

*Berechnung hadronischer
Übergangsamplituden in der
Charm-Physik*

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
M.Sc. Christoph Klein
geboren am 13.08.1983 in Siegen

eingereicht bei der
Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen

Siegen
Juli 2011

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. Thomas Mannel
Prof. Dr. Alexander Khodjamirian
Datum der mündlichen Prüfung: 23. September 2011
gedruckt auf alterungsbeständigem holz-und säurefreiem Papier

Berechnung hadronischer Übergangsamplituden in der Charm-Physik

Zusammenfassung

Übergänge von Hadronen mit einem charm-Quark sind von wichtiger Bedeutung, da sie die Möglichkeit bieten, die CKM -Matrixelemente V_{cd} und V_{cs} zu bestimmen, sowie interessante Kanäle für die Suche nach neuer Physik zur Verfügung stellen. Quarks sind allerdings in Hadronen gebunden, und man braucht eine verlässliche Beschreibung dieses Effekts, um die zugrunde liegende Flavour-Dynamik untersuchen zu können. Dazu ist die Verwendung nichtperturbativer Methoden erforderlich, um entsprechende Übergangsamplituden bestimmen zu können. Die Ergebnisse solcher Berechnungen erlauben zudem umgekehrt auch einen Test der QCD und können zu einem tieferen Verständnis der Bindungsstruktur von Hadronen beitragen.

In dieser Dissertation werden mit der Methode der QCD-Lichtkegelsummenregeln zwei Themengebiete untersucht. Das erste sind die Formfaktoren für die semileptonischen Zerfälle $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ und $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$, für die - unter Nutzung neuester Ergebnisse - aktuelle Werte bestimmt werden. Da hier keine direkte Vorhersage im gesamten kinematischen Bereich möglich ist, werden sie unter Verwendung geeigneter Parametrisierungen extrapoliert und stimmen sehr gut mit dem Experiment überein.

Das zweite Gebiet sind die Übergänge von Baryonen mit einem charm-Quark in Nukleonen. Auch hier werden die entsprechenden Übergangsformfaktoren, sowie zusätzlich die hadronischen $\Lambda_c D^{(*)} N$ - und $\Sigma_c D^{(*)} N$ -Kopplungskonstanten (unter Verwendung doppelter Dispersionsrelationen) berechnet. Letztere sind insbesondere für die Beschreibung hadronischer Wechselwirkungen von Bedeutung, wie der Produktion von charm-Quark-Hadronen in Proton-Antiproton-Kollisionen. Dabei tritt zudem das Problem auf, dass beide Paritätszustände der betrachteten Baryonen in die verwendete Darstellung einfließen, zu deren Trennung eine konsistente Methode vorgestellt wird.

Calculation of hadronic transition amplitudes in charm physics

Abstract

Transitions of charmed hadrons are of significant importance, since they provide possibilities to extract the CKM matrix elements V_{cd} and V_{cs} from experimental data as well as interesting channels to search for new physics effects. However, quarks are bound in hadrons, and it is necessary to describe this effect in a reliable way, to study the underlying flavour dynamics. For this, one has to use nonperturbative tools, to determine the corresponding transition amplitudes. The results of such calculations can furthermore be of use, to test the predictions of QCD and to contribute to a deeper understanding of the structure of hadrons.

In this thesis two topics are investigated using the method of QCD light-cone sum rules (LCSRs). The first topic consists in the form factors of the semileptonic decays $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ and $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$, for which new results are calculated using up-to-date input values. Since LCSRs are not applicable in the whole range of kinematics, they are extrapolated by the use of appropriate parametrisations and the results agree well with experimental data.

The second topic are the transitions of charmed baryons to a nucleon. Here the corresponding transition form factors and in addition the hadronic $\Lambda_c D^{(*)} N$ and $\Sigma_c D^{(*)} N$ coupling constants are calculated - the latter by the consideration of double dispersion relations. These coupling constants are of special interest for the description of hadronic interactions, like open charm production in proton-antiproton-collisions. Furthermore there appears the problem, that both parity states of a baryon contribute to the considered functional representation, for which a consistent way to separate them is presented.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1. Einleitung | 1 |
| 1.1. Einführung: Vergangenheit und Zukunft | 2 |
| 1.2. Das Standardmodell der Teilchenphysik | 5 |
| 1.2.1. Der grundlegende Formalismus: Quantenfeldtheorie | 5 |
| 1.2.2. Teilchen und Wechselwirkungen des Standardmodells | 9 |
| 1.2.3. Das Standardmodell als Eichtheorie | 12 |
| 1.2.4. Der elektroschwache Sektor des Standardmodells | 13 |
| 1.3. Starke Wechselwirkung und Quantenchromodynamik (QCD) | 20 |
| 1.3.1. Grundlagen | 20 |
| 1.3.2. Störungstheorie in der QCD | 22 |
| 1.4. Die Physik des charm-Quarks | 24 |
| 1.4.1. Charm in der schwachen Wechselwirkung und als Fenster zu neuer Physik | 25 |
| 1.4.2. Charm in der QCD | 26 |
| 1.5. Motivation und Gliederung | 26 |
| 2. Phänomenologie hadronischer Wechselwirkungen | 29 |
| 2.1. Überblick | 30 |
| 2.2. Grundbegriffe der nichtperturbativen QCD | 31 |
| 2.2.1. Definition interpolierender Ströme und Zerfallskonstanten für Mesonen | 32 |
| 2.2.2. Zerfallskonstanten für Baryonen und der Sonderfall der Parität | 35 |
| 2.2.3. Formfaktoren und hadronische Wechselwirkungen | 37 |
| 2.3. Analytische S -Matrix-Theorie und Dispersionsrelationen | 40 |
| 2.4. Parametrisierungen für die $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren | 43 |
| 3. QCD-Summenregeln | 47 |
| 3.1. Zweipunktsummenregeln | 47 |
| 3.1.1. Berechnung der Zerfallskonstanten von D - und D^* -Mesonen | 48 |
| 3.1.2. Berechnung der Zerfallskonstanten von Λ_c - und Σ_c -Baryonen | 60 |
| 3.2. Lichtkegel-Summenregeln | 63 |
| 3.2.1. Grundlegendes Konzept | 64 |
| 3.2.2. Lichtkegel-Verteilungsfunktionen für π - und K -Mesonen | 67 |
| 3.2.3. Berechnung des führenden Beitrags zu den Summenregeln der $D \rightarrow \pi$ -Formfaktoren | 70 |

| | |
|---|------------|
| 3.2.4. Lichtkegel-Verteilungsfunktionen und -Summenregeln für Baryonen | 73 |
| 4. $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$- und $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$-Formfaktoren aus Lichtkegel-Summenregeln | 75 |
| 4.1. Die Lichtkegel-Summenregeln der $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren | 76 |
| 4.1.1. Zusammenfassung der Summenregeln | 76 |
| 4.1.2. Wahl der Eingabeparameter und numerische Auswertung | 79 |
| 4.2. Ergebnisse für die Formfaktoren und Bestimmung von $ V_{cd} $ und $ V_{cs} $ | 82 |
| 4.2.1. Ergebnisse für die Formfaktoren bei $q^2 = 0$ | 82 |
| 4.2.2. Bestimmung von $ V_{cd} $ und $ V_{cs} $ | 86 |
| 4.3. Ergebnisse für die Formfaktoren bei $q^2 \neq 0$ und deren Parametrisierungen | 87 |
| 5. Lichtkegel-Summenregeln für $\Lambda_c \rightarrow N$- und $\Sigma_c \rightarrow N$-Übergänge | 95 |
| 5.1. Einführung und grundlegende Definitionen | 95 |
| 5.2. Herleitung der Lichtkegel-Summenregeln | 97 |
| 5.2.1. Struktur und hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion | 97 |
| 5.2.2. Berechnung der Korrelationsfunktion mit Hilfe der Nukleon-Lichtkegelverteilungsamplituden | 99 |
| 5.2.3. Berechnung der Formfaktoren | 102 |
| 5.2.4. Berechnung der hadronischen Kopplungskonstanten | 105 |
| 5.3. Numerische Auswertung der Lichtkegel-Summenregeln und Ergebnisse | 109 |
| 6. Zusammenfassung und Diskussion | 113 |
| 6.1. Diskussion der Ergebnisse für die semileptonischen D -Zerfälle | 113 |
| 6.2. Diskussion der Ergebnisse für die $\Lambda_c \rightarrow N$ - und $\Sigma_c \rightarrow N$ -Übergänge | 114 |
| A. Zweipunktsummenregeln für D-, D^*-, Λ_c- und Σ_c-Zerfallskonstanten | 117 |
| A.1. Summenregeln für die Zerfallskonstanten von D - und D^* -Mesonen | 117 |
| A.2. Summenregeln für die Zerfallskonstanten von Λ_c - und Σ_c -Baryonen | 118 |
| A.2.1. Summenregeln für Λ_c | 118 |
| A.2.2. Summenregeln für Σ_c | 120 |
| B. Lichtkegelsummenregeln für $D \rightarrow \pi$- und $D \rightarrow K$-Formfaktoren | 121 |
| B.1. Zusammenfassung der Lichtkegelverteilungsamplituden des K -Mesons | 121 |
| B.1.1. Definition | 121 |
| B.1.2. Twist 2-Verteilungsamplituden | 122 |
| B.1.3. Twist 3-Verteilungsamplituden | 123 |
| B.1.4. Twist 4-Verteilungsamplituden | 124 |
| B.2. Lichtkegel-Summenregeln für die $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$ -Formfaktoren | 126 |
| C. Lichtkegel-Summenregeln mit Λ_c- und Σ_c-Baryonen | 131 |
| C.1. Nukleon-Lichtkegelverteilungsamplituden | 131 |
| C.2. Ergebnisse der Korrelationsfunktionen für die $\Lambda_c \rightarrow N$ -Formfaktoren | 134 |
| C.2.1. Pseudoskalarer Übergang | 135 |

| | |
|---|------------|
| C.2.2. Vektor-Übergang | 137 |
| C.2.3. Axialvektor-Übergang | 139 |
| C.3. Ergebnisse der Korrelationsfunktionen für die $\Sigma_c \rightarrow N$ -Formfaktoren | 140 |
| C.3.1. Pseudoskalarer Übergang | 140 |
| C.3.2. Vektor-Übergang | 141 |
| C.3.3. Axialvektor-Übergang | 143 |
| C.4. Ausdrücke für die doppelte Dispersionsdarstellung | 143 |
| Danksagung | 155 |

Kapitel 1.

Einleitung

*„There should be no combination of events for which
the wit of man cannot conceive an explanation.“
- Sherlock Holmes ¹*

*„Höchste Aufgabe der Physiker ist also das Aufsuchen jener allgemeinsten elementaren Gesetze, aus denen durch reine Deduktion das Weltbild zu gewinnen ist.“
- Albert Einstein*

Seit je her sind die Menschen darum bemüht, die Welt um sie herum zu verstehen, ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und diese für sich nutzbar zu machen. Aus zunächst noch mystischen Erklärungen entwickelte sich im Laufe der Jahrhunderte immer mehr die wissenschaftliche Methode, die insbesondere auf den Prinzipien der Reproduzierbarkeit experimenteller Ergebnisse und der mathematischen Modellierung von Naturvorgängen beruht. Die daraus resultierenden, zahllosen Entdeckungen und Erfindungen im Laufe der Geschichte beeinflussten und bereicherten das Leben der Menschen stets auf neue Weise. Trotz der bis heute enormen Fortschritte gibt es immer noch viele Probleme zu lösen und Fragen zu beantworten, an denen Wissenschaftler aus aller Welt und aus allen Nationen und Kulturkreisen arbeiten.

Das Gebiet der Teilchenphysik hat - zusammen mit der Astrophysik und Kosmologie - das Ziel, die fundamentalen Gesetze zu verstehen, nach denen unsere Welt aufgebaut ist. Das *Standardmodell der Teilchenphysik* fasst unsere heutige - bereits sehr ausführliche - Kenntnis auf diesem Gebiet zusammen, doch bleiben auch hier noch viele Fragen offen, die die aktuelle Forschung beschäftigen.

Die so betriebene Grundlagenforschung ist von großer Bedeutung, da sich deren Wert in der Geschichte immer als unschätzbar erwiesen hat. Bis ins 17. Jahrhundert fand das Phänomen der Elektrizität beispielsweise lediglich zur Volksbelustigung Beachtung und niemand hätte geglaubt, dass es die Welt einmal derart verändern würde. Die zukünftige Forschung auf dem Gebiet der Teilchenphysik verspricht daher nicht nur die Beantwortung der Frage, wie unsere Welt aufgebaut ist und funktioniert, sondern öffnet möglicherweise auch die Tür für zukünftige bahnbre-

¹Aus: Arthur Conan Doyle, „The Valley of Fear“

chende Erkenntnisse. Diese fallen oft nicht nur aus der Teilchenphysik selbst, sondern auch aus der für die Experimente notwendigen Technologie ab. Beispiele dafür sind insbesondere die medizinische Strahlenbehandlung, Anwendungen in der Materialforschung oder Entwicklungen in der Computertechnologie, vor allem die des World Wide Web 1989 am Teilchenforschungszentrum CERN.

1.1. Einführung: Vergangenheit und Zukunft

*„Education never ends Watson.
It is a series of lessons with the greatest for the last.“*
- Sherlock Holmes ²

„'Data! Data! Data!' he cried impatiently. 'I can't make bricks without clay.'“
- Sherlock Holmes ³

In vielen alten Hochkulturen finden sich bereits beeindruckende Kenntnisse über Astronomie, Mathematik, physikalische Gesetze und viele andere Gebiete. Noch heute sind antike Bauwerke - wie die Pyramiden der Ägypter, die Aquädukte, Tempel und Amphitheater der Römer und Griechen oder die chinesische Mauer - steinerne Zeugen dieses Wissens. Im Europa des ausgehenden Mittelalters schließlich entwickelte sich die moderne Wissenschaft. Die ersten fundamentalen Gesetze der Mechanik wurden durch Forscher wie Galileo Galilei, Isaac Newton und Johannes Kepler aufgestellt und durch Experimente und astronomische Beobachtungen verifiziert. Diese Zeit kann als Beginn der modernen Physik angesehen werden und das Zusammenspiel von Experiment und Theorie ist noch heute ein zentraler Grundpfeiler der Forschung, der in der immer komplexer werdenden modernen Wissenschaft mehr von Bedeutung ist, denn je.

Das von dieser Zeit an begonnene Studium von Mechanik, Elektrodynamik und Thermodynamik veränderte unsere Welt in grundlegender Weise, da es - neben einem sich stets verfeinernden Verständnis unserer Welt - vor allem auch viele technische Neuerungen ermöglichte, ohne die unser Leben heute kaum noch vorstellbar wäre. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts kamen dann (als man schon glaubte, man könne alles mit dem erklären, was man bis dahin wusste) zwei völlig neue Gebiete hinzu, die das bisherige physikalische Weltbild revolutionierten - die Relativitätstheorie von Albert Einstein und die Quantenmechanik, welche maßgeblich durch Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger und Max Planck entwickelt wurde.

Neben diesen neuen theoretischen Sichtweisen kamen auch auf experimenteller Seite seit dem Anfang des 20. Jahrhunderts viele Entdeckungen auf. Das Gebiet der Teilchenphysik entwickelte sich in dieser Zeit, gründend auf fundamentalen Erkenntnissen, wie:

²Aus: Arthur Conan Doyle, „The Red Circle“

³Aus: Arthur Conan Doyle, „The Adventure of the Copper Beeches“

- der Entdeckung der Röntgenstrahlung durch Wilhelm Conrad Röntgen im Jahr 1895 und der Radioaktivität durch Antoine Henri Becquerel im Jahr 1896,
- dem Nachweis des Elektrons als Teilchen durch Joseph John Thomson im Jahr 1897,
- dem Streuversuch von Ernest Rutherford 1909, der zeigte, dass Atome aus einer Elektronenhülle und einem Kern bestehen, welcher wiederum später als aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt erkannt wurde,
- der Entdeckung der Höhenstrahlung durch die Ballonversuche von Victor Hess 1912,
- dem Nachweis des quantisierten Spins des Elektrons durch Otto Stern und Walther Gerlach 1922,
- der Entdeckung des 1928 von Paul A.M. Dirac postulierten Positrons als erstes bekanntes Antiteilchen durch Carl David Anderson 1932,
- der Entdeckung des 1930 von Wolfgang Pauli postulierten Neutrinos durch Clyde Lorrain Cowan und Frederick Reines 1956.

Dies ist nur eine kleine Auswahl wichtiger Meilensteine, und einige weitere werden auch noch in den folgenden Abschnitten bei der Behandlung des Standardmodells erwähnt. Eine detaillierte Übersicht über die Geschichte der Physik im 20. Jahrhundert findet sich in [1].

In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden - insbesondere durch den Bau immer ausgereifterer Teilchenbeschleuniger und Detektoren - noch sehr viel mehr Teilchen entdeckt, so dass man in den 50er Jahren schon von einem „Teilchenzoo“ sprach und nicht glauben konnte, dass diese alle elementar sind. Etwa zwei Jahrzehnte später fand man dann heraus, dass viele von diesen sich tatsächlich aus weiteren Teilchen, den Quarks, zusammensetzen. Diese zusammengesetzten Teilchen bezeichnet man als *Hadronen* und durch die Kombination der wenigen verschiedenen Quarksorten können viele davon in unterschiedlichen Anregungszuständen gebildet werden.

Durch stetig fortgeführte Bemühungen von experimenteller und theoretischer Seite gelang es schließlich, sehr viel über die uns heute als fundamental bekannten Teilchen und die Wechselwirkungen zwischen ihnen zu erfahren. Dieses Wissen ist in einem einheitlichen mathematischen Formalismus in Form einer *Quantenfeldtheorie* im Standardmodell der Teilchenphysik zusammengefasst.

Dieses beschreibt den Großteil der uns in diesem Gebiet bekannten Phänomene - und damit die zu Grunde liegenden Gesetze für andere Bereiche der Naturwissenschaften - mit erstaunlicher Genauigkeit. Das beste Beispiel ist das anomale magnetische Moment des Elektrons, $g_e \simeq 2,0023\dots$, dessen experimenteller Wert bis auf 11 Nachkommastellen genau mit der theoretischen Vorhersage übereinstimmt. Es

gibt jedoch noch einige Anhaltspunkte und offene Fragen im Standardmodell, die nahe legen, dass noch weitere bisher unbekannte Teilchen und Phänomene existieren müssen. Diese werden im Allgemeinen unter dem Begriff *Neue Physik* zusammengefasst. Das Standardmodell ist demnach in dem für uns zugänglichen Energiebereich eine *effektive Theorie* einer übergeordneten, allgemeineren Theorie, so wie etwa die Newtonsche Mechanik eine effektive Theorie der Quantenmechanik und Relativitätstheorie im Bereich des alltäglichen Lebens ist.

Heute - am Anfang des 21. Jahrhunderts - stehen wir nun diesen neuen, interessanten Fragen gegenüber, zu deren Beantwortung viele theoretische und experimentelle Bemühungen im Gange sind. Die wohl bekannteste davon ist (neben vielen anderen Experimenten) der kürzlich in Betrieb genommene Large Hadron Collider (LHC) am Forschungszentrum CERN bei Genf. Der LHC wird Zugang zu vielen neuen Daten in einem bisher nicht erreichbar gewesenen Energiebereich von bis zu 14 TeV liefern. Es gibt überzeugende Hinweise, dass in diesem Bereich neue Teilchen, wie das postulierte Higgs-Boson entdeckt werden könnten und viele der möglichen, als Erweiterung zum Standardmodell entwickelten Modelle (wie Supersymmetrie oder Extra-Dimensionen) überprüfbar sind.

Aber auch das Studium der starken Wechselwirkung (zu dem diese Arbeit zentralen Bezug hat) und die Suche nach neuen Existenzformen der Materie, wie dem Quark-Gluon-Plasma, wird in den nächsten Jahren vor allem durch Experimente mit Schwerionen und Antiprotonen weitergeführt - wie etwa beim ALICE-Experiment am LHC und an der im Bau befindlichen Beschleunigeranlage FAIR am GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung. Die Astrophysik ist ebenfalls mit terrestrischen Experimenten (wie AUGER oder ICECUBE) und Satelliten (wie PAMELA, WMAP oder Planck) vertreten und wenn am LHC neue, schwere Teilchen gefunden werden, sind diese auch Kandidaten für Dunkle Materie. Zusammen mit unzähligen weiteren Anstrengungen von Experiment und Theorie verspricht all dies sehr spannende Ergebnisse für die Zukunft.

1.2. Das Standardmodell der Teilchenphysik

„The theories which I have expressed there, and which appear to you to be so chimerical, are really extremely practical - so practical that I depend upon them for my bread and cheese.“
- Sherlock Holmes ⁴

In diesem und dem folgenden Abschnitt wird ein kurzer, zusammenfassender Überblick über das Standardmodell gegeben. Es existiert eine große Auswahl an Lehrbüchern, die das Thema sehr ausführlich behandeln. Einige davon sind z.B. [2, 3], die insbesondere Bezug zur Phänomenologie und zum Experiment nehmen, sowie [4, 5, 6, 7, 8], die ausführlich die theoretischen Hintergründe behandeln. Mit stärkerem Bezug zur Hadronphysik sind ebenfalls [9, 10] zu empfehlen.

1.2.1. Der grundlegende Formalismus: Quantenfeldtheorie

„Everything in this world is relative, my dear Watson.“
- Sherlock Holmes ⁵

Wie bereits oben erwähnt, beschreibt das Standardmodell der Teilchenphysik die uns bekannte Materie und deren Wechselwirkungen im mikroskopischen Bereich. Um möglichst kleine Strukturen aufzulösen, sind nach der de-Broglie-Beziehung $\lambda = h/p$ möglichst hohe Energien erforderlich. Daher ist hier in der Regel die Verwendung der relativistischen Formulierung der Quantenmechanik zur Beschreibung der Natur nötig - der Formalismus der *Quantenfeldtheorie* (QFT). Jede Klasse von Teilchen wird dabei über ein dazugehöriges Feld beschrieben und die umfangreiche Anwendung der QFT hat sich in der Teilchenphysik als zutreffende Beschreibung bewährt. Das Standardmodell ist als eine spezielle Klasse von Quantenfeldtheorien formuliert, nämlich als *Eichtheorie*.

Die Dynamik dieser Teilchen - also Bewegungsgleichungen und Wechselwirkungen - wird in Form der Lagrangedichte der zugehörigen Feldtheorie betrachtet. Im Folgenden ist als grundlegendes Beispiel die Lagrangedichte der *Quantenelektrodynamik* (QED) angegeben:

$$\mathcal{L}_{QED}(x) = \bar{\psi}(x)(i\partial_\mu\gamma^\mu - m_e)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x). \quad (1.1)$$

Dabei ist $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ der Feldstärketensor. Die ersten beiden (kinetischen) Terme der Lagrangedichte beschreiben jeweils die Dynamik der einzelnen Felder für sich, während der dritte - der Wechselwirkungsterm - ihre Kopplung in der hier vorliegenden wechselwirkenden Theorie beschreibt. Die Quantenelektrodynamik stellt das einfachste Beispiel für die Anwendung der Quantenfeldtheorie

⁴Aus: Arthur Conan Doyle, „A Study in Scarlet“

⁵Aus: Arthur Conan Doyle, „The Dying Detective“

in der Teilchenphysik dar, das sich jedoch sehr anschaulich zum Standardmodell verallgemeinern lässt.

Die durch die jeweilige Lagrangedichte beschriebene Feldtheorie wird dann üblicherweise über den Formalismus der kanonischen Quantisierung den Regeln der Quantenmechanik unterworfen, indem man die Felder als Operatoren in einem Hilbertraum ansieht und entsprechende (Anti-)Vertauschungsrelationen fordert. Die Feldoperatoren werden nach ebenen Wellen entwickelt und die einzelnen, quantisierten Anregungen der Schwingungsmoden entsprechen jeweils physikalischen Teilchen.

Um aus diesem Formalismus Vorhersagen für physikalische Prozesse wie Teilchenzerfälle- und Kollisionen machen zu können, werden sie über den *LSZ-Reduktionsformalismus* [4, 5] mit *Green'schen Funktionen* $\langle 0 | \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) | 0 \rangle$ der auftretenden Felder $\phi = \{\psi, \bar{\psi}, A_\mu\}$ in Verbindung gebracht, und diese nach den Regeln der Quantenfeldtheorie berechnet. Durch eine Entwicklung in Potenzen der elektromagnetischen Feinstrukturkonstanten⁶ $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ erhält man als Ergebnis eine *Störungsreihe*. Da α_{em} klein ist, konvergiert diese schnell und es ist (insbesondere in der QED) möglich, mit der Berechnung einiger führender Ordnungen präzise Vorhersagen zu machen. Die einzelnen Beiträge zur Störungsreihe sind als *Feynman-Diagramme* (Abb. 1.1) darstellbar, in denen die Teilchen zwischen den durch die Wechselwirkung verursachten Vertizes frei propagieren. Der fundamentale Wechselwirkungsvertex, der in den Feynman-Diagrammen der QED auftaucht, ist in Abbildung 1.1(a) dargestellt.

Mithilfe der Quantenelektrodynamik können viele Prozesse wie z.B. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, der Comptoneffekt, Elektron-Elektron-Streuung, Paarbildung, usw. berechnet werden. Diese Rechnungen sind heute mit sehr großer Präzision durchgeführt und auch in allen Bereichen experimentell bestätigt, wie schon oben für das anomale magnetische Moment des Elektrons erwähnt wurde.

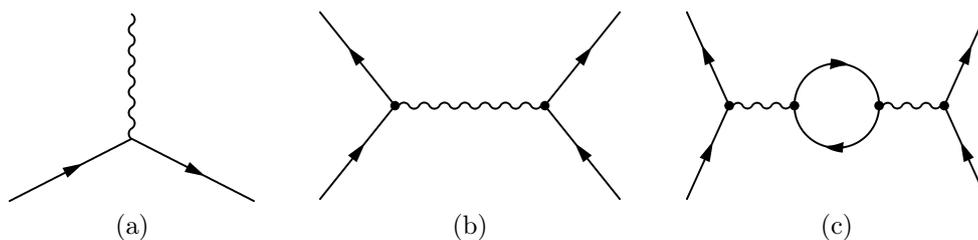


Abbildung 1.1.: (a) Der fundamentale Wechselwirkungsvertex, sowie Beispiele für Prozesse der Quantenelektrodynamik: (b) Ein führender Beitrag und (c) die erste Schleifenkorrektur zum darin auftretenden Photonpropagator („Vakuumpolarisation“).

⁶Wie in der Teilchenphysik üblich, werden natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$ verwendet.

Renormierung

Für die berechneten Prozesse treten Korrekturen in höheren Ordnungen der Störungstheorie auf, zum Beispiel die in (c) dargestellte Schleifenkorrektur zum führenden Diagramm in Abbildung 1.1 (b). Diese enthalten jedoch Integrale über alle möglichen Impulse, die in der Schleife laufen können, und können somit zum Auftreten von divergenten Beiträgen in der Störungsreihe führen, mit denen entsprechend umgegangen werden muss. Dies geschieht durch Umdefinition der physikalischen Parameter der Theorie, die sogenannte *Renormierung*. Die Idee dabei ist, dass beispielsweise ein Elektron ständig von einer Wolke virtueller Photonen umgeben ist, die seinem elektromagnetischen Feld entsprechen. Ohne diese können seine Eigenschaften wie Masse und Ladung gar nicht sinnvoll definiert werden, es wäre „nackt“. Die Parameter, die in der Lagrangedichte und damit der perturbativen Berechnung auftauchen, sind zunächst „nackte“ Größen A_0^μ , ψ_0 , e_0 und m_0 . Die physikalischen, *renormierten* Größen definiert man über:

$$A_0^\mu = \sqrt{Z_3} A^\mu, \quad \psi_0 = \sqrt{Z_2} \psi, \quad e_0 = Z_e e, \quad m_0 = Z_m m. \quad (1.2)$$

Dabei enthalten die sogenannten Z -Faktoren Divergenzen und werden in der Renormierungsprozedur so gewählt, dass sich endliche Ergebnisse aus der perturbativen Berechnung ergeben. Man kann diese Methode der multiplikativen Renormierung auch leicht in eine äquivalente Gestalt umformen, bei der die Divergenzen durch das Einführen von *Countertermen* in der Lagrangedichte wieder abgezogen werden. Die Forderung, dass man ein endliches Ergebnis erhält, ist nicht eindeutig und lässt die Freiheit zu, bestimmte endliche Anteile mit in die renormierten Größen zu definieren. So ergeben sich verschiedene *Renormierungsschemata*. Das verbreitetste und üblicherweise genutzte ist das \overline{MS} (modifiziertes *minimal subtraction-scheme*), das die Divergenzen mit Hilfe der Technik der *dimensionalen Regularisierung* ausdrückt. Bei dieser werden die auftretenden Integrale verallgemeinert, indem deren Dimension D als kontinuierlicher Parameter angesehen wird. Für $D \rightarrow 4$ werden sie dann divergent und im \overline{MS} -Schema werden nur diese Divergenzen sowie ein konstanter numerischer Faktor durch Renormierung beseitigt. (Für weitere Details siehe etwa die genannten Lehrbücher oder [11, 12, 8].)

Die Renormierungsprozedur führt eine Energieskala μ ein, bei der die physikalischen Größen definiert werden. In der dimensionalen Regularisierung ist diese aus Dimensionsgründen nötig. Die renormierten Größen und die Z -Faktoren hängen dann von μ ab (und zwar nur von $\ln \mu$, was die unten folgenden Formen der Ableitungen motiviert). Die nackten Größen müssen allerdings davon unabhängig sein, was zur *Renormierungsgruppengleichung* führt. Für die Ladung e lautet sie:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} e_0 = \frac{d}{d \ln \mu} (Z_e(\mu) e(\mu)) = \left(Z_e(\mu) \frac{d e(\mu)}{d \ln \mu} + e(\mu) \frac{d Z_e(\mu)}{d \ln \mu} \right). \quad (1.3)$$

Die Skalenabhängigkeit von $e(\mu)$ beschreibt man durch die β -Funktion, definiert durch:

$$\beta(e(\mu)) = \frac{de(\mu)}{d \ln \mu} = -\frac{e(\mu)}{Z_e(\mu)} \frac{dZ_e(\mu)}{d \ln \mu}, \quad (1.4)$$

wobei der letzte Schritt aus der obigen Renormierungsgruppengleichung folgt. Diese Funktion ist somit über Z_e perturbativ berechenbar und wird in der Form

$$\beta(e(\mu)) = -\beta_0 \frac{e(\mu)^3}{(4\pi)^2} + \beta_1 \cdot \mathcal{O}(e(\mu)^5) + \dots \quad (1.5)$$

angegeben. Der führende Term lautet in der QED $\beta_0 = -\frac{4}{3}$. Sie gibt das Verhalten der nun von der Renormierungsskala μ abhängigen Ladung an, der sogenannten „laufenden Kopplung“, welche man in der Regel durch die Feinstrukturkonstante $\alpha_{em}(\mu) = \frac{e(\mu)^2}{4\pi}$ ausdrückt. Diese wird mit steigender Energie größer, ändert sich aber im Energiebereich einiger GeV nur wenig. Eine komplett andere Situation ergibt sich allerdings in der Quantenchromodynamik, was in Abschnitt 1.3 genauer erläutert wird.

Operatorproduktentwicklung

Das Auftreten von Divergenzen in störungstheoretischen Rechnungen aus der Quantenfeldtheorie hat seinen Grund darin, dass mathematisch das Produkt zweier Feldoperatoren am selben Ort nicht definiert ist, wie leicht an der Darstellung der Zweipunkt-Greensfunktion - also des Propagators - des Skalarfeldes erkennbar ist:

$$\langle 0 | T\{\phi(x)\phi(0)\} | 0 \rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (1.6)$$

Mit der Definition des *Normalprodukts* für freie Felder, bei dem alle Vernichtungsoperatoren rechts von Erzeugungsoperatoren gestellt werden, kann man dies in folgender Weise umschreiben und eine Entwicklung nach dem Ortsvektor durchführen:

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(0) &= \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(0)\} | 0 \rangle \cdot \mathbf{1} + : \phi(x)\phi(0) : \\ &= \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(0)\} | 0 \rangle \cdot \mathbf{1} + 1 \cdot : \phi(0)^2 : + x_\mu \cdot : (\partial^\mu \phi(0)) \phi(0) : \\ &\quad + \frac{1}{2} x_\mu x_\nu \cdot : (\partial^\mu \partial^\nu \phi(0)) \phi(0) : + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dies ist das einfachste Beispiel einer *Operatorproduktentwicklung*. In ihrer allgemeinen Form lautet sie für lokale Operatoren A und B :

$$A(x)B(0) = \sum_k C_k(x) \mathcal{O}_k(0). \quad (1.8)$$

Dabei sind \mathcal{O}_k lokale Operatoren und die Ortsabhängigkeit steckt in den sogenannten *Wilson-Koeffizienten* $C_k(x)$. Letztere werden in der Regel mit absteigender Singularität sortiert und demnach die Operatoren aufsteigend nach ihrer Dimension.

Im obigen Beispiel ist der Koeffizient des Einheitsoperators singulär und danach folgen endliche Terme entsprechend der eben erwähnten Sortierung. Somit kann man das Produkt der beiden skalaren Felder als *Normalprodukt* definieren, indem man die Singularität abzieht:

$$:\phi(0)^2 := \lim_{x \rightarrow 0} \{\phi(x)\phi(0) - \langle 0 | \phi(x)\phi(0) | 0 \rangle\} . \quad (1.9)$$

Es ist auch für wechselwirkende Felder möglich, eine Operatorproduktentwicklung der Form (1.8) entsprechend zu definieren. Für weitere Details muss hier allerdings auf Lehrbücher, wie [5, 12, 13] verwiesen werden. Wichtig ist, dass diese Darstellung auch in beliebige Green'sche Funktionen eingesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T\{\phi(x_1)\phi(x_1) \cdots A(x)B(0) \cdots \phi(x_n)\} | 0 \rangle \\ &= \sum_k C_k(x) \langle 0 | T\{\phi(x_1)\phi(x_1) \cdots \mathcal{O}_k(0) \cdots \phi(x_n)\} | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Diese erweist sich als nützlich in Theorien wie der Quantenchromodynamik, in denen perturbative Berechnungen nicht ohne weiteres durchgeführt werden können, und wo die Operatorproduktentwicklung eine systematische Betrachtung der auftretenden Effekte ermöglicht. Neben den in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen ist auch die Verwendung in der effektiven Theorie für schwere Quarks (HQET, s.u.) und der effektiven Hamiltonfunktion für schwache Zerfälle ein wichtiges Anwendungsbeispiel dafür (siehe z.B. [14, 15, 16]).

1.2.2. Teilchen und Wechselwirkungen des Standardmodells

Heute wissen wir, dass alles in unserem Universum aus einigen, fundamentalen Klassen von Teilchen aufgebaut ist. Fundamental bedeutet dabei, dass sie bis zur heute zugänglichen Messgenauigkeit (einer Energieskala einiger TeV, entsprechend einer Längenskala von etwa 10^{-18} m) nicht aus weiteren Teilchen zusammengesetzt sind. Man unterscheidet dabei zwei Klassen: Zum einen Materieteilchen wie Elektronen und Quarks, die allesamt Spin $\frac{1}{2}$ besitzen und demnach Fermionen sind und aus denen die gewöhnliche, uns umgebende Materie besteht. Zum anderen Austausch- teilchen (wie das Photon), die die bestimmten Arten der Wechselwirkung zwischen den Materieteilchen vermitteln. Diese sind Bosonen und besitzen alle Spin 1. Zu letzterer Klasse ist zusätzlich noch das Higgs-Boson mit Spin 0 zu zählen, dessen Existenz allerdings bis heute noch nicht experimentell bestätigt werden konnte. Es ist für keine Wechselwirkung verantwortlich, sorgt jedoch dafür, dass die meisten der Teilchen des Standardmodells eine Masse besitzen. Die Teilchen dieser beiden Klassen sind in den Tabellen 1.1 und 1.2 aufgeführt und werden im Folgenden ausführlicher erklärt.

| | 1. Generation | 2. Generation | 3. Generation |
|----------|-------------------------------------|---|---|
| Leptonen | e ($m_e \approx 511\text{keV}$) | μ ($m_\mu \approx 105,7\text{MeV}$) | τ ($m_\tau \approx 1,777\text{GeV}$) |
| | ν_e ($m_{\nu_e} \approx 0$) | ν_μ ($m_{\nu_\mu} \approx 0$) | ν_τ ($m_{\nu_\tau} \approx 0$) |
| Quarks | u ($m_u \approx 2,5\text{MeV}$) | c ($m_c \approx 1,27\text{GeV}$) | t ($m_t \approx 172\text{GeV}$) |
| | d ($m_d \approx 5\text{MeV}$) | s ($m_s \approx 100\text{MeV}$) | b ($m_b \approx 4,19\text{GeV}$) |

Tabelle 1.1.: Die fermionischen Materieteilchen des Standardmodells und ihre Massen im \overline{MS} -Renormierungsschema [17]. Zu jedem Teilchen existiert auch das entsprechende Antiteilchen.

| Wechselwirkung | el.-mag. WW | schwache WW | starke WW |
|----------------|-----------------------------------|--|-----------|
| Eichboson | Photon (γ) | W^+, W^-, Z^0 | 8 Gluonen |
| Masse | $m_\gamma = 0$ | $m_{W^\pm} = 80,4\text{GeV}$ $m_{Z^0} = 91,2\text{GeV}$ | $m_G = 0$ |
| Wirkung auf | geladene Teilchen | alle Teilchen | Quarks |
| Eichtheorie | elektroschwache Vereinheitlichung | | QCD |

Tabelle 1.2.: Die Wechselwirkungen und die zugehörigen bosonischen Austausch-
teilchen des Standardmodells.

In der Natur existieren vier fundamentale Wechselwirkungen zwischen Materie: aus der klassischen Physik bekannt sind Elektromagnetismus und Gravitation, die die uns auch im Alltag begegnenden Kräfte verursachen. Zudem gibt es die starke Wechselwirkung, die über eine sehr kurzreichweitige Kraft dafür verantwortlich ist, dass sich Quarks zu Protonen und Neutronen und diese wiederum zu Atomkernen binden. Die schwache Wechselwirkung schließlich kann als einzige die Umwandlung einer Sorte eines Materieteilchens in ein anderes bewirken und ist darüber unter anderem für den radioaktiven Zerfall verantwortlich. Jede Wechselwirkung wird über eine bestimmte Anzahl von Austauschbosonen zwischen den Materieteilchen vermittelt.

Das Standardmodell fasst die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung zu einer einheitlichen Theorie zusammen, jedoch nicht die Gravitation, deren Effekte von einem Teilchen auf ein anderes verschwindend gering sind. Daher spielt sie in der Teilchenphysik keine Rolle, sondern bestimmt vor allem die Phänomene auf makroskopischen und kosmologischen Längenskalen und wird nach unseren heutigen Kenntnissen sehr genau durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. Eine Vereinheitlichung aller vier Wechselwirkungen ist bis heute noch nicht gelungen.

Die Materieteilchen, aus denen sich unsere alltägliche Welt zum größten Teil zusammensetzt, sind die up- und down- Quarks, aus denen die Nukleonen im Atomkern bestehen, sowie die Elektronen in der Atomhülle. Zum Elektron e^- gehört zudem das Elektron-Neutrino ν_e , welche zusammenfassend als Leptonen bezeichnet werden. Diese vier Teilchensorten bilden zusammen eine sogenannte *Generation*. Mit der Entdeckung des Myons in der kosmischen Strahlung durch Carl D. Anderson und Seth Neddermeyer wurde im Jahr 1936 jedoch ein Teilchen gefunden, das die selben Eigenschaften besitzt wie das Elektron, aber etwa 200 mal schwerer ist. Zur Erklärung der vielen Hadronen des „Teilchenzoos“ mittels Quarks wurde im Laufe der Zeit ebenfalls eine größere Anzahl von Quarks nötig, die heute bis auf 6 bekannte Typen up, down, charm, strange, top und bottom - die sogenannten *Quarkflavours* - angewachsen ist. Es wurde ebenfalls noch ein drittes Lepton - das τ -Lepton - sowie die zu μ und τ gehörigen Neutrinos vorgefunden, die zusammen mit der ersten Generation noch zwei weitere bilden, dessen Mitglieder sich jeweils nur in ihrer Masse unterscheiden.

Die Neutrinos haben im Vergleich zu den anderen Materieteilchen eine äußerst kleine Masse, die bis jetzt noch nicht direkt gemessen werden konnte. Durch die in den letzten Jahren gefundene Evidenz von Neutrinooszillationen steht jedoch fest, dass sie nicht masselos sind. Die am genauesten ermittelte obere Grenze für das Elektron-Antineutrino ist $m_{\bar{\nu}_e} \lesssim 2,3 \text{ eV}$ und aus verschiedenen astrophysikalischen Daten ergibt sich eine obere Grenze von $\sim 1,7 \text{ eV}$ auf die Summe aller drei Neutrinomassen (beide Werte mit 95% *c.l.* [17]). Mit dem in Vorbereitung befindlichen KATRIN-Experiment in Karlsruhe kann bald eine Sensitivität von $m_{\bar{\nu}_e} \lesssim 0,2 \text{ eV}$ erreicht werden. Aufgrund der äußerst geringen Neutrinomasse ist es aber für sehr viele Anwendungen ausreichend, sie dennoch als masselos zu betrachten. Diese Näherung soll auch im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet werden, ohne noch einmal darauf einzugehen. Eine Erweiterung des Standardmodells für massive Neutrinos ist in einer analogen Form zum Quarksektor jedoch problemlos möglich und führt dort ebenfalls auf die entsprechende Phänomenologie der (Lepton-)Flavour-Mischung, wie sie für den Fall der Quarks im folgenden Abschnitt 1.2.4 beschrieben wird. Das entsprechende Analogon zur *CKM*-Matrix (s.u.) wird *PMNS*-Matrix genannt (nach ihren Entdeckern Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata).

In den 90ern wurde am Beschleuniger LEP am CERN durch die Untersuchung der Resonanzkurve des Z^0 -Bosons festgestellt, dass es exakt 3 Generationen von (leichten) Neutrinos gibt, was sehr nahe legt, dass damit auch die Anzahl der Generationen im Standardmodell genau 3 ist. Bis heute ist es allerdings weder gelungen, zu verstehen, warum es sich genau um diese Zahl handelt, noch warum die Teilchen exakt diese Massen besitzen, die zudem noch über einen Bereich von etwa 12 Zehnerpotenzen verteilt sind. Dies gehört zu einer der Hauptaufgaben der aktuellen Forschung.

1.2.3. Das Standardmodell als Eichtheorie

Die Quantenfeldtheorien, die die Teilchen des Standardmodells beschreiben, sind spezielle „Eichtheorien“. Bei der Formulierung der klassischen Elektrodynamik stellte man fest, dass die Maxwellgleichungen invariant unter einer lokalen Transformation $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$ der elektromagnetischen Potentiale mit einem beliebigen Eichfeld $\alpha(x)$ sind. Das Fermionfeld muss sich dann zur Aufrechterhaltung der Invarianz gemäß $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ transformieren, also die Phase um $\alpha(x)$ ändern. Bei einer Eichtheorie macht man dies nun zu einer Forderung, die man an die Theorie stellt. Um eine Invarianz der Lagrangedichte (1.1) unter Phasentransformationen des Feldes $\psi(x)$ zu erhalten, ist es erforderlich, das Vektorfeld $A_\mu(x)$ als *Eichfeld* einzuführen.

Die Phasentransformation in der QED ist eine Symmetrietransformation der unitären (abelschen) Gruppe $U(1)$ in einer Dimension. Das Konzept der Eichtheorien wurde 1954 von Chen Ning Yang und Robert L. Mills auf höherdimensionale (nichtabelsche) Symmetriegruppen verallgemeinert, die nach ihnen als Yang-Mills-Theorien bzw. nichtabelsche Eichtheorien benannt sind. In der Teilchenphysik sind solche Symmetriegruppen von sehr großer Bedeutung und finden wichtige Anwendungen in vielen Bereichen. Besonders zu nennen ist dabei die spezielle unitäre Gruppe $SU(N)$ für die Behandlung sogenannter *innerer Symmetrien*, also der Invarianz unter der Vertauschung gewisser, diskreter Quantenzahlen der Teilchen.

Die $SU(N)$ ist eine *Lie-Gruppe*, deren Elemente in der Form

$$U = \exp(i\theta_a T_a) \quad (1.11)$$

mit einer bestimmten Anzahl von kontinuierlichen Argumenten θ_a als Abfolge von infinitesimalen Transformationen um den Einheitsoperator dargestellt werden können. Die Größen T_a werden *Generatoren* genannt und genügen Vertauschungsrelationen $[T_a, T_b] = f_{abc}T_c$, durch die die *Lie-Algebra* definiert wird. Die Anzahl dieser Generatoren beträgt $N^2 - 1$ für die $SU(N)$ und die Größen f_{abc} heißen *Strukturkonstanten*. Die $SU(2)$ beispielsweise hat als Generatoren die drei Pauli-Matrizen τ^a und die Strukturkonstanten sind durch den Levi-Civita-Tensor ϵ_{abc} gegeben.

Das Standardmodell ist nun eine Eichtheorie, die symmetrisch unter der Kombination - mathematisch dem Tensorprodukt - verschiedener Transformationen von Eigenschaften der Materieteilchen ist:

$$U(1)_Y \otimes SU(2)_W \otimes SU(3)_C. \quad (1.12)$$

Die $U(1)$ -Symmetrie ist dabei mit der *Hyperladungs-Quantenzahl* Y verbunden⁷ und führt zur Einführung eines Eichfeldes B_μ . Die $SU(2)$ ist mit dem *schwachen Isospin* (W für engl. *weak*) verbunden, was zu drei Eichfeldern W_μ^a mit $a = 1, 2, 3$

⁷Die Beziehung zur elektrischen Ladung Q wird im Folgenden erläutert.

führt. Diese beiden Symmetriegruppen beschreiben *zusammen* die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung im Rahmen der sogenannten *elektroschwachen Vereinheitlichung*, die in den 60er Jahren durch Glashow, Salam und Weinberg entwickelt wurde. Die $SU(3)$ schließlich beschreibt die Symmetrie zwischen den drei *Farbladungen* von Quarks (C für engl. *colour*) und führt zu 8 Eichfeldern A_μ^a , den sogenannten *Gluonen*. Diese $SU(3)$ -Eichtheorie trägt den Namen *Quantenchromodynamik (QCD)* und beschreibt die starke Wechselwirkung. Da sie nicht mit den anderen beiden Eichsymmetrien gekoppelt ist, kann man das Standardmodell in zwei „Sektoren“ unterteilen, den elektroschwachen Sektor und die QCD. Ersterer soll nun im folgenden Abschnitt beschrieben werden und die QCD, die Hauptthema dieser Arbeit ist, im darauf folgenden.

In der Lagrangedichte von Eichtheorien fasst man die kinetischen Terme der Fermionen und die zugehörigen, durch die Eichinvarianzforderung entstehenden Wechselwirkungsterme in die *kovariante Ableitung* zusammen:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu^a T^a + ig W_\mu^a \tau^a + ig' Y B_\mu . \quad (1.13)$$

Dabei sind g_s, g und g' jeweils die zu den Eichgruppen gehörigen Kopplungskonstanten. In Yang-Mills-Theorien lautet die Verallgemeinerung des Feldstärketensors, den man als $G_{\mu\nu}^a T^a = G_{\mu\nu} = \frac{i}{g_s} [D_\mu, D_\nu]$ darstellen kann:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (1.14)$$

Wegen der Nichtkommutativität der zugrundeliegenden Symmetriegruppe tritt hier ein zusätzlicher Term im Gegensatz zur QED auf, um die Eichinvarianz zu gewährleisten. Schließlich ergibt sich so eine kompakte Form für die Lagrangedichte einer nichtabelschen Eichtheorie:

$$\mathcal{L}_{YM} = \bar{\psi}(x)(iD_\mu \gamma^\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4} G^{a\mu\nu}(x) G_{\mu\nu}^a(x) . \quad (1.15)$$

1.2.4. Der elektroschwache Sektor des Standardmodells

Die elektroschwache Vereinheitlichung

Im Jahre 1956 wurde im Experiment von Chien-Shiung Wu beobachtet, dass die Symmetrie unter Paritätstransformationen, von der man bis dahin glaubte, sie wäre in allen physikalischen Prozessen gültig, in der schwachen Wechselwirkung verletzt ist, und zwar „maximal“, so dass es nur linkshändige Neutrinos und rechtshändige Antineutrinos gibt. Die links- und rechtshändigen Projektionen der Fermionfelder sind dabei durch $\psi_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)\psi$ und $\psi_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)\psi$ definiert.

Aus der Phänomenologie der schwachen Zerfälle ergab sich, dass die linkshändigen Fermionen sich als Dublett unter der $SU(2)_W$ transformieren müssen (mathematisch unter der fundamentalen Darstellung) und die rechtshändigen Fermionen als

Singlett (unter der trivialen Darstellung). Unter der $U(1)$ -Symmetrie transformieren sich alle Fermionfelder gemäß $f(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)Y_f} f(x)$ mit der jeweiligen Hyperladung Y_f . Die entsprechenden Quantenzahlen der Fermionen sind in Tabelle 1.3 zusammengefasst. Die Hyperladung ist dabei über die *Gell-Mann-Nishijima-Relation*

$$Y = 2(Q - I_3) \quad (1.16)$$

mit der elektrischen Ladung Q verbunden.⁸ Die Werte von Y wurden entsprechend der in der Natur beobachteten elektrischen Ladung gewählt. Hätte man die $U(1)$ direkt mit der Ladung Q eingeführt, würde dies zur Folge gehabt haben, dass die Fermionen in einem Dublett die gleiche Ladung hätten, was der experimentellen Beobachtung widerspricht.

| Fermionfeld | | | I_3 | Y | Q |
|--|--|--|---------------------------------|----------------|---------------------------------|
| $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ | $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$ | $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$ | $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$ |
| $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ | $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$ | $\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$ | $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ | -1 | 0 -1 |
| u_R | c_R | t_R | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| d_R | s_R | b_R | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| e_R^- | μ_R^- | τ_R^- | 0 | -2 | -1 |

Tabelle 1.3.: Die elektroschwachen Quantenzahlen schwacher Isospin I_3 , Hyperladung Y und elektrische Ladung Q der Materieteilchen des Standardmodells.

In der kovarianten Ableitung (1.13) repräsentieren die Felder W_μ^1 und W_μ^2 die beiden Ladungszustände des W^\pm -Bosons über:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2). \quad (1.17)$$

Mit der entsprechenden, zugehörigen Kombination der Pauli-Matrizen bewirken sie schwache Übergänge zwischen Fermionen mit verschiedenem schwachen Isospin I_3 und reproduzieren so korrekt die experimentellen Beobachtungen. Das Feld W_μ^3 kann jedoch nicht dem physikalisch beobachteten Z^0 -Teilchen entsprechen, da das Z^0 aus experimenteller Beobachtung z.B. ℓ_L - ℓ_R -Kopplungsterme besitzt, während W_μ^3 nur linkshändige Teilchen miteinander koppelt. Genauso kann es sich bei dem $U(1)$ -Feld B_μ nicht um das Photon handeln, da B_μ eine Kopplung an die elektrisch neutralen Neutrinos besitzt.

⁸Vorsicht: In der Literatur gibt es auch noch eine andere Konvention, bei der $2Y$ als Hyperladung definiert wird.

Die beiden Felder W_μ^3 und B_μ besitzen jedoch die selben elektroschwachen Quantenzahlen $Y = 0$ und $I_3 = 0$ und können daher untereinander zu den physikalischen Feldern mischen:

$$A_\mu = \cos \theta_w B_\mu + \sin \theta_w W_\mu^3, \quad Z_\mu = -\sin \theta_w B_\mu + \cos \theta_w W_\mu^3. \quad (1.18)$$

Dies reproduziert die empirisch beobachteten Wechselwirkungsterme exakt und stellt somit die korrekte Beschreibung auch der neutralen Ströme dar. Der Mischungswinkel θ_w wird als Weinberg-Winkel bezeichnet und ist experimentell zu $\sin^2 \theta_w = 0,23116(13)$ bestimmt worden [17].

Die elektroschwache Symmetriebrechung

Die bisher aufgestellte Theorie beschreibt die elektroschwache Wechselwirkung korrekt, hat aber das Problem, dass die Eichinvarianz keine Massenterme für die Eichbosonen erlaubt wie z.B. $m_Z^2 Z^\mu(x) Z_\mu(x)$. Zudem sind auch Fermion-Massenterme der Form $\frac{1}{2}m(\bar{f}_L f_R + \bar{f}_R f_L)$ nicht eichinvariant. Da jedoch sowohl die W - und Z -Bosonen, als auch alle Fermionen experimentell als massiv vorgefunden wurden, kann es sich noch nicht um die richtige Theorie handeln.

Um dieses Problem zu beheben, ist es notwendig, Massenterme einzuführen, die invariant unter $SU(2)$ -Eichtransformationen sind. Dazu wird ein weiteres $SU(2)$ -Dublett aus zwei skalaren Felder eingeführt, das *Higgs-Feld*. Es hat die Hyperladung $Y_H = 1$ und besteht damit aus einem mit $Q = 1$ geladenen und einem neutralen Feld:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Der kinetische Term in der Lagrangedichte des Standardmodells lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) \quad \text{mit dem Potential:} \\ V(\phi^\dagger \phi) &= -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dies wird als „mexican hat“-Potential bezeichnet (siehe Abb. 1.2). Für $\mu^2 > 0$ hat es ein Minimum bei:

$$(\phi^\dagger \phi)_0 = \frac{\mu^2}{2\lambda} := \frac{v^2}{2}. \quad (1.21)$$

Die oben definierte Größe $\frac{v}{\sqrt{2}}$ bezeichnet man als Vakuumerwartungswert des Feldes. Hier liegt nun der Fall vor, dass unendlich viele Grundzustände existieren, die durch eine $SU(2)$ -Symmetrietransformation miteinander verbunden sind. In der Natur kann ein beliebiger dieser Grundzustände realisiert sein, den man aufgrund der Symmetrie wählen kann zu:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

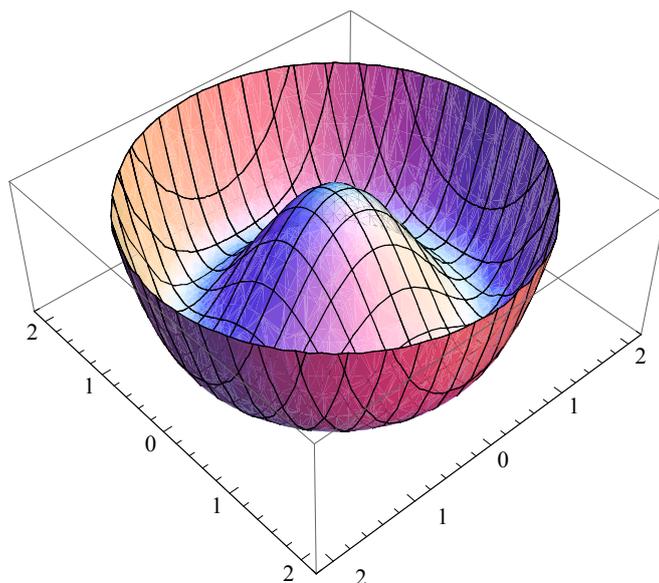


Abbildung 1.2.: Das „mexican hat“-Potential (in willkürlichen Einheiten).

Der Grundzustand weist nun nicht mehr die Symmetrie der Lagrangedichte auf und hier liegt das Phänomen der *spontanen Symmetriebrechung* vor. Mit dem Higgs-Feld $H(x)$ beschreibt man die Auslenkung um dieses Minimum, und es ist möglich, die anderen Freiheitsgrade durch drei Felder $G^k(x)$ in folgender Weise auszudrücken:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{G^k(x)}{v} \tau^k} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Dabei sind τ^k die drei Generatoren der $SU(2)$. Die Felder $G^k(x)$ sind masselose *Goldstone-Bosonen*, von denen nach dem Goldstone-Theorem immer so viele existieren, wie es Generatoren der gebrochenen Symmetrie gibt (hier drei für die gebrochene $SU(2)$). Wie eine genauere Betrachtung zeigt, gehen diese hinterher als longitudinale Freiheitsgrade in die dann massiven Eichbosonen ein. In einer passend gewählten Eichung („Unitäre Eichung“) brauchen sie nicht mehr berücksichtigt zu werden. Setzt man die obige Parametrisierung (1.23) nun in dieser Eichung in die Lagrangedichte des Standardmodells ein, so erhält man Massenterme für die W -Bosonen mit der Masse $m_W = \frac{gv}{2}$. Die Massenterme für die Felder W_3^μ und B^μ mischen untereinander. Eine Diagonalisierung führt auf die Felder Z^μ und A^μ für ein massives Z -Boson und ein masseloses Photon. Man erhält auch wichtige Relationen zwischen den elektroschwachen Parametern, die experimentell bestätigt wurden:

$$m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{gv}{2 \cos \theta_w} = \frac{m_W}{\cos \theta_w}. \quad (1.24)$$

Insbesondere hat man nun die elektroschwache $U(1)_Y \otimes SU(2)_W$ - Symmetrie zur physikalisch beobachteten $U(1)_Q$ -Symmetrie heruntergebrochen, die der Erhaltung der elektrischen Ladung entspricht.

Die Fermionen erhalten schließlich in der Lagrangedichte ihre Masse durch die sogenannte *Yukawa-Kopplung* mit dem Higgsfeld, z.B. für das Elektron:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= -\lambda_e \left\{ \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}}_L \phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \right\} \\
 &= -\lambda_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H(x)) \\
 &= -m_f \bar{e} e - \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} \bar{e} e H(x) .
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Die Masse hängt über $m_f = \frac{\lambda_f v}{\sqrt{2}}$ mit der Yukawa-Kopplungskonstanten λ_f zusammen, deren Größe allerdings theoretisch im Moment noch nicht erklärt werden kann. Die Yukawa-Kopplung erzeugt also die Masse eines Fermions durch die Wechselwirkung mit einem Vakuumerwartungswert v und beschreibt die Kopplung an den angeregten Zustand dieses Feldes, das Higgs-Boson H . Dessen Nachweis und die Bestimmung seiner Masse ist die letzte noch verbleibende experimentelle Aufgabe zur Bestätigung des Standardmodells. Hier wurde das einfachste, konsistente Modell zur elektroschwachen Symmetriebrechung im Standardmodell dargestellt. Darüber hinaus gibt es natürlich noch viele kompliziertere Modelle, die im Moment untersucht werden, um neue Erklärungen für unklare Fragen im Standardmodell zu finden. Verschiedene theoretische und experimentelle Hinweise sprechen dafür, dass diese Fragen an den vor kurzem angelaufenen Experimenten am LHC geklärt werden können.

Elektroschwache Übergänge und die *CKM*-Matrix

Die Massenterme aller Teilchen des Standardmodells entstehen über die Yukawa-Kopplung, und der allgemeinste Ausdruck für den entsprechenden Beitrag zur Lagrangedichte des Standardmodells lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \left(M_e^{ij} \bar{e}_L^i e_R^j + M_u^{ij} \bar{u}_L^i u_R^j + M_d^{ij} \bar{d}_L^i d_R^j + h.c. \right) , \tag{1.26}$$

mit den Ausdrücken:

$$e_L^i = (e_L^-, \mu_L^-, \tau_L^-) , \quad u_L^i = (u_L, c_L, t_L) , \quad d_L^i = (d_L, s_L, b_L) . \tag{1.27}$$

Dabei müssen die Massenmatrizen $M_{e,u,d}^{ij} = \frac{v}{\sqrt{2}} \lambda_{e,u,d}^{ij}$ zunächst nicht notwendig diagonal sein. Die physikalisch messbaren Teilchen sind allerdings die sogenannten Masseneigenzustände, also solche, für die keine Mischterme auftreten. Für die Leptonen kann immer eine diagonale Basis gefunden werden, da die Neutrinos hier masselos gewählt wurden. Für die Quarks ist dies ebenfalls möglich, allerdings müssen die Massenmatrizen für die up- und die down-Typ-Quarks i.A. unterschiedlich diagonalisiert werden. Dies führt dazu, dass dieser Basiswechsel auch in den

Wechselwirkungstermen mit den Eichbosonen durchgeführt werden muss. Für die neutralen Ströme ergibt sich keine Änderung, jedoch die geladenen W -Bosonen sorgen nun dafür, dass Übergänge von einem up-Typ-Quark zu allen drei down-Typ-Quarks und umgekehrt möglich sind. Die up-Typ-Quarks koppeln dabei in der Form $u_L \leftrightarrow d'_L, c_L \leftrightarrow s'_L, t_L \leftrightarrow b'_L$ an Linearkombinationen der down-Typ-Quarks. Der Zusammenhang zwischen diesen *Masseneigenzuständen* (d, s, b) und den *Eigenzuständen der schwachen Wechselwirkung* (d', s', b') ist gegeben durch die *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix* [18, 19] V_{CKM} :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}}_{V_{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Sie beschreibt die grundlegende Struktur der Übergänge zwischen verschiedenen Quarksorten, die nur durch die schwache Wechselwirkung verursacht werden können. Dies äußert sich insbesondere in Zerfällen von Hadronen in leichtere Hadronen und Leptonen. Im Standardmodell haben alle Quark-Generationen die gleiche schwache Kopplungskonstante. Eine Folgerung daraus ist, dass die CKM -Matrix unitär sein muss:

$$V_{CKM} \cdot V_{CKM}^\dagger = \mathbf{1}. \quad (1.29)$$

Flavour-ändernde neutrale Ströme, also Übergänge durch Z -Bosonen zwischen up-Typ-Quarks bzw. down-Typ-Quarks untereinander, sind in führender Ordnung der Störungstheorie nicht möglich, sondern existieren nur in Schleifendiagrammen höherer Ordnung. Der Grund dafür ist der sogenannte *GIM-Mechanismus* (nach Glashow, Iliopoulos, Maiani [20]), der aus dieser Unitarität folgt, und bewirkt, dass sich die entsprechenden Wechselwirkungsterme exakt aufheben. Auf diese Weise wurde das bis dahin unbekannte charm-Quark 1974 postuliert und noch im gleichen Jahr experimentell nachgewiesen. Flavour-ändernde neutrale Ströme sind ein wichtiges Hilfsmittel auf der Suche nach neuer Physik, da solche Beiträge dort möglicherweise nicht gegenüber dem Standardmodell unterdrückt sind.

