GWR folgt

$$a(z-D)\gamma_5(z-D) = z(2a-z)\gamma_5 - (1-az)\{(z-D)\gamma_5 + \gamma_5(z-D)\},\tag{7.32}$$

wobei z eine beliebige komplexe Zahl ist, welche nicht im Spektrum von D vorkommt. Nach der Multiplikation von rechts mit $(z-D)^{-1}$ und der Berechnung der Spur erhalten wir

$$-a \operatorname{tr}\{\gamma_5 D\} = z(2a-z) \operatorname{tr}\{\gamma_5(z-D)^{-1}\}.\tag{7.33}$$

Wir dividieren durch $z(2a-z)$ und integrieren über einen kleinen Kreis um den Ursprung, welcher keine Eigenwert des Diracoperators ungleich 0 enthält. Insbesondere projiziert

$$P_0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} (z-D)^{-1}\tag{7.34}$$

auf den Unterraum der Nullmoden von D . Somit gilt

$$-a \operatorname{tr}\{\gamma_5 D\} = 2 \operatorname{tr}\gamma_5 P_0 = 2N_f(n_L - n_R)\tag{7.35}$$

und aus (7.31) folgt die korrekte Ward-Identität der Flavour-Singlett-Transformation

$$\langle\delta\mathcal{O}\rangle_F = 2N_f(n_L - n_R)\langle\mathcal{O}\rangle_F.\tag{7.36}$$

Für die Flavour-Nichtsinglett-Transformation gilt

$$\langle \delta \mathcal{O} \rangle_F = -a \operatorname{tr} \{ \tau \gamma_5 D \} \langle \mathcal{O} \rangle_F. \quad (7.37)$$

Die Symmetrie ist wegen $\operatorname{tr} \{ \tau \gamma_5 D \} \propto \operatorname{tr} \{ \tau \} = 0$ nicht anomal.

Um die Felder, analog zum Kontinuum (7.2), in ihre chiralen Komponenten zerlegen zu können, ist es sinnvoll den Operator

$$\hat{\gamma}_5 = \gamma_5 (1 - aD) \quad (7.38)$$

einzuführen [57]. Es gilt

$$\gamma_5 D = -D \hat{\gamma}_5, \quad \hat{\gamma}_5^2 = 1. \quad (7.39)$$

Wir definieren die chiralen Projektoren

$$\hat{P}_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \hat{\gamma}_5). \quad (7.40)$$

Diese erfüllen die Beziehungen

$$D \hat{P}_+ = P_- D, \quad D \hat{P}_- = P_+ D \quad (7.41)$$

und erlauben die Zerlegung

$$D = P_+ D \hat{P}_- + P_- D \hat{P}_+. \quad (7.42)$$

Demnach lauten die chiralen Komponenten der Felder

$$\begin{aligned} \psi_L &= \hat{P}_- \psi, & \bar{\psi}_L &= \bar{\psi} P_+, \\ \psi_R &= \hat{P}_+ \psi, & \bar{\psi}_R &= \bar{\psi} P_- \end{aligned} \quad (7.43)$$

und analog zu (7.1) erhalten wir

$$\bar{\psi} D \psi = \bar{\psi}_L D \psi_L + \bar{\psi}_R D \psi_R. \quad (7.44)$$

7.4 Der Fixpunkt-Operator

Es wird erwartet, daß Gitterwirkungen, welche an kritischen Punkten die Kontinuumstheorie wiedergeben, Universalität erfüllen. Dies bedeutet, daß physikalische Voraussagen unabhängig von der mikroskopischen Struktur der Gitterwirkung, d.h. von der detaillierten Form der Wechselwirkung auf der Größe der *Cut-Off*-Skala, sind und der Kontinuum-Limes eindeutig ist. Allgemein wird angenommen, daß lokale Gitterwirkungen, für welche der Dirac-Operator in einem beliebigen Eichfeld U durch

$$\| D(x, y; U) \| \leq C e^{-\gamma|x-y|}, \quad \gamma > 0 \quad (7.45)$$

beschränkt ist, universal sind.

Herkömmliche Gitterwirkungen sind auf einige wenige Gittervariablen beschränkt (ultra-lokal). Sie haben Korrekturen der Ordnung $O(a^2)$ für Bosonen und der Ordnung $O(a)$ für Fermionen. Verbesserte Wirkungen haben kleinere Korrekturen, benötigen jedoch mehr Terme. Idealerweise haben sie keine Korrekturen zum führenden kritischen Verhalten. Solche Wirkungen werden als „perfekt“ bezeichnet, da sie auch bei endlichem Gitterabstand Kontinuumsphysik beschreiben. Mehr Terme komplizieren jedoch die Simulation und ein Kompromiß zwischen Effizienz und Perfektion muß gefunden werden.

Grundsätzlich gibt es zwei Methoden für die Verbesserung einer Gitterwirkung:

- Wilsons Renormierungsgruppe (RG) [58],
- Symanziks Ansatz, basierend auf Störungstheorie [59].

Die Fix-Punkt-Wirkung gründet auf Wilsons Ansatz, welcher auf der Tatsache beruht, daß ein kritisches System mit der Korrelationslänge $\xi = \infty$ kritisch bleibt, nachdem das ursprüngliche Raum-Zeit-Gitter mittels einer Block-Spin-Transformation (BST) auf ein gröberes Gitter abgebildet wurde.

7.4.1 Die Block-Spin-Transformation

Wir bezeichnen die Gitterwirkung durch

$$S(\bar{\psi}, \psi, A) = \beta S(A) + S_F(\bar{\psi}, \psi, A), \quad S_F = \bar{\psi} D(A) \psi, \quad (7.46)$$

wobei $S(A)$ die Wirkung des Eichfeldes kennzeichnet und $\beta = 1/e^2$ die Eichfeldkopplung ist. Die nicht-kompakten Eichfelder $A_\mu(x) \in \mathbb{R}$ leben auf den *links* $(x, x + \mu)$ zwischen den Gitterpunkten.

Die grundlegende Idee der BST ist, durch Ausintegration der lokalen Freiheitsgrade in der Zustandssumme, eine Theorie auf einem gröberen Gitter zu konstruieren, welche denselben physikalische Inhalt wie jene auf dem feinen Gitter hat. Wir betrachten weiters das Blocken von einem sogenannten feinen quadratischen Gitter mit den Gitterpunkten $x \in Z_N \times Z_N$ auf ein grobes Gitter mit dem Gitterabstand $a' = 2a$, welches aus 2×2 Blöcken des feinen Gitters aufgebaut ist. Diese Blöcke bilden die Gitterpunkte x' des groben Gitters.

Das dynamische Verhalten der neuen Blockvariablen $\bar{\psi}', \psi', A'$ ergibt sich durch ihre Ankopplung an die Feldvariablen des jeweiligen Blockes des feinen Gitters. Dies geschieht durch das Hinzufügen der Kopplunsterme $T(A, A')$ und $T(\bar{\psi}, \psi, \bar{\psi}', \psi')$ zur Gitterwirkung. Durch Ausintegrieren der Feldvariablen des feinen Gitters erhalten wir

$$e^{-\beta' S'(A') + S'_F(\bar{\psi}', \psi', A') + c} = \int D_f A D \psi D \bar{\psi} e^{-\beta(S(A) + T(A, A')) + S_F(\bar{\psi}, \psi, A) + T(\bar{\psi}, \psi, \bar{\psi}', \psi')}, \quad (7.47)$$

wobei die Wirkung auf der linken Seite von (7.68) nur mehr von den Feldvariablen des groben Gitters abhängt. Dabei ist c eine irrelevante Konstante und $D_f A$ das Maß des Eichfeldes einschließlich einer Eichfixierung.

Diese wird benötigt, da für nicht-kompakte Eichfelder, auf Grund der Eichinvarianz der Wirkung, das Pfadintegral (7.68) nicht wohl definiert wäre. Wir fixieren die Eichung in jedem Block des feinen Gitters in der sogenannten „feinen Eichung“, für welche

$$\forall x' : \quad A_0(x') = -A_0(x' + \hat{1}) = A_1(x') = -A_1(x' + \hat{0}) \quad (7.48)$$

gilt [60], und integrieren nur über Eichfeldkonfigurationen in dieser Eichung. Für jede Eichfeldkonfiguration existiert nur eine einzige Eichfeldkonfiguration in der feinen Eichung, welche aus dieser durch eine feine Eichtransformation hervorgeht. Diese Eichtransformationen lassen die BST-Kopplung $T(A, A')$ (7.49) invariant.

Bis darauf, daß T die Symmetrien des Modells respektieren soll und die Parameter der Kopplung geeignet justiert werden müssen um einen Fixpunkt (FP) zu erhalten, ist die Wahl der Kopplung weitestgehend beliebig. Verschiedene Kopplungen T führen zu verschiedenen FP.

Für die BST des Eichfeldes wählen wir eine lineare Übergangsfunktion. Das Eichfeld des groben Gitters $A'_\mu(x')$ koppelt dabei gleich stark an jene vier Wege der Länge $2a$, welche von den vier Gitterpunkten eines Blockes parallel zu $\hat{\mu}$ nach $x' + 2\hat{\mu}$ verlaufen. Die Kopplung ist durch

$$T(A, A') = \frac{1}{2} \sum_{x', \mu} (A'_\mu(x') - B'_\mu(x')) (\alpha_2 + \gamma_2 \Delta_\mu)^{-1} (A'_\mu(x') - B'_\mu(x')) \quad (7.49)$$

definiert, wobei

$$B_\mu(x') = \frac{\beta_2}{8} \sum_{x \in x'} (A_\mu(x) + A_\mu(x + \hat{\mu})) \quad (7.50)$$

der Durchschnitt der Eichfelder entlang dieser vier Wege ist und der Gitterdifferentialoperator zweiter Ordnung durch

$$\Delta_\mu B'_\nu(x') = \delta_{\mu\nu} (2B'_\mu(x') - B'_\mu(x' - 2\hat{\mu}) - B'_\mu(x' + 2\hat{\mu})) \quad (7.51)$$

definiert ist. Die Wirkung am groben Gitter ist nur für $\beta_2 = 2$ eichinvariant. Der Wert unterscheidet sich jedoch von jenem, der aus Dimensionsüberlegungen folgt [61]. Tatsächlich existiert für $\beta_2 = 2$ nur ein Quasi-Fixpunkt der BST.

Die Kopplung für die BST der Fermionen wurde aus [62, 63] übernommen:

$$T(\bar{\psi}, \psi, \bar{\psi}', \psi') = \frac{1}{a_2} \sum_{x', i} \left(\bar{\psi}'_i(x') - \frac{b_2}{4} \sum_{x \in x'} \bar{\psi}_i(x) \right) \left(\psi'_i(x') - \frac{b_2}{4} \sum_{x \in x'} \psi_i(x) \right), \quad (7.52)$$

wobei man nur für $b_2 = \sqrt{2}$ einen Fixpunkt erhält. Durch die Wahl $a_2 = 1/4$ erreicht man für freier Fermionen maximale Lokalität.

