сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р10-86-385

Н.Д.Дикусар

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ АНТИСИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА

1986

ВВЕДЕНИЕ

Задача восстановления формы кривой второго порядка по результатам измерений часто используется на практике при проведении исследований во многих областях науки и техники /обработка экспериментальных данных, приближение функций на отрезке, задачи интерполяции, экстраполяции и др./. Эта задача играет важную роль в системах по распознаванию образов, например, при описании линий и форм на изображениях /1/, при фильтрации и сжатии информации и т.д.

Особое применение она находит в задачах массовой обработки данных в современном физическом эксперименте, где требуется за очень короткое время получать оценки параметров изучаемых событий. Ввиду огромного потока данных, характерного для таких экспериментов, алгоритмы обработки должны иметь достаточно большую скорость вычислений при минимальных затратах памяти и обеспечивать заданную точность обработки.

Классический метод подбора коэффициентов для кривой второго порядка состоит в нахождении кривой, которая минимизирует сумму квадратов ошибок - это широко известный метод наименьших квадратов /МНК/.

В настоящей работе вопрос восстановления формы кривой второго порядка, в частности параболы, рассматривается с точки зрения решения этой задачи в рамках проблемы распознавания, где требуются быстрые и эффективные алгоритмы для получения оценок параметров /признаков/. Применение в этом случае МНК, как правило, требует большого времени вычислений.

В работе дается точное решение простейшей обратной задачи - определение параметров квадратичной параболы по ее четырем точкам и приводятся оценки погрешностей в определении параметров кривой с учетом измерительных ошибок. Полученные формулы могут быть использованы в качестве рабочего инструмента при решении широкого круга задач.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ОТСУТСТВИЯ ПОМЕХ

Пусть в плоскости xoy задано множество точек

$$\mathfrak{M} : \{ \mathcal{P}(x, y) \}, \qquad /1/$$

лежащих на кривой второго порядка

$$y = ax^2 + bx + c \qquad /2/$$

с неизвестными коэффициентами a, b и c /a, b, c - любые действительные числа, $a \neq 0$ /.

Будем решать следующую /обратную/ задачу: по заданным четырем точкам из множества /1/ найти коэффициенты кривой /2/.

Решение этой переопределенной задачи, важной для практических приложений, методом наименьших квадратов получается из условия

$$\sum_j (y_j - ax_j^2 - bx_j - c)^2 \to \min, \quad j = 1 \div 4.$$

С использованием векторного представления уравнения /2/ и свойств точек, лежащих на кривой /2/, решение этой задачи и оценки погрешностей получают наглядную геометрическую интерпретацию в виде операций над векторами, построенными по координатам точек /1/, и позволяют более экономно получать результат при вычислениях.

Сначала рассмотрим трехмерное векторное пространство $\mathfrak{U}_3$ и выберем в нем произвольный базис $\{\bar{u}_i\}$, $i = 1,2,3$. В пространстве $\mathfrak{U}_3$ /2/ запишется как уравнение плоскости

$$(\bar{n}, \bar{r}) = -c, \qquad /3/$$

где $\bar{n} = \sum_i n_i \bar{u}_i = (a, b, -1)$ - нормальный вектор плоскости, а $\bar{r} = \sum_i r_i \bar{u}_i = (x^2, x, y)$ - радиус-вектор текущей точки на плоскости.

Выберем в /1/ произвольную четверку несовпадающих точек с координатами x_j, y_j:

$$Q_j(x_j; y_j), \quad Q_j \in \mathfrak{M}, \quad j = 1 \div 4 \qquad /4/$$

и, не нарушая общности рассуждений, упорядочим точки в наборе /4/ по координате x_j:

$$Q_x: \{x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}, \qquad /5/$$

т.е. $x_2, x_3 \in [x_1, x_4]$.