Als komplexe 3×3 -Matrix hat die CKM -Matrix 18 unabhängige Parameter, von denen allerdings neun durch die Unitaritätsbedingung bestimmt sind und fünf weitere als Phasen durch Umdefinition der Quarkfelder eliminiert werden können. Die CKM -Matrix kann also durch vier reelle Parameter beschrieben werden, nämlich drei Mischungswinkel und eine Phase. Ihre Einträge können durch verschiedene schwache Zerfälle bestimmt werden, und der aktuelle Stand der Messungen ist [17]:

$$|V_{CKM}| \simeq \begin{pmatrix} 0,97425(22) & 0,2252(9) & 0,00389(44) \\ 0,230(11) & 1,023(36) & 0,0406(13) \\ 0,0084(6) & 0,0387(21) & 0,88(7) \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass die CKM -Matrix stark hierarchisch ist, und Übergänge zwischen weiter voneinander entfernten Generationen weniger wahrscheinlich sind. Aus der

Unitarität ergeben sich - wie beim *GIM*-Mechanismus schon erwähnt - verschiedene Relationen zwischen den Matrixelementen. Von besonderem Interesse ist dabei die folgende, bei der alle auftretenden Produkte von der selben Größenordnung sind:

$$V_{ub}^*V_{ud} + V_{cb}^*V_{cd} + V_{tb}^*V_{td} = 0 . \quad (1.30)$$

Diese lässt sich in der komplexen Ebene als das sogenannte Unitaritätsdreieck darstellen (Abb. 1.3). Die experimentelle und theoretische Arbeit zur Bestimmung seiner Parameter ist eine wichtige Prüfung des Standardmodells im Flavour-Sektor.

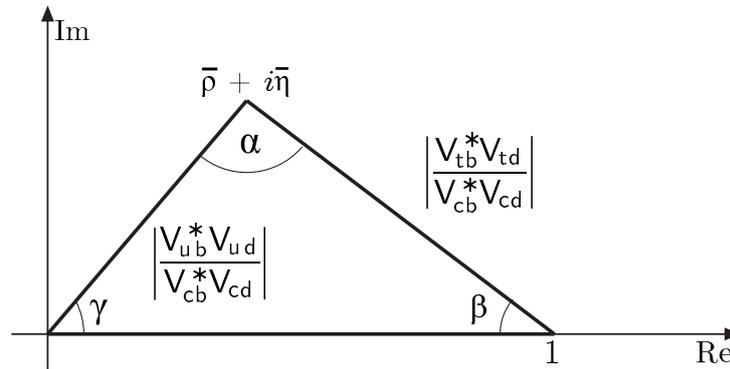


Abbildung 1.3.: Das Unitaritätsdreieck.

Die Struktur der *CKM*-Matrix sorgt ebenfalls dafür, dass im Standardmodell das Phänomen der Verletzung der *CP*-Symmetrie (also der Kombination aus Ladungskonjugation und Paritäts-Transformation) auftritt, das 1964 von den Physikern um James Cronin und Val Fitch im Zerfall neutraler *K*-Mesonen erstmals nachgewiesen wurde. Dies ist eine notwendige Bedingung um den festgestellten Überschuss von Materie über Antimaterie in unserem Universum zu erklären, bislang ist aber noch zweifelhaft, ob die im Standardmodell gefundene *CP*-Verletzung dafür groß genug ist.

Das Standardmodell, wie es soeben vorgestellt wurde, wird (unter Einbeziehung massiver Neutrinos als Dirac-Teilchen) durch 25 freie Parameter beschrieben. Warum diese aber genau die gemessenen Werte besitzen, ist bis heute völlig unbekannt, wie zum Beispiel warum die *CKM*-Matrixelemente mit wachsendem Abstand zur Diagonalen kleiner werden, oder warum das Massenspektrum von Quarks und Leptonen über viele Größenordnungen variiert (insbesondere die fast masselosen Neutrinos oder das Top-Quark, das etwa so schwer ist wie ein Goldatom). Ein fundamentales Verständnis der Natur sollte auch Vorhersagen für diese Werte liefern können, und man hofft durch die weitere Erforschung des Standardmodells, dies zu erreichen.

1.3. Starke Wechselwirkung und Quantenchromodynamik (QCD)

„Life is infinitely stranger than anything which the mind of man could invent.“
- Sherlock Holmes ⁹

In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Grundlagen zur Quantenchromodynamik - insbesondere mit Bezug zu dieser Arbeit - dargelegt. Für tiefere Details sind neben den vielen Lehrbüchern vor allem auch die Artikel [21, 22] zu empfehlen.

1.3.1. Grundlagen

Historische Einführung

Die Geschichte der starken Wechselwirkung beginnt mit dem Rutherford'schen Streuversuch 1909, in dem der Atomkern entdeckt wurde. Im Jahre 1917 entdeckte Rutherford dann das Proton und im Jahre 1932 James Chadwick das Neutron als dessen fundamentale Bestandteile. Aufgrund der elektrischen Abstoßung musste jedoch eine weitere, stärkere Kraft zwischen diesen existieren, die man demnach starke Wechselwirkung nannte. 1935 postulierte Hideki Yukawa den Austausch von Mesonen, die diese Kraft vermitteln, und die uns heute als Pionen bekannt sind und am Ende der 40er Jahre auch experimentell gefunden wurden.

Im Jahr 1964 wurden von Murray Gell-Mann und George Zweig die Quarks postuliert, die zu dieser Zeit vorerst noch rein mathematische Objekte waren, aber mit Erfolg Ordnung in den „Teilchenzoo“ mit den drei damals bekannten Flavours up, down und strange bringen konnten. Ein weiterer entscheidender Hinweis, dass Hadronen aus weiteren Teilchen zusammengesetzt sind, kam dann aus einem anderen Gebiet, nämlich der tief-inelastischen Streuung von Elektronen an Protonen, bei der man mit den ausgetauschten, hochenergetischen Photonen die Substruktur der Protonen studieren konnte. 1969 entdeckte man dort, dass diese sich aus mehreren Teilchen zusammensetzen, die sich bei hohen Energien in sehr guter Näherung wie freie Teilchen verhalten. Diesen Effekt (der als *asymptotische Freiheit* bezeichnet wird) konnten David Gross, Frank Wilczek und David Politzer dann 1973 tatsächlich aus der Quantenchromodynamik herleiten, welche in den Jahren 1971-1973 von Physikern wie Harald Fritzsch, Murray Gell-Mann, Gerardus t'Hooft und anderen als $SU(3)$ -Eichtheorie entwickelt wurde. Es stellte sich schließlich heraus, dass sie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung geeignet war.

Belege dafür, dass Quarks in drei verschiedenen Farbzuständen existieren, sind zudem bis heute aus verschiedenen Quellen bekannt, insbesondere dem sogenannten

⁹Aus: Arthur Conan Doyle, „A case of identity“

1.3. Starke Wechselwirkung und Quantenchromodynamik (QCD)

R -Verhältnis der Hadron- und Myon-Wirkungsquerschnitte in der e^+e^- -Streuung:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}. \quad (1.31)$$

In diesem zeigt sich aus den experimentellen Daten, dass etwa dreimal soviel Hadronen durch Quark-Antiquark-Produktion erzeugt werden, als wenn Quarks nur in einer Farbe existierten. Weitere Hinweise, wie etwa der hadronische τ -Zerfall oder der Prozess $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ (siehe z.B. [21]) belegen eindeutig die Existenz von drei Farbladungszuständen für die Quarks. Zudem konnte die QCD erklären, warum die postulierten Quarks nicht einzeln, sondern nur in Hadronen gebunden beobachtet werden können, was als *Confinement* bezeichnet wird. 1974 entdeckte man mit dem J/Ψ einen gebundenen Zustand aus einem charm- und einem Anti-charm-Quark, dessen Eigenschaften in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen der QCD standen. Dies war noch einmal ein wichtiger Hinweis auf die Richtigkeit des Quark-Modells und der QCD. Schließlich konnte 1979 die Existenz des Gluons durch ein Drei-Jet-Event bei PETRA (DESY) belegt werden.

Die QCD als nichtabelsche Eichtheorie

In der Quantenchromodynamik wird jedes Quark mit Flavour q durch drei Fermionfelder $\psi_q^i(x)$ beschrieben, wobei der Index $i = 1, 2, 3$ für die Farbladung steht. Die Felder transformieren sich dann in der zugehörigen $SU(3)$ -Eichtheorie über (1.11) mit den entsprechenden acht Generatoren der $SU(3)$ -Lie-Algebra, für die in der Regel die explizite Darstellung der Gell-Mann-Matrizen λ^a (siehe z.B. in [22]) gewählt wird. Dies führt zur Einführung von acht Eichfeldern $A_\mu^a(x)$, die *Gluonen* genannt werden, und auch selber Träger von Farbladung sind. Sie koppeln mit der *starken Kopplungskonstanten* g_s gleich an alle Quark-Flavours. Die Lagrangedichte der QCD ist dann entsprechend durch die Yang-Mills-Lagrangedichte (1.15) der Eichgruppe $SU(3)$ gegeben. Im Vergleich zur QED hat die QCD durch die im Feldstärketensor (1.14) für Gluonen zusätzlichen Terme auch zwei neue fundamentale Vertizes, die in Abbildung 1.4 gezeigt sind.

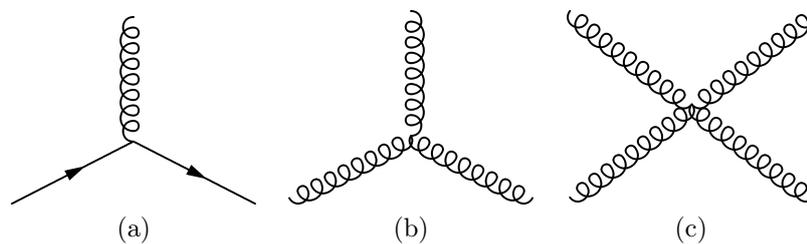


Abbildung 1.4.: Die drei fundamentalen Wechselwirkungsvertizes der QCD.

Da das Gluonfeld A_μ^a vier Komponenten hat, die (masselosen) Gluonen aber nur zwei Polarisierungen besitzen, sind zudem noch wichtige Bedingungen nötig, die bei

der Quantisierung von Vektorfeldern auftreten, um die zusätzlichen Freiheitsgrade wieder abzuziehen (siehe z.B. Anhang B von [21]). Zum einen ist zur Lagrange-dichte noch ein Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{EF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)(\partial^\nu A_\nu^a)$ hinzuzufügen (in der Regel wird in der Feynman-Eichung $\xi = 1$ gearbeitet). Zum anderen ist es nötig, in gluonischen Schleifendiagrammen die Freiheitsgrade explizit abzuziehen, was durch Einführung eines entsprechenden skalaren Feldes (das allerdings trotzdem Antivertauschungsrelationen genügt) geschieht. Dieses wird *Faddeev-Popov-Geist-Feld* genannt. Diese Diagramme sind in perturbativen Rechnungen immer mit zu berücksichtigen.

1.3.2. Störungstheorie in der QCD

In ihrer grundlegenden Struktur sind sich QED und QCD ähnlich. Ein entscheidender Unterschied ist jedoch, dass Gluonen die Farbe der Quarks ändern können und somit eine Kombination Farbe-Antifarbe tragen. Dies hat zur Folge, dass sie auch untereinander wechselwirken und zusätzliche Feynman-Diagramme möglich sind, wie die in Abbildung 1.5 gezeigten zur Renormierung des Gluon-Propagators.

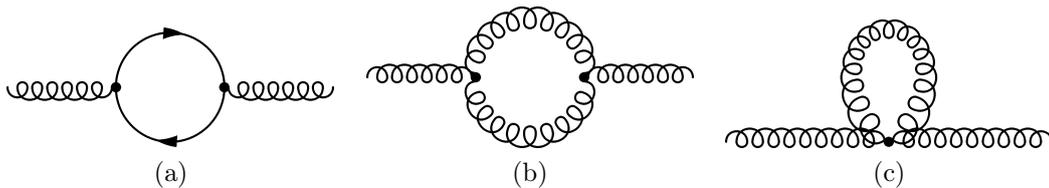


Abbildung 1.5.: Die drei führenden Beiträge zur Renormierung des Gluon-Propagators (Das zugehörige Geist-Diagramm zu (b) ist hier nicht gezeigt, muss aber auch berücksichtigt werden.)

Dadurch ist die sich ergebende β -Funktion in führender Ordnung:

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}n_f. \quad (1.32)$$

Im Gegensatz zur QED ist diese nun positiv und hat zur Folge, dass die starke Kopplungskonstante $\alpha_s(\mu) = \frac{g_s(\mu)^2}{4\pi}$ bei größeren Energien *abfällt*, was eine Erklärung für die asymptotische Freiheit liefert. Sie kann durch die Renormierungsgruppengleichung berechnet werden und ist in führender Ordnung von der Form:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}. \quad (1.33)$$

Diese ist in Abbildung 1.6 gezeigt und durch experimentelle Ergebnisse bestätigt worden. Die Größe Λ_{QCD} ist dabei die Skala, bei der $\alpha_s(\mu) \rightarrow \infty$ gilt. Sie kann nicht perturbativ berechnet werden, da α_s in diesem Bereich nicht mehr klein ist, und

1.3. Starke Wechselwirkung und Quantenchromodynamik (QCD)

wurde experimentell zu etwa $\Lambda_{QCD} \approx 200 - 300 \text{ MeV}$ bestimmt. Das Entstehen einer solchen charakteristischen Skala auf dynamischem Wege in einer Theorie, in der zuerst gar keine solche existiert, wird mit dem Begriff *dimensionale Transmutation* bezeichnet. Dieses Verhalten sorgt dafür, dass sich bei Energieskalen der Größen-

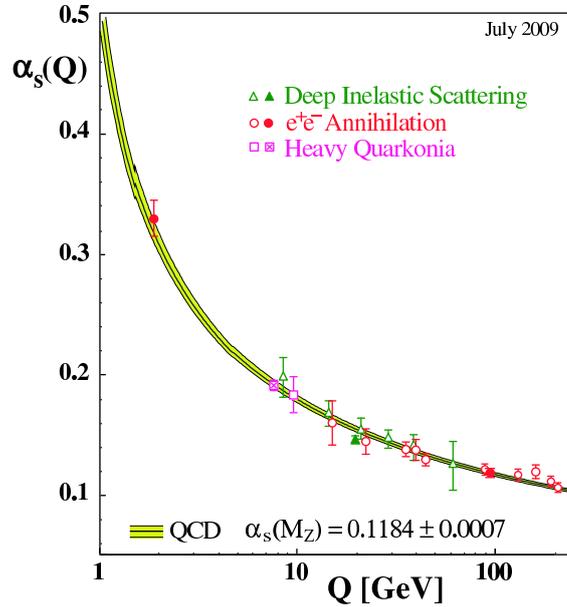


Abbildung 1.6.: Aktueller Stand der Skalenabhängigkeit der starken Kopplungskonstante α_s von der Energieskala Q , sowie einige experimentelle Ergebnisse für diese und der aktuelle Messwert für $\alpha_s(M_Z)$. (Quelle: [17])

ordnung Λ_{QCD} starke, durch die nichtlineare Natur der Gluon-Wechselwirkung verursachte Kopplungseffekte ergeben. Diese sorgen dafür, dass sich Quarks immer zu gebundenen Zuständen formieren - den *Hadronen* - und werden als *langreichweitige* bzw. *nichtperturbative* Effekte bezeichnet. (Die Energieskala Λ_{QCD} entspricht einer räumlichen Skala $\sim 10^{-15} \text{ m}$ - der ungefähren Ausdehnung von Hadronen.) Prozesse bei hohen Energien $E \gg \Lambda_{QCD}$ finden dagegen auf kurzreichweitigen Skalen statt, bei denen die Störungstheorie angewandt werden kann.

Bei Hadronen muss es sich um farbneutrale („weiße“) Zustände handeln, also Singletts unter $SU(3)_C$ -Transformationen, da die Farbladung bisher nie in direkter Weise beobachtet werden konnte. Man kann zeigen, dass nur bestimmte Kombinationen von Quarks und Antiquarks solche Singletts bilden können, nämlich insbesondere:

- *Mesonen* $\frac{1}{\sqrt{3}}\delta^{ij} \left| \bar{q}_i^{(1)} q_j^{(2)} \right\rangle$, die aus einem Quark und einem Antiquark bestehen und somit Bosonen mit ganzzahligem Spin sind,
- und *Baryonen* $\frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon_{ijk} \left| q_i^{(1)} q_j^{(2)} q_k^{(3)} \right\rangle$, die aus 3 Quarks oder 3 Antiquarks bestehen und Fermionen mit halbzahligem Spin sind.

Alle bisher in der Natur beobachteten Hadronen können in eine dieser beiden Klassen eingeteilt werden. In dieser Arbeit werden besonders Hadronen betrachtet, die ein charm-Quark enthalten, wie pseudoskalare D - und vektorielle D^* -Mesonen mit Quarkinhalt $c\bar{q}$ (wobei q für ein leichtes Quark steht) oder Λ_c und Σ_c als Spin-1/2-Baryonen, die jeweils verschiedene Isospin-Zustände zum Quarkinhalt udc sind. (Eine genauere Übersicht über die Klassifizierung von Hadronen findet sich etwa in [17] oder in vielen Lehrbüchern.)

Das eben erklärte Phänomen der stets erfolgenden Bindung von Quarks zu Hadronen wird als *Confinement* bezeichnet. Es konnte für die QCD bisher noch nicht strikt bewiesen werden, jedoch weisen die Ergebnisse bestimmter Berechnungsmethoden wie der Gitter-QCD, so wie alle bisher gemachten experimentellen und theoretischen Erfahrungen darauf hin. Für die Behandlung der QCD im nichtstörungstheoretischen Bereich ist bisher noch keine systematische Lösung gefunden worden und dies bleibt eine große Aufgabe für die Zukunft.

Zum Abschluss dieses Abschnittes soll nun noch die Abhängigkeit anderer Größen von der Renormierungsskala erwähnt werden, zu denen insbesondere die Massen sowie die Wilson-Koeffizienten aus der Operatorproduktentwicklung gehören. Diese wird allgemein für eine gegebene Größe $A(\mu)$ durch deren perturbativ berechenbare *anomale Dimension* γ gegeben. In dieser Arbeit wird sie mit der Bezeichnung γ_0 jeweils in führender Ordnung der Störungstheorie verwendet, wozu dann ebenfalls β_0 für die β -Funktion zu verwenden ist. Das Skalenverhalten lautet damit:

$$A(\mu_2) = [L(\mu_2, \mu_1)]^{\frac{\gamma_0}{\beta_0}} A(\mu_1), \quad \text{mit} \quad L(\mu_2, \mu_1) = \frac{\alpha_s(\mu_2)}{\alpha_s(\mu_1)}. \quad (1.34)$$

Ein wichtiges Beispiel ist die anomale Dimension $\gamma_0^{(m)} = 4$ der Quarkmassen $\bar{m}(\mu)$ im hier verwendeten \overline{MS} -Schema. Schließlich sei hier noch kurz erwähnt, dass Wilson-Koeffizienten unter Renormierung auch untereinander mischen können, für genauere Details muss aber auch hier auf die entsprechende Literatur verwiesen sein (insbesondere [12, 15, 16]). Für die in dieser Arbeit verwendeten Größen wird dieses Verhalten jeweils entsprechend angegeben und in Betracht gezogen.

1.4. Die Physik des charm-Quarks

„The enchanting charms of this sublime science reveal themselves in all their beauty only to those who have the courage to go deeply into it.“
- Carl Friedrich Gauss ¹⁰

Die Masse $m_c \approx 1,3 \text{ GeV}$ des charm-Quarks liegt in einem intermediären Bereich zwischen perturbativen und nichtperturbativen Energieskalen. Dies führt zu eini-

¹⁰Übersetzt aus einem französischsprachigen Brief an Sophie Germain.

gen einzigartigen Besonderheiten in der charm-Physik, die hier zusammen mit den aktuellen Forschungsschwerpunkten kurz skizziert werden sollen.

1.4.1. Charm in der schwachen Wechselwirkung und als Fenster zu neuer Physik

Quarks, deren Masse m_Q groß im Vergleich zu Λ_{QCD} ist, werden als schwere Quarks bezeichnet. Dies ist für charm, bottom und top der Fall, wobei das top-Quark jedoch zu kurzlebig ist, um Hadronen zu bilden. Für Hadronen, die ein schweres Quark enthalten - also c oder b - stellt die schwere Masse einen großen Vorteil für theoretische Vorhersagen dar. Im Grenzfall eines unendlich schweren Quarks entstehen durch sie zusätzliche Symmetrien, da es als eine statische Quelle von Farbladung aufgefasst werden kann, mit der die leichten Freiheitsgrade im Hadron wechselwirken. Diese spüren dann weder den Flavour (also den Wert der Masse), noch den Spin des schweren Quarks. Durch eine Entwicklung der QCD nach der Größe $\frac{\Lambda_{QCD}}{m_Q}$ kann man eine effektive Theorie erhalten, die als *heavy quark effective theory (HQET)* bezeichnet wird [14, 23, 24]. Für das bottom-Quark sind solche Korrekturterme sehr klein, so dass man durch Verwendung dieser sogenannten *heavy-quark-Symmetrie* sehr gute Ergebnisse erhalten kann. Auch für das charm-Quark lässt sie sich noch nutzen, jedoch in einer schlechteren Näherung, was präzise theoretische Vorhersagen in der charm-Physik schwieriger macht, als für das bottom-Quark. Es stellt allerdings auch eine Möglichkeit dar, die Struktur und damit die Gültigkeit der $\frac{1}{m_Q}$ -Entwicklung explizit an experimentellen Daten zu testen.

Eine weitere Besonderheit ist durch den *GIM*-Mechanismus für den flavour-ändernden neutralen Strom des charm-Quarks gegeben. Dieser ist für bottom und strange mit einem Faktor $\sim \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_t^2}{m_W^2}$ unterdrückt. Für das charm-Quark lautet der entsprechende Faktor hingegen $\sim \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_b^2}{m_W^2}$, die *GIM*-Unterdrückung ist also für Hadronen mit charm-Quarks viel stärker. Die $D^0 - \bar{D}^0$ -Mischung ist im Gegensatz zur $K^0 - \bar{K}^0$ - und $B^0 - \bar{B}^0$ -Mischung beispielsweise erst vor kurzen nachgewiesen worden [25]. Dies eröffnet die Möglichkeit, Beiträge von neuer Physik mit einem viel besseren Signal-zu-Untergrund-Verhältnis entdecken zu können. (Der Untergrund ist allerdings sehr hoch und es sind dazu Messungen mit hoher Statistik erforderlich.) Gegenwärtig ist das charm-Quark in der Flavourphysik daher vor allem ein interessantes Hilfsmittel zur Untersuchung der *CP*-Verletzung und der Suche nach neuer Physik. Wichtige Forschungsgebiete sind momentan die Bestimmung von *CKM*-Matrixelementen aus schwachen charm-Zerfällen und damit ein wichtiger Test des elektroschwachen Sektors des Standardmodells, sowie die $D^0 - \bar{D}^0$ -Mischung, die möglicherweise Beiträge von neuer Physik enthält (siehe z.B. [26]).

1.4.2. Charm in der QCD

Da Quarks immer in Hadronen gebunden sind, ist es wichtig, hadronische Effekte zu verstehen, um aus experimentellen Daten auf die grundlegende Dynamik von Quarks schließen zu können. Für die oben angesprochenen Themen der $D^0 - \bar{D}^0$ -Mischung und der schwachen charm-Zerfälle ist die Abschätzung solcher nichtperturbativer Effekte wichtig, um eine genaue theoretische Analyse machen zu können. Zu letzteren gehören beispielsweise die in dieser Arbeit betrachteten semileptonischen Zerfälle $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ und $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$.

Zudem sind allerdings noch sehr viele Fragen über die Struktur und Dynamik von Hadronen und deren Vorhersage aus der QCD bis heute unbeantwortet. Um Antworten auf diese zu finden und die QCD zu testen, laufen derzeit ebenfalls viele Bemühungen experimenteller und theoretischer Art. Die Masse des charm-Quarks liegt dabei in einem Bereich, der zwischen perturbativen und nichtperturbativen Herangehensweisen an die Hadronphysik liegt. In diesem überlappen sich daher viele Methoden aus der Hadron/Kern-Physik und aus der Hochenergie-(Flavour-)Physik, was ihn zu einem einzigartigen Forschungsgebiet macht. Das Studium der charm-Physik in diesem Zusammenhang birgt daher interessante Einblicke und Möglichkeiten für beide Gebiete. Eines der wichtigsten aktuellen Forschungsfelder ist die Analyse des Massenspektrums von charm-Hadronen, insbesondere des Charmoniums, also $\bar{c}c$ -gebundene Zustände. Dort sind einige Anregungszustände (die sogenannten X -, Y - und Z -Zustände) gefunden worden, die mit den theoretischen Modellen nicht ausreichend erklärt werden können. Auch die Produktionswirkungsquerschnitte für charm-Hadronen bei Energien in diesem Bereich und die Dynamik der hadronischen Wechselwirkungen sind von experimenteller und theoretischer Seite bislang weitgehend unbekannt.

1.5. Motivation und Gliederung

*„You know my methods. Apply them.“
- Sherlock Holmes ¹¹*

Die im vorigen Kapitel vorgestellten aktuellen Problemstellungen in der charm-Physik sind ein zentrales Thema dieser Arbeit. Die Vielfalt der Methoden und Ansätze in der hadronischen Physik ist hoch, da diese mit ihrer reichen Phänomenologie und der Schwierigkeit, Vorhersagen aus der zugrundeliegenden Theorie der Quantenchromodynamik treffen zu können, ein komplexes Feld darstellt. Die Methode der QCD-Summenregeln stellt eine Möglichkeit dar, nichtperturbative Größen aus der QCD mit einer gewissen Genauigkeit zu berechnen. Dies wird in dieser Arbeit geschehen, und die Ergebnisse werden in der Analyse einiger der erwähnten

¹¹Aus: Arthur Conan Doyle, „The Sign of the Four“

Problemstellungen in der charm-Physik verwendet. Sie stellen neue oder verbesserte Werte hadronischer Größen, sowie einige Methoden zur Verfügung, die auch in zukünftigen Studien Verwendung finden können.

Die Analyse von zwei Anwendungen mittels QCD-Summenregeln sind das Kernthema dieser Arbeit:

- *Die semileptonischen Zerfälle $D \rightarrow \pi l \nu_\ell$ und $D \rightarrow K l \nu_\ell$.*

Um die Dynamik der elektroschwachen Zerfälle der hier beteiligten Quarks zu untersuchen und die *CKM*-Matrixelemente V_{cs} und V_{cd} aus experimentellen Daten zu extrahieren, ist eine Kenntnis des hadronischen Bindungsprozesses notwendig. Dieser drückt sich in den sogenannten *Zerfallsformfaktoren* aus, deren Berechnung hier mittels der Methode der Lichtkegel-Summenregeln erfolgen wird. Dies stellt - im Gegensatz zur nachfolgenden Anwendung - die Weiterentwicklung bereits sehr fortgeschrittener Analysen dar, deren Resultate aktualisiert, sowie deren Genauigkeit verbessert werden.

- *Die Berechnung von Formfaktoren und hadronischen Kopplungskonstanten für die Übergänge von Λ_c - und Σ_c -Baryonen zu Nukleonen.*

Zerfallsprozesse von Baryonen, die ein schweres Quark erhalten, können neben den mesonischen Zerfällen ebenfalls wichtige Erkenntnisse für die Flavourphysik liefern. Schwache Zerfälle der Λ_b - und Λ_c -Baryonen können etwa in naher Zukunft am LHCb-Experiment mit bisher unerreichter Genauigkeit studiert werden. Für das Studium semileptonischer oder radiativer Zerfälle wie $\Lambda_b \rightarrow p l \nu_\ell$, $\Lambda_c \rightarrow \Lambda l \nu_\ell$, $\Lambda_b \rightarrow \Lambda l \bar{l}$ und $\Lambda_b \rightarrow \Lambda \gamma$ ist ebenfalls die Kenntnis entsprechender Zerfallsformfaktoren nötig. Letztere können weiterhin auch in rein hadronischen Zerfällen wie $\Lambda_b \rightarrow p \pi$ durch Faktorisierungsansätze verwendet werden. Die Berechnung der Formfaktoren soll in dieser Arbeit ebenfalls unter Verwendung von Lichtkegel-Summenregeln durchgeführt werden.

Zudem sind die Ergebnisse interessant, um Abschätzungen für Wirkungsquerschnitte der Produktion von Hadronen mit charm-Quarks in Proton-Antiproton-Kollisionen zu machen, wie sie in einigen Jahren am PANDA-Experiment durchgeführt werden sollen. Dies ist wichtig, da dort möglicherweise hohe Produktionsraten realisiert werden könnten, sofern die Wirkungsquerschnitte ausreichend groß sind. Sie können durch entsprechende effektive Theorien beschrieben werden, für deren Modellierung die Kenntnis hadronischer Kopplungskonstanten wie $\Lambda_c D N$ oder $\Lambda_c D^* N$ notwendig ist. Diese können mit einem entsprechenden Formalismus, der hier in einer weiterentwickelten Form im Gegensatz zu früheren Analysen eingesetzt wird, direkt aus den Summenregeln für die Formfaktoren extrahiert werden.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: Zuerst erfolgt in Kapitel 2 eine kurze Einführung in die Beschreibung hadronischer Prozesse mit der Definition der notwendigen Begriffe und der Erklärung einiger wichtiger theoretischer Herangehensweisen.

Kapitel 1. Einleitung

Daran schließt sich das Kapitel 3 über QCD-Summenregeln an, in dem alle für diese Arbeit notwendigen Hilfsmittel zur Berechnung der hadronischen Größen vorgestellt werden. In Kapitel 4 wird dann die eben erwähnte Anwendung für $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ und $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$ vorgestellt, sowie in Kapitel 5 die Berechnung der Formfaktoren und hadronischen Kopplungskonstanten der $\Lambda_c \rightarrow N$ - und $\Sigma_c \rightarrow N$ -Übergänge. Die Arbeit schließt mit einem Fazit und einem Anhang, der die vollständigen Formeln der hier durchgeführten Rechnungen enthält.

Kapitel 2.

Phänomenologie hadronischer Wechselwirkungen

„Though this be madness, yet there is method in it.“¹

Heute besteht aufgrund zahlreicher experimenteller Belege kein Zweifel mehr daran, dass die starke Wechselwirkung in fundamentaler Weise durch die Quantenchromodynamik beschrieben wird. Da die beteiligten Teilchen, also Quarks und Gluonen sich jedoch stets zu gebundenen Zuständen - den Hadronen - zusammenfügen, sind sie experimentell nicht zugänglich, denn nur Hadronen können in den Detektoren der Experimente gemessen werden. Es besteht also die Notwendigkeit, zwischen der Ebene von Quarks und Gluonen auf der einen, und der Ebene von Hadronen auf der anderen Seite, die wie zwei Sprachen die selben Gegenstände beschreiben, „übersetzen“ zu können. Eine direkte perturbative Berechnung ist jedoch nicht möglich.

Es bestehen allerdings heutzutage viele theoretische Methoden und Modelle, die in gewissen Bereichen der starken Wechselwirkung die Phänomenologie korrekt beschreiben und Vorhersagen ermöglichen, und die alle jeweils ihre Vor- und Nachteile besitzen. Darunter sind auch spezielle nichtperturbative Methoden, mit denen man Zugang zur Berechnung hadronischer Größen finden kann, und die in ihrem heutigen Entwicklungsstand vielfältige und bemerkenswerte Vorhersagen erlauben. Die zwei in der modernen Anwendung bekanntesten sind die Methoden der QCD-Summenregeln und der Gitter-QCD. Die QCD-Summenregeln sind Hauptgegenstand dieser Arbeit und werden ausführlich in Kapitel 3 besprochen, während im folgenden Abschnitt dieses Kapitels ein allgemeinerer Überblick über andere Methoden in der hadronischen Phänomenologie gegeben wird. Darauf folgt die Definition der grundlegenden Begriffe zur Beschreibung hadronischer Wechselwirkungen. Schließlich wird die im weiteren Verlauf benötigte Methode der analytischen S -Matrix und Dispersionsrelationen vorgestellt, und einige daraus folgende Parametrisierungen für die in dieser Arbeit betrachteten Formfaktoren zusammengefasst, die später zu deren Beschreibung verwendet werden.

¹Aus: Shakespeare, „Hamlet“

2.1. Überblick

Hadronische Phänomenologie

Die theoretische Beschreibung von Hadronen hängt sehr stark vom betrachteten Energiebereich ab. Für nichtrelativistische Energien reicht es beispielsweise, ein Hadron klassisch als punktförmiges Teilchen zu betrachten, wie etwa im Wasserstoffatom. Bei höheren dagegen (etwa bei der Elektron-Nukleon-Streuung) wird mehr und mehr die von Quarks und Gluonen herrührende Substruktur wichtig, bis hin zu sehr hohen Energien, bei denen aufgrund der asymptotischen Freiheit mit perturbativer QCD gearbeitet werden kann.

In dieser Arbeit von Interesse ist der mittlere Energiebereich $E \sim \mathcal{O}(\text{GeV})$ in der Größenordnung der Hadronmassen und darüber. Hier hat die starke Wechselwirkung eine sehr reichhaltige Phänomenologie - es treten beispielsweise *Resonanzen* auf, also die Produktion kurzlebiger gebundener Zwischenzustände, die sich als großer Anstieg im Wirkungsquerschnitt äußern, wenn die Energie der Masse des intermediären Zustands entspricht (für weitere Details siehe z.B. [9, 10]). Solche Phänomene sind nichtperturbativen Ursprungs und können mit den führenden Ordnungen der Störungstheorie nicht beschrieben werden. Dazu existieren jedoch wiederum gewisse Modelle und Herangehensweisen, wie unter anderem die analytische S -Matrix-Theorie und daraus folgend die Regge-Theorie, die bereits vor Entdeckung der QCD existierten und ein sehr wichtiges Hilfsmittel zu deren Analyse darstellen.

Wichtig in der Hadronphysik ist ebenfalls die Nutzung von *effektiven Theorien* mit hadronischen Freiheitsgraden, also solche, bei denen man Wechselwirkungen und Übergänge zwischen Hadronen direkt in einer entsprechenden Feldtheorie für diese modelliert. Das erfolgreichste und am besten bekannte Beispiel dafür ist die *chirale Störungstheorie* (siehe z.B. [27, 21]). Ausgehend von der chiralen Symmetrie in der QCD, die darauf beruht, dass $m_u, m_d \ll \Lambda_{QCD}$ gilt, kann eine erfolgreiche Beschreibung der Dynamik von Pionen und Nukleonen im entsprechenden Energiebereich formuliert werden. Eine Ausdehnung auf die noch approximativ gültige $SU(3)_{flavour}$ -Symmetrie mit dem strange-Quark ist ebenfalls möglich.

Als effektive Theorie mit Quark- und Gluon-Freiheitsgraden ist schließlich noch die oben bereits erwähnte *heavy quark effective theory* zu nennen. Mit deren Hilfe können aus Symmetrieüberlegungen wichtige Relationen für nichtperturbative Größen von Hadronen mit schweren Quarks getroffen werden.

Nichtperturbative Methoden der QCD

Die Methoden der QCD-Summenregeln sowie der Gitter-QCD - zu der hier noch kurz einige Worte genannt werden sollen - studieren *Korrelationsfunktionen* $\langle 0 | \mathcal{O}^{(1)}(x_1) \mathcal{O}^{(2)}(x_2) \dots \mathcal{O}^{(n)}(x_n) | 0 \rangle$, also Vakuumerwartungswerte von Produkten aus bestimmten Quark- und Gluon-Operatoren. Diese können jeweils so gewählt werden, dass sie in Verbindung mit entsprechenden hadronischen Größen stehen. Die Methode der QCD-Summenregeln erlaubt eine Berechnung der Korrelationsfunktionen auf analytischem Weg durch die Technik der Operatorproduktentwicklung.

Die Gitter-QCD behandelt die Korrelationsfunktionen dagegen mithilfe des Pfadintegralformalismus und berechnet die dabei auftretenden Funktionalintegrale numerisch auf einem diskreten Raum-Zeit-Gitter. Für ausreichend kleine Abstände der Gitterpunkte lässt sich damit der kontinuierliche Fall annähern. Diese Technik stellt ebenfalls eine Möglichkeit der Regularisierung der UV-Divergenzen der QFT dar, sie ist allerdings auch mit gewissen theoretischen Problemen behaftet. So ist zum Beispiel die Diskretisierung der Dirac-Algebra für die Quarkfelder eine schwierige Aufgabe, für die verschiedene Herangehensweisen genutzt werden. Aufgrund der endlichen Gitterkonstanten muss zudem mit unphysikalischen hohen Massen der leichten Quarks (und somit auch des Pions) gerechnet werden, von wo dann mit Hilfe der chiralen Störungstheorie zu den physikalischen Werten extrapoliert wird.

Neben anderen Fehlerquellen, z.B. aus der numerischen Rechnung, erlaubt die heute verfügbare Computertechnik diese äußerst rechenintensiven Aufgaben jedoch mit immer höherer Präzision, und die Methode wird kontinuierlich verbessert. Viele erfolgreiche Anwendungen wurden bisher durchgeführt und die Gitter-QCD ist mittlerweile zum wichtigsten Mittel für nichtperturbative Rechnungen geworden. Weitere Details können z.B. in [28, 29] gefunden werden. Die Techniken der Gitter-QCD und der QCD-Summenregeln sind in gewisser Hinsicht komplementär und ergänzen sich insbesondere über die gegenseitige, voneinander unabhängige Überprüfung der Resultate.

Zusammenfassende Literatur zu den oben erwähnten Methoden, die hier bei weitem nicht vollständig aufgezählt werden können, ist in vielen Lehrbüchern und Artikeln zum Thema zu finden, etwa in [30, 31] oder auch im aktuellen Zusammenhang mit dem PANDA-Experiment in [32, 33].

2.2. Grundbegriffe der nichtperturbativen QCD

Die Aufgabe der nichtperturbativen QCD ist die Vorhersage grundlegender Eigenschaften von Hadronen - z.B. deren Masse - und die Berechnung von Matrixelementen für Prozesse, an denen Hadronen beteiligt sind. Ein Hadron H mit Impuls p wird dabei allgemein beschrieben als ein Zustand $|H(p)\rangle$, der eine komplizierte, nicht perturbativ berechenbare Überlagerung aus Quark- und Gluonzuständen ist.

Meist ist man jedoch nicht daran interessiert, diese Überlagerung exakt zu kennen, sondern möchte etwa wissen, wie sich die Bindung der Quarks zu Hadronen auf deren Dynamik in einem bestimmten Prozess auswirkt. Ein gutes Beispiel dafür ist der in dieser Arbeit betrachtete Prozess $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$, bei dem auf Quarkniveau ein schwacher Zerfall $c \rightarrow d \ell \nu_\ell$ stattfindet. Da man jedoch nur die Hadronzustände $|D\rangle$ und $|\pi\rangle$ im Ein- bzw. Ausgangszustand messen kann, müssen diese damit in Verbindung gebracht werden. Die Begriffe, die zur Beschreibung solcher Prozesse verwendet werden, sollen in diesem Abschnitt definiert und erklärt werden.

2.2.1. Definition interpolierender Ströme und Zerfallskonstanten für Mesonen

Einführendes Beispiel: Der Pion-Zerfall

Zur Motivation der folgenden Definitionen wird als einführendes Beispiel der durch ein W -Boson vermittelte schwache Zerfall eines geladenen Pions betrachtet (Abbildung 2.1).

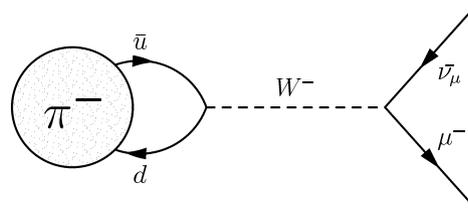


Abbildung 2.1.: Der Zerfall $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ in führender Ordnung der Störungstheorie.

Entwickelt man den Propagator des W -Bosons in inverse Potenzen von m_W , so ist der führende Term eine Vierpunktwechselwirkung (der $V-A$ -Strom, mit dem die schwache Wechselwirkung historisch zuerst beschrieben wurde). Der den Übergang auf Quarkniveau vermittelnde Operator lautet $\bar{d}\gamma^\mu(\mathbf{1} - \gamma_5)u \cdot \bar{\mu}\gamma_\mu(\mathbf{1} - \gamma_5)\nu_\mu$. Das Übergangsmatrixelement \mathcal{M} , aus dem die Zerfallsbreite berechnet wird, kann dann in folgender Weise geschrieben werden:

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle \mu \nu_\mu | \bar{d}\gamma^\mu(\mathbf{1} - \gamma_5)u \cdot \bar{\mu}\gamma_\mu(\mathbf{1} - \gamma_5)\nu_\mu | \pi \rangle. \quad (2.1)$$

Dabei stellt $\bar{d}(\mathbf{1} - \gamma_5)\gamma_5 u$ den linkshändigen Strom dar, durch den der Pion-Zustand über die schwache Wechselwirkung in einen entsprechenden leptonischen Strom übergeht, der das Myon und das Neutrino erzeugt. Dieses Matrixelement faktorisiert in einen hadronischen Teil und einen leptonischen Teil, wobei deren Zustände sich in getrennten Hilberträumen befinden, und beide Teile des Diagramms in der hier betrachteten Ordnung der Störungstheorie nicht miteinander wechselwirken:

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle 0 | \bar{d}\gamma^\mu(\mathbf{1} - \gamma_5)u | \pi \rangle \cdot \langle \mu \nu_\mu | \bar{\mu}\gamma_\mu(\mathbf{1} - \gamma_5)\nu_\mu | 0 \rangle. \quad (2.2)$$

Während der leptonische Anteil leicht berechenbar ist, ist die genaue Struktur des Pion-Zustandes unbekannt. Der in dem Matrixelement $\langle 0 | \bar{d} \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma_5) u | \pi \rangle$ auftretende Operator hat durch die schwache Wechselwirkung ebenfalls die Struktur Vektor- minus Axialvektorstrom. Da das Pion jedoch negative Parität besitzt und der Vektorstrom einen Quarkzustand mit positiver Parität beschreibt, der nicht im Pion enthalten ist, muss dieser Teil des Matrixelements null sein. Es verbleibt also das Matrixelement $\langle 0 | \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 u | \pi(p) \rangle$, wobei jetzt der Impuls p des Pions im Ausgangszustand aufgeführt wird. Es kann nicht perturbativ berechnet werden, muss jedoch aufgrund der Lorentzinvarianz proportional zum einzigen in diesem Prozess vorhandenen Lorentzvektor p^μ sein:

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 u | \pi(p) \rangle = i f_\pi p^\mu . \quad (2.3)$$

Die Proportionalitätskonstante wird dabei als *Pion-Zerfallskonstante* f_π bezeichnet. Sie ist das klassische Beispiel einer nichtperturbativen Größe und aus diesem Zerfall auch experimentell messbar. Zur Beschreibung hadronischer Wechselwirkungen definiert man in analoger Weise noch weitere Größen, von denen viele in diesem Abschnitt bzw. im weiteren Verlauf der Arbeit vorkommen werden. Führt man mit diesem Matrixelement die Berechnung der Zerfallsbreite zu Ende, so erhält man die bekannte Formel für den Pionzerfall:

$$\Gamma_{\pi \rightarrow \mu \nu \mu} = \frac{G_F^2}{8\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right)^2 . \quad (2.4)$$

Definition der D -Meson-Zerfallskonstanten und interpolierender Ströme

Hauptthema dieser Arbeit sind Hadronen, die ein charm-Quark enthalten, wie z.B. das D -Meson oder das Λ_c -Baryon. Analog zur Pion-Zerfallskonstante definiert man daher auch die Zerfallskonstante f_D des ebenfalls pseudoskalaren D -Mesons. Die Notation war im obigen Beispiel jedoch aufgrund des einführenden Charakters etwas unterdrückt, da die Quarkoperatoren jeweils vom Ort x abhängen und ihr Verhalten unter Translationen ebenfalls korrekt berücksichtigt werden muss. Dies führt zu einem Phasenfaktor in der Definition von f_D (der für das Pion natürlich auch hinzugefügt werden muss):

$$\langle 0 | \bar{c}(x) \gamma^\mu \gamma_5 q(x) | D(p) \rangle = i f_D p^\mu e^{-ip \cdot x} . \quad (2.5)$$

Dabei ist $q(x)$ der Feldoperator eines leichten Quarks u oder d . Der zusammengesetzte Operator $j^\mu(x) = \bar{c}(x) \gamma^\mu \gamma_5 q(x)$ ist ein Beispiel für einen sogenannten *interpolierenden Strom*, also einen Operator, der aus dem Vakuum einen QCD-Zustand erzeugen kann, welcher einen Überlapp mit dem physikalischen Zustand des Hadrons hat. Diese interpolierenden Ströme sind ein zentrales Hilfsmittel, das in der nichtperturbativen QCD genutzt wird.

Durch Anwendung von ∂_μ auf die obige Definition kann diese unter Benutzung der Dirac-Gleichung noch umgeformt werden zur oft benutzten Relation:

$$(m_c + m_q) \langle 0 | \bar{c}(x) i\gamma_5 q(x) | D(p) \rangle = m_D^2 f_D e^{-ip \cdot x} . \quad (2.6)$$

Der pseudoskalare Strom $j_5(x) = (m_c + m_q) \bar{c}(x) i\gamma_5 q(x)$ ist somit natürlich auch ein interpolierender Strom für das D -Meson.

Bemerkung: Aufgrund der Translationsinvarianz der Definition wird oft zur Vereinfachung der Schreibweise $x = 0$ gewählt, bzw. das Argument x der Feldoperatoren sowie ggf. auch der Impuls p ganz weggelassen. In diesem Fall ist dann implizit $x = 0$ gemeint. Ferner wird in der Regel die Näherung $m_q = 0$ für die leichten Quarks u und d verwendet. Der Strom $j_5(x)$ wird zudem mit dem Faktor m_c definiert, damit er invariant unter Transformationen der Renormierungsskala ist. Die obige Gleichung hat damit und in dieser Kurznotation, die in der Regel im weiteren Verlauf dieser Arbeit für interpolierende Ströme genutzt wird, also die Gestalt:

$$\langle 0 | j_5 | D(p) \rangle = \langle 0 | \bar{c} m_c i\gamma_5 q | D(p) \rangle = m_D^2 f_D . \quad (2.7)$$

In ähnlicher Weise wird auch noch die hier ebenfalls benötigte Zerfallskonstante des D^* -Vektormesons definiert:

$$\langle 0 | \bar{c} \gamma^\mu u | D^*(p, \epsilon) \rangle = m_{D^*} f_{D^*} \epsilon^\mu(p) . \quad (2.8)$$

Dabei ist ϵ^μ dessen Polarisationsvektor, wobei die Notation λ für die Polarisations-einstellung hier unterdrückt ist.

Die eben vorgestellten interpolierenden Ströme stellen die einfachsten Fälle dar, und sind daher auch in praktischen Rechnungen zu bevorzugen. Es können jedoch natürlich auch viele weitere Operatoren definiert werden, die an ein gegebenes Hadron koppeln. Diese können neben den Feldoperatoren für die Valenzquarks etwa noch Ableitungen oder Gluon-Operatoren enthalten. Analog zu den Zerfallskonstanten definieren diese entsprechende nichtperturbative Parameter, die vor allem zur Beschreibung von höheren Termen in der Operatorproduktentwicklung der QCD-Summenregelrechnungen wichtig sind (höhere *Momente*). Beispiele dafür sind etwa die Parameter der in Anhang B aufgeführten Lichtkegelverteilungsamplituden von Pion und Kaon, welche in Abschnitt 3.2 vorgestellt werden. Auch koppeln die interpolierenden Ströme natürlich nicht nur an den Grundzustand (wie D oder D^*), sondern auch an höher angeregte hadronische Zustände. Für die einfachsten interpolierenden Ströme erwartet man, dass deren Kopplung an den Grundzustand am größten ist. Kompliziertere interpolierende Ströme mit Ableitungen beispielsweise werden dagegen eher höhere Drehimpulsanregungen beschreiben.

2.2.2. Zerfallskonstanten für Baryonen und der Sonderfall der Parität

Analog zu Mesonen kann man nun auch für Baryonen entsprechende interpolierende Ströme definieren, für die sich jedoch gewisse Unterschiede ergeben. Während man für Mesonen Ströme aus einem Quark- und einem Antiquark-Operator wählt, ist hier eine unter Vertauschung der Farben antisymmetrische Kombination dreier Quark-Operatoren zu verwenden. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Spin-1/2-Baryonen betrachtet, daher sind die drei Operatoren so zu kontrahieren, dass sie einem Spinor entsprechen. (Mit dem *Rarita-Schwinger-Formalismus* für Spin-3/2-Fermionen können aber auch Ströme für diese definiert werden.)

Eine allgemeine Form für Baryon-Ströme ohne Ableitungen, etc. (s.o.) ist also:

$$\eta(x) = \epsilon^{ijk} (a_i^T(x) C \Gamma b_j(x)) \tilde{\Gamma} c_k(x) . \quad (2.9)$$

Dabei sind a, b, c drei beliebige Quark-Flavours, i, j, k Farb-Indizes und Γ und $\tilde{\Gamma}$ zwei beliebige Dirac-Matrizen. C ist der Ladungskonjugations-Operator (siehe z.B. [5]), den man benötigt, da der transponierte Quark-Operator sonst ein Antiquark und kein Quark beschreiben würde. (Siehe auch die grundlegende Arbeit [34] zur allgemeinen Form dieser Ströme.)

Wie bei Mesonen wird auch hier in der Regel die abgekürzte Notation

$$\eta = (a^T C \Gamma b) \tilde{\Gamma} c \quad (2.10)$$

im weiteren verwendet. Je nach Wahl von $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ und der Quarkflavours beschreiben die Ströme unterschiedliche Baryonen. Die erste Anwendung und Untersuchung baryonischer Ströme mit der Methode der QCD-Summenregeln wurde in [35, 36, 37] vorgenommen. Unter Verwendung dieser Ergebnisse sowie auch unter Betrachtung der heavy-quark-Symmetrie (siehe [36]) wurde die Eignung der verschiedenen Ströme für Vorhersagen untersucht. Für diese Arbeit sind die charm-Baryonen Λ_c und Σ_c von Bedeutung:

- Das Λ_c -Baryon hat den Quarkinhalt udc , wobei der ud -Diquark-Zustand den Isospin 0 besitzt. Es bleiben damit drei Möglichkeiten für Ströme ohne Ableitungen, die hier als grundlegende interpolierende Ströme gewählt werden. Dies sind der pseudoskalare Strom mit $\Gamma = \gamma_5, \tilde{\Gamma} = \mathbf{1}$:

$$\eta_{\Lambda_c}^{(\mathcal{P})} = (u C \gamma_5 d) c , \quad (2.11)$$

der Axialvektorstrom mit $\Gamma = \gamma_5 \gamma_\mu, \tilde{\Gamma} = \gamma^\mu$:

$$\eta_{\Lambda_c}^{(\mathcal{A})} = (u C \gamma_5 \gamma_\mu d) \gamma^\mu c , \quad (2.12)$$

und der skalare Strom mit $\Gamma = \mathbf{1}, \tilde{\Gamma} = \gamma_5$:

$$\eta_{\Lambda_c}^{(\mathcal{S})} = (u C d) \gamma_5 c . \quad (2.13)$$

Die Namensgebung orientiert sich an der Dirac-Struktur des Diquarks ($u C \Gamma d$). Bei letzterem befindet es sich in einem Zustand mit Drehimpuls 1 (P -Welle), weswegen man hier keine gute Beschreibung des Λ_c erwartet [38]. Dieser Strom wird daher im weiteren nicht verwendet.

In der Literatur finden sich zudem noch viele verschiedene alternative Definitionen, da auch jede Wahl von Linearkombinationen dieser Ströme oder auch Ströme mit einer anderen Reihenfolge der Quarkflavours möglich sind. Letztere können mit Hilfe einer Fierz-Transformation aber auch in die hier definierten umgeschrieben werden. Mehr dazu folgt bei der Anwendung in Abschnitt 3.1.2.

- Das Σ_c -Baryon hat den selben Quarkinhalt udc wie das Λ_c , jedoch ist hier das ud -Diquark in einem Isospin 1-Zustand. Dies lässt als Wahl den (vektoriellen) Ioffe-Strom mit $\Gamma = \gamma_\mu, \tilde{\Gamma} = \gamma^\mu \gamma_5$:

$$\eta_{\Sigma_c}^{(\mathcal{I})} = (u C \gamma_\mu d) \gamma^\mu \gamma_5 c , \quad (2.14)$$

und den Tensorstrom mit $\Gamma = \sigma_{\mu\nu}, \tilde{\Gamma} = \sigma^{\mu\nu} \gamma_5$ zu:

$$\eta_{\Sigma_c}^{(\mathcal{T})} = (u \sigma_{\mu\nu} d) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 c . \quad (2.15)$$

Beide Ströme wurden in ihrer ersten Anwendung für das Nukleon betrachtet (siehe [35], daher auch der Name Ioffe-Strom). Dort stellten sie sich als passende Wahl heraus. Der Ioffe-Strom wurde als optimal zur Beschreibung des Nukleons eingeschätzt, was sich auch in neueren Analysen bestätigt [39].

Daraus folgend definiert man die entsprechenden Zerfallskonstanten $\lambda_B^{(i)}$ für die jeweiligen Ströme (i) mit $i = \mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{T}$ und Baryonen B . Als Beispiel wird die Definition der der Zerfallskonstanten für Λ_c betrachtet (alle anderen sind völlig analog):

$$\langle 0 | \eta^{(i)} | \Lambda_c(p) \rangle = \lambda_{\Lambda_c}^{(i)} m_{\Lambda_c} u_{\Lambda_c}(p) . \quad (2.16)$$

$u_{\Lambda_c}(p)$ ist dabei der bekannte Spinor für die Lösungen positiver Energie der Dirac-Gleichung, da Λ_c ein Teilchen (und kein Antiteilchen) ist. (Die Notation für die Helizität wird hier unterdrückt.)

Die obige Definition ist weitgehend analog zum Fall der Mesonen, ein sehr entscheidender Unterschied existiert aber im Fall der Baryonen und betrifft die Parität. Es ist bekannt (siehe z.B. [2]), dass Mesonen klar definierte Parität besitzen, aber für Dirac-Fermionen nur die Aussage getroffen werden kann, dass Teilchen und Antiteilchen relativ zueinander unterschiedliche Parität besitzen. Deren Wahl ist hier Konvention und wird üblicherweise so getroffen, dass Quarks positive und Anti-quarks negative haben. Eine wichtige Konsequenz daraus ist, dass ein baryonischer, interpolierender Strom (obwohl er als Operator eine definierte Parität besitzt) an

Baryon-Zustände positiver und negativer Parität koppeln kann, was für Mesonen nicht der Fall ist.

Dies kann man auf folgende Weise sehen. Die für Λ_c und Σ_c gewählten interpolierenden Ströme haben positive Parität (siehe z.B. [34]). Aufgrund der Definition kann man durch Multiplikation mit γ_5 einen Operator mit negativer Parität definieren, also hier $\tilde{\eta}^{(i)} := \gamma_5 \eta^{(i)}$. Dieser koppelt mit einer anderen Kopplungskonstante $\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)}$ an den Grundzustand des Λ_c -Baryons mit negativer Parität ($\Lambda_c^+(2595)$ [17]), der in dieser Arbeit mit Λ_c^* bezeichnet werden soll:

$$\langle 0 | \tilde{\eta}^{(i)} | \Lambda_c^*(p) \rangle = \langle 0 | \gamma_5 \eta^{(i)} | \Lambda_c^*(p) \rangle = \lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)} m_{\Lambda_c^*} u_{\Lambda_c^*}(p). \quad (2.17)$$

Durch weitere Multiplikation der gesamten Gleichung mit γ_5 erhält man dann:

$$\langle 0 | \eta^{(i)} | \Lambda_c^*(p) \rangle = \lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)} m_{\Lambda_c^*} \gamma_5 u_{\Lambda_c^*}(p). \quad (2.18)$$

Daran sieht man, dass der Strom $\eta^{(i)}$ trotz seiner definierten positiven Parität auch eine nichtverschwindende Kopplung $\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)}$ an den Zustand mit negativer Parität besitzt. Dieser Punkt wird später bei der Berechnung der Zerfallskonstanten noch von wichtiger Bedeutung sein.

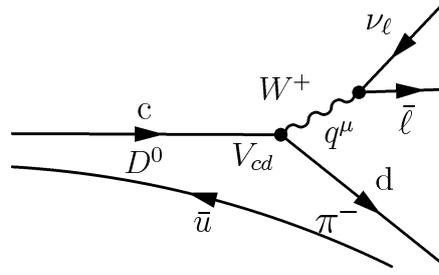
2.2.3. Formfaktoren und hadronische Wechselwirkungen

In diesem Unterabschnitt werden *Formfaktoren* zur Beschreibung von hadronischen Übergängen definiert. Zudem ist es möglich, die Wechselwirkung zwischen Hadronen als eine effektive Theorie zu formulieren, in der diese (und nicht die Quarks) als fundamental betrachtet werden und es *effektive Kopplungskonstanten* zwischen ihnen gibt. Bekannte Beispiele dafür sind die Kernkraft, bei der Pionen zwischen den Nukleonen im Kern mit einer Kopplungskonstanten $g_{\pi NN}$ ausgetauscht werden, sowie die chirale Störungstheorie. Die Formfaktoren und die Kopplungskonstanten können zudem durch die Methode der analytischen S -Matrix und der Dispersionsrelationen miteinander in Verbindung gebracht werden, was im nächsten Abschnitt 2.3 genauer vorgestellt wird.

Formfaktoren

Formfaktoren dienen der Beschreibung von fundamentalen Wechselwirkungen der Quarks, die in Hadronen gebunden sind, und beschreiben den Einfluss der hadronischen Bindung auf diese.

Als Beispiel wird der in dieser Arbeit betrachtete schwache Zerfall $c \rightarrow d$ des in einem D -Meson mit einem leichten Quark gebundenen charm-Quarks (siehe Abbildung 2.2) betrachtet. Das D -Meson geht durch den schwachen Quarkstrom


 Abbildung 2.2.: Der Zerfall $D^0 \rightarrow \pi^- \bar{l} \nu_l$ auf Quarkniveau.

$\bar{d}\gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma_5) c$ über in ein π^- -Meson, wobei analog zum Pionzerfall aufgrund der Paritätserhaltung aber nur der Vektoranteil beiträgt. Von Interesse ist nun das Übergangsmatrixelement $\langle \pi^-(p) | \bar{d}\gamma^\mu c | D^0(p+q) \rangle$, hier für den speziellen Fall $D^0 \rightarrow \pi^- W^+$. Aufgrund der Lorentzinvarianz und der Paritätserhaltung in der starken Wechselwirkung muss auch dieses, ähnlich zu den Zerfallskonstanten, die folgende Struktur besitzen:

$$\langle \pi^-(p) | \bar{d}\gamma^\mu c | D^0(p') \rangle = f_{D\pi}^+(q^2)(p'^\mu + p^\mu) + f_{D\pi}^-(q^2)(p'^\mu - p^\mu), \quad (2.19)$$

mit $p' = p + q$. $f_{D\pi}^+(q^2)$ und $f_{D\pi}^-(q^2)$ sind zwei voneinander unabhängige Funktionen des Impulsübertrags q^2 und werden als *Formfaktoren* bezeichnet. Die Variable q^2 kann dabei Werte im Bereich $0 \leq q^2 \leq q_{max}^2 = (m_D - m_\pi)^2$ annehmen.

Häufig wird auch eine äquivalente Formulierung dazu benutzt, in der statt $f_{D\pi}^-(q^2)$ der *skalare Formfaktor* $f_{D\pi}^0(q^2)$ definiert wird als:

$$f_{D\pi}^0(q^2) = f_{D\pi}^+(q^2) + \frac{q^2}{m_D^2 - m_\pi^2} f_{D\pi}^-(q^2). \quad (2.20)$$

Dessen Definition erhält man (analog zu Gl. (2.6)) durch Bildung der Divergenz des Vektorstroms in Gleichung (2.19), welche sich dadurch auf das durch einen skalaren Strom vermittelte Übergangsmatrixelement reduziert. Dieser Formfaktor ist allerdings in der Zerfallsbreite für $D \rightarrow \pi l \nu_l$ nur proportional zur Leptonmasse und daher stark unterdrückt. Hier sind daher die Formfaktoren $f^+(q^2)$ von vorrangigem Interesse.

Eine entsprechende Aufspaltung der Übergangsmatrixelemente kann analog auch für andere Prozesse durchgeführt werden. Beispiele dafür sind die in dieser Arbeit betrachteten Formfaktoren für $\Lambda_c \rightarrow N$ -Übergänge, durch pseudoskalare, Vektor- oder Axialvektor-Ströme vermittelt:

$$\langle \Lambda_c(P - q) | \bar{c} i m_c \gamma_5 u | N(P) \rangle = G(q^2)(m_{\Lambda_c} + m_N) \bar{u}_{\Lambda_c}(P - q) i \gamma_5 u_N(P), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda_c(P - q) | \bar{c} \gamma_\mu u | N(P) \rangle \\ &= \bar{u}_{\Lambda_c}(P - q) \left\{ f_1(q^2) \gamma_\mu + i \frac{f_2(q^2)}{m_{\Lambda_c}} \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \frac{f_3(q^2)}{m_{\Lambda_c}} q_\mu \right\} u_N(P), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda_c(P - q) | \bar{c} \gamma_\mu \gamma_5 u | N(P) \rangle \\ &= \bar{u}_{\Lambda_c}(P - q) \left\{ g_1(q^2) \gamma_\mu + i \frac{g_2(q^2)}{m_{\Lambda_c}} \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \frac{g_3(q^2)}{m_{\Lambda_c}} q_\mu \right\} \gamma_5 u_N(P). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Für den pseudoskalaren Strom existiert ein Formfaktor $G(q^2)$ und für die (Axial-) Vektor-Übergänge jeweils drei, entsprechend den möglichen, unabhängigen Dirac-Strukturen. Die Vorzeichen und Normierungsfaktoren sind Konvention und können ggf. unterschiedlich zu anderen Referenzen sein. Sie sind so gewählt, dass die Formfaktoren immer als dimensionslos definiert sind.