Für die Zustandssumme gilt

$$\begin{aligned} Z' &= \int D_f A' D\psi' D\bar{\psi}' e^{-S'(\bar{\psi}', \psi', A') + c} \\ &= \exp c \int D_f A D\psi D\bar{\psi} e^{-S(\bar{\psi}, \psi, A)} \propto Z. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Es wird daher erwartet, daß das Verhalten der Greensfunktion für große Distanzen und somit das Spektrum und andere Energieeigenschaften des Systems unverändert bleiben.

7.4.2 Die Fixpunkt-Wirkung

Die BST mittelt somit Fluktuationen über kurze Distanzen der Ordnung $O(a)$ heraus. Andererseits wird die Gittergröße um den Faktor 2 vergrößert. Da die Dimension durch die Gittergröße bestimmt wird, ist die dimensionslose Korrelationslänge, welche in Gittereinheiten gemessen wird, um den Faktor zwei reduziert:

$$\xi \rightarrow \frac{\xi}{2}. \quad (7.54)$$

Im allgemeinen enthält die transformierte Wirkung S' in (7.68) alle möglichen Wechselwirkungen, auch wenn die ursprüngliche Wirkung S eine einfache Form hatte. Es ist daher nützlich einen ausreichend allgemeinen Wechselwirkungsraum einzuführen, um Wirkungen, die aus einer BST hervorgehen, zu beschreiben. Wir definieren

$$S(\bar{\psi}, \psi, A) = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \theta_{\alpha}(\bar{\psi}, \psi, A), \quad (7.55)$$

wobei $\theta_{\alpha}(\bar{\psi}, \psi, A)$, $\alpha = 1, 2, \dots$, die verschiedenen Wechselwirkungsterme bezeichnet und K_{α} die entsprechenden dimensionslosen Kopplungen sind. Für die transformierte Wirkung $S'(\bar{\psi}, \psi, A)$ gilt ebenfalls

$$S'(\bar{\psi}, \psi, A) = \sum_{\alpha} K'_{\alpha} \theta_{\alpha}(\bar{\psi}, \psi, A). \quad (7.56)$$

Die BST induziert eine Bewegung im Kopplungsraum: $\{K_{\alpha}\} \rightarrow \{K'_{\alpha}\}$. Durch wiederholte Anwendung entsteht ein Fluß der Kopplungskonstanten

$$\{K_{\alpha}\} \rightarrow \{K'_{\alpha}\} \rightarrow \{K''_{\alpha}\} \rightarrow \dots, \quad (7.57)$$

während die Korrelationslänge mit jedem Schritt reduziert wird,

$$\xi \rightarrow \frac{\xi}{2} \rightarrow \frac{\xi}{4} \rightarrow \dots \quad (7.58)$$

Gewisse Punkte im Kopplungsraum reproduzieren sich unter einer BST,

$$\{K_\alpha^*\} \rightarrow \{K_\alpha^*\}. \quad (7.59)$$

Ein Punkt mit diesen Eigenschaften ist ein sogenannten Fixpunkt der BST und die entsprechende Wirkung wird FP-Wirkung genannt.

Glg. (7.57) und (7.58) implizieren, daß an einem FP die Korrelationslänge $\xi = 0$ oder $\xi = \infty$ ist. Wir sind nur an nicht-trivialen FP mit $\xi = \infty$ interessiert. Die Menge aller Punkte mit $\xi = \infty$ formt eine Hyperfläche im Kopplungsraum, welche „kritische Fläche“ genannt wird.

Wir betrachten den Fluß unter einer BST in der Nähe eines FP [64]. Für einen Punkt $\{K_\alpha\}$ mit $\Delta K_\alpha = K_\alpha - K_\alpha^*$ erhalten wir unter einer BST

$$\Delta K_\alpha \rightarrow \Delta K'_\alpha = K'_\alpha - K_\alpha^*. \quad (7.60)$$

Die Entwicklung von $\Delta K'_\alpha = \Delta K'_\alpha(\{K\})$ um $\{K^*\}$ ergibt

$$\Delta K'_\alpha = \Delta K'_\alpha(\{K^*\}) + \sum_\beta \frac{\partial}{\partial K_\beta} \Delta K'_\alpha(\{K\})|_{K=K^*} \Delta K_\beta + O((\Delta K)^2). \quad (7.61)$$

Da der erste Term auf der rechten Seite von (7.61) verschwindet, erhalten wir die linearisierte Gleichung

$$\Delta K'_\alpha = \sum_\beta T_{\alpha\beta} \Delta K_\beta \quad (7.62)$$

mit

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial K_\beta} \Delta K'_\alpha(\{K\})|_{K=K^*}. \quad (7.63)$$

Wir bezeichnen die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix T jeweils mit h_a und λ_a :

$$\sum_\beta T_{\alpha\beta} h_\beta^a = \lambda^a h_\alpha^a, \quad a = 1, 2, \dots \quad (7.64)$$

Die Eigenvektoren h^a definieren die Eigenoperatoren

$$h^a(\bar{\psi}, \psi, A) = \sum_a h_\alpha^a \theta_\alpha(\bar{\psi}, \psi, A). \quad (7.65)$$

Diese definieren eine neue Basis, in welcher die Wirkung entwickelt werden kann:

$$S(\bar{\psi}, \psi, A) = S_{FP}(\bar{\psi}, \psi, A) + \sum_a c^a h^a(\bar{\psi}, \psi, A). \quad (7.66)$$

Wiederholte Anwendung der BST ergibt

$$S(\bar{\psi}, \psi, A) \xrightarrow{BST^n} S_{FP}(\bar{\psi}, \psi, A) + \sum_a (\lambda^a)^n c^a h^a(\bar{\psi}, \psi, A). \quad (7.67)$$

Die Größe der Kopplungen $|c^a|$ nimmt für $|\lambda^a| > 1$ ($|\lambda^a| < 1$) zu (ab). Die jeweiligen Wechselwirkungen h^a werden relevant (irrelevant) genannt. Im Falle $|\lambda^a| = 1$ hängt die Entwicklung der Kopplung von Korrekturen höherer Ordnungen ab, welche in (7.61) vernachlässigt wurden.

Alle Eigenoperatoren (bis auf jenen von krankhaften Transformationen, wie Dezimierung), welche auf der Hyperfläche liegen, sind irrelevant. Alle relevanten Eigenvektoren führen aus der Hyperfläche heraus. Der Fluß der Kopplungskonstanten entlang dieser Richtung, dessen Endpunkt der FP ist, wird Renormierungstrajektorie (RT) genannt. Wirkungen entlang dieser RT haben keine Skalen-Verletzung, da alle irrelevanten Wechselwirkungen per Definition verschwinden. Sie sind „perfekte Wirkungen“ und reproduzieren Kontinuumsphysik auch bei endlichem Gitterabstand.

FP-Wirkungen, welche in numerischen MC-Simulationen mit endlicher Korrelationslänge verwendet werden, sind keine perfekten Wirkungen, da sie nur näherungsweise auf der RT liegen. Weiters kann für die Parametrisierung der Wirkung (7.55) nur eine endliche Anzahl von Termen verwendet werden, wodurch unter anderem die Wechselwirkungsdistanz beschränkt ist.

7.4.3 Die Sattelpunktnäherung

Hasenfratz und Niedermayer [14] machten die Beobachtung, daß sich die BST für asymptotisch freie Theorien drastisch vereinfachen läßt. Der FP liegt in diesem Fall bei $\beta \rightarrow \infty$, wodurch das Pfadintegral mittels einer Sattelpunktnäherung berechnet werden kann. In diesem Limes wird der Boltzmann-Faktor auf der rechten Seite von (7.68) vom Eichteil dominiert. Für ein gegebenes A' existiert eine einzige Konfiguration $A_{min}(A')$, welche den Ausdruck $S(A) + T(A, A')$ minimiert und das Integral über die Eichfelder sättigt:

$$e^{-\beta' S'(A') + S'_F(\bar{\psi}', \psi', A') + c} = e^{-\beta(S(A_{min}) + T(A_{min}, A')) + c_1} \times \int D\psi D\bar{\psi} e^{S_F(\bar{\psi}, \psi, A_{min}) + T(\bar{\psi}, \psi, \bar{\psi}', \psi') + O(1/\beta)}, \quad (7.68)$$

wobei die Konstante c_1 in c absorbiert werden kann. Da die Wirkung S_F und die Kopplung T quadratisch in den Fermionfeldern sind, ist das Ergebnis dieses Gaußschen Integrals, bis auf eine zusätzliche Konstante $c_2(A_{min})$, ebenfalls quadratisch in den Fermionfeldern. Durch Aufteilung in einen fermionischen Anteil und einen Eichfeldanteil erhalten wir:

$$\begin{aligned} \beta' S'(A') &= \beta(S(A_{min}) + T(A_{min}, A')) + c_2(A_{min}) + O(1/\beta), \\ S'(\bar{\psi}', \psi', A') &= \min_{\{\bar{\psi}, \psi\}} (S(\bar{\psi}, \psi, A_{min}) + T(\bar{\psi}, \psi, \bar{\psi}', \psi')) + O(1/\beta), \end{aligned} \quad (7.69)$$

wobei die Integration über die Grassmann-Variablen und die anschließende Identifikation der Koeffizienten der fermionischen Wirkung mit $\min_{\{\bar{\psi}, \psi\}}$ bezeichnet wurden. Die Konstante $c_2(A_{min})$ kann gegenüber dem führenden Term, welcher

proportional zu β ist, vernachlässigt werden. Dadurch entkoppeln die Fermionen vollständig vom Eichfeld und wir erhalten die Definitionsgleichungen für die FP-Wirkung:

$$\beta' S_{FP}(A') = \beta \min_{\{A_f\}} (S_{FP}(A) + T(A, A')), \quad (7.70)$$

$$S_{FP}(\bar{\psi}', \psi', A') = \min_{\{\bar{\psi}, \psi\}} (S_{FP}(\bar{\psi}, \psi, A_{min}) + T(\bar{\psi}, \psi, \bar{\psi}', \psi')). \quad (7.71)$$

Wir schreiben die Fermionwirkung in der allgemeinen Form

$$S_{FP}(\bar{\psi}, \psi, A) = \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) D_{x,y}(A) \psi(y), \quad (7.72)$$

wobei die Dirac-Indizes nicht angeführt werden. Die explizite Berechnung des Gaußschen Grassmannintegrals ergibt

$$D_{x',y'}(A') = \frac{1}{a_2} \delta_{x',y'} - \frac{b_2^2}{16a_2^2} \sum_{\substack{x \in x' \\ y \in y'}} (D_{x,y}(A_{min}) + \frac{b_2^2}{16a_2} B_{x,y})^{-1}, \quad (7.73)$$

wobei die Matrix $B_{x,y}$ durch

$$\sum_{x,y} \bar{\psi}(x) B_{x,y} \psi(y) = \sum_{x'} \sum_{x \in x'} \sum_{z \in x'} \bar{\psi}(x) \psi(z) \quad (7.74)$$

definiert ist. Für den Fall, daß D^{-1} existiert, ist (7.73) equivalent zu der etwas einfacheren Glg. [62, 65]

$$D_{x',y'}^{-1}(A') = a_2 \delta_{x',y'} + \frac{b_2^2}{16} \sum_{\substack{x \in x' \\ y \in y'}} D_{x,y}^{-1}(A_{min}), \quad (7.75)$$

welche durch Iteration gelöst werden kann.