По координатам точек /4/ построим три вектора:

$$\overline{\Delta r_i} = \bar{r} - \bar{r}_i = (x^2 - x_i^2,\ x - x_i,\ y - y_i) = (\Delta x_i^2, \Delta x_i, \Delta y_i) \qquad /6/$$

/здесь и далее ради удобства записи индекс у x_4 опущен, т.е. $x = x_4$/ и запишем в координатной форме условие компланарности этих векторов

$$\begin{vmatrix} \Delta x_1^2 & \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2^2 & \Delta x_2 & \Delta y_2 \\ \Delta x_3^2 & \Delta x_3 & \Delta y_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad /7/$$

Из /7/ непосредственно следует компланарность следующих векторов:

$$\bar{X}^2 = \sum_i \Delta x_i^2 \bar{u}_i, \quad \bar{X} = \sum_i \Delta x_i \bar{u}_i, \quad \bar{Y} = \sum_i \Delta y_i \bar{u}_i \qquad /8/$$

/$\bar{X}^2$ - обозначение вектора, а не его квадрат/.

В этом случае вектор

$$\bar{\Delta} = [\bar{X} \times \bar{X}^2] \qquad /9/$$

будет ортогонален векторам /8/:

$$(\bar{\Delta}, \bar{X}^2) = (\bar{\Delta}, \bar{X}) = (\bar{\Delta}, \bar{Y}) = 0. \qquad /10/$$

Так как векторное произведение является антисимметричным тензором 2-го ранга [2], его компоненты в нашем случае запишутся в виде

$$\Delta_{ij} = \Delta x_i \Delta x_j^2 - \Delta x_j \Delta x_i^2, \quad i, j = 1, 2, 3. \qquad /11/$$

В частности, из /11/ следует, что $\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}$.

При этом выражение

$$\mathfrak{D}(\bar{p}, \bar{q}) = \sum_i \sum_j \Delta_{ij} p_i q_j \qquad /12/$$

является инвариантом относительно линейных преобразований системы координат [3]. Оператором $\mathfrak{D}(\bar{p}, \bar{q})$ здесь обозначена операция свертывания тензора Δ_{ij} с двумя произвольными векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$ из $\mathfrak{U}_3$.

Известно, что операция свертывания тензора Δ_{ij} с одним вектором, например $\bar{p} = \sum_j p_j \bar{u}_j$, дает в результате новый вектор. Действительно, /для $i = 1,2,3$/ имеем

$$\sum_j \Delta_{ij} p_j = \sum_j \Delta x_i \Delta x_j^2 p_j - \sum_j \Delta x_j \Delta x_i^2 p_j = \Delta x_i \sum_j \Delta x_j^2 p_j - \Delta x_i^2 \sum_j \Delta x_j p_j.$$

В векторной форме это выражение примет вид

$$\mathfrak{D}(\bar{p}) = \bar{X} \cdot (\bar{X}^2, \bar{p}) - \bar{X}^2 \cdot (\bar{X}, \bar{p}), \qquad /13/$$

где $\mathfrak{D}(\bar{p})$ - оператор свертывания тензора Δ_{ij} с произвольным вектором $\bar{p}$.

Вектор /13/ обладает замечательным свойством. Он является сопряженным вектору $\bar{p}$. Действительно,

$$(\mathfrak{D}(\bar{p}), \bar{p}) = (\bar{X}, \bar{p}) \cdot (\bar{X}^2, \bar{p}) - (\bar{X}^2, \bar{p}) \cdot (\bar{X}, \bar{p}) = 0. \qquad /14/$$

Векторную запись для $\mathfrak{D}(\bar{p},\bar{q})$ получим, если подставим /11/ в правую часть /12/:

$$\sum_i\sum_j \Delta_{ij}\, p_i\, q_j = \sum_i \Delta x_i\, p_i \sum_j \Delta x_j^2\, q_j - \sum_i \Delta x_i^2\, p_i \sum_j \Delta x_j\, q_j$$

или

$$\mathfrak{D}(\bar{p},\bar{q}) = (\bar{X},\bar{p})\cdot(\bar{X}^2,\bar{q}) - (\bar{X}^2,\bar{p})\cdot(\bar{X},\bar{q})\,. \qquad /15/$$

Из /15/ легко получить следующие свойства для $\mathfrak{D}(\bar{p},\bar{q})$:

$$\mathfrak{D}(\bar{p},\bar{q}) = -\mathfrak{D}(\bar{q},\bar{p}), \qquad \mathfrak{D}(\bar{p},\bar{p}) = 0\,, \qquad /16,17/$$

$$\mathfrak{D}(\alpha\bar{p},\ \beta\bar{q}) = \alpha\beta\,\mathfrak{D}(\bar{p},\bar{q})\,, \qquad /17а/$$

$$\mathfrak{D}(\alpha_1\bar{p}_1 + \alpha_2\bar{p}_2,\ \beta_1\bar{q}_1 + \beta_2\bar{q}_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\alpha_i\beta_j\ \mathfrak{D}(\bar{p}_i\,\bar{q}_j)\,. \qquad /17б/$$