Auch hier kann man durch bilden der Divergenz des Axialvektorstroms folgenden Zusammenhang finden:

$$G(q^2) = g_1(q^2) - \frac{q^2}{m_{\Lambda_c}(m_{\Lambda_c} + m_N)} g_3(q^2). \quad (2.24)$$

Zudem lassen sich analog auch Formfaktoren für die Teilchen mit negativer Parität definieren:

$$\langle \Lambda_c^*(P - q) | i m_c \bar{c} \gamma_5 u | N(P) \rangle = i \tilde{G}(q^2) (m_{\Lambda_c^*} - m_N) \bar{u}_{\Lambda_c}(P - q) u_N(P), \quad (2.25)$$

sowie entsprechende Ausdrücke $\tilde{f}_{1,2,3}(q^2)$ und $\tilde{g}_{1,2,3}(q^2)$ für die Vektor- und Axialvektor-Formfaktoren, die man jeweils durch Hinzufügen von γ_5 rechts vom Λ_c -Spinor in (2.22) und (2.23) und die Ersetzung $\Lambda_c \rightarrow \Lambda_c^*$ erhält.

Hadronische Kopplungskonstanten

Durch die starke Wechselwirkung können direkt Übergänge von Hadronen in andere über starke Zerfälle vermittelt werden. Das Übergangsmatrixelement für einen solchen wird durch eine *hadronische Kopplungskonstante* beschrieben. Ein Beispiel dafür ist die $DD^*\pi$ -Kopplungskonstante, definiert durch das folgende Matrixelement:

$$g_{DD^*\pi} = \langle D(p)\pi(q) | D^*(p + q) \rangle. \quad (2.26)$$

Diese ist durch den Zerfall $D^* \rightarrow D\pi$ auch direkt messbar, der aufgrund der beteiligten Massen kinematisch erlaubt ist. Für B -Mesonen ist das wegen $m_{B^*} < m_B + m_\pi$ allerdings nicht gegeben, weswegen der entsprechende Übergang dort nur unter Beteiligung virtueller Teilchen möglich ist.

In einer effektiven Theorie mit hadronischen Freiheitsgraden tauchen die Kopplungskonstanten als Vertexfaktoren im Wechselwirkungsteil der entsprechenden Lagrangedichte auf. Ein Hauptziel dieser Arbeit ist die Berechnung der entsprechenden Konstanten für Übergänge in einer solchen Theorie mit Nukleonen, D - und D^* -Mesonen und Λ_c - bzw. Σ_c -Baryonen. Der Wechselwirkungsterm lautet dafür:

$$\mathcal{L}_{\Lambda_c ND^{(*)}} = g_{\Lambda_c ND} D \left(\bar{\Lambda}_c i\gamma_5 N \right) + \bar{\Lambda}_c \left(g_{\Lambda_c ND^*}^V \gamma^\mu D_\mu^* + \frac{g_{\Lambda_c ND^*}^T}{m_{\Lambda_c} + m_N} \sigma_{\mu\nu} \partial^\nu D^{*\mu} \right) N + h. c. \quad (2.27)$$

Es existieren drei unabhängige Kopplungskonstanten $g_{\Lambda_c ND}$, $g_{\Lambda_c ND^*}^V$ und $g_{\Lambda_c ND^*}^T$ für die erlaubten pseudoskalaren, Vektor- und Tensor-Übergangsvertizes. Sie sind über die folgenden Matrixelemente definiert:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_c(P-q) D(q) | N(P) \rangle &= g_{\Lambda_c ND} \bar{u}_{\Lambda_c}(P-q) i\gamma_5 u_N(P), \\ \langle \Lambda_c(P-q) D^*(q) | N(P) \rangle &= \bar{u}_{\Lambda_c}(P-q) \left(g_{\Lambda_c ND^*}^V \not{\epsilon} + i \frac{g_{\Lambda_c ND^*}^T}{m_{\Lambda_c} + m_N} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^\mu q^\nu \right) u_N(P). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die entsprechenden Definitionen für Σ_c sind völlig analog.

2.3. Analytische S -Matrix-Theorie und Dispersionsrelationen

Wie bereits erwähnt, ist die Theorie der analytischen S -Matrix und die darauf aufbauenden Methoden eine der frühesten angewandten Konzepte zur Beschreibung hadronischer Wechselwirkungen. Ausführliche, weiterführende Literatur zu den hier vorgestellten Konzepten findet sich in [9, 40, 41].

Die formale Definition der S -Matrix für die QCD ist gegeben durch die Übergangsamplituden $S_{fi} = \langle f | T \{ \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}^I(x)) \} | i \rangle$ zwischen Eingangszuständen $|i\rangle$ und Ausgangszuständen $|f\rangle$, die durch den Wechselwirkungsteil \mathcal{L}_{QCD}^I der QCD-Lagrangedichte vermittelt werden. Als Beispiel zur Erklärung soll hier kurz der Wirkungsquerschnitt $\sigma_{D\pi \rightarrow D\pi}(s, t, u)$ eines elastischen, hadronischen Streuprozesses $D\pi \rightarrow D\pi$ betrachtet werden (Abbildung 2.3 (a)), wobei s, t, u die bekannten Mandelstam-Variablen sind.

Bei der Kollision der beiden Hadronen finden komplizierte, nichtperturbative Quark-Gluon-Wechselwirkungen statt, die zur Bildung hadronischer Zwischenzustände führen. Diese manifestieren sich in Form von *Resonanzen* und können sowohl Einteilchen-gebundene Zustände wie das D^* und höhere Anregungen, sowie kontinuierliche Mehrteilchen-Zustände, wie intermediäre $D\pi$ -, $D\pi\pi\pi$ -Zustände, etc. enthalten. Die Einteilchen-Zustände führen zu isolierten Polen im Übergangsmatrixelement für diesen Prozess, während die Pole der Mehrteilchen-Zustände in einer

2.3. Analytische S -Matrix-Theorie und Dispersionsrelationen

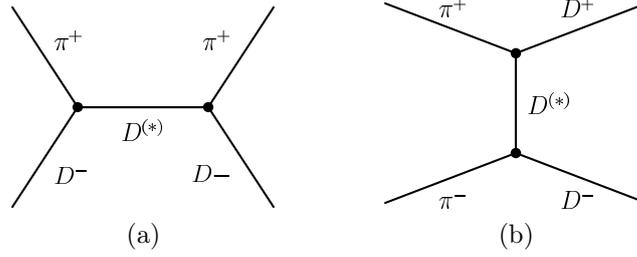


Abbildung 2.3.: (a) Die durch hadronische Zwischenzustände mit $D^{(*)}$ -Quantenzahlen im s -Kanal vermittelte Streuung $\pi^+ D^- \rightarrow \pi^+ D^-$, sowie (b) der dazu gekreuzte Prozess $\pi^+ \pi^- \rightarrow D^+ D^-$ im t -Kanal.

kontinuierlichen *hadronischen Spektraldichte* $\rho_h(s)$ zusammengefasst werden:

$$\mathcal{M}_{D\pi \rightarrow D\pi} \sim \frac{g_{DD^*\pi}^2}{s - m_{D^*}^2} + \int_{(m_D + m_\pi)^2}^{\infty} ds' \frac{\rho_h(s')}{s - s'}. \quad (2.29)$$

Im ersten Term tritt dabei die oben definierte $DD^*\pi$ -Kopplungskonstante auf.

Die entscheidende Aussage der analytischen S -Matrix-Theorie bezieht sich auf Prozesse, die mit solchen durch *crossing*-Symmetrie verknüpft sind, wie in diesem Fall den Prozess $\pi\pi \rightarrow DD$, der durch Austausch von Hadronen mit D^* -Quantenzahlen vermittelt (Abbildung 2.3 (b)) dargestellt werden kann. Über die *crossing*-Symmetrie sind die beiden Prozesse kinematisch miteinander verbunden, indem die Variablen s und t vertauscht werden. Während für $D\pi \rightarrow D\pi$ (dem s -Kanal) die Werte $s \geq (m_\pi + m_D)^2$ dem physikalischen Bereich entsprechen, entspricht für $\pi\pi \rightarrow DD$ (dem t -Kanal) der physikalische Bereich der konjugierten Variablen $t \leq t_{min} < 0$.

Das grundlegende Postulat ist nun, dass beide (S -Matrix-)Übergangsmatrixelemente für diese Prozesse durch *die selbe universelle Funktion* beschrieben werden, die in den verschiedenen Bereichen der Variablen jeweils den verschiedenen Prozessen entspricht. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die S -Matrix eine analytische Funktion der kinematischen Variablen ist, und man sie von einem physikalischen Bereich in einen anderen durch analytische Fortsetzung im Komplexen extrapolieren kann. Dieses (niemals streng bewiesene) Postulat beruht auf verschiedenen grundlegenden Prinzipien wie Unitarität und Kausalität und hat sich in der Anwendung seit langer Zeit bewährt. Im Folgenden soll nun dieses Prinzip zur Beschreibung der in dieser Arbeit betrachteten Formfaktoren angewandt werden.

Abschließend zu erwähnen ist noch, dass aufbauend auf einer Betrachtung wie für $\pi\pi \rightarrow DD$, bei dem die hadronische Wechselwirkung durch Austausch von Hadronen mit $D^{(*)}$ -Quantenzahlen beschrieben wird, eine allgemeine Formulierung für die hadronische Phänomenologie bei höheren Energien möglich ist, bei der der Austausch *aller* möglichen Hadronen berücksichtigt wird. Dies ist als *Regge-Theorie* bekannt (siehe [9, 41]).

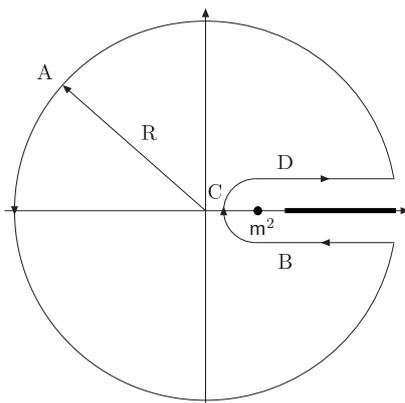


Abbildung 2.4.: Der Integrationsweg in der komplexen q^2 -Ebene. Der Punkt bei m^2 stellt dabei einen Pol und der Balken rechts daneben einen Schnitt dar.

Dispersionsrelationen

Die analytische Fortsetzung von einem physikalischen Bereich in den anderen wird über *Dispersionsrelationen* durchgeführt, welche im Folgenden vorgestellt werden, und die in dieser Arbeit große Verwendung finden.

Sei $\Pi(q^2)$ eine Funktion der komplexen Variablen q^2 , die überall analytisch ist, bis auf einen Schnitt auf der reellen Achse für $q^2 > m^2$. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz ist dann folgende Darstellung durch ein komplexes Integral möglich:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dz \frac{\Pi(z)}{z - q^2}. \quad (2.30)$$

Dabei ist \mathcal{C} der in Abbildung 2.4 gezeigte Integrationsweg. Die betrachteten Werte von q^2 sollen innerhalb von diesem liegen und die Abschnitte B und D seien um einen infinitesimalen Abstand ϵ von der reellen Achse entfernt. (Der Abschnitt C liefert dann keinen Beitrag.) Lässt man nun den Radius R des Kreises gegen unendlich laufen, so folgt:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m^2}^{\infty} ds \frac{\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)}{s - q^2} + \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2}. \quad (2.31)$$

Dabei läuft das zweite Integral über den (geschlossenen) Kreisbogen.

Das Schwarzsche Reflexionsprinzip aus der Funktionentheorie besagt in Worten, dass für eine im Reellen definierte Funktion $f(x)$ (also $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$) die analytische Fortsetzung ins Komplexe die Eigenschaft $f(z) = f^*(z^*)$ besitzt (mit $z \in \mathbb{C}$). Daraus kann man für den hier betrachteten Fall zeigen:

$$\Pi(q^2 + i\epsilon) - \Pi(q^2 - i\epsilon) = 2i \Im m(\Pi(q^2 + i\epsilon)). \quad (2.32)$$

Damit ergibt sich die sogenannte *Dispersionsdarstellung*² der Funktion $\Pi(q^2)$:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} ds \frac{\Im m(\Pi(s))}{s - q^2} + \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2}. \quad (2.33)$$

Das Integral über den Imaginärteil ist von der Form einer Spektralfunktion wie in Gleichung (2.29) und der Nenner entspricht dem Propagator eines skalaren Teilchens.

Das Integral über den Kreisbogen ist null, falls die Funktion $\Pi(q^2)$ für $|q^2| \rightarrow \infty$ hinreichend schnell gegen 0 läuft, was für $\Im m \Pi(s) \sim s^{-1}$ und stärker abfallende Funktionen der Fall ist. Im Allgemeinen ist dies allerdings nicht so, und man muss den Term ebenfalls berücksichtigen. Er wird als *Subtraktionsterm* bezeichnet. Man kann zeigen, dass für $\Im m \Pi(s) \sim s^n$ als Subtraktionsterm ein Polynom der Ordnung n entsteht, bzw. man sagt, dass man $(n + 1)$ Subtraktionen (also Terme des Polynoms) braucht. Dies kann in einer allgemeinen Formel ausgedrückt werden, mit der alle Subtraktionen berücksichtigt werden können (siehe auch [42]):

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \frac{1}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{\Im m(\Pi(s))}{s - q^2} ds \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} ds \Im m(\Pi(s)) \left\{ \frac{1}{s - \lambda^2} + \frac{q^2 - \lambda^2}{(s - \lambda^2)^2} + \dots + \frac{(q^2 - \lambda^2)^n}{(s - \lambda^2)^{n+1}} \right\} \\ &+ \left\{ \Pi(\lambda^2) + (q^2 - \lambda^2)\Pi'(\lambda^2) + \dots + \frac{(q^2 - \lambda^2)^n}{n!} \Pi^{(n)}(\lambda^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dabei kann λ^2 beliebig gewählt werden (mit der Ausnahme von Singularitäten von $\Pi(q^2)$). Speziell für $\lambda = 0$ ist es möglich, die obige Darstellung auf folgende Weise zu vereinfachen, die für Anwendungen in QCD-Summenregeln nützlich ist:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \frac{1}{\pi} (q^2)^{n+1} \int_{m^2}^{\infty} \frac{\Im m(\Pi(s))}{s - q^2} \frac{1}{s^{n+1}} ds \\ &+ \left\{ \Pi(0) + q^2 \Pi'(0) + \dots + \frac{(q^2)^n}{n!} \Pi^{(n)}(0) \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.4. Parametrisierungen für die $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren

In diesem Abschnitt sollen nun die Ergebnisse des vorigen Abschnitts auf die $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren angewandt werden, um bestimmte Parametrisierungen anzugeben. Im Folgenden wird als Beispiel der $D \rightarrow \pi$ -Formfaktor $f_{D\pi}^+(q^2)$ behandelt und die entsprechenden Definitionen für $f_{D\pi}^0(q^2)$ sowie $D \rightarrow K$ sind - sofern keine Unterschiede genannt werden - völlig analog.

²Diese Darstellung trägt den Namen „Dispersionsrelation“, der motiviert ist durch die verwandten *Kramers-Kronig-Relationen* aus der Optik.

Parametrisierungen mit Polen

Der semileptonische D -Zerfall $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ ist durch crossing-Symmetrie etwa mit dem Prozess $\rightarrow \ell \nu_\ell \rightarrow D\pi$ verbunden, in dem - genau wie im Beispiel im vorigen Abschnitt - entsprechende Resonanzen auftauchen. Eine analytische Fortsetzung mittels der Dispersionsrelation erlaubt daher die zu (2.29) analoge Darstellung für den Formfaktor $f_{D\pi}^+(q^2)$:

$$f_{D\pi}^+(q^2) = \frac{c_{D^*}}{1 - q^2/m_{D^*}^2} + \int_{(m_D+m_\pi)^2}^{\infty} ds \frac{\rho_h^{D\pi}(s)}{s - q^2}. \quad (2.36)$$

Der isolierte D^* -Pol im Bereich $q^2 > 0$ und der Kontinuumsbeitrag, der einen Schnitt oberhalb von $q^2 = (m_D + m_\pi)^2$ auf der reellen Achse erzeugt, können dabei in der Dispersionsrelation durch entsprechende Imaginärteile dargestellt werden (siehe auch Abschnitt 3.1). Man kann zudem zeigen, dass für die Formfaktoren die Asymptotik $\lim_{|q^2| \rightarrow \infty} f_{D\pi}^+(q^2) \sim 1/|q^2|$ gelten muss [43], so dass hier keine Subtraktionen berücksichtigt werden brauchen. Die Konstante c_{D^*} in der obigen Gleichung kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$c_{D^*} = \frac{f_{D^*} g_{D^* D\pi}}{2m_{D^*}}. \quad (2.37)$$

Für $D \rightarrow K$ liegt der Pol für den Zustand D_s^* ebenfalls unterhalb der Kontinuumschwelle $q^2 = (m_D + m_K)^2$ und die kontinuierlichen intermediären Zustände $D_s\pi$ sind in Isospin-Limit verboten, weswegen hier dann die entsprechende Parametrisierung mit $D^* \rightarrow D_s^*$ und $\pi \rightarrow K$ gilt.

Der skalare Formfaktor $f_{D\pi}^0(q^2)$ wird dagegen durch skalare intermediäre Zustände ausgedrückt, für die kein isolierter Pol unterhalb der Kontinuumschwelle liegt:

$$f_{D\pi}^0(q^2) = \int_{(m_D+m_\pi)^2}^{\infty} ds \frac{\tilde{\rho}_h^{D\pi}(s)}{s - q^2}. \quad (2.38)$$

Um nun die Parametrisierung (2.36) praktisch nutzen zu können, ist es nötig, den Kontinuumsbeitrag durch wenige Parameter auszudrücken. Da dieser gegenüber dem D^* -Pol in der Regel unterdrückt ist, wird er oft in Form eines einzigen, effektiven Pols beschrieben, dessen Position und Residuum durch Parameter $\alpha_{D\pi}$ und $\gamma_{D\pi}$ gegeben sind:

$$f_{D\pi}^+(q^2) = c_{D^*} \left(\frac{1}{1 - q^2/m_{D^*}^2} - \frac{\alpha_{D\pi}}{1 - q^2/(\gamma_{D\pi} m_{D^*}^2)} \right). \quad (2.39)$$

In den Summenregelrechnungen sind die Formfaktoren bei $q^2 = 0$ direkt zugänglich, weswegen hier durchgehend $f_{D\pi}^+(0)$ als Parameter gewählt wird. Für diesen gilt in

2.4. Parametrisierungen für die $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren

der obigen Relation $f_{D\pi}^+(0) = c_{D^*}(1 - \alpha_{D\pi})$. Durch Betrachtung von Symmetrieverhältnissen für schwere Quarks wurde schließlich von Becirevic und Kaidalov die Relation $\gamma_{D\pi} = 1/\alpha_{D\pi}$ motiviert, die auf die *BK-Parametrisierung* [44] führt:

$$f_{D\pi}^+(q^2) = \frac{f_{D\pi}^+(0)}{(1 - q^2/m_{D^*}^2)(1 - \alpha_{D\pi}q^2/m_{D^*}^2)}. \quad (2.40)$$

Schließlich sei an dieser Stelle noch die (2.36) entsprechende Darstellung für die $\Lambda_c \rightarrow N$ - und $\Sigma_c \rightarrow N$ -Formfaktoren angegeben (wobei die beiden Baryonen allgemein mit H_c bezeichnet werden):

$$\begin{aligned} G(q^2) &= \frac{f_D m_D^2 g_{H_c N D}}{(m_{H_c} + m_N)(m_D^2 - q^2)} + \int_{s_D}^{+\infty} ds \frac{\rho_h^{(G)}(s)}{s - q^2}, \\ f_1(q^2) &= -\frac{f_{D^*} m_{D^*} g_{H_c N D^*}^V}{m_{D^*}^2 - q^2} + \int_{s_{D^*}}^{+\infty} ds \frac{\rho_h^{(f_1)}(s)}{s - q^2}, \\ f_2(q^2) &= -\frac{m_{H_c}}{m_{H_c} + m_N} \left[\frac{f_{D^*} m_{D^*} g_{H_c N D^*}^T}{m_{D^*}^2 - q^2} + \int_{s_{D^*}}^{+\infty} ds \frac{\rho_h^{(f_2)}(s)}{s - q^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

z -Parametrisierung

Unter Ausnutzung der Analytizität der Formfaktoren ist ebenfalls eine andere Form der Parametrisierung möglich, die auf Anwendungen in früheren Arbeiten wie [45] beruht und hier in einer leicht modifizierten Form genutzt werden soll. Sie basiert auf einer konformen Abbildung $q^2 \rightarrow z(q^2)$ in der komplexen q^2 -Ebene, definiert durch

$$z(q^2, t_0) = \frac{\sqrt{t_+ - q^2} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - q^2} + \sqrt{t_+ - t_0}}. \quad (2.42)$$

Dabei ist $t_{\pm} = (m_D \pm m_{\pi(K)})^2$ und $t_0 < t_+$ ist ein frei wählbarer Parameter. Diese Funktion ist so konstruiert, dass sie die ganze komplexe q^2 -Ebene mit Ausnahme eines Schnittes auf der positiven reellen Achse auf das Innere des Einheitskreises abbildet und damit keine Singularitäten für $|z| < 1$ auftreten. Der Parameter t_0 kann so gewählt werden, dass der physikalisch interessierende Bereich $q_{min}^2 < q^2 < q_{max}^2$ auf einen Bereich mit kleinstmöglichem $|z|$ abgebildet wird, indem man

$$t_0 = t_+ - \sqrt{t_+ - q_{max}^2} \sqrt{t_+ - q_{min}^2} \quad (2.43)$$

setzt. Dies erlaubt, eine Reihenentwicklung um $z = 0$ durchzuführen, in der wenige Terme zu einer guten Beschreibung des Formfaktors ausreichen.

Hier wird eine solche Entwicklung verwendet, die in [46] für den $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor eingeführt wurde und für $D \rightarrow \pi$ folgende Form annimmt:

$$f_{D\pi}^+(q^2) = \frac{1}{1 - q^2/m_{D^*}^2} \sum_{k=0}^N \tilde{b}_k [z(q^2, t_0)]^k. \quad (2.44)$$

Sie erfüllt die bereits erwähnte $1/q^2$ -Asymptotik und berücksichtigt die Existenz des isolierten D^* -Pols. Für die Koeffizienten gelten aus Unitaritätsbedingungen gewisse Einschränkungen, die in [46] angegeben sind. (Mit dieser Motivation wurde die Parametrisierung ursprünglich entwickelt.) Ferner ist dort noch die Relation

$$\tilde{b}_N = -\frac{(-1)^N}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k k \tilde{b}_k \quad (2.45)$$

für den größten Koeffizienten in der verwendeten Reihe gegeben. Wie bereits für die Pol-Parametrisierungen ist es hier nützlich, $f_{D\pi}^+(0)$ als einen Parameter zu verwenden. Dies kann mit einer Umdefinition $\tilde{b}_k = f_{D\pi}^+(0)b_k$ der Koeffizienten erreicht werden, aus der die Bedingung:

$$b_0 = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} b_k \left[z(0, t_0)^k - (-1)^{k-N} \frac{k}{N} z(0, t_0)^N \right] \quad (2.46)$$

folgt. Damit erhält man schließlich die in dieser Arbeit verwendete Form der z -Parametrisierung:

$$f_{D\pi}^+(q^2) = \frac{f_{D\pi}^+(0)}{1 - q^2/m_{D^*}^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \left(z(q^2, t_0)^k - z(0, t_0)^k - (-1)^{k-N} \frac{k}{N} \left[z(q^2, t_0)^N - z(0, t_0)^N \right] \right) \right\}. \quad (2.47)$$

In [46] werden die Vorteile gegenüber vorigen Versionen [45] erläutert. (Siehe ferner auch [47]). Der analoge Ansatz für f_{DK}^+ enthält einen $m_{D_s^*}^2$ -Pol im Vorfaktor. Die Multiplikation der Parametrisierung mit diesem Polfaktor ist in dem entsprechenden Formalismus eigentlich nur vorgesehen, wenn der Pol unterhalb der Schwelle t_+ liegt, was hier nur für $D \rightarrow K$ der Fall ist. Der Polfaktor wird jedoch auch für $D \rightarrow \pi$ beibehalten, da er mit D^* sehr nahe an der entsprechenden $D\pi$ -Schwelle liegt und sein Vorhandensein eine zusätzliche Information darstellt, die genutzt werden sollte.

Kapitel 3.

QCD-Summenregeln

Die Methode der QCD-Summenregeln ist seit ihrer Entwicklung Ende der 70er Jahre eine in weiten Bereichen erfolgreich angewandte Technik zur Bestimmung nichtperturbativer Größen. Ihre grundlegende Anwendung findet sie in den sogenannten Zweipunkt-Summenregeln (nach ihren Entwicklern Shifman, Vainshtein und Zakharov auch SVZ-Summenregeln genannt) [48]. Diese dienen der Berechnung von Eigenschaften einzelner Hadronen, wie Massen, Zerfallskonstanten oder anderer charakteristischer Größen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird ihr Grundprinzip am Beispiel der Berechnung der D -Meson-Zerfallskonstante erklärt.

Zur Beschreibung von Zerfallsformfaktoren und hadronischen Kopplungskonstanten wird heutzutage die darauf aufbauende Methode der *Lichtkegel-Summenregeln* (LCSR von engl. *light-cone sum-rules*) verwendet. Für diese sind die sogenannten *Lichtkegel-Verteilungsamplituden* von Bedeutung, die ein Maß für die Impulsverteilung von Quarks und Antiquarks in einem Hadron darstellen und im Folgenden sowohl für leichte Mesonen als auch für das Nukleon betrachtet werden.

Aufbauend auf die nun folgende Darstellung der SVZ-Summenregeln werden in den daran anschließenden Abschnitten die eben genannten Lichtkegel-Summenregeln und -Verteilungsamplituden im Detail dargestellt und erläutert. Die in diesem Kapitel eingeführten Grundlagen bilden dann die Basis für die konkreten Rechnungen in den Kapiteln 4 und 5. Ausführliche Beschreibungen der Methode finden sich beispielsweise in [49, 50, 51, 52, 42] und eine kommentierte Zusammenstellung wichtiger Originalliteratur in [53].

3.1. Zweipunktsummenregeln

Der zentrale Punkt der QCD-Summenregeln besteht in der Betrachtung einer *Korrelationsfunktion* - des Vakuumerwartungswertes eines zeitgeordneten Produkts von interpolierenden Strömen, die entsprechend dem physikalischen Prozess von Interesse gewählt werden.

Die Korrelationsfunktionen können sowohl durch nichtperturbative Größen (wie die im vorigen Kapitel eingeführten Zerfallskonstanten oder Formfaktoren) ausgedrückt, als auch von der QCD ausgehend berechnet werden. Daher stellen sie einen Begriff von fundamentaler Bedeutung in nichtperturbativen Methoden der QCD dar. Im Folgenden soll das prinzipielle Vorgehen bei der Methode der QCD-Summenregeln an der Berechnung der D -Meson-Zerfallskonstanten gezeigt werden. Zusätzlich wird danach noch die Summenregelberechnung für die Zerfallskonstante von D^* und im darauf folgenden Abschnitt für die der Λ_c - und Σ_c -Baryonen angegeben, die alle später in der Arbeit benötigt werden.

3.1.1. Berechnung der Zerfallskonstanten von D - und D^* -Mesonen

Als grundlegendes Beispiel soll hier die Herleitung der Summenregel für das D -Meson vorgestellt werden. Alle anderen Anwendungen, insbesondere die Berechnung von f_{D^*} folgen dem selben prinzipiellen Vorgehen.

Das D -Meson kann durch den in Abschnitt 2.2.1 eingeführten interpolierenden Strom $j_5(x) = \bar{c}(x)m_c i\gamma_5 q(x)$ mittels der Definition $\langle 0 | j_5(x) | D(p) \rangle = m_D^2 f_D$ beschrieben werden. Als Korrelationsfunktion definiert man daher hier:

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_5(x), j_5^\dagger(0) \} | 0 \rangle . \quad (3.1)$$

Das zeitgeordnete Produkt des Vakuumerwartungswertes der Ströme wird dabei noch einer Fouriertransformation vom Ortsraum x^μ in den Impulsraum q^μ unterworfen und die Funktion kann aufgrund der Lorentz-Invarianz der Definition nur von q^2 abhängen. Die Korrelationsfunktion kann nun mittels Operatorproduktentwicklung berechnet werden, wozu der führende Term in Abbildung 3.1 gezeigt ist (die Feldoperatoren sind die der wechselwirkenden Felder). Bevor dies vorgestellt wird, soll aber zuerst der Zusammenhang mit der Zerfallskonstante f_D aufgezeigt werden, die sogenannte *hadronische Darstellung*.

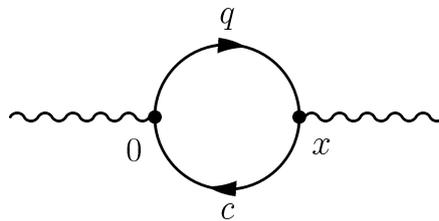


Abbildung 3.1.: Zweipunkt-Korrelationsfunktion

Hadronische Darstellung

Betrachtet man die obige Korrelationsfunktion $\Pi(q^2)$ im Bereich $q^2 > 0$, so ist - analog zu den in Kapitel 2 betrachteten Resonanzen - die Produktion von hadronischen Zwischenzuständen mit den entsprechenden Quantenzahlen der Ströme möglich. Diese Zustände werden mit $|h(\vec{p}_h)\rangle$ bezeichnet, und umfassen sowohl Einteilchen- wie auch höhere Anregungs- und Mehrteilchenzustände, welche dann den Gesamtimpuls \vec{p}_h besitzen. Jeder dieser Zustände hat eine invariante Masse $p_h^2 = m_h^2$ und der Zustand mit der niedrigsten Masse ist hier das D -Meson. Zwischen den Strömen in der Korrelationsfunktion kann nun ein vollständiger Satz dieser hadronischen Zwischenzustände in Form der folgenden Darstellung eingefügt werden:

$$\mathbb{1} = \sum_h \int \tilde{d}p_h |h(\vec{p}_h)\rangle \langle h(\vec{p}_h)|. \quad (3.2)$$

Das Lorentz-invariante Integrationsmaß $\tilde{d}p$ ist dabei definiert über

$$\tilde{d}p := \frac{d^3p}{2(2\pi)^3 E(\vec{p})} = \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0). \quad (3.3)$$

Durch Ausschreiben des zeitgeordneten Produkts erhält man somit:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \sum_h \int \tilde{d}p_h & \\ & \left(\Theta(x^0) \langle 0 | j_5(x) | h(\vec{p}_h) \rangle \langle h(\vec{p}_h) | j_5^\dagger(0) | 0 \rangle \right. \\ & \left. + \Theta(-x^0) \langle 0 | j_5^\dagger(0) | h(\vec{p}_h) \rangle \langle h(\vec{p}_h) | j_5(x) | 0 \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Matrixelemente im ersten Term koppeln nun nur an Hadronen $h_{\bar{D}}$ mit den Quantenzahlen des \bar{D} -Mesons und entsprechend die im zweiten Term nur an Hadronen h_D mit den Quantenzahlen des D -Mesons. Unter Verwendung der Translation der Ströme $j_5(x) = e^{i\hat{p}x} j_5(0) e^{-i\hat{p}x}$ erhält man damit dann:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} & \left(\Theta(x^0) \sum_{h_{\bar{D}}} \int \tilde{d}p_{h_{\bar{D}}} \langle 0 | j_5(0) | h(\vec{p}_{h_{\bar{D}}}) \rangle \langle h(\vec{p}_{h_{\bar{D}}}) | j_5^\dagger(0) | 0 \rangle e^{-ip_{h_{\bar{D}}}x} \right. \\ & \left. + \Theta(-x^0) \sum_{h_D} \int \tilde{d}p_{h_D} \langle 0 | j_5^\dagger(0) | h(\vec{p}_{h_D}) \rangle \langle h(\vec{p}_{h_D}) | j_5(0) | 0 \rangle e^{ip_{h_D}x} \right) \\ = i \int d^4x e^{iqx} & \left(\Theta(x^0) \sum_{h_{\bar{D}}} \int \tilde{d}p_{h_{\bar{D}}} \left| \langle 0 | j_5(0) | h(\vec{p}_{h_{\bar{D}}}) \rangle \right|^2 e^{-ip_{h_{\bar{D}}}x} \right. \\ & \left. + \Theta(-x^0) \sum_{h_D} \int \tilde{d}p_{h_D} \left| \langle 0 | j_5^\dagger(0) | h(\vec{p}_{h_D}) \rangle \right|^2 e^{ip_{h_D}x} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die beiden auftretenden Betragsquadrate der Matrixelemente sind aufgrund der CPT -Invarianz der QCD exakt gleich für D und \bar{D} (ein Spezialfall dieser Aussage

ist $f_D = f_{\bar{D}}$). Daher kann man für beide Integrationen die selbe Integrationsvariable p_{h_D} verwenden:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \left(\sum_{h_D} \int d\vec{p}_{h_D} \left| \langle 0 | j_5(0) | h_D(\vec{p}_{h_D}) \rangle \right|^2 \right. \\ \left. \cdot (\Theta(x^0)e^{-ip_{h_D}x} + \Theta(-x^0)e^{ip_{h_D}x}) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nun ist es möglich, die Summe über die hadronischen Matrixelemente in einer Funktion zusammenzufassen. Dazu setzt man die Darstellung des Integrationsmaßes auf der rechten Seite von Gl. (3.3) ein und fügt zudem noch die Identität $1 = \int ds \int d^4p \delta(s - p^2) \delta^4(p - p_{h_D})$ ein:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \int ds \int d^4p \sum_{p_{h_D}} \delta(s - p^2) \int \frac{d^4p_{h_D}}{(2\pi)^3} \delta(p_{h_D}^2 - m_{h_D}^2) \theta(p_{h_D}^0) \delta^4(p - p_{h_D}) \\ \left(\Theta(x^0)e^{-ip_{h_D}x} + \Theta(-x^0)e^{ip_{h_D}x} \right) \cdot \left| \langle 0 | j_5(0) | h_D(\vec{p}_{h_D}) \rangle \right|^2 \\ = i \int d^4x e^{iqx} \int ds \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(s - p^2) \left(\Theta(x^0)e^{-ipx} + \Theta(-x^0)e^{ipx} \right) \\ (2\pi)^3 \sum_{h_D} \int \frac{d^4p_{h_D}}{(2\pi)^3} \delta(p_{h_D}^2 - m_{h_D}^2) \theta(p_{h_D}^0) \delta^4(p - p_{h_D}) \left| \langle 0 | j_5(0) | h_D(\vec{p}_{h_D}) \rangle \right|^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Der Ausdruck in der letzten Zeile ist nun eine skalare Funktion, die nur von p^2 abhängt und nur für $p^0 > 0$ von 0 verschieden ist. Sie wird als *Källen-Lehmann-Spektraldichte* $\rho(p^2)$ bezeichnet. Man ersetzt die letzte Zeile somit durch $\rho(p^2)\theta(p^0)$ und kann wegen $\delta(s - p^2)$ auch $\rho(s)$ schreiben:

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \int ds \rho(s) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(s - p^2) \left(\Theta(x^0)e^{-ipx} + \Theta(-x^0)e^{ipx} \right). \quad (3.8)$$

Die Integration über p ergibt nun den bekannten Ausdruck für den Feynman-Propagator:

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \int ds \rho(s) (-i) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{s^2 - p^2 - i\epsilon}. \quad (3.9)$$

Nach Ausführen der verbleibenden Integrationen, die einfach $p \rightarrow q$ setzen, ergibt sich schließlich die Källen-Lehmann-Spektraldarstellung:

$$\Pi(q^2) = \int_{m_D^2}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - q^2 - i\epsilon}. \quad (3.10)$$

Im Integral wurde als untere Grenze die Masse m_D^2 des niedrigsten hadronischen Zwischenzustands gesetzt. Der Beitrag dieses Zustands zur Spektraldichte kann

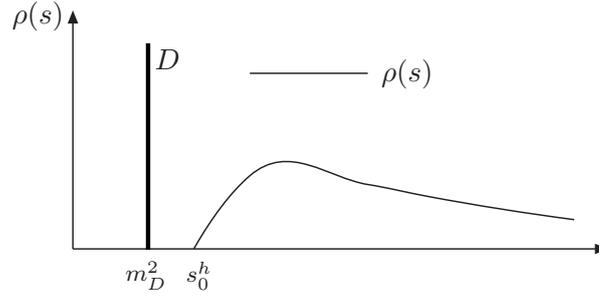


Abbildung 3.2.: Hadronische Spektraldichte

durch die uns interessierende D -Meson-Zerfallskonstante ausgedrückt werden und wird separat ausgeschrieben:

$$\Pi(q^2) = \frac{m_D^4 f_D^2}{m_D^2 - q^2} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - q^2}. \quad (3.11)$$

Dabei ist s_0^h die Masse des niedrigsten hadronischen Zustands oberhalb von m_D , wo der *Kontinuumsbeitrag* zur Korrelationsfunktion beginnt. Die typische Form einer solchen Spektraldichte ist in Abbildung 3.2 gegeben.

Berechnung der Korrelationsfunktion durch Operatorproduktentwicklung

Wie eben gezeigt, ist es über die hadronische Darstellung möglich, Zugriff auf die D -Meson-Zerfallskonstante zu erhalten. Eine perturbative Berechnung der Korrelationsfunktion aus der QCD ist in diesem Bereich allerdings nicht möglich. Nichtsdestotrotz kann eine solche aber durch eine Operatorproduktentwicklung im Bereich großer negativer Werte für q^2 durchgeführt werden, wo $-q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ gilt und das Integral in (3.1) durch kurzreichweitige Beiträge $x^2 \approx 0$ dominiert wird [49]. Die Darstellung über eine Dispersionsrelation erlaubt dann, dies mit der Region $q^2 > 0$ in Verbindung zu bringen. Dies soll im Folgenden geschehen.

Bei der störungstheoretischen Berechnung der Korrelationsfunktion (3.1) treten auch Quarks und Gluonen mit kleinen Impulsen der Größenordnung $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD})$ auf, die zu nichtperturbativen Beiträgen führen. Um diese korrekt zu berücksichtigen, kann nicht wie in der QED einfach eine Schleifenrechnung durchgeführt werden, sondern es ist eine Operatorproduktentwicklung der Korrelationsfunktion notwendig, um zwischen lang- und kurzreichweitigen Beiträgen trennen zu können. Details zu diesem Verfahren und viele technische Aspekte, die hier nicht erwähnt werden können, finden sich etwa in [54, 55, 56] oder den Review-Artikeln [49, 52].

Die Operatorproduktentwicklung für die Korrelationsfunktion lautet:

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_5(x), j_5^\dagger(0) \} | 0 \rangle = \sum_d C_d(q^2, \mu) \langle 0 | \mathcal{O}_d | 0 \rangle(\mu). \quad (3.12)$$

Dabei ist μ eine entsprechende Normierungs- bzw. Trennungsskala und die Operatoren \mathcal{O}_d mit der Dimension d haben die Quantenzahlen des Vakuums, und müssen also Lorentz- und eichinvariant sein. Deren Vakuumerwartungswerte enthalten die langreichweitigen Beiträge und repräsentieren die Wechselwirkung der Quarks und Gluonen mit der komplizierten Struktur des QCD-Vakuums, daher werden sie als *Vakuumpkondensate* bezeichnet. Sie sind fundamentale nichtperturbative Größen. Ihre Werte werden durch den Vergleich von geeigneten Summenregeln mit experimentellen Daten ermittelt, und können dann in anderen Rechnungen zur Vorhersage weiterer Größen verwendet werden.

Die ersten Kondensate in der Operatorproduktentwicklung sind in Abbildung 3.3 diagrammatisch dargestellt und im Folgenden aufgelistet:

| | | |
|---------|--|-----------------------|
| (a) | $\langle 0 \mathcal{O}_0 0 \rangle = \langle 0 \mathbf{1} 0 \rangle$ | Perturbativer Beitrag |
| (b) | $\langle 0 \mathcal{O}_3 0 \rangle = \langle 0 \bar{q}q 0 \rangle$ | Quark-Kondensat |
| (c),(d) | $\langle 0 \mathcal{O}_4 0 \rangle = \langle 0 G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} 0 \rangle$ | Gluon-Kondensat |
| (e) | $\langle 0 \mathcal{O}_5 0 \rangle = \langle 0 g_s \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right) G^{a\mu\nu} q 0 \rangle$ | Quark-Gluon-Kondensat |
| (f) | $\langle 0 \mathcal{O}_6 0 \rangle = \langle 0 (\bar{q}\Gamma_r q)(\bar{q}\Gamma_s q) 0 \rangle$ | 4-Quark-Kondensat |

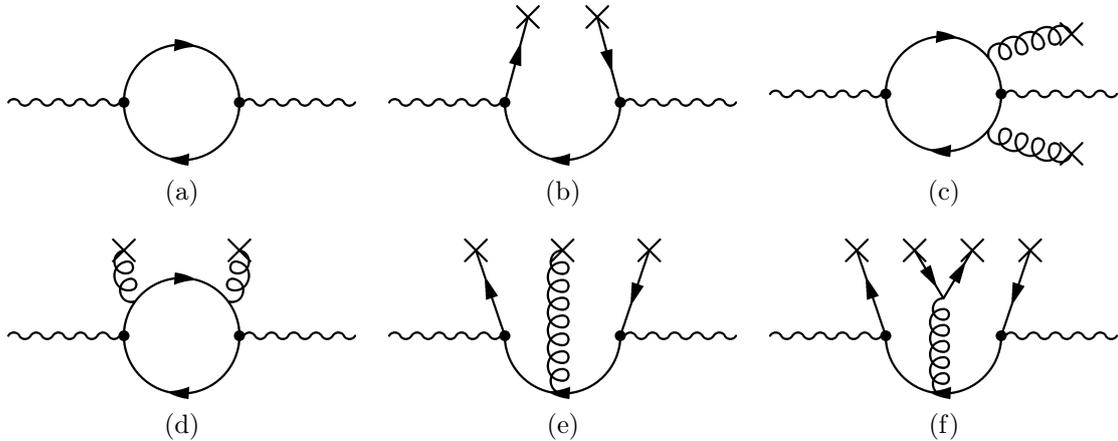


Abbildung 3.3.: Diagramme zur Berechnung der führenden Vakuumpkondensate zur Zweipunkt-Korrelationsfunktion.

Die Wilson-Koeffizienten $C_d(q^2, \mu)$ enthalten die kurzreichweitigen Beiträge und können störungstheoretisch berechnet werden, wobei der zum Einheitsoperator gehörige der perturbativen Schleifenrechnung entspricht. Die führenden Diagramme zu dessen Berechnung sind in Abbildung 3.4 gezeigt.

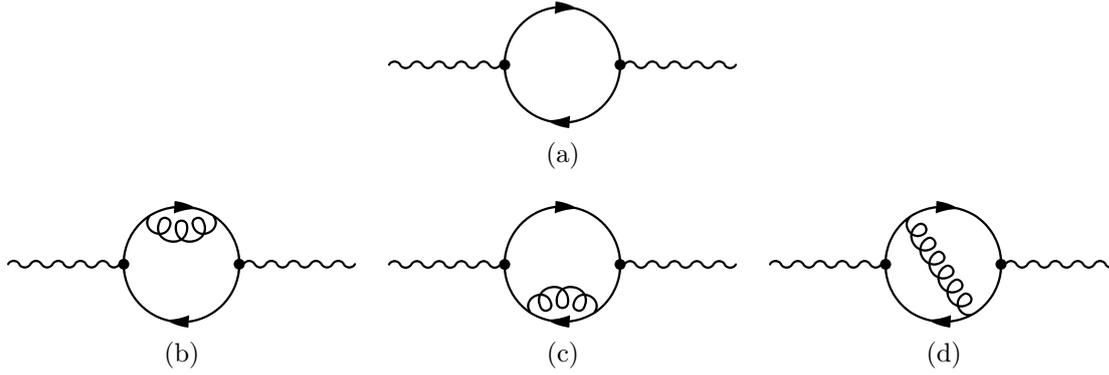


Abbildung 3.4.: Führender Beitrag und α_s -Korrekturen zur Zweipunkt-Korrelationsfunktion.

Unter Benutzung der Feynman-Regeln der QCD kommt man beispielsweise für das Diagramm (a) auf:

$$\Pi^{(pert)}(q^2) = 3 i m_c^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot \text{Tr} \left[(i\gamma_5) \frac{i(\not{q} - \not{k})}{(q-k)^2 + i\epsilon} (i\gamma_5) \frac{i(\not{k} + m_c)}{k^2 - m_c^2 + i\epsilon} \right]. \quad (3.13)$$

Nach Auswertung der Spur und unter Verwendung der dimensional Regularisierung kann man dies auf Standard-Einschleifenintegrale zurückführen (siehe [11]):

$$\begin{aligned} \Pi^{(pert)}(q^2) &= -\frac{3m_c^2}{8\pi^2} (A_0(m_c^2) + (m_c^2 - q^2)B_0(q^2, 0, m_c^2)) \\ &= -\frac{3m_c^2}{8\pi^2} \left[m_c^2 \left(\Delta - \ln \left(\frac{m_c^2}{\mu^2} \right) + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + (m_c^2 - q^2) \left(\Delta - \ln \left(\frac{m_c^2}{\mu^2} \right) + 2 + \frac{m_c^2 - q^2}{q^2} \ln \left(\frac{m_c^2 - q^2 - i\epsilon}{m_c^2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Zum Vergleich mit der hadronischen Darstellung wird diese nun in Form einer Dispersionsrelation, wie sie in Abschnitt 2.3 eingeführt wurde, angegeben. Die Funktion $\Pi^{(pert)}(q^2)$ hat als komplexe Funktion einen Schnitt auf der reellen Achse für $q^2 > m_c^2$, der durch den Logarithmus gegeben ist. Für den Hauptzweig des komplexen Logarithmus gilt:

$$\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z) \quad \Rightarrow \quad \Im m(\ln(-x - i\epsilon)) = -\pi, \quad (3.15)$$

womit sich hier ergibt:

$$\Im m(\Pi^{(pert)}(s)) = \frac{3m_c^2}{8\pi} \frac{(s - m_c^2)^2}{s}. \quad (3.16)$$

Man sieht, dass man für die Dispersionsdarstellung zwei Subtraktionen braucht, womit man dann schließlich unter Verwendung von Gl. (2.35) folgendes Endergebnis

erhält:

$$\Pi(q^2) = q^4 \int_{m_c^2}^{\infty} ds \frac{\Im m(\Pi^{(pert)}(s))}{s^2(s - q^2)} = \frac{3m_c^2}{8\pi} q^4 \int_{m_c^2}^{\infty} ds \frac{(s - m_c^2)^2}{s^3(s - q^2)}. \quad (3.17)$$

Zur Berechnung der Kondensat-Beiträge aus der Operatorproduktentwicklung sind die führenden Diagramme in Abbildung 3.3 angegeben. Je höher die Dimension des auftretenden Operators, desto stärker ist dieser durch Potenzen von $\Lambda_{QCD}/\sqrt{q^2}$ unterdrückt, was es erlaubt, die Reihe nach einer ausreichenden Anzahl von Termen abzurechnen (üblicherweise wird wie hier die Entwicklung bis Dimension $d = 6$ betrachtet). Um daraus die entsprechenden Wilson-Koeffizienten zu bestimmen, wird in der Regel die *Fock-Schwinger-Eichung* $x^\mu A_\mu = 0$ verwendet (siehe [57] für eine ausführliche technische Beschreibung, oder auch [31]). In dieser Eichung ist folgende lokale Entwicklung der Quarkfelder möglich:

$$q(x) = q(0) + x^\mu \partial_\mu q(0) + \dots = q(0) + x^\mu D_\mu q(0) + \dots \quad (3.18)$$

Der Beitrag des Diagramms 3.3 (b) zum Quark-Kondensat lautet:

$$\Pi^{\bar{q}q}(q^2) = \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \bar{q}(x)_{i\alpha} q(0)_{j\beta} | 0 \rangle [\gamma_5 S_{ij}(x) \gamma_5], \quad (3.19)$$

wobei $S_{ij}(x)$ der freie Propagator des c -Quarks ist. Setzt man die führenden Terme der oben erwähnten lokalen Entwicklung ein, so erhält man Matrixelemente, die proportional zum Quark-Kondensat $\langle \bar{q}q \rangle$ sind:

$$\langle 0 | \bar{q}_{i\alpha} q_{j\beta} | 0 \rangle = \frac{1}{12} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \langle \bar{q}q \rangle \quad \langle 0 | \bar{q}_{i\alpha} \overleftarrow{D}_\mu q_{j\beta} | 0 \rangle = \frac{im_q}{12} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta_{ij} \langle \bar{q}q \rangle. \quad (3.20)$$

Der zweite Term verschwindet für die hier verwendete Näherung $m_q = 0$. Das Ergebnis für den Beitrag des Quark-Kondensats zur Korrelationsfunktion lautet dann:

$$\Pi^{\bar{q}q}(q^2) = \frac{m_c^3}{q^2 - m_c^2} \langle \bar{q}q \rangle. \quad (3.21)$$

Die Ergebnisse für die weiteren Kondensate werden hier nicht weiter im Detail betrachtet und schließlich am Ende der Rechnung mit einbezogen.

Quark-Hadron-Dualität

Nach der Berechnung der Korrelationsfunktion aus der QCD ist es nun möglich, durch Vergleich mit der hadronischen Darstellung die D -Meson-Zerfallskonstante zu bestimmen. Die hadronische Spektraldichtefunktion $\rho(s)$ ist allerdings in der Regel unbekannt. Hier kann jedoch das Prinzip der *Quark-Hadron-Dualität* genutzt werden, das detailliert in [58] beschrieben wird. Ein grundlegendes Beispiel dafür ist z.B. dass der totale Produktionswirkungsquerschnitt für Quarks in einem bestimmten Prozess aufgrund fundamentaler Erhaltungssätze immer exakt gleich

dem für die im Experiment zu beobachtenden Hadronen sein muss. Für die hier betrachteten Spektralfunktionen ist die Formulierung der semilokalen Quark-Hadron-Dualität wichtig, die besagt, dass eine Mittelung über die Spektralfunktionen in einem ausreichend großen Bereich für beide gleich ist:

$$\int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - q^2} \simeq \frac{1}{\pi} \int_{s_0^D}^{\infty} ds \frac{\Im m(\Pi^{(pert)}(s))}{s - q^2}. \quad (3.22)$$

Dabei ist s_0^D ein effektiver Parameter, der von der Größenordnung des ersten angeregten Zustands ist (siehe Abbildung 3.5).

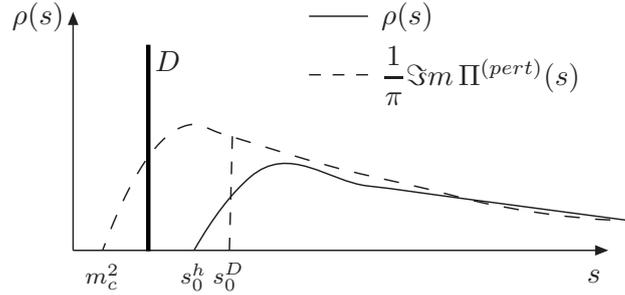


Abbildung 3.5.: Spektraldichten in der Quark-Hadron-Dualität

Setzt man unter Verwendung der Quark-Hadron-Dualität nun die hadronische Darstellung (3.11) mit dem Ergebnis aus der Operatorproduktentwicklung gleich, so erhält man:

$$\frac{m_D^4 f_D^2}{m_D^2 - q^2} \simeq \frac{1}{\pi} \int_{m_c^2}^{s_0^D} ds \frac{\Im m(\Pi^{(pert)}(s))}{s - q^2} + \frac{m_c^3}{q^2 - m_c^2} \langle \bar{q}q \rangle + \dots. \quad (3.23)$$

Dabei repräsentieren die Punkte die weiteren Kondensat-Beiträge. Die Subtraktionsterme des Dispersionsintegrals wurden hier nicht mit angeschrieben, da sie im folgenden Schritt eliminiert werden.

Anwendung der Borel-Transformation und Aufstellen der Summenregel

Da man am Beitrag des hadronischen Grundzustandes zur Korrelationsfunktion interessiert ist, ist es sinnvoll, eine Transformation anzuwenden, die höher angeregte Zustände unterdrückt. Dies wird durch eine *Borel-Transformation* geleistet, die definiert ist durch:

$$\Pi(M^2) = \mathcal{B}_{M^2} \Pi(q^2) = \lim_{\substack{-q^2, n \rightarrow \infty, \\ -\frac{q^2}{n} = M^2}} \left(\frac{(-q^2)^{(n+1)}}{n!} \left(\frac{d}{dq^2} \right)^n \Pi(q^2) \right). \quad (3.24)$$

Hier benötigt man die Spezialfälle:

$$\mathcal{B}_{M^2}(q^2)^k = 0, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{B}_{M^2}\left(\frac{1}{(m^2 - q^2)^k}\right) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{e^{-\frac{m^2}{M^2}}}{M^{2(k-1)}}. \quad (3.26)$$

Die Vorhersagekraft der Summenregel wird dadurch erheblich verbessert und darüber hinaus fallen bei dieser Transformation auch alle Subtraktionsterme der unbekannteren hadronischen Spektraldichte weg. Dies wird im Laufe dieser Arbeit noch häufiger geschehen und daher werden auch dort jeweils diese Terme nicht explizit angeschrieben. Es ergibt sich somit die Beziehung:

$$f_D^2 m_D^4 e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} = \frac{3m_c^2}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^{s_0^D} ds \frac{(s - m_c^2)^2}{s} e^{-\frac{s}{M^2}} - m_c^3 \langle \bar{q}q \rangle e^{-\frac{m_c^2}{M^2}}. \quad (3.27)$$

Berücksichtigt man alle Kondensate bis Dimension 6 [52], so erhält man schließlich die QCD-Summenregel:

$$\begin{aligned} f_D^2 &= \frac{m_c^2}{m_D^4} e^{\frac{m_D^2}{M^2}} \left\{ \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^{s_0^D} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \right. \\ &+ e^{-\frac{m_c^2}{M^2}} \left\{ -m_c \langle \bar{q}q \rangle \left[1 + \frac{m_0^2}{2M^2} \left(1 - \frac{m_c^2}{2M^2} \right) \right] \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\langle \alpha_s G^2 \rangle}{12\pi} - \frac{16\pi}{27} \frac{\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{M^2} \left(1 - \frac{m_c^2}{4M^2} - \frac{m_c^4}{12M^4} \right) \right\} \right\}. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Das Quark-Gluon-Kondensat wird dabei üblicherweise parametrisiert durch:

$$\langle 0 | g_s \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) G^{a\mu\nu} q | 0 \rangle = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle, \quad (3.29)$$

und das 4-Quark-Kondensat kann über eine Faktorisierungsformel [52] in guter Näherung durch das Quadrat des Quark-Kondensats beschrieben werden.

Eingabewerte und Ergebnis

Nun soll die obige Summenregel ausgewertet werden, wofür zuerst die Eingabewerte festgelegt werden müssen.

Die Skalenabhängigkeit der starken Kopplungskonstante $\alpha_s(\mu)$ wird in dieser Arbeit bis zur störungstheoretischen Ordnung (α_s^3) berücksichtigt und es werden die dafür in [59] zusammengefassten Formeln, sowie der dort angegebene Wert

$\alpha_s(m_Z) = 0,1176 \pm 0,002$ verwendet. Die anomalen Dimensionen der hier verwendeten Parameter werden jeweils in führender Ordnung in Betracht gezogen. Auch in den weiteren Anwendungen wird α_s in dieser Weise berechnet.

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen wird folgender Wert für die charm-Quark-Masse im \overline{MS} -Schema verwendet:

$$\bar{m}_c(\bar{m}_c) = (1,29 \pm 0,03) \text{ GeV}. \quad (3.30)$$

Dieser basiert auf aktuellen Charmonium-Analysen durch QCD-Summenregeln mit einer Genauigkeit von $O(\alpha_s^3)$ [60, 61] und wird durch die Gitter-QCD bestätigt [62]. (Hier wird der Mittelwert der beiden Ergebnisse [60, 61] verwendet und das doppelte der angegebenen Unsicherheit verwendet.) Als Hadron-Massen werden $m_{D^0} = 1,865 \text{ GeV}$ und weiter unten $m_{D^*} = 2,01 \text{ GeV}$ aus [17] verwendet.

Das Quark-Kondensat ist eine bekannte Größe aus der chiralen Störungstheorie und kann durch die Gell-Mann-Oakes-Renner(GMOR)-Relation bestimmt werden (hier wird der Wert aus [63] verwendet):

$$\langle \bar{q}q \rangle (1 \text{ GeV}) = -\frac{1}{2} \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{m_u + m_d} (1 \text{ GeV}) = -(246_{-19}^{+28} \text{ MeV})^3. \quad (3.31)$$

Ferner ist das Gluon-Kondensat aus Charmonium-Summenregeln bekannt als:

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle = 0,012_{-0,012}^{+0,006} \text{ GeV}^4, \quad (3.32)$$

und der Parameter m_0 für das Quark-Gluon-Kondensat lautet:

$$m_0^2 = 0,8 \pm 0,2 \text{ GeV}^2. \quad (3.33)$$

(Beide Werte stammen aus [63, 56].) Die Skalenabhängigkeit des Quark-Kondensats ist, wie aus der GMOR-Relation ersichtlich, das einer inversen Masse, also $\gamma_0^{(\bar{q}q)} = -4$. Das Gluon-Kondensat hat $\gamma_0^{(GG)} = 0$, der Parameter m_0^2 hat $\gamma_0^{(m_0)} = 4$ und die Skalenabhängigkeit des 4-Quark-Kondensats ist vernachlässigbar [56].

Die Renormierungs- und die Faktorisierungsskala werden wie üblich gleich gewählt zu $\mu = 1,5 \pm 0,5 \text{ GeV}$. Dies ist motiviert durch die bekannte Skalenrelation (siehe etwa [63])

$$\mu \sim \sqrt{m_D^2 - m_c^2} \approx \sqrt{m_{\Lambda_c}^2 - m_c^2}, \quad (3.34)$$

da die hier angegebenen Eingabewerte ebenfalls noch in den später folgenden Summenregeln für D^* , Λ_c und Σ_c verwendet werden.

Die Wahl des Borel-Parameters wird durch folgenden Überlegungen motiviert: Für zu kleine M^2 ist die (abgebrochene) Kondensat-Entwicklung nicht mehr anwendbar und die Kondensat-Terme überwiegen in der Summenregel, weswegen man üblicherweise verlangt, dass sie nicht den Hauptanteil an der Korrelationsfunktion tragen.

Für zu große Werte von M^2 hingegen wird der Kontinuumsbeitrag nicht mehr stark genug unterdrückt. Daher verlangt man, dass dieser nur einen geringen Anteil von etwa 30 – 40% an der gesamten Korrelationsfunktion (also mit $s_0^D \rightarrow \infty$) trägt. Die eben erwähnten Größen sind für diese Summenregel in Abbildung 3.6 gezeigt und man sieht, dass $M^2 \in [1, 5; 2, 5] \text{ GeV}^2$ ein geeigneter Bereich ist. Dieser Bereich wird üblicherweise als *Borel-Fenster* bezeichnet und existiert in der Regel für die Summenregeln (allerdings nicht zwangsweise, siehe [54]).

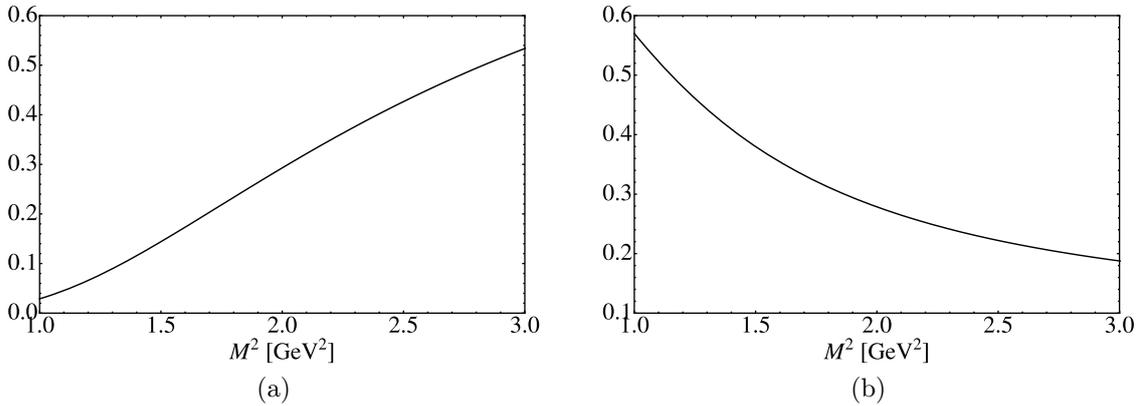


Abbildung 3.6.: Zur Bestimmung des Borel-Fensters: (a) Der Anteil der angeregten Zustände (Integration von s_0 bis ∞) an der gesamten Korrelationsfunktion (Integration von m_c^2 bis ∞), sowie (b) der Anteil der Kondensat-Beiträge an der Korrelationsfunktion.