Nun wird klar, warum die FP-Wirkung eine Lösung der GWR darstellt. Wir gehen von einem unendlich feinen Gitter aus, sodaß der Dirac-Operator beliebig nahe am chiral invarianten Kontinuum-Dirac-Operator liegt, und blocken unter wiederholter Anwendung von (7.75) auf ein gröberes Gitter. Da der zweite Term auf der rechten Seite von (7.75) anfangs chiral invariant ist, stammt der die chirale Symmetrie brechende Term R aus der GWR (7.12) ausschließlich von $a_2 \delta_{x',y'}$. Für jeden Iterationsschritt erhalten wir einen zusätzlichen Beitrag und ein lokaler Operator R baut sich auf.

7.4.4 Die FP-Wirkung für das Eichfeld

Die FP-Wirkung der Eichfeldes (7.70) kann analytisch gelöst werden [62, 63] und ist, bis auf eine Wellenfunktionsrenormierung, für unsere Wahl der Parameter in

zwei Dimensionen die ultra-lokale standard Plakettenwirkung

$$\begin{aligned} S_{FP}(A) &= \frac{1}{2} \sum_x F(x)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_x (A_1(x + \hat{0}) - A_1(x) - A_0(x + \hat{1}) - A_0(x))^2. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Genau genommen ist $S_{FP}(A)$ wegen der trivialen Reskalierung von β

$$\beta S_{FP}(A) \xrightarrow{BST} \frac{\beta'}{4} S_{FP}(A') \quad (7.77)$$

kein FP unter der BST, aber dennoch eine perfekte Wirkung. Für die Bestimmung der FP-Wirkung der Fermionen ist es daher notwendig, nach jedem Iterationsschritt die Renormierung $\beta' \rightarrow 4\beta$ durchzuführen, um die Konvergenz $\beta \rightarrow 0$ zu verhindern.

7.4.5 Die FP-Wirkung der Fermionen

Die FP-Wirkung der Fermionen wird numerisch durch Iteration von (7.71) ermittelt. Die Parametrisierung von $S'_F(\bar{\psi}', \psi', A)$ mit endlich vielen Kopplungskonstanten wurde von Lang und Pany [60, 66] konstruiert:

$$S_F(\bar{\psi}, \psi, A) = \bar{\psi} M_F(A) \psi = \sum_{i=0}^3 \sum_{x,f} \rho_i(f) \bar{\psi}(x) \sigma_i U(x, f) \psi(x + \delta f), \quad (7.78)$$

wobei $M_F(A)$ die parametrisierte Fermionmatrix ist, f eine geschlossene Schleife durch x oder einen Weg vom Gitterpunkt x zum Gitterpunkt $x + \delta f$ bezeichnet und $U(x, f)$ der Paralleltransporter entlang dieses Weges ist. Die Bedingungen $\sum_f \rho_1(f) (\delta f)_0 = 1$ und $\sum_f \rho_0(f) = 0$ garantieren, daß ρ normiert ist und S_F die korrekte Wirkung im naiven Kontinuum-Limes reproduziert. Es wurden jene Terme berücksichtigt, welche einen zentralen Gitterpunkt x mit jedem anderen Gitterpunkt $x + \delta f$ innerhalb eines 7×7 Gitters verbinden. Durch die Invarianz der Wirkung unter bestimmten Symmetrien reduziert sich die Anzahl der Terme, wodurch letztendlich 33 verschiedene geometrische Formen und 123 unabhängige Kopplungskonstanten berücksichtigt wurden.

Die FP-Wirkung wurde, ausgehend von der Wilson-Standardwirkung für das masselose Schwinger-Modell mit $\kappa = 1/4$, durch Iteration der folgenden Schritte ermittelt:

1. Erstellung einer Anzahl von Eichfeldkonfigurationen A' am groben 7×7 Gitter entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilung $e^{-\beta' S_{FP}(A')}$ und Berechnung der jeweiligen minimierenden Konfiguration $A_{min}(A')$.

2. Konstruktion der Fermionmatrizen am feinen Gitter anhand dieser $A_{min}(A')$ und Berechnung der Fermionmatrizen $M_{BST}(A_{min})$ am groben Gitter mittels BST für alle Eichfeldkonfigurationen.
3. Vergleich der resultierenden Fermionmatrizen mit den Fermionmatrizen $M_F(A')$ des groben Gitters. Ermittlung eines neuen Satzes von Kopplungen anhand der Minimierung von

$$\sum_{A'} \| M_{BST}(A_{min}(A')) - M_F(A') \|^2 \quad (7.79)$$

mit der Matrixnorm $\| M \|^2 \equiv \sum_{i,j} |M_{ij}|^2$.

Der Vorgang wird solange wiederholt, bis die Kopplungen stabil innerhalb der statistischen Fluktuationen bleiben.

7.5 Der Overlap-Operator

Vor kurzem wurde eine weitere Lösung der GWR (7.11) gefunden [13], welche nicht aus Renormierungsgruppenüberlegungen hervorgeht. Ausgehend vom Overlap-Formalismus [48, 49] schlug Neuberger eine Konstruktion masseloser Quarks am Gitter vor [11], welche sich als explizite Lösung der GWR mit $R = 1/2$ herausstellte. Er definiert

$$D_{Ov} = 1 + \frac{D_W(m)}{\sqrt{D_W^\dagger(m)D_W(m)}}, \quad (7.80)$$

wobei D_W der Dirac-Wilson-Operator mit einem negativen Massenterm $m \in (-1, 0)$ ist. Die Wahl des Massenparameters innerhalb dieses Intervalls ist beliebig, kann jedoch hinsichtlich der Skalenabhängigkeit des Spektrums optimiert werden. Da der Overlap-Operator (7.15) erfüllt, liegt dieses auf dem Kreis $|\mu - 1| = 1$ in der komplexen Ebene. Offensichtlich projiziert der Ausdruck

$$M' = \frac{M}{\sqrt{M^\dagger M}} \quad (7.81)$$

die Eigenwerte der Matrix M auf den Einheitskreis. Anhand der *Singular-Value-Decomposition* (SVD) kann gezeigt werden [67], daß dies für jede Matrix M gilt. Das einzige Hindernis stellen verschwindende Eigenwerten dar, da diese eine Division durch null verursachen. Im Falle des Dirac-Wilson-Operators erhalten wir für verschieden Massen m unterschiedliche Eigenwertverteilungen auf dem Kreis. Für $m = -1$ ergeben sich die geringsten Korrekturen zum Skalenverhalten [68].

Unter Verwendung der γ_5 -Hermizität des Wilson-Dirac-Operators,

$$D_W^\dagger = \gamma_5 D_W \gamma_5, \quad (7.82)$$

und der Definition des hermiteschen Wilson-Dirac-Operators

$$H_W = \gamma_5 D_W \quad (7.83)$$

kann der Overlap-Operator in die Form

$$D_{Ov} = 1 + \gamma_5 \epsilon(H_W) \quad (7.84)$$

gebracht werden, wobei $\epsilon(H_W)$ durch

$$\epsilon(H_W) = \frac{H_W}{\sqrt{H_W H_W}} \quad (7.85)$$

definiert ist. Da H_W hermitisch ist, kann die Matrix immer durch eine unitäre Transformation U diagonalisiert werden,

$$H_W = U \Lambda U^\dagger. \quad (7.86)$$

Für nicht-verschwindende Eigenwerte von H_W erhalten wir

$$\epsilon(H_W) = U \text{Sign}(\Lambda) U^\dagger, \quad (7.87)$$

wobei $\text{Sign}(\Lambda)$ eine diagonale Matrix mit den Vorzeichen der Eigenwerte von H_W ist.

Eine Möglichkeit für die Berechnung von (7.87) ist die Ermittlung aller Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix H_W . Dies ist mit derzeitigen Rechnern nur für 2-dimensionale Systeme mit einer Gittergröße bis zu $(24)^2$ möglich. Obwohl der Ansatz (7.87) numerisch einfach durchzuführen ist, kann er derzeit nicht auf 4-dimensionale Systeme angewandt werden.

Es wird erwartet [69], daß D_{Ov} automatisch $O(a)$ korrigiert ist. Die Lokalität des Overlap-Operators wurde in [70] bewiesen.

7.6 Der massive Fall

Der massive Overlap-Dirac-Operator ist durch

$$D(\mu) = (1 - \mu) \left[\frac{1}{2} D(0) + \frac{\mu}{1 - \mu} \right] \quad (7.88)$$

definiert [71], wobei für die Fermionmasse auf $0 \leq \mu \leq 1$ beschränkt ist. In der chiralen Eigenbasis von $(\gamma_5 D(0)/2)^2$ für masselose Fermionen nimmt $D(\mu)$ folgende Block-Diagonalform an [72]:

- Es gibt Blöcke der Form

$$\begin{pmatrix} (1 - \mu)\lambda^2 + \mu & (1 - \mu)\lambda\sqrt{1 - \lambda^2} \\ -(1 - \mu)\lambda\sqrt{1 - \lambda^2} & (1 - \mu)\lambda^2 + \mu \end{pmatrix} \quad (7.89)$$

mit $0 \leq \lambda^2 \leq 1$, wobei λ^2 die Eigenwerte von $(\gamma_5 D(0)/2)^2$ sind.

- Für jedes Eichfeld mit $Q_{Top} \neq 0$ gibt es zusätzlich $|Q_{Top}|$ NM mit der Chiralität $\text{sign}(Q_{Top})$ gepaart mit Eigenvektoren entgegengesetzter Chiralität und Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (7.90)$$

abhängig von $\text{sign}(Q_{Top})$.

Der externe Fermionpropagator ist durch

$$\tilde{D}^{-1}(\mu) = (1 - \mu)^{-1} (D^{-1}(\mu) - 1) \quad (7.91)$$

gegeben. Die Subtraktion des Kontakttermes macht den masselosen Propagator chiral:

$$\{\tilde{D}^{-1}(0), \gamma_5\} = 0. \quad (7.92)$$

Durch die Inversion der Block-Diagonalform von $D(\mu)$ erhalten wir für \tilde{D}^{-1} :

- Es gibt Blöcke der Form

$$\frac{1}{\lambda^2(1 - \mu^2) + \mu^2} \begin{pmatrix} \mu(1 - \lambda^2) & -\lambda\sqrt{1 - \lambda^2} \\ \lambda\sqrt{1 - \lambda^2} & \mu(1 - \lambda^2) \end{pmatrix}. \quad (7.93)$$

- Für topologisch nicht-triviale Eichfelder gibt es $|Q_{Top}|$ Blöcke der Form

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, \quad (7.94)$$

abhängig von $\text{sign}(Q_{Top})$.