Кроме того, подставляя $\bar{p}_* = \alpha\bar{p} + \beta\bar{q}$ в /13/, получим

$$\mathfrak{D}(\alpha\bar{p} + \beta\bar{q}) = \alpha\cdot\mathfrak{D}(\bar{p}) + \beta\cdot\mathfrak{D}(\bar{q})\,, \qquad /17в/$$

где $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_j$ - действительные числа.

Применим теперь операторы /13/, /15/ и их свойства /16-17в/ к векторам /8/. Для этого подставим точки /4/ в /2/ и с учетом /6/ и /8/ запишем вектор $\bar{Y}$ в виде

$$\bar{Y} = a\cdot\bar{X}^2 + b\cdot\bar{X}\,, \qquad /18/$$

где a. и b-неизвестные параметры из /2/. Найдем a. Для этого умножим /18/ скалярно на вектор $\bar{X}_\perp$, сопряженный вектору $\bar{X}$. Получим

$$(\bar{Y},\bar{X}_\perp) = a\cdot(\bar{X}^2,\bar{X}_\perp)\,, \qquad /19/$$

где согласно /13/.

$$\bar{X}_\perp = \mathfrak{D}(\bar{X}) = \bar{X}\cdot(\bar{X}^2,\bar{X}) - \bar{X}^2\cdot(\bar{X},\bar{X})\,. \qquad /20/$$

Подставим /20/ в /19/. Найдем

$$(\bar{Y},\bar{X}_\perp) = (\bar{Y},\ \mathfrak{D}(\bar{X})) = (\bar{Y},\bar{X})\cdot(\bar{X}^2,\bar{X}) - (\bar{Y},\bar{X}^2)\cdot(\bar{X},\bar{X}) = -\mathfrak{D}(\bar{X},\bar{Y}) \qquad /20а/$$

и

$$(\bar{X}^2,\bar{X}_\perp) = (\bar{X}^2,\ \mathfrak{D}(\bar{X})) = (\bar{X}^2,\ \bar{X})\cdot(\bar{X}^2,\bar{X}) - (\bar{X}^2,\bar{X}^2)\cdot(\bar{X},\ \bar{X}) = \qquad /20б/$$

$$= -\mathfrak{D}(\bar{X},\ \bar{X}^2)\,.$$

Тогда

$$a = \frac{\mathfrak{D}(\bar{X},\bar{Y})}{\mathfrak{D}(\bar{X},\bar{X}^2)}\,. \qquad /21/$$

Точно так же, умножая /18/ скалярно на вектор

$$\bar{X}^2_\perp = \mathfrak{D}(\bar{X}^2) = \bar{X}\cdot(\bar{X}^2,\bar{X}^2) - \bar{X}^2\cdot(\bar{X},\ \bar{X}^2)\,, \qquad /22/$$

получим

$$(\bar{Y},\ \bar{X}^2_\perp) = b(\bar{X},\ \bar{X}^2_\perp)\,, \qquad /23/$$

Найдем

$$(\bar{Y},\bar{X}^2_\perp) = (\bar{Y},\ \mathfrak{D}(\bar{X}^2)) = (\bar{Y},\bar{X})\cdot(\bar{X}^2,\bar{X}^2) - (\bar{Y},\bar{X}^2)\cdot(\bar{X},\bar{X}^2) = \mathfrak{D}(\bar{Y},\bar{X}^2) \qquad /23а/$$

и

$$(\bar{X},\bar{X}^2_\perp) = (\bar{X},\ \mathfrak{D}(\bar{X}^2)) = (\bar{X},\bar{X})\cdot(\bar{X}^2,\bar{X}^2) - (\bar{X},\bar{X}^2)(\bar{X},\bar{X}^2) = \mathfrak{D}(\bar{X},\ \bar{X}^2)\,. \qquad /23б/$$

После подстановки /23а/ и /23б/ в /23/, найдем

$$b = -\frac{\mathfrak{D}(\bar{X}^2,\bar{Y})}{\mathfrak{D}(\bar{X},\bar{X}^2)}\,. \qquad /24/$$

Таким образом, параметры кривой /2/ определяются с помощью действия оператора $\mathfrak{D}$ в виде /15/ на соответствующие пары векторов в заданном порядке: $\bar{X}$, $\bar{Y}$; $\bar{X}^2$, $\bar{Y}$ и $\bar{X}$, $\bar{X}^2$. Формулы /21/, /24/ вместе с уравнением /3/ дают решение нашей задачи.