Zur Bestimmung des Parameters s_0 existiert ein allgemeines Verfahren, das darauf beruht, dass aus der erhaltenen Summenregel ebenfalls die Masse des betrachteten Hadrons berechnet werden kann. In diesem Beispiel (und auch den anderen in dieser Arbeit) sieht es folgendermaßen aus: Nach Borel-Transformation und Subtraktion der Kontinuumsbeiträge durch Einführung des Parameters s_0 ist die Summenregel in der Form

$$\Pi(M^2, s_0) = \frac{m_D^2}{m_c} f_D^2 e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} \quad (3.35)$$

gegeben. Durch Ableitung nach M^2 erhält man:

$$\frac{\partial \Pi(M^2, s_0)}{\partial M^2} = \frac{m_D^2}{m_c} f_D^2 e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} \frac{m_D^2}{M^4}, \quad (3.36)$$

und somit kann m_D berechnet werden durch:

$$m_D = \sqrt{\frac{M^4 \frac{\partial \Pi(M^2, s_0)}{\partial M^2}}{\Pi(M^2, s_0)}}. \quad (3.37)$$

Da m_D experimentell mit großer Genauigkeit gemessen ist, kann dieser Zusammenhang genutzt werden, um den Parameter s_0 im zuvor passend ausgewählten Borel-Fenster festzulegen. Abbildung 3.7 (b) zeigt den aus der obigen Formel für

diese Summenregel berechneten Massenwert von m_D im Vergleich zum experimentellen. Man erkennt, dass eine gute Übereinstimmung (von unter 4%) im Bereich $\bar{s}_0^D = 6,5 \pm 0,5 \text{ GeV}^2$ gegeben ist. Dieses Ergebnis wird daher als Eingabeparameter verwendet. In Abbildung 3.7 (a) ist das Ergebnis für f_D in Abhängigkeit von M^2 gezeigt. Man kommt somit zum folgenden Wert mit der Genauigkeit α_s^0 :

$$f_D^{(0)} = 171_{-13}^{+10} \text{ MeV} . \quad (3.38)$$

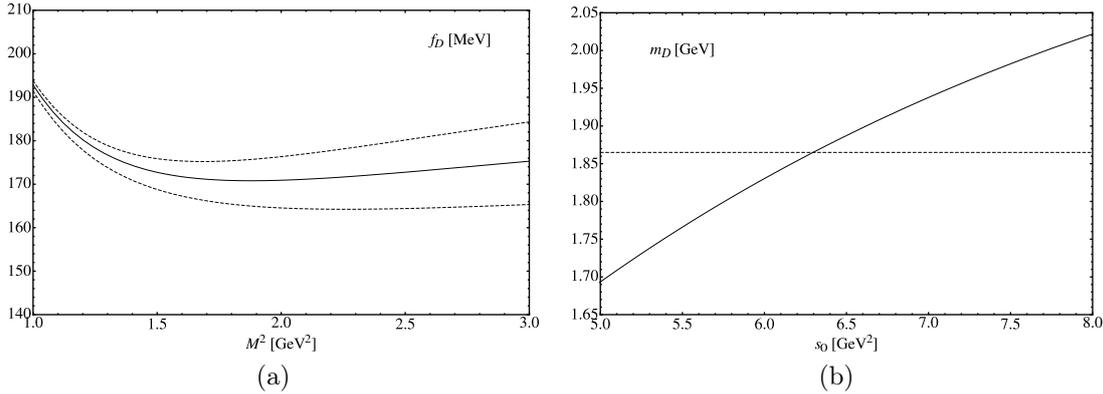


Abbildung 3.7.: (a) Der berechnete Wert von f_D in Abhängigkeit von M^2 (durchgezogene Linie) und sein Unsicherheitsbereich unter Variation von s_0 (gestrichelte Linien), sowie (b) die aus (3.37) bestimmte D -Meson-Masse in Abhängigkeit von s_0^D .

Zur Abschätzung der theoretischen Unsicherheit der Zerfallskonstante werden alle Eingabeparameter jeweils einzeln in ihrem eigenen Unsicherheitsbereich variiert und die Differenz des sich damit aus der Summenregel ergebenden Wertes zum Zentralwert gebildet. Alle Einzelunsicherheiten werden dann zur Gesamtunsicherheit quadratisch addiert. Hier stammen die größten Unsicherheiten vom Quarkkondensat und der μ -Abhängigkeit.

In der oben angegebenen Summenregel sind keine α_s -Korrekturen enthalten. Sie wird allerdings in Kapitel 5 zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ verwendet, da die Zerfallskonstanten dort aus Konsistenzgründen in dieser Ordnung betrachtet werden müssen. Aktuell ist die Berechnung der Zerfallskonstanten von schweren pseudoskalaren Mesonen durch QCD-Summenregeln bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ bekannt [64, 65]. In [65] wird das Resultat

$$f_D = (195 \pm 20) \text{ MeV} \quad (3.39)$$

angegeben. Die Zerfallskonstante f_D kann über den leptonischen Zerfall $D \rightarrow \ell \nu_\ell$ zudem auch direkt gemessen werden und aktuell steht eine Messung der CLEO-Kollaboration [66] von

$$f_D^{exp} = 205,8 \pm 8,9 \text{ MeV} \quad (3.40)$$

mit einer guten Genauigkeit zur Verfügung (die dort angegebenen Fehler wurden hier quadratisch addiert). Dies wird auch durch aktuelle Resultate der Gitter-QCD, wie $f_D = (207 \pm 11) \text{ MeV}$ [67] bestätigt.

Für die Zerfallskonstante f_{D^*} des D^* -Mesons kann mit einer entsprechenden Korrelationsfunktion unter Verwendung des interpolierenden Stroms $j_\mu = \bar{c}\gamma_\mu q$ ebenfalls eine entsprechende Summenregel hergeleitet werden, die in Anhang A.1 zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ angegeben ist. Auf analoge Weise zum D -Meson wird hier das Borel-Fenster zu $M_{D^*}^2 \in [1, 5; 2, 5] \text{ GeV}^2$ bestimmt und im Parameterbereich $s_0^{D^*} = 8, 0 \pm 0, 5 \text{ GeV}^2$ ergibt sich eine bis auf 2% genaue Bestimmung von m_{D^*} . Als Endergebnis erhält man hier:

$$f_{D^*} = 266_{-45}^{+25} \text{ MeV} . \quad (3.41)$$

3.1.2. Berechnung der Zerfallskonstanten von Λ_c - und Σ_c -Baryonen

Hier soll die Berechnung der Zerfallskonstanten (2.16) und (2.18) von Λ_c - und der analog definierten Zerfallskonstanten von Σ_c -Baryonen vorgestellt werden, die für die Anwendung in Kapitel 5 als Eingabeparameter von Bedeutung sind. Außerdem wird die Behandlung des bereits erwähnten Problems der Parität vorgestellt, welches ebenfalls leicht auf die kompliziertere Situation zur Berechnung von Formfaktoren verallgemeinert werden kann.

In Übereinstimmung mit den Zweipunktsummenregeln für Mesonen definiert man hier eine Korrelationsfunktion mit den Strömen $\eta^{(i)}$ und $\bar{\eta}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} F^{(i)}(q) &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ \eta^{(i)}(x), \bar{\eta}^{(i)}(0) \} | 0 \rangle \\ &= F_1^{(i)}(q^2) \not{q} + F_2^{(i)}(q^2) . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Diese besitzt die zwei unabhängigen Dirac-Strukturen $F_1^{(i)}(q^2)$ und $F_2^{(i)}(q^2)$. Die hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion erfordert nun die Einsetzung eines vollständigen Satzes von Zwischenzuständen sowohl mit positiver als auch mit negativer Parität:

$$\begin{aligned} F^{(i)}(q) &= \frac{\langle 0 | \eta^{(i)} | \Lambda_c(q) \rangle \langle \Lambda_c(q) | \bar{\eta}^{(i)} | 0 \rangle}{m_{\Lambda_c}^2 - q^2} + \frac{\langle 0 | \eta^{(i)} | \Lambda_c^*(q) \rangle \langle \Lambda_c^*(q) | \bar{\eta}^{(i)} | 0 \rangle}{m_{\Lambda_c^*}^2 - q^2} \\ &\quad + \text{Kontinuum} . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Hier setzt man die Definitionen der Zerfallskonstanten ein, wobei zu beachten ist, dass sich für die hier auftretenden Dirac-adjungierten Ströme $\bar{\eta}$ ergibt: $\langle \Lambda_c(p) | \bar{\eta} | 0 \rangle = \lambda_{\Lambda_c}^* m_{\Lambda_c} \bar{u}_{\Lambda_c}(p)$, aber $\langle \Lambda_c^*(p) | \bar{\eta} | 0 \rangle = -\lambda_{\Lambda_c^*}^* m_{\Lambda_c^*} \bar{u}_{\Lambda_c^*}(p)$ wegen $\bar{u} = u^+ \gamma^0$ und dem bei

Λ_c^* zusätzlich auftretenden γ_5 . Damit erhält man:

$$F^{(i)}(q) = \frac{|\lambda_{\Lambda_c}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c}^2}{m_{\Lambda_c}^2 - q^2} [u_{\Lambda_c}(q) \bar{u}_{\Lambda_c}(q)] - \frac{|\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c^*}^2}{m_{\Lambda_c^*}^2 - q^2} [\gamma_5 u_{\Lambda_c^*}(q) \bar{u}_{\Lambda_c^*}(q) \gamma_5] + \text{Kontinuum} . \quad (3.44)$$

Dabei wurde die implizit in dem vollständigen Satz der Zwischenzustände enthaltene Summe über die Polarisationszustände genutzt. Die Kontinuumsbeiträge werden in zwei Funktionen $\rho_1(s)$ und $\rho_2(s)$ für die beiden Dirac-Strukturen zusammengefasst:

$$F^{(i)}(q) = \frac{|\lambda_{\Lambda_c}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c}^2}{m_{\Lambda_c}^2 - q^2} (\not{q} + m_{\Lambda_c}) - \frac{|\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c^*}^2}{m_{\Lambda_c^*}^2 - q^2} (-\not{q} + m_{\Lambda_c^*}) + \int_{s_0}^{+\infty} \frac{ds}{s - q^2} [\rho_1^{(i)}(s) \not{q} + \rho_2^{(i)}(s)] . \quad (3.45)$$

Man sieht, dass die beiden verschiedenen Paritätszustände mit unterschiedlichen Dirac-Strukturen beitragen, was es damit auch erlaubt, sie in der Summenregel voneinander zu unterscheiden.

Aus der QCD kann durch Operatorproduktentwicklung wieder die Korrelationsfunktion $F^{(i)}(q) = F_1^{(i)}(q^2)\not{q} + F_2^{(i)}(q^2)$ berechnet werden. Nach Gleichsetzen der beiden Darstellungen, Anwenden von Quark-Hadron-Dualität und Borel-Transformation wie im vorigen Abschnitt erhält man dann:

$$F_1^{(i)}(M^2) = |\lambda_{\Lambda_c}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c}^2 \exp\left[-\frac{m_{\Lambda_c}^2}{M^2}\right] + |\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c^*}^2 \exp\left[-\frac{m_{\Lambda_c^*}^2}{M^2}\right] , \quad (3.46)$$

$$F_2^{(i)}(M^2) = |\lambda_{\Lambda_c}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c}^3 \exp\left[-\frac{m_{\Lambda_c}^2}{M^2}\right] - |\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c^*}^3 \exp\left[-\frac{m_{\Lambda_c^*}^2}{M^2}\right] . \quad (3.47)$$

Die Funktionen $F_1^{(i)}$ und $F_2^{(i)}$ sind dabei in der Dispersionsdarstellung

$$F_{(1,2)}^{(i)}(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{m_c^2}^{s_0} ds \frac{\text{Im} F_{(1,2)}^{(i)}(s)}{s - q^2} \quad \text{bzw.} \quad F_{(1,2)}^{(i)}(M^2) = \frac{1}{\pi} \int_{m_c^2}^{s_0} ds \text{Im} F_{(1,2)}^{(i)}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} . \quad (3.48)$$

Durch Lösen des obigen Gleichungssystems erhält man damit schließlich die Summenregeln für die Zerfallskonstanten:

$$|\lambda_{\Lambda_c}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c}^2 (m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*}) \exp\left[-\frac{m_{\Lambda_c}^2}{M^2}\right] = m_{\Lambda_c^*} F_1^{(i)}(M^2) + F_2^{(i)}(M^2) , \quad (3.49)$$

$$|\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)}|^2 m_{\Lambda_c^*}^2 (m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*}) \exp\left[-\frac{m_{\Lambda_c^*}^2}{M^2}\right] = m_{\Lambda_c} F_1^{(i)}(M^2) - F_2^{(i)}(M^2) . \quad (3.50)$$

Die Korrelationsfunktionen $F^{(i)}(q)$ wurden für Λ_c - und Σ_c -Baryonen in den Veröffentlichungen [68, 69, 38] berechnet. Es ist allerdings zu beachten, dass dabei größtenteils andere Definitionen der interpolierenden Ströme verwendet wurden, und es daher nötig ist, diese auf die hier verwendeten zu übertragen:

- Für das Λ_c -Baryon wurde in [69] der interpolierende Strom

$$J_{\Lambda_c}^{(I)} = (u^T C \gamma_5 d) c + b(u^T C d) \gamma_5 c \quad (3.51)$$

verwendet, wobei b ein freier, skalarer Parameter ist. Für $b = 0$ erhält man somit leicht den in Gl. (2.11) definierten pseudoskalaren Strom: $J_{\Lambda}^{(I)}|_{b=0} = \eta_{\Lambda_c}^{(P)}$. In [38] wurden die beiden durch $SU(3)_{flavour}$ -Symmetrie motivierten Ströme

$$J_{\Lambda_c}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(u^T C \gamma_5 d) c + (u^T C \gamma_5 c) d - (d^T C \gamma_5 c) u] \quad (3.52)$$

$$J_{\Lambda_c}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(u^T C d) \gamma_5 c + (u^T C c) \gamma_5 d - (d^T C c) \gamma_5 u] \quad (3.53)$$

eingeführt, die dort in der Form $J_{\Lambda_c}^{(II)} = J_{\Lambda_c}^{(1)} + b J_{\Lambda_c}^{(2)}$ zusammengefasst werden, wobei b wie bei $J_{\Lambda_c}^{(II)}$ ein freier Parameter ist. Durch eine Fierz-Transformation (siehe z.B. [2]) können sie umgeformt werden zu:

$$J_{\Lambda_c}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\frac{5}{2} (u^T C \gamma_5 d) c + \frac{1}{2} (u^T C d) \gamma_5 c + \frac{1}{2} (u^T C \gamma_5 \gamma_\mu d) \gamma^\mu c \right], \quad (3.54)$$

$$J_{\Lambda_c}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\frac{1}{2} (u^T C \gamma_5 d) c + \frac{5}{2} (u^T C d) \gamma_5 c - \frac{1}{2} (u^T C \gamma_5 \gamma_\mu d) \gamma^\mu c \right]. \quad (3.55)$$

Mit der Wahl $b = -\frac{1}{5}$ erhält man hier:

$$J_{\Lambda_c}^{(II)}|_{b=-\frac{1}{5}} = J_{\Lambda_c}^{(1)} - \frac{1}{5} J_{\Lambda_c}^{(2)} = \frac{\sqrt{6}}{10} (\eta_{\Lambda_c}^{(A)} + 4\eta_{\Lambda_c}^{(P)}). \quad (3.56)$$

Aus dem Strom $J_{\Lambda_c}^{(I)}|_{b=0}$ erhält man damit eine Zweipunktsummenregel für $|\lambda_{\Lambda_c}^{(P)}|$ und aus $J_{\Lambda_c}^{(II)}|_{b=-\frac{1}{5}}$ eine für $\frac{\sqrt{6}}{10} |\lambda_{\Lambda_c}^{(A)} + 4\lambda_{\Lambda_c}^{(P)}|$, jeweils in der in Gleichung (3.49) angegebenen Form.

- Zur Bestimmung der Zerfallskonstanten von Σ_c wurde in [68] folgender Strom gewählt:

$$J_{\Sigma_c} = (u^T C \gamma_5 c) u + b(u^T C c) \gamma_5 u. \quad (3.57)$$

Dieser beschreibt zwar das Σ_c^{++} -Baryon mit dem Quarkinhalt uuc , dessen Zerfallskonstante ist jedoch aufgrund der Isospin-Symmetrie identisch zu der von Σ_c^+ (in beiden Fällen sind die beiden leichten Quarks in einem symmetrischen Zustand). Daher kann dieser Strom hier genutzt werden. Auch in

diesem Fall kann mit Hilfe einer Fierz-Transformation folgende Form angegeben werden:

$$J_{\Sigma_c} = \frac{1-b}{4}\eta_{\Sigma_c}^{(\mathcal{I})} + \frac{1+b}{8}\eta_{\Sigma_c}^{(\mathcal{T})}, \quad (3.58)$$

woraus folgt:

$$\eta_{\Sigma_c}^{(\mathcal{I})} = 2J_{\Sigma_c}|_{b=-1} \quad \eta_{\Sigma_c}^{(\mathcal{T})} = 4J_{\Sigma_c}|_{b=+1}. \quad (3.59)$$

Die expliziten Formeln dafür sind in Anhang A.2 gegeben und mit ihnen ist es möglich, mit einer analogen Auswertung zum Fall der Mesonen, die Zerfallskonstanten $\lambda_{\Lambda_c}^{(\mathcal{P})}$ und $\lambda_{\Lambda_c}^{(\mathcal{I})}$ zu bestimmen. Für Λ_c und Σ_c ergeben sich in guter Näherung die gleichen Borel-Fenster $M_{\Lambda_c/\Sigma_c}^2 \in [1, 0; 2, 0]$ GeV² sowie $s_0^{\Lambda_c/\Sigma_c} = 10, 0 \pm 0, 5$ GeV², mit welcher die Massen der Baryonen mit einer Genauigkeit von 10% aus den Summenregeln reproduziert werden können.

Die Massen der beteiligten Hadronen lauten $m_{\Lambda_c} = 2, 286$ GeV, $m_{\Sigma_c} = 2, 454$ GeV, $m_{\Lambda_c^*} = 2, 595$ GeV aus [17] und für Σ_c^* wird der ebenda angegebene $\Sigma_c(2800)$ -Zustand verwendet der mit $m_{\Sigma_c^*} = 2, 801$ GeV auch die durch heavy-quark-Symmetrie in etwa erwartete Massenrelation erfüllt:

$$m_{\Sigma_c^*} = m_{\Sigma_c} + (m_{\Lambda_c^*} - m_{\Lambda_c}) \simeq 2, 764 \text{ GeV}. \quad (3.60)$$

Nach einer Fehleranalyse erhält man damit die Endergebnisse:

$$\begin{aligned} \lambda_{\Lambda_c}^{(\mathcal{P})} &= (0, 0119^{+0,0019}_{-0,0028}) \text{ GeV}^2, \\ \lambda_{\Lambda_c}^{(\mathcal{A})} &= (0, 0151^{+0,0037}_{-0,0039}) \text{ GeV}^2, \\ \lambda_{\Sigma_c}^{(\mathcal{I})} &= (0, 0308^{+0,0049}_{-0,0074}) \text{ GeV}^2, \\ \lambda_{\Sigma_c}^{(\mathcal{T})} &= (0, 0608^{+0,0090}_{-0,0148}) \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

3.2. Lichtkegel-Summenregeln

Zur Beschreibung hadronischer Wechselwirkungen ist die Betrachtung von Korrelationsfunktionen notwendig, an denen mindestens drei Hadronen bzw. interpolierende Ströme beteiligt sind. Eine Möglichkeit dazu besteht in der Betrachtung von Korrelationsfunktionen mit drei interpolierenden Strömen, den sogenannten *Dreipunktsummenregeln* (Abb. 3.8), welche zur Berechnung vieler Übergangsamplituden erfolgreich angewandt wurden. Diese Methode hat allerdings auch einige theoretische Probleme (siehe [70, 49, 52]), die ihre Nützlichkeit einschränken. Die

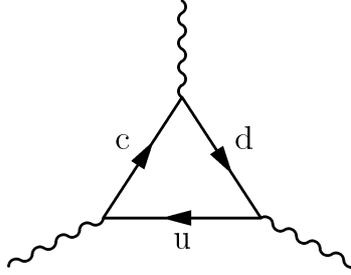


Abbildung 3.8.: Führender Beitrag der Operatorproduktentwicklung für die Korrelationsfunktion einer Dreipunktsummenregel des $D \rightarrow \pi$ -Übergangs.

Kondensat-Entwicklung ist etwa nur in einem relativ eingeschränkten kinematischen Bereich gültig, und es ist die Verwendung einer doppelten Dispersionsdarstellung (siehe auch Kapitel 5) notwendig, die die Verwendung verschiedener Modelle für die Quark-Hadron-Dualität notwendig macht.

Gegen Ende der 80er Jahre wurde eine andere Form der QCD-Summenregeln entwickelt [71, 72, 73], die *Lichtkegel-Summenregeln*, bei der diese Probleme nicht auftreten und die einen weiteren Einsatzbereich hat. Sie verbindet das Konzept der QCD-Summenregeln mit den Methoden der *Lichtkegelentwicklung* und der *Lichtkegelverteilungsamplituden*, welche zur Beschreibung exklusiver Prozesse mit hohen Impulsüberträgen entwickelt wurden. Seitdem hat sie sich in vielen Anwendungen als sehr nützliches Hilfsmittel zur Berechnung hadronischer Formfaktoren und Kopplungskonstanten erwiesen. Für weitere Literatur siehe z.B. [49, 52]

3.2.1. Grundlegendes Konzept

Bei der Methode der Lichtkegel-Summenregeln werden Korrelationsfunktionen mit zwei interpolierenden Strömen und einem (reellen) Hadron im Ein- oder Ausgangszustand verwendet. Das Grundprinzip soll hier am Beispiel der Berechnung der in (2.19) definierten $D \rightarrow \pi$ -Formfaktoren

$$\langle \pi^-(p) | \bar{d}\gamma_\mu c | D^0(p+q) \rangle = 2f_{D\pi}^+(q^2)p_\mu + (f_{D\pi}^+(q^2) + f_{D\pi}^-(q^2))q_\mu \quad (3.62)$$

gezeigt werden. Es wird folgende Korrelationsfunktion mit einem interpolierenden Strom für das D -Meson, sowie dem Vektorstrom für den schwachen Übergang gewählt:

$$\begin{aligned} F_\mu(p, q) &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \pi(p) | T \{ \bar{d}(x) \gamma_\mu c(x), m_c \bar{c}(0) i \gamma_5 u(0) \} | 0 \rangle \\ &= F(q^2, (p+q)^2) p_\mu + \tilde{F}(q^2, (p+q)^2) q_\mu . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dabei sind $F(q^2, (p+q)^2)$ und $\tilde{F}(q^2, (p+q)^2)$ zwei unabhängige Lorentz-Strukturen der Korrelationsfunktion, aus denen man jeweils eine Summenregel für den entsprechend zugehörigen Formfaktor berechnen kann.

Der Pion-Zustand ist reell, also $p^2 = m_\pi^2$. Analog zu den Zweipunktsummenregeln kann auch hier eine hadronische Darstellung gefunden werden:

$$F(p^2, (p+q)^2) = \frac{2m_D^2 f_D f_{D\pi}^+(p^2)}{m_c(m_D^2 - (p+q)^2)} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - (p+q)^2}, \quad (3.64)$$

$$\tilde{F}(p^2, (p+q)^2) = \frac{m_D^2 f_D (f_{D\pi}^+(p^2) + f_{D\pi}^-(p^2))}{m_c(m_D^2 - (p+q)^2)} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\tilde{\rho}(s)}{s - (p+q)^2}. \quad (3.65)$$

Eine Berechnung der Korrelationsfunktion aus der QCD wird wie bei den Zweipunktsummenregeln wiederum mit einer Operatorproduktentwicklung erfolgen. Hier wird eine spezielle Form, die sogenannte *Lichtkegelentwicklung* in Potenzen von x^2 , verwendet, bei der bestimmte Terme der Operatorproduktentwicklung resummiert werden und die im Folgenden beschrieben wird. In [49] wurde für den Prozess $\pi \rightarrow \gamma^* \gamma^*$ gezeigt, dass die entsprechende Korrelationsfunktion durch kurzreichweitige Beiträge vom Lichtkegel $x^2 = 0$ dominiert wird, was die Anwendung der Störungstheorie rechtfertigt, und dass daher die Lichtkegelentwicklung dort Gültigkeit besitzt. Dieser Beweis kann auf Prozesse mit schweren Quarks verallgemeinert werden [74, 75]. Die Lichtkegeldominanz ist allerdings nur gegeben, wenn $q^2 \ll m_c^2$ und $(p+q)^2 \ll m_c^2$ gelten, also das in der obigen Korrelationsfunktion auftretende c -quark eine große Virtualität besitzt und das Produkt der c -Quark-Feldoperatoren um $x^2 \sim 0$ entwickelt werden kann.

Zur Berechnung der Korrelationsfunktion (3.63) tragen in führender Ordnung die beiden in Abbildung 3.9 gezeigten Diagramme bei, wobei in dieser Arbeit die Quark-Antiquark- und die Quark-Antiquark-Gluon-Fock-Zustände des Pions betrachtet werden (im Folgenden als Zwei- und Dreiteilchenbeitrag bezeichnet).

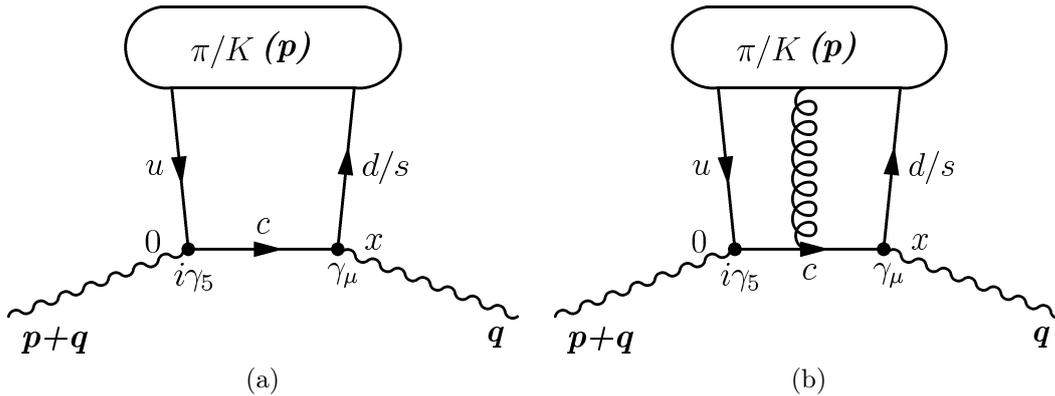


Abbildung 3.9.: Der führende Zweiteilchen- und Dreiteilchen-Beitrag der Operatorproduktentwicklung für die Korrelationsfunktion des $D \rightarrow \pi/K$ -Übergangs.

Diese beiden Beiträge werden durch Kontraktion der c -Quarkfelder in (3.63) zum Propagator

$$\begin{aligned} \langle 0 | c_\alpha^i(x) \bar{c}_\beta^j(0) | 0 \rangle &= -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \left[\delta^{ij} \frac{\not{k} + m_c}{m_c^2 - k^2} \right. \\ &\quad \left. + g_s \int_0^1 dv G^{\mu\nu a}(vx) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{ij} \left(\frac{\not{k} + m_c}{2(m_c^2 - k^2)^2} \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{m_c^2 - k^2} v x_\mu \gamma_\nu \right) \right]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.66)$$

berücksichtigt, wobei die Herleitung der obigen Relation (Lichtkegelentwicklung des c -Quark-Propagators) in [76] zu finden ist (siehe auch die entsprechende Bemerkung in [77]). Im Folgenden soll der Zweiteilchen-Beitrag näher untersucht werden. Man erhält für ihn:

$$\begin{aligned} F_\mu(p, q) &= \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i(q-k) \cdot x} \frac{1}{m_c^2 - k^2} \langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu (\not{k} + m_c) m_c i \gamma_5 d(0) | 0 \rangle \\ &= i m_c \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i(q-k) \cdot x} \frac{1}{m_c^2 - k^2} \\ &\quad \cdot \left[m_c \langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(0) | 0 \rangle + k^\nu \langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 d(0) | 0 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Betrachtet man nun das erste (nichtlokale) Matrixelement und führt eine Entwicklung nach lokalen Operatoren (wie in Gl. 3.18) durch:

$$\bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \bar{u}(0) \left(\overleftarrow{D} \cdot x \right)^n \gamma_\mu \gamma_5 d(0), \quad (3.68)$$

so erhält man eine Reihe aus Matrixelementen der folgenden, allgemeinen Lorentz-Struktur:

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{u}(0) \overleftarrow{D}_{\alpha_1} \overleftarrow{D}_{\alpha_2} \dots \overleftarrow{D}_{\alpha_n} \gamma_\mu \gamma_5 d(0) | 0 \rangle \\ = (-i)^n p_\mu p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_n} M_n + (-i)^n p_\mu g_{\alpha_1 \alpha_2} \dots p_{\alpha_n} M'_n + \dots \end{aligned} \quad (3.69)$$

Durch Einsetzen in die lokale Entwicklung (3.68) erhält man Terme mit $(p \cdot x)^n$ für die erste Struktur und entsprechende Potenzen von x^2 in den weiteren Termen (hier wird der Name Lichtkegelentwicklung bereits deutlich). Nach Durchführen der Integrationen erhält man einen Beitrag zur Korrelationsfunktion der Form:

$$F_\mu(p, q) \sim \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n M_n + \frac{4}{q^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^{n-2}}{n(n-1)} M'_n + \dots \quad (3.70)$$

als Reihe in der Variablen $\xi = \frac{2p \cdot q}{m_c^2 - q^2} = \frac{(p+q)^2 - q^2}{m_c^2 - q^2}$, die in der Regel ~ 1 ist, womit die obige Entwicklung *nicht* nach einigen Termen abgebrochen werden kann. Man erkennt allerdings, dass die obigen Summen über die jeweiligen Matrixelemente M_n, M'_n, \dots eine Reihenentwicklung in $1/q^2$ bilden, weswegen es sinnvoll ist,

die Operatorproduktentwicklung nach diesen Größen durchzuführen, die damit zur Lichtkegelentwicklung wird. Man kann zeigen, dass die so definierten Operatoren in den einzelnen Termen der Entwicklung sich durch ihren sogenannten *Twist* auszeichnen, der definiert ist als: Twist = Dimension – Spin. Das führende Matrixelement $\langle \pi(p) | \bar{u}(0) \gamma_\mu \gamma_5 d(0) | 0 \rangle$ aus dem obigen Beispiel etwa hat die kanonische Dimension $2 \cdot 3/2 = 3$ und die Dirac-Struktur koppelt die Felder zu einem Operator mit Spin 1, womit sich hier der führende Twist 2 ergibt. Die weiteren Terme der Entwicklung haben dann Twist 4, 6, ... In dieser Entwicklung lassen sich nun die nichtlokalen Matrixelemente in Gl. (3.67) durch sogenannte *Lichtkegelverteilungsamplituden* parametrisieren. Diese sollen im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

3.2.2. Lichtkegel-Verteilungsfunktionen für π - und K -Mesonen

Definition

Der führende Term zu Twist 2 in der Lichtkegelentwicklung des eben betrachteten Matrixelements wird durch die Lichtkegelverteilungsamplitude $\varphi_\pi(u)$ parametrisiert, die definiert ist als:

$$\langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 [x, 0] d(0) | 0 \rangle_{x^2=0} = -i f_\pi p_\mu \int_0^1 du e^{iup \cdot x} \varphi_\pi(u, \mu) . \quad (3.71)$$

Sie stellt anschaulich die Impulsverteilung eines leichten Quarks mit dem Bruchteil u an der longitudinalen Impulskomponente des Pions dar. Als Impulsbruchteil des Antiquarks taucht auch oft die Variable $1 - u$ auf, für die man die Abkürzung $\bar{u} = 1 - u$ definiert. Entsprechend werden weitere Lichtkegelverteilungsamplituden für andere Operatoren und höhere Terme in der Lichtkegelentwicklung definiert (siehe dazu neben den folgenden Abschnitten etwa auch [63, 78]).

$[x, 0]$ ist ein *pfadgeordneter Eichfaktor* („Wilson-Linie“), der benötigt wird, um die Eichinvarianz der Definition zu gewährleisten:

$$[x, 0] = \mathcal{P} \exp \left\{ i g_s \int_0^1 dt x^\mu A_\mu(tx) \right\} , \quad (3.72)$$

wobei \mathcal{P} für das pfadgeordnete Produkt steht. Arbeitet man in der Fock-Schwinger- bzw. *Lichtkegleichung* $x^\mu A_\mu = 0$, was im Folgenden stets angenommen werden soll, ist dieser Faktor 1 und braucht daher nicht weiter berücksichtigt zu werden. Die Funktion $\varphi_\pi(u)$ ist normiert und aufgrund der G-Parität symmetrisch:

$$\int_0^1 du \varphi_\pi(u) = 1 , \quad \varphi_\pi(u) = \varphi_\pi(1 - u) . \quad (3.73)$$

Da sich für $x \rightarrow 0$ aus dem nichtlokalen Matrixelement in (3.71) die Definition (2.3) der Pion-Zerfallskonstanten f_π ergibt, taucht diese als fundamentaler Normierungsparameter auf. Die Skala μ ist die *Faktorisierungsskala*, die die Trennung von lang- und kurzreichweitigen Anteilen beschreibt, analog zu den Vakuumkondensaten. In großer Analogie zu diesen handelt es sich bei Lichtkegelverteilungsamplituden um *universelle* (also prozessunabhängige) Größen, die die nichtperturbative Struktur eines Hadrons beschreiben und in den Lichtkegel-Summenregeln an deren Stelle als fundamentale Parameter verwendet werden. Der dem jeweils betrachteten Prozess zugrunde liegende harte Streuprozess kann dagegen perturbativ durch eine Funktion $T_{0(1)}^{(t)}(q^2, (p+q)^2, u, \mu)$ beschrieben werden, die die kurzreichweitigen Anteile enthält. Die Korrelationsfunktion kann somit in der folgenden, faktorisierten Form geschrieben werden:

$$F_\mu(p, q) = \sum_t \int du T^{(t)}(q^2, (p+q)^2, u, \mu) \phi^{(t)}(u, \mu), \quad (3.74)$$

wobei die Summe über die verschiedenen Verteilungsamplituden zum Twist t läuft.

Nun folgt die vollständige Definition aller Pion-Zweiteilchen-Verteilungsamplituden bis Twist 4 [63]:

$$\begin{aligned} \langle \pi^+(p) | \bar{u}_\omega^i(x_1) d_\xi^j(x_2) | 0 \rangle_{x^2 \rightarrow 0} &= \frac{i\delta^{ij}}{12} f_\pi \int_0^1 du e^{iup \cdot x_1 + i\bar{u}p \cdot x_2} \left([\not{p}\gamma_5]_{\xi\omega} \varphi_\pi(u) \right. \\ &\quad - [\gamma_5]_{\xi\omega} \mu_\pi \phi_{3\pi}^p(u) + \frac{1}{6} [\sigma_{\beta\tau}\gamma_5]_{\xi\omega} p_\beta(x_1 - x_2)_\tau \mu_\pi \phi_{3\pi}^\sigma(u) \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} [\not{p}\gamma_5]_{\xi\omega} (x_1 - x_2)^2 \phi_{4\pi}(u) - \frac{i}{2} [(\not{x}_1 - \not{x}_2)\gamma_5]_{\xi\omega} \int_0^u \psi_{4\pi}(v) dv \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Die Verteilungsamplituden für das K -Meson sind völlig analog definiert und werden in Gleichung (B.1) in Anhang B angegeben. Unterschiede zur Pion-Verteilungsamplitude, die sich in den verschiedenen Werten der Parameter bemerkbar machen, werden dort sowie im folgenden Kapitel 4 noch angegeben und kommentiert. Die Definition der Dreiteilchen-Verteilungsamplituden sind dort ebenfalls für das K -Meson in (B.2) aufgeführt und sollen hier nicht noch einmal angegeben werden. Sie sind denen für das Pion wieder völlig analog.

Konforme Entwicklung

Die oben definierten Lichtkegelverteilungsamplituden wurden ursprünglich und vor der Entwicklung der Lichtkegel-Summenregeln im Zusammenhang mit den bereits erwähnten harten, exklusiven Prozessen eingeführt [79, 80, 81], die von kurzreichweitigen Beiträgen vom Lichtkegel $x^2 \approx 0$ dominiert werden. Für die zugrunde liegende Theorie sei hier auf die ausführliche Darstellung in [82] verwiesen. Hier

wird lediglich eine wichtige Methode zu ihrer Beschreibung angegeben, die *konforme Entwicklung*.

Die Funktion $\varphi_\pi(u, \mu)$ genügt einer Renormierungsgruppengleichung

$$\frac{d\varphi_\pi(u, \mu)}{d \ln \mu} = \int_0^1 dw V(u, w) \varphi_\pi(w, \mu), \quad (3.76)$$

die als *Efremov-Radyushkin-Brodsky-Lepage-Gleichung* bekannt ist [79, 80], wobei die Funktion $V(u, w)$ (siehe [52]) perturbativ bestimmt werden kann. Unter Verwendung der *konformen Symmetrie* der masselosen QCD ist es möglich, eine Entwicklung in orthogonale Eigenfunktionen dazu zu finden, deren Koeffizienten multiplikativ renormierbar sind und nicht miteinander mischen. Eine ausführliche Darstellung dieser Methode findet sich in [83]. Die so erhaltene konforme Entwicklung wird standardmäßig zur Beschreibung der Lichtkegelverteilungsamplituden verwendet. Mit ihr ist es möglich, die longitudinalen und transversalen Freiheitsgrade zu trennen, analog zur Partialwellenanalyse in der Quantenmechanik, bei der Radial- und Winkelanteile getrennt werden.

Für $\varphi_\pi(u, \mu)$ ergibt sie eine Reihe in *Gegenbauer-Polynomen*:

$$\varphi_\pi(u, \mu) = 6u(1-u) \left(1 + \sum_{n=2,4,\dots} a_n(\mu) C_n^{3/2}(u - (1-u)) \right), \quad (3.77)$$

wobei für das Pion die ungeraden Terme aufgrund der G-Parität verschwinden müssen. (Beim Kaon ist dies nicht der Fall.) Die Koeffizienten $a_n(\mu)$ werden auch *Gegenbauer-Momente* genannt und haben das durch die anomale Dimension [84]

$$\gamma_0^{(n)} = C_F \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} + 4 \sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m} \right) \quad (3.78)$$

gegebene Renormierungsverhalten. Da dieser Wert für höhere Terme in der Entwicklung ansteigt, reicht es bei ausreichend großer Skala μ , nur die ersten Terme zu betrachten. Der unter Skalenänderung konstante Teil der Entwicklung wird *asymptotische Verteilungsamplitude* genannt und lautet hier:

$$\varphi_\pi^{(as)}(u) = \varphi_\pi(u, \mu \rightarrow \infty) = 6u(1-u). \quad (3.79)$$

Die Bestimmung der Momente ist durch Zweipunktsummenregeln möglich, jedoch mit relativ großen Unsicherheiten behaftet. Alternativ können sie durch Anpassung von Lichtkegel-Summenregel-Resultaten an experimentelle Daten, aus der Gitter-QCD oder aus verschiedenen nichtperturbativen Modellen, wie Instanton- oder Renormalon-Modellen, erhalten werden. Entsprechende konforme Entwicklungen werden analog für die Verteilungsamplituden höheren Twists durchgeführt. Durch die QCD-Bewegungsgleichungen bestehen zudem noch Zusammenhänge zwischen Zwei- und Dreiteilchen-Amplituden. Die entsprechenden Ausdrücke für die Lichtkegelverteilungsamplituden in der konformen Entwicklung, die in dieser Arbeit verwendet werden, sind in Anhang B zusammengefasst.

3.2.3. Berechnung des führenden Beitrags zu den Summenregeln der $D \rightarrow \pi$ -Formfaktoren

Unter Verwendung der soeben vorgestellten Lichtkegelverteilungsamplituden des Pions kann nun mit der Berechnung des führenden Zweiteilchenbeitrags des $D \rightarrow \pi$ -Formfaktors in (3.67) fortgefahren werden. Das erste Matrixelement wurde im vorigen Abschnitt analysiert und die aus (3.75) zu entnehmende Lichtkegelentwicklung bis Twist 4 lautet:

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(0) | 0 \rangle &= -i f_\pi p_\mu \int_0^1 du e^{iup \cdot x} \left(\varphi_\pi(u) + \frac{1}{16} x^2 \phi_{4\pi}(u) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} f_\pi x_\mu \int_0^1 du e^{iup \cdot x} \int_0^u dv \psi_{4\pi}(v). \end{aligned} \quad (3.80)$$

In das zweite Matrixelement wird die Relation

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} - i \sigma_{\mu\nu} \quad (3.81)$$

eingesetzt und die Lichtkegelentwicklung der beiden resultierenden Matrixelemente bis Twist 3 verwendet, die ebenfalls aus (3.75) entnommen wird:

$$\langle \pi(p) | \bar{u}(x) \gamma_5 d(0) | 0 \rangle = -i f_\pi \mu_\pi \int_0^1 du e^{iup \cdot x} \phi_{3\pi}^p(u), \quad (3.82)$$

$$\langle \pi(p) | \bar{u}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(0) | 0 \rangle = i \frac{f_\pi \mu_\pi}{6} (p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu) \int_0^1 du e^{iup \cdot x} \phi_{3\pi}^\sigma(u). \quad (3.83)$$

Es ist dabei zu beachten, dass die beiden Matrixelemente in (3.67) zu zwei *separaten* Lichtkegelentwicklungen führen. Man kommt somit auf:

$$\begin{aligned} F_\mu(p, q) &= i m_c^2 f_\pi \int_0^1 du \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i(q-k+up) \cdot x} \frac{1}{m_c^2 - k^2} \\ &\quad \cdot \left[-i p_\mu \left(\varphi_\pi(u) + \frac{1}{16} x^2 \phi_{4\pi}(u) \right) - \frac{1}{2} x_\mu \int_0^u dv \psi_{4\pi}(v) \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\mu_\pi}{m_c} \phi_{3\pi}^p(u) + \frac{\mu_\pi}{6 m_c} (p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu) \phi_{3\pi}^\sigma(u) \right]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Zur weiteren Berechnung ist es nun möglich, die im Integrand auftretenden Terme, die proportional zu einer Potenz des Ortsvektors x_μ sind, durch Ableitungen $-i \frac{\partial}{\partial q_\mu}$

zu ersetzen, was auf der folgenden, allgemeinen Relation beruht:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) x^\mu e^{i(q-k+up)\cdot x} \\
 &= \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \left(-i \frac{\partial}{\partial q_\mu} e^{i(q-k+up)\cdot x} \right) \\
 &= -i \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) e^{i(q-k+up)\cdot x} \right) \\
 &= -i \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(f(k) \Big|_{k=q+up} \right) = -i \frac{\partial}{\partial q_\mu} f(q+up) . \tag{3.85}
 \end{aligned}$$

Nach diesem Schritt ist es dann problemlos möglich, die x - und k - Integrale auszuführen, was über eine δ -Distribution zur Ersetzung $k \rightarrow q+up$ führt. Damit wird der Faktor k^2 im Nenner des c -Quark-Propagators zu:

$$\begin{aligned}
 k^2 \rightarrow (q+up)^2 &= q^2 + 2up \cdot q + u^2 p^2 \\
 &= u(p+q)^2 - up^2 - uq^2 + up^2 + q^2 \\
 &= u(p+q)^2 + (1-u)q^2 - u(1-u)m_\pi^2 . \tag{3.86}
 \end{aligned}$$

In der hier durchgeführten Rechnung wird im chiralen Limes $m_u = m_d = m_\pi = 0$ gearbeitet und die Pionmasse vernachlässigt, allerdings die Größe $\mu_\pi = m_\pi^2/(m_u+m_d)$ endlich gehalten. (In späteren Anwendungen mit der Kaon- oder Nukleon-Masse werden diese nicht vernachlässigt und der entsprechende Massenterm muss dort ebenfalls berücksichtigt werden.) Nach Durchführen der sich ergebenden Ableitungen nach q_μ erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 F_0(q^2, (p+q)^2) &= m_c^2 f_\pi \int_0^1 \frac{du}{m_c^2 - q^2 \bar{u} - (p+q)^2 u} \left\{ \varphi_\pi(u) + \frac{\mu_\pi}{m_c} u \phi_{3\pi}^p(u) \right. \\
 &+ \frac{\mu_\pi}{6m_c} \left[2 + \frac{m_c^2 + q^2}{m_c^2 - q^2 \bar{u} - (p+q)^2 u} \right] \phi_{3\pi}^\sigma(u) - \frac{m_c^2 \phi_{4\pi}(u)}{2(m_c^2 - q^2 \bar{u} - (p+q)^2 u)^2} \\
 &\left. - \frac{u}{m_c^2 - q^2 \bar{u} - (p+q)^2 u} \int_0^u dv \psi_{4\pi}(v) \right\} . \tag{3.87}
 \end{aligned}$$

Hier erkennt man, dass die $1/m_c$ -Unterdrückung des Twist 3-Terms gegenüber dem Twist 2-Term numerisch durch den Parameter $\mu_\pi > m_c$ ausgeglichen wird, so dass die Twist 3-Terme den größten Teil zur Korrelationsfunktion liefern, was sich auch in der späteren numerischen Auswertung bestätigt. Der Dreiteilchenbeitrag ist durch den im Vergleich zu den anderen Faktoren kleinen Parameter $f_{3\pi}$ relativ stark unterdrückt. Die höheren Terme mit Potenzen von x_μ aus der Lichtkegelentwicklung führen über die Ableitungen zu höheren Potenzen des Propagatornenners:

$$\frac{1}{D} := \frac{1}{m_c^2 - q^2 \bar{u} - (p+q)^2 u}, \quad (0 \leq u \leq 1), \tag{3.88}$$

woraus man beispielsweise eine starke Unterdrückung des Twist 4- zum Twist 2-Term in der Größenordnung $\sim \delta_\pi^2/D$ mit $\delta_\pi^2 \sim \Lambda_{QCD}^2$ erkennen kann. Auch dies wird in der späteren Auswertung bestätigt. Für die bisher nicht berechneten Twist 5-Korrekturen erwartet man demnach eine ähnliche Unterdrückung. Man erkennt hier gut, dass die Unterdrückung höherer Terme durch die Lichtkegelentwicklung nur dann gültig ist, wenn q^2 und $(p+q)^2$ in (3.88) wesentlich kleiner als m_c^2 gehalten werden, also das c -Quark ausreichend virtuell ist.

Die so berechnete Korrelationsfunktion wird nun in die Form einer Dispersionsrelation überführt, was entweder durch explizite Bildung des Imaginärteils, oder dazu äquivalent und technisch einfacher über eine Substitution $u \rightarrow s$ mit $u = \frac{m_c^2 - q^2}{s - q^2}$ (sowie einer entsprechenden für den Dreiteilchenanteil) möglich ist. Analog zu den Zweipunktsummenregeln wird nun über die Quark-Hadron-Dualität der Kontinuumsbeitrag abgezogen und dazu der Parameter s_0^D eingefügt. Nach Rücktransformation auf die Variable u und Anwendung der Borel-Transformation:

$$\mathcal{B}_{(p+q)^2 \rightarrow M^2} \left\{ \frac{1}{D^n} \right\} = \frac{1}{(n-1)! u^n (M^2)^{n-1}} e^{-\frac{m_c^2 - q^2 u}{u M^2}} \quad (3.89)$$

erhält man schließlich das Endergebnis:

$$\begin{aligned} F_0(q^2, M^2, s_0^D) &= m_c^2 f_\pi \int_{u_0}^1 du e^{-\frac{m_c^2 - q^2 u}{u M^2}} \left\{ \frac{\varphi_\pi(u)}{u} \right. \\ &+ \frac{\mu_\pi}{m_c} \left(\phi_{3\pi}^p(u) + \frac{1}{6} \left[\frac{2\phi_{3\pi}^\sigma(u)}{u} - \left(\frac{m_c^2 + q^2}{m_c^2 - q^2} \right) \frac{d\phi_{3\pi}^\sigma(u)}{du} \right] \right) \\ &\left. + \frac{1}{m_c^2 - q^2} \left(-\frac{m_c^2 u}{4(m_c^2 - q^2)} \frac{d^2\phi_{4\pi}(u)}{du^2} + u\psi_{4\pi}(u) + \int_0^u dv \psi_{4\pi}(v) \right) \right\}, \quad (3.90) \end{aligned}$$

mit $u_0 = \frac{m_c^2 - q^2}{s_0^D - q^2}$. Die Berechnung des Dreiteilchenbeitrags wird mit den entsprechenden Definitionen (B.2) in ähnlicher Weise ausgeführt und soll hier nicht wiedergegeben werden. Das Ergebnis kann in [63] für den analogen Fall des B -Mesons gefunden werden, von wo ebenfalls die Ausdrücke für $f_{D\pi}^+(q^2) + f_{D\pi}^-(q^2)$ zu entnehmen sind. Zudem sind sie für das K -Meson in Anhang B zusammengefasst und im anschließenden Kapitel 4 folgt eine ausführliche Analyse der Ergebnisse unter Einbeziehung von α_s -Korrekturen.

Die hier angegebenen Lichtkegel-Summenregeln wurden zudem in [77, 85] erfolgreich zur Berechnung der Kopplungskonstanten $g_{DD^*\pi}$ und $g_{BB^*\pi}$ genutzt, wozu man die Korrelationsfunktion in einer doppelte Spektraldichte darstellt. Ein ähnliches, weiterentwickeltes Verfahren wird in Kapitel 5 zur Berechnung der hadronischen Kopplungskonstanten für Λ_c und Σ_c vorgestellt.

3.2.4. Lichtkegel-Verteilungsfunktionen und -Summenregeln für Baryonen

Analog zur Definition (3.75) für das Pion ist die Definition der Lichtkegelverteilungsamplituden des führenden Dreiteilchen-Fock-Zustands des Nukleons möglich, die in Kapitel 5 benötigt werden. Diese wurden in [86] als wesentliche Erweiterung der früheren Analyse [87] eingeführt. Eine aktuelle Zusammenfassung ist im Anhang von [88] gegeben. Das Matrixelement, das die Verteilungsamplituden definiert, kann in 24 Dirac-Strukturen aufgespalten werden:

$$\begin{aligned}
& 4 \langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 x) u_\beta^j(a_2 x) d_\gamma^k(a_3 x) | N(P) \rangle \\
&= \mathcal{S}_1 m_N C_{\alpha\beta} (\gamma_5 u_N)_\gamma + \mathcal{S}_2 m_N^2 C_{\alpha\beta} (\not{x} \gamma_5 u_N)_\gamma + \mathcal{P}_1 m_N (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} (u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{P}_2 m_N^2 (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\not{x} u_N)_\gamma + \left(\mathcal{V}_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{V}_1^M \right) (\mathcal{P} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{V}_2 m_N (\mathcal{P} C)_{\alpha\beta} (\not{x} \gamma_5 u_N)_\gamma + \mathcal{V}_3 m_N (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{V}_4 m_N^2 (\not{x} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 u_N)_\gamma + \mathcal{V}_5 m_N^2 (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} (i \sigma^{\mu\nu} x_\nu \gamma_5 u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{V}_6 m_N^3 (\not{x} C)_{\alpha\beta} (\not{x} \gamma_5 u_N)_\gamma + \left(\mathcal{A}_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{A}_1^M \right) (\mathcal{P} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{A}_2 m_N (\mathcal{P} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\not{x} u_N)_\gamma + \mathcal{A}_3 m_N (\gamma_\mu \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{A}_4 m_N^2 (\not{x} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (u_N)_\gamma + \mathcal{A}_5 m_N^2 (\gamma_\mu \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (i \sigma^{\mu\nu} x_\nu u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{A}_6 m_N^3 (\not{x} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\not{x} u_N)_\gamma + \left(\mathcal{T}_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{T}_1^M \right) (P^\nu i \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_2 m_N (x^\mu P^\nu i \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 u_N)_\gamma + \mathcal{T}_3 m_N (\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_4 m_N (P^\nu \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\rho} x_\rho \gamma_5 u_N)_\gamma + \mathcal{T}_5 m_N^2 (x^\nu i \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_6 m_N^2 (x^\mu P^\nu i \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\not{x} \gamma_5 u_N)_\gamma + \mathcal{T}_7 m_N^2 (\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} \not{x} \gamma_5 u_N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_8 m_N^3 (x^\nu \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\rho} x_\rho \gamma_5 u_N)_\gamma . \tag{3.91}
\end{aligned}$$

Dabei ist x^μ ein Lichtkegelvektor mit $x^2 = 0$. (In einigen Referenzen wird auch die Notation z dafür verwendet.) Zu jeder Struktur ist jeweils eine Funktion \mathcal{F} definiert, die von $P \cdot x$, den Lichtkegel-Koordinaten $a_i = \{a_1, a_2, a_3\}$ der Quarkfelder und der Faktorisierungsskala μ abhängt, was in der obigen Notation unterdrückt ist. Die Notationen $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{T}$ stehen jeweils für die Skalar-, Pseudoskalar-, Vektor-, Axialvektor- und Tensor-Struktur des Diquark-Zustands. Die Funktionen $\mathcal{V}_1^M, \mathcal{A}_1^M, \mathcal{T}_1^M$ beschreiben die ersten x^2 -Korrekturterme zu den Strukturen führenden Twists (s.u.) der Lichtkegelentwicklung. Weitere werden hier nicht in Betracht gezogen, genauso wenig wie höhere Fock-Zustände des Nukleons, da die hier auftretenden Strukturen wesentlich umfangreicher und schwerer zu behandeln sind, als im Falle der Mesonen. Ferner ist in der obigen Definition ebenfalls das Auftreten dreier

Eichfaktoren (3.72) zwischen den Quarkfeldern nötig, die unter Annahme der Verwendung der Lichtkegelgleichung nicht angeschrieben werden.

Die oben definierten Strukturen (die mit kalligraphischen Buchstaben notiert sind) haben allerdings im Gegensatz zum Meson-Fall keinen definierten Twist, sondern es ist eine entsprechende weitere Aufspaltung nötig (für Details siehe [86]). Somit ergeben sich 24 Verteilungsamplituden F mit definiertem Twist (mit Druckbuchstaben notiert), die wie in Tabelle 3.1 angegeben mit den oben definierten Dirac-Strukturen zusammenhängen. Dabei haben die Strukturen V_1, A_1 und T_1 Twist 3, $S_1, P_1, V_2, V_3, A_2, A_3, T_2, T_3$ und T_7 Twist 4, $S_2, P_2, V_4, V_5, A_4, A_5, T_4, T_5$ und T_8 Twist 5, sowie V_6, A_6 und T_6 Twist 6. Die Funktionen $\mathcal{V}_1^M, \mathcal{A}_1^M, \mathcal{T}_1^M$ sind die x^2 -Korrekturen zu den Twist 3-Termen haben somit den Twist 5.

| \mathcal{F} | F | \mathcal{F} | F |
|------------------------------|---------------------|--------------------------------|---|
| \mathcal{S}_1 | S_1 | $2(P \cdot x) \mathcal{S}_2$ | $S_1 - S_2$ |
| \mathcal{P}_1 | P_1 | $2(P \cdot x) \mathcal{P}_2$ | $P_2 - P_1$ |
| \mathcal{V}_1 | V_1 | $2(P \cdot x) \mathcal{V}_2$ | $V_1 - V_2 - V_3$ |
| $2\mathcal{V}_3$ | V_3 | $4(P \cdot x) \mathcal{V}_4$ | $-2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5$ |
| $4(P \cdot x) \mathcal{V}_5$ | $V_4 - V_3$ | $4(P \cdot x)^2 \mathcal{V}_6$ | $-V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 - V_6$ |
| \mathcal{A}_1 | A_1 | $2(P \cdot x) \mathcal{A}_2$ | $-A_1 + A_2 - A_3$ |
| $2\mathcal{A}_3$ | A_3 | $4(P \cdot x) \mathcal{A}_4$ | $-2A_1 - A_3 - A_4 + 2A_5$ |
| $4(P \cdot x) \mathcal{A}_5$ | $A_3 - A_4$ | $4(P \cdot x)^2 \mathcal{A}_6$ | $A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - A_5 + A_6$ |
| \mathcal{T}_1 | T_1 | $2(P \cdot x) \mathcal{T}_2$ | $T_1 + T_2 - 2T_3$ |
| $2\mathcal{T}_3$ | T_7 | $2(P \cdot x) \mathcal{T}_4$ | $T_1 - T_2 - 2T_7$ |
| $2(P \cdot x) \mathcal{T}_5$ | $-T_1 + T_5 + 2T_8$ | $4(P \cdot x)^2 \mathcal{T}_6$ | $2T_2 - 2T_3 - 2T_4 + 2T_5 + 2T_7 + 2T_8$ |
| $4(P \cdot x) \mathcal{T}_7$ | $T_7 - T_8$ | $4(P \cdot x)^2 \mathcal{T}_8$ | $-T_1 + T_2 + T_5 - T_6 + 2T_7 + 2T_8$ |
| \mathcal{V}_1^M | V_1^M | \mathcal{A}_1^M | A_1^M |
| \mathcal{T}_1^M | T_1^M | | |

Tabelle 3.1.: Zusammenhang der in (3.91) definierten Dirac-Strukturen \mathcal{F} der Nukleon-Verteilungsamplituden mit den entsprechenden Funktionen F definierten Twists.

Diese Funktionen werden nun wie im Meson-Fall allgemein in Abhängigkeit der Anteile x_i (mit $i = 1, 2, 3$) des longitudinalen Nukleon-Impuls geschrieben:

$$F(a_1, a_2, a_3, P \cdot x) = \int dx_1 dx_2 dx_3 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3) e^{-i(P \cdot x) \sum_i x_i a_i} F(x_i) . \quad (3.92)$$

Die bis zur nächstführenden Ordnung aus der konformen Entwicklung erhaltenen Ausdrücke für die Lichtkegelverteilungsfunktionen wurden ebenfalls in [88, 89] angegeben und sind in Anhang C zusammengefasst.

Kapitel 4.

$D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ - und $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$ - Formfaktoren aus Lichtkegel-Summenregeln

Die semileptonischen Zerfälle $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ und $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$ bieten eine viel versprechende Möglichkeit, die CKM -Matrixelemente $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$ aus experimentellen Daten zu bestimmen. Die Formel für die Zerfallsbreite ist (unter Vernachlässigung der Leptonmasse) von folgender Gestalt:

$$\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^-(K^-) \ell^+ \nu_\ell) = \frac{G_F^2}{24\pi^3} |V_{cd(s)}|^2 \int_0^{q_{max}^2} dq^2 |f_{D\pi(K)}^+(q^2)|^2 \lambda(q^2). \quad (4.1)$$

Dabei ist q^2 das Quadrat des Impulsübertrags auf das $\ell \nu_\ell$ -Paar, $q_{max}^2 = (m_D - m_{\pi(K)})^2$ und die Funktion $\lambda(q^2)$ berücksichtigt den Phasenraum. Die Formfaktoren $f_{D\pi}^+(q^2)$ und $f_{DK}^+(q^2)$ wurden in (2.19) definiert. Die differentielle Zerfallsbreite $\frac{d\Gamma}{dq^2}$ ist also direkt proportional zum Produkt aus den Betragsquadraten des Formfaktors und des CKM -Matrixelements $|V_{cd}|$ bzw. $|V_{cs}|$.

Mit Hilfe der Lichtkegel-Summenregeln können die Formfaktoren berechnet werden, was in diesem Abschnitt im Detail vorgestellt werden soll. Umgekehrt bietet sich zudem die Möglichkeit, Werte für $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$, die aus anderen Prozessen bekannt sind, einzusetzen, und durch Vergleich mit dem Experiment die Resultate der Lichtkegel-Summenregeln zu überprüfen. Es liegen gute experimentelle Daten zu beiden Prozessen aus jüngerer Zeit [90, 91], sowie aus einigen älteren Studien [92, 93, 94, 95] vor.

Die hier verwendeten Formeln zur Berechnung der Formfaktoren wurden bereits für die semileptonischen Zerfälle $B \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ und $B \rightarrow K \ell \nu_\ell$ erfolgreich angewandt [63, 96]. Die Anwendung für den Zerfall $B \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ ist eine der bedeutendsten und am besten ausgearbeiteten Anwendungen der Lichtkegel-Summenregeln [77, 97, 98, 99, 100, 63]) und wird erfolgreich zur Bestimmung von $|V_{ub}|$ verwendet.

Für die Anwendung auf D -Mesonen wurden einige notwendige Korrekturen und verschiedene Verbesserungen angebracht, und die Formeln - und insbesondere auch deren numerischen Auswertung - eingehend überprüft. Mittels der in Abschnitt 2.4 eingeführten Parametrisierungen können die Ergebnisse zudem auch in den Bereich größerer q^2 (wo die Lichtkegelsummenregeln nicht anwendbar sind) extrapoliert werden. Eine erfolgreiche Beschreibung der experimentellen Daten für D -Mesonen ist außerdem auch ein wichtiger Test der Anwendbarkeit der Methode für B -Mesonen.

Diese Arbeit stellt eine ausführliche Aktualisierung älterer Studien dar [101, 102], die - auch aufgrund der neuen experimentellen Daten - sehr naheliegend ist. Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind einer der Hauptpunkte dieser Dissertation und wurden in [103] veröffentlicht. Eine darauf aufbauende Anwendung der hier entwickelten Methoden auf das ursprüngliche Gebiet der B -Meson-Zerfälle wurde in [104] durchgeführt.

Im folgenden Abschnitt werden zuerst die Formeln der Lichtkegel-Summenregeln zusammengefasst und deren Berechnung erläutert. Daran schließt sich eine Präsentation der numerischen Resultate und die damit mögliche Bestimmung von $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$ an. Schließlich wird unter Verwendung der Parametrisierungen eine Extrapolation der Ergebnisse in den gesamten physikalischen Bereich durchgeführt.

4.1. Die Lichtkegel-Summenregeln der $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren

4.1.1. Zusammenfassung der Summenregeln

Die Dominanz der Korrelationsfunktion durch Beiträge mit $x^2 = 0$, also die Anwendbarkeit der Lichtkegelentwicklung, ist bereits in Abschnitt 3.2 besprochen worden und erfordert $(p+q)^2, q^2 \ll m_c^2$. Die Borel-Variable M^2 entspricht negativen Werten von $(p+q)^2$ in ihrer Größenordnung in der Korrelationsfunktion (siehe [49]) und daher erfüllt dies für den hier zu wählenden M^2 -Bereich die Bedingung. Für q^2 dürfen jedoch nur solche Werte verwendet werden, die nicht zu nah bei $q_{max}^2 \approx m_c^2$ liegen. Aus früheren Analysen ist bekannt, dass der Gültigkeitsbereich unterhalb einer Skala $m_c^2 - 2m_c\chi$ mit $\chi \sim 0,5 \text{ GeV}$ liegt [101] (für weitere Details siehe die in Abschnitt 3.2 genannten Referenzen [74, 75]). Das schränkt die Anwendbarkeit auf $q^2 \lesssim 1 \text{ GeV}$ für $D \rightarrow \pi$ und $q^2 \lesssim 0 \text{ GeV}$ für $D \rightarrow K$ ein, weswegen in dieser Arbeit nur Ergebnisse für $q^2 \leq 0$ aus den Lichtkegel-Summenregeln berechnet werden.