Durch die Wahl der Gesamtnormierung in (7.88) gilt

$$\mu \langle b^\dagger | [\gamma_5 \tilde{D}^{-1}(\mu)]^2 | b \rangle = \langle b^\dagger | \tilde{D}^{-1}(\mu) | b \rangle, \quad \forall b \text{ mit } \gamma_5 | b \rangle = \pm | b \rangle \quad (7.95)$$

für alle Werte von μ . Der Fermionpropagator am Gitter steht mit dem Kontinuumspropagator durch

$$D_c^{-1}(\mu_c) = Z_\psi^{-1} \tilde{D}^{-1}(\mu) \quad \text{mit} \quad \mu_c = Z_m^{-1} \mu \quad (7.96)$$

in Beziehung, wobei Z_m und Z_ψ jeweils die Massen- und die Wellenfunktionsnormierung sind. Da (7.95) auch im Kontinuum gilt, erhalten wir $Z_\psi Z_m = 1$. Für den Overlap-Operator (7.84) mit dem hermiteschen Wilson-Operator $H_W(-m)$ finden wir durch den Vergleich mit freien Fermionen $\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{ov} / |2m|$ und somit

$$Z_\psi = Z_m^{-1} = |2m|. \quad (7.97)$$

Kapitel 8

Simulation

Wir führen eine MC-Simulation zur numerischen Berechnung des Massenspektrums des Zwei-Flavour-Schwingermodells für unterschiedliche Quarkmassen unter Verwendung des Overlap-Operators und des Fixpunkt-Operators durch.

8.1 MC-Simulation

Das grundlegende Ziel einer numerischen Simulation in der Gitter-QFT ist die Schätzung des Erwartungswertes einer Funktion $A(\phi)$ der Feldvariablen ϕ :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \int d[\phi] e^{-S(\phi)} A(\phi) \quad (8.1)$$

mit der Zustandssumme

$$Z = \int d[\phi] e^{-S(\phi)}. \quad (8.2)$$

Die Monte-Carlo-Methode berechnet $\langle A \rangle$ durch die Erzeugung von zufälligen Feldkonfigurationen ϕ_t mit der Wahrscheinlichkeit

$$P_S(\phi) = \frac{1}{Z} e^{-S(\phi)}, \quad (8.3)$$

genannt *importance sampling*, und der Messung des Stichprobenmittels

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A(\phi_t) \quad (8.4)$$

für eine Sequenz (ϕ_t) solcher Konfigurationen. Für $T \rightarrow \infty$ finden wir

$$\bar{A} = \langle A \rangle + O(1/\sqrt{T}). \quad (8.5)$$

Eine nützliche Technik zur Erzeugung dieser Sequenz von Konfigurationen mit der gewünschten Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Konstruktion eines Markov-Prozesses. Dieser ist eine stochastische Methode, welche eine neue Konfiguration

ϕ' aus der vorhergehenden Konfiguration ϕ mit der Wahrscheinlichkeit $P_M(\phi \rightarrow \phi')$ erzeugt. Für P_M gilt

$$\sum_{[\phi']} P_M(\phi' \rightarrow \phi) \equiv \int d[\phi] P_M(\phi' \rightarrow \phi) = 1. \quad (8.6)$$

Jeder Markov-Prozeß konvergiert gegen eine einzelne Fixpunktverteilung P_S , vorausgesetzt er ist ergodisch und erfüllt *detailed balance*:

$$P_S(\phi)P_M(\phi \rightarrow \phi') = P_S(\phi')P_M(\phi' \rightarrow \phi). \quad (8.7)$$

Es ist praktisch, den Markov-Prozeß in zwei Teilen zu konstruieren. Zuerst wählen wir eine neue Konfiguration ϕ' mit der Wahrscheinlichkeit $P_C(\phi \rightarrow \phi')$ und akzeptieren diese mit der Wahrscheinlichkeit $P_A(\phi')$ oder lehnen sie ab und behalten die alte Konfiguration. Eine mögliche Wahl für P_A , welche für jedes P_C *detailed balance* erfüllt, ist die Verallgemeinerung [73] des Metropolis-Algorithmus [74]:

$$P_A(\phi \rightarrow \phi') = \min \left(1, \frac{P_S(\phi')P_C(\phi' \rightarrow \phi)}{P_S(\phi)P_C(\phi \rightarrow \phi')} \right). \quad (8.8)$$

Im Metropolis-Algorithmus hat P_C eine gleichmäßige Verteilung. Im Falle einer reinen $U(1)$ -Gittereichtheorie werden, ausgehend von einer beliebigen Anfangskonfiguration, folgende Schritte wiederholt:

- Willkürliche (oder sequentielle) Wahl einer *link*-Variablen $U_\mu(n) = \exp(i\Phi_\mu(n))$ und deren Multiplikation mit $\exp(i\chi)$, wobei χ eine Zufallszahl zwischen $-\pi$ und π ist.
- Erzeugung einer Zufallszahl R im Intervall $[0, 1]$ und Akzeptanz der neuen Konfiguration, falls

$$R \leq \frac{e^{-S(\phi')}}{e^{-S(\phi)}}. \quad (8.9)$$

Für die vollständige Aktualisierung des Gitters ist eine Wiederholung pro Gitterplatz nötig.

Die bis jetzt diskutierte MC-Simulation kann nur für die Berechnung von c -Zahlen abhängigen Funktionalen verwendet werden. Für Systeme mit Grassmann-Feldern müssen die fermionischen Freiheitsgrade zuerst ausintegriert werden. Dies ist für Erwartungswerte von beliebigen Produkten von Grassmann-Variablen, wegen der quadratischen Form der Wirkung, immer möglich. Der Erwartungswert einer Observablen $A(\bar{\psi}, \psi, U)$ hat somit die Form

$$\begin{aligned} \langle A(\bar{\psi}, \psi, U) \rangle &= \frac{1}{Z} \int d[U, \psi, \bar{\psi}] A(\bar{\psi}, \psi, U) e^{-\beta S_G(U) - S_F(\bar{\psi}, \psi, U)} \\ &\equiv \frac{1}{Z} \int d[U] A'(U) e^{-\beta S_G(U)} \end{aligned} \quad (8.10)$$

mit

$$\begin{aligned} Z &= \int d[U, \psi, \bar{\psi}] e^{-\beta S_G(U) - S_F(\bar{\psi}, \psi, U)} \\ &\equiv \int d[U] e^{-\beta S_G(U)} \det D, \end{aligned} \quad (8.11)$$

wobei für den letzten Ausdruck (2.53) verwendet wurde und $A'(U)$ durch

$$A'(U) \equiv \int d[\bar{\psi}, \psi] A(\bar{\psi}, \psi, U) e^{-S_F(\bar{\psi}, \psi, U)} \quad (8.12)$$

definiert ist. An Hand von (2.61) und (2.53) und der Notation $[A(\bar{\psi}, \psi, U)]_f \equiv A'(U)$ erhalten wir [75]

$$\begin{aligned} [1]_f &= \det D, \\ [\bar{\psi}_x \psi_y]_f &= (D^{-1})_{yx} \det D, \\ [\bar{\psi}_x \psi_y \bar{\psi}_v \psi_w]_f &= (D_{yx}^{-1} D_{wv}^{-1} - D_{yv}^{-1} D_{wx}^{-1}) \det D. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Für zwei-dimensionale Systeme mit einer Gittergröße bis zu $(24)^2$ ist eine explizit Berechnung der Determinante und der invertierten Matrix möglich. Für die MC-Simulation werden unkorrelierte Eichfeldkonfigurationen der *quenched* Theorie, d.h. $\det D = 1$, erzeugt und die korrekte Determinante (für N_f Flavours $(\det D)^{N_f}$) in die Observablen und die Zustandssumme inkludiert.

8.2 Finite Size-Effekte und Critical Slowing Down

Jede Realisierung einer Markov-Kette ist durch eine Autokorrelationszeit charakterisiert, welche die statistische Abhängigkeit zeitlich aufeinanderfolgender Konfigurationen kontrolliert. Die *integrierte Autokorrelationszeit* ist durch

$$\tau_{int,A} \equiv \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_A(n)}{\Gamma_A(0)} \quad (8.14)$$

mit der Autokorrelation

$$\Gamma_A(n) \equiv \langle A_m A_{m+n} \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (8.15)$$

definiert. Dadurch ergibt sich für die Varianz von \bar{A} [32]

$$\sigma_{\bar{A}}^2 \simeq (\overline{A^2} - \bar{A}^2) \frac{2\tau_{int,A}}{N}, \quad (8.16)$$

Das zeigt, daß der statistische Fehler $\varepsilon_{\bar{A}} \equiv \sqrt{\sigma_{\bar{A}}^2}$ von korrelierten Messungen um den Faktor $\sqrt{2\tau_{int,A}}$ erhöht wird. Die Meßwerte von A sind nur jede $2\tau_{int,A}$ Iteration annähernd unkorreliert.

Dieses Verhalten wirkt sich auf Systeme mit großen Korrelationslängen ξ aus. Die Divergenz von ξ in der Nähe eines kritischen Punktes bedeutet, daß größere und größere Volumen von Gitterpunkten zusammenhängend aktualisiert werden müssen, um statistisch unabhängige Konfigurationen zu sampeln. In MC-Simulationen ist dies die Ursache für das dynamischen Skalengesetzes

$$\tau \propto \xi^z, \quad (8.17)$$

wobei der dynamische kritische Exponent z von der Update-Methode abhängt und für die meisten lokalen Update-Algorithmen den Wert 2 hat. Die Lösung für das katastrophale Ansteigen von τ sind verbesserte MC-Algorithmen, wie z.B. Multigrid- und Cluster-Algorithmen, welche kleinere dynamische kritische Exponenten besitzen.

In endlichen Systemen wird diese Divergenz unterdrückt, da die Korrelationslänge die Gittergröße L nicht überschreiten kann. Gleichzeitig treten jedoch *finite size*-Effekte auf, wodurch Singularitäten, die mit dem Phasenübergang in Verbindung stehen, verschoben und gerundet werden. Um Kontinuumsergebnisse zu erhalten, werden Messungen auf unterschiedlich großen Gitter durchgeführt und gegen $L \rightarrow \infty$ extrapoliert. Für eine massive skalare bosonische Quantenfeldtheorie leitete Lüscher eine Formel für die Differenz der Teilchenmasse im endlichen (m_L) und unendlichen (m_∞) Volumen her [76, 77]. Für das leichteste Teilchen des Spektrums in zwei Dimensionen erhielt er:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_L - m_\infty \\ &\propto -F(0) \frac{1}{m_\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi L_{eff}}} e^{-L_{eff}}, \quad L_{eff} \equiv L m_\infty. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Die Streuamplitude $F(\nu)$ hängt von der Variable $\nu = (E(\mathbf{p})E(\mathbf{q}) - \mathbf{p}\mathbf{q})/m_\infty$ ab, wobei \mathbf{p} und \mathbf{q} den Impuls der einlaufenden Teichen bezeichnet und $E(\mathbf{p})$ die relativistische Energie

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{m_\infty^2 + \mathbf{p}^2} \quad (8.19)$$

ist.