В практических приложениях найденные выражения для определения a и b позволяют достаточно быстро получать оценки параметров кривой /2/ по ее четырем точкам и тем самым могут служить основой при выработке критериев и решающих правил в задачах распознавания, сжатия информации, приближения функций на заданном отрезке и т.п.

Рассмотрим простой пример. Пусть заданы четыре точки с координатами (1,4), (2,17), (3,40) и (4,73), лежащие на кривой /2/. Найдем параметры a и b с использованием формул /8/, /20а/, /23б/, /21/ и /24/. Результаты вычислений разместим в следующей таблице.

Таблица

x_j y_j	$\bar{X}$	$\bar{X}^2$	$\bar{Y}$	$(\bar{X},\bar{X})$	$(\bar{X},\bar{X}^2)$	$(\bar{X}^2,\bar{X}^2)$	$(\bar{X},\bar{Y})$	$(\bar{X}^2,\bar{Y})$	$\mathfrak{D}(\bar{X},\bar{X}^2)$	$\mathfrak{D}(\bar{X},\bar{Y})$	$\mathfrak{D}(\bar{X}^2,\bar{Y})$	a	b	Всего операций
1 4	3	15	69											
2 17	2	12	56											
3 40	1	7	33											
4 73				14	76	418	352	1938	76	380	−152	5	−2	
Число операций	3	7	3	5	5	5	5	5	3	3	3	1	1	49

Нашли $a = 5$ и $b = -2$. Подставляя теперь вектор $(5, -2, -1)$ и точку $(1, 4)$ в /3/, получим: $-c = (5, -2, -1)\cdot(1, 1, 4)' = 5 - 2 - 4 = -1$ или $c = 1$.

В нижней строке таблицы приведено число операций, которые необходимо выполнять на каждом шаге вычислений. Всего для определения a и b потребовалось 49 операций. Для сравнения отметим, что при определении a и b по четырем точкам в методе наименьших квадратов необходимо выполнить около 85 операций.

Запишем /21/ и /24/ в развернутой форме, подставив вместо $\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{Y})$, $\mathfrak{D}(\bar{X}^2, \bar{Y})$ и $\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}^2)$ их выражения /20а/, /23а/ и /23б/:

$$a = \frac{(\bar{Y}, \bar{X}^2)\cdot(\bar{X}, \bar{X}) - (\bar{Y}, \bar{X})\cdot(\bar{X}^2, \bar{X})}{(\bar{X}^2, \bar{X}^2)\cdot(\bar{X}, \bar{X}) - (\bar{X}^2, \bar{X})\cdot(\bar{X}^2, \bar{X})} \qquad /25/$$

и

$$b = \frac{(\bar{Y}, \bar{X})\cdot(\bar{X}^2, \bar{X}^2) - (\bar{Y}, \bar{X}^2)\cdot(\bar{X}^2, \bar{X})}{(\bar{X}^2, \bar{X}^2)\cdot(\bar{X}, \bar{X}) - (\bar{X}^2, \bar{X})\cdot(\bar{X}^2, \bar{X})}, \qquad /26/$$

где $\bar{X}$, $\bar{X}^2$ и $\bar{Y}$ получены по четырем точкам /4/.

Вид этих формул также сохраняется, если размерность векторов $\bar{X}$, $\bar{X}^2$ и $\bar{Y}$ равна $M > 4$. Это следует из

$$\sum_{m=1}^{M} (\Delta y_m - a\cdot\Delta x_m^2 - b\Delta x_m)^2 \to \min,$$

что может служить еще одним доказательством правильности полученных здесь выражений.

Вообще говоря, при переходе к новым точкам все три вектора будут изменяться. Векторы $\bar{X}$ и $\bar{X}^2$ зависят от нашего выбора, а $\bar{Y}$ - от кривой /2/.