Die Herleitung der Lichtkegel-Summenregeln für den Zerfall $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ wurde in Abschnitt 3.2 für die Terme der Lichtkegelentwicklung bis Twist 4 gezeigt und für $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$ erhält man mit den K -Meson-Verteilungsamplituden ebenfalls entsprechende Ausdrücke. Heute sind die Summenregeln für die semileptonischen Zerfälle schwerer Mesonen in π - und K -Mesonen in führender Ordnung in α_s bis zu Twist

4.1. Die Lichtkegel-Summenregeln der $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren

4, sowohl im Zwei- als auch im Dreiteilchen-Beitrag der Lichtkegelverteilungsamplituden bekannt. Darüber hinaus wurden auch die α_s -Korrekturen in erster Ordnung zu den Twist 2- und Twist 3-Zweiteilchen-Beiträgen berechnet.

Wie bereits erwähnt, sind diese aktuellen Ergebnisse für B -Meson-Zerfälle in [63, 96] dargelegt. Weitere Details zur Herleitung dieser Ausdrücke finden sich auch in [105]. QCD-Summenregeln, die schwere Quarks mit endlicher Masse behandeln, haben den Vorteil, dass die Formeln für jeden Quarkflavour gültig sind, der mit den in der Rechnung durchgeführten Annahmen verträglich ist. Sie können also problemlos für B - als auch für D -Mesonen verwendet werden, indem einfach die entsprechenden Skalen und Eingabewerte, wie z.B. die Quarkmasse, passend gewählt werden. In diesem Abschnitt werden die Ausdrücke für die Summenregeln komplett dargelegt, wichtige Punkte für ihre Herleitung erklärt, sowie die numerischen Resultate berechnet.

Im Vergleich zu den vorausgehenden Studien [101, 102] der $D \rightarrow \pi/K$ -Zerfälle wurden in dieser Arbeit einige wichtige Verbesserungen vorgenommen:

- In [63, 96] wurde erstmals durchgehend das \overline{MS} -Schema für die schwere Quarkmasse verwendet, das im Gegensatz zum vorher verwendeten Polmassenschema geeigneter für die perturbative Berechnung der Operatorproduktentwicklung ist. Dies wurde motiviert durch die in [64] ebenfalls in diesem Schema durchgeführte Zweipunktsummenregel-Rechnung für f_B , die damit nun konsistent in den Lichtkegel-Summenregeln verwendet werden kann.
- Die Zerfallskonstante f_D wird hier allerdings nicht aus Zweipunktsummenregeln, sondern aus einer aktuellen experimentellen Bestimmung [66] verwendet, die eine Reduktion des Unsicherheitsbereichs im Vergleich zu vorigen Anwendungen erlaubt.
- Neben dem in Gleichung (3.30) angegebenen, aktuellen Wert für die charm-Quark-Masse $\overline{m}_c(\overline{m}_c)$ sind ebenfalls neuere und genauere Eingabewerte für die Summenregeln verfügbar, nämlich die strange-Quark-Masse [106, 107] und die Parameter der π - und K -Meson-Lichtkegelverteilungsamplituden [78]. Für die führenden Parameter der Pion-Verteilungsamplituden werden ferner die in [63] durch einen Fit an experimentelle Daten gewonnenen Werte genutzt.
- Die wichtigste Neuerung ist die bereits erwähnte Extrapolation der Formfaktoren aus dem Bereich $q^2 \leq 0$ unter Verwendung der Parametrisierungen, die es erlauben, ihre Form im gesamten physikalischen Bereich anzugeben.

Im Folgenden werden die Lichtkegel-Summenregeln für die Formfaktoren des $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ -Übergangs vorgestellt, die in (2.19) definiert wurden. Völlig analog definiert man die Formfaktoren für den $D^0 \rightarrow K^-$ -Zerfall, deren Behandlung weitgehend analog zum Pion-Fall ist, indem man $d \rightarrow s$ und $\pi^- \rightarrow K^-$ ersetzt. Aufgrund der (mit sehr guter Näherung gültigen) Isospin-Symmetrie gelten einfache Zusammenhänge zwischen den Formfaktoren unterschiedlicher Ladungszustände der Me-

sonen. Man kann leicht zeigen, dass $f_{D^+ \rightarrow \pi^0}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{D^0 \rightarrow \pi^-}^\pm$ gilt (daher wird hier nur $f_{D^\pi}^\pm := f_{D^0 \rightarrow \pi^-}^\pm$ betrachtet), sowie dass die Formfaktoren für $D^+ \rightarrow K^0$ und $D^0 \rightarrow K^-$ gleich sind (welche mit f_{DK}^\pm bezeichnet werden).

Zur Herleitung der Lichtkegel-Summenregeln mit π -Meson-Verteilungsamplituden wird die in Gleichung (3.63) eingeführte Korrelationsfunktion (siehe Abb. 3.9) verwendet:

$$\begin{aligned} F_\mu^\pi(p, q) &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \pi(p) | T \{ \bar{d}(x) \gamma_\mu c(x), m_c \bar{c}(0) i \gamma_5 u(0) \} | 0 \rangle \\ &= F^\pi(q^2, (p+q)^2) p_\mu + \tilde{F}^\pi(q^2, (p+q)^2) q_\mu. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Durch die Ersetzung $d \rightarrow s$ und $\pi \rightarrow K$ erhält man auch hier leicht die analoge Definition F_μ^K für $D \rightarrow K$.

Die Berechnung der Korrelationsfunktionen durch die Lichtkegelentwicklung bis zur Ordnung α_s führt zu einem Ausdruck, der die folgende allgemeine Darstellung besitzt:

$$\left[F^\pi(q^2, (p+q)^2) \right]_{OPE} = \sum_{t=2,3,4} F_0^{\pi,t}(q^2, (p+q)^2) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \sum_{t=2,3} F_1^{\pi,t}(q^2, (p+q)^2). \quad (4.3)$$

Die einzelnen Funktionen $F_n^{\pi,t}(q^2, (p+q)^2)$ stehen dabei für die jeweiligen Beiträge mit Twist t und Ordnung $\mathcal{O}((\alpha_s)^n)$ für $n = 0, 1$. Jede kann allgemein dargestellt werden als Faltung einer perturbativ berechneten Funktion $T_n^{(t)}$ mit entsprechenden Lichtkegelverteilungsamplituden $\phi_\pi^{(t)}$, wie in Gleichung (3.74) beschrieben:

$$F_{0(1)}^{\pi,t}(q^2, (p+q)^2) = \int \mathcal{D}u T_{0(1)}^{(t)}(q^2, (p+q)^2, m_c^2, u, \mu) \phi_\pi^{(t)}(u, \mu). \quad (4.4)$$

$\mathcal{D}u$ ist dabei eine allgemeine Notation für die Integration über die Zwei- oder Dreiteilchen-Impulsverteilung. Die Zweiteilchenbeiträge zur Ordnung α_s^0 wurden in Gleichung (3.87) bereits angegeben und die Dreiteilchenbeiträge sind in [63] zu finden. Dort wurden zudem die Funktionen $F_1^{\pi,t}(q^2, (p+q)^2)$ für die α_s -Korrekturen zu den Twist 2- und Twist 3-Termen berechnet:

$$\begin{aligned} F_1(q^2, M^2, s_0^D) &= \frac{f_\pi}{\pi} \int_{m_c^2}^{s_0^D} ds e^{-s/M^2} \int_0^1 du \left\{ \text{Im}_s T_1(q^2, s, u) \varphi_\pi(u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_\pi}{m_c} \left[\text{Im}_s T_1^p(q^2, s, u) \phi_{3\pi}^p(u) + \text{Im}_s T_1^\sigma(q^2, s, u) \phi_{3\pi}^\sigma(u) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Ausdrücke $T_1^{(t)}(q^2, s, u)$ werden aufgrund ihres großen Umfangs in dieser Arbeit nicht wiedergegeben und können ebenfalls aus [63] entnommen werden. Die Notation Im_s bedeutet, dass der Imaginärteil der Funktion als analytische Fortsetzung in der Variablen s zu nehmen ist. Für die Twist 3-Verteilungsamplituden wird

4.1. Die Lichtkegel-Summenregeln der $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren

zudem nur die Näherung der asymptotischen Ausdrücke verwendet, um Komplikationen bei der Mischung mit Twist 2 zu vermeiden (siehe [63]). Das Ergebnis für den $D \rightarrow \pi$ -Fall lautet schließlich

$$f_{D\pi}^+(q^2) = \frac{e^{m_D^2/M^2}}{2m_D^2 f_D} \left(\sum_{t=2,3,4} F_0^{\pi,t}(q^2, M^2, s_0^D) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \sum_{t=2,3} F_1^{\pi,t}(q^2, M^2, s_0^D) \right), \quad (4.6)$$

und ein entsprechender Ausdruck ist für $(f_{D\pi}^+ + f_{D\pi}^-)$ mit Funktionen \tilde{F}^π aus den oben genannten Quellen und ohne den Vorfaktor $1/2$ gegeben.

Zur Berechnung der Korrelationsfunktion F_μ^K für die $D \rightarrow K$ -Formfaktoren müssen im Vergleich zu $D \rightarrow \pi$ einige Effekte der nun nicht mehr vernachlässigbaren s -Quark-Masse berücksichtigt werden. Zuerst muss bei der Herleitung nun $p^2 = m_K^2 \neq 0$ (insbesondere im c -Quark-Propagator, in dem sich ein zusätzlicher Term $+m_K^2 u\bar{u}$ ergibt) berücksichtigt werden. Zudem müssen $SU(3)_{flavour}$ -verletzende Effekte in den K -Verteilungsamplituden berücksichtigt werden, die für das Pion nicht vorhanden waren. Für Twist 2 tritt etwa f_K an die Stelle von f_π und es sind andere Gegenbauer-Momente zu verwenden, insbesondere a_1 , das für das Pion null war, und welches die auf den verschiedenen Quarkmassen beruhende Asymmetrie in der Impulsverteilung der Quarkmassen widerspiegelt. Im Allgemeinen ist auch $a_2^K \neq a_2^\pi$. Für höhere Twists sind ebenfalls neue Normierungsparameter $\mu_\pi \rightarrow \mu_K = m_K^2/(m_u + m_s)$, $f_{3\pi} \rightarrow f_{3K}$ und $\delta_\pi^2 \rightarrow \delta_K^2$, etc. zu verwenden. Zudem erhalten diese Verteilungsamplituden Beimischungen der Ordnung $O(m_K^2)$ aus der Twist 2-Verteilungsamplitude.

Die vollständigen Ausdrücke für die K -Verteilungsamplituden unter Berücksichtigung dieser Effekte wurden in [78] angegeben und sind hier zusammen mit den Lichtkegel-Summenregeln für die $D \rightarrow K$ -Formfaktoren in Anhang B wiedergegeben. Letztere beruhen durch $b \rightarrow c$ und $B \rightarrow D$ auf den Summenregeln in der erfolgreich durchgeführten Analyse für $B \rightarrow K\ell\nu_\ell$ [96]. Für die α_s -Korrekturen ist es allerdings nötig, die Näherung $m_s = m_K = 0$ zu verwenden, da die Rechnung ansonsten technisch erheblich anspruchsvoller würde und bisher noch nicht durchgeführt werden konnte. Im Anhang B wurde jedoch im Dreiteilchenanteil zu Twist 3 ein in [96] aufgetretener Fehler und zudem fehlende m_K^2 -Korrekturen in den Twist 4-Verteilungsamplituden aus [78] korrigiert. Diese haben auf die numerischen Resultate allerdings nur einen geringen Einfluss. Es wurde ebenfalls ein Vergleich der Resultate mit [102] angestellt, die dortigen Formeln können jedoch nicht vollständig reproduziert werden.

4.1.2. Wahl der Eingabeparameter und numerische Auswertung

Die Berechnung der Formfaktoren geschieht durch Auswertung der Integralausdrücke unter Verwendung der unten folgenden Werte. Dabei wurden bei der Aus-

wertung der Funktionen $F_1^{\pi,t}(q^2, (p+q)^2)$ für die α_s -Korrekturen zwei verschiedene Methoden verwendet, die ebenfalls im nächsten Kapitel noch einmal Anwendung finden. Eine Methode besteht in der analytischen Auswertung der in (4.5) auftretenden Imaginärteile, die in das Integral eingesetzt und danach numerisch integriert werden. Diese Imaginärteile sind in [63] explizit angegeben und stellen komplizierte Ausdrücke dar, die aufgrund des Auftretens von Distributionen, etc. zudem eine sorgfältige und teilweise schwierige numerische Berechnung notwendig machen. Das Auftreten komplizierter, numerischer Integralrechnungen ist typisch für Lichtkegel-Summenregeln, und es wurde eine ausführliche Überprüfung der Ergebnisse durch mehrere unabhängige Berechnungen durchgeführt.

Die zweite, alternative Berechnungsmethode, wurde in [63, 96] vorgeschlagen und verwendet und für genauere Details sei dorthin verwiesen. Sie beruht auf einer Umformung des Integrationsweges in (4.5) in der komplexen Ebene, die aufgrund der Analytizität der hier verwendeten Funktionen möglich ist. Mit dieser Methode ist nicht nur die explizite Bildung der oben genannten Imaginärteile nicht nötig, sondern es können auch Probleme in der Integration, die die numerische Auswertung erschweren (wie das Auftreten von Singularitäten) vermieden werden. Unter Kenntnis der Korrelationsfunktion $F_1(q^2, (p+q)^2)$ ist zudem auf direkte Weise (ohne Substitution, etc.) die numerische Berechnung der Borel-transformierten und Kontinuum-subtrahierten Funktion $F_1(q^2, M^2, s_0)$ durchführbar. Eine solche Auswertung ist natürlich ebenfalls für die Korrelationsfunktion $F_0(q^2, (p+q)^2)$ in führender Ordnung möglich und wird im nachfolgenden Kapitel 5 für die gesamten Summenregeln verwendet. Die Übereinstimmung beider Methoden wurde eingehend geprüft, um die Verlässlichkeit der numerischen Auswertung sicherzustellen.

Nun werden die Eingabewerte für die Berechnung der Summenregeln spezifiziert. Für die c -Quark-Masse wird der bereits bei den Zweipunktsummenregeln in Gl. (3.30) erwähnte Wert $\bar{m}_c(\bar{m}_c) = (1, 29 \pm 0, 03)$ GeV im \overline{MS} -Schema verwendet. Für die Masse des s -Quarks wird der die beiden neueren QCD-Summenregel-Analysen [106, 107] mit einer Genauigkeit von $O(\alpha_s^4)$ abdeckende Wert

$$m_s(\mu = 2 \text{ GeV}) = (98 \pm 16) \text{ MeV} \quad (4.7)$$

verwendet. Aus der chiralen Störungstheorie können die folgenden Relationen zur Bestimmung der leichten Quarkmassen m_u und m_d genutzt werden [108]:

$$R = \frac{2m_s}{m_u + m_d} = 24, 4 \pm 1, 5, \quad Q^2 = \frac{m_s^2 - (m_u + m_d)^2/4}{m_d^2 - m_u^2} = (22, 7 \pm 0, 8)^2. \quad (4.8)$$

4.1. Die Lichtkegel-Summenregeln der $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren

In dieser Arbeit wird wie oben erwähnt im chiralen Limes $m_u = m_d = m_\pi = 0$ gearbeitet, mit der Ausnahme der Parameter μ_π und μ_K . Diese können mit den obigen Werten berechnet werden zu:

$$\begin{aligned}\mu_\pi(2 \text{ GeV}) &= \frac{m_\pi^2 R}{2m_s(2 \text{ GeV})} = (2, 43 \pm 0, 42) \text{ GeV}, \\ \mu_K(2 \text{ GeV}) &= \frac{m_K^2}{m_s(2 \text{ GeV}) \left[1 + \frac{1}{R} \left(1 - \frac{R^2 - 1}{4Q^2} \right) \right]} = (2, 42 \pm 0, 39) \text{ GeV} . \quad (4.9)\end{aligned}$$

Wie bereits bei den Zweipunktsummenregeln wird auch hier eine einheitliche Skala $\mu = 1, 4 \text{ GeV}$ für die Renormierungs- und Faktorisierungsskalen verwendet, welche analog zum bereits in Gleichung (3.34) angegebenen Wert $\mu \sim \sqrt{m_D^2 - m_c^2}$ gewählt wird. Die Ergebnisse der Formfaktoren werden in einem Bereich $1, 0 < \mu < 3, 0 \text{ GeV}$ variiert, um die auf dem Skalenverhalten beruhende Unsicherheit zu berücksichtigen.

Als Hadron-Massen werden $m_{D^0} = 1, 865 \text{ GeV}$, $m_{\pi^\pm} = 139, 6 \text{ MeV}$ und $m_{K^\pm} = 493, 7 \text{ MeV}$ für die Summenregeln verwendet und für die Parametrisierungen sind ferner die Massen $m_{D^*} = 2, 01 \text{ GeV}$ und $m_{D_s^*} = 2, 112 \text{ GeV}$ notwendig (alle aus [59]). Die Zerfallskonstanten für Pion und Kaon haben die Werte $f_\pi = 130, 4 \text{ MeV}$ und $f_K = 155, 5 \text{ MeV}$ [59]. Diese sind im Vergleich zu den anderen Eingabeparametern mit großer Genauigkeit bekannt und der Unsicherheits- oder Fehlerbereich braucht hier nicht betrachtet zu werden.

Für f_D wird in dieser Berechnung bereits der in Abschnitt 3.1 angegebene Wert $f_{D^+} = 205, 8 \pm 8, 9 \text{ MeV}$ aus der Messung des leptonicen Zerfalls $D \rightarrow \ell \nu_\ell$ [66] verwendet. Aufgrund der Isospin-Symmetrie wird $f_{D^0} = f_{D^\pm}$ angenommen. In der experimentellen Analyse wurde allerdings die Näherung $|V_{cd}| = |V_{us}|$ mit $|V_{us}| = 0, 2255 \pm 0, 0019$ [59] benutzt, um f_D aus der gemessenen Zerfallsbreite zu bestimmen, die proportional zum Produkt $f_D |V_{cd}|$ ist. In der weiteren Auswertung wird lediglich dieses gemessene Produkt - ohne die zusätzliche Annahme über die CKM -Matrixelemente - verwendet, was eine Reduktion der Unsicherheit des erhaltenen Ergebnisses erlauben wird. Aus diesem Grund und da dieser Wert eine relativ große Genauigkeit besitzt, wird er hier anstatt dem Summenregel-Wert verwendet. Letzterer wäre zwar wichtig, um eine gewisse Aufhebung der μ -Abhängigkeiten in den Lichtkegel-Summenregeln zur Ordnung α_s^1 zu gewährleisten, jedoch ist dieser Effekt als gering einzuschätzen und die Verwendung des experimentellen Werts stellt eine größere Verbesserung der Genauigkeit des Formfaktors dar.

Die führenden nichtperturbativen Parameter der π -Lichtkegelverteilungsamplituden $a_2^\pi(1 \text{ GeV}) = 0, 16 \pm 0, 01$ und $a_4^\pi(1 \text{ GeV}) = 0, 04 \pm 0, 01$ wurden in [63] durch eine Anpassung der Summenregelberechnung an experimentelle Werte für den $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor gewonnen und werden hier verwendet. Sie stimmen im Rahmen der Ungenauigkeit mit den in [78] zusammengefassten Ergebnissen anderer Analysen überein. Für die K -Verteilungsamplituden wurde in [109] der Wert $a_1^K = 0, 10 \pm 0, 04$

aus Zweipunktsummenregeln mit einer Genauigkeit von $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ erhalten und schließlich wird noch $a_2^K = 0,25 \pm 0,15$ [110, 78] verwendet. Alle anderen Gegenbauer-Momente werden vernachlässigt, was für D -Formfaktoren eine noch bessere gerechtfertigte Näherung ist als für B , wie in [102] erwähnt. Zudem wurde auch numerisch überprüft, dass eine Einbeziehung solcher Momente in einer Größenordnung der eben genannten zu keiner signifikanten Änderung der Ergebnisse führt. Die neben (4.9) auftretenden Parameter für die Twist 3- und 4-Verteilungsamplituden werden [78] entnommen. Sie sind in Tabelle B.1 im Anhang B mit ihren jeweiligen Unsicherheitsbereichen angegeben. Ihre Skalenabhängigkeit ist ebenfalls in [78] zu finden, und für das Pion auch in [63] zusammengefasst. Da die Parameter $f_{3\pi} \simeq f_{3K}$ der nichtasymptotischen Beiträge zur Twist 3-Verteilungsamplitude vergleichsweise klein sind, rechtfertigt dies die Verwendung der asymptotischen Ausdrücke in den α_s -Korrekturen zu Twist 3.

Schließlich sind noch die Summenregel-Parameter M^2 und s_0^D festzulegen, was durch numerische Auswertungen analog zu Abschnitt 3.1 geschieht. Der Borel-Parameter sollte groß genug sein, um die Unterdrückung höherer Twist-Terme zu gewährleisten, aber wieder klein genug, um die höher angeregten Zustände zu unterdrücken. Hier wird der bereits in [101] benutzte Wertebereich $M^2 = (4,5 \pm 1,0)$ GeV² verwendet und es wurde geprüft, dass in diesem die höheren Terme der Lichtkegelentwicklung unterdrückt sind (die Twist-4-Beiträge bleiben $< 5\%$ des Twist-2-Beitrags) und dass der Kontinuumsbeitrag $< 10\%$ der gesamten Korrelationsfunktion ausmacht. Mit dem verwendeten Wertebereich $s_0^D = (7,0 \pm 0,5)$ GeV² wird ferner die D -Meson-Masse mit 2% aus der Korrelationsfunktion reproduziert. Diese Wahl der Parameter ist ebenfalls konform mit vorhergehenden Studien, sowie Erwartungen aus der heavy-quark-Symmetrie (siehe etwa [99, 111, 112]).

4.2. Ergebnisse für die Formfaktoren und Bestimmung von $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Formfaktoren bei $q^2 = 0$ angegeben und daraus die CKM -Matrixelemente $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$ bestimmt. Daraufhin werden die Ergebnisse bei $q^2 \neq 0$ vorgestellt, die mit Hilfe der Parametrisierungen aus Abschnitt 2.4 gewonnen wurden.

4.2.1. Ergebnisse für die Formfaktoren bei $q^2 = 0$

Zuerst werden die Ergebnisse für die Formfaktoren $f_{D\pi}^+(0)$ und $f_{DK}^+(0)$ bei $q^2 = 0$ sowie ihr Unsicherheitsbereich unter Variation der jeweiligen Eingabeparameter in Tabelle 4.1 angegeben. Dabei wird die Größe der noch nicht bekannten Beiträge von Twist 5 abgeschätzt, indem für ihn das selbe Verhältnis zum Twist 3-Term

4.2. Ergebnisse für die Formfaktoren und Bestimmung von $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$

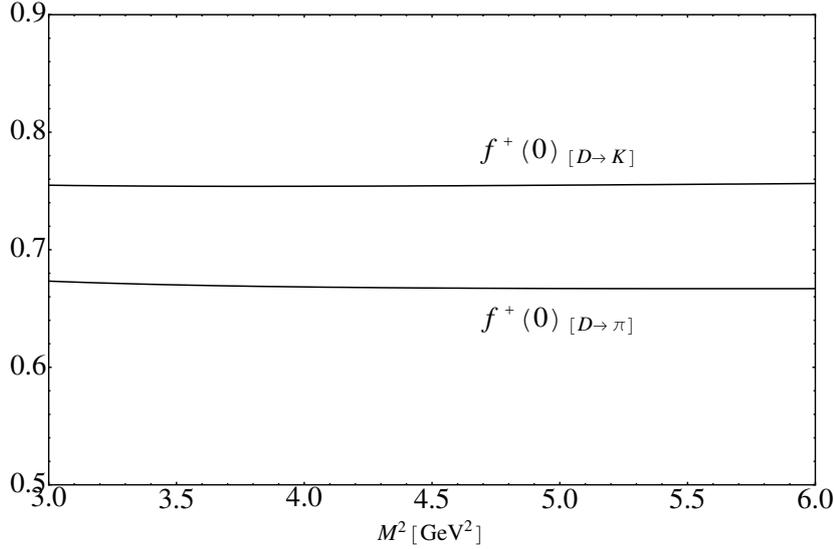


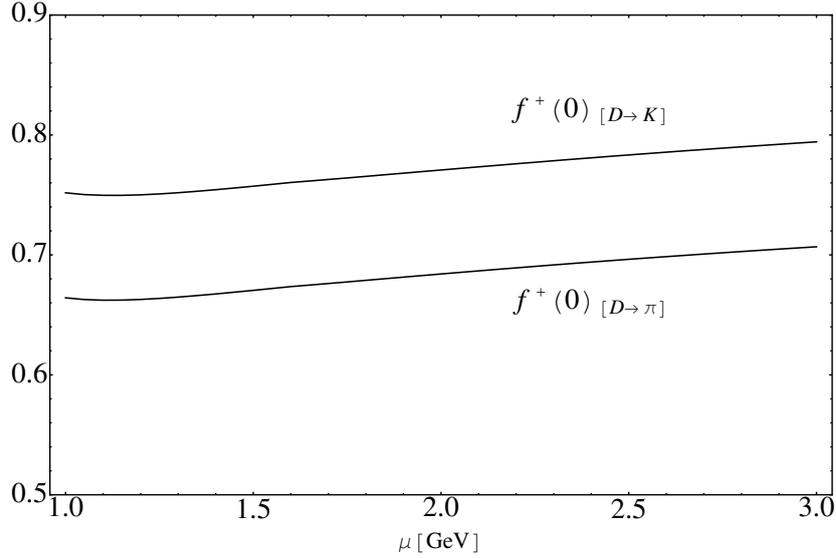
Abbildung 4.1.: Die Abhängigkeit der Formfaktoren $f_{D\pi}^+(0)$ und $f_{DK}^+(0)$ vom Borel-Parameter M^2 .

angenommen wird, das zwischen Twist 4 und Twist 2 besteht. Eine Ausnahme ist der Formfaktor $f_{D\pi(K)}^+ + f_{D\pi(K)}^-$ bei dem in den Summenregeln kein Twist 2-Term in führender Ordnung existiert. Hier wird der Twist 5- Beitrag gleich dem von Twist 4 angenommen. Um die Effekte höherer Gegenbauer-Momente a_3^K und a_4^K auf die $D \rightarrow K$ -Formfaktoren abzuschätzen, werden für diese die Werte $a_3^K = \pm a_1^K$ und $a_4^K = \pm a_4^\pi$ verwendet und die Variation der daraus resultierenden Ergebnisse betrachtet. Kleinere Unsicherheitseffekte wie durch die Variation von α_s werden hier nicht aufgeführt, aber in der Gesamtunsicherheit berücksichtigt. Die unter μ_π und μ_K angeführten Unsicherheiten für die Größen aus Gl. (4.9) stammen von direkter Variation der entsprechenden Eingabeparameter.

Die Abhängigkeit von M^2 ist in Abbildung 4.1 gezeigt und zeigt einen sehr stabilen Verlauf, wie auch die μ -Abhängigkeit in Abbildung 4.2. In Tabelle 4.2 werden

| Formf. Zentralwert | M^2 | μ | s_0^D | $(f_D)_{exp}$ | m_c | m_s $\mu_{\pi,K}$ | Gegenbauer-Momente | Tw.5 (Schätzg.) |
|--------------------------|-------------------|-----------------|------------|---------------|------------------|------------------------|---|-----------------|
| $f_{D\pi}^+(0)$ 0,667 | +0,003 -0,001 | +0,04 -0,003 | $\pm 0,01$ | $\pm 0,03$ | +0,005 -0,006 | +0,08 -0,06 | $\pm 0,001$ ($a_{2,4}^\pi$) | $\pm 0,017$ |
| $f_{DK}^+(0)$ 0,754 | +0,001 -0,0004 | +0,04 -0,006 | $\pm 0,01$ | $\pm 0,03$ | +0,005 -0,007 | +0,09 -0,06 | $\pm 0,003$ (a_1^K) $\pm 0,03$ (a_2^K) $\pm 0,01$ ($a_{3,4}^K$) | $\pm 0,001$ |

Tabelle 4.1.: Die Werte der Formfaktoren $f_{D\pi}^+(0)$ und $f_{DK}^+(0)$ aus Lichtkegelsummenregeln (4.6) mit den aus den einzelnen Eingabeparametern resultierenden Unsicherheiten.


 Abbildung 4.2.: Die Abhängigkeit der Formfaktoren $f_{D\pi}^+(0)$ und $f_{DK}^+(0)$ von der Renormierungs- und Faktorisierungsskala μ .

| Contribution | $f_{D\pi}^+(0)$ | $f_{D\pi}^+(q^2 = -2 \text{ GeV}^2)$ | $f_{DK}^+(0)$ | $f_{DK}^+(q^2 = -2 \text{ GeV}^2)$ |
|--------------|-----------------|--------------------------------------|---------------|------------------------------------|
| Tw.2 LO | 35,9% | 32,9% | 36,2% | 33,7% |
| Tw.2 NLO | 6,3% | 8,4% | 6,0% | 7,9% |
| Tw.3 LO | 66,0% | 59,5% | 67,9% | 58,9% |
| Tw.3 NLO | -9,5% | -2,9% | -10,1% | -2,9% |
| Tw.4 LO | 1,4% | 2,2% | -0,07% | 2,4% |

 Tabelle 4.2.: Relative Beiträge der einzelnen Terme der Lichtkegelentwicklung zu den Formfaktoren $f_{D\pi}^+(q^2)$ und $f_{DK}^+(q^2)$. Dabei bedeutet LO die Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ („leading order“) und NLO die Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^1)$ („next to leading order“).

ferner die verschiedenen Twist-Beiträge zu den Formfaktoren $f_{D\pi}^+(q^2)$ und $f_{DK}^+(q^2)$ bei $q^2 = 0$ und $q^2 = -2$ gezeigt, wobei der negative Bereich durch die später folgende Betrachtung der Parametrisierungen motiviert ist. Man erkennt hier sehr gut die Lichtkegelunterdrückung der Twist 4- gegenüber den Twist 2-Termen und den durch den Faktor $\mu_\pi/m_c > 1$ verursachten größeren Beitrag von Twist 3 gegenüber Twist 2 (die wie oben erwähnt beides führende Terme von separaten Lichtkegelentwicklungen sind). Auch die α_s -Korrekturen stellen sich als klein heraus.

Durch quadratische Addition aller Einzelunsicherheiten ergibt sich schließlich das folgende Ergebnis für die $f_{D\pi/K}^+(q^2)$ -Formfaktoren:

$$f_{D\pi}^+(0) = 0,67_{-0,07}^{+0,10}, \quad (4.10)$$

$$f_{DK}^+(0) = 0,75_{-0,08}^{+0,11}. \quad (4.11)$$

4.2. Ergebnisse für die Formfaktoren und Bestimmung von $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$

und für $f_{D\pi/K}^+(q^2) + f_{D\pi/K}^-(q^2)$ erhält man:

$$f_{D\pi}^+(0) + f_{D\pi}^-(0) = 0,46_{-0,09}^{+0,12}, \quad (4.12)$$

$$f_{DK}^+(0) + f_{DK}^-(0) = 0,60_{-0,09}^{+0,12}. \quad (4.13)$$

Wie aus der hadronischen Darstellung (3.64) erkennbar ist, sagen die Lichtkegel-Summenregeln immer das Produkt von f_D und den Formfaktoren voraus. Diese werden hier für den Formfaktor $f_{D\pi/K}^+(q^2)$ noch angegeben, da sie vom experimentellen Wert für f_D unabhängig sind (und daher eine geringere Unsicherheit besitzen).

$$f_D f_{D\pi}^+(0) = 137_{-14}^{+19} \text{ MeV}, \quad (4.14)$$

$$f_D f_{DK}^+(0) = 155_{-15}^{+21} \text{ MeV}. \quad (4.15)$$

In der Bestimmung des Verhältnisses dieser beiden Formfaktoren fällt f_D ebenfalls heraus und es ergibt sich ein merkliche Reduktion der Unsicherheit. Man erhält:

$$\frac{f_{D\pi}^+(0)}{f_{DK}^+(0)} = 0,88 \pm 0,05. \quad (4.16)$$

Die oben genannten Ergebnisse für $f_{D\pi}^+(0)$ und $f_{DK}^+(0)$ werden in Tabelle 4.3 mit Gitter-QCD-Resultaten und älteren Bestimmungen durch Lichtkegel-Summenregeln verglichen, mit denen sie eine gute Übereinstimmung zeigen. Im Vergleich zu [101] ist außerdem eine erkennbare Verbesserung der Genauigkeit erreicht worden.

Weiterhin werden hier einige charakteristische Parameter für die Formfaktoren angegeben, die in [116] definiert wurden und für spätere Analysen von Bedeutung sind.

Der Parameter δ für $D \rightarrow \pi$ -Übergang ist durch das Verhältnis der beiden Strukturen $f_{D\pi}^+(0)$ und $f_{D\pi}^+(0) + f_{D\pi}^-(0)$ definiert und ergibt sich zu:

$$\delta_{D\pi} = 1 + \frac{f_{D\pi}^-(0)}{f_{D\pi}^+(0)} = 0,69 \pm 0,09. \quad (4.17)$$

| Methode | [Ref.] | $f_{D\pi}^+(0)$ | $f_{DK}^+(0)$ |
|------------|--------------|--------------------------|--------------------------|
| Gitter-QCD | [113] | $0,57 \pm 0,06 \pm 0,02$ | $0,66 \pm 0,04 \pm 0,01$ |
| | [114] | $0,64 \pm 0,03 \pm 0,06$ | $0,73 \pm 0,03 \pm 0,07$ |
| | [115] | $0,74 \pm 0,06 \pm 0,04$ | $0,78 \pm 0,05 \pm 0,04$ |
| LCSR | [101] | $0,65 \pm 0,11$ | $0,78_{-0,15}^{+0,2}$ |
| | [102] | $0,63 \pm 0,11$ | $0,75 \pm 0,12$ |
| | diese Arbeit | $0,67_{-0,07}^{+0,10}$ | $0,75_{-0,08}^{+0,11}$ |

Tabelle 4.3.: Vergleich von verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Formfaktoren $f_{D\pi}^+(0)$ und $f_{DK}^+(0)$.

Die Steigung des Formfaktors $f_{D\pi}^+(q^2)$ bei $q^2 = 0$ wird durch den Parameter $\beta_{D\pi}$ beschrieben, für den man hier:

$$\beta_{D\pi} = \left[\left(\frac{m_D^2 - m_\pi^2}{f_{D\pi}^+(0)} \right) \frac{df_{D\pi}^0(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} \right]^{-1} = 1,4 \pm 0,3 \quad (4.18)$$

erhält. Daraus ergibt sich die Kombination

$$1 + 1/\beta_{D\pi} - \delta_{D\pi} = 1,02 \pm 0,18, \quad (4.19)$$

deren Wert in [91] experimentell bestimmt wurde zu $1 + 1/\beta_{D\pi} - \delta_{D\pi} = 0,93 \pm 0,09 \pm 0,01$ und mit dem eine gute Übereinstimmung besteht. Die entsprechenden Parameter für den $D \rightarrow K$ -Übergang lauten:

$$\delta_{DK} = 0,79 \pm 0,07, \quad \beta_{DK} = 1,6 \pm 0,4, \quad (4.20)$$

womit sich:

$$1 + 1/\beta_{DK} - \delta_{DK} = 0,84 \pm 0,17 \quad (4.21)$$

ergibt, was ebenfalls mit dem experimentellen Wert $1 + 1/\beta_{DK} - \delta_{DK} = 0,89 \pm 0,04 \pm 0,01$ [91] konsistent ist.

4.2.2. Bestimmung von $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$

Aktuelle Daten des CLEO-Experiments wurden in [91] an verschiedene Parametrisierungen der Formfaktoren (Abschnitt 2.4) angepasst, um die Werte für $f_{D\pi}^+(0)|V_{cd}|$ und $f_{DK}^+(0)|V_{cs}|$ zu bestimmen. Nun sollen unter Zuhilfenahme der oben vorgestellten Ergebnisse der Formfaktoren die Werte für $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$ ermittelt werden. Dazu wird hier, wie bereits in Abschnitt 4.1.2 erwähnt, der in [66] experimentell bestimmte Wert für das Produkt

$$f_D |V_{cd}| = 46,4 \pm 2,0 \text{ MeV} \quad (4.22)$$

verwendet. Das Ergebnis für $f_{D\pi}^+(0)|V_{cd}|$ aus [91] wurde durch eine Messung des in q^2 -Bins aufgeteilten Spektrums des $D \rightarrow \pi e \nu$ -Zerfalls bestimmt, das an eine bestimmte Form der z -Parametrisierung gefittet wurde:

$$f_{D\pi}^+(0)|V_{cd}| = 0,150 \pm 0,004 \pm 0,001. \quad (4.23)$$

Bildet man das Produkt dieser beiden experimentellen Größen, so ist es möglich durch Verwendung des in (4.14) angegebenen Resultats der Lichtkegel-Summenregeln einen Wert für $|V_{cd}|^2$ zu erhalten. Aus diesem ergibt sich:

$$|V_{cd}| = 0,225 \pm 0,005 \pm 0,003 \begin{matrix} +0,016 \\ -0,012 \end{matrix}. \quad (4.24)$$

Die beiden ersten Fehlerbereiche stellen dabei die Unsicherheiten von (4.22) und (4.23) dar und der dritte die des Summenregel-Resultats. Das obige Ergebnis hat

4.3. Ergebnisse für die Formfaktoren bei $q^2 \neq 0$ und deren Parametrisierungen

nicht nur den Vorteil, dass keine zusätzlichen Annahmen nötig sind, sondern vor allem dass man das Quadrat von $|V_{cd}|$ erhält, was es erlaubt die durch die Bestimmung des Formfaktors verursachte relative Unsicherheit (4.14) im Endergebnis (4.24) etwa zu halbieren. Unter Verwendung eines Gitter-QCD-Ergebnisses für $f_{D\pi}^+(0)$ [114] (siehe Tab. 4.3), der nahe am hier erhaltenen liegt, wurde in [91] der Wert $|V_{cd}| = 0,234 \pm 0,007 \pm 0,002 \pm 0,025$ ermittelt, mit dem das obige Ergebnis gut übereinstimmt.

Nun kann das Verhältnis von $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$ bestimmt werden, indem man Gl. (4.23) teilt durch den experimentellen Wert:

$$f_{DK}^+(0)|V_{cs}| = 0,719 \pm 0,006 \pm 0,005. \quad (4.25)$$

Dieser wurde durch einen entsprechenden Fit an $D \rightarrow K e \nu_e$ -Daten gewonnen [91].

Unter Verwendung von (4.16) erhält man damit:

$$\frac{|V_{cd}|}{|V_{cs}|} = 0,236 \pm 0,006 \pm 0,003 \pm 0,013, \quad (4.26)$$

wobei die ersten beiden Fehlerbereiche aus den quadratisch addierten experimentellen Unsicherheiten in (4.23) und (4.25) hervorgehen und der dritte wieder von den Lichtkegel-Summenregeln herrührt. Dieses Ergebnis ist konsistent mit dem für $|V_{cd}|/|V_{cs}|$, welches man aus dem in [91] unter Verwendung des Gitter-QCD-Wertes [114] für $f_{DK}^+(0)$ bestimmten $|V_{cs}| = 0,985 \pm 0,009 \pm 0,006 \pm 0,103$ gewinnt. Die Ergebnisse (4.24) und (4.26) dieses Abschnittes sind zudem verträglich mit den Annahmen $|V_{cd}| = |V_{us}|$ und $|V_{cs}| = |V_{ud}|$.

4.3. Ergebnisse für die Formfaktoren bei $q^2 \neq 0$ und deren Parametrisierungen

In diesem Abschnitt sollen die in dieser Arbeit berechneten $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren an die in Abschnitt 2.4 definierten Parametrisierungen angepasst werden, um Vorhersagen im Bereich $0 \leq q^2 < t_-$ machen zu können. Die Region $0 \leq q^2 \ll m_c^2$, in der die Lichtkegel-Summenregeln angewendet werden können, ist allerdings nicht ausreichend groß, um eine solche Parametrisierung mit hinreichender Genauigkeit zu gestatten. Daher werden hier Werte für die Formfaktoren im Bereich $q_{min}^2 < q^2 < 0$ genutzt, die zwar nicht den semileptonischen Zerfall beschreiben, aber für die der Formfaktor, wie in Abschnitt 2.3 erklärt, analytisch fortgesetzt werden kann und die in dieser Region der $\ell\pi(K) \rightarrow \nu_l D$ -Streuung entsprechen würden (die allerdings praktisch nahezu unmessbar ist).

Im Bereich $q^2 < 0$ können die Lichtkegel-Summenregeln problemlos angewandt werden, mit noch besserer Rechtfertigung als bei $q^2 = 0$, da die Virtualität des

c -Quarks in der Korrelationsfunktion dort noch größer ist. Hier wird jedoch $|q^2|$ nicht zu groß gewählt, sondern als untere Grenze $q_{min}^2 = -2 \text{ GeV}^2$ verwendet, wofür es mehrere Motivationen gibt: Zum einen gelten in diesem Bereich immer noch die in 4.1.2 für $q^2 = 0$ gewählten Werte für M^2 , s_0^D und μ und können somit über den gesamten Bereich einheitlich verwendet werden. Zum anderen würden Werte für $|q^2| \gg \mu^2, m_c^2$ zu großen Logarithmen in der α_s -Korrekturen führen, die die perturbative Entwicklung verschlechtern, und die untere Grenze u_0 der in den Lichtkegel-Summenregeln auftretenden Integrale würde sich zu sehr 1 annähern und somit die Auswertung der Lichtkegelentwicklung erschweren.

Für die Formfaktoren $f_{D\pi}^+(q^2)$ und $f_{DK}^+(q^2)$, welche im Folgenden betrachtet werden, wurden zusätzlich zu den in (4.10) und (4.11) angegebenen Werten bei $q^2 = 0$ weitere Werte für die auf $q^2 = 0$ normierten Formfaktoren $f_{D\pi(K)}^+(q^2)/f_{D\pi(K)}^+(0)$ an einer Reihe äquidistanter Punkte im Bereich $-2 \text{ GeV}^2 < q^2 \leq 0$ berechnet und die theoretische Unsicherheit mit dem selben Verfahren wie in Abschnitt 4.2.1 bestimmt. Diese normierten Formfaktoren geben die funktionale Form der Formfaktoren wieder. Sie sind unabhängig von f_D und im Vergleich zu $f_{D\pi(K)}^+(0)$ heben sich einige der Unsicherheiten weg. Sie eignen sich in Kombination mit diesem Wert besser für die hier durchgeführte Analyse. Die dafür erhaltenen Ergebnisse sowie direkt für die Formfaktoren $f_{D\pi(K)}^+(q^2)$ sind in den Abbildungen 4.3 und 4.4 gezeigt.

Die normierten Formfaktoren wurden nun an die in Abschnitt 2.4 vorgestellten Parametrisierungen (2.40) und (2.47) angepasst. Für die z -Parametrisierung (2.47) wird dabei das für diese Analyse relevante Intervall $q_{min}^2 = -2 \text{ GeV}^2 < q^2 \leq t_-$ auf einen kleinstmöglichen Bereich $|z| < 0,22$ für $D \rightarrow \pi$ und $|z| < 0,09$ für $D \rightarrow K$ abgebildet, was eine schnelle Konvergenz der Reihe garantiert. Aus den Ergebnissen zeigt sich, dass beide Parametrisierungen die Ergebnisse im Bereich $q^2 \leq 0$ gut beschreiben. Ein ebenfalls durchgeführter Fit an eine Ein-Pol-Parametrisierung führte zu einer Polmasse kleiner als $m_{D(s)^*}$, widerspricht zudem den experimentellen Daten und ist daher nicht geeignet.

In Tabelle 4.4 sind die erhaltenen Parameter $\alpha_{D\pi}$ und α_{DK} für die BK-Parametrisierung angegeben und werden mit Ergebnissen der Gitter-QCD [114] verglichen. Sie sind genauer als die in der früheren Analyse [101] bestimmten, in der zusätzlich zum Formfaktor bei $q^2 = 0$ die durch Lichtkegel-Summenregeln bestimmte $D^*D\pi$ -Kopplungskonstante mit ihrer zusätzlichen Unsicherheit genutzt wurde.

| Methode | Ref. | $f_{D\pi}^+(q^2)$ | $f_{DK}^+(q^2)$ |
|-----------------------|--------------|--|--|
| LCSR bei $q^2 \leq 0$ | diese Arbeit | $\alpha_{D\pi} = 0,21_{-0,07}^{+0,11}$ | $\alpha_{DK} = 0,17_{-0,13}^{+0,16}$ |
| Experiment | [91] | $\alpha_{D\pi} = 0,21 \pm 0,07 \pm 0,02$ | $\alpha_{DK} = 0,30 \pm 0,03 \pm 0,01$ |
| Gitter-QCD | [114] | $\alpha_{D\pi} = 0,44 \pm 0,04 \pm 0,07$ | $\alpha_{DK} = 0,50 \pm 0,04 \pm 0,07$ |

Tabelle 4.4.: Die in dieser Arbeit bestimmten Parameter der BK-Parametrisierung im Vergleich mit Werten der Gitter-QCD.

4.3. Ergebnisse für die Formfaktoren bei $q^2 \neq 0$ und deren Parametrisierungen

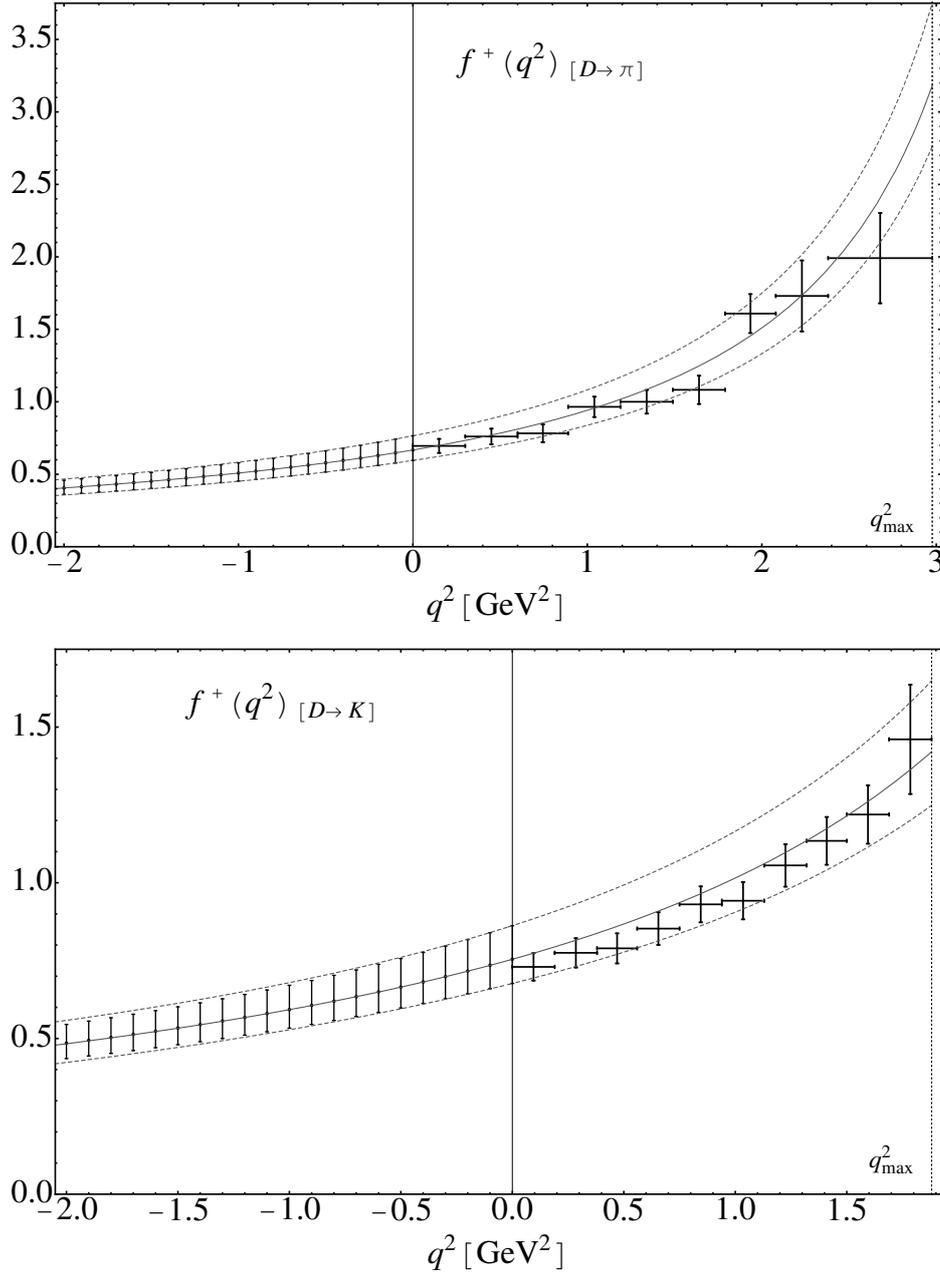


Abbildung 4.3.: Die Formfaktoren $f_{D\pi}^+(q^2)$ (oben) und $f_{DK}^+(q^2)$ (unten). Die Ergebnisse aus den Lichtkegel-Summenregeln und ihre Unsicherheiten (Punkte mit Fehlerbalken bei $q^2 < 0$) wurden an eine z -Parametrisierung angepasst (durchgezogene Linie, sowie die gestrichelten für den Unsicherheitsbereich) und mit Messergebnissen der CLEO-Kollaboration [90] (Punkte mit Fehlerbalken bei $q^2 > 0$) verglichen, zu deren Bestimmung $|V_{cd}|$ bzw. $|V_{cs}|$ aus [59] verwendet wurden.

Für die z -Parametrisierung (2.47) wurden verschiedene Anzahlen an Termen in der Reihe betrachtet. Für $N = 2$ bleibt nur ein freier Parameter b_1 (b_2 wird durch (2.45) bestimmt), für den man erhält:

$$b_1^{D\pi} = -0,8_{-0,4}^{+0,3}, \quad b_1^{DK} = -0,9_{-0,8}^{+0,7}. \quad (4.27)$$

Die Auswertungen für $N = 3$ und $N = 4$ zeigen sehr ähnliche Ergebnisse. Die aus Unitarität resultierenden Einschränkungen [46, 45] wurden ebenfalls überprüft und beginnen erst bei $N \geq 5$ für die Bestimmung der Koeffizienten b_k wirksam zu werden. (Siehe auch [117].) Daher wird hier die z -Parametrisierung (die weniger modellabhängig ist, als die Polmodelle) mit $N = 2$ für die Beschreibung der Formfaktoren im weiteren Verlauf der Analyse verwendet.

Durch Extrapolation erhält man damit schließlich eine Vorhersage im gesamten Bereich $q^2 \leq t_- = (m_D - m_{\pi(K)})^2 = 2,98 \text{ GeV}^2 (1,88 \text{ GeV}^2)$ der semileptonischen Zerfälle. Diese wird in Abbildung 4.3 mit in q^2 -Bins gemessenen, experimentellen Werten [90] verglichen. Zur Bestimmung der Formfaktoren aus den Daten wurden dabei die Mittelwerte der Particle Data Group [59] $|V_{cd}| = 0,230 \pm 0,011$ und $|V_{cs}| = 1,04 \pm 0,06$ verwendet. Die Ergebnisse für die normierten Formfaktoren (die unabhängig vom Wert bei $q^2 = 0$ sowie den CKM-Matrixelementen sind) sind in Abbildung 4.4 gezeigt und werden mit einem dreiparametrischen Fit der z -Parametrisierung an experimentelle Daten [91] verglichen, welche gut mit diesen übereinstimmen. (Da in [91] eine andere Form der z -Parametrisierung verwendet wurde, können die Parameter nicht direkt verglichen werden.)

Unter Verwendung dieser Ergebnisse für die z -Parametrisierung können nun die Werte für die totale semileptonische Zerfallsbreite berechnet werden, die (mit $m_\ell = 0$) gegeben ist durch:

$$\frac{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell)}{|V_{cd}|^2} = \frac{G_F^2}{24\pi^3} \int_0^{(m_D - m_\pi)^2} dq^2 \left[\left(\frac{m_D^2 + m_\pi^2 - q^2}{2m_D} \right)^2 - m_\pi^2 \right]^{\frac{3}{2}} |f_{D\pi}^+(q^2)|^2, \quad (4.28)$$

sowie den entsprechenden Ausdruck für $\Gamma(D^0 \rightarrow K^- \ell^+ \nu_\ell)/|V_{cs}|^2$.

Für $D \rightarrow \pi$ kann auch hier wieder eine größere Genauigkeit erzielt werden, indem man analog zum vorigen Abschnitt das Produkt $f_D f_{D\pi}^+(0)$ betrachtet. Multipliziert man beide Seiten der obigen Gleichung (4.28) mit f_D^2 (und verwendet die Isospin-Näherung $f_{D^0} = f_{D^\pm}$) und ersetzt ihn auf der linken Seite der Gleichung durch die leptonische Zerfallsbreite, die durch

$$\Gamma(D^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell) = \frac{G_F^2}{8\pi} |V_{cd}|^2 f_D^2 m_\ell^2 m_D \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_D^2} \right)^2 \quad (4.29)$$

gegeben ist, so erhält man das Ergebnis:

$$\frac{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell) \Gamma(D^\pm \rightarrow \ell^\pm \nu_\ell)}{|V_{cd}|^4} = (4,7_{-0,9}^{+1,4}) \cdot 10^{-28} \text{ GeV}^2. \quad (4.30)$$

4.3. Ergebnisse für die Formfaktoren bei $q^2 \neq 0$ und deren Parametrisierungen

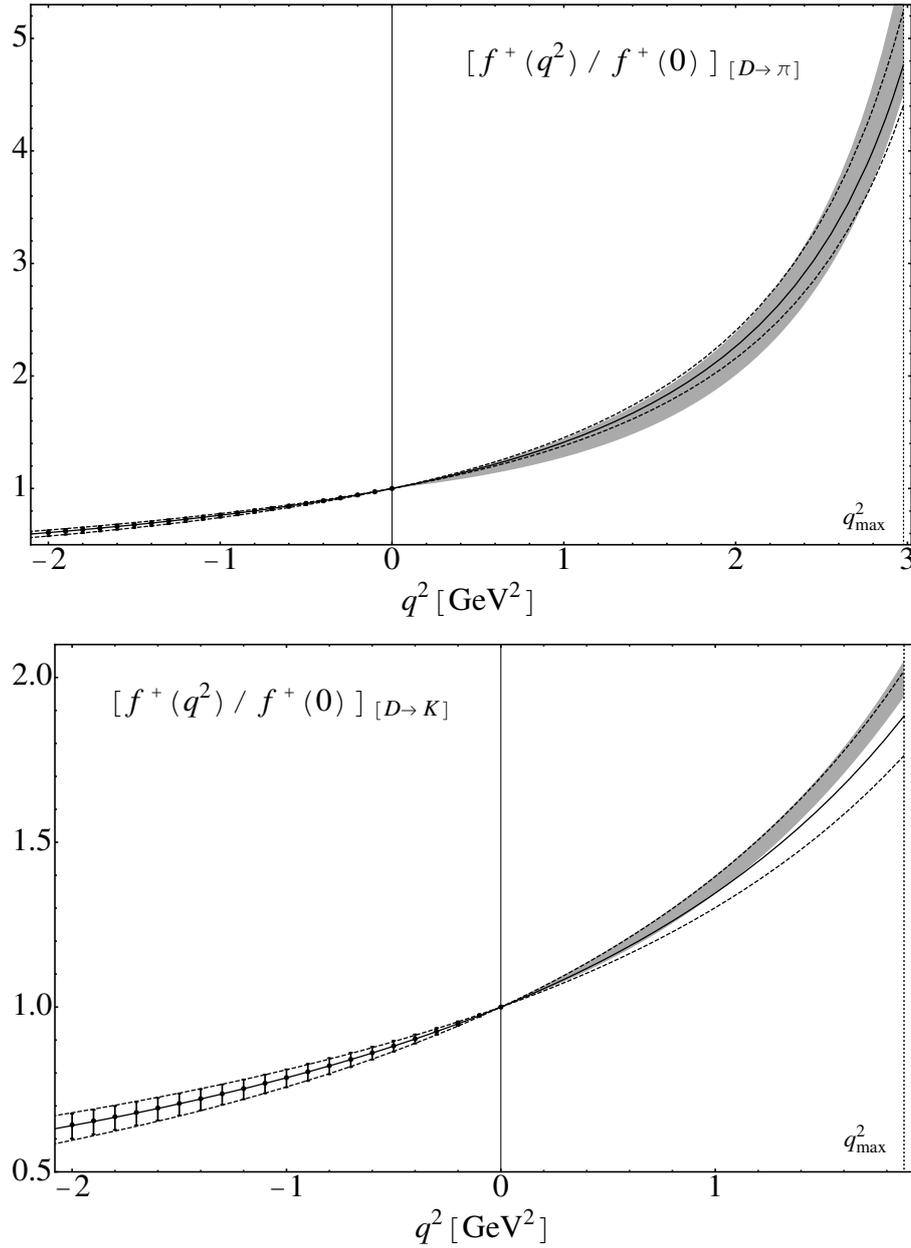


Abbildung 4.4.: Die aus Lichtkegel-Summenregeln bestimmten normierten Formfaktoren für $D \rightarrow \pi$ (oben) und $D \rightarrow K$ (unten) im Bereich $q^2 < 0$ (Punkte mit Fehlerbalken), deren Fit an die z -Parametrisierung (durchgezogene Linie, sowie die gestrichelten für den Unsicherheitsbereich) im Vergleich mit der experimentellen Bestimmung [91] (schraffierte Bereiche).

Unter Verwendung der experimentellen Werte für die von der CLEO-Kollaboration gemessenen Verzweigungsverhältnisse: $BR(D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_\ell) = 0,288 \pm 0,008 \pm 0,003\%$ [91], $BR(D^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = (3,82 \pm 0,32 \pm 0,09) \cdot 10^{-4}$ [66], und

$\tau_{D^\pm} = (1, 040 \pm 0, 007)$ ps, $\tau_{D^0} = (0, 4101 \pm 0, 0015)$ ps [59], erhält man somit:

$$|V_{cd}| = 0, 221 \pm 0, 002 \pm 0, 005_{-0,011}^{+0,017}, \quad (4.31)$$

wobei die Unsicherheitsbereiche jeweils von den semileptonischen und den leptonicen Verzweigungsverhältnissen sowie den Lichtkegel-Summenregeln stammen. Hier wurde auch Gebrauch vom gemessenen Spektrum von $f^+(q^2)|V_{cd}|$ gemacht, womit dieses Ergebnis eine gewisse Unabhängigkeit von dem des vorigen Abschnitts besitzt.

Für das Verhältnis der semileptonischen Zerfallsbreiten erhält man:

$$\frac{|V_{cs}|^2 \Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell)}{|V_{cd}|^2 \Gamma(D^0 \rightarrow K^- \ell^+ \nu_\ell)} = 1, 65 \pm 0, 2. \quad (4.32)$$

Mit den CLEO-Ergebnissen für die Verzweigungsverhältnisse des Zerfalls $BR(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_\ell) = 3, 50 \pm 0, 03 \pm 0, 04\%$ [91] sowie der oben angegeben für den leptonicen Zerfall erhält man hier:

$$\frac{|V_{cd}|}{|V_{cs}|} = 0, 223 \pm 0, 003 \pm 0, 002 \pm 0, 015, \quad (4.33)$$

wobei die Fehler von den semileptonischen $D \rightarrow \pi$ - und $D \rightarrow K$ -Verzweigungsverhältnissen sowie den Lichtkegelsummenregeln (4.32) stammen. Eine Betrachtung der Daten aus anderen Experimenten [93, 94, 95] (die gut mit den CLEO-Daten übereinstimmen) würde hier den Rahmen sprengen und wird daher nicht angegeben.

Abschließend werden die skalaren Formfaktoren $f_{D\pi(K)}^0(q^2)$ betrachtet, die unter Ausnutzung der Summenregel-Ergebnisse für $f_{D\pi(K)}^+(q^2)$, sowie $[f_{D\pi(K)}^+(q^2) + f_{D\pi(K)}^-(q^2)]$ aus (3.64) gewonnen werden. Die Ergebnisse werden analog zu oben im Bereich negativer q^2 -Werte an die z -Parametrierung (2.47) ohne den $D_{(s)}^*$ -Pol-Faktor, der hierbei nicht auftritt, angepasst. Für $N = 2$ ergibt sich für die Parameter:

$$\bar{b}_1^{f^0, D\pi} = -2, 6_{-0,5}^{+0,3}, \quad \bar{b}_1^{f^0, DK} = -3, 3_{-0,8}^{+0,6}. \quad (4.34)$$

Die Vorhersage für die Formfaktoren ist in Abbildung 4.5 gezeigt.

In [114] wurden Ergebnisse aus der Gitter-QCD für $f_{D\pi}^0$ und f_{DK}^0 in Form einer BK-Parametrisierung angegeben:

$$f_{D\pi(K)}^0(q^2) = \frac{1}{1 - q^2/(\beta_{D\pi(K)} m_{D_{(s)}^*}^2)}, \quad (4.35)$$

wobei die Werte $\beta_{D\pi} = 1, 41 \pm 0, 06 \pm 0, 07$, $\beta_{DK} = 1, 31 \pm 0, 07 \pm 0, 13$ angegeben sind. Diese sind konsistent mit den durch Anpassung an die Lichtkegel-Summenregeln erhaltenen Werte $\beta_{D\pi} = 1, 25 \pm 0, 2$ und $\beta_{DK} = 1, 3_{-0,3}^{+0,4}$, welche allerdings eine größere Unsicherheit besitzen.