8.3 Observablen

Wir sind an der numerischen Berechnung des Massenspektrums des Zwei-Flavour-Schwingermodells für unterschiedliche Quarkmassen interessiert. Dieses wird aus dem zeitlichen Abfallverhalten der *connected*-Zweipunkt-Korrelationsfunktion

$$\langle A(t, p)A(0, p) \rangle_c \equiv \langle A(t, p)A(0, p) \rangle - \langle A(t, p) \rangle \langle A(0, p) \rangle \quad (8.20)$$

der entsprechenden Ströme und Dichten, welche in Kapitel 5.2 besprochen wurden, bestimmt. Die Masse des Isosingletts η und des Isotripletts π berechnen

wir anhand der Korrelationsfunktion des Isevektor-Stromes j_0^3 (5.19) und des Isoskalar-Stromes j_0^0 (5.24) für eine festen räumlichen Impuls

$$p = 2\pi k/L, \quad k = -L/2 + 1, \dots, L/2 \quad (8.21)$$

und der Gitter-Dispersionsrelation [78]

$$E = \cosh^{-1}(1 - \cos p + \cosh m). \quad (8.22)$$

Die korrespondierenden Impuls-projezierten Operatoren sind durch

$$\begin{aligned} A_\eta(t, p) &= \frac{1}{L} \sum_x e^{ipx} (\bar{u}_x \gamma_0 u_x + \bar{d}_x \gamma_0 d_x), \\ A_{\pi^3}(t, p) &= \frac{1}{L} \sum_x e^{ipx} (\bar{u}_x \gamma_0 u_x - \bar{d}_x \gamma_0 d_x). \end{aligned} \quad (8.23)$$

gegeben, wobei die vereinfachte Notation

$$\psi^{(1)}(x, t) \equiv u_x, \quad \psi^{(2)}(x, t) \equiv d_x. \quad (8.24)$$

verwendet wurde. Die Implementierung der restlichen Ströme und Dichten kann aus der Tabelle 8.1 entnommen werden. Für die Operatoren (8.23) ergeben sich die *connected*-Zweipunkt-Korrelationsfunktionen

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(t, p) A_\eta(0, p) \rangle_c &= 1/L^2 [2\langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle + 2\langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle - \\ &\quad 4\langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \rangle \langle \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle] \end{aligned} \quad (8.25)$$

und

$$\langle A_{\pi^3}(t, p) A_{\pi^3}(0, p) \rangle_c = 1/L^2 [2\langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle - 2\langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle], \quad (8.26)$$

wobei der Einfachheit halber die Summen und die exponentiellen Faktoren nicht explizit angeführt wurden. Um die MC-Simulation durchführen zu können, integrieren wir zuerst über die fermionischen Freiheitsgrade der Erwartungswerte und erhalten

$$\begin{aligned} \langle [A_\eta(t, p) A_\eta(0, p)]_f \rangle_c &= 1/L^2 [4\langle \text{tr}(\gamma_0 D_{xx}^{-1}) \text{tr}(\gamma_0 D_{yy}^{-1}) (\det D)^2 \rangle - \\ &\quad 2\langle \text{tr}(\gamma_0 D_{xy}^{-1} \gamma_0 D_{yx}^{-1}) (\det D)^2 \rangle - \\ &\quad 4\langle \text{tr}(\gamma_0 D_{xx}^{-1}) \det D \rangle \langle \text{tr}(\gamma_0 D_{yy}^{-1}) \det D \rangle] \end{aligned} \quad (8.27)$$

und

$$\langle [A_{\pi^3}(t, p) A_{\pi^3}(0, p)]_f \rangle_c = -2/L^2 \langle \text{tr}(\gamma_0 D_{xy}^{-1} \gamma_0 D_{yx}^{-1}) (\det D)^2 \rangle. \quad (8.28)$$

	Formale Definition	Implementierung
Isosinglett-Skalar	$s^0 = \bar{\psi}\psi$	$\bar{u}u$
Isosinglett-Vektor	$j_\mu^0 = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	$\bar{u}\gamma_\mu u$
Isotriplett-Skalar	$s^n = \bar{\psi}\tau^n\psi$	$\propto (\bar{u}d \pm \bar{d}u),$ $(\bar{u}u - \bar{d}d)$
Isotriplett-Vektor	$j_\mu^n = \bar{\psi}\tau^n\gamma_\mu\psi$	$\propto (\bar{u}\gamma_\mu d \pm \bar{d}\gamma_\mu u),$ $(\bar{u}\gamma_\mu u - \bar{d}\gamma_\mu d)$
Isosinglett-Pseudoskalar	$s_5^0 = \bar{\psi}\gamma_5\psi$	$\bar{u}\gamma_5 u$
Isosinglett-Axialvektor	$j_{5,\mu}^0 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \propto j_{1-\mu}^0$	$\propto \bar{u}\gamma_{1-\mu}u$
Isotriplett-Pseudoskalar	$s_5^n = \bar{\psi}\tau^n\gamma_5\psi$	$\propto (\bar{u}\gamma_5 d \pm \bar{d}\gamma_5 u),$ $(\bar{u}\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_5 d)$
Isotriplett-Axialvektor	$j_{5,\mu}^n = \bar{\psi}\tau^n\gamma_\mu\gamma_5\psi \propto j_{1-\mu}^n$	$\propto (\bar{u}\gamma_{1-\mu}d \pm \bar{d}\gamma_{1-\mu}u),$ $(\bar{u}\gamma_{1-\mu}u - \bar{d}\gamma_{1-\mu}d)$

Tabelle 8.1: Implementierung der verschiedenen Ströme und Dichten

Die expliziten Berechnungen können in Anhang A gefunden werden. Wegen der Translationsinvarianz der Operatoren in (8.27) und (8.28) gilt

$$\langle A(\Delta t)A(0) \rangle = \frac{1}{L} \left\langle \sum_t A(t + \Delta t)A(t) \right\rangle, \quad (8.29)$$

wodurch die Statistik erheblich verbessert wird.

Das Schwinger-Modell ist eine superrenormierbare Theorie. Die nackte Kopplung wird nicht renormiert und gleicht der physikalischen Kopplung e (4.46). Auf dem Gitter verwenden wir den üblichen Faktor β vor der Eichfeldwirkung in (4.36). Im naiven Kontinuum-Limes steht dieser mit der Kontinuumskopplung e durch

$$\beta = \frac{1}{e^2} \quad (8.30)$$

in Beziehung, was den Vergleich von den numerischen Meßdaten mit den analytischen Ergebnissen ermöglicht.

Kapitel 9

Ergebnisse

Wir führen eine MC-Simulation auf einem $(16)^2$ und einem $(24)^2$ Gitter für $\beta = 4, 6$ durch. Hierfür verwenden wir 5000 – 10000 unkorrelierte Eichfeldkonfigurationen, welche im *quenched setup* erzeugt wurden. Für jede Eichfeldkonfiguration erstellen wir zuerst die masselosen Dirac-Operatoren und fügen die Quarkmasse nachträglich mittels (7.88) hinzu.

Für den masselosen Fixpunkt-Operator verwenden wir die Konstruktion aus [60, 66], wobei die Kopplungen in [79] gefunden werden können. Für den masselosen Overlap-Operator erstellen wir zuerst anhand von (7.83) und (4.27) den hermiteschen Dirac-Wilson-Operator H_W mit dem negativen Massenterm $m = -1$ und dem Wilsonparameter $r = 1$. Die Berechnung von $\epsilon(H_W)$ (7.87) erfolgt mittels vollständiger Diagonalisierung der Matrix H_W .

Für jeden Dirac-Operator berechnen wir die Invertierte und die Determinante. Aus dem Abfallverhalten der *connected*-Zweipunkt-Korrelationsfunktion des Isektor-Stromes j_0^3 (8.28) und des Isoskalar-Stromes j_0^0 (8.27) für den festen räumlichen Impuls $p = 0$ ermitteln wir anhand der analytischen Ergebnisse (5.19) und (5.24) aus dem Verhältnis

$$\frac{\langle A(\Delta t + 1)A(0) \rangle}{\langle A(\Delta t)A(0) \rangle} = \frac{\cosh(M_{\text{eff}}(\Delta t + 1 - L/2))}{\cosh(M_{\text{eff}}(\Delta t - L/2))} \quad (9.1)$$

die effektiven Massen M_{eff} des Isosingletts η und des Isotripletts π für jedes Δt .

Die Ergebnisse der Korrelationsfunktionen für den Overlap-Dirac-Operator für $\beta = 6$ und $L = 16$ sind in Abb. 9.1 dargestellt. Die daraus berechneten effektiven Massen werden in Abb. 9.2 gezeigt. Wir erwarten, daß diese im Limes $\Delta t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen den gesuchten Wert der Mesonmassen konvergieren. Für $A = A^\dagger$ ist die Korrelationsfunktion positiv definit und die Konvergenz monoton fallend. Für kleine Δt tragen auch höher angeregte Zustände zu den Zweipunkt-Korrelationsfunktionen bei, wodurch M_{eff} stark abfällt, bevor es zu einem Plateau abflacht. Es wird angenommen, daß in dieser flachen Region nur Beiträge des niedrigsten Zustandes signifikant sind. Für eine endliche statistische Stichprobe ist dieses Plateau jedoch nicht eben, sondern die Daten zeigen

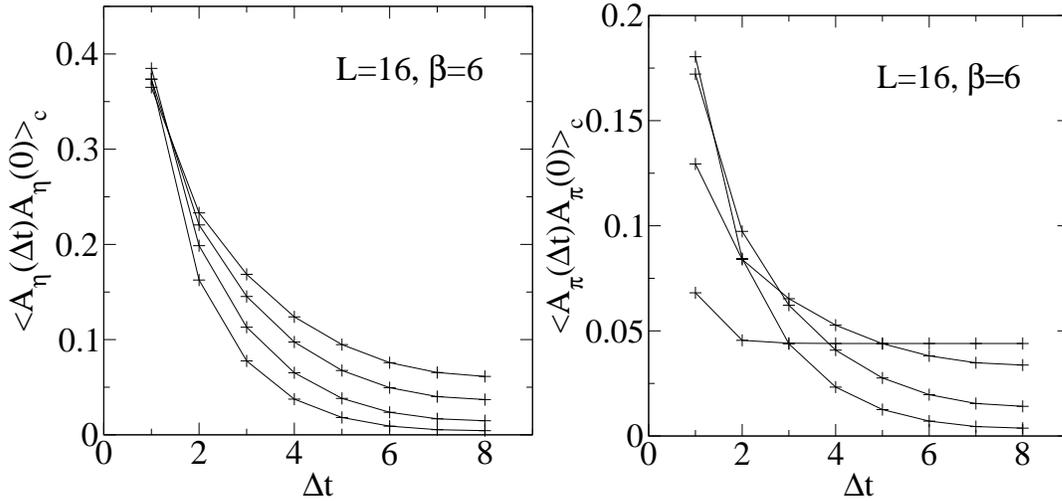


Abbildung 9.1: Ergebnisse der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen des Isosingletts η und des Isotripletts π für den Overlap-Dirac-Operator (Quarkmassen: $1.61\text{E-}3$, $6.70\text{E-}2$, 0.1443 , 0.2391). Größere Quarkmassen führen zu steiler abfallenden Kurven.