Пусть при переходе к новому набору точек /4/ координаты x'_{ij} /$j = 1 \div 4$/ определяются преобразованием

$$x'_j = \alpha\cdot x_j + \beta, \qquad /27/$$

где α, β - действительные числа, а x_j - координаты набора /4/, по которым были построены векторы $\bar{X}$ и $\bar{X}^2$.

Преобразование /27/ задает деформацию отрезка $[x_1, x]$ /сжатие или растяжение в α раз/ и его смещение по оси ox на величину β. Найдем, как при этом будут меняться формулы /21/ и /24/. Для этого подстановкой /27/ в /8/ найдем векторы $\bar{X}'$ и $\bar{X}^{2\prime}$ через $\bar{X}$ и $\bar{X}^2$:

$$\bar{X}' = \alpha\cdot\bar{X}, \qquad \bar{X}^{2\prime} = \alpha^2\cdot\bar{X}^2 + 2\alpha\cdot\beta\cdot\bar{X} \qquad /28/, /29/$$

/вектор $\bar{X}'$ сохраняет направление вектора $\bar{X}$ /.

Получим, используя свойства /16/-/17б/:

$$\mathfrak{D}(\bar{X}', \bar{Y}') = \mathfrak{D}(\alpha\bar{X}, \bar{Y}') = \alpha\cdot\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{Y}') \qquad /30/$$

$$\mathfrak{D}(\bar{X}^{2\prime}, \bar{Y}') = \mathfrak{D}(\alpha^2\bar{X}^2 + 2\alpha\beta\bar{X}, \bar{Y}') = \alpha^2\mathfrak{D}(\bar{X}^2, \bar{Y}') + 2\alpha\beta\,\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{Y}'), \qquad /31/$$

$$\mathfrak{D}(\bar{X}', \bar{X}^{2\prime}) = \mathfrak{D}(\alpha\bar{X}, \alpha^2\bar{X}^2 + 2\alpha\beta\bar{X}) = \alpha^3\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}^2) + 2\alpha^2\beta\,\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}) = \alpha^3\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}^2),$$

так как $\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}) = 0$. Подставим /30/, /31/ и /32/ в /21/ и /24/. Получим

$$a = \frac{\mathfrak{D}(\bar{X}', \bar{Y}')}{\mathfrak{D}(\bar{X}', \bar{X}^2)} = \frac{\alpha\,\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{Y}')}{\alpha^3\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}^2)} = \frac{\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{Y}')}{\alpha^2\cdot\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}^2)} \qquad /33/$$

и

$$b = -\frac{\mathfrak{D}(\bar{X}^{2\prime}, \bar{Y}')}{\mathfrak{D}(\bar{X}', \bar{X}^{2\prime})} = \frac{-\alpha^2\mathfrak{D}(\bar{X}^2, \bar{Y}') - 2\alpha\beta\,\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{Y}')}{\alpha^3\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}^2)} = \frac{-\mathfrak{D}(\bar{X}^2, \bar{Y}')}{\alpha\cdot\mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}^2)} - 2a\beta, \qquad /34/$$

где a определено по /33/, а штрих указывает на то, что векторы получены на новом наборе /27/. В частности, при $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ получим исходные формулы.

Полученные формулы /33/ и /34/ позволяют вычислять a и b через вектор $\bar{Y}'$, построенный по точкам нового набора, фиксированные /или базисные/ векторы $\bar{X}$ и $\bar{X}^2$ и параметры преобразования α и β. При этом все выражения, зависящие только от базисных векторов, остаются неизменными. Считаются только два скалярных произведения $(\bar{X}, \bar{Y}')$ и $(\bar{X}^2, \bar{Y}')$ и операции над коэффициентами преобразования. В результате общее число операций для каждого набора точек сокращается примерно в 2,1 раза.

Раскрывая оператор $\mathfrak{D}$ в /33/ и /34/, запишем выражения для a и b в виде, удобном для вычислений:

$$a = \frac{1}{\alpha^2|\bar{\Delta}|^2}\left[(\bar{X}, \bar{X})\cdot(\bar{X}^2, \bar{Y}') - (\bar{X}, \bar{X}^2)(\bar{X}, \bar{Y}')\right] \qquad /35/$$

и

$$b = -\frac{1}{\alpha|\bar{\Delta}|^2}\left[(\bar{X}, \bar{X}^2)\cdot(\bar{X}^2\cdot\bar{Y}') - (\bar{X}^2, \bar{X}^2)(\bar{X}, \bar{Y}')\right] - 2a\beta, \qquad /36/$$

где $|\bar{\Delta}|^2 = \mathfrak{D}(\bar{X}, \bar{X}^2)$.