4.3. Ergebnisse für die Formfaktoren bei $q^2 \neq 0$ und deren Parametrisierungen

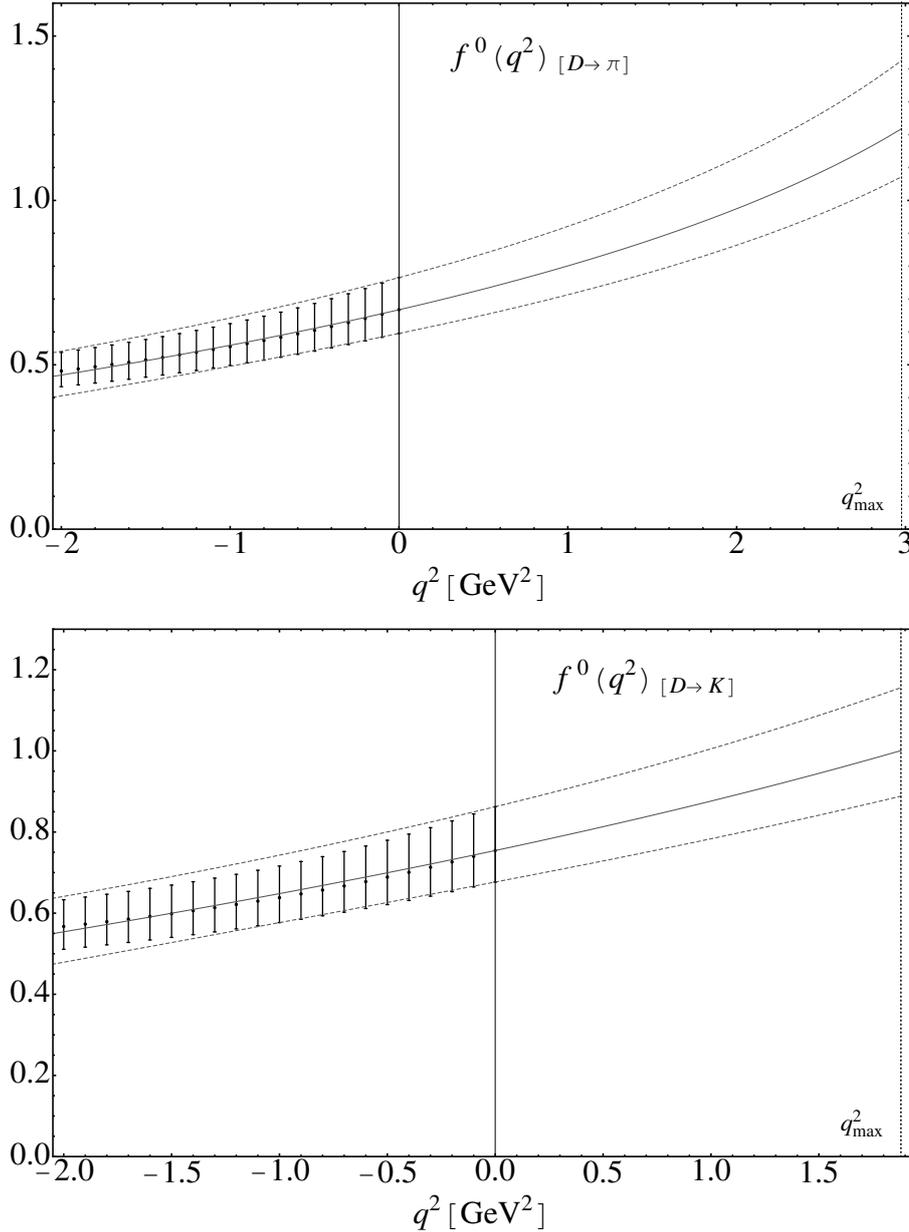


Abbildung 4.5.: Die skalaren Formfaktoren $f_{D\pi(K)}^0$, die aus Anpassung der Ergebnisse aus Lichtkegel-Summenregeln im Bereich $q^2 < 0$ an die z -Parametrierung bestimmt wurden. Zur Darstellung gelten die selben Hinweise wie in Abbildung 4.3.

Durch eine Extrapolation der Formfaktoren zum (unphysikalischen) Punkt $q^2 = m_D^2$ erhält man

$$f_{D\pi}^0(m_D^2) = 1,40_{-0,14}^{+0,21}, \quad f_{DK}^0(m_D^2) = 1,29_{-0,16}^{+0,23}. \quad (4.36)$$

Diese Ergebnisse können mit der approximativen Relation [118]

$$\lim_{q^2 \rightarrow m_D^2} f_{D\pi(K)}^0(q^2) = f_D/f_{\pi(K)} = 1,58 \pm 0,07 \quad (1,32 \pm 0,06) \quad (4.37)$$

verglichen werden, wobei die experimentell bestimmten Werte der Zerfallskonstanten [17, 66] genutzt wurden.

Kapitel 5.

Lichtkegel-Summenregeln für $\Lambda_c \rightarrow N$ - und $\Sigma_c \rightarrow N$ -Übergänge

In diesem Abschnitt wird eine Lichtkegel-Summenregel-Analyse der $\Lambda_c \rightarrow N$ - und $\Sigma_c \rightarrow N$ -Übergänge durchgeführt, aus denen sowohl die Formfaktoren, als auch die hadronischen $\Lambda_c(\Sigma_c)ND^{(*)}$ -Kopplungskonstanten bestimmt werden. Als Eingabeparameter werden die in Abschnitt 3.2.4 vorgestellten Lichtkegelverteilungsamplituden des Nukleons verwendet und ähnlich wie in der bereits für die Λ_c - und Σ_c -Zerfallskonstanten durchgeführten Rechnung muss auch hier eine Betrachtung der Parität erfolgen, die sich als unabdingbar für das Erhalten konsistenter Ergebnisse erweist. Zudem kommt bei der Berechnung der hadronischen Kopplungskonstanten ein neues Verfahren zur Behandlung der dafür nötigen doppelten Spektraldichte zum Einsatz, das eine Weiterentwicklung des in [77] für die $BB^{(*)}\pi$ - und $DD^{(*)}\pi$ -Kopplungskonstanten verwendeten darstellt, und in zukünftigen Arbeiten für eine Aktualisierung dieser Größen angewandt werden kann.

Die Ergebnisse dieser Arbeit, sowie einige der früher bereits erwähnten Betrachtungen, die nicht mehr in deren Rahmen liegen, werden in [119] veröffentlicht.

5.1. Einführung und grundlegende Definitionen

Analog zum vorigen Kapitel kann die Methode der Lichtkegel-Summenregeln auch unter Verwendung der Nukleon-Lichtkegelverteilungsamplituden auf Baryonen ausgedehnt werden, wofür eine entsprechende Korrelationsfunktion mit einem baryonischen interpolierenden Strom und einem Nukleon auf der Massenschale definiert wird. In dieser Arbeit werden die bereits für elektromagnetische Nukleon-Formfaktoren in [120, 89, 39, 88] entwickelten Techniken auf Übergänge mit schweren Baryonen angewandt und weiterentwickelt.

In der Literatur sind bisher verschiedene Anwendungen von Lichtkegel- oder Dreipunkt-Summenregeln, teils auch unter Verwendung der HQET, zur Berechnung der entsprechenden Formfaktoren schwerer Baryonen (insbesondere Λ_b) durchgeführt

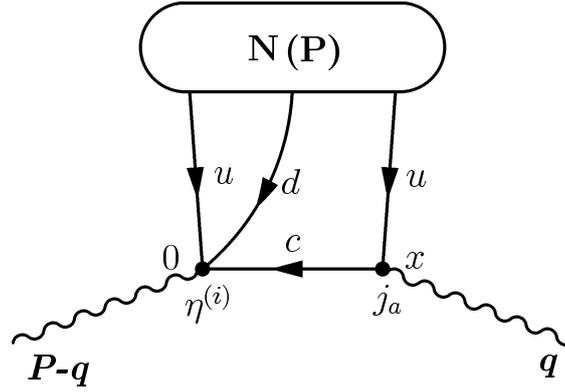


Abbildung 5.1.: Der führende Beitrag zur Lichtkegelentwicklung der Korrelationsfunktion (5.1)

worden, beispielsweise in [121, 122, 123, 124, 125, 126]. Auch zur Bestimmung hadronischer Kopplungskonstanten mit diesen Methoden existieren bereits viele Studien, wie etwa u.a. [127, 128]. Diese haben insbesondere das Problem, dass verschiedene interpolierende Ströme zu teilweise relativ unterschiedlichen Ergebnissen führen, was auf das bereits erwähnte Paritätsproblem zurückzuführen sein dürfte. Die Massenaufspaltung zwischen den beiden Paritätszuständen schwerer Baryonen ist zudem kleiner als bei leichten [17], weswegen dieses Problem hier stärker ins Gewicht fällt.

Es existieren auch noch andere Ansätze zur Paritätsaufspaltung, wie die Betrachtung des Limes schwerer Quarkmassen (siehe [38]), welcher es erlaubt, die entsprechenden Strukturen relativ einfach zu trennen. Insbesondere für das charm-Quark stellt dies jedoch keine gute Näherung dar, weswegen die Genauigkeit dieser Prozedur als eingeschränkt einzuschätzen ist. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung einer Korrelationsfunktion, die nicht das zeitgeordnete Produkt, sondern nur eine der Heaviside-Funktionen $\theta(x_0)$ enthält [129]. Dieses Vorgehen ist zwar nicht Lorentz-invariant, allerdings auch für leichte Baryonen nutzbar.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Technik zur Trennung der Paritätsbeiträge wird nun im Folgenden für Lichtkegelsummenregeln durchgeführt, welche sich damit direkt und ohne Betrachtung von Näherungen, etc. anwenden lassen.

Die hier verwendete Korrelationsfunktion, bei der sich ein Nukleon $|N\rangle$ mit Impuls P (wobei $P^2 = m_N^2$) im Anfangszustand befindet, ist definiert als:

$$\Pi_a(P, q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ \eta^{(i)}(0), j_a(x) \} | N(P) \rangle . \quad (5.1)$$

Die baryonischen interpolierenden Ströme $\eta^{(i)}$ für Λ_c ($i = \{\mathcal{P}, \mathcal{A}\}$) und Σ_c ($i = \{\mathcal{I}, \mathcal{T}\}$) wurden dabei in Abschnitt 2.2.2 eingeführt und j_a beschreibt entsprechende Übergangsströme mit $\bar{c}u$ -Quantenzahlen. Der Index a beschreibt bestimmte Lorentz-Strukturen und sie können sowohl einen schwachen Übergang darstellen

(nötig für die Formfaktoren) oder ein $D^{(*)}$ -Meson interpolieren (nötig für die hadronischen Kopplungskonstanten). Die Ströme j_a sind von der Form

$$j_a = \bar{c}_i \Gamma_a u_i \quad (5.2)$$

und es werden die pseudoskalare, die Vektor- und die Axialvektor-Struktur betrachtet: $\Gamma_a = im_c \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5$. In der durchgeführten Berechnung werden die leichten Quarkmassen vernachlässigt.

Für die Lichtkegeldominanz der Korrelationsfunktion liegt eine analoge Situation zu der am Anfang von Abschnitt 4.1 beschrieben vor. Auch hier werden dementsprechend nur Werte mit $q^2 \leq 0$ betrachtet. Wie bei den im vorigen Kapitel betrachteten Lichtkegel-Summenregeln für schwere Mesonen ist es zudem auch möglich, die Analyse problemlos auf das b -Quark anstelle des c -Quarks auszudehnen, sowie sogar ebenfalls auf das s -Quark. Während für das b -Quark ein größerer Bereich mit $q^2 > 0$ zugänglich würde, würden für das s -Quark jedoch nur Werte für $q^2 < 0$ gültig sein. Auch hier sollte allerdings durch die Anwendung entsprechender Parametrisierungen eine Extrapolation in den physikalischen Bereich möglich sein. In dieser Arbeit sollen diese Analysen allerdings nicht mehr betrachtet werden, sondern stellen wichtige zukünftige Erweiterungen der hier auf das charm-Quark beschränkten Ergebnisse dar.

5.2. Herleitung der Lichtkegel-Summenregeln

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang der Korrelationsfunktion (5.1) mit den gesuchten hadronischen Größen gezeigt, die Berechnung mittels Lichtkegelentwicklung durchgeführt und die Methode zur Isolation der positiven Paritätsbeiträge vorgestellt.

5.2.1. Struktur und hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion

Unter Beachtung der Dirac-Gleichung $(\not{P} - m_N)u_N(P) = 0$ kann die Korrelationsfunktion in verschiedene, unabhängige Dirac-Strukturen aufgespalten werden, welche für die weiteren Betrachtungen wichtig sind. Für den pseudoskalaren Übergangstrom j_5 existieren zwei davon:

$$\Pi_5^{(i)}(P, q) = \left(\Pi_1^{(i)}((P - q)^2, q^2) + \Pi_2^{(i)}((P - q)^2, q^2) \not{q} \right) i \gamma_5 u_N(P), \quad (5.3)$$

und für den Vektorstrom j_μ sechs:

$$\Pi_\mu^{(i)}(P, q) = \left(\tilde{\Pi}_1^{(i)} P_\mu + \tilde{\Pi}_2^{(i)} P_\mu \not{q} + \tilde{\Pi}_3^{(i)} \gamma_\mu + \tilde{\Pi}_4^{(i)} \gamma_\mu \not{q} + \tilde{\Pi}_5^{(i)} q_\mu + \tilde{\Pi}_6^{(i)} q_\mu \not{q} \right) u_N(P). \quad (5.4)$$

Die Abhängigkeit der Funktionen $\Pi_{1,2}^{(i)}$ und $\tilde{\Pi}_{1-6}^{(i)}$ von $(P-q)^2$ und q^2 ist dabei hier nicht mehr mit angeschrieben. Die Korrelationsfunktion $\Pi_{\mu 5}^{(i)}$ für den Axialvektorstrom $j_{\mu 5}$ ist völlig analog mit einer entsprechenden Notation $\bar{\Pi}_{1-6}$ definiert:

$$\Pi_{\mu 5}^{(i)}(P, q) = \left(\bar{\Pi}_1^{(i)} P_\mu + \bar{\Pi}_2^{(i)} P_\mu \not{q} + \bar{\Pi}_3^{(i)} \gamma_\mu + \bar{\Pi}_4^{(i)} \gamma_\mu \not{q} + \bar{\Pi}_5^{(i)} q_\mu + \bar{\Pi}_6^{(i)} q_\mu \not{q} \right) \gamma_5 u_N(P). \quad (5.5)$$

Die hadronische Darstellung der pseudoskalaren Korrelationsfunktion ist nach ähnlichem Vorgehen zu Abschnitt 3.1.2 unter Verwendung der Zerfallskonstanten (2.16), (2.18) sowie der skalaren Formfaktoren (2.21) und (2.25) möglich. Wieder unter Beachtung der oben genannten Dirac-Gleichung ergibt sie sich zu:

$$\begin{aligned} \Pi_5^{(i)}(P, q) &= \frac{\lambda_{\Lambda_c}^{(i)} m_{\Lambda_c} G(q^2)}{m_{\Lambda_c}^2 - (P-q)^2} (m_{\Lambda_c} + m_N) \left[(m_{\Lambda_c} - m_N) - \not{q} \right] \gamma_5 u_N(P) \\ &+ \frac{\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)} m_{\Lambda_c^*} \tilde{G}(q^2)}{m_{\Lambda_c^*}^2 - (P-q)^2} (m_{\Lambda_c^*} - m_N) \left[(m_{\Lambda_c^*} + m_N) + \not{q} \right] \gamma_5 u_N(P) \\ &+ \int_{s_0^h}^{\infty} \frac{ds}{s - (P-q)^2} \left(\rho_1^{(i)} + \rho_2^{(i)} \not{q} \right) u_N(P). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Kontinuumsbeiträge sind dabei durch entsprechende Spektralfunktionen $\rho_j^{(i)}(s, q^2)$ dargestellt, deren Argumente in der obigen Gleichung unterdrückt sind, und eventuelle Subtraktionen werden mit Hinblick auf die spätere Borel-Transformation nicht angeschrieben. Für den Vektor-Übergangstrom lautet die hadronische Darstellung, die man unter Verwendung der Formfaktoren (2.22) erhält:

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^{(i)}(P, q) &= \frac{\lambda_{\Lambda_c}^{(i)} m_{\Lambda_c}}{m_{\Lambda_c}^2 - (P-q)^2} \left[2f_1(q^2) P_\mu - 2\frac{f_2(q^2)}{m_{\Lambda_c}} P_\mu \not{q} \right. \\ &+ (m_{\Lambda_c} - m_N) \left(f_1(q^2) - \frac{m_{\Lambda_c} + m_N}{m_{\Lambda_c}} f_2(q^2) \right) \gamma_\mu + \left(f_1(q^2) - \frac{m_{\Lambda_c} + m_N}{m_{\Lambda_c}} f_2(q^2) \right) \gamma_\mu \not{q} \\ &+ \left. \left(-2f_1(q^2) + \frac{m_{\Lambda_c} + m_N}{m_{\Lambda_c}} (f_2(q^2) + f_3(q^2)) \right) q_\mu + \frac{1}{m_{\Lambda_c}} (f_2(q^2) - f_3(q^2)) q_\mu \not{q} \right] u_N(P) \\ &+ \frac{\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)} m_{\Lambda_c^*}}{m_{\Lambda_c^*}^2 - (P-q)^2} \left[-2\tilde{f}_1(q^2) P_\mu + 2\frac{\tilde{f}_2(q^2)}{m_{\Lambda_c^*}} P_\mu \not{q} \right. \\ &+ (m_{\Lambda_c^*} + m_N) \left(\tilde{f}_1(q^2) + \frac{m_{\Lambda_c^*} - m_N}{m_{\Lambda_c^*}} \tilde{f}_2(q^2) \right) \gamma_\mu - \left(\tilde{f}_1(q^2) + \frac{m_{\Lambda_c^*} - m_N}{m_{\Lambda_c^*}} \tilde{f}_2(q^2) \right) \gamma_\mu \not{q} \\ &+ \left. \left(2\tilde{f}_1(q^2) + \frac{m_{\Lambda_c^*} - m_N}{m_{\Lambda_c^*}} (\tilde{f}_2(q^2) + \tilde{f}_3(q^2)) \right) q_\mu - \frac{1}{m_{\Lambda_c^*}} (\tilde{f}_2(q^2) - \tilde{f}_3(q^2)) q_\mu \not{q} \right] u_N(P) \\ &+ \int_{s_0^h}^{\infty} \frac{ds}{s - (P-q)^2} \left(\tilde{\rho}_1^{(i)} P_\mu + \tilde{\rho}_2^{(i)} P_\mu \not{q} + \tilde{\rho}_3^{(i)} \gamma_\mu + \tilde{\rho}_4^{(i)} \gamma_\mu \not{q} + \tilde{\rho}_5^{(i)} q_\mu + \tilde{\rho}_6^{(i)} q_\mu \not{q} \right) u_N(P). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Hier gelten die entsprechenden Bemerkungen wie bei der vorigen Gleichung und zudem wurde hier noch die Ersetzung $(P - q)^2 \rightarrow m_{\Lambda_c^*}^2$ durchgeführt. Dies ist durch die Beziehung

$$(P - q)^2 = -(m_{\Lambda_c^*}^2 - (P - q)^2) + m_{\Lambda_c^*}^2 \quad (5.8)$$

motiviert, nach welcher sich die $(P - q)^2$ -Terme mit dem Nenner kürzen lassen und dann durch die später durchzuführende Borel-Transformation entfernt werden. Daher werden auch diese an dieser Stelle nicht mehr angegeben.

Für den Axialvektor-Übergangstrom $\Pi_{\mu 5}^{(i)}(P, q)$ erhält man die hadronische Darstellung aus der obigen durch die Ersetzung $f_i \rightarrow g_i$, $\tilde{f}_i \rightarrow \tilde{g}_i$, $m_N \rightarrow -m_N$ und Hinzufügen einer γ_5 -Matrix vor dem Nukleon-Spinor. Die entsprechenden Relationen für Σ_c sind dazu völlig analog definiert und durch $\Lambda_c \rightarrow \Sigma_c$ und $\Lambda_c^* \rightarrow \Sigma_c^*$ zu erhalten. Aus den obigen Darstellungen lassen sich leicht die Ausdrücke für die jeweiligen Dirac-Strukturen $\Pi_{1,2}^{(i)}$, $\tilde{\Pi}_{1,\dots,6}^{(i)}$ und $\bar{\Pi}_{1,\dots,6}^{(i)}$ der Korrelationsfunktionen ableiten.

5.2.2. Berechnung der Korrelationsfunktion mit Hilfe der Nukleon-Lichtkegelverteilungsamplituden

Die Berechnung der Korrelationsfunktion mittels Operatorproduktentwicklung verläuft nun sehr ähnlich zu der für die $D \rightarrow \pi$ -Formfaktoren in Abschnitt 3.2. Durch Einsetzen des freien c -Quark-Propagators als führendem Term der Lichtkegelentwicklung in die Korrelationsfunktion (5.1) erhält man:

$$\begin{aligned} \Pi_a(P, q) = & \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i(q+k)x} \frac{1}{m_c^2 - k^2} \\ & \cdot \left\{ k_\nu \langle 0 | (u^T(0) C \Gamma d(0)) \tilde{\Gamma} \gamma^\nu \Gamma_a u(x) | N(P) \rangle \right. \\ & \left. + m_c \langle 0 | (u^T(0) C \Gamma d(0)) \tilde{\Gamma} \Gamma_a u(x) | N(P) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die auftretenden Matrixelemente können nun durch die in Abschnitt 3.2.4 definierten Nukleon-Lichtkegelverteilungsamplituden ausgedrückt werden, welche hier in der folgenden, allgemeinen Notation dargestellt werden:

$$\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(x_1) u_\beta^j(x_2) d_\gamma^k(x_3) | N(P) \rangle = \frac{1}{4} \sum_k \Psi_k(a_1, a_2, a_3) (X_k C)_{\alpha\beta} (Y_k N(P))_\gamma. \quad (5.10)$$

Zu jeder in der Definition (3.91) auftretenden 24 Dirac-Strukturen X_k und Y_k (über die mit dem Index k summiert wird) kann dabei jeweils die dazu proportionale

Funktion mittels Tabelle 3.1 als Linearkombination der in (3.92) definierten Verteilungsamplituden $F(a_1, a_2, a_3, P \cdot x)$ definierten Twists geschrieben werden. Diese Linearkombinationen (einschließlich aller der in der Definition auftretenden Faktoren) werden hier mit $\Psi_k(a_1, a_2, a_3)$ bezeichnet.

Setzt man dies in das erste Matrixelement in Gleichung (5.9) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | (u^T(0) C \Gamma d(0)) \tilde{\Gamma} \Gamma_a u(x) | N(P) \rangle_\gamma \\
 &= (C \Gamma)_{\alpha\beta} \left(\tilde{\Gamma} \Gamma_a \right)_{\gamma\delta} \langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(0) d_\beta^j(0) u_\delta^k(x) | N(P) \rangle \\
 &= (C \Gamma)_{\alpha\beta} \left(\tilde{\Gamma} \Gamma_a \right)_{\gamma\delta} \langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(0) u_\delta^j(x) d_\beta^k(0) | N(P) \rangle \\
 &= \frac{1}{4} (C \Gamma)_{\alpha\beta} \left(\tilde{\Gamma} \Gamma_a \right)_{\gamma\delta} \sum_k \Psi_k(0, 1, 0) (X_k C)_{\alpha\delta} (Y_k N(P))_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \sum_k \Psi_k(0, 1, 0) \left(\tilde{\Gamma} \Gamma_a \right)_{\gamma\delta} (X_k C)_{\delta\alpha}^T (C \Gamma)_{\alpha\beta} (Y_k N(P))_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \sum_k \Psi_k(0, 1, 0) \left(\tilde{\Gamma} \Gamma_a C^T X_k^T C \Gamma Y_k N(P) \right)_\gamma. \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Für das zweite Matrixelement ergibt sich ein völlig analoger Ausdruck mit $\Gamma_a \rightarrow \gamma^\nu \Gamma_a$. Aus der Definition (3.92) folgt mit $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 0$ nun die Darstellung $\Psi_k(0, 1, 0) = \int \mathcal{D}x e^{-ix_2 P \cdot x} \psi_k(x_1, x_2, x_3)$ mit den entsprechenden Linearkombinationen $\psi_k(x_i)$ der Funktionen $F(x_i)$. Dabei ist $\int \mathcal{D}x = \int dx_1 dx_2 dx_3 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)$ die Integration über die longitudinalen Impulsanteile x_i der Quarks im Nukleon. Dementsprechend kann man die Korrelationsfunktion schreiben als:

$$\begin{aligned}
 \Pi_a(P, q) &= \frac{1}{4} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \mathcal{D}x e^{i(q+k-x_2 P) \cdot x} \frac{1}{m_c^2 - k^2} \\
 &\cdot \left\{ k_\nu \sum_k \psi_k(x_i) \left(\tilde{\Gamma} \gamma^\nu \Gamma_a C^T X_k^T C \Gamma Y_k N(p) \right) \right. \\
 &\quad \left. + m_c \sum_k \psi_k(x_i) \left(\tilde{\Gamma} \Gamma_a C^T X_k^T C \Gamma Y_k N(p) \right) \right\}. \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

Nach Berechnung dieser Strukturen müssen nun die aus der Definition der Funktionen F in Tabelle 3.1 stammenden Faktoren $\frac{1}{P \cdot x}$ sowie Potenzen von x^μ behandelt werden. Letztere werden wie in Abschnitt 3.2 durch eine Ersetzung $x^\mu \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial q_\mu}$ in Ableitungen umgewandelt, die dann später zu zweiten und dritten Potenzen des Propagatorenenners führen können. Die ggf. auftretenden Faktoren $\frac{1}{P \cdot x}$ und $\frac{1}{(P \cdot x)^2}$ können wiederum durch Ausführen von ein oder zwei partiellen Integrationen in der Variablen x_2 entfernt werden. (Für genaue Details zu diesem Verfahren siehe etwa [130].) Der Integrand im obigen Ausdruck hängt zudem nur von der Variablen x_2 ab und da über die δ -Funktion $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ gesetzt wird, kann bereits über

x_1 integriert werden. Für die Funktionen $F_k(x_1, x_2, x_3)$ definiert man daher:

$$\tilde{F}_k(x_2) = \int_0^{1-x_2} dx_1 F_k(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2). \quad (5.13)$$

Die durch die partielle(n) Integration(en) entstehenden Integrale können ausgedrückt werden durch die Definitionen:

$$\tilde{\tilde{F}}_k(x_2) = \int_1^{x_2} dx'_2 \int_0^{1-x'_2} dx_1 F_k(x_1, x'_2, 1 - x_1 - x'_2), \quad (5.14)$$

$$\tilde{\tilde{F}}_k(x_2) = \int_1^{x_2} dx'_2 \int_1^{x'_2} dx''_2 \int_0^{1-x''_2} dx_1 F_k(x_1, x''_2, 1 - x_1 - x''_2). \quad (5.15)$$

Nach Durchführung dieser Schritte kann schließlich die Impuls- und Ortsraumintegration ausgeführt werden, was zur Ersetzung $k^\mu \rightarrow q^\mu - x_2 P^\mu$ führt und den Propagatorenner auf die folgende Gestalt bringt:

$$\frac{1}{m_c^2 - (x_2 P - q)^2} = \frac{1}{m_c^2 - x_2(P - q)^2 - \bar{x}_2 q^2 + x_2 \bar{x}_2 m_N^2} := \frac{1}{D((P - q)^2, q^2, x_2)}, \quad (5.16)$$

wobei auch hier die Abkürzung $\bar{x}_2 = (1 - x_2)$ definiert wird. Es verbleibt als einziges die Integration über die Variable x_2 und die sich so ergebende Korrelationsfunktion kann schließlich in ihre einzelnen Dirac-Strukturen, wie sie in den Gleichungen (5.3), (5.4) und (5.5) gezeigt wurden, aufgespalten werden. Für die sich so ergebenden Funktionen $\Pi_j^{(i)}((P - q)^2, q^2)$, $\tilde{\Pi}_j^{(i)}((P - q)^2, q^2)$ und $\bar{\Pi}_j^{(i)}((P - q)^2, q^2)$, wobei j den Index der in den obigen Gleichungen definierten Dirac-Strukturen darstellt, ergibt sich schließlich die folgende allgemeine Gestalt:

$$\begin{aligned} \Pi_j^{(i)}((P - q)^2, q^2) &= \frac{m_c}{4} \sum_{n=1,2,3} \int_0^1 dx \frac{\omega_{jn}^{(i)}(x_2, (P - q)^2, q^2)}{[D((P - q)^2, q^2, x_2)]^n}, \\ \tilde{\Pi}_j^{(i)}((P - q)^2, q^2) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1,2,3} \int_0^1 dx \frac{\tilde{\omega}_{jn}^{(i)}(x_2, (P - q)^2, q^2)}{[D((P - q)^2, q^2, x_2)]^n}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

sowie die letzte Gleichung entsprechend für $\bar{\Pi}_j^{(i)}((P - q)^2, q^2)$. Die einzelnen Koeffizientenfunktionen für die verschiedenen interpolierenden- und Übergangs-Ströme sind dabei umfangreiche Ausdrücke als von x_2 , $(P - q)^2$ und q^2 abhängige Linearkombinationen der einzelnen Verteilungsamplituden. Sie sind vollständig in Anhang C aufgelistet und stellen ein Hauptergebnis dieser Arbeit dar.

Es ist dabei zu beachten, dass die obige Struktur der Korrelationsfunktion eine gewisse Freiheit in der Darstellung dieser Funktionen erlaubt, da Potenzen von $(P - q)^2$ und von q^2 im Zähler auch auf passende Weise mit einer Potenz des Nenners

gekürzt werden können (analog zu (5.8)) und somit ggf. in geringere Potenzen überführt werden können. Dies ist hier durch die folgenden Beziehungen möglich:

$$\begin{aligned}
 (P - q)^2 &= s(x_2) - \frac{1}{x_2} D, \\
 ((P - q)^2)^2 &= s(x_2)^2 - \frac{1}{x_2} D (s(x_2) + (P - q)^2) \\
 &= s(x_2)^2 - \frac{2}{x_2} D s(x_2) + \frac{D^2}{x_2^2}, \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

mit dem in (5.16) definierten Nenner und der Funktion

$$s(x_2) = \frac{1}{x_2} (m_c^2 - \bar{x}_2 q^2 + x_2 \bar{x}_2 m_N^2). \tag{5.19}$$

Es gibt also keine einheitliche Form für diese Darstellung, sondern es können verschiedene, äquivalente Ausdrücke existieren. Welchen von diesen man wählt, wird insbesondere durch die praktische Bedeutung in weiteren Rechnungen motiviert. In den im Anhang angegebenen Formeln wurden alle Potenzen von $(P - q)^2$ so weit mit den Nennern gekürzt, wie dies möglich ist. Sie tauchen nur noch in den $\omega_{j1}^{(i)}$ -Funktionen auf und die q^2 -Terme werden beibehalten. Dies stellt sich als vorteilhaft bei der expliziten Anwendung der Borel-Transformation auf die Ausdrücke heraus, die durch $(P - q)^2$ -Terme verkompliziert würde.

5.2.3. Berechnung der Formfaktoren

Mit den soeben angegebenen Ausdrücken für die Korrelationsfunktionen lassen sich nun die Summenregeln durch Vergleich mit den hadronischen Darstellungen aus Abschnitt 5.2.1 aufstellen. Für den pseudoskalaren Übergangstrom liest man aus (5.6) ab, dass die beiden Dirac-Strukturen $\Pi_1^{(i)}$ und $\Pi_2^{(i)}$ jeweils proportional zu den beiden Formfaktoren $G(q^2)$ und $\tilde{G}(q^2)$ sind. Diese Relationen sind linear unabhängig und es ist daher möglich, diese beiden Formfaktoren zu den verschiedenen Paritäten eindeutig durch die beiden Dirac-Strukturen zu bestimmen, wobei hier nur der gesuchte Formfaktor $G(q^2)$ angegeben wird:

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_{\Lambda_c}^{(i)} m_{\Lambda_c} (m_{\Lambda_c} + m_N) (m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*})}{m_{\Lambda_c}^2 - (P - q)^2} G(q^2) + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho_1^{(i)}(s, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} + m_N) \rho_2^{(i)}(s, q^2)}{s - (P - q)^2} \\
 = \left[\Pi_1^{(i)}((P - q)^2, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} + m_N) \Pi_2^{(i)}((P - q)^2, q^2) \right]. \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

Die entsprechende Formel für $\tilde{G}(q^2)$ kann leicht gefunden werden und wird hier nicht mehr angeführt.

Durch Darstellen des Resultats der Lichtkegelentwicklung in Dispersionsform und Anwendung der Quark-Hadron-Dualität, welche in diesem Fall die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} & \int_{s_0^h}^{\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \left[\rho_1^{(i)}(s, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} + m_N) \rho_2^{(i)}(s, q^2) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \left[\text{Im}_s \Pi_1^{(i)}(s, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} + m_N) \text{Im}_s \Pi_2^{(i)}(s, q^2) \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

werden die Kontinuumsbeiträge unter Einführung des entsprechenden Parameters s_0 gegeneinander aufgehoben.

Nach Borel-Transformation der Variablen $(P - q)^2$ zu M^2 ergibt sich schließlich die Summenregel für $G(q^2)$ zu:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\Lambda_c}^{(i)} m_{\Lambda_c} (m_{\Lambda_c} + m_N) (m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*}) G(q^2) e^{-m_{\Lambda_c}^2/M^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{m_c^2}{m_c^2}}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \left[\text{Im}_s \Pi_1^{(i)}(s, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} + m_N) \text{Im}_s \Pi_2^{(i)}(s, q^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Für die Vektor-Formfaktoren ergibt sich aus (5.7) ein lineares Gleichungssystem zwischen den sechs Dirac-Strukturen $\tilde{\Pi}_{1,\dots,6}^{(i)}$ und den sechs Formfaktoren $f_{1,2,3}, \tilde{f}_{1,2,3}$, woraus letztere bestimmt werden können. Auch hier werden wieder nur die drei Formfaktoren zu den positiven Paritätszuständen angegeben:

$$\begin{aligned} & 2\lambda_{\Lambda_c}^{(i)} m_{\Lambda_c} (m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*}) f_1(q^2) e^{-m_{\Lambda_c}^2/M^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{m_c^2}{m_c^2}}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \left[(m_{\Lambda_c} + m_N) \left(\text{Im}_s \tilde{\Pi}_1^{(i)}(s, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} - m_N) \text{Im}_s \tilde{\Pi}_2^{(i)}(s, q^2) \right) \right. \\ & \quad \left. + 2\text{Im}_s \tilde{\Pi}_3^{(i)}(s, q^2) + 2(m_{\Lambda_c^*} - m_{\Lambda_c}) \text{Im}_s \tilde{\Pi}_4^{(i)}(s, q^2) \right], \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} & 2\lambda_{\Lambda_c}^{(i)} (m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*}) f_2(q^2) e^{-m_{\Lambda_c}^2/M^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{m_c^2}{m_c^2}}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \left[\text{Im}_s \tilde{\Pi}_1^{(i)}(s, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} - m_N) \text{Im}_s \tilde{\Pi}_2^{(i)}(s, q^2) - 2\text{Im}_s \tilde{\Pi}_4^{(i)}(s, q^2) \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}
 & 2\lambda_{\Lambda_c}^{(i)}(m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*})f_3(q^2)e^{-m_{\Lambda_c}^2/M^2} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{m_c^2}{m_c^2}}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \left[\text{Im}_s \tilde{\Pi}_1^{(i)}(s, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} - m_N) \text{Im}_s \tilde{\Pi}_2^{(i)}(s, q^2) \right. \\
 & \quad \left. + 2\text{Im}_s \tilde{\Pi}_4^{(i)}(s, q^2) + 2\text{Im}_s \tilde{\Pi}_5^{(i)}(s, q^2) - 2(m_{\Lambda_c^*} - m_N) \text{Im}_s \tilde{\Pi}_6^{(i)}(s, q^2) \right]. \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Formfaktoren $g_{1,2,3}(q^2)$ zum Axialvektor-Übergangstrom können durch die entsprechenden Ersetzungen $\text{Im}_s \tilde{\Pi}_j^{(i)} \rightarrow \text{Im}_s \bar{\Pi}_j^{(i)}$ und $m_N \rightarrow -m_N$ aus den obigen erhalten werden und auch hier sind die Definitionen für Σ_c völlig analog.

Zur numerischen Auswertung der Summenregeln werden die selben beiden Methoden wie für $D \rightarrow \pi/K$ -Formfaktoren, die in Abschnitt 4.1.2 beschrieben wurden, genutzt. Die numerische Integration in der komplexen Ebene kann dabei direkt mit den bisher vorgestellten Ausdrücken durchgeführt werden. Für das Erhalten der Dispersionsdarstellung mittels Substitution der Variablen $(P - q)^2$ zu $s(x_2)$ (angegeben in Gl. (5.19)) und die anschließende explizite Anwendung der Quark-Hadron-Dualität und Borel-Transformation, das der Herleitung von (3.90) analog ist, ergeben sich hier die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 \int dx \frac{\varrho(x)}{D} &\rightarrow \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x} \varrho(x) \exp\left(-\frac{s(x)}{M^2}\right), \\
 \int dx \frac{\varrho(x)}{D^2} &\rightarrow \frac{1}{M^2} \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x^2} \varrho(x) \exp\left(-\frac{s(x)}{M^2}\right) + \frac{\varrho(x_0) e^{-s_0/M^2}}{m_c^2 + x_0^2 m_N^2 - q^2}, \\
 \int dx \frac{\varrho(x)}{D^3} &\rightarrow \frac{1}{2M^4} \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x^3} \varrho(x) \exp\left(-\frac{s(x)}{M^2}\right) + \frac{1}{2M^2} \frac{\varrho(x_0) e^{-s_0/M^2}}{x_0 (m_c^2 + x_0^2 m_N^2 - q^2)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{x_0^2 e^{-s_0/M^2}}{(m_c^2 + x_0^2 m_N^2 - q^2)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\varrho(x)}{x (m_c^2 + x^2 m_N^2 - q^2)} \right) \Bigg|_{x=x_0}. \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$x(s) = \frac{1}{2m_N^2} \left[m_N^2 + q^2 - s + \sqrt{(s - q^2 - m_N^2)^2 + 4m_N^2(m_c^2 - q^2)} \right] \quad (5.27)$$

und $x_0 = x(s_0)$. (Dies ist eine Verallgemeinerung der in [39] angegebenen Relationen.) Ferner ist es nötig, dass in den entsprechenden expliziten Ausdrücken für die Korrelationsfunktion *alle* Terme von $(P - q)^2$ gemäß (5.18) ersetzt wurden. Die Übereinstimmung dieser beiden unabhängigen Methoden zur numerischen Auswertung wurde für alle Ergebnisse überprüft und stellt sicher, dass dieser Schritt fehlerfrei durchgeführt wurde.

5.2.4. Berechnung der hadronischen Kopplungskonstanten

Die hadronische Darstellung der Korrelationsfunktion durch die in (2.28) definierten Kopplungskonstanten ist ähnlich zu den Formfaktoren möglich, indem man hier sowohl einen Satz hadronischer Zwischenzustände für das Λ_c - bzw. Σ_c -Baryon (beide Paritätszustände) einfügt, als auch für das $D^{(*)}$ -Meson und die Definitionen der entsprechenden Zerfallskonstanten nutzt. Man beschreibt so beide interpolierende Ströme durch jeweilige Spektraldichten und erhält eine *doppelte Dispersionsrelation* in den beiden Variablen $(P - q)^2$ und q^2 . Für die Korrelationsfunktion mit dem pseudoskalaren Übergangstrom ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \Pi_5^{(i)}(P, q) &= \frac{i\lambda_{\Lambda_c}^{(i)} m_D^2 f_D m_{\Lambda_c} g_{\Lambda_c ND}}{(m_c + m_u)[m_{\Lambda_c}^2 - (P - q)^2](m_D^2 - q^2)} \left[(m_{\Lambda_c} - m_N) - \not{q} \right] \gamma_5 u_N(P) \\ &+ \frac{i\lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)} m_D^2 f_D m_{\Lambda_c^*} g_{\Lambda_c^* ND}}{(m_c + m_u)[m_{\Lambda_c^*}^2 - (P - q)^2](m_D^2 - q^2)} \left[(m_{\Lambda_c^*} + m_N) + \not{q} \right] \gamma_5 u_N(P) \\ &+ \int_{s_0^h}^{+\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \int_{s_0^h}^{+\infty} \frac{ds'}{s' - (P - q)^2} \rho_5^h(s, s') u_N(P), \quad (5.28) \end{aligned}$$

wobei $\rho_5^h(s, s')$ eine entsprechende Spektralfunktion in zwei Variablen ist.

Für den Vektorstrom ergibt sich durch analoges Vorgehen die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \Pi_\mu(P, q) &= \frac{m_{\Lambda_c} m_{D^*} f_{D^*} \lambda_{\Lambda_c}^{(i)}}{[m_{\Lambda_c}^2 - (P - q)^2](m_{D^*}^2 - q^2)} \left\{ -2g_{\Lambda_c ND^*}^V P_\mu + 2\frac{g_{\Lambda_c ND^*}^T}{m_{\Lambda_c} + m_N} P_\mu \not{q} \right. \\ &- (g_{\Lambda_c ND^*}^V - g_{\Lambda_c ND^*}^T) \left[(m_{\Lambda_c} - m_N) \gamma_\mu + \gamma_\mu \not{q} \right] \\ &+ \left[\left(2 - \frac{m_{\Lambda_c}^2 - m_N^2}{m_{D^*}^2} \right) g_{\Lambda_c ND^*}^V - g_{\Lambda_c ND^*}^T \right] q_\mu \\ &+ \left. \left[-\frac{g_{\Lambda_c ND^*}^T}{m_{\Lambda_c} + m_N} + \frac{m_{\Lambda_c} - m_N}{m_{D^*}^2} g_{\Lambda_c ND^*}^V \right] q_\mu \not{q} \right\} u_N(P) \\ &+ \frac{m_{\Lambda_c^*} m_{D^*} f_{D^*} \lambda_{\Lambda_c^*}^{(i)}}{[m_{\Lambda_c^*}^2 - (P - q)^2](m_{D^*}^2 - q^2)} \left\{ 2g_{\Lambda_c^* ND^*}^V P_\mu - 2\frac{g_{\Lambda_c^* ND^*}^T}{m_{\Lambda_c^*} + m_N} P_\mu \not{q} \right. \\ &- \left[g_{\Lambda_c^* ND^*}^V + \frac{m_{\Lambda_c^*} - m_N}{m_{\Lambda_c^*} + m_N} g_{\Lambda_c^* ND^*}^T \right] \left[(m_{\Lambda_c^*} + m_N) \gamma_\mu - \gamma_\mu \not{q} \right] \\ &+ \left[\left(-2 + \frac{m_{\Lambda_c^*}^2 - m_N^2}{m_{D^*}^2} \right) g_{\Lambda_c^* ND^*}^V - \frac{m_{\Lambda_c^*} - m_N}{m_{\Lambda_c^*} + m_N} g_{\Lambda_c^* ND^*}^T \right] q_\mu \\ &+ \left. \left[\frac{g_{\Lambda_c^* ND^*}^T}{m_{\Lambda_c^*} + m_N} + \frac{m_{\Lambda_c^*} + m_N}{m_{D^*}^2} g_{\Lambda_c^* ND^*}^V \right] q_\mu \not{q} \right\} u_N(P) \\ &+ \int_{s_0^h}^{+\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \int_{s_0^h}^{+\infty} \frac{ds'}{s' - (P - q)^2} \rho_\mu^h(s, s') u_N(P). \quad (5.29) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Darstellungen können die hadronischen Kopplungskonstanten nun wieder analog zum vorigen Abschnitt durch Linearkombination der Dirac-Strukturen der Korrelationsfunktionen extrahiert werden. (Für den Vektorstrom hat man nun sogar sechs Strukturen zur Bestimmung von vier Kopplungskonstanten, es reicht also, vier der Strukturen zu verwenden.) Löst man nach den Kopplungskonstanten auf, so ergeben sich hier die selben Linearkombinationen wie bei den Formfaktoren:

$$\begin{aligned} & \frac{m_{\Lambda_c}(m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*})m_D^2 f_D \lambda_{\Lambda_c}^{(i)} g_{\Lambda_c ND}}{[m_{\Lambda_c}^2 - (P - q)^2](m_{D^*}^2 - q^2)} + \int_{s_0^h}^{+\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \int_{s_0^{h'}}^{+\infty} \frac{ds'}{s' - q^2} \rho_g^h(s, s') \\ &= \Pi_1((P - q)^2, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} + m_N) \Pi_2((P - q)^2, q^2), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{m_{\Lambda_c}(m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*})m_{D^*} f_{D^*} \lambda_{\Lambda_c}^{(i)} g_{\Lambda_c ND^*}^V}{[m_{\Lambda_c}^2 - (P - q)^2](m_{D^*}^2 - q^2)} + \int_{s_0^h}^{+\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \int_{s_0^{h'}}^{+\infty} \frac{ds'}{s' - q^2} \rho_{g^V}^h(s, s') \\ &= -\frac{1}{2} \left[(m_{\Lambda_c} + m_N) \left(\bar{\Pi}_1((P - q)^2, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} - m_N) \bar{\Pi}_2((P - q)^2, q^2) \right) \right. \\ & \quad \left. + 2\bar{\Pi}_3((P - q)^2, q^2) + 2(m_{\Lambda_c^*} - m_{\Lambda_c}) \bar{\Pi}_4((P - q)^2, q^2) \right], \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{m_{\Lambda_c}(m_{\Lambda_c} + m_{\Lambda_c^*})m_{D^*} f_{D^*} \lambda_{\Lambda_c}^{(i)} g_{\Lambda_c ND^*}^T}{(m_{\Lambda_c} + m_N)[m_{\Lambda_c}^2 - (P - q)^2](m_{D^*}^2 - q^2)} + \int_{s_0^h}^{+\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \int_{s_0^{h'}}^{+\infty} \frac{ds'}{s' - q^2} \rho_{g^T}^h(s, s') \\ &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\Pi}_1((P - q)^2, q^2) - (m_{\Lambda_c^*} - m_N) \bar{\Pi}_2((P - q)^2, q^2) - 2\bar{\Pi}_4((P - q)^2, q^2) \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

mit entsprechend definierten Spektralfunktionen. Um nun beide Darstellungen mit Hilfe der Quark-Hadron-Dualität vergleichen zu können, ist es nötig, das Resultat der Operatorproduktentwicklung jeweils auf der rechten Seite der obigen Gleichungen in die Form einer doppelten Spektraldichte zu bringen. Eine direkte Bildung des Imaginärteils in Bezug auf beide Variablen s und s' bzw. eine doppelte Integration durch Verformung des Integrationsweges analog zu Abschnitt 4.1.2 erweist sich aber als wesentlich komplizierter als im eindimensionalen Fall und konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden. Stattdessen ist es möglich, mit einer entsprechenden Substitutionsmethode die Spektraldichte auf analytischem Wege zu finden. Dieses Vorgehen wurde in [77] zur Berechnung der $DD^*\pi$ -Kopplungskonstante eingeführt, konnte dort allerdings nur mit Einschränkungen verwendet werden, so etwa nur für die führenden Twist-Terme und den dortigen Fall des als masselos angenommenen Pions.

Dazu wird in den jeweiligen aus der Lichtkegelentwicklung erhaltenen Ausdrücken für die Korrelationsfunktion die Substitution aus den Gleichungen (5.19) durchge-

führt. Für die führende Potenz des Nenners erhält man damit die allgemeine Form:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx_2 \frac{\rho(x_2)}{m_c^2 - (x_2 P - q)^2} &= \int_{m_c^2}^{\infty} ds \frac{x_2(s) \rho(x_2(s))}{x_2(s)^2 m_N^2 + m_c^2 - q^2} \cdot \frac{1}{(s - (P - q)^2)} \\ &= \int_{m_c^2}^{\infty} ds \frac{\rho(x_2(s))}{\sqrt{(s - q^2 - m_N^2) + 4m_N^2(m_c^2 - q^2)}} \cdot \frac{1}{(s - (P - q)^2)}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

wobei beim letzten Schritt der explizite Ausdruck (5.27) für $x_2(s)$ verwendet wurde und die Funktion $\rho(x_2)$ für die jeweiligen, expliziten Ausdrücke der Korrelationsfunktion steht. Nun wird diese als Potenzreihe $\rho(x_2) = \sum_k a_k x_2^k$ dargestellt und für jeden der sich ergebenden Terme mit Potenzen von $x_2(s)^k$ wird eine weitere Dispersionsdarstellung in der Variablen q^2 und der Integrationsvariablen s' durchgeführt. Dazu wird explizit der Imaginärteil des entsprechenden Ausdrucks gebildet und eventuelle Subtraktionen nicht mit angeschrieben, da sie durch die folgende Borel-Transformation entfernt werden. Man erhält schließlich das Endergebnis:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{x^k}{m_c^2 - (xP - q)^2} &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^k \int_{m_c^2}^{+\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \int_{t_1(s)}^{t_2(s)} \frac{ds'}{s' - q^2} (-1)^{k-j} \\ &\quad \frac{1}{(2m_N^2)^k} C_k^j \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) (s - s' - m_N^2)^{k-j} [(s' - t_1(s))(t_2(s) - s')]^{\frac{j-1}{2}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

mit den Binomialkoeffizienten $C_k^j = \binom{k}{j}$ sowie:

$$t_{1,2}(s) = (s + m_N^2) \mp 2m_N \sqrt{s - m_c^2}. \quad (5.35)$$

Entsprechende Ausdrücke für die zweite und dritte Potenz des Nenners lassen sich ebenfalls gewinnen, erweisen sich aber als wesentlich umfangreicher. Daher wird deren Endergebnis nur in Anhang C.4 angeführt. Auf die so erhaltene Darstellung kann nun die Quark-Hadron-Dualität angewandt werden, die entsprechend in der zweidimensionalen Spektraldichte modelliert werden muss, wie dies beispielsweise schon aus Anwendungen mit Dreipunktsummenregeln bekannt ist. Da die Wahl verschiedener Bereiche möglich ist, stellt dies eine zusätzliche Unsicherheit dar. In dieser Arbeit wird das s -Integral (welches den Λ_c -/ Σ_c -Strom beschreibt) analog zum eindimensionalen Fall durch Einführung eines Parameters s_0 begrenzt und die hadronische und OPE-Spektraldichten mit $s > s_0$ als gleich betrachtet.

Für die Variable s' ist die obere Grenze des oben angegebenen Integrals durch $t_2(s)$ gegeben, die hier beibehalten wird. Dies ist für die numerische Auswertung unerlässlich, da die Entwicklung $\rho(x_2) = \sum_k a_k x_2^k$ zu einer Aufspaltung in verschiedene sich als numerisch sehr groß erweisende Beiträge in diesem Integral führt, die sich im Endergebnis größtenteils gegeneinander aufheben. Die Entfernung bestimmter

Teile dieser Beiträge führt daher zu schwerwiegenden Problemen in der numerischen Auswertung der Integrale und sollte daher hier nicht durchgeführt werden. Da allerdings $t_2(s_0)$ in der typischen Größenordnung eines Abschneideparameters s'_0 für dieses Integral liegt, stellt die Beibehaltung von $t_2(s)$ eine naheliegende Modellierung der Quark-Hadron-Dualität dar.

Auf die durch diese Darstellung erhaltenen Ausdrücke werden schließlich noch zwei Borel-Transformationen $(P - q)^2 \rightarrow M_1^2$ und $(P - q)^2 \rightarrow M_2^2$ durchgeführt und so jeweilige Summenregeln für die hadronischen Kopplungskonstanten in Abhängigkeit von M_1^2, M_2^2, s_0 sowie der entsprechenden Eingabeparameter erhalten.

Abgesehen von dem eben erwähnten Problem stellt die numerische Auswertung der hier zu berechnenden Integrale allgemein eine erhebliche Herausforderung dar, die in diesem Rahmen teilweise nur mit gewissen numerischen Näherungen lösbar ist, wie etwa dem Vermeiden von Singularitäten am Randbereich der Integrationsbereiche durch Einführung eines kleinen Abschneideparameters. Die Probleme treten bei der Potenz $n = 1$ noch gar nicht auf, werden aber um so schwerer, je höher die Potenz des Nenners ist. Da diese höheren Potenzen jedoch unterdrückt sind, ist dies eine gerechtfertigte Näherung und die Korrektheit der unten angegebenen Ergebnisse wurde jeweils eingehend geprüft.

Die im Anhang angegebenen Ausdrücke sind zudem so formuliert, dass gewisse solcher Probleme nicht auftreten. Ferner ist bei allen Termen von q^2 und $(P - q)^2$, die in den Spektralfunktionen auftreten, wieder - analog zu den vorigen Kapiteln - jeweils eine Kürzung mit dem Nenner der Dispersionsdarstellung vorzunehmen, wobei die entstehenden Zusatzterme von der Borel-Transformation entfernt werden. Die Spektralfunktionen müssen vorher zusätzlich so umgeformt worden sein, dass keine negativen Potenzen von x_2 auftreten, da eine Darstellung solcher Terme als doppelte Dispersionsrelation erheblich komplizierter wäre, als die hier vorgestellten. Schließlich ist noch zu erwähnen, dass Terme $\sim \ln x_2$ nicht geeignet als Potenzreihe dargestellt werden können und daher in der hier durchgeführten Auswertung weggelassen werden. Diese liefern jedoch nur einen sehr kleinen Beitrag zum Integral (sie treten zudem nur in x^2 -Korrekturen auf) und auch dies ist daher eine sehr gute Näherung.

Die durch die numerische Auswertung bedingte Unsicherheit muss hier in Betracht gezogen werden, erweist sich jedoch im Höchstfall als in der Größenordnung weniger %, bleibt also im Vergleich zur durch einige Eingabeparameter verursachten Unsicherheit klein. Eine Untersuchung der eben genannten Probleme könnte allerdings die Genauigkeit zukünftiger Ergebnisse verbessern.

5.3. Numerische Auswertung der Lichtkegel-Summenregeln und Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Eingabeparameter für die Summenregeln spezifiziert und die Ergebnisse der Formfaktoren und Kopplungskonstanten angegeben. Die charm-Quark-Masse wurde bereits in Gl. (3.30) angegeben, genauso wie die Eingabewerte für die Zweipunktsummenregeln der Λ_c - und Σ_c -Zerfallskonstanten aus Abschnitt 3.1, die für diese Rechnung in der dort angegebenen Ordnung α_s^0 aus Konsistenzgründen zur ebenfalls in dieser Genauigkeit durchgeführten Lichtkegel-Summenregel-Rechnung verwendet werden. Die Baryonmassen wurden in Abschnitt 3.1.2 spezifiziert.

Für die Nukleonmasse m_N wird die Protonmasse $m_p = 0,938 \text{ GeV}$ [17] verwendet. Die führenden nichtperturbativen Parameter der Nukleon-Lichtkegelverteilungsamplituden wurden in [86] aus Zweipunktsummenregeln angegeben und ihre Werte bei der Skala $\mu = 1 \text{ GeV}$ sind gut bekannt:

$$f_N = (5,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2, \quad \lambda_1 = -(27 \pm 9) \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2, \quad \lambda_2 = (54 \pm 19) \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^2. \quad (5.36)$$

Die weiteren fünf Parameter höherer Ordnung sind mit geringerer Genauigkeit bekannt. In dieser Arbeit wird das in [39] entwickelte Modell verwendet, dass durch Anpassung an Lichtkegel-Summenregelresultate der elektromagnetischen Proton-Formfaktoren an experimentelle Daten gewonnen wurde, und sich zudem an Zweipunktsummenregeln orientiert:

$$A_1^u = 0,13, \quad V_1^d = 0,30, \quad f_1^d = 0,33, \quad f_1^u = 0,09, \quad f_2^d = 0,25. \quad (5.37)$$

Auch diese Werte sind bei $\mu = 1 \text{ GeV}$ gegeben. Die führenden Parameter haben anomale Dimensionen $\gamma_0^{(f_N)} = \frac{2}{3}$ und $\gamma_0^{(\lambda_1)} = \gamma_0^{(\lambda_2)} = -2$ [131]. Die anderen Parameter mischen unter Skalentransformationen mit diesen und untereinander. Die entsprechenden Ausdrücke können aus [131] sowie Anhang C von [88] entnommen werden. Als Faktorisierungsskala für die Verteilungsamplituden (die auch als Renormierungsskala für die c -Quark-Masse verwendet wird) wird hier der durch die bereits in Abschnitt 3.1 angegebene Relation $\mu \sim \sqrt{m_{\Lambda_c}^2 - m_c^2}$ [63] motivierte Wert $\mu = 1,5 \text{ GeV}$ verwendet.

Die Bestimmung der Parameter M_1^2 und s_0 im Kanal des interpolierenden Λ_c -/ Σ_c -Stroms wird wieder wie in den vorigen Kapiteln durch Betrachtung der Kontinuumsbeiträge, der Twist-Hierarchie sowie der Reproduktion der Λ_c -/ Σ_c -Masse aus der Korrelationsfunktion durchgeführt. Es ergibt sich ein Borel-Fenster von $M_1^2 \in [5, 0; 10, 0] \text{ GeV}^2$ sowie für den Kontinuumsparameter $s_0^{\Lambda_c} = 10,0 \pm 0,5 \text{ GeV}^2$ die in guter Näherung für die $\Lambda_c \rightarrow N$ - und $\Sigma_c \rightarrow N$ -Übergänge als gleich verwendet werden können. Zur Beschreibung des $D^{(*)}$ -Mesons in der doppelten Spektraldichte werden für das D -Meson der Borel-Parameter $M_2^2 = (4,5 \pm 1,5) \text{ GeV}^2$ sowie für D^*

| | $\eta_{\Lambda_c}^{(\mathcal{A})}$ | $\eta_{\Lambda_c}^{(\mathcal{P})}$ | $\eta_{\Sigma_c}^{(\mathcal{I})}$ | $\eta_{\Sigma_c}^{(\mathcal{T})}$ |
|---------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $G(0)$ | $0,39_{-0,09}^{+0,11}$ | $0,48_{-0,13}^{+0,13}$ | $0,066_{-0,032}^{+0,035}$ | $0,061_{-0,011}^{+0,011}$ |
| $f_1(0)$ | $0,46_{-0,11}^{+0,15}$ | $0,59_{-0,16}^{+0,15}$ | $-0,22_{-0,07}^{+0,07}$ | $-0,23_{-0,05}^{+0,04}$ |
| $f_2(0)$ | $-0,32_{-0,07}^{+0,08}$ | $-0,43_{-0,12}^{+0,13}$ | $-0,24_{-0,05}^{+0,05}$ | $-0,25_{-0,06}^{+0,06}$ |
| $g_1(0)$ | $0,49_{-0,11}^{+0,14}$ | $0,55_{-0,15}^{+0,14}$ | $0,11_{-0,05}^{+0,05}$ | $0,060_{-0,008}^{+0,007}$ |
| $g_2(0)$ | $-0,20_{-0,06}^{+0,09}$ | $-0,16_{-0,05}^{+0,08}$ | $-0,002_{-0,044}^{+0,054}$ | $-0,030_{-0,039}^{+0,039}$ |
| g_{H_cND} | $13,8_{-4,1}^{+5,2}$ | $10,7_{-4,3}^{+5,3}$ | $1,3_{-0,9}^{+1,0}$ | $1,3_{-0,8}^{+1,2}$ |
| $g_{H_cND}^V$ | $-7,9_{-3,3}^{+2,7}$ | $-5,8_{-2,5}^{+2,1}$ | $1,0_{-0,6}^{+1,3}$ | $0,74_{-0,45}^{+1,08}$ |
| $g_{H_cND}^T$ | $4,7_{-2,0}^{+2,7}$ | $3,6_{-1,8}^{+2,9}$ | $2,1_{-1,0}^{+1,9}$ | $1,8_{-0,8}^{+1,6}$ |

Tabelle 5.1.: Die Ergebnisse für die Übergangsformfaktoren von charm-Baryonen zu Nukleonen bei $q^2 = 0$ und für die Kopplungskonstanten unter Verwendung der verschiedenen interpolierenden Ströme. H_c steht dabei jeweils für Λ_c bzw. Σ_c .

der Wert $M_2^2 = (5, 0 \pm 1, 5) \text{ GeV}^2$ verwendet, die in [75] erfolgreich für $B \rightarrow D^{(*)}$ -Zerfälle genutzt wurden und sich auch aus einer entsprechenden Skalenbetrachtung wie in Abschnitt 3.1 ergeben. Aufgrund der Struktur der doppelten Spektraldichte ist hierfür kein Kontinuumsparameter $s_0^{D^{(*)}}$ erforderlich.

Die mit diesen Eingabeparametern berechneten Werte für die Formfaktoren $\Lambda_c(\Sigma_c) \rightarrow p$ bei $q^2 = 0$ und die Kopplungskonstanten sind in Tabelle 5.1 angegeben. Die Unsicherheitsbereiche wurden dabei analog zu den vorigen Kapiteln durch Variation der Eingabeparameter und quadratische Addition der Einzelabweichungen bestimmt.

Ein wichtiges Ergebnis ist, dass sich für die verschiedenen interpolierenden Ströme jeweils innerhalb des Unsicherheitsbereiches verträgliche Werte für die Formfaktoren und Kopplungskonstanten ergeben. Dies ist ein sehr wichtiger Konsistenztest der hier durchgeführten Rechnung, insbesondere der Extraktion des positiven Pa-

5.3. Numerische Auswertung der Lichtkegel-Summenregeln und Ergebnisse

ritätszustands aus den verschiedenen Strukturen der Korrelationsfunktion. Es wurde überprüft, dass sich ohne diesen Schritt drastische Unterschiede zwischen den entsprechenden Größen ergeben.

Ein weiterer Konsistenztest besteht in den approximativen Relationen

$$\begin{aligned} \frac{f_1^{H_c \rightarrow p}(q^2)}{f_2^{H_c \rightarrow p}(q^2)} &\approx \frac{m_{H_c} + m_N}{m_{H_c}} \frac{g_{H_c ND}^V}{g_{H_c ND}^T}, \\ \frac{G^{\Lambda_c \rightarrow p}(q^2)}{G^{\Sigma_c \rightarrow p}(q^2)} &\approx \frac{m_{\Sigma_c} + m_N}{m_{\Lambda_c} + m_N} \frac{g_{\Lambda_c ND}}{g_{\Sigma_c ND}} \end{aligned} \quad (5.38)$$

zwischen den Formfaktoren und Kopplungskonstanten (die jeweils durch weitgehend voneinander unabhängige algebraische Verfahren aus der Korrelationsfunktion extrahiert wurden). Diese folgen aus den Dispersionsdarstellungen (2.41) für die Formfaktoren. Man kann leicht überprüfen, dass die genannten Ergebnisse diese Relationen erfüllen, wenn auch die hier erreichte Genauigkeit relativ gering ist.

Kapitel 6.