üblicherweise korrelierte Fluktuationen [80]. Die statistischen Fehler wachsen mit Δt an, außer für den Fall des Pions. Der Grund dafür ist [81], daß bei einem Zustand mit zwei Valenz-Quarklinien die Fehler durch das Quadrat des Korrelators, welcher vier Linien besitzt, kontrolliert werden. Der Zustand niedrigster Energie besteht somit aus zwei Pionen. Während das Signal mit $\exp(-M_{\text{eff}}\Delta t)$ abfällt, verringert sich der Fehler nur um $\exp(-M_{\pi,\text{eff}}\Delta t)$. Folglich wächst dieser für Zustände mit $M_{\text{eff}} > M_{\pi,\text{eff}}$ mit Δt an. Die einzige Ausnahme stellt das Pion dar, für welches das Signal und der Fehler dieselbe Zeitabhängigkeit besitzen. Wir erwarten somit nur im mittleren Bereich, in welchem die Meßwerte im wesentlichen unabhängig von Δt sind, vertrauenswürdige Ergebnisse.

Die in Abb. 9.2 dargestellten Resultate der effektiven Massen für das Isosinglett zeigen im Bereich $2 \leq \Delta t \leq 5$ ein konstantes Plateau. Für $\Delta t > 5$ führen die starken Fluktuationen zu statistischen Fehlern. Die Daten für das Pion nehmen für $\Delta t > 3$ einigermaßen konstante Werte an. Die Ergebnisse für das Isosinglett für den Overlap-Dirac-Operator bei $\beta = 4$ werden in Abb. 9.3 gezeigt. Für kleine β nehmen die Fluktuationen zu, wodurch die Ergebnisse für große Δt stark abweichen. Speziell für kleine Quarkmassen ist kein konstantes Plateau zu erkennen. In diesem Fall werden für die Bestimmung der effektiven Massen nur die tiefgelegenen Werte vor dem neuerlichen Anstieg der Kurve verwendet.

Für jede Kurve bestimmen wir den Mittelwert M aller Punkte eines Plateaus. Der statistische Fehler wird anhand der Jackknife-Methode berechnet. Hierfür unterteilen wir die Gesamtzahl der 5000 – 10000 Konfigurationen in $n = 10$ Untermengen und berechnen unter Nichtberücksichtigung der Untermenge i die n

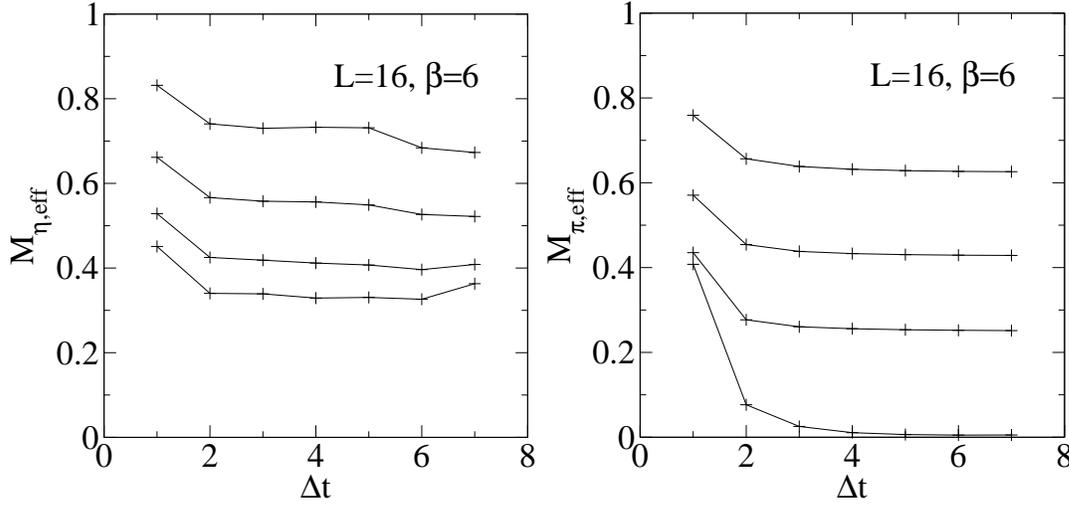


Abbildung 9.2: Ergebnisse der effektiven Massen des Isosingletts η und des Isotripletts π für den Overlap-Dirac-Operator (Quarkmassen: 1.61E-3, 6.70E-2, 0.1443, 0.2391). Größere Quarkmassen führen zu höher liegenden Kurven.

Mittelwerte M_i der jeweiligen restlichen Untermengen $n \neq i$. Die Schätzfunktion für die Varianz von M ist dann durch

$$\sigma_M^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - M)^2. \quad (9.2)$$

gegeben.

Die numerischen Ergebnisse für den Overlap-Dirac-Operator für $L = 16, 24$ und $\beta = 4, 6$ werden in Abb. 9.4 gezeigt. Die Resultate für den Fixpunkt-Operator für $L = 16, 24$ und $\beta = 6$ sind in Abb. 9.5 dargestellt. In jedem Diagramm fassen wir die Meßwerte des Isosingletts und des Isotripletts zusammen und vergleichen sie mit den analytischen Ergebnissen der semiklassischen Näherung (6.15) und Smilgas Formel (6.9).

Wir beobachten, daß die Daten insbesondere für höhere Quarkmassen gut durch die semiklassischen Näherung (6.15) beschrieben werden. Für kleinere Quarkmassen erkennen wir vor allem für kleine Gittergrößen eine starke und anscheinend systematische Abweichung, welche wir auf *finite size* Effekte zurückführen. Diese treten für Werte der Pionmasse unterhalb von $M_\pi \sqrt{\beta} < 0.3$ auf.

Für den Fixpunkt-Operator erhalten wir für kleine m nur bei großen Eichkopplungen $\beta > 4$ vernünftige Ergebnisse. In diesem Fall ist das Spektrum annähernd kreisförmig. Für kleine β verursacht die zu große Streuung der kleinen Eigenwerte, welche in der Größenordnung der Fermionmasse liegt, störende Fluktuationen. Die Dispersion σ der Eigenwerte um den Kreis folgt dem Gesetz [82]

$$\sigma \propto 1/\beta^{2.41}, \quad (9.3)$$

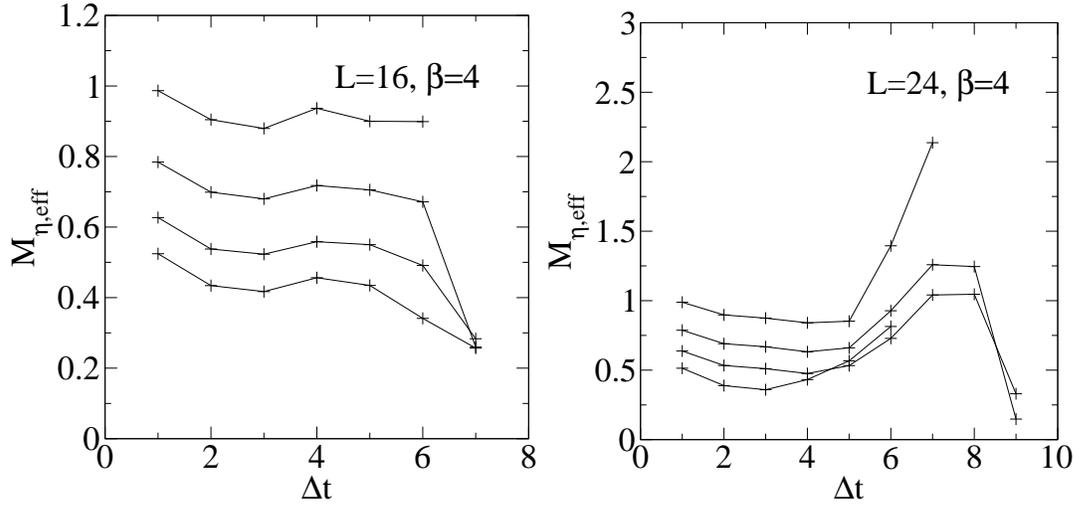


Abbildung 9.3: Ergebnisse der effektiven Massen des Isosingletts η für den Overlap-Dirac-Operator für $\beta = 4$ (Quarkmassen: 1.97E-3, 8.21E-2, 0.1767, 0.2928). Größere Quarkmassen führen zu höher liegenden Kurven.

was zu zufälligen Polen in den Propagatoren führt.

Die Masse des Singletts M_η nähert sich bei verschwindender Quarkmasse dem korrekten Wert für $m = 0$ an. Die Meßdaten werden durch die semiklassische Näherung (6.16) gut beschrieben. Für kleine m werden die Quantenfluktuationen stärker und die numerischen Ergebnisse weichen von der semiklassischen Kurve ab. Dieses Verhalten bei kleinen m kann durch ein Potenz-Gesetz gefittet werden, was für Ergebnisse des Modells mit *staggered*-Fermionen in [83] durchgeführt wurde.

Im Großen und Ganzen werden die Ergebnisse für die Singlett-Masse und die Triplet-Masse gut durch die semiklassische Näherung beschrieben. Für kleine Fermionmassen scheint es wichtig zu sein, daß die Eigenwerte des Dirac-Operators sehr nahe am Einheitskreis liegen. Diesbezüglich liefert der Overlap-Dirac-Operator gute Ergebnisse. Der sonst qualitativ gute Fixpunkt-Operator zeigt vor allem bei kleinen β schlechte Resultate. Aufgrund der verfälschten Pole in den Propagatoren, begrenzt die Breite der Eigenwertverteilung um null die praktische Anwendbarkeit für kleine Quarkmassen.