Если выбрать базисные векторы ортогональными /$(\bar{X}, \bar{X}^2) = 0$/, то /35/ и /36/ примут более простой вид:

$$a = \frac{(\bar{X}^2, \bar{Y}')}{\alpha^2|\bar{X}^2|^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{(\bar{X}, \bar{Y}')}{\alpha|\bar{X}|^2} - 2a\cdot\beta. \qquad /37/, /38/$$

Ортогональность векторов $\bar{X}$ и $\bar{X}^2$ можно получить подходящим выбором четырех точек на отрезке $[x_1, x]$. Например, из условия $(\bar{X}, \bar{X}^2) = 0$ следует $\sum_i(\Delta x_i)^2(x + x_i) = 0$ или $x\cdot\sum_i(\Delta x_i)^2 = -\sum_i x_i(\Delta x_i)^2$, где $x = x_4$.

Если мы зададим три точки, например x_1, x_3, x, то координату x_2, обеспечивающую ортогональность $\bar{X}$ и $\bar{X}^2$, можно найти из решения кубического уравнения:

$$\lambda_2^3 - 2\frac{x}{L}\lambda_2^2 + \frac{1}{L}(L - \lambda_3^2 x_3 - \lambda_3^2 x - 2x) = 0, \qquad /39/$$

где $\lambda_i = \Delta x_i/L$, а $L = x - x_1 = \Delta x_1$. Тогда по действительному корню λ_2^* находим точку

$$x_2 = x - \lambda_2^* \cdot L, \qquad /40/$$

которая вместе с известными тремя дает набор для построения ортогональных базисных векторов $\bar{X}$ и $\bar{X}_2$.

Представления a и b в ортогональном базисе являются наиболее удобными для вычислений и при решении практических задач. Из /37/ и /38/ легко видеть, что для вычисления a и b требуется ≈19 операций, что примерно в 5 раз меньше, чем в МНК.

ВЛИЯНИЕ ПОМЕХ НА ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ

Чтобы оценить точность в определении параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ на отрезке $\alpha[x_1, x]$ по формулам /35/ и /36/, подставим в них вместо вектора $\bar{Y}'$ вектор

$$\hat{\bar{Y}}' = \bar{Y}' + \bar{E}, \qquad /41/$$

где $\bar{E}$ - вектор ошибок: $\bar{E} = \sum_i \Delta\mathcal{E}_i \bar{u}_i$, $\Delta\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_j$ - ошибка в измерении j-й точки, $j = 1 \div 4$. Ввиду линейности формул, ошибки в определении параметров $\mathcal{E}_{\hat{a}}$ и $\mathcal{E}_{\hat{b}}$ запишутся в виде

$$\mathcal{E}_{\hat{a}} = \frac{1}{\alpha^2|\Delta|^2}[(\bar{X},\bar{X})\cdot(\bar{X}^2,\bar{E}) - (\bar{X},\bar{X}^2)\cdot(\bar{X},\bar{E})] \qquad /42/$$

и

$$\mathcal{E}_{\hat{b}} = -\frac{1}{\alpha|\Delta|^2}[(\bar{X},\bar{X}^2)\cdot(\bar{X}^2,\bar{E}) - (\bar{X}^2,\bar{X}^2)\cdot(\bar{X},\bar{E})] \qquad /43/$$

при $\beta = 0$.