Zusammenfassung und Diskussion

*„Arbeiten sind angenehm, wenn sie getan sind.“
- Marcus Tullius Cicero*

In der vorliegenden Dissertation wurde die Methode der Lichtkegelsummenregeln zur Bestimmung nichtperturbativer Größen verwendet, die Hadronen mit einem charm-Quark beschreiben. Aufbauend auf vorangehenden Studien wurden dabei unter anderem verschiedene Methoden zur Berechnung und Auswertung weiterentwickelt, sowie eine eingehende Prüfung und Aktualisierung der bereits bekannten Ergebnisse vorgenommen. Die Bestätigung und numerische Auswertung der sich im Rahmen der Lichtkegelsummenregeln ergebenden analytischen Ausdrücke (die größtenteils unter Verwendung der Software *Wolfram Mathematica* durchgeführt wurde), stellte dabei eine große Herausforderung dar und die Ergebnisse wurden jeweils durch unabhängige Berechnungen bestätigt.

Im Folgenden werden kurz die Ergebnisse der beiden in der Arbeit vorgestellten Projekte zusammengefasst und mögliche Aussichten auf zukünftige Weiterentwicklungen gegeben.

6.1. Diskussion der Ergebnisse für die semileptonischen D -Zerfälle

Die Formfaktoren für die semileptonischen Zerfälle $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ und $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$ sind in dieser Arbeit berechnet worden. Das Hauptergebnis dieser Untersuchung ist $f_{D\pi}^+(0) = 0,67_{-0,07}^{+0,10}$ und $f_{DK}^+(0) = 0,75_{-0,08}^{+0,11}$. Weiterhin war es auch möglich, deren funktionale Form im kompletten physikalischen Bereich durch die Verwendung entsprechender Parametrisierungen zu bestimmen. Dies bestätigt nicht nur Ergebnisse anderer Methoden, wie der Gitter-QCD, sondern erlaubt auch die Extraktion der CKM -Matrixelemente aus aktuellen Daten der CLEO-Kollaboration. Der in Gl. (4.24) angegebene Wert für $|V_{cd}|$ sowie der sich daraus und aus dem Verhältnis $|V_{cd}|/|V_{cs}|$ aus (4.16) ergebende Wert, die hier mit einer Genauigkeit von

unter 10% bestimmt werden konnten, werden mit den aktuellen Mittelwerten der Particle Data Group aus verschiedenen Bestimmungsverfahren verglichen:

- *Ergebnisse dieser Arbeit:*

$$|V_{cd}| = 0,225^{+0,017}_{-0,013} \qquad |V_{cs}| = 0,953^{+0,09}_{-0,08} ,$$

- *Aktuelle Mittelwerte der Particle Data Group [17]:*

$$|V_{cd}| = 0,230 \pm 0,011 \qquad |V_{cs}| = 1,023 \pm 0,036 .$$

Man erkennt, dass die hier erreichte Genauigkeit an die der heute präzisesten Bestimmungen herankommt. Als weitere mögliche Verbesserung für die Zukunft ist insbesondere die Berechnung der Twist 5-Terme in führender Ordnung der Störungstheorie naheliegend, da diese die Korrekturterme zum Twist 3-Matrixelement darstellen, welche im Gegensatz zu den Twist 4-Termen als Korrektur zu Twist 2 noch unbekannt sind.

Die hier erreichte Genauigkeit ist dem bereits weit entwickelten Stand dieser Analysen zu verdanken, deren Präzision hier durch Verwendung neuester experimenteller Resultate sowie aktualisierter Eingabewerte (Quarkmassen und Parameter der Lichtkegelverteilungsamplituden) noch verbessert werden konnte. Die Verwendung der Parametrisierung zur Extrapolation der Formfaktoren aus Lichtkegelsummenregeln wurde hier erstmals in diesem Rahmen verwendet und hat sich als erfolgreich herausgestellt. Dies wurde in [104] bereits auf die semileptonischen $B \rightarrow \pi$ -Zerfälle zur Bestimmung von $|V_{ub}|$ angewandt. Da in dieser Arbeit die Lichtkegelsummenregeln für $B \rightarrow \pi$ - und die $B \rightarrow K$ -Zerfälle genutzt wurden, stellt diese Arbeit nicht zuletzt auch einen wichtigen Test für die Anwendbarkeit der Methode dar.

6.2. Diskussion der Ergebnisse für die $\Lambda_c \rightarrow N$ - und $\Sigma_c \rightarrow N$ -Übergänge

Im zweiten Teil der Arbeit wurde das Konzept der Lichtkegelsummenregeln auf die Betrachtung der Übergänge schwerer Baryonen in leichte ausgedehnt. Ausgangspunkt war dabei die Verwendung der Lichtkegelverteilungsamplituden für das Nukleon, wie sie zur Berechnung elektromagnetischer Nukleon-Formfaktoren benutzt werden. Die Ergebnisse in diesem Bereich sind allerdings ungenauer als für Mesonen, da die Beschreibung von Baryonen technisch komplizierter ist und noch nicht auf so detaillierte Erfahrung zurückgegriffen werden kann. Daher konnte hier nur der führende Dreiteilchen-Fock-Zustand, sowie die führende Ordnung in α_s betrachtet werden. Korrekturen hierzu stellen die wichtigste mögliche Verbesserung für die Zukunft dar. Entsprechende Bemühungen zu deren Bestimmung für Nukleon-Formfaktoren sind bereits begonnen worden, aber mit gewissen Schwierigkeiten

und hohem Aufwand verbunden [132, 133]. (Die α_s -Korrekturen konnten bisher beispielsweise nur in der Näherung $m_N = 0$ berechnet werden.)

Ein wichtiges Element in der hier durchgeführten Berechnung besteht in der verwendeten Methode zur Extraktion der einzelnen Paritätszustände. Sowohl in diesem Punkt wie auch in der Wahl der optimalen interpolierenden Ströme für Baryonen besteht in der Literatur Uneinigkeit. (Beide Komplikationen treten für Mesonen nicht auf.) Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren ermöglicht eine systematische Trennung dieser Zustände, was sich deutlich durch die Übereinstimmung der Ergebnisse von verschiedenen Strömen in allen betrachteten Größen zeigt.

Die hier dargelegten Ergebnisse - insbesondere die Ausdrücke in Anhang C für die Berechnung der Korrelationsfunktion - bilden die Grundlage für weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet. Wichtige zukünftige Betrachtungen sind dabei vor allem die Ausdehnung auf Λ_b -Zerfälle, was durch eine einfache Änderung der Skalen in den verwendeten Ausdrücken möglich ist. Dies bietet die Möglichkeit für phänomenologische Untersuchungen, die auch mit experimentellen Daten für diese Zerfälle verglichen werden können. Auch die Verwendung der Parametrisierungen, wie sie in dieser Arbeit schon für die $D \rightarrow \pi$ und $D \rightarrow K$ -Formfaktoren genutzt wurden, ist hier sehr naheliegend - sowohl zur Beschreibung der Λ_b -Formfaktoren und durch Extrapolation auch der Λ_c - und Σ_c -Formfaktoren. Zudem ist auch noch die Betrachtung für Λ - und Σ - Baryonen durch Anwendung der Formeln und Methoden auf das strange-Quark möglich. Eine weitere Untersuchung der Struktur der Lichtkegelentwicklung, insbesondere der einzelnen Twist-Beiträge, ist ferner eine wichtige Aufgabe.

Schließlich ist das Verfahren zur Extraktion hadronischer Kopplungskonstanten aus einer doppelten Spektraldichte, das aus der vorangehenden Arbeit zur Bestimmung von der $DD^*\pi$ -Kopplungskonstanten [77] stammt, weiterentwickelt worden. Die hier durch eine nichtperturbative Methode direkt aus der QCD erhaltenen Resultate für die $\Lambda_c D^{(*)}N$ - und $\Sigma_c D^{(*)}N$ -Kopplungskonstanten sind wichtige Größen, die beispielsweise zur Modellierung der Produktionswirkungsquerschnitte von Hadronen mit einem charm-Quark bei niedrigen Energien verwendet werden können.

Anhang A.

Zweipunktsummenregeln für D^- , D^{*-} , Λ_c^- und Σ_c^- -Zerfallskonstanten

Hier werden die in dieser Arbeit verwendeten Ausdrücke der Zweipunktsummenregeln für die Zerfallskonstanten der D^- - und D^{*-} -Mesonen, sowie der Λ_c^- - und Σ_c^- -Baryonen angegeben.

A.1. Summenregeln für die Zerfallskonstanten von D^- und D^{*-} -Mesonen

Die Zerfallskonstante f_B des B -Mesons wurde zur Ordnung α_s^2 in [64] berechnet. Das Ergebnis ist bis zur Ordnung α_s^1 ebenfalls noch einmal kompakt im Anhang von [63] zusammengefasst. Die Formeln lassen sich durch die Ersetzung $m_b \rightarrow m_c$ und $B \rightarrow D$ problemlos auch zur Bestimmung von f_D verwenden. Die Berechnungen in Abschnitt 3.1.1, in denen diese Summenregel verwendet wird, umfassen nur die führende Ordnung α_s^0 , daher wird aus Konsistenzgründen hier ebenfalls nur der Anteil zur Ordnung α_s^0 angegeben und verwendet. Die Summenregel aus Gleichung (3.28) wird noch einmal der Vollständigkeit halber angegeben:

$$\begin{aligned} f_D^2 m_D^4 e^{-\frac{m_D^2}{M^2}} &= m_c^2 \left\{ \frac{3}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^{s_0^D} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \right. \\ &+ e^{-\frac{m_c^2}{M^2}} \left\{ -m_c \langle \bar{q}q \rangle \left[1 + \frac{m_0^2}{2M^2} \left(1 - \frac{m_c^2}{2M^2} \right) \right] \right. \\ &\left. \left. + \frac{\langle \alpha_s G^2 \rangle}{12\pi} - \frac{16\pi \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{27 M^2} \left(1 - \frac{m_c^2}{4M^2} - \frac{m_c^4}{12M^4} \right) \right\} \right\}. \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Die Summenregel für das D^{*-} -Meson kann in den Originalarbeiten [134, 135] gefunden werden. Sie sind in [77, 136] bis zur Ordnung α_s^0 , die auch hier verwendet wird, kompakt zusammengefasst und dort wird der Beitrag des 4-Quark-Kondensats als

vernachlässigbar angegeben. Die Summenregel lautet:

$$f_{D^*}^2 m_{D^*}^2 e^{-\frac{m_{D^*}^2}{M^2}} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{m_c^2}^{s_0^{D^*}} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \frac{(s - m_c^2)^2}{s} \left(2 + \frac{m_c^2}{s} \right) + e^{-\frac{m_c^2}{M^2}} \left[-m_c \langle \bar{q}q \rangle \left(1 - \frac{m_0^2 m_c^2}{4M^2} \right) + \frac{1}{12\pi} \langle \alpha_s G^2 \rangle \right]. \quad (\text{A.2})$$

A.2. Summenregeln für die Zerfallskonstanten von Λ_c - und Σ_c -Baryonen

A.2.1. Summenregeln für Λ_c

In diesem Abschnitt werden die expliziten Ausdrücke für die Summenregeln zu Berechnung der Zerfallskonstanten des Λ_c -Baryons angegeben. Die Struktur der Summenregeln wurde in Abschnitt 3.1.2 dargestellt und die jeweils in Gleichung (3.48) einzusetzenden Imaginärteile lauten unter Verwendung der Kurznotation $x = \frac{m_c^2}{s}$:

- Für den in [69] eingeführten Strom $J_{\Lambda_c}^{(I)} = (u^T C \gamma_5 d)c + b(u^T C d)\gamma_5 c$:

$$\begin{aligned} \text{Im}F_1(s) &= \frac{(1+b^2)m_c^4}{512\pi^3} \left[(1-x^2) \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - 12 \ln x \right] \\ &+ \frac{(1+b^2)}{768\pi^2} \langle \alpha_s G^2 \rangle (1-x)(1+5x) + (1-b^2) \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{6} (2\pi) \delta(s - m_c^2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Im}F_2(s) &= \frac{(1-b^2)m_c^5}{128\pi^3} \left[(1-x) \left(1 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 6 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right] \\ &+ \frac{(1-b^2)m_c}{384\pi^2} \langle \alpha_s G^2 \rangle \left[(1-x) \left(7 + \frac{2}{x} \right) + 6 \ln x \right] \\ &+ (1+b^2) \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{6} m_c (2\pi) \delta(s - m_c^2) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.2. Summenregeln für die Zerfallskonstanten von Λ_c - und Σ_c -Baryonen

- Für den in [38] eingeführten Strom $J_{\Lambda_c}^{(II)}|_{b=-\frac{1}{5}} = J_{\Lambda_c}^{(1)} - \frac{1}{5}J_{\Lambda_c}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\text{Im}F_1(s) &= \frac{(5 + 2b + 5b^2)m_c^4}{2048\pi^3} \left[(1 - x^2) \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - 12 \ln x \right] \\
&- \frac{(5 - 4b - b^2)m_c}{96\pi} \langle \bar{q}q \rangle (1 - x)^2 \\
&+ \frac{\langle \alpha_s G^2 \rangle}{3072\pi^2} (1 - x) \left[(5 + 2b + 5b^2) + 3(7 + 6b + 7b^2)x \right] \\
&+ \frac{m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle (1 - b)}{384\pi} \frac{x}{m_c} (11x - 6 + b(7x - 6)) \\
&+ \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{72} (2\pi) \delta(s - m_c^2) (11 + 2b + 3b^2)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}F_2(s) &= \frac{(11 + 2b - 13b^2)m_c^5}{1536\pi^3} \left[(1 - x) \left(1 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 6 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right] \\
&- \frac{5 - 4b - b^2}{96\pi} \frac{m_c^2}{x} \langle \bar{q}q \rangle (1 - x)^2 \\
&+ \frac{(1 - b)m_c \langle \alpha_s G^2 \rangle}{4608\pi^2} \left[(1 - x) \left(2(11 + 13b) \frac{1}{x} + (89 + 79b) \right) + 72(1 + b) \ln x \right] \\
&- \frac{m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle (1 - b)}{384\pi} \left[x - 6 + b(5x - 6) \right] \\
&+ \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{24} (2\pi) \delta(s - m_c^2) (5 + 2b + 5b^2) m_c
\end{aligned} \tag{A.6}$$

A.2.2. Summenregeln für Σ_c

Mit den selben Bemerkungen wie im vorigen Abschnitt und der selben Kurznotation $x = \frac{m_c^2}{s}$ werden die Summenregeln für die Zerfallskonstante des Σ_c -Baryons angegeben, für den in [68] eingeführten Strom $J_{\Sigma_c} = (u^T C \gamma_5 c)u + b(u^T C c)\gamma_5 u$:

$$\begin{aligned}
 \text{Im}F_1(s) &= \frac{(5 + 2b + 5b^2)m_c^4}{512\pi^3} \left[-\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{4x^2} - 3 \ln x \right] \\
 &- \frac{3m_c}{32\pi} \langle \bar{q}q \rangle (1 - b^2)(1 - x)^2 \\
 &- \frac{\langle \alpha_s G^2 \rangle}{3072\pi^2} x(1 - x) \left[(1 + b^2)(11 - \frac{5}{x}) + 2b(7 - \frac{1}{x}) \right] \\
 &+ \frac{m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle (1 - b^2)}{128\pi} \frac{1}{m_c} 13x^2 \left(1 - \frac{6}{13x}\right) + \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{24} (2\pi) \delta(s - m_c^2)(1 - b)^2
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Im}F_2(s) &= \frac{(1 - b)^2 m_c^5}{512\pi^3 x^2} \left[(1 - x)(1 + 10x + x^2) + 6x(1 + x) \ln x \right] \\
 &- \frac{3m_c^2}{32\pi} \langle \bar{q}q \rangle (1 - b^2) x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \\
 &- \frac{(1 - b)^2 m_c \langle \alpha_s G^2 \rangle}{1536\pi^2} (1 - x) \left(5 - \frac{2}{x}\right) + \frac{m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle (1 - b^2)}{128\pi} (6 + x) \\
 &+ \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{24} (2\pi) \delta(s - m_c^2) (5 + 2b + 5b^2) m_c
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Anhang B.

Zusammenfassung der Lichtkegel-Summenregeln für $D \rightarrow \pi$ und $D \rightarrow K$

Hier werden eine Zusammenfassung der Lichtkegelverteilungsamplituden des K -Mesons und die vollständigen Ausdrücke für die Lichtkegel-Summenregeln des Zerfalls $D \rightarrow K\ell\nu_\ell$ angegeben. Daraus können problemlos die entsprechenden Ausdrücke für $D \rightarrow \pi\ell\nu_\ell$ erhalten werden.

B.1. Zusammenfassung der Lichtkegelverteilungsamplituden des K -Mesons

B.1.1. Definition

Die Definition der Zweiteilchenverteilungsamplituden des K -Mesons bis Twist 4 lautet:

$$\begin{aligned} \langle K^-(p) | \bar{s}_\omega^i(x_1) u_\xi^j(x_2) | 0 \rangle_{x^2 \rightarrow 0} = & \frac{i\delta^{ij}}{12} f_K \int_0^1 du e^{iup \cdot x_1 + i\bar{u}p \cdot x_2} \left([\not{p}\gamma_5]_{\xi\omega} \varphi_K(u) \right. \\ & - [\gamma_5]_{\xi\omega} \mu_K \phi_{3K}^p(u) + \frac{1}{6} [\sigma_{\beta\tau}\gamma_5]_{\xi\omega} p_\beta (x_1 - x_2)_\tau \mu_K \phi_{3K}^\sigma(u) \\ & \left. + \frac{1}{16} [\not{p}\gamma_5]_{\xi\omega} (x_1 - x_2)^2 \phi_{4K}(u) - \frac{i}{2} [(x_1 - x_2)\gamma_5]_{\xi\omega} \int_0^u \psi_{4K}(v) dv \right), \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

wobei u bzw. $\bar{u} = 1 - u$ der longitudinale Anteil des s -Quarks bzw. des leichten Antiquarks am K -Meson-Impuls ist. Die Aufteilung enthält die Verteilungsamplituden $\varphi_K(u)$ zu Twist 2, $\phi_{3K}^p(u)$ und $\phi_{3K}^\sigma(u)$ zu Twist 3 sowie $\phi_{4K}(u)$ und $\psi_{4K}(u)$ zu

Twist 4. Die Definition der jeweiligen Matrixelemente kann durch Multiplikation der obigen Gleichung mit der entsprechenden Dirac-Struktur und anschließender Dirac- und Farb-Spurbildung leicht erhalten werden.

Auf analoge Weise sind die Dreiteilchen-Verteilungsamplituden des Kaons definiert als:

$$\begin{aligned}
 \langle K^-(p) | \bar{s}_\omega^i(x_1) g_s G_{\mu\nu}^a(x_3) u_\xi^j(x_2) | 0 \rangle_{x^2 \rightarrow 0} &= \frac{\lambda_{ji}^a}{32} \int \mathcal{D}\alpha_i e^{ip(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} \\
 &\cdot \left[i f_{3K} (\sigma_{\lambda\rho} \gamma_5)_{\xi\omega} (p_\mu p_\lambda g_{\nu\rho} - p_\nu p_\lambda g_{\mu\rho}) \Phi_{3K}(\alpha_i) \right. \\
 &- f_K (\gamma_\lambda \gamma_5)_{\xi\omega} \left\{ (p_\nu g_{\mu\lambda} - p_\mu g_{\nu\lambda}) \Psi_{4K}(\alpha_i) + \frac{p_\lambda (p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu)}{(p \cdot x)} (\Phi_{4K}(\alpha_i) + \Psi_{4K}(\alpha_i)) \right\} \\
 &\left. - \frac{i f_K}{2} \epsilon_{\mu\nu\delta\rho} (\gamma_\lambda)_{\xi\omega} \left\{ (p^\rho g^{\delta\lambda} - p^\delta g^{\rho\lambda}) \tilde{\Psi}_{4K}(\alpha_i) + \frac{p_\lambda (p^\delta x^\rho - p^\rho x^\delta)}{(p \cdot x)} (\tilde{\Phi}_{4K}(\alpha_i) + \tilde{\Psi}_{4K}(\alpha_i)) \right\} \right]. \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

Diese hängen von den jeweiligen Impulsanteilen $\alpha_i = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ des Quarks, Antiquarks und Gluons ab und das Integrationsmaß hierfür ist definiert als $\mathcal{D}\alpha_i = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$.

Die Verteilungsamplitude $\Phi_{3K}(\alpha_i)$ hat Twist 3 und alle anderen haben Twist 4. In [78] wurde zudem eine weitere Dreiteilchen-Verteilungsamplitude $\Xi_{4K}(\alpha_i)$ mit Twist 4 betrachtet, die hier verwendet wird, und durch das folgende Matrixelement definiert ist, das die kovariante Ableitung des Gluon-Feldes enthält:

$$\langle K(p) | \bar{s}(x_1) \gamma_\mu \gamma_5 g D^\alpha G_{\alpha\beta}(x_3) q(x_2) | 0 \rangle = -i f_K p_\mu p_\beta \int \mathcal{D}\alpha_i e^{ip(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} \Xi_{4K}(\alpha_i). \tag{B.3}$$

In dieser Arbeit wird ferner für den total antisymmetrischen Tensor $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ die Vorzeichenkonvention $\epsilon^{0123} = -1$ verwendet, die $Tr\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta\} = 4i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ entspricht.

B.1.2. Twist 2-Verteilungsamplituden

In diesem und den folgenden Unterabschnitten werden die auf der konformen Entwicklung und Operatoridentitäten basierenden Ausdrücke für die oben definierten Verteilungsamplituden zusammengefasst, wie sie in [78] definiert sind. Weitere Details zur Herleitung sowie die expliziten Definitionen der die Verteilungsamplituden beschreibenden Parameter durch Matrixelemente lokaler Operatoren (ähnlich den Zerfallskonstanten) können dort vorgefunden werden und werden hier der Kürze halber nicht angegeben. Ebenso wird auch für die Skalenabhängigkeit dieser Parameter auf [78] verwiesen, sowie auf Anhang A von [63], wo eine entsprechende Zusammenfassung für die π -Meson-Verteilungsamplituden angegeben ist.

Für die Twist 2-Verteilungsamplitude $\varphi_K(u)$ gilt die folgende Entwicklung in Gegenbauer-Polynome:

$$\varphi_K(u, \mu) = 6u(1-u) \left(1 + \sum_{n=1,2,\dots} a_n^K(\mu) C_n^{3/2}(2u-1) \right), \quad (\text{B.4})$$

wobei für das K -Meson die ersten beiden Momente $a_1^K(\mu)$ und $a_2^K(\mu)$ berücksichtigt werden. Deren Skalenabhängigkeit wurde in (3.78) angegeben.

B.1.3. Twist 3-Verteilungsamplituden

Die Twist 3-Verteilungsamplituden werden beschrieben durch μ_K aus (4.9) und drei weitere Parameter $f_{3K}, \omega_{3K}, \lambda_{3K}$. Im Folgenden wird die Abkürzung

$$\eta_{3K} = \frac{f_{3K}}{f_K \mu_K}$$

verwendet und die u - und d -Quarkmassen vernachlässigt, die in [78] mitberücksichtigt wurden. In dieser Näherung sind die dort eingeführten Parameter ρ_+^K und ρ_-^K gleich:

$$\rho_+^K = \rho_-^K \equiv \rho^K = \frac{m_s}{\mu_K}. \quad (\text{B.5})$$

Die in dieser Arbeit verwendete konforme Entwicklung für die Twist 3-Amplituden lautet:

$$\begin{aligned} \phi_{3K}^p(u) &= 1 + 3\rho^K(1 - 3a_1^K + 6a_2^K)(1 + \ln u) \\ &\quad - \frac{\rho^K}{2}(3 - 27a_1^K + 54a_2^K)C_1^{1/2}(2u-1) \\ &\quad + 3 \left(10\eta_{3K} - \rho^K(a_1^K - 5a_2^K) \right) C_2^{1/2}(2u-1) \\ &\quad + \left(10\eta_{3K}\lambda_{3K} - \frac{9}{2}\rho^K a_2^K \right) C_3^{1/2}(2u-1) - 3\eta_{3K}\omega_{3K}C_4^{1/2}(2u-1), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \phi_{3K}^\sigma(u) &= 6u\bar{u} \left\{ 1 + \frac{\rho^K}{2}(3 - 15a_1^K + 30a_2^K) \right. \\ &\quad + \rho^K \left(3a_1^K - \frac{15}{2}a_2^K \right) C_1^{3/2}(2u-1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta_{3K}(10 - \omega_{3K}) + 3\rho^K a_2^K \right) C_2^{3/2}(2u-1) + \eta_{3K}\lambda_{3K}C_3^{3/2}(2u-1) \\ &\quad \left. + 3\rho^K(1 - 3a_1^K + 6a_2^K) \ln u \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\Phi_{3K}(\alpha_i) = 360\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 \left\{ 1 + \lambda_{3K}(\alpha_1 - \alpha_2) + \omega_{3K} \frac{1}{2}(7\alpha_3 - 3) \right\}. \quad (\text{B.8})$$

B.1.4. Twist 4-Verteilungsamplituden

Die Twist-4-Verteilungsamplituden können über 13 Parameter der konformen Entwicklung beschrieben werden, die wiederum durch die drei nichtperturbativen Größen δ_K^2 , ω_{4K} und κ_{4K} ausgedrückt werden können [78]. Zudem wird in [78] ein Renormalon-Modell (für eine Einführung in das Themengebiet siehe [137]) zu deren Bestimmung verwendet. Die daraus resultierenden Beziehungen wurden direkt in die Ausdrücke der Verteilungsamplituden eingesetzt und die resultierenden Formeln werden hier wiedergegeben.

Ferner wurden die Beziehungen (4.27) und (4.28) aus [78] zwischen den dort in (4.26) definierten Twist 4- und weiteren Verteilungsamplituden überprüft, und festgestellt, dass beide durch die Ersetzung $\psi_{4;K}(u) \rightarrow \psi_{4;K}(u) + m_K^2 \phi_{2;K}$ (in der dort verwendeten Notation) zu korrigieren sind. Die hier verwendete Version von $\psi_{4;K}(u)$ stimmt somit auch mit der entsprechenden Funktion $B(u)$ aus [138] überein und es ist die korrekte Normierungsbedingung $\int_0^1 \psi_{4;K}(u) du = 0$ zu verwenden.

Die Zweiteilchenverteilungsamplituden von Twist 4 sind gegeben durch:

$$\psi_{4K}(u) = \psi_{4K}^{T4}(u) + \psi_{4K}^{WW}(u), \quad (\text{B.9})$$

mit:

$$\psi_{4K}^{T4}(u) = \delta_K^2 \left\{ \frac{20}{3} C_2^{1/2}(2u-1) + \frac{49}{2} a_1^K C_3^{1/2}(2u-1) \right\}, \quad (\text{B.10})$$

sowie (in der korrigierten Version):

$$\begin{aligned} \psi_{4K}^{WW}(u) = & m_K^2 \left\{ \left[6\rho^K(1 - 3a_1^K + 6a_2^K) \right] C_0^{1/2}(2u-1) \right. \\ & - \left[\frac{18}{5} a_1^K + 3\rho^K(1 - 9a_1^K + 18a_2^K) + 12\kappa_{4K} \right] C_1^{1/2}(2u-1) \\ & + \left[2 - 6\rho^K(a_1^K - 5a_2^K) + 60\eta_{3K} \right] C_2^{1/2}(2u-1) \\ & + \left[\frac{18}{5} a_1^K - 9\rho^K a_2^K + \frac{16}{3} \kappa_{4K} + 20\eta_{3K} \lambda_{3K} \right] C_3^{1/2}(2u-1) \\ & \left. + \left[\frac{9}{4} a_2^K - 6\eta_{3K} \omega_{3K} \right] C_4^{1/2}(2u-1) \right\} \\ & + 6m_s^2(1 - 3a_1^K + 6a_2^K) \ln u, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\phi_{4K}(u) = \phi_{4K}^{T4}(u) + \phi_{4K}^{WW}(u), \quad (\text{B.12})$$

mit:

$$\begin{aligned} \phi_{4K}^{T4}(u) &= \delta_K^2 \left\{ \left(\frac{200}{3} + 196(2u-1)a_1^K \right) u^2 \bar{u}^2 \right. \\ &+ 21\omega_{4K} \left(u\bar{u}(2+13u\bar{u}) + [2u^3(6u^2-15u+10)\ln u] + [u \leftrightarrow \bar{u}] \right) \\ &\left. - 14a_1^K \left(u\bar{u}(2u-1)(2-3u\bar{u}) - [2u^3(u-2)\ln u] + [u \leftrightarrow \bar{u}] \right) \right\}, \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{4K}^{WW}(u) &= m_K^2 \left\{ \frac{16}{3}\kappa_{4K} \left(u\bar{u}(2u-1)(1-2u\bar{u}) + [5(u-2)u^3\ln u] - [u \leftrightarrow \bar{u}] \right) \right. \\ &+ 4\eta_{3K}u\bar{u} \left(60\bar{u} + 10\lambda_{3K}[(2u-1)(1-u\bar{u}) - (1-5u\bar{u})] \right. \\ &\left. - \omega_{3K}[3-21u\bar{u}+28u^2\bar{u}^2+3(2u-1)(1-7u\bar{u})] \right) \\ &\left. - \frac{36}{5}a_2^K \left(\frac{1}{4}u\bar{u}(4-9u\bar{u}+110u^2\bar{u}^2) + [u^3(10-15u+6u^2)\ln u] + [u \leftrightarrow \bar{u}] \right) \right. \\ &\left. + 4u\bar{u}(1+3u\bar{u}) \left(1 + \frac{9}{5}(2u-1)a_1^K \right) \right\}. \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

Die Twist 4-Dreiteilchenverteilungsamplituden lauten:

$$\begin{aligned} \Phi_{4K}(\alpha_i) &= 120\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \left\{ \delta_K^2 \left[\frac{21}{8}(\alpha_1-\alpha_2)\omega_{4K} + \frac{7}{20}a_1^K(1-3\alpha_3) \right] \right. \\ &\left. + m_K^2 \left[-\frac{9}{20}(\alpha_1-\alpha_2)a_2^K + \frac{1}{3}\kappa_{4K} \right] \right\}, \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

$$\tilde{\Phi}_{4K}(\alpha_i) = -120\alpha_1\alpha_2\alpha_3\delta_K^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{7}{4}a_1^K(\alpha_1-\alpha_2) + \frac{21}{8}\omega_{4K}(1-3\alpha_3) \right\}, \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \Psi_{4K}(\alpha_i) &= 30\alpha_3^2 \left\{ \delta_K^2 \left[\frac{1}{3}(\alpha_1-\alpha_2) + \frac{7}{10}a_1^K[-\alpha_3(1-\alpha_3)+3(\alpha_1-\alpha_2)^2] \right] \right. \\ &+ \frac{21}{4}\omega_{4K}(\alpha_1-\alpha_2)(1-2\alpha_3) \\ &\left. + m_K^2(1-\alpha_3) \left[\frac{9}{40}(\alpha_1-\alpha_2) - \frac{1}{3}\kappa_{4K} \right] \right\}, \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{4K}(\alpha_i) = & 30\alpha_3^2 \left\{ \delta_K^2 \left[\frac{1}{3}(1 - \alpha_3) - \frac{7}{10}a_1^K(\alpha_1 - \alpha_2)(4\alpha_3 - 3) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{21}{4}\omega_{4K}(1 - \alpha_3)(1 - 2\alpha_3) \right] \right. \\ & \left. + m_K^2 \left[\frac{9}{40}a_2^K(\alpha_1^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) - \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_2)\kappa_{4K} \right] \right\}, \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

$$\Xi_{4K}(\alpha_i) = 840\alpha_1\alpha_2\alpha_3^3\Xi_0^K. \quad (\text{B.19})$$

Mittels der QCD-Bewegungsgleichungen kann κ_{4K} ausgedrückt werden durch:

$$\kappa_{4K} = -\frac{1}{8} - \frac{9}{40}a_1^K + \frac{m_s}{2\mu_K}. \quad (\text{B.20})$$

Der die Funktion Ξ_{4K} beschreibende Parameter wird dem Renormalon-Modell [78] entnommen:

$$\Xi_0^K = \frac{1}{5}\delta_K^2 a_1^K. \quad (\text{B.21})$$

Die numerischen Werte für alle Parameter der π - und K -Verteilungsamplituden sind in Tabelle B.1 zusammengefasst.

| | | | |
|-----------------|-------------------------------------|---------------|-------------------------------------|
| a_1^π | 0 | a_1^K | $0,10 \pm 0,04$ |
| a_2^π | $0,16 \pm 0,01$ | a_2^K | $0,25 \pm 0,15$ |
| a_4^π | $0,04 \pm 0,01$ | a_4^K | 0 |
| $a_{>4}^\pi$ | 0 | $a_{>4}^K$ | 0 |
| f_3^π | $(0,0045 \pm 0,0015) \text{ GeV}^2$ | f_3^K | $(0,0045 \pm 0,0015) \text{ GeV}^2$ |
| ω_3^π | $-1,5 \pm 0,7$ | ω_3^K | $-1,2 \pm 0,7$ |
| λ_3^π | 0 | λ_3^K | $1,6 \pm 0,4$ |
| ω_4^π | $0,2 \pm 0,1$ | ω_4^K | $0,2 \pm 0,1$ |
| δ_π^2 | $(0,18 \pm 0,06) \text{ GeV}^2$ | δ_K^2 | $(0,2 \pm 0,06) \text{ GeV}^2$ |
| $\kappa_{4\pi}$ | 0 | κ_{4K} | $-0,12 \pm 0,01$ |

Tabelle B.1.: Die Parameter für die π - und K -Meson-Lichtkegelverteilungsamplituden bei der Normierungsskala $\mu = 1 \text{ GeV}$: a_2^π, a_4^π sind durch einen Fit an experimentelle Daten in [63] erhalten worden, a_1^K stammt aus [109] und alle anderen aus [78]. κ_4^K ist mit Hilfe von Gleichung (B.20) berechnet.

B.2. Ausdrücke der Lichtkegel-Summenregeln für die $D \rightarrow K\ell\nu_\ell$ -Formfaktoren

Hier werden die vollständigen Ausdrücke der Lichtkegel-Summenregeln für die Formfaktoren f_{DK}^+ und $(f_{DK}^+ + f_{DK}^-)$ in führender Ordnung in α_s mit Beiträgen bis

B.2. Lichtkegel-Summenregeln für die $D \rightarrow K\ell\nu_\ell$ -Formfaktoren

Twist 4 angeben. Die Formfaktoren für $D \rightarrow \pi\ell\nu_\ell$ können durch die Ersetzung $m_K \rightarrow m_\pi \simeq 0$ und $m_s \rightarrow m_d \simeq 0$, sowie der entsprechenden Verteilungsamplituden erhalten werden.

$$F_0^{K,2}(q^2, M^2, s_0^D) = m_c^2 f_K \int_{u_0}^1 \frac{du}{u} e^{-\frac{m_c^2 - q^2 \bar{u} + m_K^2 u \bar{u}}{u M^2}} \varphi_K(u), \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} F_0^{K,3}(q^2, M^2, s_0^D) = m_c^2 f_K \int_{u_0}^1 du e^{-\frac{m_c^2 - q^2 \bar{u} + m_K^2 u \bar{u}}{u M^2}} & \left\{ \frac{\mu_K}{m_c} \left[\phi_{3K}^p(u) \right. \right. \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{u} - \frac{m_c^2 + q^2 - u^2 m_K^2}{2(m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2)} \frac{d}{du} - \frac{2um_K^2 m_c^2}{(m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2)^2} \right) \phi_{3K}^\sigma(u) \left. \right] \\ & - \frac{f_{3K}}{m_c f_K} \left[\frac{2}{u} \left(\frac{m_c^2 - q^2 - u^2 m_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \right) \left(\frac{d}{du} - \frac{2um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \right) I_{3K}(u) \right. \\ & \left. \left. + \frac{3m_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \left(\frac{d}{du} - \frac{2um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \right) \bar{I}_{3K}(u) \right] \right\}, \quad (\text{B.23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0^{K,4}(q^2, M^2, s_0^D) = m_c^2 f_K \int_{u_0}^1 du e^{-\frac{m_c^2 - q^2 \bar{u} + m_K^2 u \bar{u}}{u M^2}} & \left\{ \right. \\ & \frac{1}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \left[u \psi_{4K}(u) + \left(1 - \frac{2u^2 m_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \right) \int_0^u dv \psi_{4K}(v) \right. \\ & - \frac{m_c^2 u}{4(m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2)} \left(\frac{d^2}{du^2} - \frac{6um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \frac{d}{du} + \frac{12um_K^4}{(m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2)^2} \right) \phi_{4K}(u) \\ & - \left(\frac{d}{du} - \frac{2um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \right) \left(I_{4K}(u) - \frac{dI_{4K}^\Xi(u)}{du} \right) \\ & - \frac{2um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \left(u \frac{d}{du} + \left(1 - \frac{4u^2 m_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \right) \right) \bar{I}_{4K}(u) \\ & \left. \left. + \frac{2um_K^2(m_c^2 - q^2 - u^2 m_K^2)}{(m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2)^2} \left(\frac{d}{du} - \frac{6um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \right) \int_u^1 d\xi \bar{I}_{4K}(\xi) \right] \right\} \\ & + \frac{m_c^4 f_K e^{-\frac{m_c^2}{M^2}}}{4(m_c^2 - q^2 + m_K^2)^2} \left(\frac{d\phi_{4K}^{WW}(u)}{du} \right)_{u \rightarrow 1}. \quad (\text{B.24}) \end{aligned}$$

Dabei sind $\bar{u} = 1 - u$,

$$u_0 = \left(q^2 - s_0^D + m_K^2 + \sqrt{(s_0^D - q^2 - m_K^2)^2 + 4m_K^2(m_c^2 - q^2)} \right) / (2m_K^2),$$

und

$$I_{3K}(u) = \int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 dv \Phi_{3K}(\alpha_i) \Big|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}}, \quad (\text{B.25})$$

$$\bar{I}_{3K}(u) = u \int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 \frac{dv}{v} (2v - 1) \Phi_{3K}(\alpha_i) \Big|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}}, \quad (\text{B.26})$$

$$I_{4K}(u) = \int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 \frac{dv}{v} \left[2\Psi_{4K}(\alpha_i) - \Phi_{4K}(\alpha_i) + \right. \\ \left. 2\tilde{\Psi}_{4K}(\alpha_i) - \tilde{\Phi}_{4K}(\alpha_i) \right] \Big|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}}, \quad (\text{B.27})$$

$$\bar{I}_{4K}(u) = \int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 \frac{dv}{v} \left[\Psi_{4K}(\alpha_i) + \Phi_{4K}(\alpha_i) \right. \\ \left. + \tilde{\Psi}_{4K}(\alpha_i) + \tilde{\Phi}_{4K}(\alpha_i) \right] \Big|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}}, \quad (\text{B.28})$$

$$I_{4K}^{\bar{\Xi}}(u) = \int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 \frac{dv}{v} \left[v(1-v)\Xi_{4K}(\alpha_i) \right] \Big|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}}. \quad (\text{B.29})$$

$$\tilde{F}_0^{K,2}(q^2, M^2, m_c^2, s_0^D) = 0, \quad (\text{B.30})$$

$$\tilde{F}_0^{K,3}(q^2, M^2, s_0^D) = m_c^2 f_K \int_{u_0}^1 du e^{-\frac{m_c^2 - q^2 \bar{u} + m_K^2 u \bar{u}}{u M^2}} \left\{ \frac{\mu_K}{m_c} \left(\frac{\phi_{3K}^p(u)}{u} + \frac{1}{6u} \frac{d\phi_{3K}^\sigma(u)}{du} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{f_{3K}}{f_K m_c} \right) \frac{m_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \left(\frac{d}{du} - \frac{2um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \right) \tilde{I}_{3K}(u) \right\}, \quad (\text{B.31})$$

B.2. Lichtkegel-Summenregeln für die $D \rightarrow K\ell\nu_\ell$ -Formfaktoren

mit

$$\tilde{I}_{3K}(u) = \int_0^u d\alpha_1 \int_{(u-\alpha_1)/(1-\alpha_1)}^1 \frac{dv}{v} [(3-2v)] \Phi_{3K}(\alpha_i) \Bigg|_{\substack{\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3, \\ \alpha_3 = (u - \alpha_1)/v}} , \quad (\text{B.32})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0^{K,4}(q^2, M^2, s_0^D) = m_c^2 f_K \int_{u_0}^1 du e^{-\frac{m_c^2 - q^2 \bar{u} + m_K^2 u \bar{u}}{u M^2}} \left\{ \frac{1}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \left[\psi_{4K}(u) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \int_0^u dv \psi_{4K}(v) + \frac{2um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \left(\frac{d^2}{du^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{6um_K^2}{m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2} \frac{d}{du} + \frac{12u^2 m_K^4}{(m_c^2 - q^2 + u^2 m_K^2)^2} \right) \int_u^1 d\xi \bar{I}_{4K}(\xi) \right] \right\} . \quad (\text{B.33}) \end{aligned}$$

Anhang C.

Zusammenfassung der Lichtkegel-Summenregeln mit Λ_C - und Σ_C -Baryonen

C.1. Nukleon-Lichtkegelverteilungsamplituden

Hier werden die expliziten Ausdrücke für die konforme Entwicklung der 24 Lichtkegelverteilungsamplituden des Nukleons aus [88] wiedergegeben:

- Twist 3:

$$\begin{aligned} V_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3[\phi_3^0(\mu) + \phi_3^+(\mu)(1 - 3x_3)], \\ A_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3(x_2 - x_1)\phi_3^-(\mu), \\ T_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3[\phi_3^0(\mu) - \frac{1}{2}(\phi_3^+(\mu) - \phi_3^-(\mu))(1 - 3x_3)]. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

- Twist 4:

$$\begin{aligned} V_2(x_i) &= 24x_1x_2[\phi_4^0 + \phi_4^+(1 - 5x_3)], \quad A_2(x_i) = 24x_1x_2(x_2 - x_1)\phi_4^-, \\ T_2(x_i) &= 24x_1x_2[\xi_4^0 + \xi_4^+(1 - 5x_3)], \\ V_3(x_i) &= 12x_3[\psi_4^0(1 - x_3) + \psi_4^+(1 - x_3 - 10x_1x_2) + \psi_4^-(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))], \\ A_3(x_i) &= 12x_3(x_2 - x_1)[(\psi_4^0 + \psi_4^+) + \psi_4^-(1 - 2x_3)], \\ T_3(x_i) &= 6x_3[(\phi_4^0 + \psi_4^0 + \xi_4^0)(1 - x_3) + (\phi_4^+ + \psi_4^+ + \xi_4^+)(1 - x_3 - 10x_1x_2) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- + \xi_4^-)(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))], \\ T_7(x_i) &= 6x_3[(\phi_4^0 + \psi_4^0 - \xi_4^0)(1 - x_3) + (\phi_4^+ + \psi_4^+ - \xi_4^+)(1 - x_3 - 10x_1x_2) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- - \xi_4^-)(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))], \\ S_1(x_i) &= 6x_3(x_2 - x_1)[(\phi_4^0 + \psi_4^0 + \xi_4^0 + \phi_4^+ + \psi_4^+ + \xi_4^+) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- + \xi_4^-)(1 - 2x_3)], \\ P_1(x_i) &= 6x_3(x_1 - x_2)[(\phi_4^0 + \psi_4^0 - \xi_4^0 + \phi_4^+ + \psi_4^+ - \xi_4^+) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- - \xi_4^-)(1 - 2x_3)], \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

• Twist 5

$$\begin{aligned}
V_4(x_i) &= 3[\psi_5^0(1-x_3) + \psi_5^+(1-x_3-2(x_1^2+x_2^2)) + \psi_5^-(2x_1x_2-x_3(1-x_3))], \\
A_4(x_i) &= 3(x_2-x_1)[- \psi_5^0 + \psi_5^+(1-2x_3) + \psi_5^-x_3], \\
T_4(x_i) &= \frac{3}{2}[(\phi_5^0 + \psi_5^0 + \xi_5^0)(1-x_3) + (\phi_5^+ + \psi_5^+ + \xi_5^+)(1-x_3-2(x_1^2+x_2^2)) \\
&\quad + (\phi_5^- - \psi_5^- + \xi_5^-)(2x_1x_2-x_3(1-x_3))], \\
T_8(x_i) &= \frac{3}{2}[(\phi_5^0 + \psi_5^0 - \xi_5^0)(1-x_3) + (\phi_5^+ + \psi_5^+ - \xi_5^+)(1-x_3-2(x_1^2+x_2^2)) \\
&\quad + (\psi_5^- - \phi_5^- + \xi_5^-)(2x_1x_2-x_3(1-x_3))], \\
V_5(x_i) &= 6x_3[\phi_5^0 + \phi_5^+(1-2x_3)], \quad A_5(x_i) = 6x_3(x_2-x_1)\phi_5^-, \\
T_5(x_i) &= 6x_3[\xi_5^0 + \xi_5^+(1-2x_3)], \\
S_2(x_i) &= \frac{3}{2}(x_2-x_1)[-(\phi_5^0 + \psi_5^0 + \xi_5^0) + (\phi_5^+ + \psi_5^+ + \xi_5^+)(1-2x_3) \\
&\quad + (\phi_5^- - \psi_5^- + \xi_5^-)x_3], \\
P_2(x_i) &= \frac{3}{2}(x_1-x_2)[-(\phi_5^0 + \psi_5^0 - \xi_5^0) + (\phi_5^+ + \psi_5^+ - \xi_5^+)(1-2x_3) \\
&\quad + (\phi_5^- - \psi_5^- - \xi_5^-)x_3]. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

• Twist 6

$$\begin{aligned}
V_6(x_i) &= 2[\phi_6^0 + \phi_6^+(1-3x_3)], \\
A_6(x_i) &= 2(x_2-x_1)\phi_6^-, \\
T_6(x_i) &= 2[\phi_6^0 - \frac{1}{2}(\phi_6^+ - \phi_6^-)(1-3x_3)]. \tag{C.4}
\end{aligned}$$

Die x^2 -Korrekturen V_1^M , A_1^M und T_1^M werden in [88] direkt in der integrierten Form (5.13) ausgedrückt und lauten:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1^M(x_2) &= \frac{x_2^2}{24}[f_N C_f^u(x_2) + \lambda_1 C_\lambda^u(x_2)], \\
\tilde{A}_1^M(x_2) &= \frac{x_2^2}{24}(1-x_2)^3[f_N D_f^u(x_2) + \lambda_1 D_\lambda^u(x_2)], \\
\tilde{T}_1^M(x_2) &= \frac{x_2^2}{48}[f_N E_f^u(x_2) + \lambda_1 E_\lambda^u(x_2)], \tag{C.5}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 C_f^u(x_2) &= (1-x_2)^3[113 + 495x_2 - 552x_2^2 - 10A_1^u(1-3x_2) \\
 &\quad + 2V_1^d(113 - 951x_2 + 828x_2^2)], \\
 C_\lambda^u(x_2) &= -(1-x_2)^3[13 - 20f_1^d + 3x_2 + 10f_1^u(1-3x_2)], \\
 D_f^u(x_2) &= 11 + 45x_2 - 2A_1^u(113 - 951x_2 + 828x_2^2) + 10V_1^d(1-30x_2), \\
 D_\lambda^u(x_2) &= 29 - 45x_2 - 10f_1^u(7-9x_2) - 20f_1^d(5-6x_2), \\
 E_f^u(x_2) &= -[(1-x_2)(3(439 + 71x_2 - 621x_2^2 + 587x_2^3 - 184x_2^4) \\
 &\quad + 4A_1^u(1-x_2)^2(59 - 483x_2 + 414x_2^2) \\
 &\quad - 4V_1^d(1301 - 619x_2 - 769x_2^2 + 1161x_2^3 - 414x_2^4))] \\
 &\quad - 12(73 - 220V_1^d) \ln x_2, \\
 E_\lambda^u(x_2) &= -[(1-x_2)(5 - 211x_2 + 281x_2^2 - 111x_2^3 \\
 &\quad + 10(1 + 61x_2 - 83x_2^2 + 33x_2^3)f_1^d \\
 &\quad - 40(1-x_2)^2(2-3x_2)f_1^u)] - 12(3 - 10f_1^d) \ln x_2. \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $\phi_i^{(\pm,0)}$, $\psi_i^{(\pm,0)}$ und $\xi_i^{(\pm,0)}$ ($i = \{3, 4, 5, 6\}$) können durch die acht in Abschnitt 5.3 angegebenen, nichtperturbativen Parameter beschrieben werden:

- Führende Terme der konformen Entwicklung und Twist 3

$$\begin{aligned}
 \phi_3^0 &= \phi_6^0 = f_N, & \phi_4^0 &= \phi_4^0 = \frac{1}{2}(f_N + \lambda_1), \\
 \xi_4^0 &= \xi_5^0 = \frac{1}{6}\lambda_2, & \psi_4^0 &= \psi_5^0 = \frac{1}{2}(f_N - \lambda_1), \\
 \phi_3^- &= \frac{21}{2}f_N A_1^u, & \phi_3^+ &= \frac{7}{2}f_N(1 - 3V_1^d), \tag{C.7}
 \end{aligned}$$

- Twist 4

$$\begin{aligned}
 \phi_4^+ &= \frac{1}{4}[f_N(3 - 10V_1^d) + \lambda_1(3 - 10f_1^d)], \\
 \phi_4^- &= -\frac{5}{4}[f_N(1 - 2A_1^u) - \lambda_1(1 - 2f_1^d - 4f_1^u)], \\
 \psi_4^+ &= -\frac{1}{4}[f_N(2 + 5A_1^u - 5V_1^d) - \lambda_1(2 - 5f_1^d - 5f_1^u)] \\
 \psi_4^- &= \frac{5}{4}[f_N(2 - A_1^u - 3V_1^d) - \lambda_1(2 - 7f_1^d + f_1^u)] \\
 \xi_4^+ &= \frac{1}{16}\lambda_2(4 - 15f_2^d), & \xi_4^- &= \frac{5}{16}\lambda_2(4 - 15f_2^d), \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

- Twist 5

$$\begin{aligned}
 \phi_5^+ &= -\frac{5}{6}[f_N(3 + 4V_1^d) - \lambda_1(1 - 4f_1^d)], \\
 \phi_5^- &= -\frac{5}{3}[f_N(1 - 2A_1^u) - \lambda_1(f_1^d - f_1^u)], \\
 \psi_5^+ &= -\frac{5}{6}[f_N(5 + 2A_1^u - 2V_1^d) - \lambda_1(1 - 2f_1^d - 2f_1^u)], \\
 \psi_5^- &= \frac{5}{3}[f_N(2 - A_1^u - 3V_1^d) + \lambda_1(f_1^d - f_1^u)], \\
 \xi_5^+ &= \frac{5}{36}\lambda_2(2 - 9f_2^d), \quad \xi_5^- = -\frac{5}{4}\lambda_2f_2^d,
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

- Twist 6

$$\begin{aligned}
 \phi_6^+ &= \frac{1}{2}[f_N(1 - 4V_1^d) - \lambda_1(1 - 2f_1^d)], \\
 \phi_6^- &= \frac{1}{2}[f_N(1 + 4A_1^u) + \lambda_1(1 - 4f_1^d - 2f_1^u)].
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

C.2. Ergebnisse der Korrelationsfunktionen für die $\Lambda_c \rightarrow N$ -Formfaktoren

Zur Darstellung der Ergebnisse werden die folgenden Abkürzungen für die auftretenden Linearkombinationen der Nukleon-Verteilungsamplituden definiert:

$$\begin{aligned}
 S_{12} &= S_1 - S_2, & P_{21} &= P_2 - P_1, \\
 V_{1345} &= -2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5, & V_{43} &= V_4 - V_3, \\
 V_{123456} &= -V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 - V_6, & V_{123} &= V_1 - V_2 - V_3, \\
 A_{1345} &= -2A_1 - A_3 - A_4 + 2A_5, & A_{34} &= A_3 - A_4, \\
 A_{123456} &= A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - A_5 + A_6, & A_{123} &= -A_1 + A_2 - A_3, \\
 T_{78} &= T_7 - T_8, & T_{123} &= T_1 + T_2 - 2T_3, \\
 T_{234578} &= 2T_2 - 2T_3 - 2T_4 + 2T_5 + 2T_7 + 2T_8, & T_{127} &= T_1 - T_2 - 2T_7, \\
 T_{125678} &= -T_1 + T_2 + T_5 - T_6 + 2T_7 + 2T_8, & T_{158} &= -T_1 + T_5 + 2T_8.
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

Die integrierten Verteilungsamplituden sind definiert als (siehe (5.13),(5.14)):

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(x_2) &= \int_0^{1-x_2} dx_1 F(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2), \\
 \tilde{\tilde{F}}(x_2) &= \int_1^{x_2} dx'_2 \int_0^{1-x'_2} dx_1 F(x_1, x'_2, 1 - x_1 - x'_2), \\
 \tilde{\tilde{\tilde{F}}}(x_2) &= \int_1^{x_2} dx'_2 \int_1^{x'_2} dx''_2 \int_0^{1-x''_2} dx_1 F(x_1, x''_2, 1 - x_1 - x''_2). \quad (\text{C.12})
 \end{aligned}$$

C.2.1. Pseudoskalarer Übergang

Die Beiträge $\Pi_j^{(i)}((P - q)^2, q^2)$ zur Korrelationsfunktion mit dem pseudoskalaren Übergangstrom j_5 werden durch Gleichung (5.17) gegeben, wobei die Koeffizientenfunktionen $\tilde{\omega}_{jn}^{(i)}$ mit $i = \mathcal{P}, \mathcal{A}$, $j = 1, 2$ und $n = 1, 2, 3$ im Folgenden aufgelistet sind:

- Interpolation von Λ_c durch den pseudoskalaren Strom

$$\begin{aligned}
 \omega_{11}^{(\mathcal{P})} &= \frac{m_N}{2} \left[(m_c - x_2 m_N) \Phi_1^{(\mathcal{P})} - m_N \Phi_2^{(\mathcal{P})} \right], \\
 \omega_{12}^{(\mathcal{P})} &= -\frac{m_N^2}{2} \left[m_c (m_c - x_2 m_N) \Phi_2^{(\mathcal{P})} + 2x_2 m_N^2 \Phi_3^{(\mathcal{P})} \right], \\
 \omega_{13}^{(\mathcal{P})} &= 2m_N^3 m_c^2 (m_c - x_2 m_N) \Phi_3^{(\mathcal{P})},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{21}^{(\mathcal{P})} &= -\frac{m_N}{2} \Phi_1^{(\mathcal{P})}, & \omega_{22}^{(\mathcal{P})} &= \frac{m_N^2}{2} (m_c \Phi_2^{(\mathcal{P})} - 2m_N \Phi_3^{(\mathcal{P})}), \\
 \omega_{23}^{(\mathcal{P})} &= -2m_N^3 m_c^2 \Phi_3^{(\mathcal{P})}. \quad (\text{C.13})
 \end{aligned}$$

Die Funktionen $\Phi_i^{(\mathcal{P})}$ in diesen Gleichungen sind dabei:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1^{(\mathcal{P})} &= 2\tilde{A}_1 + 4\tilde{A}_3 + 2\tilde{A}_{123} + 2\tilde{P}_1 + 2\tilde{S}_1 + 6\tilde{T}_1 - 12\tilde{T}_7 - \tilde{T}_{123} - 5\tilde{T}_{127} \\
 &\quad - 2\tilde{V}_1 + 4\tilde{V}_3 + 2\tilde{V}_{123}, \\
 \Phi_2^{(\mathcal{P})} &= 3\tilde{A}_{34} + 2\tilde{A}_{123} - \tilde{A}_{1345} - 2\tilde{P}_{21} + 2\tilde{S}_{12} - 12\tilde{T}_{78} - 2\tilde{T}_{123} - 4\tilde{T}_{127} \\
 &\quad - 6\tilde{T}_{158} + \tilde{T}_{234578} - 3\tilde{V}_{43} + 2\tilde{V}_{123} + \tilde{V}_{1345}, \\
 \Phi_3^{(\mathcal{P})} &= -\tilde{A}_1^M - 3\tilde{T}_1^M + \tilde{V}_1^M + \tilde{A}_{123456} - 3\tilde{T}_{125678} + \tilde{T}_{234578} + \tilde{V}_{123456}.
 \end{aligned}$$

- Interpolation von Λ_c durch den Axialvektorstrom

$$\begin{aligned}
 \omega_{11}^{(A)} &= 2[(P - q)^2 - q^2 - m_N^2] \Phi_1^{(A)} + x_2 m_N^2 (4\Phi_1^{(A)} + \Phi_2^{(A)}) + m_N m_c \Phi_3^{(A)} \\
 &\quad + m_N^2 \left[\Phi_4^{(A)} + \frac{2\Phi_5^{(A)}}{x_2} \right], \\
 \omega_{12}^{(A)} &= -m_N^2 \left[2(x_2^2 m_N^2 - q^2) \Phi_6^{(A)} + x_2 m_N m_c \Phi_7^{(A)} + m_c^2 \Phi_8^{(A)} - 2 \frac{q^2 + m_c^2}{x_2} \Phi_5^{(A)} \right. \\
 &\quad \left. + 2x_2 m_N^2 \Phi_9^{(A)} \right], \\
 \omega_{13}^{(A)} &= 4 \frac{m_N^2}{x_2} \left[m_c^2 (q^2 - m_c^2) \Phi_5^{(A)} - x_2^2 m_N^2 m_c^2 \Phi_9^{(A)} + x_2 m_N m_c^3 \Phi_{10}^{(A)} \right], \\
 \\
 \omega_{21}^{(A)} &= \frac{m_N}{x_2} \left[2\Phi_6^{(A)} + x_2 \Phi_2^{(A)} \right], \quad \omega_{23}^{(A)} = 4m_N^3 m_c^2 \Phi_{11}^{(A)}, \\
 \omega_{22}^{(A)} &= \frac{m_N}{x_2} \left[2(q^2 - m_c^2 - x_2^2 m_N^2) \Phi_6^{(A)} - x_2 m_N m_c \Phi_7^{(A)} + 2x_2 m_N^2 \Phi_{11}^{(A)} \right].
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Die Funktionen $\Phi_i^{(A)}$ sind dabei gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1^{(A)} &= \tilde{A}_1 + 2\tilde{T}_1 + \tilde{V}_1, \\
 \Phi_2^{(A)} &= 2\tilde{A}_3 - 2\tilde{P}_1 + 2\tilde{S}_1 - 2\tilde{T}_1 + \tilde{T}_{123} + \tilde{T}_{127} - 2\tilde{V}_3, \\
 \Phi_3^{(A)} &= 2\tilde{A}_1 + 4\tilde{A}_3 + 2\tilde{A}_{123} - 4\tilde{P}_1 + 4\tilde{S}_1 + 2\tilde{V}_1 - 4\tilde{V}_3 - 2\tilde{V}_{123}, \\
 \Phi_4^{(A)} &= -2\tilde{A}_{1345} + 2\tilde{P}_{21} + 2\tilde{S}_{12} - 2\tilde{T}_{123} + 4\tilde{T}_{127} - 6\tilde{T}_{158} + 3\tilde{T}_{234578} - 2\tilde{V}_{1345}, \\
 \Phi_5^{(A)} &= \tilde{A}_1^M + 2\tilde{T}_1^M + \tilde{V}_1^M - \tilde{T}_{234578}, \\
 \Phi_6^{(A)} &= \tilde{A}_{123} - \tilde{T}_{123} - \tilde{T}_{127} - \tilde{V}_{123}, \\
 \Phi_7^{(A)} &= -3\tilde{A}_{34} - 2\tilde{A}_{123} + \tilde{A}_{1345} - 4\tilde{P}_{21} - 4\tilde{S}_{12} - 3\tilde{V}_{43} + 2\tilde{V}_{123} + \tilde{V}_{1345}, \\
 \Phi_8^{(A)} &= 2\tilde{A}_{123} + 2\tilde{A}_{1345} - 2\tilde{P}_{21} - 2\tilde{S}_{12} - 6\tilde{T}_{127} + 6\tilde{T}_{158} - 3\tilde{T}_{234578} - 2\tilde{V}_{123} + 2\tilde{V}_{1345}, \\
 \Phi_9^{(A)} &= \tilde{A}_1^M + \tilde{T}_1^M + \tilde{V}_1^M - 2\tilde{A}_{123456} + 3\tilde{T}_{125678} - 2\tilde{T}_{234578} + 2\tilde{V}_{123456}, \\
 \Phi_{10}^{(A)} &= -\tilde{A}_1^M - \tilde{V}_1^M + \tilde{A}_{123456} - \tilde{V}_{123456}, \\
 \Phi_{11}^{(A)} &= \tilde{T}_1^M + 2\tilde{A}_{123456} - 3\tilde{T}_{125678} + \tilde{T}_{234578} - 2\tilde{V}_{123456}.
 \end{aligned}$$

C.2.2. Vektor-Übergang

Die Beiträge $\tilde{\Pi}_j^{(i)}((P-q)^2, q^2)$ zur Korrelationsfunktion mit dem Vektor-Übergangstrom j_μ werden durch Gleichung (5.17) gegeben, wobei die Koeffizientenfunktionen $\tilde{\omega}_{jn}^{(i)}$ mit $i = \mathcal{P}, \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, 6$ und $n = 1, 2, 3$ lauten:

- Interpolation von Λ_c durch den pseudoskalaren Strom

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{11}^{(\mathcal{P})} &= x_2 m_N \tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{P})}, & \tilde{\omega}_{12}^{(\mathcal{P})} &= x_2 m_N^3 \left[x_2 \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{P})} + 2\tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})} \right], \\
 \tilde{\omega}_{13}^{(\mathcal{P})} &= 4x_2 m_N^3 m_c^2 \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})}, \\
 \tilde{\omega}_{21}^{(\mathcal{P})} &= \tilde{\omega}_{23}^{(\mathcal{P})} = 0, & \tilde{\omega}_{22}^{(\mathcal{P})} &= -x_2 m_N^2 \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{P})}, \\
 \tilde{\omega}_{31}^{(\mathcal{P})} &= \frac{m_N}{2} (m_c - x_2 m_N) \tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{P})}, \\
 \tilde{\omega}_{32}^{(\mathcal{P})} &= -\frac{m_N^2}{2} \left[m_c (m_c - x_2 m_N) \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{P})} + 2x_2 m_N^2 \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})} \right], \\
 \tilde{\omega}_{33}^{(\mathcal{P})} &= 2m_N^3 m_c^2 (m_c - x_2 m_N) \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})}, \\
 \tilde{\omega}_{41}^{(\mathcal{P})} &= \frac{m_N}{2} \tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{P})}, & \tilde{\omega}_{42}^{(\mathcal{P})} &= \frac{m_N^2}{2} \left[-m_c \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{P})} + 2m_N \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})} \right], \\
 \tilde{\omega}_{43}^{(\mathcal{P})} &= 2m_N^3 m_c^2 \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})}, \\
 \tilde{\omega}_{51}^{(\mathcal{P})} &= -m_N \tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{P})}, & \tilde{\omega}_{52}^{(\mathcal{P})} &= -m_N^3 \left[x_2 \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{P})} + 2\tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})} \right], \\
 \tilde{\omega}_{53}^{(\mathcal{P})} &= -4m_N^3 m_c^2 \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})}, \\
 \tilde{\omega}_{61}^{(\mathcal{P})} &= \tilde{\omega}_{63}^{(\mathcal{P})} = 0, & \tilde{\omega}_{62}^{(\mathcal{P})} &= m_N^2 \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{P})}.
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Die Funktionen $\tilde{\Phi}_i^{(\mathcal{P})}$ sind dabei gegeben als:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{P})} &= 2\tilde{A}_1 + 4\tilde{A}_3 + 2\tilde{A}_{123} + 2\tilde{P}_1 + 2\tilde{S}_1 + 6\tilde{T}_1 - 12\tilde{T}_7 - \tilde{T}_{123} - 5\tilde{T}_{127} \\
 &\quad - 2\tilde{V}_1 + 4\tilde{V}_3 + 2\tilde{V}_{123}, \\
 \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{P})} &= 3\tilde{A}_{34} + 2\tilde{A}_{123} - \tilde{A}_{1345} - 2\tilde{P}_{21} + 2\tilde{S}_{12} - 12\tilde{T}_{78} - 2\tilde{T}_{123} - 4\tilde{T}_{127} \\
 &\quad - 6\tilde{T}_{158} + \tilde{T}_{234578} - 3\tilde{V}_{43} + 2\tilde{V}_{123} + \tilde{V}_{1345}, \\
 \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{P})} &= -\tilde{A}_1^M - 3\tilde{T}_1^M + \tilde{V}_1^M + \tilde{A}_{123456} - 3\tilde{T}_{125678} + \tilde{T}_{234578} + \tilde{V}_{123456}.
 \end{aligned}$$

- Interpolation von Λ_c durch den Axialvektorstrom

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{11}^{(A)} &= 2 \left[2m_c \tilde{\Phi}_1^{(A)} - x_2 m_N (2\tilde{\Phi}_1^{(A)} + \tilde{\Phi}_2^{(A)}) + 2m_N \tilde{\Phi}_3^{(A)} \right], \\ \tilde{\omega}_{12}^{(A)} &= 2m_N \left[x_2^2 m_N^2 \tilde{\Phi}_4^{(A)} + x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_5^{(A)} + 2m_c^2 \tilde{\Phi}_3^{(A)} + 2x_2 m_N^2 \tilde{\Phi}_6^{(A)} \right], \\ \tilde{\omega}_{13}^{(A)} &= 8m_N^2 m_c \left[m_c^2 \tilde{\Phi}_7^{(A)} + x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_6^{(A)} + x_2^2 m_N^2 \tilde{\Phi}_8^{(A)} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{21}^{(A)} &= 4\tilde{\Phi}_1^{(A)}, \quad \tilde{\omega}_{23}^{(A)} = 8m_N^2 m_c \left[m_c \tilde{\Phi}_7^{(A)} - x_2 m_N \tilde{\Phi}_8^{(A)} \right], \\ \tilde{\omega}_{22}^{(A)} &= 2m_N \left[2m_c \tilde{\Phi}_3^{(A)} - x_2 m_N \tilde{\Phi}_4^{(A)} + 2m_N \tilde{\Phi}_7^{(A)} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{31}^{(A)} &= \left[2((P - q)^2 - m_N^2 - q^2) \tilde{\Phi}_1^{(A)} + m_N m_c \tilde{\Phi}_2^{(A)}, \right. \\ &\quad \left. + m_N^2 \tilde{\Phi}_9^{(A)} + 2x_2 m_N^2 (\tilde{\Phi}_1^{(A)} - \tilde{\Phi}_{10}^{(A)}) - 2 \frac{m_N^2}{x_2} \tilde{\Phi}_7^{(A)} \right], \\ \tilde{\omega}_{32}^{(A)} &= m_N^2 \left[2(q^2 - x_2^2 m_N^2) \tilde{\Phi}_3^{(A)} - 2 \frac{q^2 + m_c^2}{x_2} \tilde{\Phi}_7^{(A)} + x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_{11}^{(A)}, \right. \\ &\quad \left. + m_c^2 (\tilde{\Phi}_5^{(A)} - 2\tilde{\Phi}_3^{(A)}) + 2m_N (m_c + x_2 m_N) \tilde{\Phi}_8^{(A)} \right], \\ \tilde{\omega}_{33}^{(A)} &= \frac{4m_c^2 m_N^2}{x_2} \left[(m_c^2 - q^2) \tilde{\Phi}_7^{(A)} + x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_{12}^{(A)} + x_2^2 m_N^2 \tilde{\Phi}_8^{(A)} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{41}^{(A)} &= 2m_N \left[(\tilde{\Phi}_1^{(A)} + \tilde{\Phi}_{10}^{(A)}) - \frac{\tilde{\Phi}_3^{(A)}}{x_2} \right], \quad \tilde{\omega}_{43}^{(A)} = 4m_N^3 m_c \tilde{\Phi}_{13}^{(A)}, \\ \tilde{\omega}_{42}^{(A)} &= \frac{m_N}{x_2} \left[2(m_c^2 + x_2^2 m_N^2 - q^2) \tilde{\Phi}_3^{(A)} - x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_{11}^{(A)} + 2x_2 m_N^2 \tilde{\Phi}_{13}^{(A)} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{51}^{(A)} &= 2m_N \tilde{\Phi}_2^{(A)}, \quad \tilde{\omega}_{53}^{(A)} = 8m_N^3 m_c \left[m_c \tilde{\Phi}_{14}^{(A)} - x_2 m_N \tilde{\Phi}_8^{(A)} \right], \\ \tilde{\omega}_{52}^{(A)} &= 2m_N^2 \left[-x_2 m_N \tilde{\Phi}_4^{(A)} - m_c (\tilde{\Phi}_5^{(A)} + 2\tilde{\Phi}_3^{(A)}) + 2m_N \tilde{\Phi}_{14}^{(A)} \right],\end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_{61}^{(A)} = 0, \quad \tilde{\omega}_{62}^{(A)} = 2m_N^2 \tilde{\Phi}_4^{(A)}, \quad \tilde{\omega}_{63}^{(A)} = 8m_N^3 m_c \tilde{\Phi}_8^{(A)}. \quad (\text{C.16})$$

Die Funktionen $\tilde{\Phi}_i^{(\mathcal{A})}$ sind dabei gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{A})} &= \tilde{A}_1 + 2\tilde{T}_1 + \tilde{V}_1, \\
\tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{A})} &= 2\tilde{A}_3 - 2\tilde{P}_1 + 2\tilde{S}_1 - 2\tilde{T}_1 + \tilde{T}_{123} + \tilde{T}_{127} - 2\tilde{V}_3, \\
\tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{A})} &= \tilde{A}_{123} - \tilde{T}_{123} - \tilde{T}_{127} - \tilde{V}_{123}, \\
\tilde{\Phi}_4^{(\mathcal{A})} &= -\tilde{A}_{34} + \tilde{A}_{1345} - 2\tilde{P}_{21} - 2\tilde{S}_{12} - 2\tilde{T}_{127} + 2\tilde{T}_{158} - \tilde{T}_{234578} - \tilde{V}_{43} + \tilde{V}_{1345}, \\
\tilde{\Phi}_5^{(\mathcal{A})} &= -\tilde{A}_{34} - 2\tilde{A}_{123} - \tilde{A}_{1345} + 4\tilde{T}_{127} - 4\tilde{T}_{158} + 2\tilde{T}_{234578} - \tilde{V}_{43} + 2\tilde{V}_{123} - \tilde{V}_{1345}, \\
\tilde{\Phi}_6^{(\mathcal{A})} &= \tilde{A}_1^M + \tilde{T}_1^M + \tilde{V}_1^M - \tilde{A}_{123456} + \tilde{T}_{125678} - \tilde{T}_{234578} + \tilde{V}_{123456}, \\
\tilde{\Phi}_7^{(\mathcal{A})} &= -\tilde{A}_1^M - 2\tilde{T}_1^M - \tilde{V}_1^M + \tilde{T}_{234578}, \\
\tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{A})} &= \tilde{A}_{123456} - 2\tilde{T}_{125678} + \tilde{T}_{234578} - \tilde{V}_{123456}, \\
\tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{A})} &= -2\tilde{A}_{34} - 2\tilde{A}_{123} - 2\tilde{P}_{21} - 2\tilde{S}_{12} + 2\tilde{T}_{127} - 2\tilde{T}_{158} + \tilde{T}_{234578} - 2\tilde{V}_{43} + 2\tilde{V}_{123}, \\
\tilde{\Phi}_{10}^{(\mathcal{A})} &= \tilde{A}_{123} - \tilde{T}_{123} - \tilde{T}_{127} - \tilde{V}_{123}, \\
\tilde{\Phi}_{11}^{(\mathcal{A})} &= 2\tilde{A}_{34} + 2\tilde{P}_{21} + 2\tilde{S}_{12} + 2\tilde{T}_{123} + 2\tilde{T}_{158} - \tilde{T}_{234578} + 2\tilde{V}_{43}, \\
\tilde{\Phi}_{12}^{(\mathcal{A})} &= \tilde{T}_1^M + \tilde{T}_{125678} - \tilde{T}_{234578}, \\
\tilde{\Phi}_{13}^{(\mathcal{A})} &= -\tilde{A}_1^M - 2\tilde{T}_1^M - \tilde{V}_1^M - \tilde{A}_{123456} + 2\tilde{T}_{125678} + \tilde{V}_{123456}, \\
\tilde{\Phi}_{14}^{(\mathcal{A})} &= \tilde{T}_1^M + \tilde{A}_{123456} - \tilde{T}_{125678} - \tilde{V}_{123456}.
\end{aligned}$$

C.2.3. Axialvektor-Übergang

Die Strukturen $\bar{\Pi}_j^{(i)}((P - q)^2, q^2)$ der Korrelationsfunktion für den Axialvektor-Übergangstrom $j_{\mu 5}$ mit $i = \mathcal{P}, \mathcal{A}$ und $j = 1, \dots, 6$ sind gegeben durch die entsprechende Modifizierung von Gleichung (5.17). Die Koeffizientenfunktionen $\bar{\omega}_{jn}^{(i)}$ können dabei aus denen für den Vektorstrom $\tilde{\omega}_{jn}^{(i)}$ gewonnen werden, indem dort die Vorzeichen von $\tilde{\omega}_{2n}^{(\mathcal{P})}$, $\tilde{\omega}_{3n}^{(\mathcal{P})}$, $\tilde{\omega}_{6n}^{(\mathcal{P})}$, $\tilde{\omega}_{1n}^{(\mathcal{A})}$, $\tilde{\omega}_{4n}^{(\mathcal{A})}$ und $\tilde{\omega}_{5n}^{(\mathcal{A})}$ geändert werden, sowie $m_c \rightarrow -m_c$ gesetzt.

C.3. Ergebnisse der Korrelationsfunktionen für die $\Sigma_c \rightarrow N$ -Formfaktoren

C.3.1. Pseudoskalarer Übergang

Die Beiträge zu Korrelationsfunktion $\Pi_j^{(i)}((P-q)^2, q^2)$ des pseudoskalaren Übergangsstroms j_5 sind durch Gleichung (5.17) gegeben, mit $i = \mathcal{I}, \mathcal{T}$ und $j = 1, 2$.

- Interpolation von Σ_c durch den Ioffe-Strom

Die Koeffizientenfunktionen $\omega_{jn}^{(\mathcal{I})}$ können aus $\omega_{jn}^{(\mathcal{A})}$ erhalten werden, indem das Vorzeichen der Terme mit skalaren, pseudoskalaren und Tensor-Verteilungamplituden geändert, sowie die Ersetzung $m_c \rightarrow -m_c$ durchgeführt wird.

- Interpolation von Σ_c durch den Tensor-Strom

Die Koeffizientenfunktionen $\omega_{jn}^{(\mathcal{T})}$ lauten hier:

$$\begin{aligned}
 \omega_{11}^{(\mathcal{T})} &= 2 \left[4 \left((P-q)^2 - q^2 - m_N^2 \right) \Phi_1^{(\mathcal{T})} + m_N m_c \Phi_2^{(\mathcal{T})} + 2 x_2 m_N^2 (3\Phi_1^{(\mathcal{T})} + \Phi_3^{(\mathcal{T})}), \right. \\
 &\quad \left. + m_N^2 \Phi_4^{(\mathcal{T})} + \frac{4m_N^2}{x_2} \Phi_5^{(\mathcal{T})} \right], \\
 \omega_{12}^{(\mathcal{T})} &= 2m_N^2 \left[4(x_2^2 m_N^2 - q^2) \Phi_6^{(\mathcal{T})} + x_2 m_N m_c \Phi_7^{(\mathcal{T})} + m_c^2 \Phi_4^{(\mathcal{T})} - \frac{2}{x_2} (2(q^2 + m_c^2), \right. \\
 &\quad \left. + x_2^2 m_N^2) \Phi_5^{(\mathcal{T})} - 6x_2 m_N^2 \Phi_8^{(\mathcal{T})} \right], \\
 \omega_{13}^{(\mathcal{T})} &= \frac{8m_N^2 m_c^2}{x_2} \left[2(q^2 - m_c^2) \Phi_5^{(\mathcal{T})} + x_2 m_N m_c \Phi_9^{(\mathcal{T})} - x_2^2 m_N^2 (3\Phi_8^{(\mathcal{T})} + \Phi_5^{(\mathcal{T})}) \right], \\
 \\
 \omega_{21}^{(\mathcal{T})} &= 4m_N \left[-\Phi_1^{(\mathcal{T})} + \Phi_3^{(\mathcal{T})} - \frac{2}{x_2} \Phi_6^{(\mathcal{T})} \right], & \omega_{23}^{(\mathcal{T})} &= 8m_N^3 m_c^2 \left[\Phi_5^{(\mathcal{T})} - 3\Phi_8^{(\mathcal{T})} \right], \\
 \omega_{22}^{(\mathcal{T})} &= \frac{2m_N}{x_2} \left[4(m_c^2 + x_2^2 m_N^2 - q^2) \Phi_6^{(\mathcal{T})} + x_2 m_N m_c \Phi_7^{(\mathcal{T})} \right. \\
 &\quad \left. - 2x_2 m_N^2 (3\Phi_8^{(\mathcal{T})} + \Phi_5^{(\mathcal{T})}) \right], & & \tag{C.17}
 \end{aligned}$$

mit den Funktionen $\Phi_i^{(\mathcal{T})}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_1 - \tilde{A}_1, & \Phi_3^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_{123} + \tilde{A}_{123}, \\
\Phi_2^{(\mathcal{T})} &= 6\tilde{P}_1 + 6\tilde{S}_1 - 6\tilde{T}_1 + 12\tilde{T}_7 + \tilde{T}_{123} + 5\tilde{T}_{127}, \\
\Phi_4^{(\mathcal{T})} &= 3\tilde{A}_{34} + 2\tilde{A}_{123} + 3\tilde{A}_{1345} - 3\tilde{V}_{43} + 2\tilde{V}_{123} - 3\tilde{V}_{1345}, \\
\Phi_5^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_1^M - \tilde{A}_1^M, & \Phi_6^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_{123} + \tilde{A}_{123}, \\
\Phi_7^{(\mathcal{T})} &= -6\tilde{P}_{21} + 6\tilde{S}_{12} + 12\tilde{T}_{78} + 2\tilde{T}_{123} + 4\tilde{T}_{127} + 6\tilde{T}_{158} - \tilde{T}_{234578}, \\
\Phi_8^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_{123456} + \tilde{A}_{123456}, & \Phi_9^{(\mathcal{T})} &= 3\tilde{T}_1^M + 3\tilde{T}_{125678} - \tilde{T}_{234578}.
\end{aligned}$$

C.3.2. Vektor-Übergang

Die Beiträge zu Korrelationsfunktion $\Pi_j^{(i)}((P-q)^2, q^2)$ des Vektor-Übergangstroms j_μ sind durch Gleichung (5.17) gegeben, mit $i = \mathcal{I}, \mathcal{T}$ und $j = 1, \dots, 6$.

- Interpolation von Σ_c durch den Ioffe-Strom

Die Koeffizientenfunktionen $\tilde{\omega}_{jn}^{(\mathcal{I})}$ können aus denen des Axialvektorstroms $\tilde{\omega}_{jn}^{(\mathcal{A})}$ erhalten werden, indem das Vorzeichen aller Terme geändert wird, die Vektor- und Axialvektor-Verteilungsamplituden enthalten, sowie die Ersetzung $m_c \rightarrow -m_c$ durchgeführt wird.

- Interpolation von Σ_c durch den Tensor-Strom

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{11}^{(\mathcal{T})} &= 4 \left[-4m_c \tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{T})} + x_2 m_N \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{T})} + 4m_N \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} \right], \\
\tilde{\omega}_{12}^{(\mathcal{T})} &= 4m_N \left[4q^2 \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} - x_2^2 m_N^2 (4\tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} + 2\tilde{\Phi}_4^{(\mathcal{T})} + 3\tilde{\Phi}_5^{(\mathcal{T})}) + 2x_2 m_N m_c (\tilde{\Phi}_6^{(\mathcal{T})} - 2\tilde{\Phi}_7^{(\mathcal{T})}) \right. \\
&\quad \left. + 2x_2 m_N^2 (\tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})} + \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})}) \right], \\
\tilde{\omega}_{13}^{(\mathcal{T})} &= 16m_N^2 \left[x_2 m_N m_c^2 \tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})} + 2x_2^2 m_N^2 m_c \tilde{\Phi}_{10}^{(\mathcal{T})} + x_2 m_N (2(q^2 - x_2^2 m_N^2) - m_c^2) \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} \right. \\
&\quad \left. + 2m_c^3 \tilde{\Phi}_{11}^{(\mathcal{T})} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{21}^{(\mathcal{T})} &= 0, & \tilde{\omega}_{23}^{(\mathcal{T})} &= 32m_N^2 \left[(x_2^2 m_N^2 - q^2) \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} - x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_{10}^{(\mathcal{T})} \right], \\
\tilde{\omega}_{22}^{(\mathcal{T})} &= 4m_N \left[4m_c \tilde{\Phi}_{12}^{(\mathcal{T})} + x_2 m_N (2\tilde{\Phi}_4^{(\mathcal{T})} + 3\tilde{\Phi}_5^{(\mathcal{T})}) - 8m_N \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{31}^{(\mathcal{T})} &= 2m_N \left[2m_c(\tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{T})} - \tilde{\Phi}_{13}^{(\mathcal{T})}) + x_2 m_N(\tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{T})} + 4\tilde{\Phi}_{14}^{(\mathcal{T})}) \right. \\
 &\quad \left. + 2m_N(-2(\tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} + \tilde{\Phi}_4^{(\mathcal{T})}) + \tilde{\Phi}_5^{(\mathcal{T})}) \right], \\
 \tilde{\omega}_{32}^{(\mathcal{T})} &= 2m_N^2 \left[-x_2 m_N m_c(\tilde{\Phi}_6^{(\mathcal{T})} + 2\tilde{\Phi}_{12}^{(\mathcal{T})}) + 4m_N m_c \tilde{\Phi}_{10}^{(\mathcal{T})} + 2x_2 m_N^2(\tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})} + \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})}) \right. \\
 &\quad \left. + m_c^2 \left(-2\tilde{\Phi}_4^{(\mathcal{T})} + 5\tilde{\Phi}_5^{(\mathcal{T})} - \frac{8}{x_2} \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} \right) + 4(x_2^2 m_N^2 - q^2) \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} \right], \\
 \tilde{\omega}_{33}^{(\mathcal{T})} &= \frac{8m_N^2 m_c^2}{x_2} \left[2(x_2^2 m_N^2 - q^2 + m_c^2) \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} + x_2^2 m_N^2(\tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})} + \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})}) \right. \\
 &\quad \left. - x_2 m_N m_c(\tilde{\Phi}_{10}^{(\mathcal{T})} + \tilde{\Phi}_{11}^{(\mathcal{T})}) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{41}^{(\mathcal{T})} &= \frac{2m_N}{x_2} \left[4\tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} - x_2(\tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{T})} + 4\tilde{\Phi}_{14}^{(\mathcal{T})}) \right], \\
 \tilde{\omega}_{42}^{(\mathcal{T})} &= \frac{2m_N}{x_2} \left[4(q^2 - x_2^2 m_N^2 - m_c^2) \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} + x_2 m_N m_c(\tilde{\Phi}_6^{(\mathcal{T})} + 2\tilde{\Phi}_7^{(\mathcal{T})}) \right. \\
 &\quad \left. - 2x_2 m_N^2(\tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})} + \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})}) \right], \\
 \tilde{\omega}_{43}^{(\mathcal{T})} &= -8m_N^3 m_c^2(\tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})} + \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{51}^{(\mathcal{T})} &= -4m_N \left[\tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{T})} + \frac{4\tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})}}{x_2} \right], \\
 \tilde{\omega}_{52}^{(\mathcal{T})} &= \frac{4m_N}{x_2} \left[4(m_c^2 - q^2) \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} + x_2^2 m_N^2(4\tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} + 2\tilde{\Phi}_4^{(\mathcal{T})} + 3\tilde{\Phi}_5^{(\mathcal{T})}) \right. \\
 &\quad \left. - 2x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_6^{(\mathcal{T})} - 2x_2 m_N^2(\tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})} + \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})}) \right], \\
 \tilde{\omega}_{53}^{(\mathcal{T})} &= 16m_N^3 \left[2(x_2^2 m_N^2 - q^2) \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} + m_c^2(3\tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} - \tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})}) - 2x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_{10}^{(\mathcal{T})} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{61}^{(\mathcal{T})} &= 0, \quad \tilde{\omega}_{62}^{(\mathcal{T})} = 4m_N^2 \left[-2\tilde{\Phi}_4^{(\mathcal{T})} - 3\tilde{\Phi}_5^{(\mathcal{T})} + \frac{8}{x_2} \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} \right], \\
 \tilde{\omega}_{63}^{(\mathcal{T})} &= \frac{32m_N^2}{x_2} \left[(q^2 - x_2^2 m_N^2 - m_c^2) \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} + x_2 m_N m_c \tilde{\Phi}_{10}^{(\mathcal{T})} \right]. \quad (\text{C.18})
 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenfunktionen $\tilde{\Phi}_i^{(\mathcal{T})}$ lauten:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_1^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_1 - \tilde{A}_1, & \tilde{\Phi}_2^{(\mathcal{T})} &= 2\tilde{P}_1 + 2\tilde{S}_1 - 2\tilde{T}_1 + 4\tilde{T}_7 - \tilde{T}_{123} + 3\tilde{T}_{127}, \\
 \tilde{\Phi}_3^{(\mathcal{T})} &= \tilde{T}_{123} - \tilde{T}_{127}, & \tilde{\Phi}_4^{(\mathcal{T})} &= \tilde{P}_{21} - \tilde{S}_{12} - 2\tilde{T}_{78} - \tilde{T}_{123} - \tilde{T}_{158}, \\
 \tilde{\Phi}_5^{(\mathcal{T})} &= \tilde{T}_{234578}, & \tilde{\Phi}_6^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_{43} + \tilde{V}_{1345} - \tilde{A}_{34} - \tilde{A}_{1345}, \\
 \tilde{\Phi}_7^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_{123} + \tilde{A}_{123}, & \tilde{\Phi}_8^{(\mathcal{T})} &= \tilde{T}_1^M + \tilde{T}_{125678}, \\
 \tilde{\Phi}_9^{(\mathcal{T})} &= \tilde{T}_{234578}, & \tilde{\Phi}_{10}^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_{123456} + \tilde{A}_{123456}, \\
 \tilde{\Phi}_{11}^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_1^M - \tilde{A}_1^M, & \tilde{\Phi}_{12}^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_{123} + \tilde{A}_{123}, \\
 \tilde{\Phi}_{13}^{(\mathcal{T})} &= \tilde{V}_{123} + \tilde{A}_{123}, & \tilde{\Phi}_{14}^{(\mathcal{T})} &= \tilde{T}_{123} - \tilde{T}_{127}.
 \end{aligned}$$

C.3.3. Axialvektor-Übergang

Die Beiträge $\bar{\Pi}_j^{(i)}((P - q)^2, q^2)$ zur Korrelationsfunktion für den Axialvektorstrom $j_{\mu 5}$, mit $i = \mathcal{I}, \mathcal{T}$ und $j = 1, \dots, 6$ sind durch die entsprechende Modifizierung von Gleichung (5.17) gegeben. Die Koeffizientenfunktionen $\bar{\omega}_{jn}^{(i)}$ können aus $\tilde{\omega}_{jn}^{(i)}$ erhalten werden, indem das Vorzeichen der Terme $\tilde{\omega}_{2n}^{(\mathcal{T})}$, $\tilde{\omega}_{3n}^{(\mathcal{T})}$, $\tilde{\omega}_{6n}^{(\mathcal{T})}$, $\tilde{\omega}_{1n}^{(\mathcal{I})}$, $\tilde{\omega}_{4n}^{(\mathcal{I})}$ und $\tilde{\omega}_{5n}^{(\mathcal{I})}$ geändert, sowie die Ersetzung $m_c \rightarrow -m_c$ durchgeführt wird.

C.4. Ausdrücke für die doppelte Dispersionsdarstellung

Hier werden die zur Darstellung der Potenzen $n = 2$ und $n = 3$ als doppelte Dispersionsrelation notwendigen Ausdrücke angegeben, die in der in Abschnitt 5.2.4 vorgestellten Methode benötigt werden. Dabei wurde Terme, die durch die später anzuwendende Borel-Transformation eliminiert werden, nicht mit angeschrieben.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx_2 \frac{x_2^k}{[m_c^2 - (x_2 P - q)^2]^2} &= - \int_{m_c^2}^{+\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{j=2}^k \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds'}{s' - q^2} (-1)^{k-j} \right. \\
 &\cdot \frac{j-1}{(2m_N^2)^{k-1}} C_k^j \cos\left(\frac{j-2}{2}\pi\right) (s - s' - m_N^2)^{k-j} [(s' - t_1)(t_2 - s')]^{\frac{j-3}{2}} \theta(k-2) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds'}{[(s' - t_1)(t_2 - s')]^{3/2}} \frac{(-1)^k}{(2m_N^2)^{k-1}} \\
 &\cdot \left[\frac{(s - s' - m_N^2)^k}{s' - q^2} - \frac{t_2 - s'}{t_2 - t_1} \frac{(s - t_1 - m_N^2)^k}{t_1 - q^2} - \frac{s' - t_1}{t_2 - t_1} \frac{(s - t_2 - m_N^2)^k}{t_2 - q^2} \right] \\
 &\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds'}{s' - q^2} \delta(m_c^2 - s) \delta(m_c^2 + m_N^2 - s') \right\} \quad (C.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx_2 \frac{x_2^k}{[m_c^2 - (x_2 P - q)^2]^3} &= \frac{1}{2} \int_{m_c^2}^{+\infty} \frac{ds}{s - (P - q)^2} \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{j=4}^k \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds'}{s' - q^2} (-1)^{k-j} \right. \\
 &\cdot \frac{(j-1)(j-3)}{(2m_N^2)^{k-2}} C_k^j \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) (s - s' - m_N^2)^{k-j} [(s' - t_1)(t_2 - s')]^{\frac{j-5}{2}} \theta(k-4) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds'}{[(s' - t_1)(t_2 - s')]^{3/2}} \frac{(-1)^k}{(2m_N^2)^{k-2}} C_k^2 \left[\frac{(s - s' - m_N^2)^{k-2}}{s' - q^2} \right. \\
 &\left. - \frac{t_2 - s'}{t_2 - t_1} \frac{(s - t_1 - m_N^2)^{k-2}}{t_1 - q^2} - \frac{s' - t_1}{t_2 - t_1} \frac{(s - t_2 - m_N^2)^{k-2}}{t_2 - q^2} \right] \theta(k-2) \\
 &+ \frac{3}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds'}{[(s' - t_1)(t_2 - s')]^{5/2}} \frac{(-1)^k}{(2m_N^2)^{k-2}} \left[\frac{(s - s' - m_N^2)^k}{s' - q^2} - \frac{1}{(t_2 - t_1)^3} \right. \\
 &\left. \left(\frac{(t_2 - s')^2 (2s' - 3t_1 + t_2)}{t_1 - q^2} (s - t_1 - m_N^2)^k - \frac{(s' - t_1)^2 (2s' - 3t_2 + t_1)}{t_2 - q^2} (s - t_2 - m_N^2)^k \right) \right. \\
 &+ \frac{(s' - t_1)(t_2 - s')}{(t_2 - t_1)^2} \left(\frac{(t_2 - s')(s - t_1 - m_N^2)^k}{(t_1 - q^2)^2} + k \frac{(t_2 - s')(s - t_1 - m_N^2)^{k-1}}{t_1 - q^2} \theta(k-1) \right. \\
 &\left. \left. - \frac{(s' - t_1)(s - t_2 - m_N^2)^k}{(t_2 - q^2)^2} - k \frac{(s' - t_1)(s - t_2 - m_N^2)^{k-1}}{t_2 - q^2} \theta(k-1) \right) \right] \\
 &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds'}{s' - q^2} \frac{(-1)^k}{(2m_N^2)^k} \left[-\delta'(m_c^2 - s) \delta(m_c^2 + m_N^2 - s') (-2m_N^2)^k \right. \\
 &+ \frac{k(k-3)}{2} \delta(m_c^2 - s) \delta(m_c^2 + m_N^2 - s') (-2m_N^2)^{k-1} \theta(k-1) \\
 &\left. + \frac{1}{2} \delta(m_c^2 - s) \delta^{(2)}(m_c^2 + m_N^2 - s') (m_c^2 + m_N^2 - s')^k (m_c^2 + 3m_N^2 - s') \right] \left. \right\} \quad (C.20)
 \end{aligned}$$

Das Argument der Funktionen $t_{1/2}(s)$ wurde unterdrückt und es ist $\theta(k-a) = 1(0)$ für $l \geq a$ ($k < a$).

Literaturverzeichnis

- [1] S. Brandt, *The Harvest of a Century: Discoveries in Modern Physics in 100 Episodes*, Oxford University Press, 2009
- [2] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Fr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, 1986
- [3] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and leptons: An introductory course in modern particle physics*, John Wiley and Sons Inc., 1984
- [4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995
- [5] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc., 1980
- [6] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Inc., 1964
- [7] J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, 1992
- [8] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1-3, Cambridge University Press, 2005
- [9] F. W. Bopp, *Kerne, Hadronen und Elementarteilchen: Eine Einführung*, Teubner, 1989
- [10] H. Frauenfelder, E. M. Henley, *Teilchen und Kerne: subatomare Physik*, R. Oldenbourg Verlag, 1995
- [11] W. Kilian, *Übungen zu Strahlungskorrekturen in Eichtheorien*, Herbstschule für Hochenergiephysik Maria Laach, 2002
- [12] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984
- [13] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics (2nd edition)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998
- [14] Th. Mannel, *Effective Field Theories in Flavour Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004
- [15] A. J. Buras, *Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays*; publiziert in 'Les Houches 1997, Probing the standard model of particle interactions, Pt. 1', 281 (1997) [hep-ph/9806471]

- [16] G. Buchalla, A. J. Buras, M. E. Lautenbacher, *Weak decays beyond leading logarithms*, Rev. Mod. Phys. 68, 1125 (1996) [hep-ph/9512380]
- [17] K. Nakamura *et al.* [Particle Data Group], *Review of particle physics*, J. Phys. G 37, 075021 (2010) [pdg.lbl.gov]
- [18] M. Kobayashi, T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, Prog. Theor. Phys. 49, 652 (1973)
- [19] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*, Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963)
- [20] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, *Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry*, Phys. Rev. D 2, 1285 (1970)
- [21] A. Pich, *Aspects of quantum chromodynamics*; publiziert in 'Trieste 1999, Particle physics', 53-102, (1999) [hep-ph/0001118]
- [22] A. Khodjamirian, *Quantum chromodynamics and hadrons: An elementary introduction*; publiziert in 'Tsakhkadzor 2003, European school on high-energy physics', 173-222 (2004) [hep-ph/0403145]
- [23] A. V. Manohar, M. B. Wise, *Heavy Quark Physics*, Cambridge University Press, 2000
- [24] M. Neubert, *Heavy-quark symmetry*, Phys. Rept. 245, 259-396 (1994)
- [25] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], *Evidence for $D^0 - \bar{D}^0$ Mixing*, Phys. Rev. Lett. 98, 211802 (2007) [hep-ex/0703020]
- [26] I. I. Bigi, *No Pain, No Gain: On the Challenges and Promises of Charm Studies* (2009) [arXiv:0907.2950 (hep-ph)]
- [27] S. Scherer, *Introduction to chiral perturbation theory* Adv. Nucl. Phys. 27, 277 (2003) [hep-ph/0210398]
- [28] M. Di Pierro, *From Monte Carlo integration to lattice quantum chromodynamics: An Introduction*, (2000) [hep-lat/0009001]
- [29] A. S. Kronfeld, *Uses of effective field theory in lattice QCD*, (2002) [hep-lat/0205021]; publiziert in 'At the Frontier of Particle Physics / Handbook of QCD', Editor: M. A. Shifman (World Scientific, Singapore, 2001)
- [30] A. W. Thomas, W. Weise, *The Structure of the Nucleon*, WILEY-VCH Verlag, 2001
- [31] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, 2. Aufl., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002
- [32] U. Wiedner, *Future Prospects for Hadron Physics at PANDA*, Prog. Part. Nucl. Phys. 66, 477 (2011) [arXiv:1104.3961 (hep-ex)]

- [33] M. F. M. Lutz *et al.* [PANDA Collaboration], *Physics Performance Report for PANDA: Strong Interaction Studies with Antiprotons* (2009) [arXiv:0903.3905 (hep-ex)]
- [34] A. B. Henriques, B. H. Kellett, R. G. Moorhouse, *General Three Spinor Wave Functions and the Relativistic Quark Model*, *Annals Phys.* 93, 125 (1975)
- [35] B. L. Ioffe, *Calculation of baryon masses in Quantum Chromodynamics*, *Nucl. Phys. B* 188, 317 (1981); Erratum-*ibid.* B 191, 591 (1981)
- [36] E. V. Shuryak, *Hadrons Containing A Heavy Quark And QCD Sum Rules*, *Nucl. Phys. B* 198, 83 (1982)
- [37] Y. Chung, H. G. Dosch, M. Kremer, D. Schall, *Baryon Sum Rules And Chiral Symmetry Breaking*, *Nucl. Phys. B* 197, 55 (1982)
- [38] E. Bagan, M. Chabab, H. G. Dosch, S. Narison, *Baryon sum rules in the heavy quark effective theory*, *Phys. Lett. B* 301, 243 (1993)
- [39] V. M. Braun, A. Lenz, M. Wittmann, *Nucleon form factors in QCD*, *Phys. Rev. D* 73, 094019 (2006) [hep-ph/0604050]
- [40] Yu. V. Novozhilov, *Introduction to elementary particle theory*, Pergamon Press Ltd., 1975
- [41] P. D. B. Collins, *An introduction to Regge Theory & High Energy Physics*, Cambridge University Press, 1977
- [42] A. V. Radyushkin, *Introduction to QCD sum rule approach*, (2001) [hep-ph/0101227]; publiziert in 'Strong Interactions at Low and Intermediate Energies', Editor: J.L. Goity (World Scientific, Singapore, 2000)
- [43] S. J. Brodsky, G. R. Farrar, *Scaling laws at large transverse momentum*, *Phys. Rev. Lett.* 31, 1153 (1973)
- [44] D. Becirevic, A. B. Kaidalov, *Comment on the heavy \rightarrow light form factors*, *Phys. Lett. B* 478, 417 (2000) [hep-ph/9904490]
- [45] C. G. Boyd, B. Grinstein, R.F. Lebed, *Constraints on form factors for exclusive semileptonic heavy to light meson decays*, *Phys. Rev. Lett.* 74, 4603 (1995) [hep-ph/9412324]; L. Lellouch, *Lattice-Constrained Unitarity Bounds for $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$ Decays*, *Nucl. Phys. B* 479, 353 (1996) [hep-ph/9509358]; M. C. Arnesen, B. Grinstein, I. Z. Rothstein, I. W. Stewart, *A precision model independent determination of $|V_{ub}|$ from $B \rightarrow \pi \ell \nu$* , *Phys. Rev. Lett.* 95, 071802 (2005) [hep-ph/0504209]
- [46] C. Bourrely, I. Caprini, L. Lellouch, *Model-independent description of $B \rightarrow \pi \ell \nu$ decays and a determination of $|V_{ub}|$* , *Phys. Rev. D* 79, 013008 (2009) [arXiv:0807.2722 (hep-ph)]; [Erratum-*ibid.* D 82, 099902 (2010)]

- [47] S. Descotes-Genon, A. Le Yaouanc, *Parametrisations of the $D \rightarrow Kl\nu$ form factor and the determination of \hat{g}* , J. Phys. G 35, 115005 (2008) [arXiv:0804.0203 (hep-ph)]
- [48] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *QCD and resonance physics. Theoretical foundations*, Nucl. Phys. B 147, 385 (1979)
- [49] P. Colangelo, A. Khodjamirian, *QCD Sum Rules, A modern perspective*, (2000) [hep-ph/0010175]; publiziert in 'At the Frontier of Particle Physics / Handbook of QCD', Editor: M. A. Shifman (World Scientific, Singapore, 2001)
- [50] E. de Rafael, *An Introduction to sum rules in QCD: Course*, (1998) [hep-ph/9802448]; publiziert in 'Les Houches 1997, Probing the standard model of particle interactions, Pt. 2', 1171-1218
- [51] S. Narison, *QCD spectral sum rules*, World Scientific Publishing Co., 1989
- [52] A. Khodjamirian, R. Rückl, *QCD Sum Rules for Exclusive Decays of Heavy Mesons*, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. 15, 345 (1998) [hep-ph/9801443]
- [53] M. A. Shifman (Editor), *Vacuum Structure and QCD Sum Rules*, Elsevier Science Publishers B.V., 1992
- [54] M. A. Shifman, *Snapshots of hadrons or The story of how the vacuum medium determines the properties of the classical mesons which are produced, live and die in the QCD vacuum*, Prog. Theor. Phys. Suppl. 131, 1-71 (1998) [hep-ph/9802214]
- [55] V. M. Braun, *Applications of QCD*, publiziert in 'Caramulo 2000, High-energy physics', 43 (2000)
- [56] B. L. Ioffe, *QCD at low energies*, Prog. Part. Nucl. Phys. 56, 232 (2006) [hep-ph/0502148]
- [57] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Calculations in External Fields in Quantum Chromodynamics. Technical Review.*, Fortsch. Phys. 32, 585 (1984)
- [58] M. A. Shifman, *Quark-Hadron Duality* (2000) [hep-ph/0009131]; publiziert in 'At the Frontier of Particle Physics / Handbook of QCD', Editor: M. Shifman (World Scientific, Singapore, 2001)
- [59] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], *Review of particle physics*, Phys. Lett. B 667, 1 (2008)
- [60] J. H. Kuhn, M. Steinhauser, C. Sturm, *Heavy quark masses from sum rules in four-loop approximation*, Nucl. Phys. B 778, 192 (2007) [hep-ph/0702103]
- [61] R. Boughezal, M. Czakon, T. Schutzmeier, *Charm and bottom quark masses from perturbative QCD*, Phys. Rev. D 74, 074006 (2006) [hep-ph/0605023]

- [62] I. Allison *et al.* [HPQCD Collaboration], *High-Precision Charm-Quark Mass from Current-Current Correlators in Lattice and Continuum QCD*, Phys. Rev. D 78, 054513 (2008) [arXiv:0805.2999 (hep-lat)]
- [63] G. Duplancic, A. Khodjamirian, Th. Mannel, B. Melic, N. Offen, *Light-cone sum rules for $B \rightarrow \pi$ form factors revisited*, JHEP 0804, 014 (2008) [arXiv:0801.1796 (hep-ph)]
- [64] M. Jamin, B. O. Lange, *f_B and f_{B_s} from QCD sum rules*, Phys. Rev. D 65, 056005 (2002) [arXiv:hep-ph/0108135]
- [65] A. A. Penin, M. Steinhauser, *Heavy-Light Meson Decay Constant from QCD Sum Rules in Three-Loop Approximation*, Phys. Rev. D 65, 054006 (2002) [arXiv:hep-ph/0108110]
- [66] B. I. Eisenstein *et al.* [CLEO Collaboration], *Precision Measurement of $\mathcal{B}(D^+ \rightarrow \mu^+\nu)$ and the Pseudoscalar Decay Constant f_{D^+}* , Phys. Rev. D 78, 052003 [0806.2112 (hep-ex)] (2008)
- [67] C. Bernard *et al.*, *B and D Meson Decay Constants*, PoS LATTICE2008, 278 (2008) [arXiv:0904.1895 (hep-lat)]
- [68] E. Bagan, M. Chabab, H. G. Dosch, S. Narison, *The heavy baryons $\Sigma_{c,b}$ from QCD spectral sum rules*, Phys. Lett. B 278, 367 (1992)
- [69] E. Bagan, M. Chabab, H. G. Dosch, S. Narison, *Spectra of heavy baryons from QCD spectral sum rules*, Phys. Lett. B 287, 176 (1992)
- [70] V. M. Braun, *Light-cone sum rules*, (1998) [hep-ph/9801222]
- [71] I. I. Balitsky, V. M. Braun, A. V. Kolesnichenko, *Radiative Decay $\Sigma^+ \rightarrow P\gamma$ In Quantum Chromodynamics*, Nucl. Phys. B 312, 509 (1989)
- [72] V. M. Braun, I. E. Filyanov, *QCD Sum Rules in Exclusive Kinematics and Pion Wave Function*, Z. Phys. C 44, 157 (1989)
- [73] V. L. Chernyak, I. R. Zhitnitsky, *B Meson Exclusive Decays Into Baryons*, Nucl. Phys. B 345, 137 (1990)
- [74] A. Khodjamirian, Th. Mannel, N. Offen, *Form-factors from light-cone sum rules with B-meson distribution amplitudes*, Phys. Rev. D 75, 054013 (2007) [hep-ph/0611193]
- [75] S. Faller, A. Khodjamirian, Ch. Klein, Th. Mannel, *$B \rightarrow D^{(*)}$ Form Factors from QCD Light-Cone Sum Rules*, Eur. Phys. J. C 60, 603 (2009) [arXiv:0809.0222 (hep-ph)]
- [76] I. I. Balitsky, V. M. Braun, *Evolution equations for QCD string operators*, Nucl. Phys. B 311, 541 (1989)

- [77] V. M. Belyaev, V. M. Braun, A. Khodjamirian, R. Rückl, *$D^*D\pi$ and $B^*B\pi$ couplings in QCD*, Phys. Rev. D 51, 6177 (1995) [hep-ph/9410280]
- [78] P. Ball, V. M. Braun, A. Lenz, *Higher-twist distribution amplitudes of the K meson in QCD*, JHEP 0605, 004 (2006) [hep-ph/0603063]
- [79] G. P. Lepage, S. J. Brodsky, *Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for Hadronic Wave Functions and the Form-Factors of Mesons*, Phys. Lett. B 87, 359 (1979); *Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics*, Phys. Rev. D 22, 2157 (1980); *Large Angle Two Photon Exclusive Channels in Quantum Chromodynamics*, Phys. Rev. D 24, 1808 (1981)
- [80] A. V. Efremov, A. V. Radyushkin, *Factorization and Asymptotical Behavior of Pion Form-Factor in QCD*, Phys. Lett. B 94, 245 (1980); *Asymptotical Behavior of Pion Electromagnetic Form-Factor in QCD*, Theor. Math. Phys. 42, 97 (1980)
- [81] V. L. Chernyak, A. R. Zhitnitsky, *Asymptotic Behavior of Hadron Form-Factors in Quark Model*, JETP Lett. 25, 510 (1977)
- [82] S. J. Brodsky, G. P. Lepage, *Exclusive processes in quantum chromodynamics*, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. 5, 93 (1989); auch publiziert in 'Perturbative Quantum Chromodynamics', Editor: A. H. Mueller (World Scientific, Singapore, 1989)
- [83] V. M. Braun, G. P. Korchemsky, D. Müller, *The Uses of Conformal Symmetry in QCD*, (2003) [hep-ph/0306057]
- [84] V. L. Chernyak, A. R. Zhitnitsky, *Asymptotic behaviour of exclusive processes in QCD*, Phys. Rept. 112, 173 (1984)
- [85] A. Khodjamirian, R. Rückl, S. Weinzierl, O. I. Yakovlev, *Perturbative QCD correction to the light cone sum rule for the $B^*B\pi$ and $D^*D\pi$ couplings*, Phys. Lett. B 457, 245 (1999) [hep-ph/9903421]
- [86] V. M. Braun, R. J. Fries, N. Mahnke, E. Stein, *Higher twist distribution amplitudes of the nucleon in QCD*, Nucl. Phys. B 589, 381 (2000) [hep-ph/0007279]; [Erratum-ibid. B 607, 433 (2001)]
- [87] V. L. Chernyak, I. R. Zhitnitsky, *Nucleon Wave Function and Nucleon Form-Factors in QCD*, Nucl. Phys. B 246, 52 (1984)
- [88] A. Lenz, M. Gockeler, Th. Kaltenbrunner, N. Warkentin, *The Nucleon Distribution Amplitudes and their application to nucleon form factors and the $N \rightarrow \Delta$ transition at intermediate values of Q^2* , Phys. Rev. D 79, 093007 (2009) [arXiv:0903.1723 (hep-ph)]
- [89] V. M. Braun, A. Lenz, N. Mahnke, E. Stein, *Light cone sum rules for the nucleon form-factors*, Phys. Rev. D 65, 074011 (2002) [hep-ph/0112085]

- [90] J. Y. Ge *et al.* [CLEO Collaboration], *Study of $D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e, D^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e, D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e$, and $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 e^+ \nu_e$ in Tagged Decays of the $\psi(3770)$ Resonance*, Phys. Rev. D 79, 052010 (2009) [0810.3878 (hep-ex)]
- [91] D. Besson *et al.* [CLEO Collaboration], *Improved measurements of D meson semileptonic decays to π and K mesons*, Phys. Rev. D 80, 032005 (2009) [0906.2983 (hep-ex)]
- [92] G. S. Huang *et al.* [CLEO Collaboration], *Study of semileptonic charm decays $D^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu$ and $D^0 \rightarrow K^- l^+ \nu$* , Phys. Rev. Lett. 94, 011802 (2005) [hep-ex/0407035]; D. Cronin-Hennessy *et al.* [CLEO Collaboration], *A Study of the Decays $D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e, D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e, D^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$, and $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 e^+ \nu_e$* , Phys. Rev. Lett. 100, 251802 (2008) [arXiv:0712.0998 (hep-ex)]; S. Dobbs *et al.* [CLEO Collaboration], *A Study of the Semileptonic Charm Decays $D^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e, D^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e, D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e$, and $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 e^+ \nu_e$* , Phys. Rev. D 77, 112005 (2008) [arXiv:0712.1020 (hep-ex)]
- [93] J. M. Link *et al.* [FOCUS Collaboration], *Measurement of the branching ratio of the decay $D^0 \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu$ relative to $D^0 \rightarrow K^- \mu^+ \nu$* , Phys. Lett. B 607, 51 (2005) [hep-ex/0410067]; J. M. Link *et al.* [FOCUS Collaboration], *Measurements of the q^2 dependence of the $D^0 \rightarrow K^- \mu^+ \nu$ and $D^0 \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu$ form factors*, Phys. Lett. B 607, 233 (2005) [arXiv:hep-ex/0410037]
- [94] L. Widhalm *et al.* [Belle Collaboration], *Measurement of $D^0 \rightarrow \pi l \nu (K l \nu)$ form factors and absolute branching fractions*, Phys. Rev. Lett. 97, 061804 (2006) [arXiv:hep-ex/0604049]
- [95] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], *Measurement of the hadronic form factor in $D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e$ decays*, Phys. Rev. D 76, 052005 (2007) [arXiv:0704.0020 (hep-ex)]
- [96] G. Duplancic, B. Melic, *$B, B(s) \rightarrow K$ form factors: An Update of light-cone sum rule results*, Phys. Rev. D 78, 054015 (2008) [arXiv:0805.4170 (hep-ph)]
- [97] V. M. Belyaev, A. Khodjamirian, R. Rückl, *QCD calculation of the $B \rightarrow \pi, K$ form-factors*, Z. Phys. C 60, 349 (1993) [hep-ph/9305348]
- [98] A. Khodjamirian, R. Rückl, S. Weinzierl, O. I. Yakovlev, *Perturbative QCD correction to the $B \rightarrow \pi$ transition form factor*, Phys. Lett. B 410, 275 (1997) [hep-ph/9706303]
- [99] E. Bagan, P. Ball, V. M. Braun, *Radiative corrections to the decay $B \rightarrow \pi e \nu$ and the heavy quark limit*, Phys. Lett. B 417, 154 (1998) [hep-ph/9709243]
- [100] P. Ball, R. Zwicky, *New results on $B \rightarrow \pi, K, \eta$ decay formfactors from light-cone sum rules*, Phys. Rev. D 71, 014015 (2005) [hep-ph/0406232]
- [101] A. Khodjamirian, R. Rückl, S. Weinzierl, C. W. Winhart, O. I. Yakovlev,

- Predictions on $B \rightarrow \pi \bar{\ell} \nu_\ell$, $D \rightarrow \pi \bar{\ell} \nu_\ell$ and $D \rightarrow K \bar{\ell} \nu_\ell$ from QCD light-cone sum rules*, Phys. Rev. D 62, 114002 (2000) [hep-ph/0001297]
- [102] P. Ball, *Testing QCD sum rules on the light-cone in $D \rightarrow (\pi, K) \ell \nu$ decays*, Phys. Lett. B 641, 50 (2006) [hep-ph/0608116]
- [103] A. Khodjamirian, Ch. Klein, Th. Mannel, N. Offen, *Semileptonic charm decays $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ and $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$ from QCD Light-Cone Sum Rules*, Phys. Rev. D 80, 114005 (2009) [arXiv: 0907.2842 (hep-ph)]
- [104] A. Khodjamirian, Th. Mannel, N. Offen, Y.-M. Wang, *$B \rightarrow \pi \ell \nu_l$ Width and $|V_{ub}|$ from QCD Light-Cone Sum Rules*, Phys. Rev. D 83, 094031 (2011) [arXiv:1103.2655 (hep-ph)]
- [105] N. Offen, *B-Zerfallsformfaktoren aus QCD-Summenregeln*, Dissertation, Universität Siegen, Dezember 2007
- [106] K. G. Chetyrkin, A. Khodjamirian, *Strange Quark Mass from Pseudoscalar Sum Rule with $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ Accuracy*, Eur. Phys. J. C 46, 721 (2006) [arXiv:hep-ph/0512295]
- [107] M. Jamin, J. A. Oller, A. Pich, *Scalar $K\pi$ form factor and light quark masses*, Phys. Rev. D 74, 074009 (2006) [arXiv:hep-ph/0605095]
- [108] H. Leutwyler, *The ratios of the light quark masses*, Phys. Lett. B 378, 313 (1996) [hep-ph/9602366]
- [109] K. G. Chetyrkin, A. Khodjamirian, A. A. Pivovarov, *Towards NNLO Accuracy in the QCD Sum Rule for the Kaon Distribution Amplitude*, Phys. Lett. B 661, 250 (2008) [arXiv:0712.2999 (hep-ph)]
- [110] A. Khodjamirian, Th. Mannel, M. Melcher, *Kaon distribution amplitude from QCD sum rules*, Phys. Rev. D 70, 094002 (2004) [hep-ph/0407226]
- [111] A. Khodjamirian, R. Ruckl, C. W. Winhart, *The scalar $B \rightarrow \pi$ and $D \rightarrow \pi$ form factors in QCD*, Phys. Rev. D 58, 054013 (1998) [hep-ph/9802412]
- [112] P. Ball, *QCD sum rules on the light-cone, factorisation and SCET* (2003) [hep-ph/0308249]
- [113] A. Abada, D. Becirevic, P. Boucaud, J. P. Leroy, V. Lubicz, F. Mescia, *Heavy \rightarrow light semileptonic decays of pseudoscalar mesons from lattice QCD*, Nucl. Phys. B 619, 565 (2001) [hep-lat/0011065]
- [114] C. Aubin *et al.* [Fermilab Lattice Collaboration, MILC Collaboration and HPQCD Collaboration], *Semileptonic decays of D mesons in three-flavor lattice QCD*, Phys. Rev. Lett. 94, 011601 (2005) [arXiv:hep-ph/0408306]; C. Bernard *et al.*, *Visualization of semileptonic form factors from lattice QCD*, Phys. Rev. D 80, 034026 (2009) [arXiv:0906.2498 (hep-lat)]

- [115] A. Al-Haydari *et al.* [QCDSF Collaboration], *Semileptonic form factors $D \rightarrow \pi, K$ and $B \rightarrow \pi, K$ from a fine lattice*, Eur. Phys. J. A 43, 107 (2010) [arXiv:0903.1664 (hep-lat)]
- [116] R. J. Hill, *Heavy-to-light meson form factors at large recoil*, Phys. Rev. D 73, 014012 (2006) [hep-ph/0505129]
- [117] T. Becher, R. J. Hill, *Comment on form factor shape and extraction of $|V_{ub}|$ from $B \rightarrow \pi l \nu$* , Phys. Lett. B 633, 61 (2006) [hep-ph/0509090]
- [118] M. B. Voloshin, *On $B(e3)$ decay*, Sov. J. Nucl. Phys. 50, 105 (1989); C. A. Dominguez, J. G. Korner, K. Schilcher, *The scalar form-factor in the exclusive semileptonic decay of $B \rightarrow \pi + \tau + \nu_\tau$* , Phys. Lett. B 248, 399 (1990)
- [119] A. Khodjamirian, Ch.Klein, Th.Mannel, Y. M. Wang, *Form Factors and Strong Couplings of Heavy Baryons from QCD Light-Cone Sum Rules*, SI-HEP-2011-05 (2011)
- [120] A. Lenz, M. Wittmann, E. Stein, *Improved light-cone sum rules for the electromagnetic form factors of the nucleon*, Phys. Lett. B 581, 199 (2004) [hep-ph/0311082]
- [121] M. Q. Huang, D. W. Wang, *Light cone QCD sum rules for the semileptonic decay $\Lambda_b \rightarrow p l \bar{\nu}$* , Phys. Rev. D 69, 094003 (2004) [hep-ph/0401094]
- [122] Y. M. Wang, Y. Li, C. D. Lu, *Rare Decays of $\Lambda_b \rightarrow \Lambda + \gamma$ and $\Lambda_b \rightarrow \Lambda + l^+ l^-$ in the Light-cone Sum Rules*, Eur. Phys. J. C 59, 861 (2009) [arXiv:0804.0648 (hep-ph)]
- [123] Y. M. Wang, Y. L. Shen, C. D. Lu, *$\Lambda_b \rightarrow p, \Lambda$ transition form factors from QCD light-cone sum rules*, Phys. Rev. D 80, 074012 (2009) [arXiv:0907.4008 (hep-ph)]
- [124] Y. B. Dai, C. S. Huang, M. Q. Huang, C. Liu, *QCD sum rule analysis for the $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ semileptonic decay*, Phys. Lett. B 387, 379 (1996) [hep-ph/9608277]
- [125] C. S. Huang, C. F. Qiao, H. G. Yan, *Decay $\Lambda_b \rightarrow p l \bar{\nu}$ in QCD sum rules*, Phys. Lett. B 437, 403 (1998) [hep-ph/9805452]
- [126] C. S. Huang, H. G. Yan, *Exclusive rare decays of heavy baryons to light baryons: $\Lambda_b \rightarrow \Lambda \gamma$ and $\Lambda_b \rightarrow \Lambda l^+ l^-$* , Phys. Rev. D 59, 114022 (1999) [hep-ph/9811303]; [Erratum-ibid. D 61, 039901 (2000)]
- [127] F. S. Navarra, M. Nielsen, *$g_{ND\Lambda_c}$ from QCD sum rules*, Phys. Lett. B 443, 285 (1998) [hep-ph/9803467]
- [128] T. M. Aliev, K. Azizi, M. Savci, *Strong coupling constants of light pseudoscalar mesons with heavy baryons in QCD*, Phys. Lett. B 696, 220 (2011) [arXiv:1009.3658 (hep-ph)]

- [129] D. Jido, N. Kodama, M. Oka, *Negative-parity Nucleon Resonance in the QCD Sum Rule*, Phys. Rev. D 54, 4532 (1996) [hep-ph/9604280]
- [130] M. Wittmann, *Light-Cone Sum Rules for the Nucleon Form Factors*, Diplomarbeit, Universität Regensburg, Oktober 2003
- [131] V. M. Braun, A. N. Manashov, J. Rohrwild, *Baryon Operators of Higher Twist in QCD and Nucleon Distribution Amplitudes*, Nucl. Phys. B 807, 89 (2009) [arXiv:0806.2531 (hep-ph)]
- [132] K. Passek-Kumericki, G. Peters, *Nucleon Form Factors to Next-to-Leading Order with Light-Cone Sum Rules*, Phys. Rev. D 78, 033009 (2008) [arXiv:0805.1758 (hep-ph)]
- [133] V. M. Braun, T. Lautenschlager, A. N. Manashov, B. Pirnay, *Higher twist parton distributions from light-cone wave functions*, Phys. Rev. D 83, 094023 (2011) [arXiv:1103.1269 (hep-ph)]
- [134] D. J. Broadhurst, S. C. Generalis, *The Heavy Quark Expansion And QCD Sum Rules For Light Quarks*, Phys. Lett. B 139, 85 (1984); S. C. Generalis, *QCD sum rules 1: Perturbative results for current correlators*, J. Phys. G 16, 785 (1990)
- [135] L. J. Reinders, H. L. Rubinstein, S. Yazaki, *Hadron Properties from QCD Sum Rules*, Phys. Rept. 127, 1 (1985)
- [136] T. Kleinschmidt, *B-meson properties from modified sum rule analyses*, (2004) [hep-ph/0409039]
- [137] M. Beneke, *Renormalons*, Phys. Rept. 317, 1-142 (1999) [hep-ph/9807443]
- [138] P. Ball, *Theoretical update of pseudoscalar meson distribution amplitudes of higher twist: The nonsinglet case*, JHEP 9901, 010 (1999) [hep-ph/9812375]

Danksagung

*„Anfangs wollt ich fast verzagen
Und ich glaubt, ich trüg es nie;
Und ich hab es doch getragen,
Aber fragt mich nur nicht: wie?“
- Heinrich Heine*

Zu allererst bedanke ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Thomas Mannel für die Möglichkeit, bei ihm zu promovieren, und bei Herrn Prof. Dr. Alexander Khodjamirian für lange, gute Zusammenarbeit und die Übernahme der Position des Zweitgutachters. Beide waren stets bereit, mich auf jegliche Weise zu unterstützen, wann immer es nötig war. Sie haben einen sehr guten Rahmen für meine Arbeit geschaffen, die mir damit trotz aller Mühen großen Spaß gemacht hat, und ich kann mich sehr glücklich über solche Betreuer schätzen.

Ein weiterer, großer Dank geht an Dr. Nils Offen, mit dem ich sehr gerne an einem der Projekte arbeitete, und der auch sonst immer gute Ratschläge zur Hand hatte. Darüber hinaus hatte er sich auch bereit erklärt, diese Arbeit Korrektur zu lesen, und ich konnte auf einiger seiner Graphiken zurückgreifen. Auch mit Dr. Yu-Ming Wang habe ich auf angenehme und produktive Weise an dem anderen Projekt dieser Dissertation arbeiten können. Dr. Tobias Huber war ebenfalls so freundlich, einen Teil der Arbeit Korrektur zu lesen, und war auch sonst stets ein kompetenter Ansprechpartner für Fragen jeglicher Art. Prof. Dr. Thorsten Feldmann danke ich für die Hilfe bei meinen Bewerbungen und einige gute Ratschläge, und Prof. Dr. Claus Gruben für viele hilfreiche Diskussionen und Erklärungen.

Alle anderen Mitglieder der Arbeitsgruppe sind hier selbstverständlich auch keinesfalls zu vergessen und haben für eine sehr angenehme Atmosphäre gesorgt, die ein nicht unwesentlicher Bestandteil erfolgreicher Arbeit ist. Besonders zu erwähnen sind dabei noch Prof. Dr. Siegmund Brandt, der mir hier und da bei einigen Fragen zur Statistik helfen konnte, sowie die Computer-Administratoren Hans-Werner Boschmann, Sascha Turczyk und Robert Feger, die mir oft (nicht nur bei Computerproblemen) helfen konnten. Sven Faller konnte mir bei einigem Organisatorischen helfen und hat mich auch von einer Lehrveranstaltung entlastet, weswegen ich mehr Zeit für die Arbeit haben konnte.

Ein ganz besonderer Dank geht an meine Freunde - allen voran Stephan Utsch, Christian Berner, Daniel Belgardt, Theresa Schnober und Tim Dally - , die trotz meiner Unarten immer für mich da waren, und ohne die ich die manchmal sehr schlechten Zeiten niemals überstanden und einmal diese Arbeit geschrieben hätte. Auch Frank Mettner, Thomas Meyer, Patrick Jüngst, Rebecca Klein und viele andere, die hier leider nicht alle aufgezählt werden können, sollen natürlich keinesfalls vergessen werden.

Schließlich wäre dies alles niemals möglich gewesen ohne die Unterstützung meiner Mutter Ursela und ihrem Mann Wolfgang Oerter, die mir von Anfang an immer ermöglicht haben, diesen Weg zu gehen und denen damit mein größter Dank gilt. Auch alle anderen Mitglieder meiner Familie will ich hier einbeziehen, insbesondere meinen Onkel Uwe Manderbach. Und schließlich hoffe ich sehr, dass meine verstorbenen Großeltern, die ich vor allem in dieser Zeit sehr vermisst habe, heute ebenfalls ein bisschen stolz auf mich wären.