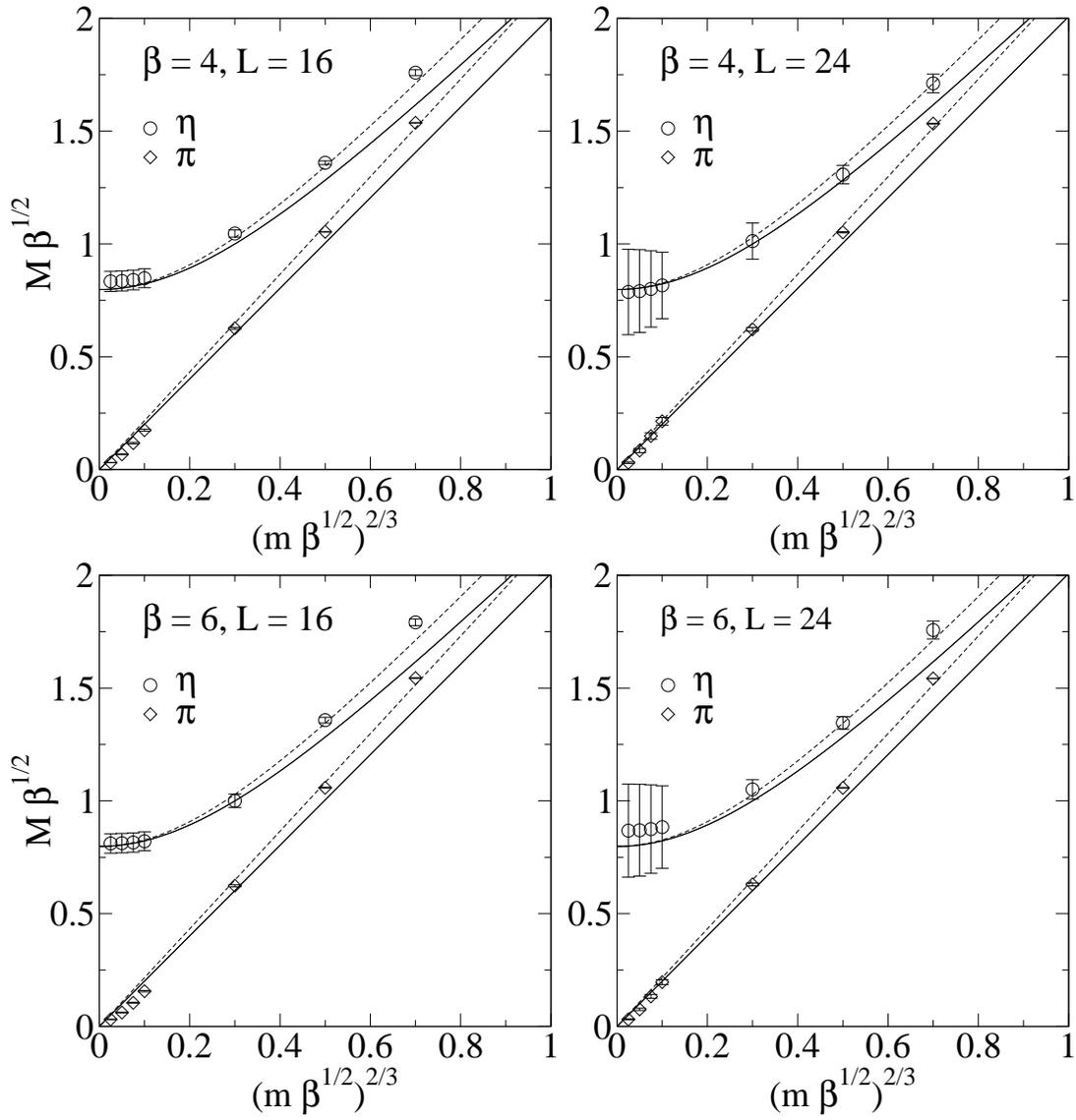


Abbildung 9.4: Ergebnisse für den Overlap-Operator bei $\beta = 4, 6, L = 16, 24$. Symbole: Monte Carlo Daten. Volle Linie: Smilgas Formel (6.9). Gestrichelte Linie: semi-klassische Formel (6.15).

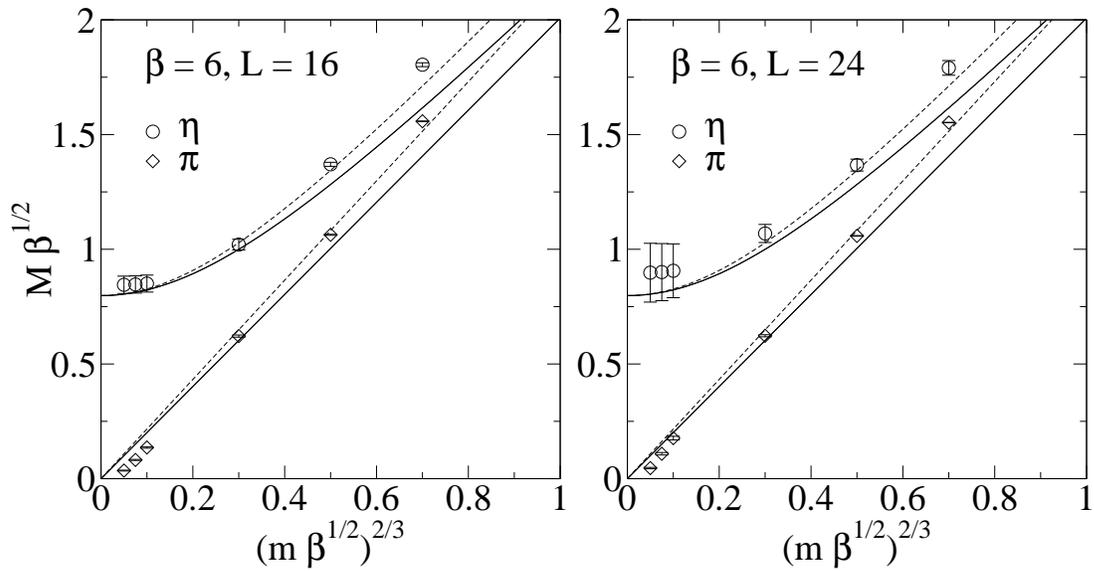


Abbildung 9.5: Ergebnisse für den Fixpunkt-Operator bei $\beta = 6, L = 16, 24$. Symbole: Monte Carlo Daten. Volle Linie: Smilgas Formel (6.9). Gestrichelte Linie: semi-klassische Formel (6.15).

Anhang A

Propagatoren

Die *connected*-Zweipunkt-Korrelationsfunktionen (8.20) der Operatoren (8.23) sind durch

$$\begin{aligned}
\langle A_\eta(t, p) A_\eta(0, p) \rangle_c &= 1/L^2 [\langle (\bar{u}_x \gamma_0 u_x + \bar{d}_x \gamma_0 d_x) (\bar{u}_y \gamma_0 u_y + \bar{d}_y \gamma_0 d_y) \rangle - \\
&\quad \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x + \bar{d}_x \gamma_0 d_x \rangle \langle \bar{u}_y \gamma_0 u_y + \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle] \\
&= 1/L^2 [\langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle + \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle + \\
&\quad \langle \bar{d}_x \gamma_0 d_x \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle + \langle \bar{d}_x \gamma_0 d_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle - \\
&\quad 4 \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \rangle \langle \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle] \\
&= 1/L^2 [2 \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle + 2 \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle - \\
&\quad 4 \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \rangle \langle \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle] \tag{A.1}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle A_{\pi^3}(t, p) A_{\pi^3}(0, p) \rangle_c &= 1/L^2 [\langle (\bar{u}_x \gamma_0 u_x - \bar{d}_x \gamma_0 d_x) (\bar{u}_y \gamma_0 u_y - \bar{d}_y \gamma_0 d_y) \rangle - \\
&\quad \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x - \bar{d}_x \gamma_0 d_x \rangle \langle \bar{u}_y \gamma_0 u_y - \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle] \\
&= 1/L^2 [\langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle - \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle - \\
&\quad \langle \bar{d}_x \gamma_0 d_x \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle + \langle \bar{d}_x \gamma_0 d_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle] \\
&= 1/L^2 [2 \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{u}_y \gamma_0 u_y \rangle - 2 \langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \rangle] \tag{A.2}
\end{aligned}$$

gegeben, wobei wegen der Flavoursymmetrie

$$\langle \bar{u}_x \gamma_0 u_x \rangle = \langle \bar{d}_x \gamma_0 d_x \rangle \tag{A.3}$$

gilt und die Summen und die exponentiellen Faktoren

$$\bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y = \sum_{x, y} e^{ip(x+y)} \bar{u}_x \gamma_0 u_x \bar{d}_y \gamma_0 d_y \tag{A.4}$$

nicht explizit angeführt wurden. Anhand der Integrationsregeln (8.13) integrieren wir die einzelnen Beiträge über ihre fermionischen Freiheitsgrade und erhalten

$$\begin{aligned}
 [\bar{u}_x \sigma_1 u_x \bar{u}_y \sigma_1 u_y]_f &= \sigma_{1,ij} \sigma_{1,kl} [\bar{u}_{xi} u_{xj} \bar{u}_{yk} u_{yl}]_f \\
 &= \sigma_{1,ij} \sigma_{1,kl} (D_{xj,xi}^{-1} D_{yl,yk}^{-1} - D_{xj,yk}^{-1} D_{yl,xi}^{-1}) (\text{Det } D)^2 \\
 &= \delta_{mi} (\sigma_{1,mj} D_{xj,xi}^{-1}) \delta_{nk} (\sigma_{1,nl} D_{xl,xk}^{-1}) (\text{Det } D)^2 - \\
 &\quad \delta_{oi} (\sigma_{1,oj} D_{xj,yk}^{-1} \sigma_{1,kl} D_{yl,xi}^{-1}) (\text{Det } D)^2 \\
 &= \text{tr}(\sigma_1 D_{xx}^{-1}) \text{tr}(\sigma_1 D_{yy}^{-1}) (\text{Det } D)^2 - \\
 &\quad \text{tr}(\sigma_1 D_{xy}^{-1} \sigma_1 D_{yx}^{-1}) (\text{Det } D)^2, \\
 [\bar{u}_x \sigma_1 u_x \bar{d}_y \sigma_1 d_y]_f &= \sigma_{1,ij} \sigma_{1,kl} [\bar{u}_{xi} u_{xj} \bar{d}_{yk} d_{yl}]_f \\
 &= \sigma_{1,ij} \sigma_{1,kl} (D_{xj,xi}^{-1} D_{yl,yk}^{-1}) (\text{Det } D)^2 \\
 &= \text{tr}(\sigma_1 D_{xx}^{-1}) \text{tr}(\sigma_1 D_{yy}^{-1}) (\text{Det } D)^2
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

und

$$\begin{aligned}
 [\bar{u}_x \sigma_1 u_x]_f &= \sigma_{1,ij} [\bar{u}_{xi} u_{xj}]_f \\
 &= \sigma_{1,ij} (D_{xj,xi}^{-1}) \text{Det } D \\
 &= \text{tr}(\sigma_1 D_{xx}^{-1}) \text{Det } D,
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

wobei i, j, k, l, m, n und o Dirac-Indizes bezeichnen und $\gamma_0 = \sigma_1$ gilt. Das Einsetzen von (A.5) und (A.6) in (A.1) und (A.2) ergibt

$$\begin{aligned}
 \langle [A_\eta(t, p) A_\eta(0, p)]_f \rangle_c &= 1/L^2 [4 \langle \text{tr}(\sigma_1 D_{xx}^{-1}) \text{tr}(\sigma_1 D_{yy}^{-1}) (\det D)^2 \rangle - \\
 &\quad 2 \langle \text{tr}(\sigma_1 D_{xy}^{-1} \sigma_1 D_{yx}^{-1}) (\det D)^2 \rangle - \\
 &\quad 4 \langle \text{tr}(\sigma_1 D_{xx}^{-1}) \det D \rangle \langle \text{tr}(\sigma_1 D_{yy}^{-1}) \det D \rangle]
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

und

$$\langle [A_{\pi^3}(t, p) A_{\pi^3}(0, p)]_f \rangle_c = -2/L^2 \langle \text{tr}(\sigma_1 D_{xy}^{-1} \sigma_1 D_{yx}^{-1}) (\det D)^2 \rangle. \tag{A.8}$$

Anhang B

Danksagung

Ich möchte meinem Betreuer Prof. Dr. Christian B. Lang für seine Unterstützung und geduldige Aufsicht während dieser Arbeit danken. Weiters bedanke ich mich bei Johannes Steiner, Bruno Coupier, Michaela Oswald und Barbara Jäger für hilfreiche Diskussionen, sowie Timo Thonhauser für seine zahlreichen Hilfestellungen bei Computer-spezifischen Fragen. Abschließend sei noch meinen Eltern und Großeltern für ihre Unterstützung gedankt, wodurch diese Arbeit erst möglich wurde.