Из /42/ и /43/ найдем предельные абсолютные погрешности. Сначала запишем:

$$\mathcal{E}_{\hat{a}} = \frac{1}{\alpha^2|\Delta|^2}[(|\bar{X}|^2\cdot|\bar{X}^2|\cdot(\bar{E},\bar{X}_0^2) - |\bar{X}|^2\cdot|\bar{X}^2|\cdot\cos\phi(\bar{E},\bar{X}_0)] = \qquad /44/$$

$$= \frac{|\bar{X}|^2\cdot|\bar{X}^2|}{\alpha^2|\Delta|^2}\cdot[(\bar{E},\bar{X}^2) - (\bar{E},\bar{X}_0)\cdot\cos\phi] = \frac{(\bar{E},\bar{X}^2) - (\bar{E},\bar{X}_0)\cdot\cos\phi}{\alpha^2|\bar{X}^2|\sin^2\phi},$$

где $\bar{X}_0$ и $\bar{X}_0^2$ единичные векторы для $\bar{X}$ и $\bar{X}^2$, а $\phi = \angle(\bar{X},\bar{X}^2)$. Ана-

логично для $\mathcal{E}_{\hat{b}}$:

$$\mathcal{E}_{\hat{b}} = -\frac{(\bar{E},\bar{X}_0^2)\cdot\cos\phi - (\bar{E},\bar{X}_0)}{\alpha\cdot|\bar{X}|\cdot\sin^2\phi}. \qquad /45/ \; /45/$$

Направление $\bar{E}$ случайно, и для оценки предельных абсолютных погрешностей косинус угла между вектором $\bar{E}$ и базисными векторами примем за 1. Тогда

$$|\mathcal{E}_{\hat{a}}| \le \frac{|\bar{E}|\cdot(1+\cos\phi)}{\alpha^2|\bar{X}^2|\sin^2\phi} \qquad /46/$$

и

$$|\mathcal{E}_{\hat{b}}| \le \frac{|\bar{E}|\cdot(1+\cos\phi)}{|\alpha|\cdot|\bar{X}|\cdot\sin^2\phi}. \qquad /47/$$

Из /46/ и /47/ следует, что предельные абсолютные погрешности для параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ зависят как от длин базисных векторов $|\bar{X}|$ и $|\bar{X}^2|$, угла ϕ между этими векторами, так и от α-коэффициента деформаций отрезка $[x_1, x]$.

В частности, для случая ортогонального базиса $\bar{X}$ и $\bar{X}^2 (\phi = \pi/2)$ получим

$$|\mathcal{E}_{\hat{a}}| \le \frac{|\bar{E}|}{\alpha^2\cdot|\bar{X}^2|} \quad \text{и} \quad |\mathcal{E}_{\hat{b}}| \le \frac{|\bar{E}|}{|\alpha|\cdot|\bar{X}|}. \qquad /46а/,/47а/$$

Для оценки предельной относительной погрешности параметры $\hat{a}$ и $\hat{b}$ с учетом /35/ и /36/ запишем в виде

$$\hat{a} = \frac{(\hat{\bar{Y}}',\bar{X}_0^2) - (\hat{\bar{Y}}',\bar{X}_0)\cos\phi}{\alpha^2|\bar{X}^2|\sin^2\phi}, \qquad /48/$$

$$\hat{b} = \frac{(\hat{\bar{Y}}',\bar{X}_0^2)\cos\phi - (\hat{\bar{Y}}',\bar{X}_0)}{\alpha|\bar{X}|\sin^2\phi}. \qquad /49/$$

Относительные погрешности $\delta_{\hat{a}}$ и $\delta_{\hat{b}}$ с учетом /44/, /45/, /48/ и /49/ примут вид:

$$\delta_{\hat{a}} = \frac{\mathcal{E}_{\hat{a}}}{\hat{a}} = \frac{(\bar{E},\bar{X}_0^2) - (\bar{E},\bar{X}_0)\cos\phi}{(\hat{\bar{Y}}'),\bar{X}_0^2) - (\hat{\bar{Y}}',\bar{X}_0)\cos\phi} \qquad /50/$$

и

$$\delta_{\hat{b}} = \frac{\mathcal{E}_{\hat{b}}}{\hat{b}} = \frac{(\bar{E},\bar{X}_0) - (\bar{E},\bar{X}_0^2)\cos\phi}{(\hat{\bar{Y}}',\bar{X}_0) - (\hat{\bar{Y}}',\bar{X}_0^2)\cos\phi}. \qquad /51/$$

Отсюда видим, что относительные погрешности $\delta_{\hat{a}}$ и $\delta_{\hat{b}}$ зависят как от взаимной ориентации базисных векторов /угол ϕ/, так и от ориентации вектора измерений $\hat{\bar{Y}}'$ по отношению к этим векторам. Если принять направление вектора ошибок $\bar{E}$ равным направлению $\hat{\bar{Y}}'$ /максимальная ошибка в длине вектора/, /50/ и /51/ примут вид /при $\phi = \pi/2$/:

$$\delta_{\hat{a}} = \delta_{\hat{b}} = \frac{|\bar{E}|}{|\hat{\bar{Y}}'|}. \qquad /52/$$

В этом случае относительная погрешность в определении параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ с вектором ошибок $\bar{E}$ и вектором измерений $\hat{\bar{Y}}'$ на отрезке $\alpha[x_1, x]$ равна отношению длин этих векторов.