Abbildungsverzeichnis

9.1	Ergebnisse der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen des Isosingletts η und des Isotripletts π für den Overlap-Dirac-Operator (Quarkmassen: 1.61E-3, 6.70E-2, 0.1443, 0.2391). Größere Quarkmassen führen zu steiler abfallenden Kurven.	64
9.2	Ergebnisse der effektiven Massen des Isosingletts η und des Isotripletts π für den Overlap-Dirac-Operator (Quarkmassen: 1.61E-3, 6.70E-2, 0.1443, 0.2391). Größere Quarkmassen führen zu höher liegenden Kurven.	65
9.3	Ergebnisse der effektiven Massen des Isosingletts η für den Overlap-Dirac-Operator für $\beta = 4$ (Quarkmassen: 1.97E-3, 8.21E-2, 0.1767, 0.2928). Größere Quarkmassen führen zu höher liegenden Kurven.	66
9.4	Ergebnisse für den Overlap-Operator bei $\beta = 4, 6$, $L = 16, 24$. Symbole: Monte Carlo Daten. Volle Linie: Smilgas Formel (6.9). Gestrichelte Linie: semiklassische Formel (6.15).	67
9.5	Ergebnisse für den Fixpunkt-Operator bei $\beta = 6$, $L = 16, 24$. Symbole: Monte Carlo Daten. Volle Linie: Smilgas Formel (6.9). Gestrichelte Linie: semiklassische Formel (6.15).	68

Literaturverzeichnis

- [1] K. G. Wilson. *Phys. Rev.* **D10** (1974), 2445
- [2] J. Schwinger. *Phys. Rev.* **128** (1962), 2425
- [3] S. Coleman, R. Jackiw and L. Susskind. *Ann. Phys.* **93** (1975), 267
- [4] C. Gattringer and E. Seiler. *Ann. Phys.* **233** (1994), 97
- [5] A. Casher, J. Kogut and L. Susskind. *Phys. Rev.* **D10** (1974), 732
- [6] S. L. Adler and W. A. Bardeen. *Phys. Rev.* **182** (1969), 1517
- [7] S. Coleman. *Ann. Phys.* **101** (1976), 239
- [8] A. V. Smilga. *Phys. Rev.* **D55** (1997), 443
- [9] C. Gattringer. *Annals Phys.* **250** (1996), 389
- [10] P. Hasenfratz. *Nucl. Phys.* **B525** (1998), 401
- [11] H. Neuberger. *Phys. Lett.* **B417** (1998), 141
- [12] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson. *Phys. Rev.* **D25** (1982), 2649
- [13] H. Neuberger. *Phys. Lett.* **B427** (1998), 353
- [14] P. Hasenfratz and F. Niedermayer. *Nucl. Phys.* **B414** (1994), 785
- [15] P. Hasenfratz. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **63** (1998), 53
- [16] M. Peskin and D. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, Reading, USA, 1995)
- [17] M. S. Swanson. *Path integrals and quantum processes* (Academic Press, Boston, USA, 1992)
- [18] J. Schwinger. *Phys. Rev.* **115** (1959), 721
- [19] G. Wick. *Phys. Rev.* **96** (1954), 1124

- [20] K. Osterwalder and R. Schrader. *Commun. Math. Phys.* **42** (1975), 281
- [21] F. Berezin. *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, USA, 1966)
- [22] J. H. Loewenstein and J. A. Swieca. *Ann. Phys.* **68** (1971), 172
- [23] L. V. Belvedere, K. D. Rothe, B. Schroer and J. A. Swieca. *Nucl. Phys.* **B153** (1979), 112
- [24] B. E. Baaquie. *J. Phys.* **G8** (1982), 1621
- [25] K. Fujikawa. *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979), 1195
- [26] B. E. Baaquie. *Phys. Rev.* **D27** (1983), 962
- [27] H. J. Rothe. *Lattice gauge theories: An Introduction* (World Scientific, Singapore, Singapore, 1992)
- [28] H. B. Nielsen and M. Ninomiya. *Nucl. Phys.* **B185** (1981), 20
- [29] H. B. Nielsen and M. Ninomiya. *Nucl. Phys.* **B193** (1981), 173
- [30] J. Curtis G. Callan. *Phys. Rev.* **D2** (1970), 1541
- [31] K. Symanzik. *Commun. Math. Phys.* **18** (1970), 227
- [32] I. Montvay and G. Muenster. *Quantum fields on a lattice* (Univ. Pr., Cambridge, UK, 1994)
- [33] H. Joos. *Helv. Phys. Acta* **63** (1990), 670
- [34] H. Joos and S. I. Azakov. *Helv. Phys. Acta* **67** (1994), 723
- [35] H. Dilger. *Nucl. Phys.* **B434** (1995), 321
- [36] M. F. Atiyah and I. M. Singer. *Annals Math.* **87** (1968), 484
- [37] C. Jayewardena. *Helv. Phys. Acta* **61** (1988), 636
- [38] G. Segre and W. I. Weisberger. *Phys. Rev.* **D10** (1974), 1767
- [39] A. Abada and R. E. Shrock. *Phys. Lett.* **B267** (1991), 282
- [40] A. V. Smilga. *Phys. Lett.* **B278** (1992), 371
- [41] J. Froehlich and E. Seiler. *Helv. Phys. Acta* **49** (1976), 889
- [42] C. Adam. *Annals Phys.* **259** (1997), 1

- [43] J. Froehlich. *Commun. Math. Phys.* **47** (1976), 233
- [44] A. B. Zamolodchikov. *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995), 1125
- [45] N. D. Mermin and H. Wagner. *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966), 1133
- [46] S. Coleman. *Commun. Math. Phys.* **31** (1973), 259
- [47] D. Friedan. *Commun. Math. Phys.* **85** (1982), 481
- [48] R. Narayanan and H. Neuberger. *Phys. Lett.* **B302** (1993), 62
- [49] R. Narayanan and H. Neuberger. *Nucl. Phys.* **B443** (1995), 305
- [50] S. Itoh, Y. Iwasaki and T. Yoshie. *Phys. Rev.* **D36** (1987), 527
- [51] M. M. Ansourian. *Phys. Lett.* **B70** (1977), 301
- [52] N. K. Nielsen and B. Schroer. *Nucl. Phys.* **B127** (1977), 493
- [53] J. Kiskis. *Phys. Rev.* **D15** (1977), 2329
- [54] P. Hasenfratz, V. Laliena and F. Niedermayer. *Phys. Lett.* **B427** (1998), 125
- [55] T.-W. Chiu. *Phys. Rev.* **D58** (1998), 074511
- [56] M. Luescher. *Phys. Lett.* **B428** (1998), 342
- [57] M. Luescher. *Nucl. Phys.* **B538** (1999), 515
- [58] K. Wilson New York, Usa: Plenum (1980) 438 P. (Nato Advanced Study Institutes Series: Series B, Physics, 59)
- [59] K. Symanzik. *Nucl. Phys.* **B226** (1983), 187
- [60] C. B. Lang and T. K. Pany. *Nucl. Phys.* **B513** (1998), 645
- [61] C. D. Castro and G. Jona-Lasinio In *Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol.6*, London 1976, 507-558
- [62] W. Bietenholz and U. J. Wiese. *Nucl. Phys.* **B464** (1996), 319
- [63] W. Bietenholz and U. J. Wiese. *Phys. Lett.* **B378** (1996), 222
- [64] F. J. Wegener. *Phys. Rev.* **B5** (1972), 4529
- [65] T. DeGrand, A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, P. Kunszt and F. Niedermayer. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **53** (1997), 942
- [66] C. B. Lang and T. K. Pany. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **63** (1998), 898

- [67] G. Golub and C. van Loan. *Matrix computations* (The Johns Hopkins University Press, Baltimore, USA, 1996)
- [68] F. Farchioni, I. Hip and C. B. Lang. *Phys. Lett.* **B443** (1998), 214
- [69] Y. Kikukawa, R. Narayanan and H. Neuberger. *Phys. Lett.* **B399** (1997), 105
- [70] P. Hernandez, K. Jansen and M. Luescher. *Nucl. Phys.* **B552** (1999), 363
- [71] R. G. Edwards, U. M. Heller and R. Narayanan. *Phys. Rev.* **D59** (1999), 094510
- [72] R. G. Edwards, U. M. Heller and R. Narayanan. *Nucl. Phys.* **B540** (1999), 457
- [73] R. T. Scalettar, D. J. Scalapino and R. L. Sugar. *Phys. Rev.* **B34** (1986), 7911
- [74] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller and E. Teller. *J. Chem. Phys.* **21** (1953), 1087
- [75] C. B. Lang and H. Nicolai. *Nucl. Phys.* **B200** (1982), 135
- [76] M. Luescher Lecture given at Cargese Summer Inst., Cargese, France, Sep 1-15, 1983
- [77] M. Luescher. *Commun. Math. Phys.* **104** (1986), 177
- [78] C. R. Gatttringer, I. Hip and C. B. Lang. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **30** (1993), 875
- [79] WWW URL <http://physik.kfunigraz.ac.at/~cbl/cbl-pa-couplings.html>
- [80] S. Aoki *et al.* *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **47** (1996), 354
- [81] G. P. Lepage Invited lectures given at TASI'89 Summer School, Boulder, CO, Jun 4-30, 1989
- [82] F. Farchioni, I. Hip, C. B. Lang and M. Wohlgenannt. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **73** (1999), 939
- [83] C. Gutsfeld, H. A. Kastrup, K. Stergios and J. Westphalen. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **63** (1998), 266