Пример. Сделаем оценку погрешностей для наихудшего случая, когда ошибки измерения во всех точках равны $\mathcal{E}_{max}$, причем знак ошибки в точке x_4 противоположен знаку ошибки в остальных точках. Найдем

$$|\bar{E}| \le \sqrt{\sum_i (\Delta\mathcal{E}_i)^2} \le \sqrt{\sum_i (\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{max})_i^2} \le \sqrt{12}\,|\mathcal{E}_{max}|$$

и

$$|\hat{\bar{Y}}| = \sqrt{\sum_i (\Delta\hat{y}_i)^2} > \sqrt{\max_i \{(\Delta\hat{y}_i)^2\}} > \max|\Delta\hat{y}_i|, \quad \text{где} \quad \Delta\hat{y}_i = \hat{y} - \hat{y}_i.$$

Тогда $\delta_{\hat{a}} = \delta_{\hat{b}} \le \dfrac{\sqrt{12}\,|\mathcal{E}_{max}|}{\max|\Delta\hat{y}_i|}$, где $\max|\Delta\hat{y}_i|$ - наибольший перепад по $\hat{y}_i$-координате на отрезке $\alpha[x_1, x]$. Отсюда, например, следует, что при $|\mathcal{E}_{max}| = 10$ мкм и требуемой точности для $\hat{a}$ и $\hat{b}$ в 1% перепад для координаты $\hat{y}$ на отрезке должен быть порядка

$$\max|\Delta\hat{y}_i| \approx \frac{\sqrt{12}\cdot 10 \text{ мкм}}{0{,}01} = 1000\sqrt{12} \approx 3{,}5 \text{ мм}.$$

Предельные абсолютные оценки при этом равны

$$|\mathcal{E}_{\hat{a}}| \le \frac{\sqrt{12}\,|\mathcal{E}_{max}|}{\alpha^2|\bar{X}^2|}, \qquad |\mathcal{E}_{\hat{b}}| \le \frac{\sqrt{12}\,|\mathcal{E}_{max}|}{|\alpha|\cdot|\bar{X}|}.$$

Отсюда, в частности, следует, что точность определения параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ на отрезке $\alpha[x_1, x]$ зависит от ориентации кривой относительно координатных осей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование векторных операций для определения параметров кривой второго порядка по ее точкам и для анализа ошибок этих параметров при наличии помех позволило получить формулы, более экономные, чем в случае традиционного использования МНК при небольшом числе измерений. Вид этих формул совпадает с тем, который получается, если использовать МНК для определения a и b из линейной векторной формы $\bar{Y} = a\cdot\bar{X}^2 + b\cdot\bar{X}$ при условии

$$\sum_k (\bar{Y}_k - a\bar{X}_k^2 - b\bar{X}_k)^2 \to \min.$$

Более детальный анализ числа операций, необходимых для определения a и b, в этом случае показывает, что формулы /25/ и /26/ или /35/ и /36/ выгоднее применять в том случае, когда $4 \le N \lesssim 20$, где N - число измеренных точек.

Линейный вид выражений и ортогональность базисных векторов дают основу для построения быстрых алгоритмов слежения и прогноза с возможностью самонастройки по результатам информации, накопленной в процессе слежения. Преобразование /27/ и формулы /35/-/38/ могут быть использованы также для построения квадратичных сплайнов в задаче приближения функций на отрезке и т.п.

В заключение выражаю благодарность Н.Н.Говоруну за поддержку данной работы, а также А.А.Корнейчуку за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. "Мир", М., 1976.
2. Фейнман Р., Лейсон Р., Сэнде М. Фейнмановские лекции по физике. "Мир", М., 1966, т.7.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. "Наука", М., 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июня 1986 года.